PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITÀ CON PESI

SISTEMA DI ATTIVITÀ CON PESO (S, s, f, w)

- $S = \{1, \dots, n\}$
- $s : S \longrightarrow \mathbb{R}^+$
- $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^+$

TALI CHE $s_i < f_i$ PER $i \in S$

- $w : S \longrightarrow \mathbb{R}$ (FUNZIONE PESO O VALORE)

IL PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITÀ CON PESI CONSISTE NEL DETERMINARE UN SOTTOINSIEME $A \subseteq S$ DI ATTIVITÀ MUTUAMENTE COMPATIBILI TALE CHE IL PESO DI A DEFINITO DA $w(A) := \sum_{i \in A} w(i)$ SIA MASSIMO

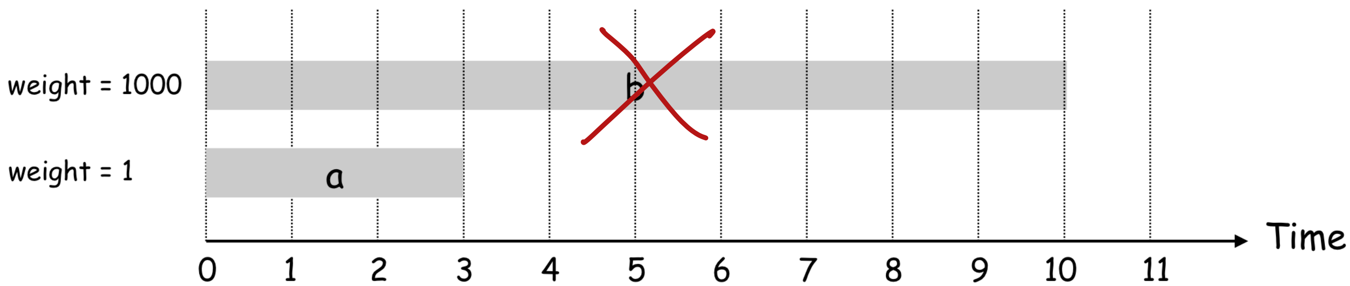
- SE $w(i) = 1$, PER OGNI $i \in S$, SI OTTIENE IL CLASSICO PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITÀ (SENZA PESI)

- SE $w(i) = f_i - s_i$, PER OGNI $i \in S$, SI OTTIENE LA VARIANTE DEL PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITÀ IN CUI SI INTENDE MASSIMIZZARE IL TEMPO COMPLESSIVO DELL'IMPIEGO DELLA RISORSA.

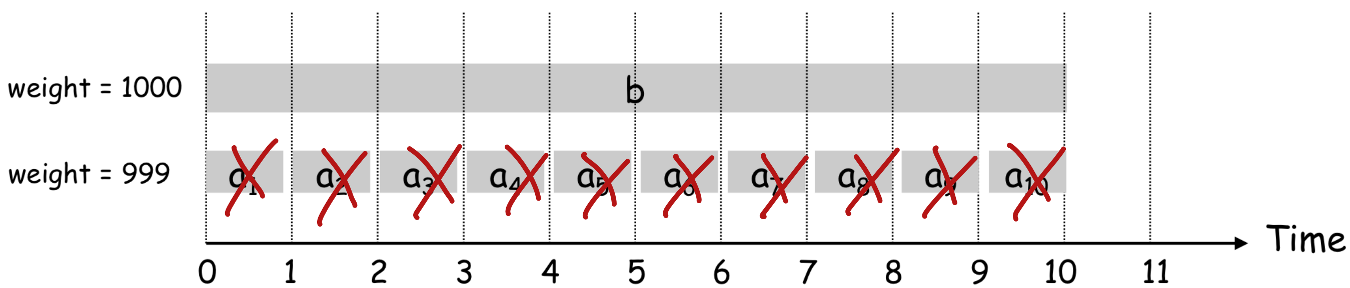
- SUPPORREMO CHE VALGA $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$

PER IL PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITÀ CON PESI L'APPROCCIO GREEDY IN GENERALE NON VALE

ES.



Scelta greedy: attività che termina per prima … **FAIL**!



Scelta greedy: attività di peso massimo … **FAIL**!

DATO UN SISTEMA DI ATTIVITÀ (S, s, f), OVE $S = \{1, ..., n\}$ E $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n$, È UTILE CALCOLARE LA FUNZIONE

$$p : S \to S \cup \{0\}$$

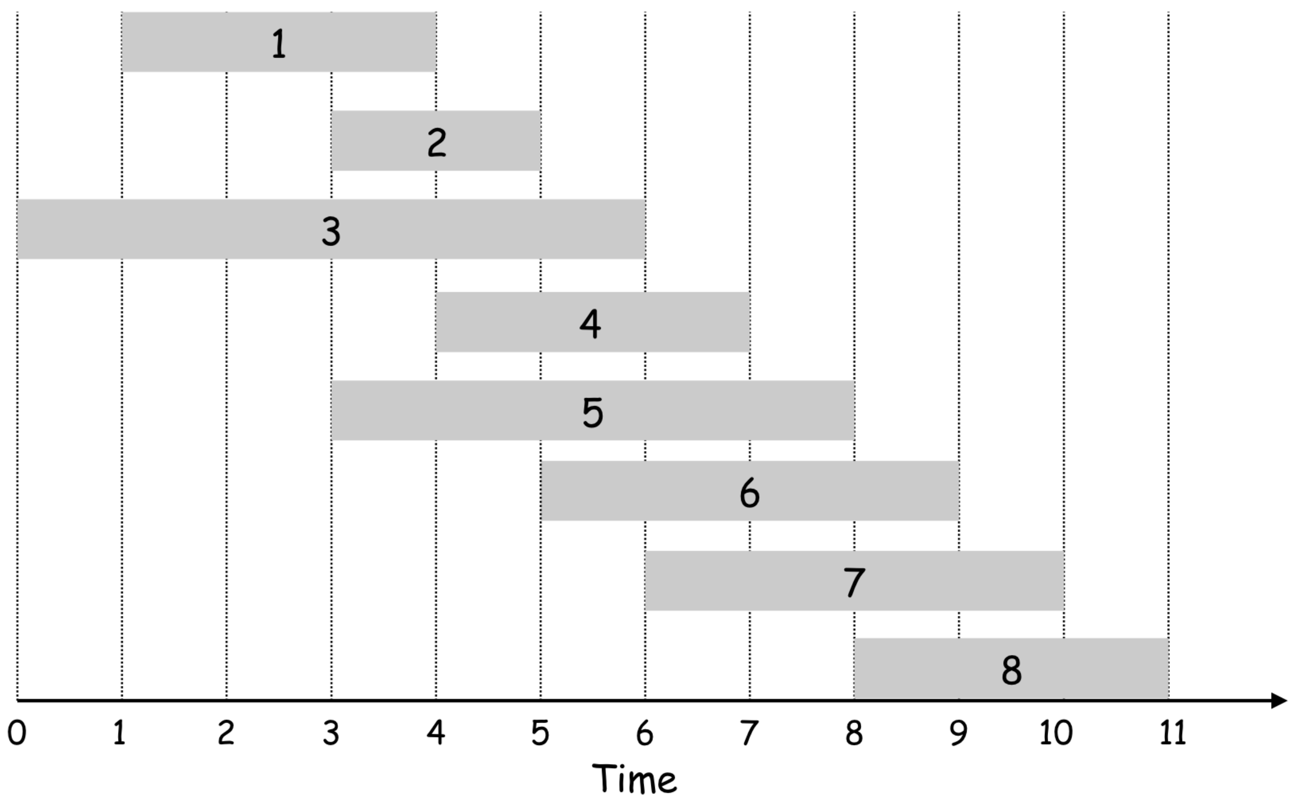
DEFINITA DA

$$p(j) := \begin{cases} 0 & \text{SE NON C'È ALCUNA ATTIVITÀ } a_i \text{ COMPATIBILE CON } a_j \text{ E TALE CHE } f_i \leq s_j \\ \max\{ i \mid i < j \ \& \ a_i \text{ E } a_j \text{ SONO COMPATIBILI}\} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

PER OGNI $j \in S$.

- LA FUNZIONE p PUÒ ESSERE CALCOLATA IN TEMPO $O(n \lg n)$

Ex: $p(8) = 5$, $p(7) = 3$, $p(2) = 0$.



j	p(j)
0	-
1	0
2	0
3	0
4	1
5	0
6	2
7	3
8	5

SOLUZIONE MEDIANTE PROGRAMMAZIONE DINAMICA

$OPT(j) :=$ VALORE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA AL SOTTOPROBLEMA $\{1, 2, \dots, j\}$

SOTTOSTRUTTURA OTTIMA

SIA A UNA SOLUZIONE OTTIMA AL SOTTOPROBLEMA $\{1, \dots, j\}$

CASO $j \in A$: $A \setminus \{j\}$ E' UNA SOLUZIONE OTTIMA AL SOTTOPROBLEMA $\{1, \dots, p(j)\}$

CASO $j \notin A$: A E' UNA SOLUZIONE OTTIMA AL SOTTOPROBLEMA $\{1, \dots, j-1\}$

PERTANTO $OPT(j)$ PUÒ ESSERE DEFINITO RICORSIVAMENTE COME SEGUE:

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & \text{SE } j=0 \\ \max\left(w(j)+OPT(p(j)),\ OPT(j-1)\right) & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SOLUZIONE RICORSIVA

parametri n, p, w

```
COMPUTE-Opt(j)
    if j = 0 then
        return 0
    else
        return max (w(j) + COMPUTE-Opt(p(j)),
                    COMPUTE-Opt(j-1))
```

SOLUZIONE BOTTOM-UP (PROGRAMMAZIONE DINAMICA)

parametri n, p, w

$OPT[0] := 0$

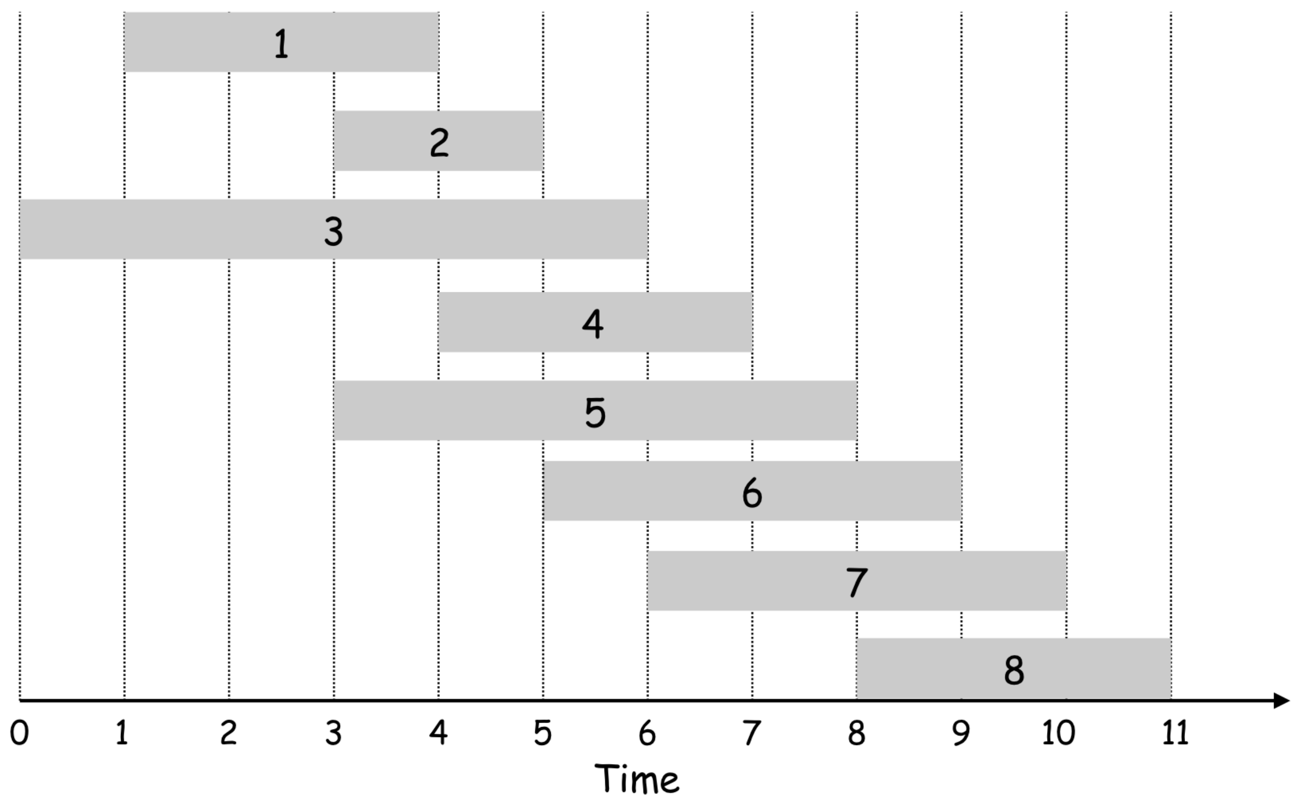
for $j := 1$ **to** n **do**

$\quad OPT[j] := \max\left(w(j) + OPT[p(j)],\ OPT[j-1]\right)$

return $OPT[n]$

COMPLESSITÀ: $\mathcal{O}(n)$

PREPROCESSING: $\mathcal{O}(n \log n)$ ordinamento delle attività + calcolo della funzione p

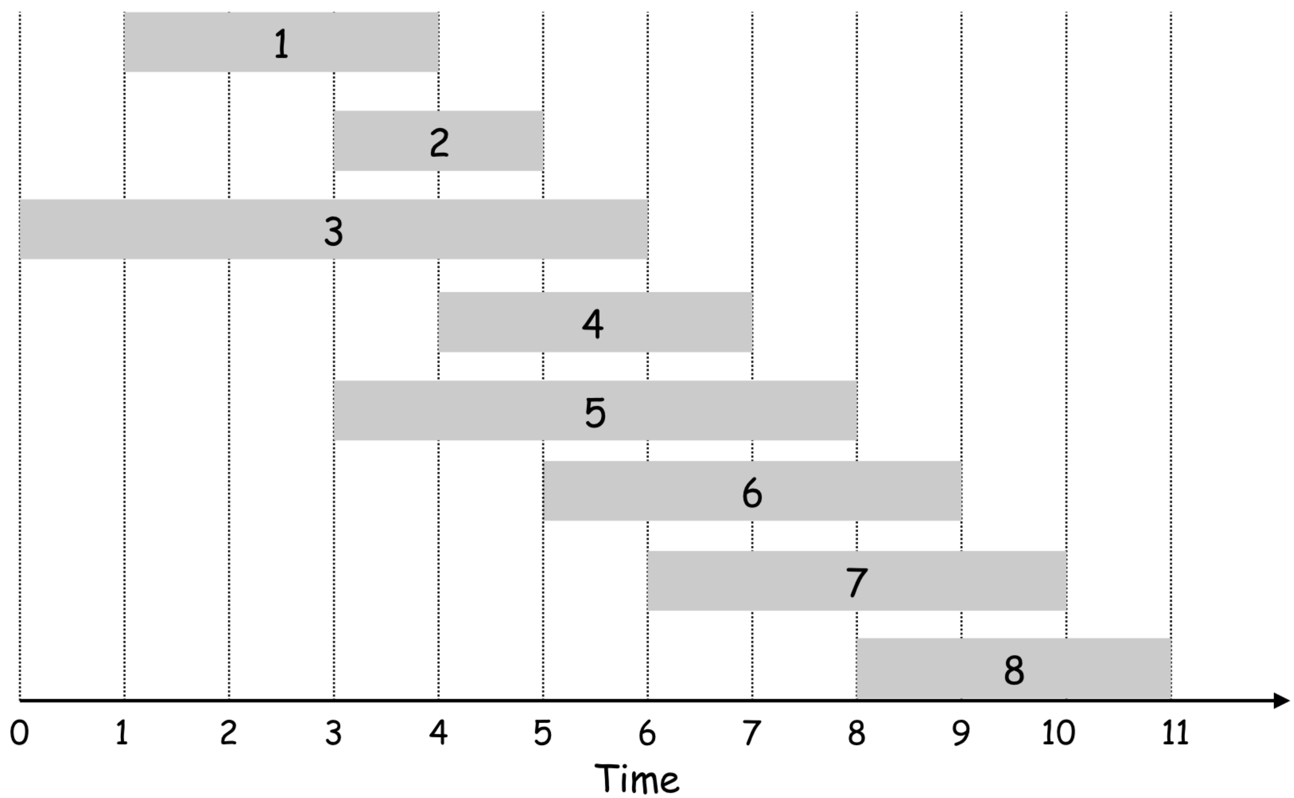


j	w(j)	p(j)	opt[j]
0	–	–	0
1	3	0	3
2	2	0	3
3	6	0	6
4	3	1	6
5	5	0	6
6	4	2	7
7	4	3	10
8	3	5	10

COSTRUZIONE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

```
FIND-SOLUTION (j)
    if   j = 0   then
        return
    else if   w(j) + OPT[p(j)] > OPT[j-1]   then
        print j
        FIND-SOLUTION (p(j))
    else
        FIND-SOLUTION (j-1)
```

COMPLESSITÀ: $O(n)$



j	w(j)	p(j)	opt[j]
0	–	–	0
1	3	0	3
2	2	0	3
3	6	0	6
4	3	1	6
5	5	0	6
6	4	2	7
7	4	3	10
8	3	5	10

$$w(j) + OPT[p(j)] > OPT[j-1]$$

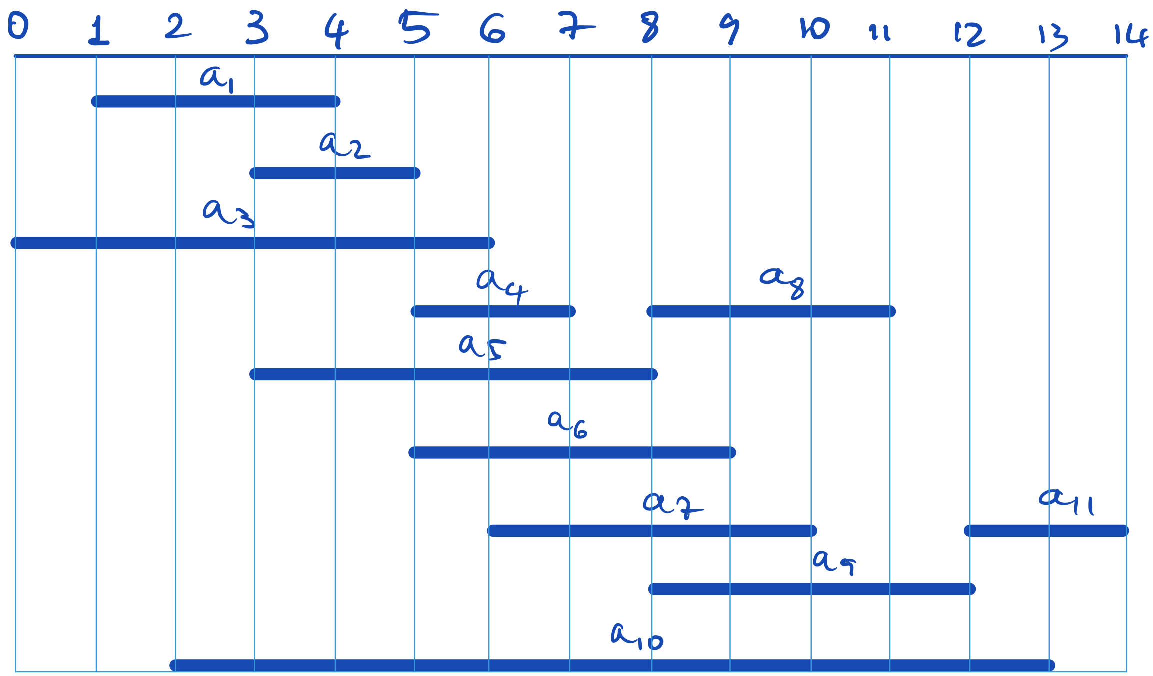
$$\overset{3}{w(8)} + OPT[\overset{6}{p(8)}] \not> \overset{10}{OPT[7]}$$

$$\overset{4}{w(7)} + OPT[\overset{6}{p(7)}] > \overset{7}{OPT[6]} \longrightarrow \text{PRINT } 7$$

$$\overset{6}{w(3)} \overset{+}{+} \overset{0}{OPT[p(3)]} > \overset{3}{OPT[2]} \longrightarrow \text{PRINT } 3$$

$j = 0$

$A = \{3, 7\}$ E' UNA SOLUZIONE OTTIMA



j	w(j)	p(j)	OPT(j)
0	0	0	0
1	3	0	3
2	2	0	3
3	6	0	6
4	2	2	6
5	5	0	6
6	4	2	7
7	4	3	10
8	3	5	10
9	4	5	10
10	11	0	11
11	2	9	12

$$\overset{2}{w(11)} + \overset{10}{OPT(p(11))} > \overset{11}{OPT(10)} \longrightarrow \text{PRINT } 11$$

$$\overset{4}{w(9)} + \overset{6}{OPT(p(9))} \ngtr \overset{10}{OPT(8)}$$

$$\overset{3}{w(8)} + \overset{6}{OPT(p(8))} \ngtr \overset{10}{OPT(7)}$$

$$\overset{4}{w(7)} + \overset{6}{OPT(p(7))} > OPT(6) \longrightarrow \text{PRINT } 7$$

$\overset{6}{w(3)} + OPT(\overset{0}{p(3)}) > \overset{3}{OPT(2)} \longrightarrow$ PRINT 3

$p(3) = 0$ STOP

$A = \{3, 7, 11\}$ E' UNA SOLUZIONE OTTIMA PER IL SISTEMA (S, s, f, w)