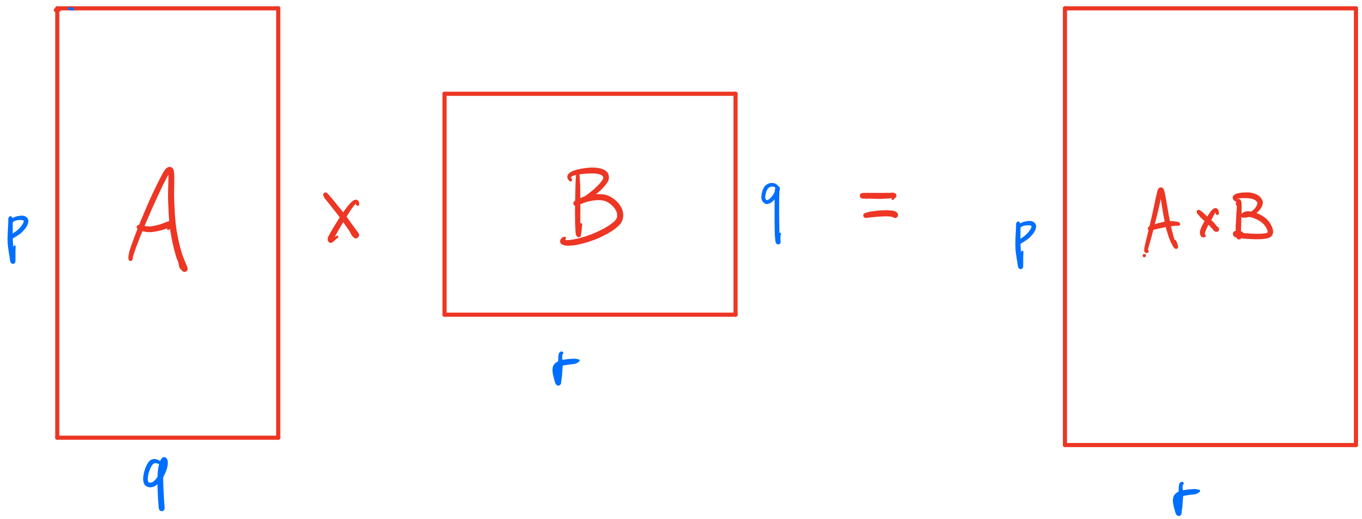
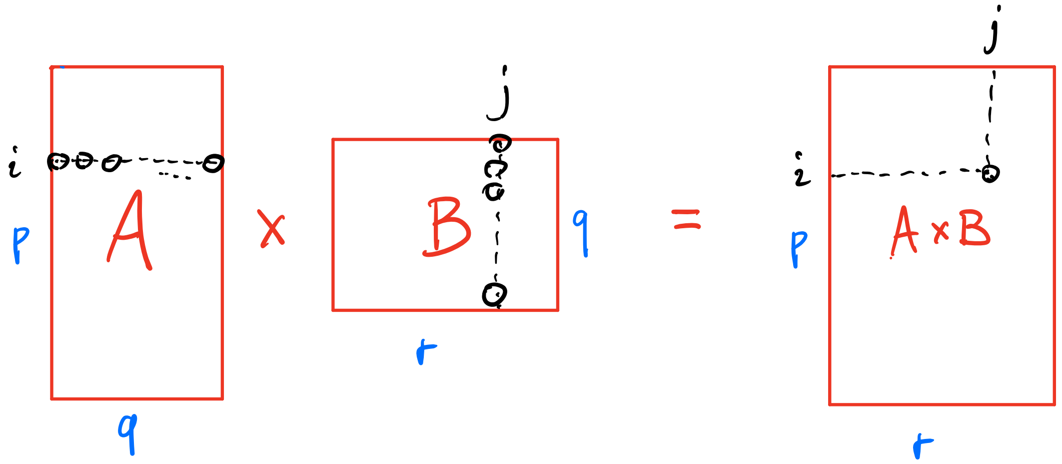
IL PROBLEMA DELLA MOLTIPLICAZIONE DI SEQUENZE DI MATRICI

- A - MATRICE $p \times q$
- B - MATRICE $q \times r$

(E QUINDI A E B SONO COMPATIBILI)





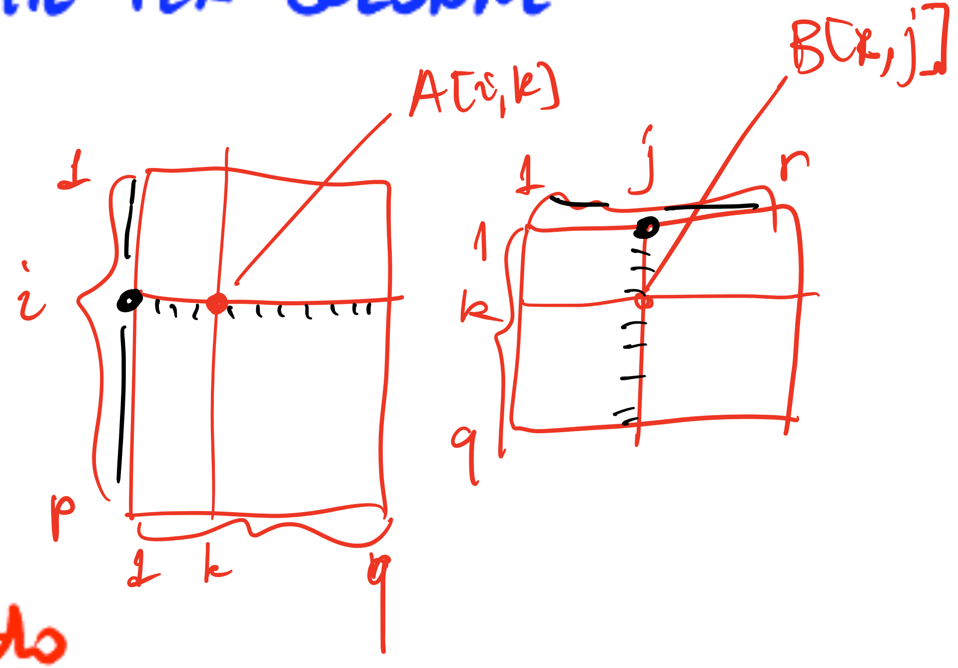
$p \cdot q \cdot r$

$$(A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

(i, j)

PRODOTTO DI MATRICI "RIGHE-PER-COLONNE"

```
MATRIX-MULTIPLY (A,B)
  p := rows[A]
  q := columns[A]
  r := columns[B]
  for i := 1 to p do
     for j := 1 to r do
        C[i,j] := 0
        for k := 1 to q do
           C[i,j] := C[i,j] + A[i,k] · B[k,j]
return C
```



COMPLESSITÀ $O(p \cdot q \cdot r)$

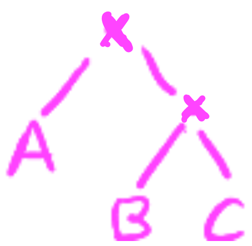
MOLTIPLICAZIONE DI SEQUENZE DI MATRICI

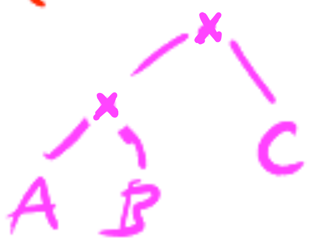
$$\left.\begin{array}{ll} A_1 & p_0 \times p_1 \\ A_2 & p_1 \times p_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & p_{n-1} \times p_n \end{array}\right\}$$

SEQUENZA DI MATRICI COMPATIBILI

$(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$

- A NOI INTERESSA CALCOLARE $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$
- IL PRODOTTO DI MATRICI E' ASSOCIATIVO, CIOE' $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$





- POICHE' IL PRODOTTO $\times$ DI MATRICI E' ASSOCIATIVO, IL PRODOTTO $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ PUO' ESSERE CALCOLATO IN PIÙ MODI DIVERSI

ES. NEL CASO $n = 4$,

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = (A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4)$$
$$= (A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times A_4$$
$$= A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4) = \ldots$$

- BENCHE' IL RISULTATO RIMANGA INVARIATO, IL NUMERO DI MOLTIPLICAZIONI SCALARI DIPENDE DALL'ORDINE DELLE MOLTIPLICAZIONI

ESEMPIO

A_1 : 10×100

A_2 : 100×5

A_3 : 5×50

$(A_1 \times A_2) \times A_3$

$A_1 \times (A_2 \times A_3)$

$\#((A_1 \times A_2) \times A_3) = 10 \cdot 100 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 50 = 5000 + 2500 = 7500$

$\#(A_1 \times (A_2 \times A_3)) = 100 \cdot 5 \cdot 50 + 10 \cdot 100 \cdot 50$

$= 25000 + 50000 = 75.000$

RISULTA QUINDI IMPORTANTE DETERMINARE

LA PARENTESIZZAZIONE OTTIMA, CIOE'

QUELLA CUI CORRISPONDE IL MINOR

NUMERO DI MOLTIPLICAZIONI SCALARI

DEF. PARENTESIZZAZIONI COMPLETE DI UNA SEQUENZA DI MATRICI

SI DICE CHE UN'ESPRESSIONE E E' **COMPLETAMENTE PARENTESIZZATA** SE VALE UNA DELLE SEGUENTI CONDIZIONI:

- E E' UNA SINGOLA MATRICE
- E HA LA FORMA $(E_1 \times E_2)$, DOVE E_1 ED E_2 SONO ESPRESSIONI COMPLETAMENTE PARENTESIZZATE.

ESEMPIO (DIVERSE PARENTESIZZAZIONI)

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$$

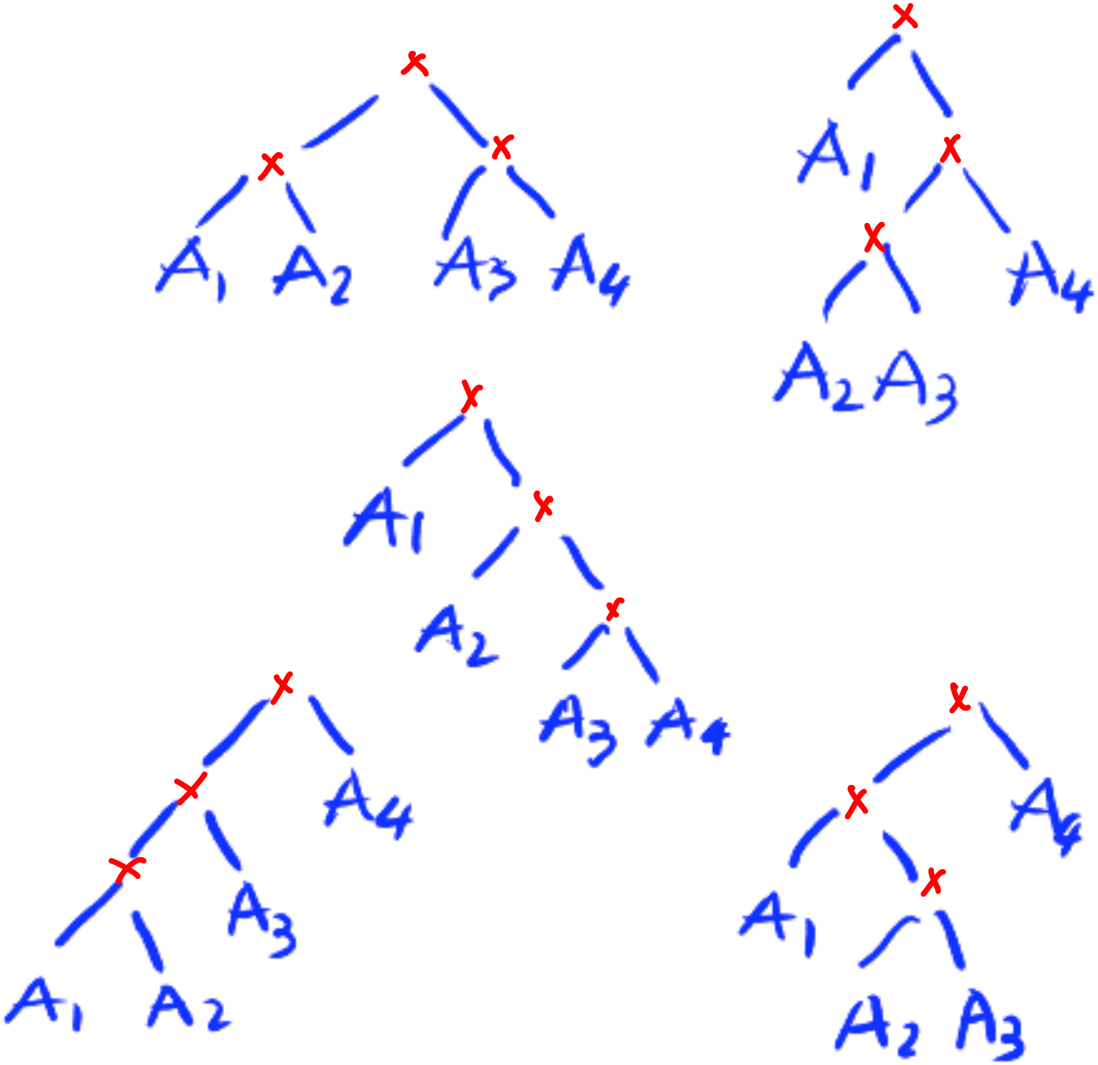
$$((A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4))$$

$$(A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4))$$

$$(A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4)))$$

$$(((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4)$$

$$((A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times A_4)$$



METODO ESAUSTIVO

LA COMPLESSITÀ DEL METODO ESAUSTIVO È DOMINATA DAL NUMERO DI PARENTESIZZAZIONI DIVERSE

$P(n) = \#$ PARENTESIZZAZIONI DIVERSE DI UNA SEQUENZA DI n MATRICI (NUMERI DI CATALAN)

$$\begin{cases} P(1) = 1 \\ P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(i) \cdot P(n-i) \end{cases}$$

$P(1) = 1$

$P(2) = 1$

$P(3) = P(1)P(2) + P(2) \cdot P(1) = 2$

$P(4) = P(1) \cdot P(3) + P(2) \cdot P(2) + P(3) \cdot P(1) = 2 + 1 + 2 = 5$

$P(5) = P(1) \cdot P(4) + P(2) \cdot P(3) + P(3) \cdot P(2) + P(4) \cdot P(1) = 14$

- $n \geq 3$,

- $$P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(i) \cdot P(n-i) =$$

$$= 2P(1) \cdot P(n-1) + \sum_{i=2}^{n-2} P(i) \cdot P(n-i) \geq 2\,P(n-1)$$

$$P(n) \geq 2P(n-1) \geq 2 \cdot 2P(n-2) = 2^2 P(n-2) \geq \dots$$

$$\dots \geq 2^{n-2} P(2) = 2^{n-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(n) = \Omega(2^n)}$$

CALCOLO DI UNA PARENTESIZZAZIONE OTTIMA MEDIANTE PROGRAMMAZIONE DINAMICA

PASSO 1

CARATTERIZZAZIONE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

SIA E UNA PARENTESIZZAZIONE OTTIMA PER LA SEQUENZA DI MATRICI $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ DI DIMENSIONI $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$.

SUPPONIAMO CHE $n \geq \cancel{2}\,3$.

$E = (E_1 \times E_2)$,

CON E_1 PARENTESIZZAZIONE DI $(A_1, \dots, A_k)$

E_2 PARENTESIZZAZIONE DI $(A_{k+1}, \dots, A_n)$

$1 \leq k \leq n-1$

POICHE'

$$\#(E) = \#(E_1) + \#(E_2) + p_0 p_k p_n$$

NE SEGUE CHE

- E_1 PARENTESIZZAZIONE OTTIMA DI $(A_1, \dots, A_k)$
- E_2 PARENTESIZZAZIONE OTTIMA DI $(A_{k+1}, \dots, A_n)$

PERTANTO LA CLASSE DEI SOTTOPROBLEMI DA RISOLVERE E' DATA DA:

$$\{(A_i, \dots, A_j) : 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

$m[i,j]$ = COSTO DI UNA SOLUZIONE OTTIMA DI $(A_i, \dots, A_j)$

(CIOE' NUMERO DI PRODOTTI SCALARI)

PASSO 2

DEFINIZIONE RICORSIVA DEL COSTO DI UNA PARENTESIZZAZIONE OTTIMA

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & i=j \\ \min\limits_{i \leq k < j} \left(m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j \right) & i<j \end{cases}$$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7
1	0						
2	–	0					
3	–	–	0				
4	–	–	–	0			
5	–	–	–	–	0		
6	–	–	–	–	–	0	
7	–	–	–	–	–	–	0

PER CALCOLARE $m[i,j]$ SONO NECESSARI I SEGUENTI VALORI:

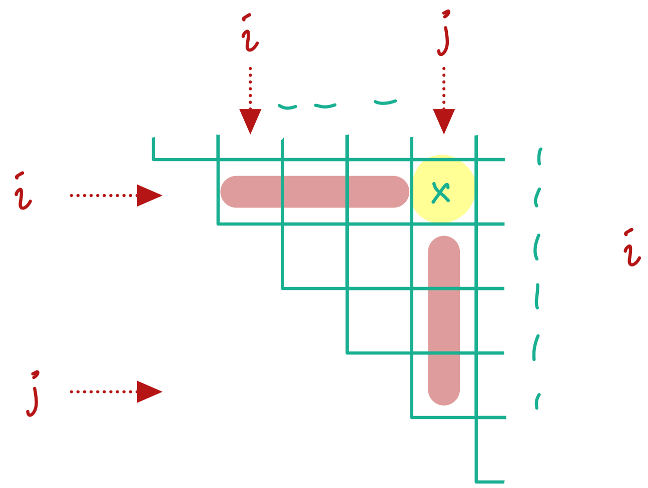
$m[i,i]$, $\quad m[i+1,j]$

$m[i,i+1]$, $\quad m[i+2,j]$

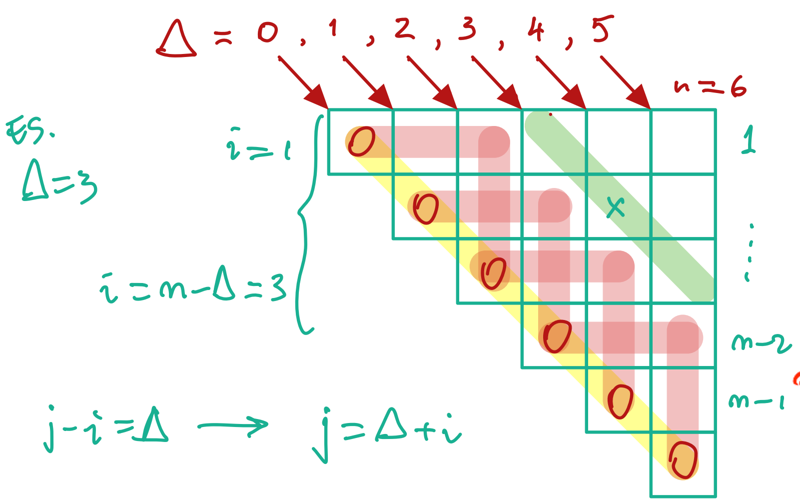
$m[i,i+2]$, $\quad m[i+3,j]$

$\vdots \qquad \vdots$

$m[i,j-1]$, $\quad m[j,j]$



$\Delta = j - i$

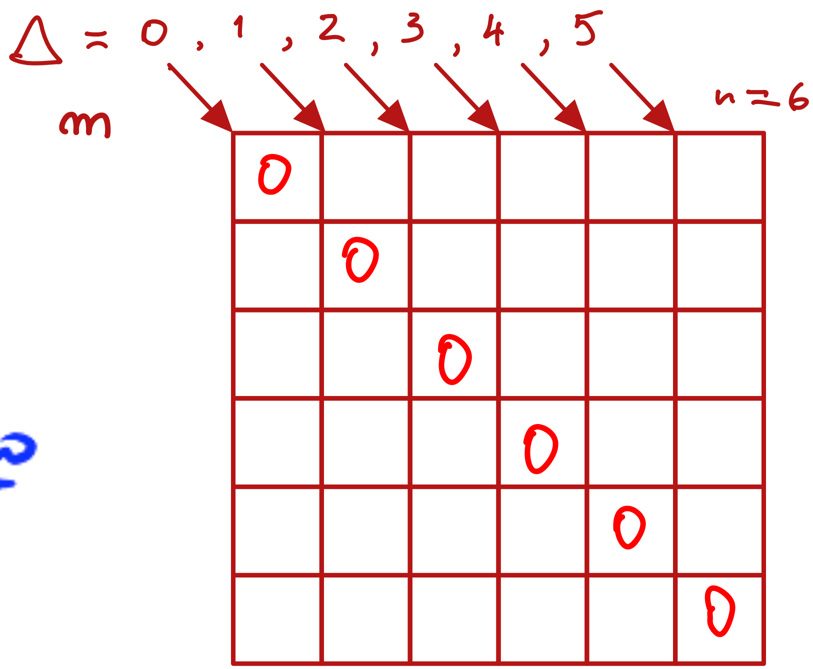


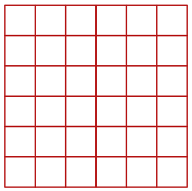
$i = 4, \; j = 5$

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & i=j \\ \min\limits_{i \le k < j} \left(m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j \right) & i<j \end{cases}$$

PASSO 3: CALCOLO DEL VALORE DI UNA SOLUZ. OTTIMA

```
MATRIX_CHAIN_ORDER(p)
for i := 1 to n do
    m[i,i] := 0
for Δ := 1 to n-1 do
    for i := 1 to n-Δ do
        j := Δ+i
        m[i,j] := +∞
        for k := i to j-1 do
            q := m[i,k] + m[k+1,j] + P_{i-1} P_k P_j
            if q < m[i,j] then
                m[i,j] := q
                s[i,j] := k
return m, s
```





PASSO 4: COSTRUZIONE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

```
PARENTHESIZE (s, i, j)
  if i = j then
     write "A_i"
  else
     B := PARENTHESIZE (s, i, s[i,j])
     C := PARENTHESIZE (s, s[i,j]+1, j)
     write "(" + B + "x" + C + ")"
```

PASSO 4: CALCOLO OTTIMALE DEL PRODOTTO

```
MATRIX_CHAIN_MULTIPLY(A, s, i, j)
  if i = j then
      return A_i
  else
      X := MATRIX_CHAIN_MULTIPLY(A, s, i, s[i,j])
      Y := MATRIX_CHAIN_MULTIPLY(A, s, s[i,j]+1, j)
      return MATRIX_MULTIPLY(X, Y)
```

MATRIX_CHAIN_MULTIPLY(A, s, 1, n) CALCOLA IL PRODOTTO $A_1 \times \ldots \times A_n$ CON IL MINOR NUMERO DI PRODOTTI SCALARI

$A_1 \times \ldots \times A_6$

ESEMPIO

$A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$

$p = (\underset{p_0}{30}, \underset{p_1}{35}, \underset{p_2}{15}, \underset{p_3}{5}, \underset{p_4}{10}, \underset{p_5}{20}, \underset{p_6}{25})$

s[1,6]

$(A_1 \times A_2 \times A_3) \times (A_4 \times A_5 \times A_6)$

$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6)$

s[1,3] s[4,6]

	1	2	3	4	5	6
1	0	15750 $\boxed{1}$	7875 $\boxed{1}$	9375 3	11875 3	15125 3
2	-	0	2625 $\boxed{2}$	4375 3	7125 3	10500 3
3	-	-	0	750 $\boxed{3}$	2500 3	5375 3
4	-	-	-	0	1000 $\boxed{4}$	3500 5
5	-	-	-	-	0	5000 5
6	-	-	-	-	-	0

$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6)$

$(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) \cdot ((A_4 \cdot A_5) \cdot A_6)$

	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	–	0				
3		–	0			
4			–	0		
5				–	0	
6					–	0

for $i := 1$ **to** n **do**

$m[i,i] := 0$

$$((A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6))$$

$\vec{p} = (30, 35, 15, 5, 10, 20, 25)$

	1	2	3	4	5	6
1	0	15750 [1]	7875 [1]	9375 [3]	11875 [3]	15125 [3]
2	–	0	2625 [2]	4375 [3]	7125 [3]	10500 [3]
3	–	–	0	750 [3]	2500 [3]	5375 [3]
4	–	–	–	0	1000 [4]	3500 [5]
5	–	–	–	–	0	5000 [5]
6	–	–	–	–	–	0

$\Delta = 1$

$m[1,2] = m[1,1] + m[2,2] + 30 \cdot 35 \cdot 5 = 15750$

$m[2,3] = m[2,2] + m[3,3] + 35 \cdot 15 \cdot 5 = 2625$

$m[3,4] = m[3,3] + m[4,4] + 15 \cdot 5 \cdot 10 = 750$

$m[4,5] = m[4,4] + m[5,5] + 5 \cdot 10 \cdot 20 = 1000$

$m[5,6] = m[5,5] + m[6,6] + 10 \cdot 20 \cdot 25 = 5000$

$\Delta = 2$

$$m[1,3] = \min\big(m[1,1] + m[2,3] + p_0 \cdot p_1 \cdot p_3,$$
$$m[1,2] + m[3,3] + p_0 \cdot p_2 \cdot p_3\big)$$
$$= \min(2625 + 30 \cdot 35 \cdot 5,\ 15750 + 30 \cdot 15 \cdot 5)$$
$$= \min(7875,\ 18000) = 7875$$

$$m[2,4] = \min\big(m[2,2] + m[3,4] + p_1 \cdot p_2 \cdot p_4,$$
$$m[2,3] + m[4,4] + p_1 \cdot p_3 \cdot p_4\big)$$
$$= \min(750 + 35 \cdot 15 \cdot 10,\ 2625 + 35 \cdot 5 \cdot 10)$$
$$= \min(6000,\ 4375) = 4375$$

$$m[3,5] = \min\big(m[3,3] + m[4,5] + p_2 \cdot p_3 \cdot p_5,$$
$$m[3,4] + m[5,5] + p_2 \cdot p_4 \cdot p_5\big)$$
$$= \min(1000 + 15 \cdot 5 \cdot 20,\ 750 + 15 \cdot 10 \cdot 20)$$
$$= \min(2500,\ 3750) = 2500$$

$$m[4,6] = \min\big(m[4,4] + m[5,6] + P_3 \cdot P_4 \cdot P_6,$$
$$m[4,5] + m[6,6] + P_3 \cdot P_5 \cdot P_6 \big)$$

$$= \min(5000 + 5 \cdot 10 \cdot 25,\ 1000 + 5 \cdot 20 \cdot 25)$$

$$= \min(6250, 3500) = 3500$$

$\boxed{\Delta = 3}$ $$m[1,4] = \min\big(m[1,1] + m[2,4] + P_0 \cdot P_1 \cdot P_4,$$
$$m[1,2] + m[3,4] + P_0 \cdot P_2 \cdot P_4,$$
$$m[1,3] + m[4,4] + P_0 \cdot P_3 \cdot P_4 \big)$$

$$= \min(4375 + 30 \cdot 35 \cdot 10,$$
$$15750 + 750 + 30 \cdot 15 \cdot 10,$$
$$7875 + 30 \cdot 5 \cdot 10)$$

$$= \min(14875, 21000, 9375) = 9375$$

$$m[2,5] = \min \begin{cases} m[2,2] + m[3,5] + P_1 \cdot P_2 \cdot P_5, \\ m[2,3] + m[4,5] + P_1 \cdot P_3 \cdot P_5, \\ m[2,4] + m[5,5] + P_1 \cdot P_4 \cdot P_5 \end{cases}$$

$$= \min \begin{cases} 2500 + 35 \cdot 15 \cdot 20, \\ 2625 + 1000 + 35 \cdot 5 \cdot 20, \\ 4375 + 35 \cdot 10 \cdot 20 \end{cases}$$

$$= \min(13000, 7125, 11375) = 7125$$

$$m[3,6] = \min \begin{cases} m[3,3] + m[4,6] + P_2 \cdot P_3 \cdot P_6, \\ m[3,4] + m[5,6] + P_2 \cdot P_4 \cdot P_6, \\ m[3,5] + m[6,6] + P_2 \cdot P_5 \cdot P_6 \end{cases}$$

$$= \min \begin{cases} 3500 + 15 \cdot 5 \cdot 25, \\ 750 + 5000 + 15 \cdot 10 \cdot 25, \\ 2500 + 15 \cdot 20 \cdot 25 \end{cases}$$

$$= \min(5375, 9500, 10000) = 5375$$

$\Delta = 4$

$$m[1,5] = \min\big(m[1,1] + m[2,5] + p_0 \cdot p_1 \cdot p_5,$$
$$m[1,2] + m[3,5] + p_0 \cdot p_2 \cdot p_5,$$
$$m[1,3] + m[4,5] + p_0 \cdot p_3 \cdot p_5,$$
$$m[1,4] + m[5,5] + p_0 \cdot p_4 \cdot p_5 \big)$$

$$= \min\big(7125 + 30 \cdot 35 \cdot 20,$$
$$15750 + 2500 + 30 \cdot 15 \cdot 20,$$
$$7875 + 1000 + 30 \cdot 5 \cdot 20,$$
$$9375 + 30 \cdot 10 \cdot 20 \big)$$

$$= \min(28125, 27250, 11875, 15375)$$

$$= 11875$$

$$m[2,6] = \min \big(m[2,2] + m[3,6] + p_1 \cdot p_2 \cdot p_6,$$
$$m[2,3] + m[4,6] + p_1 \cdot p_3 \cdot p_6,$$
$$m[2,4] + m[5,6] + p_1 \cdot p_4 \cdot p_6,$$
$$m[2,5] + m[6,6] + p_1 \cdot p_5 \cdot p_6 \big)$$

$$= \min \big(5375 + 35 \cdot 15 \cdot 25,$$
$$2625 + 3500 + 35 \cdot 5 \cdot 25,$$
$$4375 + 5000 + 35 \cdot 10 \cdot 25,$$
$$7125 + 35 \cdot 20 \cdot 25 \big)$$

$$= \min (18500, 10500, 18125, 24625)$$

$$= 10500$$

$\vec{p} = (30, 35, 15, 5, 10, 20, 25)$

$$\Delta = 5$$

$$
\begin{aligned}
m[1,5] = \min\big(& m[1,1] + m[2,6] + p_0 \cdot p_1 \cdot p_6, \\
& m[1,2] + m[3,6] + p_0 \cdot p_2 \cdot p_6, \\
& m[1,3] + m[4,6] + p_0 \cdot p_3 \cdot p_6, \\
& m[1,4] + m[5,6] + p_0 \cdot p_4 \cdot p_6, \\
& m[1,5] + m[6,6] + p_0 \cdot p_5 \cdot p_6 \big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \min\big(& 10500 + 30 \cdot 35 \cdot 25, \\
& 15750 + 5375 + 30 \cdot 15 \cdot 25, \\
& 7875 + 3500 + 30 \cdot 5 \cdot 25, \\
& 9375 + 5000 + 30 \cdot 10 \cdot 25, \\
& 11875 + 30 \cdot 20 \cdot 25 \big)
\end{aligned}
$$

$$= \min(36750, 32375, 15125, 21875, 26875)$$

$$= 15125$$

	1	2	3	4	5	6
1	0	$15750^{\,1}$	$7875^{\,1}$	$9375^{\,3}$	$11875^{\,3}$	$15125^{\,3}$
2	–	0	$2625^{\,2}$	$4375^{\,3}$	$7125^{\,3}$	$10500^{\,3}$
3		–	0	$750^{\,3}$	$2500^{\,3}$	$5375^{\,3}$
4			–	0	$1000^{\,4}$	$3500^{\,5}$
5				–	0	$5000^{\,5}$
6					–	0

$$A_{1..6} = (A_{1..s[1,6]} \times A_{s[1,6]+1..6})$$

$$= (A_{1..3} \times A_{4..6})$$

$$= ((A_{1..s[1,3]} \times A_{s[1,3]+1..3}) \times (A_{4..s[4,6]} \times A_{s[4,6]+1..6}))$$

$$= ((A_{1..1} \times A_{2..3}) \times (A_{4..5} \times A_{6..6}))$$

$$= ((A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6))$$