RICORRENZE

- EQUAZIONI O DISEQUAZIONI CHE DESCRIVONO IL VALORE DI UNA FUNZIONE IN TERMINI DEL SUO VALORE CON INPUT PIÙ PICCOLI

ES. $T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{SE } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{SE } n > 1 \end{cases}$

CON SOLUZIONE $T(n) = \Theta(n \lg n)$

- CONSIDEREREMO I SEGUENTI TRE METODI
  - METODO DI SOSTITUZIONE
  - METODO ITERATIVO O DELL'ALBERO DI RICORSIONE
  - METODO "MASTER" PER RICORRENZE DELLA FORMA

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \quad \text{CON } a \geq 1,\ b > 1$$

METODO DI SOSTITUZIONE

1. INDOVINARE UNA POSSIBILE SOLUZIONE
2. VERIFICARE LA SOLUZIONE PER INDUZIONE

ESEMPIO DETERMINARE UN LIMITE SUPERIORE PER $T(n)$ DOVE:

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad (*)$$

VERIFICHIAMO CHE $T(n) = O(n \lg n)$, CIOE'

$T(n) \le \underline{c\, n \lg n}$, PER QUALCHE $c>0$ E PER n SUFFICIENTEMENTE GRANDE

$c < c' \qquad \le c' n \lg n$

$c \geq \frac{T(2)}{2 \lg 2}, \frac{T(3)}{3 \lg 3}, \ldots, \frac{T(n-1)}{(n-1) \lg (n-1)}$

SIA $c \geq 1$ TALE CHE

$T(m) \le c\, m \lg m$, PER OGNI $m = 2, 3, \ldots, n-1 \qquad (**)$

(DATO CHE PER $m=1$ SI HA $c\, m \lg m = 0$ E SE $T(1) > 0$ NON ESISTE ALCUN $c \geq 1$ TALE CHE $T(1) \le c \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$)

SE $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq 2$, E QUINDI $n \geq 4$, SI HA:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2\,T\left(\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + n && \text{(PER } (*)\text{)} \\
&\leq 2c \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + n && \text{(PER } (**)\text{)} \\
&\leq \cancel{2}\, c \cdot \frac{n}{\cancel{2}} \lg \frac{n}{2} + n \\
&= cn(\lg n - \lg 2) + n \\
&= cn \lg n - cn + n \\
&\leq cn \lg n && \text{(POICHE' } c \geq 1\text{)}
\end{aligned}
$$

E' ALLORA SUFFICIENTE SUPPORRE CHE LA (**)
SIA VERIFICATA PER $n = 2, 3$ (CASI BASE),
CIOE' CHE

$$T(2) \leq 2c \quad \text{E} \quad T(3) \leq 3c \lg 3.$$

PERTANTO, PER OGNI $c \geq \max\left(1, \frac{T(2)}{2}, \frac{T(3)}{3 \lg 3}\right)$

E PER OGNI $n \geq 2$ SI HA

$$T(n) \leq c\, n \lg n$$

$$\longrightarrow \boxed{T(n) = O(n \lg n)}$$

RAFFORZAMENTO DELL'IPOTESI INDUTTIVA

SI DIMOSTRI CHE LA RICORRENZA

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

HA SOLUZIONE $T(n) = O(n)$.

OCCORRE VERIFICARE CHE $T(n) \leq cn$, PER QUALCHE $c > 0$, $\forall n \geq n_0$

SUPPONIAMO INDUTTIVAMENTE CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c\lfloor n/2 \rfloor$, $T(\lceil n/2 \rceil) \leq c\lceil n/2 \rceil$.

ALLORA : $T(n) \leq c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil + 1 = cn + 1 \not\Rightarrow T(n) \leq cn$!

RAFFORZIAMO L'IPOTESI INDUTTIVA: $T(n) \leq cn - b$, CON $b \geq 0$.

SI HA:

$$T(n) \leq (c\lfloor n/2 \rfloor - b) + (c\lceil n/2 \rceil - b) + 1 = cn - 2b + 1 \boxed{\leq cn - b}$$

PER $b \geq 1$, $c \geq T(1) + b$, $n \geq 1$.

$$T(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) \leq c\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor - b$$

$T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) \le c\lceil \frac{n}{2} \rceil - b$

ATTENZIONE AGLI ERRORI!

DATA $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$, CERCHIAMO DI DIMOSTRARE CHE $T(n) = O(n)$ (FALSO!)

$T(n) \le cn$

SUPPONIAMO PER INDUZIONE CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \le c \lfloor n/2 \rfloor$.

ALLORA

$$T(n) \le 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \le cn + n = (c+1)n = O(n)$$

$\Uparrow$

ERRORE!

OCCORRE INFATTI DIMOSTRARE $T(n) \le cn$, CON LA MEDESIMA COSTANTE c.

CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$T(n) = 2\,T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \lg n$$

$$n^{1/2} = \left(2^{\lg n}\right)^{1/2} = 2^{\frac{\lg n}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad T(n) = 2\,T(\lfloor n^{\frac{1}{2}} \rfloor) + \lg n$$

$$\Rightarrow \quad T(2^{\lg n}) = 2\,T(\lfloor 2^{\lg n / 2} \rfloor) + \lg n$$

PONIAMO $S(m) \overset{def}{:=} T(2^m)$.

$$\Rightarrow \quad S(\lg n) = 2\,S\left(\left\lfloor \frac{\lg n}{2} \right\rfloor\right) + \lg n$$

SI CONSIDERI LA RICORRENZA: $S(m) = 2\,S\left(\frac{m}{2}\right) + m$

ESSA HA SOLUZIONE $S(m) = \Theta(m \lg m)$, DA CUI

$$S(\lg n) = \Theta(\lg n \lg \lg n).$$

PERTANTO $T(n) = T(2^{\lg n}) = S(\lg n) = \Theta(\lg n \lg \lg n)$,

ESERCIZI

- RISOLVERE LE SEGUENTI EQUAZIONI DI RICORRENZA:

- $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(1)$
- $T(n) = 2 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)$
- $T(n) = 4 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)$

$$\boxed{T(n) = T(\sqrt{n}) + O(1)}$$

$$T(n) = T(n^{1/2}) + O(1)$$

$$T(2^{\lg n}) = T(2^{\lg n/2}) + O(1)$$

PONIAMO $S(m) := T(2^m) \longrightarrow T(2^{\lg n}) = S(\lg n)$

$$T\left(2^{\frac{\lg n}{2}}\right) = S\left(\frac{\lg n}{2}\right)$$

$$S(\lg n) = S\left(\frac{\lg n}{2}\right) + O(1)$$

RISOLVIAMO

$$S(m) = S\left(\frac{m}{2}\right) + O(1)$$

$$S(m) = S\left(\frac{m}{2}\right) + c$$

$$S(m) = c + S\left(\frac{m}{2}\right)$$

$$= c + \left(c + S\left(\frac{m}{4}\right)\right)$$

$$= c + \left(c + \left(c + S\left(\frac{m}{8}\right)\right)\right)$$

$$= 3 \cdot c + S\left(\frac{m}{8}\right) = 3 \cdot c + S\left(\frac{m}{2^3}\right)$$

$$= 3c + \left(c + S\left(\frac{m}{2^3} \cdot \frac{1}{2}\right)\right) = 3c + \left(c + S\left(\frac{m}{2^4}\right)\right)$$

$$= 4c + S\left(\frac{m}{2^4}\right)$$

$$\vdots$$

$$= kc + S\left(\frac{m}{2^k}\right)$$

$$\vdots$$

$$\longrightarrow S(m) = \Theta(\lg m)$$

$$\vdots$$

$$= \lfloor \lg n \rfloor \cdot c + S\left(\frac{m}{2^{\lfloor \lg m \rfloor}}\right)$$

$$= \lfloor \lg m \rfloor \cdot c + S(1) = \Theta(\lg m)$$

$$\longrightarrow$$

$$T(n) = T(2^{\lg n}) = S(\lg n) = \Theta(\lg \lg n)$$

$$\boxed{T(n) = 2\cdot T(\sqrt{n}) + O(1)}$$

$$T(n) = 2\cdot T(n^{1/2}) + O(1)$$

$$T(2^{\log n}) = 2\cdot T((2^{\log n})^{1/2}) + O(1)$$

$$= 2\cdot T(2^{\frac{\log n}{2}}) + O(1)$$

$$S(m) := T(2^m) \longrightarrow T(2^{\log n}) = S(\log n),\ T(2^{\frac{\log n}{2}}) = S\left(\frac{\log n}{2}\right)$$

$$\longrightarrow S(\log n) = 2\cdot S\left(\frac{\log n}{2}\right) + O(1)$$

RISOLVIAMO

$$S(m) = 2S\left(\frac{m}{2}\right) + O(1)$$

$$S(m) = 2S\left(\frac{m}{2}\right) + c$$

$$S(m) = 2S\left(\frac{m}{2}\right) + c$$

$$= 2\left(2S\left(\frac{m}{4}\right) + c\right) + c$$

$$= 2\left(2\left(2S\left(\frac{m}{8}\right) + c\right) + c\right) + c$$

$$= 2^3 \cdot S\left(\frac{m}{2^3}\right) + 7c$$

$$= 2^3 \cdot S\left(\frac{m}{2^3}\right) + (2^3 - 1)c$$

$$\vdots$$

$$= 2^k \cdot S\left(\frac{m}{2^k}\right) + (2^k - 1)c$$

$$\vdots$$

$$= 2^{\lg m} \cdot \Theta(1) + (2^{\lg m} - 1) \cdot c$$

$$= \underline{m} \cdot \Theta(1) + (\underline{m} - 1) \cdot c$$

$$= \Theta(m)$$

PERTANTO

$$T(n) = T(2^{\lg n}) = S(\lg n) = \Theta(\lg n)$$

- $\boxed{T(n) = 4 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)}$

$$T(2^{\log n}) = 4 \cdot T\left((2^{\log n})^{1/2}\right) + O(1)$$

$$= 4 \cdot T\left(2^{\frac{\log n}{2}}\right) + O(1)$$

SIA $\quad S(m) := T(2^m)$

ALLORA $\quad T(2^{\log n}) = S(\log n) \quad$ E $\quad T\left(2^{\frac{\log n}{2}}\right) = S\left(\frac{\log n}{2}\right)$

E QUINDI SI HA:

$$S(\log n) = 4 \cdot S\left(\frac{\log n}{2}\right) + O(1)$$

RISOLVIAMO

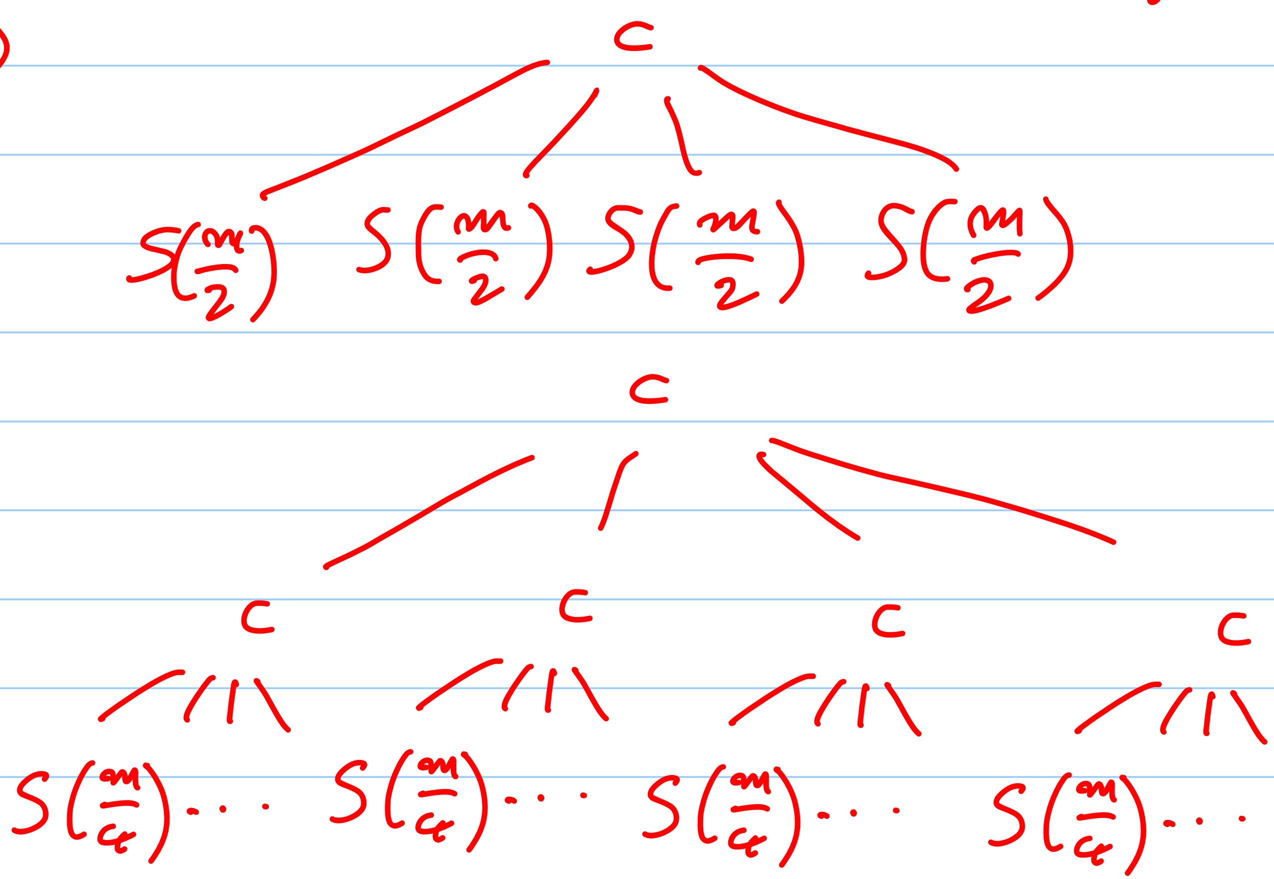
$$S(m) = 4 \cdot S\left(\frac{m}{2}\right) + \Theta(1)$$

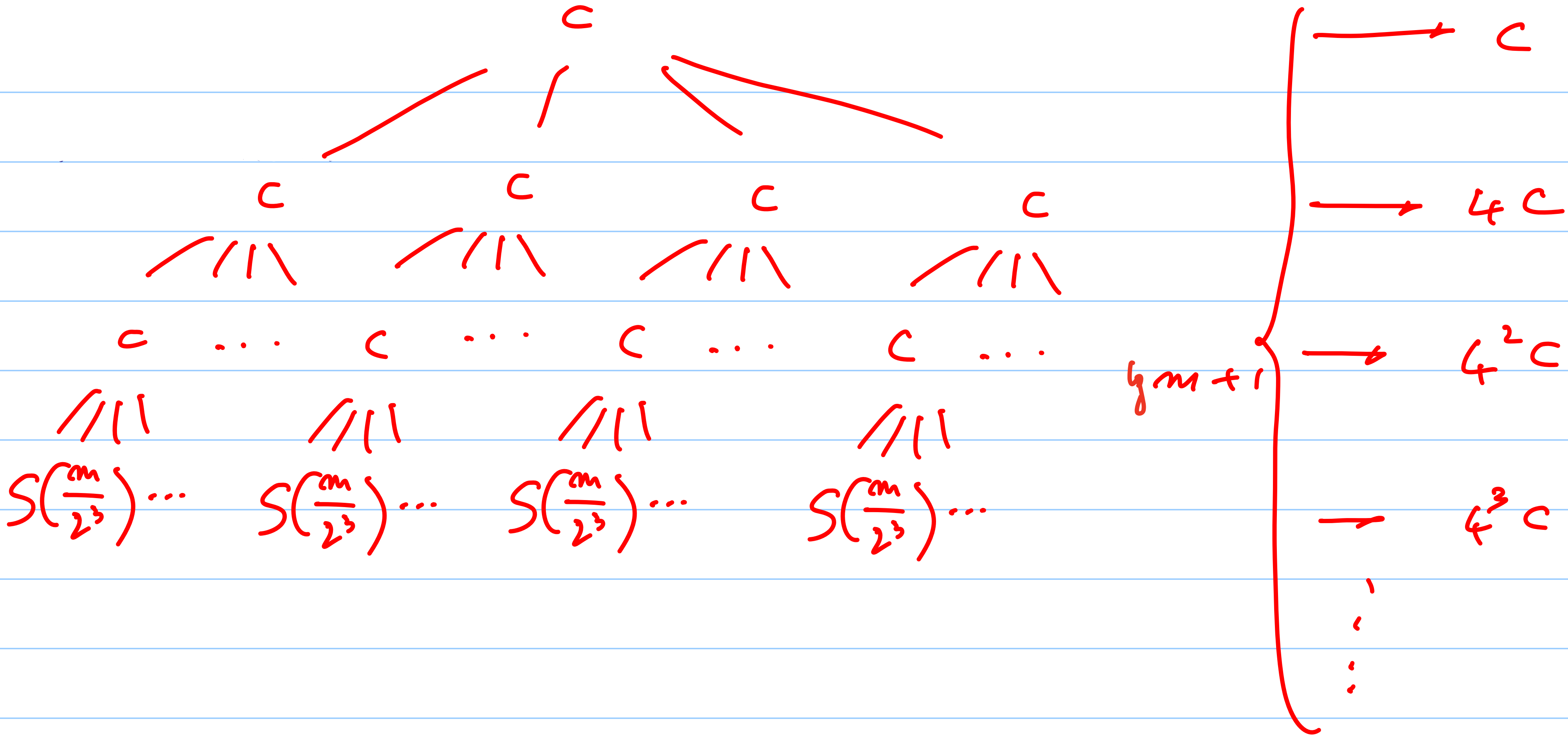
$$S(m) = 4\, S\left(\frac{m}{2}\right) + c$$

$$S(m) = \Theta(m^2)$$

$$T(n) = S(\lg n) = \Theta(\lg^2 n)$$

$S(m)$




c
c c c c
c ... c ... c ... c ...
S(cm/2^3) ... S(cm/2^3) ... S(cm/2^3) ... S(cm/2^3) ...
log m + 1
c
4c
4^2 c
4^3 c

$$c + 4c + 4^2 c + 4^3 c + \dots + 4^{\log m} c$$

$$= c \sum_{i=0}^{\log m} 4^i = c \, \frac{4^{\log m + 1} - 1}{4 - 1} \le \frac{c}{3} 4 \cdot m^2$$

$$= \frac{4}{3} c \, m^2$$

$$= \Theta(m^2)$$

$$4^{\log m + 1} = 4^{\log m} \cdot 4^1 = 4 \cdot 4^{\log m} = 4 \cdot (2^2)^{\log m} = 4 \cdot 2^{2 \log m} = 4 \cdot (2^{\log m})^2 = 4 \cdot m^2$$

PERTANTO $S(m) = \Theta(m^2)$ E DUNQUE

$$T(n) = T(2^{\log n}) = S(\log n) = \Theta(\log^2 n)$$

METODO ITERATIVO

- CONSISTE NELL'ESPANDERE LA RICORRENZA SINO AD ESPRIMERE LA FUNZIONE IN TERMINI DI n E DELLE CONDIZIONI INIZIALI

ES. $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n$

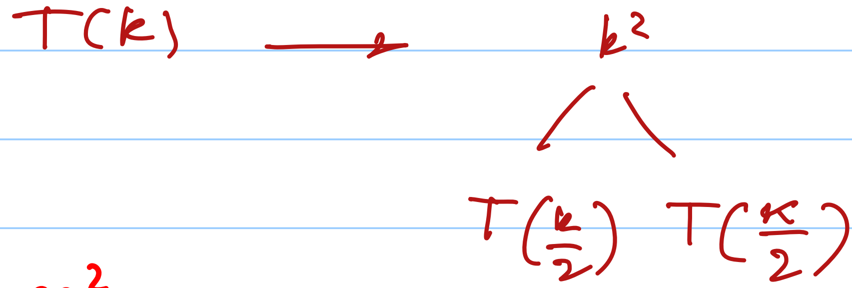
$$\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{4^2} \rfloor}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4^3} \right\rfloor$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\
&= n + 3\left(\lfloor n/4 \rfloor + 3T\left(\left\lfloor \tfrac{n}{4^2} \right\rfloor\right)\right) \\
&= n + 3\left(\lfloor n/4 \rfloor + 3\left(\left\lfloor \tfrac{n}{4^2} \right\rfloor + 3T\left(\left\lfloor \tfrac{n}{4^3} \right\rfloor\right)\right)\right) \\
&= n + 3\left\lfloor \tfrac{n}{4} \right\rfloor + 3^2\left\lfloor \tfrac{n}{4^2} \right\rfloor + 3^3 T\left(\left\lfloor \tfrac{n}{4^3} \right\rfloor\right) \\
&\;\;\ldots \\
&\le n + \tfrac{3}{4}n + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 n + \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 n + \ldots + 3^{\log_4 n}\, \boxed{\Theta(1)} \\
&\le n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\tfrac{3}{4}\right)^i + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right) \\
&= 4n + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right) = \Theta(n)
\end{aligned}$$

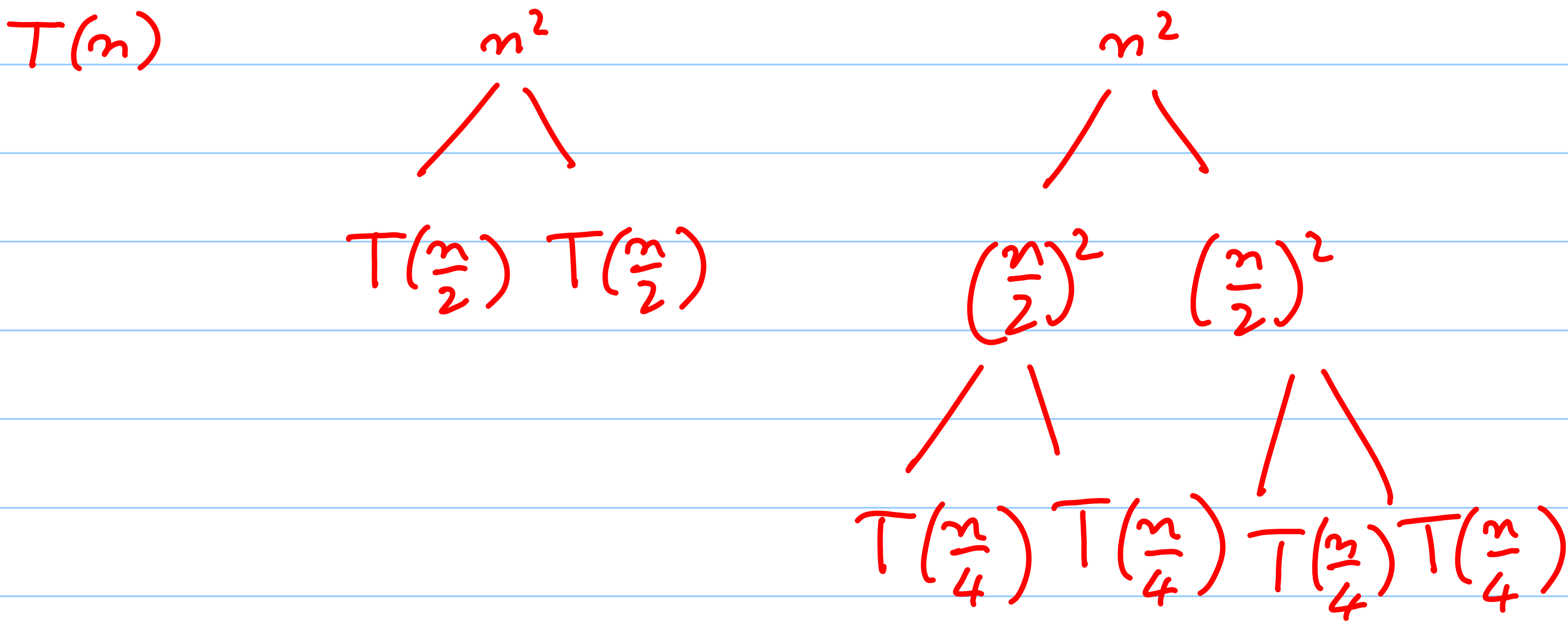
$\boxed{T(1), T(2), T(3)}$

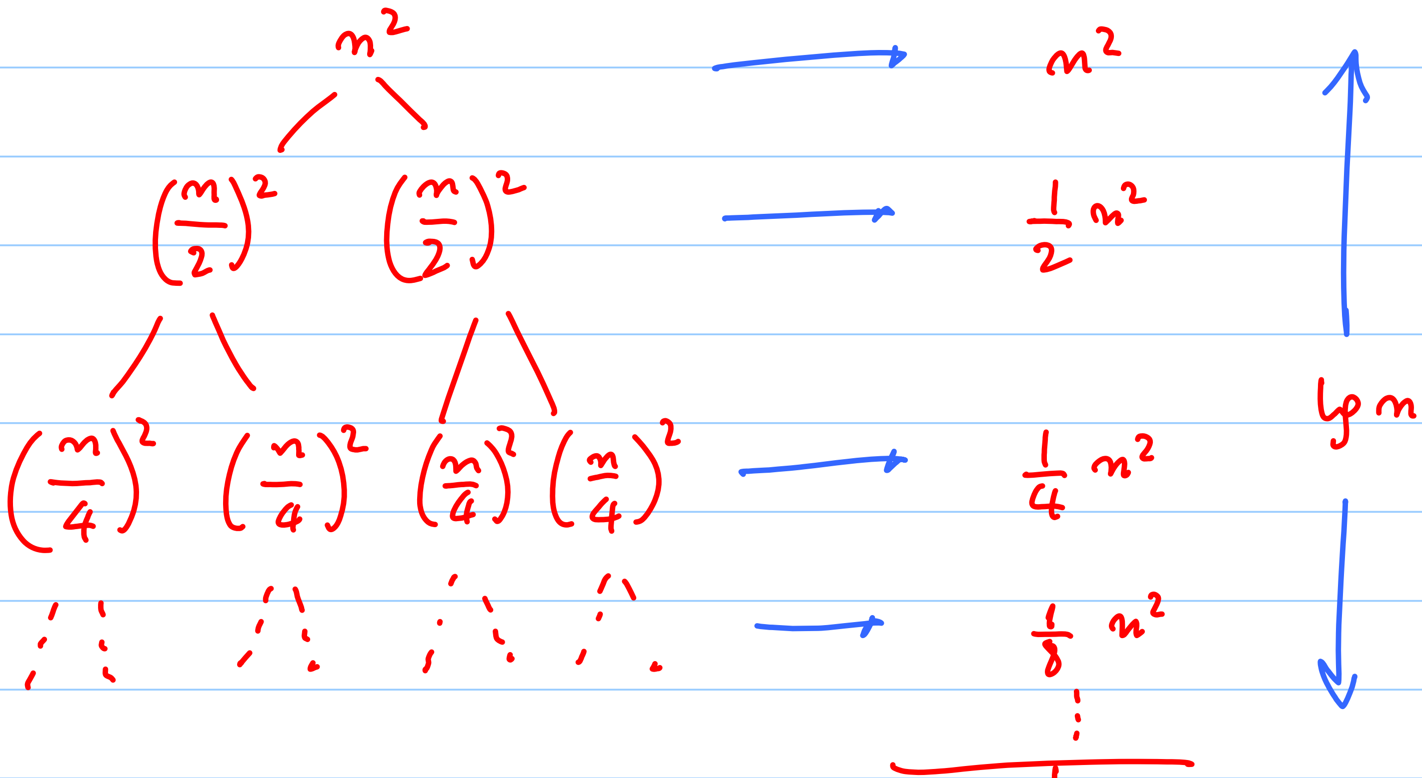
ALBERI DI RICORSIONE

- SONO PARTICOLARMENTE UTILI NELL'APPLICAZIONE DEL METODO ITERATIVO



$$T(n) = 2T(n/2) + n^2$$

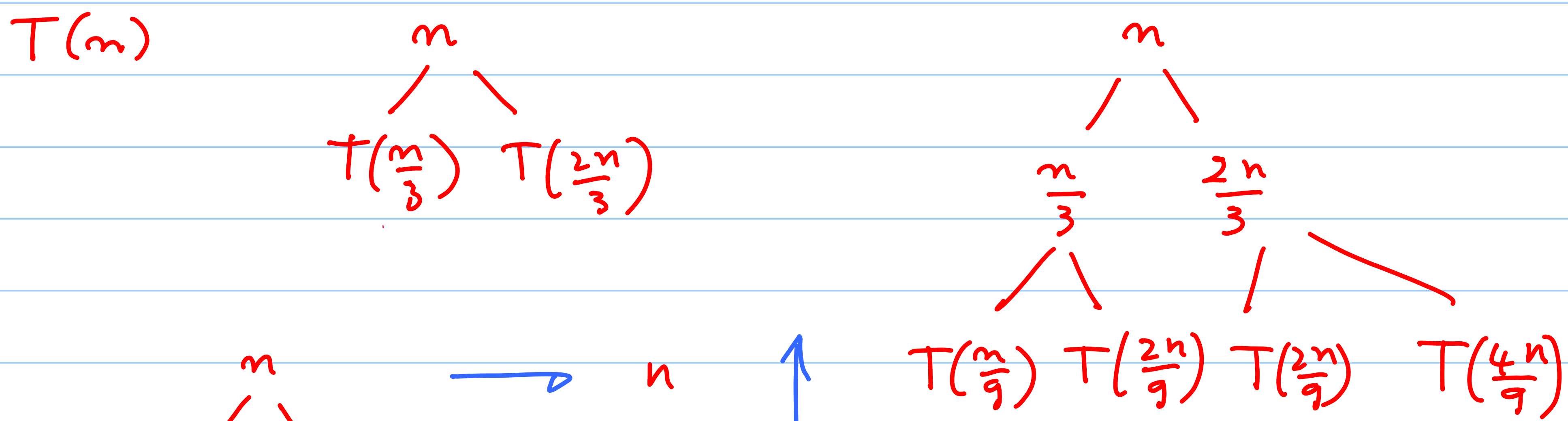


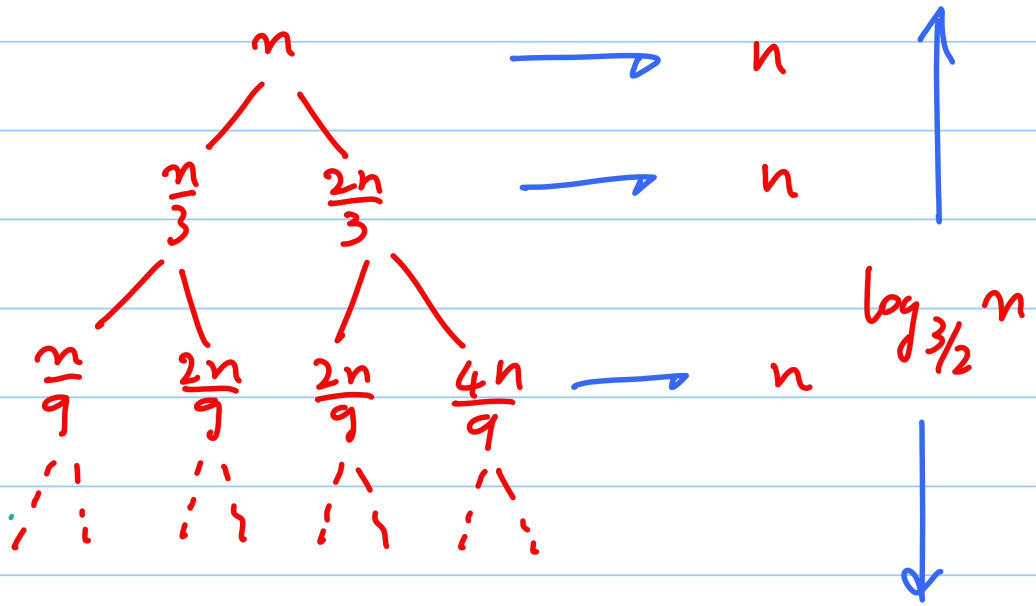


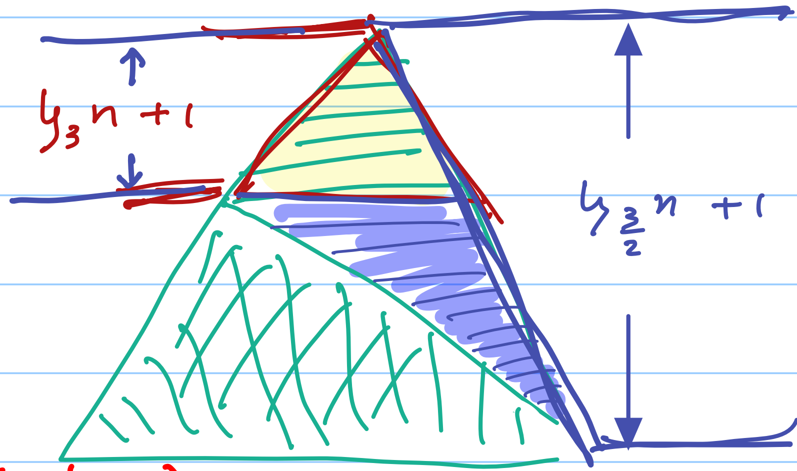
$$n^2 \sum_{i=0}^{\lg n} \frac{1}{2^i} = \Theta(n^2)$$

Es.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$



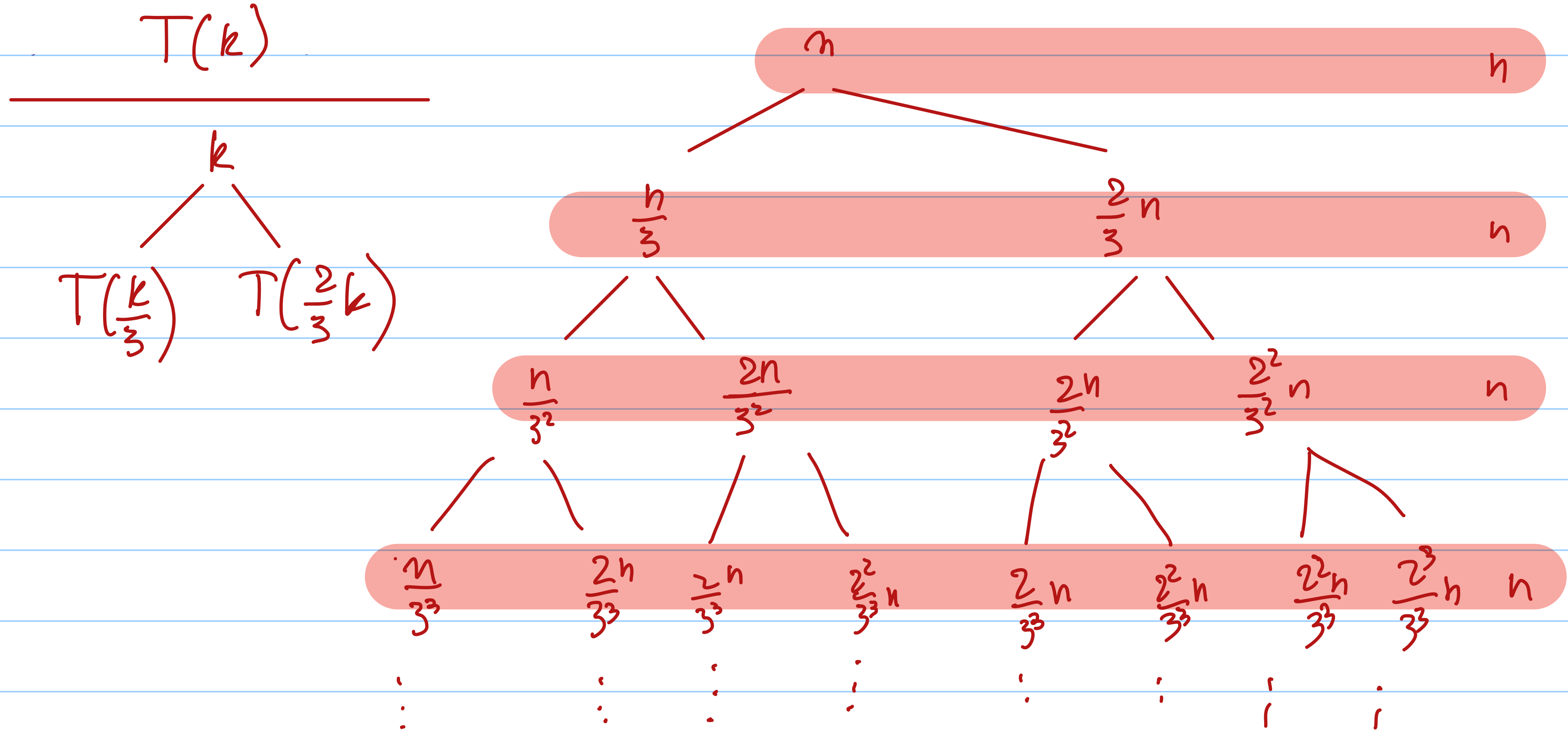




$$n \log_{3/2} n = \Theta(n \log n)$$

Es.

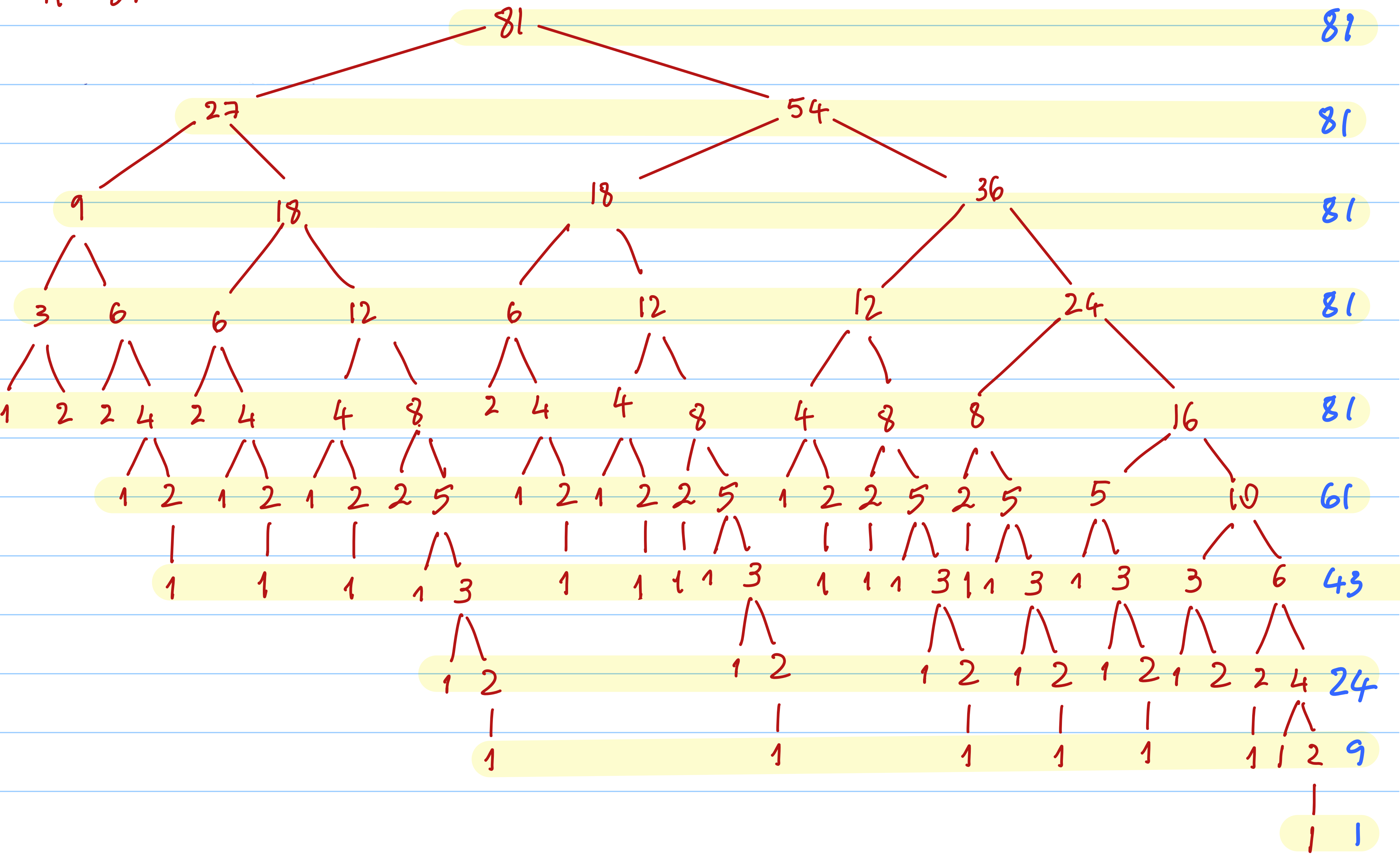
$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$



$$\longrightarrow \quad T(n) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

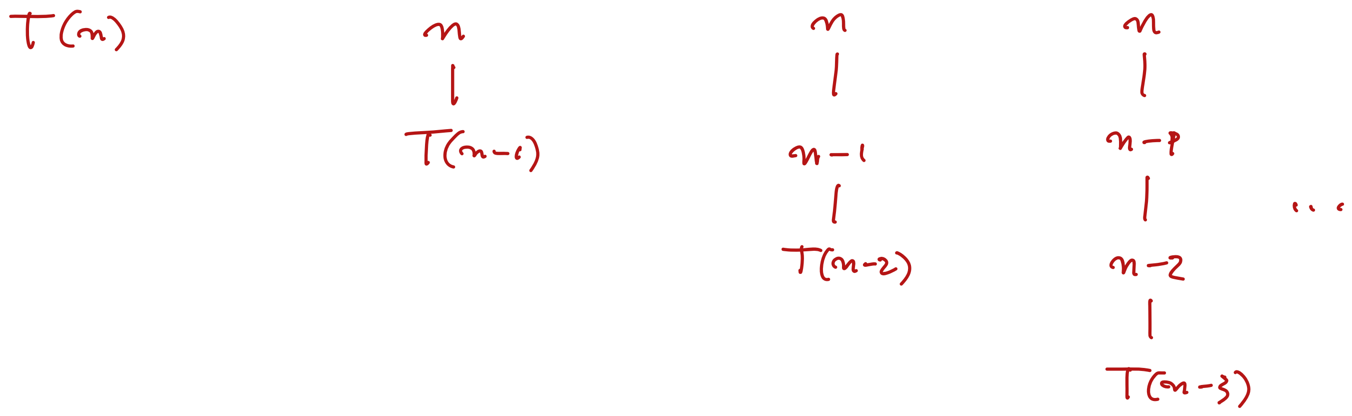
n = 81

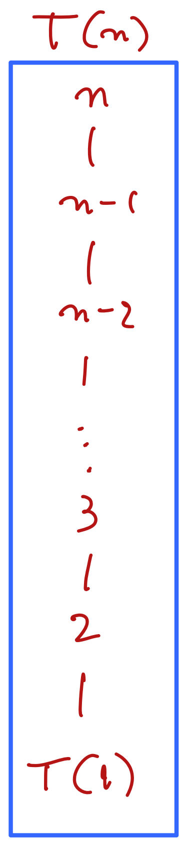


$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (\lg_3 n + 1)\, n \le T(n) \le (\lg_{\frac{3}{2}} n + 1)\, n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{T(n) = \Omega(n \lg n)} \arrow[dr] & & \boxed{T(n) = O(n \lg n)} \arrow[dl] \\
& \boxed{T(n) = \Theta(n \lg n)} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\lg_3 n = \frac{\log n}{\log 3} = \Theta\left(\log n\right) \qquad \lg_{\frac{3}{2}} n = \frac{\log n}{\log \frac{3}{2}} = \Theta\left(\log n\right)
$$

Show that the solution of $T(n) = T(n-1) + n$ is $O(n^2)$.





$$T(n) = \sum_{i \geq 2}^{n} i + T(1)$$

$$= \left(\sum_{i \geq 2}^{n} i + 1\right) - 1 + T(1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i - 1 + T(1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - 1 + T(1)$$

$$= \Theta(n^2)$$

ESERCIZI

4.3-1

Show that the solution of $T(n) = T(n-1) + n$ is $O(n^2)$.

- RISOLVERE L'EQUAZIONE $T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1$

RICORRENZE DELLA FORMA $T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

TEOREMA "MASTER": SIANO $a > 0$, $b > 1$ COSTANTI E SIA $f(n)$ UNA FUNZIONE ASSEGNATA.

SIA INOLTRE $T(n)$ TALE CHE $T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$,

1. SE $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$, ALLORA $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

2. SE $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$, ALLORA $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \lg n\right)$

3. SE $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$ E SE

CONDIZIONE DI REGOLARITA'

$a\,f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c\,f(n)$ PER QUALCHE $c < 1$ E PER VALORI DI n SUFFICIENTEMENTE GRANDI,

ALLORA $T(n) = \Theta(f(n))$,

GENERALIZZAZIONE

IL CASO 2 PUÒ ESSERE GENERALIZZATO:

2'. SE $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \lg^k n\right)$, CON $k \geq 0$,

ALLORA $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \lg^{k+1} n\right)$

ESEMPI

- $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$a = 9$, $b = 3$, $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$

$$f(n) = n = O\left(n^{\log_3 9 - \varepsilon}\right) \quad (\forall\, 0 < \varepsilon \leq 1) \xRightarrow{\text{CASO 1}} T(n) = \Theta(n^2)$$

- $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$

$a = 1$, $b = \frac{3}{2}$, $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0$

$$f(n) = 1 = \Theta(n^0) \xRightarrow{\text{CASO 2}} T(n) = \Theta(\lg n)$$

$$n \lg n = \Omega\left(n^{\log_4 3 + \varepsilon}\right)$$

- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\lg n$

$a=3$, $b=4$, $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$

$f(n) = n\lg n = \Omega\left(n^{\log_4 3+\varepsilon}\right) \quad \left(\forall\, 0<\varepsilon\leq 1-\log_4 3\right)$

INOLTRE: $a f\left(\frac{n}{b}\right) = 3\cdot\frac{n}{4}\lg\frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} n\lg n \quad \left(c=\frac{3}{4}\right)$

$\xRightarrow{\text{CASO 3}} \quad T(n) = \Theta(n\lg n)$

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\lg n$

$a=2$, $b=2$, $n^{\log_2 2} = n^1$

$f(n) = n\lg n = \Theta(n\cdot\lg n) \xRightarrow{\text{CASO 2'}} T(n) = \Theta(n\lg^2 n)$

ESERCIZIO

RISOLVERE LE SEGUENTI RICORRENZE:

- $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2) \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^3)$
- $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2) \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^{\lg 7})$

a. $T(n) = 2T(n/4) + 1. \Longrightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n})$

b. $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}. \Longrightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n} \lg n)$

c. $T(n) = 2T(n/4) + n. \Longrightarrow T(n) = \Theta(n)$

d. $T(n) = 2T(n/4) + n^2. \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

e. $T(n) = 2T(n/4) + n^3. \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^3)$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \Longrightarrow T(n) = \Theta(n \lg n)$

$$T(n) = 8\,T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$$

$a = 8$, $b = 2$, $f(n) = n^2$

$\log_b a = \log_2 8 = 3$, $n^{\log_b a} = n^3$

$\forall\ 0 < \varepsilon \leq 1$ $\quad n^2 = O(n^{3-\varepsilon})$

$\xrightarrow{\text{I caso}}$ $T(n) = \Theta(n^3)$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$$

$2 \leq \lg 7 - \varepsilon$

$\varepsilon \leq \lg 7 - 2$

$a = 3, \quad b = 2, \quad f(n) = n^2$

$\log_b a = \log 3 < 2, \quad n^{\log_b a} = n^{\log 3}$

$\forall\ 0 < \varepsilon \leq 2 - \log 3 \qquad n^2 = \Omega(n^{\log 3 + \varepsilon}) \Longrightarrow$ III CASO

VERIFICA CONDIZIONE DI REGOLARITA':

$$3f\left(\frac{n}{2}\right) = 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 = 3\frac{n^2}{4} = \frac{3}{4} \cdot n^2 \leq c\,n^2 = c\,f(n) \quad \left(\forall\ \frac{3}{4} \leq c < 1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad T(n) = \Theta(n^2)$$

COROLLARIO: SIANO $a>0$, $b>1$, $k\geq 0$, $h\geq 0$ COSTANTI,

SIA INOLTRE $T(n)$ TALE CHE $T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta\left(n^k (\lg n)^h\right)$.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta\left(n^{\log_b a}\right) & \text{SE } \log_b a > k \\ \Theta\left(n^k (\lg n)^{h+1}\right) & \text{SE } \log_b a = k \\ \Theta\left(n^k (\lg n)^h\right) & \text{SE } 0 \leq \log_b a < k \end{cases}$$

DIM. – SE $\log_b a > k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon>0$, E QUINDI $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$,

– SE $\log_b a = k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot (\lg n)^h\right)$ E QUINDI $T(n) = \Theta\left(n^k (\lg n)^{h+1}\right)$.

%

- INFINE, SE $0 \leq \log_b a < k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$.

INOLTRE VALE LA CONDIZIONE DI REGOLARITÀ, INFATTI:

$$a\left(\frac{n}{b}\right)^k \left(\lg \frac{n}{b}\right)^h = \frac{a}{b^k} n^k (\lg n - \lg b)^h$$

$$< \frac{a}{b^k} n^k \cdot (\lg n)^h$$

$$\leq c\, n^k (\lg n)^h$$

(PER OGNI COSTANTE c TALE CHE $\frac{a}{b^k} \leq c < 1$; TALI COSTANTI ESISTONO DATO CHE $\log_b a < k \rightarrow a < b^k \rightarrow \frac{a}{b^k} < 1$)

PERTANTO IN QUESTO CASO SI HA $T(n) = \Theta\left(n^k (\lg n)^h\right)$. ■

ESERCIZIO

Si enuncino il Teorema Master ed il suo Corollario, quindi si risolva la seguente equazione di ricorrenza al variare del parametro $\alpha > 0$:

$$T(n) = \alpha \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log^2 n \,. \qquad (*)$$

Per quali valori di α si ha: (a) $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$; (b) $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$; (c) $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$?

- PER COMINCIARE, RISOLVIAMO L'EQUAZIONE DI RICORRENZA PARAMETRICA (*).

- APPLICANDO DIRETTAMENTE IL COROLLARIO, SI HA:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta\left(n^{\lg \alpha}\right) & \text{SE } \lg \alpha > 2 \\ \Theta\left(n^2 (\lg n)^3\right) & \text{SE } \lg \alpha = 2 \\ \Theta\left(n^2 (\lg n)^2\right) & \text{SE } \lg \alpha < 2 \end{cases}$$

POICHE'

$$\lg \alpha > 2 \iff \alpha > 4$$

$$\lg \alpha = 2 \iff \alpha = 4$$

$$\lg \alpha < 2 \iff 0 < \alpha < 4$$

LA SOLUZIONE TROVATA PUÒ ESSERE RISCRITTA COSÌ:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\lg \alpha}) & \text{SE } \alpha > 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^3) & \text{SE } \alpha = 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^2) & \text{SE } 0 < \alpha < 4 \end{cases}$$

RISPONDIAMO ADESSO AI QUESITI (a), (b) E (c)

(a) Per quali valori di α si ha: $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$?

CASO $\alpha > 4$

SI HA $n^{\lg \alpha} = \mathcal{O}(n^3) \longleftrightarrow \lg \alpha \leq 3 \longleftrightarrow \alpha \leq 8$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{4 < \alpha \leq 8}$ SI HA $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$

CASO $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^3 = \mathcal{O}(n^3)$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha = 4}$ SI HA $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$

CASO $0 < \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^2 = \mathcal{O}(n^3)$ $\Rightarrow$ PER $\boxed{0 < \alpha < 4}$ SI HA $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E': $\boxed{0 < \alpha \leq 8}$

(b) Per quali valori di α si ha: $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\lg \alpha}) & \text{SE } \alpha > 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^3) & \text{SE } \alpha = 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^2) & \text{SE } 0 < \alpha < 4 \end{cases}$$

__CASO__ $\alpha > 4$

SI HA $n^{\lg \alpha} = \Omega(n^2 \lg^3 n) \longleftrightarrow \lg \alpha > 2 \longleftrightarrow \alpha > 4$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha > 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \lg^3 n)$

__CASO__ $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^3 = \Omega(n^2 \lg^3 n)$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha = 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \lg^3 n)$

__CASO__ $0 < \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^2 \neq \Omega(n^2 \lg^3 n)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E': $\boxed{\alpha \geq 4}$

(c) Per quali valori di α si ha: $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\lg \alpha}) & \text{SE } \alpha > 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^3) & \text{SE } \alpha = 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^2) & \text{SE } 0 < \alpha < 4 \end{cases}$$

CASO $\alpha > 4$

SI HA $n^{\lg \alpha} = \Omega(n^2 \lg^4 n) \longleftrightarrow \lg \alpha > 2 \longleftrightarrow \alpha > 4$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha > 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \lg^4 n)$

CASO $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^3 \neq \Omega(n^2 \lg^4 n)$

CASO $0 < \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^2 \neq \Omega(n^2 \lg^4 n)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E': $\longrightarrow$ $\boxed{\alpha > 4}$ ■

ESERCIZIO 1

(A) Si enuncino il Teorema Master e il suo Corollario.

(B) Si definiscano le notazioni asintotiche $o(f(n))$, $\omega(f(n))$, $\Theta(f(n))$ per una data funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(C) Si risolva l'equazione di ricorrenza $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + \Theta\left(n^2 \log^2 n\right)$ al variare del parametro reale $a > 0$.

(D) Sia $T(n)$ la funzione di cui al punto precedente. Per quali valori del parametro $a > 0$ si ha:

(i) $T(n) = \omega(n^3)$? (ii) $T(n) = \Theta(n^2 \log^4 n)$? (iii) $T(n) = o(n^2 \log^4 n)$?

$$T(n) = a \cdot T\left(\tfrac{n}{4}\right) + \Theta\left(n^2 \log^2 n\right)$$

$\log_4 a \gtreqless 2 \longleftrightarrow a \gtreqless 16$

$$\boxed{T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_4 a}) & \text{SE} \quad a > 16 \\ \Theta(n^2 \log^3 n) & \text{se} \quad a = 16 \\ \Theta(n^2 \log^2 n) & \text{se} \quad 0 < a < 16 \end{cases}}$$

(B) Si definiscano le notazioni asintotiche $o(f(n))$, $\omega(f(n))$, $\Theta(f(n))$ per una data funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$o(f(n)) = \{ h(n) : (\forall c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ 0 \leq h(n) \leq c \cdot f(n) \}$$

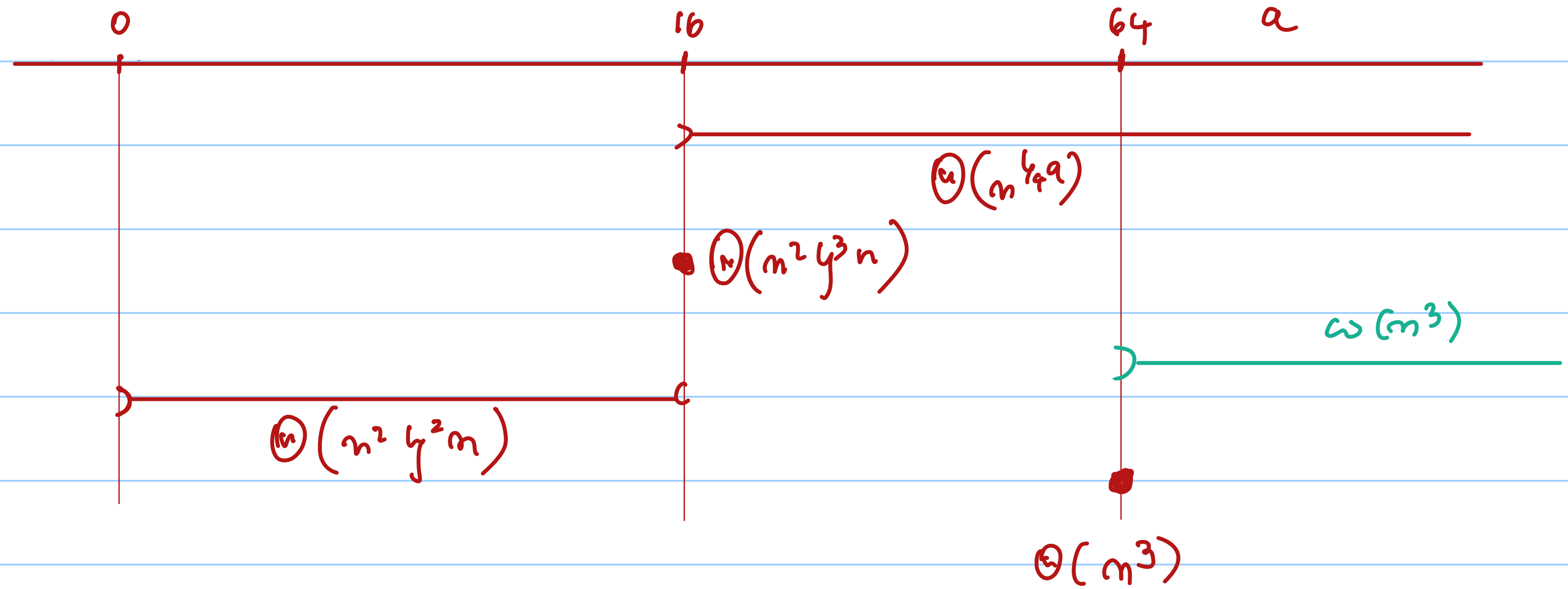
$$O(f(n)) = \{ h(n) : (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ 0 \leq h(n) \leq c\, f(n) \}$$

$$\omega(f(n)) = \{ h(n) : (\forall c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ 0 \leq c \cdot f(n) \leq h(n) \}$$

$$\Theta(f(n)) = \{ h(n) : (\exists c_1, c_2 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ c_1 \cdot f(n) \leq h(n) \leq c_2 \cdot f(n) \}$$

$T(n) = \omega(n^3)$

$$\boxed{T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_4 a}) & \text{SE } a > 16 \\ \Theta(n^2 \log^3 n) & \text{se } a = 16 \\ \Theta(n^2 \log^2 n) & \text{se } 0 < a < 16 \end{cases}}$$



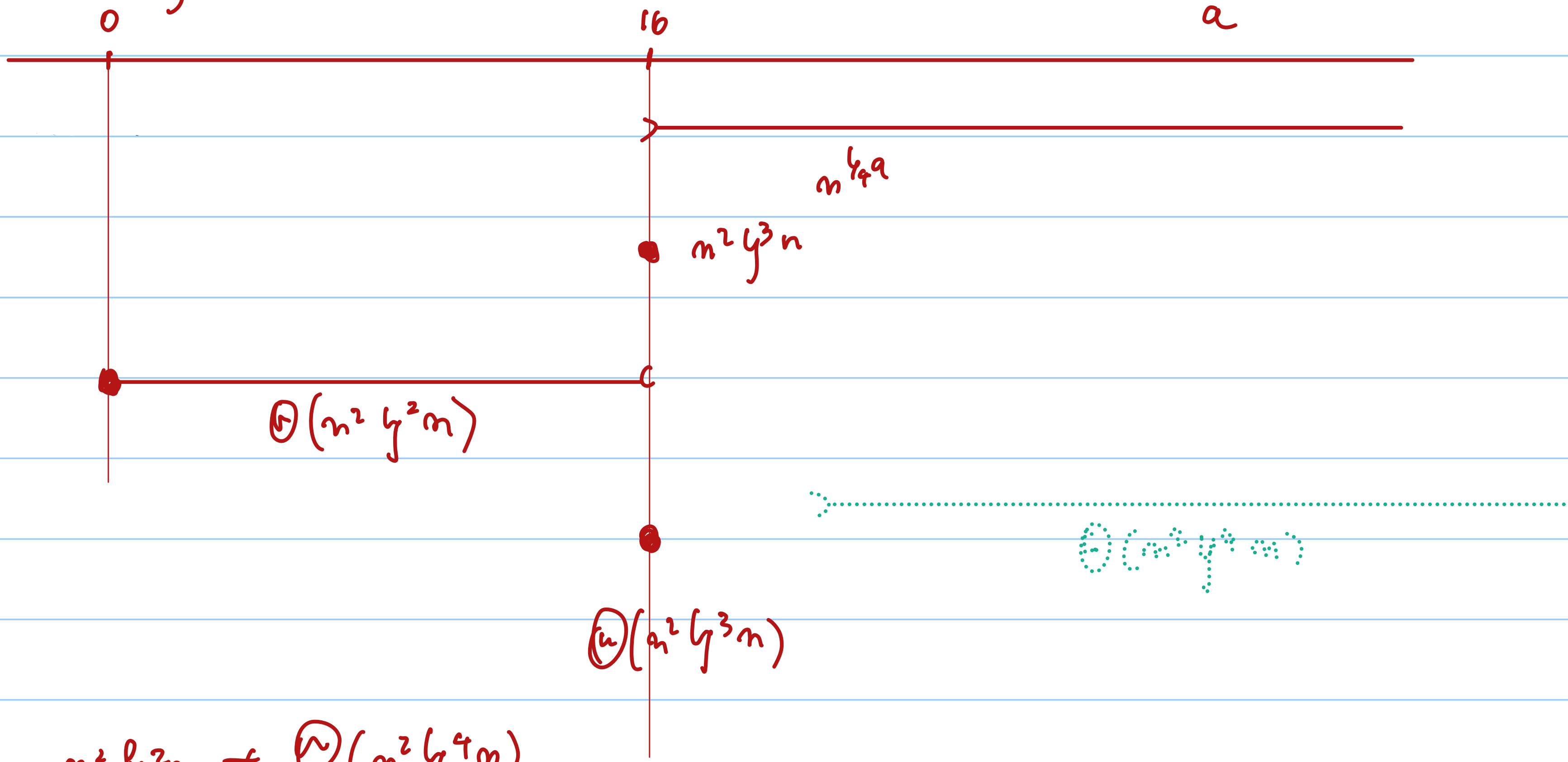
$0 < a < 16$ $\quad n^2 \log^2 n \neq \omega(n^3)$ $\qquad\qquad a > 64$

$a = 16$ $\quad n^2 \log^3 n \neq \omega(n^3)$

$a > 16$ $\quad n^{\log_4 a} = \omega(n^3) \iff \log_4 a > 3 \iff a > 4^3 = 64$

$\Rightarrow$ PER $a > 64$ SI HA $T(n) = \omega(n^3)$

$T(n) = \omega(n^2 \lg^4 n)$



$0 < a < 16$ $\quad n^2 \lg^2 n \neq \omega(n^2 \lg^4 n)$

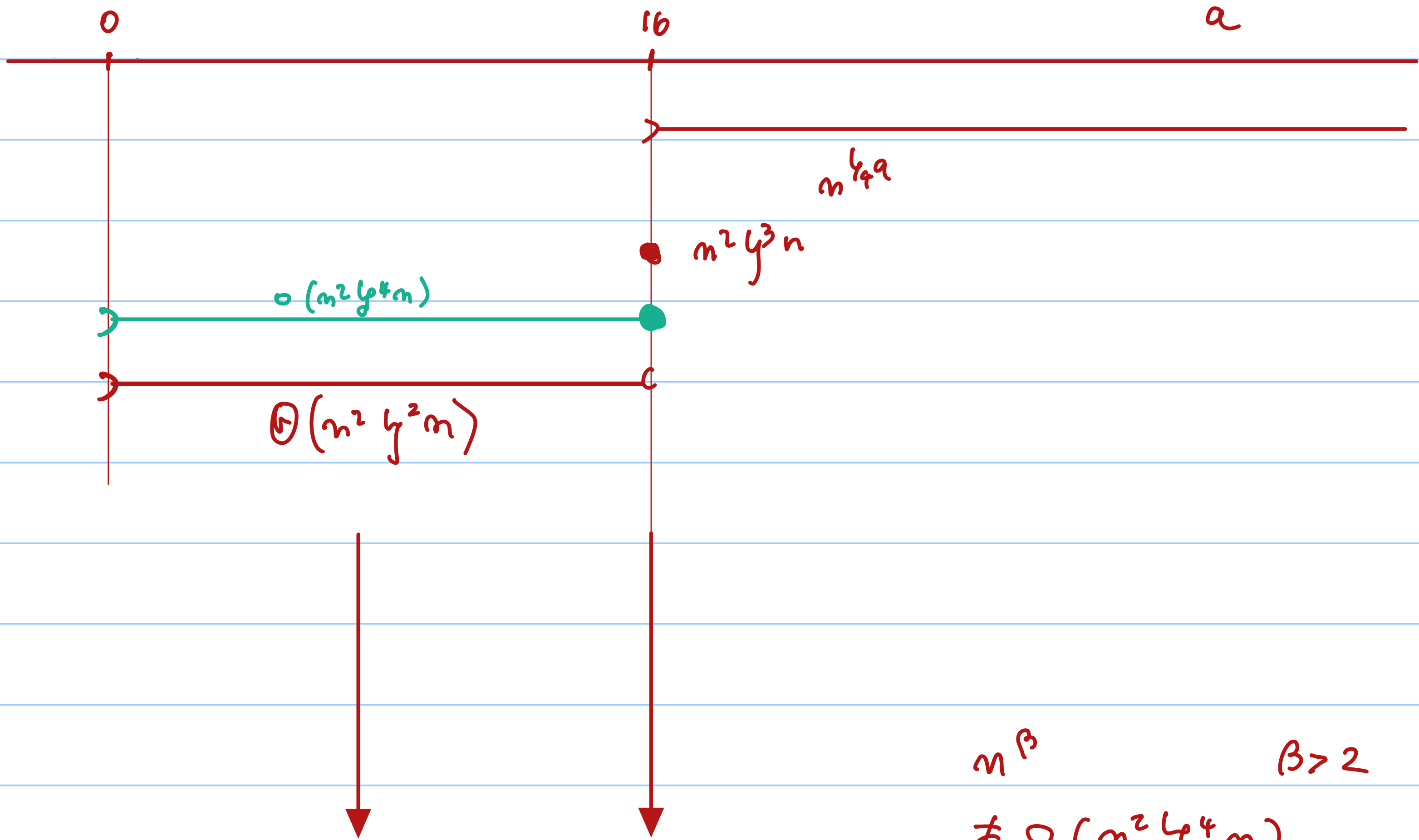
$a = 16$ $\quad n^2 \lg^3 n \neq \omega(n^2 \lg^4 n)$

$a > 16$ $\quad n^{\log_4 a} \neq \omega(n^2 \lg^4 n)$ $\quad$ (POICHE' $n^{\log_4 a} = \omega(n^2 \lg^4 n)$)

PERTANTO SI HA $T(n) \neq \omega(n^2 \lg^4 n)$ PER OGNI $a > 0$

$T(n) = O(n^2 \log^4 n)$

$T(n) = \Omega(n)$ $\boxed{\forall a > 0}$



n^{β} $\beta > 2$

$\neq O(n^2 \log^4 n)$

$n^2 \log^2 n = o(n^2 \log^4 n)$ $n^2 \log^3 n = o(n^2 \log^4 n)$

$\rightarrow$ $0 < a \leq 16$

$O(n^2 \lg^4 n)$

$0 < a < 16 \qquad n^2 \lg^2 n = O(n^2 \lg^4 n)$

$a = 16 \qquad n^2 \lg^3 n = O(n^2 \lg^4 n)$

$a > 16 \qquad n^{\log_4 a} \neq O(n^2 \lg^4 n)$ PER OGNI $a > 16$

PERTANTO SI HA $T(n) = O(n^2 \lg^4 n)$ PER OGNI $0 < a \leq 16$

METODO DI AKRA-BAZZI (CASO PARTICOLARE)

SIA $T(n) = g(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i T\left(\frac{n}{b_i} + h_i(n)\right)$, PER $n \geq m_0$,

DOVE

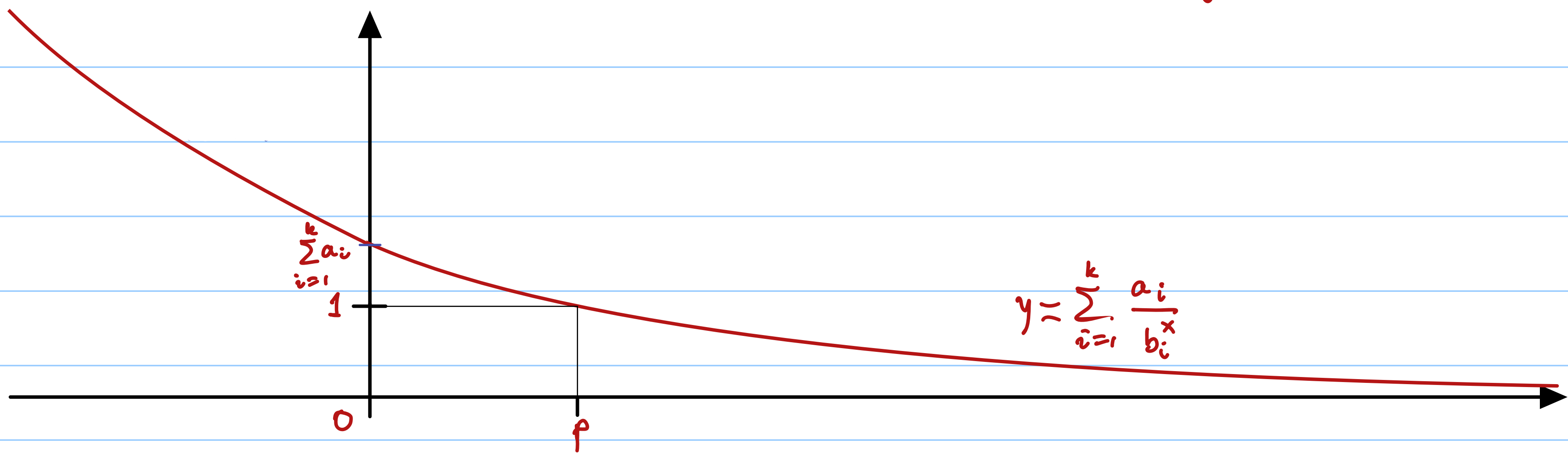
- $a_i > 0$, $b_i > 1$ COSTANTI $(i = 1, 2, \dots, k)$
- $|g(n)| = \Theta(n^c)$
- $|h_i(n)| = O(n/(\lg n)^2)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$

SIA INOLTRE p TALE CHE $\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^p} = 1$.

ALLORA:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^p) & \text{SE } p > c \\ \Theta(n^c \lg n) & \text{SE } p = c \iff \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^c} = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{SE } p < c \iff \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^c} < 1 \end{cases}$$

ANDAMENTO DELLA FUNZIONE $\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^x}$



INFATTI:

- b_i^x È CRESCENTE, $\forall\ i = 1, \dots, k$
- $\frac{a_i}{b_i^x}$ È DUNQUE DECRESCENTE, $\forall\ i = 1, \dots, k$

$\therefore$ $\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^x}$ È DECRESCENTE

INOLTRE:

- $\lim_{x \to +\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^x} = +\infty$

ESEMPI

- $T(n) = n^2 + \frac{7}{4} T\left(\left\lfloor \frac{1}{2} n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{3}{4} n \right\rceil\right)$ $\quad (n \geq 3)$

$\frac{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$ HA SOLUZIONE $x = 2$

DUNQUE: $p = 2$, $c = 2$ $\longrightarrow$ $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$

- $T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\frac{7n}{10} + 2\right) + \Theta(n)$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1 \qquad x = 1 \longrightarrow \frac{1}{5} + \frac{7}{10} = \frac{2+7}{10} = \frac{9}{10} < 1$$

QUINDI LA SOLUZIONE p DI $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1$ E' < 1.

PERTANTO $T(n) = \Theta(n)$.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$ HA SOLUZIONE $x = 1$

PERTANTO: $T(n) = \Theta(n \log n)$