LA PIÙ LUNGA SOTTOSEQUENZA COMUNE

(LONGEST COMMON SUBSEQUENCE : LCS)

- APPLICAZIONI BIOLOGICHE
  - CONFRONTO DNA DI DIVERSI ORGANISMI

- STRUTTURA DNA : FORMATA DA UNA STRINGA DI MOLECOLE DETTE BASI

- BASI :
  - ADENINA (A)
  - CITOSINA (C)
  - GUANINA (G)
  - TIMINA (T)

- QUINDI IL DNA DI UN ORGANISMO PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO COME UNA STRINGA NELL'ALFABETO {A, C, G, T}

- LA CORRELAZIONE TRA DUE ORGANISMI PUÒ ESSERE "MISURATA" CON IL GRADO DI SOMIGLIANZA DEI LORO DNA

DEF UNA SOTTOSEQUENZA DI UNA SEQUENZA DATA X E' UNA SEQUENZA OTTENUTA CANCELLANDO DA X ZERO O PIÙ ELEMENTI (MANTENENDO L'ORDINE).

PIÙ PRECISAMENTE, SE $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$, UNA SEQUENZA $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ E' UNA SOTTOSEQUENZA DI X SE ESISTE UNA SEQUENZA $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$ DI INDICI TALE CHE:

- $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le m$
- $z_j = x_{i_j}$, PER OGNI $j = 1, 2, \dots, k$

ESEMPIO SIA $X = \langle \overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \overset{4}{B}, \overset{5}{D}, \overset{6}{A}, \overset{7}{B} \rangle$.

ALLORA $Z = \langle \underset{1}{B}, \underset{2}{C}, \underset{3}{D}, \underset{4}{B} \rangle$ E' UNA SOTTOSEQUENZA DI X CORRISPONDENTE ALLA SEQUENZA DI INDICI $(2, 3, 5, 7)$

$Z_1 = X_2$, $Z_2 = X_3$, $Z_3 = X_5$, $Z_4 = X_7$ $\longrightarrow$ $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $i_3 = 5$, $i_4 = 7$

$1 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \le 7$

DEF DATE DUE SEQUENZE X E Y, DICIAMO CHE Z E' UNA SOTTOSEQUENZA COMUNE DI X E Y SE Z E' UNA SOTTOSEQUENZA DI ENTRAMBE LE SEQUENZE X E Y

ESEMPIO DATE $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ E

$Y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$,

- LA SEQUENZA $Z = \langle B, C, A \rangle$ E' UNA SOTTOSEQUENZA COMUNE DI X E Y.
- TUTTAVIA $\langle B, C, A \rangle$ NON E' LA PIÙ LUNGA SOTTOSEQUENZA COMUNE DI X E Y, IN QUANTO $\langle B, C, B, A \rangle$, $\langle B, C, A, B \rangle$, $\langle B, D, A, B \rangle$ SONO SOTTOSEQUENZE COMUNI DI X E Y (DI LUNGHEZZA MASSIMA).

PROBLEMA DELLA PIÙ LUNGA SOTTOSEQUENZA COMUNE:

DATE DUE SEQUENZE X E Y DETERMINARE UNA SOTTOSEQUENZA DI LUNGHEZZA MASSIMA (LCS) CHE SIA COMUNE A X E Y.

SOLUZIONE MEDIANTE RICERCA ESAUSTIVA

E' ESPONENZIALE IN $\min(|X|, |Y|)$, IN QUANTO UNA SEQUENZA DI LUNGHEZZA m HA ESATTAMENTE 2^m SOTTOSEQUENZE.

- IL PROBLEMA DELLA LCS PUÒ ESSERE RISOLTO IN MODO EFFICIENTE UTILIZZANDO LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA.

FASE 1: CARATTERIZZAZIONE DELLA PIÙ LUNGA SOTTOSEQUENZA COMUNE

NOTAZIONE DATA UNA SEQUENZA $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ DEFINIAMO $X_i = \langle x_1, x_2, \dots, x_i \rangle$, PER $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

INOLTRE PER OGNI SIMBOLO a DELL'ALFABETO PONIAMO $Xa = \langle x_1, x_2, \dots, x_m, a \rangle$

ESEMPIO: SE $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$, ALLORA

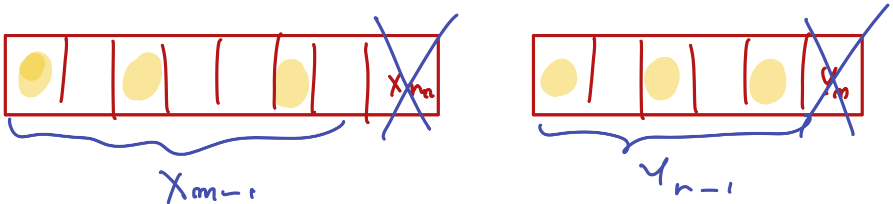
$X_1 = \langle A \rangle$, $X_4 = \langle A, B, C, B \rangle$, $X_0 = \langle \; \rangle$ (SEQUENZA VUOTA)

$X_3 D = \langle A, B, C, D \rangle$, ECC.

TEOREMA (SOTTOSTRUTTURA OTTIMA DI UNA LCS)

SIANO DATE DUE SEQUENZE $\boxed{X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle}$ E $\boxed{Y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle}$, TALI CHE $m \geq 1$ E $n \geq 1$, E SIA $Z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_k \rangle$ UNA LCS DI X E Y.

1. SE $x_m = y_n$, ALLORA
   - $z_k = x_m = y_n$ E
   - Z_{k-1} E' UNA LCS DI X_{m-1} E Y_{n-1}
2. SE $x_m \neq y_n$, ALLORA
   $z_k \neq x_m \implies Z$ E' UNA LCS DI X_{m-1} E Y
3. SE $x_m \neq y_n$, ALLORA
   $z_k \neq y_n \implies Z$ E' UNA LCS DI X E Y_{n-1}.



DIM. (1) SE $z_k \neq x_m$ ALLORA Z SAREBBE UNA SOTTOSEQUENZA COMUNE DI X_{m-1} E Y_{n-1} E QUINDI Zx_m SAREBBE UNA SOTTOSEQUENZA COMUNE DI X E Y, ASSURDO.

QUINDI $z_k = x_m = y_n$ E PERTANTO Z_{k-1} E' UNA SOTTOSEQUENZA COMUNE DI X_{m-1} E Y_{n-1}. SE Z_{k-1} NON FOSSE DI LUNGHEZZA MASSIMA, ESISTEREBBE W LCS DI X_{m-1} E Y_{n-1} TALE CHE $|W| > |Z_{k-1}|$.

MA, ALLORA Wx_m SAREBBE UNA SOTTOSEQUENZA COMUNE DI X E Y, ASSURDO IN QUANTO $|Wx_m| > |Z|$ E Z E' UNA LCS DI X E Y

(2) SE $z_k \neq x_m$ ALLORA Z E' UNA SOTTOSEQUENZA COMUNE DI X_{m-1} E Y.

SE ESISTESSE UNA SOTTOSEQUENZA COMUNE W DI X_{m-1} E Y TALE CHE $|W| > |Z|$, CIO' SAREBBE ASSURDO IN QUANTO W SAREBBE A MAGGIOR RAGIONE UNA SOTTOSEQUENZA COMUNE DI X E Y (DI LUNGHEZZA MAGGIORE DI QUELLA DELLA LCS Z).

(3) ANALOGO AL CASO (2)

SPAZIO DEI SOTTOPROBLEMI

DAL PRECEDENTE TEOREMA SEGUE CHE LO SPAZIO DEI SOTTOPROBLEMI E' $\{(X_i, Y_j) : 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n\}$ LA CUI CARDINALITA' E' $O(mn)$.

FASE 2: SOLUZIONE RICORSIVA

DEFINIAMO $c[i,j]$, PER $0 \leq i \leq m$ E $0 \leq j \leq n$, COME LA LUNGHEZZA DI UNA LCS DI X_i E Y_j.

IN VIRTU' DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA SI HA

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{SE } i=0 \text{ O } j=0 \\ c[i-1,j-1]+1 & \text{SE } i,j>0 \text{ E } x_i = y_j \\ \max(c[i,j-1], c[i-1,j]) & \text{SE } i,j>0 \text{ E } x_i \neq y_j \end{cases}$$

- NUMERO n_1 DI SOTTOPROBLEMI UTILIZZATI IN UNA SOLUZIONE OTTIMA $= 1$
- NUMERO n_2 DI SCELTE PER DETERMINARE QUALI SOTTOPROBLEMI UTILIZZARE ≤ 2

FASE 3: CALCOLO DELLA LUNGHEZZA DI UNA LCS

```
LCS_LENGTH (X, Y)
  m := length[X]
  n := length[Y]
  for i := 1 to m do
      c[i,0] := 0
  for j := 0 to n do
      c[0,j] := 0
```

CASO BASE

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

```
  for i := 1 to m do
      for j := 1 to n do
          if x_i = y_j then
              c[i,j] := c[i-1, j-1] + 1 ;  b[i,j] := "↖"
          else if c[i-1, j] >= c[i, j-1] then
              c[i,j] := c[i-1, j] ;  b[i,j] := "↑"
          else c[i,j] := c[i, j-1] ;  b[i,j] := "←"
  return c, b
```

DEFINIZIONE RICORSIVA

COMPLESSITÀ DI LCS_LENGTH: $\Theta(mn)$

ESEMPIO: DATI $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$

$Y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$

LCS_LENGTH (X, Y) CALCOLA LA TABELLA.

		0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

DA QUESTA SI EVINCE SUBITO CHE LA LUNGHEZZA DI UNA LCS È 4

FASE 4: COSTRUZIONE DI UNA LCS

```
PRINT_LCS(b, X, i, j)
if i = 0 o j = 0 then
    return
if b[i,j] = "↖" then
    PRINT_LCS(b, X, i-1, j-1)
    stampa x_i
elseif b[i,j] = "↑" then
    PRINT_LCS(b, X, i-1, j)
else
    PRINT_LCS(b, X, i, j-1)
```

PRINT_LCS(b, X, m, n)

		0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑0	↑0	↑0	↖1	←1	↖1
2	B	0	↖1	←1	←1	↑1	↖2	←2
3	C	0	↑1	↑1	↖2	←2	2	2
4	B	0	↖1	↑1	↑2	↑2	↖3	←3
5	D	0	↑1	↖2	↑2	↑2	↑3	↑3
6	A	0	↑1	↑2	↑2	↖3	↑3	↖4
7	B	0	↖1	↑2	↑2	↑3	↖4	↑4

B C B A

E' UNA LCS

COMPLESSITA': $O(m+n)$

ESERCIZI

15.4-4 SPIEGARE COME CALCOLARE LA LUNGHEZZA DI UNA LCS UTILIZZANDO SOLTANTO $2 \min(m, n)$ POSIZIONI NELLA TABELLA c PIÙ UNO SPAZIO $O(1)$ AGGIUNTIVO.
RISOLVERE LO STESSO PROBLEMA UTILIZZANDO $\min(m, n)$ POSIZIONI PIÙ UNO SPAZIO $O(1)$ AGGIUNTIVO.

15.4-5 PROGETTARE UN ALGORITMO $O(n^2)$ PER TROVARE UNA PIÙ LUNGA SOTTOSEQUENZA CRESCENTE DI UNA SEQUENZA DI n NUMERI