

# RICORRENZE

- EQUAZIONI O DISEQUAZIONI CHE DESCRIVONO IL VALORE DI UNA FUNZIONE IN TERMINI DEL SUO VALORE CON INPUT PIÙ PICCOLI

ES. 
$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{SE } n=1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{SE } n>1 \end{cases}$$

CON SOLUZIONE 
$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$

- CONSIDEREREMO I SEGUENTI TRE METODI
  - METODO DI SOSTITUZIONE
  - METODO ITERATIVO O DELL'ALBERO DI RICORSIONE
  - METODO "MASTER" PER RICORRENZE DELLA FORMA

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \text{ CON } a > 0, b > 1$$

# METODO DI SOSTITUZIONE

1. INDOVINARE UNA POSSIBILE SOLUZIONE:
2. VERIFICARE LA SOLUZIONE PER INDUZIONE

ESEMPIO:  $T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$

SOLUZIONE PROPOSTA:  $T(n) \leq c n \lg n \quad (n \geq 2)$

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

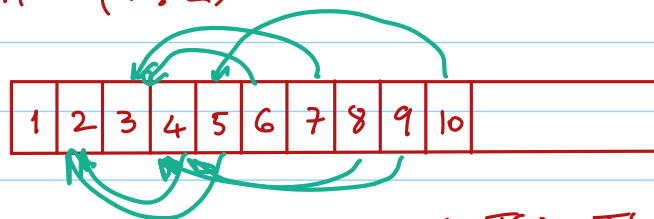
$$\leq 2c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n$$

$$\leq 2c \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} + n$$

$$= c n \lg \frac{n}{2} + n$$

$$= c n \lg n - cn + n$$

$$\leq c n \lg n \quad c \geq 1$$



PURCHE':  $c \geq \max\left(1, \frac{T(2)}{2}, \frac{T(3)}{3 \lg 3}\right)$

- $c \geq 1$

- $T(2) \leq c \cdot 2 \lg 2 = 2c$   
 $\Rightarrow c \geq T(2)/2$

- $T(3) \leq c \cdot 3 \lg 3 = 3c \lg 3$   
 $\Rightarrow c \geq T(3)/(3 \lg 3)$

ES. DETERMINARE UN LIMITE SUPERIORE PER  $T(n)$ , OVE  
 $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

VERIFICHIAMO CHE  $T(n) = O(n \lg n)$ , CIOE'

$T(n) \leq c n \lg n$  PER QUALCHE  $c > 0$  E PER  
 $n$  SUFFICIENTEMENTE GRANDE

SUPPONIAMO CHE  $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)$

ALLORA:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2 c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq c n \lg\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= c n \lg n - c n \lg 2 + n \\ &= c n \lg n - c n + n \\ &\leq c n \lg n \end{aligned}$$

PER  $n \geq 2$ ,  $c \geq \max\left(\frac{T(2)}{2}, \frac{T(3)}{3 \lg 3}, 1\right)$

## RAFFORZAMENTO DELL'IPOTESI INDUTTIVA

SI DIMOSTRI CHE LA RICORRENZA

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

HA SOLUZIONE  $T(n) = O(n)$ ,

OCCORRE VERIFICARE CHE  $T(n) \leq cn$ , PER QUALCHE  $c > 0$ ,  $\forall n \geq n_0$ .  
SUPPONIAMO INDUTTIVAMENTE CHE  $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $T(\lceil n/2 \rceil) \leq c \lceil n/2 \rceil$ .  
ALLORA:  $T(n) \leq c \lfloor n/2 \rfloor + c \lceil n/2 \rceil + 1 = cn + 1 \not\Rightarrow T(n) \leq cn!$

RAFFORZIATO L'IPOTESI INDUTTIVA:  $T(n) \leq cn - b$ , CON  $b \geq 0$ .

SI HA:

$$T(n) \leq (c \lfloor n/2 \rfloor - b) + (c \lceil n/2 \rceil - b) + 1 = cn - 2b + 1 \leq cn - b$$

PER  $b \geq 1$ ,  $c \geq T(1) + b$ ,  $n \geq 1$ .

ATTENZIONE AGLI ERRORI!

DATA  $T(n) = 2 T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$ , CERCHIAMO DI DIMOSTRARE  
CHE  $T(n) = O(n)$  (FALSO!)  $T($

SUPPONIAMO PER INDUZIONE CHE  $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor$ .

ALLORA

$$T(n) \leq 2 c \lfloor n/2 \rfloor + n \leq cn + n = (c+1)n = O(n)$$

$\uparrow$   
ERRORE!

OCCORREREBBE INFATTI DIMOSTRARE CHE  $T(n) \leq cn$ ,  
CON LA MEDESIMA COSTANTE  $c$ .

## CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$T(n) = 2 T(\sqrt{n}) + \lg n$$

$$\Rightarrow T(n) = 2 T(n^{\frac{1}{2}}) + \lg n$$

$$\Rightarrow T(2^{\lg n}) = 2 T(2^{\lg n / 2}) + \lg n$$

PONIAMO  $S(m) = T(2^m)$ .

$$\Rightarrow S(\lg n) = 2 S\left(\frac{\lg n}{2}\right) + \lg n$$

SI CONSIDERI LA RICORRENZA:  $S(m) = 2 S\left(\frac{m}{2}\right) + m$

ESSA HA SOLUZIONE  $S(m) = \Theta(m \lg m)$ , DA CUI

$$S(\lg n) = \Theta(\lg n \lg \lg n).$$

PERTANTO  $T(n) = T(2^{\lg n}) = S(\lg n) = \Theta(\lg n \lg \lg n)$ ,

## ESERCIZI

- RISOLVERE LE SEGUENTI EQUAZIONI DI RICORRENZA:

- $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(1)$
- $T(n) = 2 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)$
- $T(n) = 4 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)$

## METODO ITERATIVO

- CONSISTE NELL'ESPANDERE LA RICORRENZA FINO AD ESPRIMERE LA FUNZIONE IN TERMINI DI  $n$  E DELLE CONDIZIONI INIZIALI

ES.  $T(n) = 3 T(\lfloor n/4 \rfloor) + n$

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3 T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &= n + 3 \left( \lfloor n/4 \rfloor + 3 T(\lfloor \frac{n}{4^2} \rfloor) \right) \\ &= n + 3 \left( \lfloor n/4 \rfloor + 3 \left( \lfloor \frac{n}{4^2} \rfloor + 3 T(\lfloor \frac{n}{4^3} \rfloor) \right) \right) \\ &= n + 3 \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 3^2 \lfloor \frac{n}{4^2} \rfloor + 3^3 T(\lfloor \frac{n}{4^3} \rfloor) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ &\leq n + \frac{3}{4}n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^3 n + \dots + 3^{\log_4 n} \quad (1) \\ &\leq n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + O(n^{\log_4 3}) \\ &= 4n + O(n^{\log_4 3}) = O(n) \end{aligned}$$

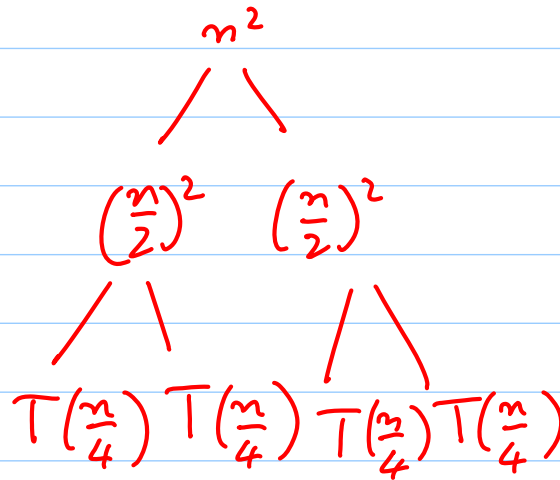
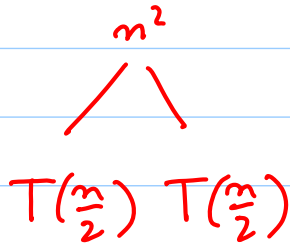


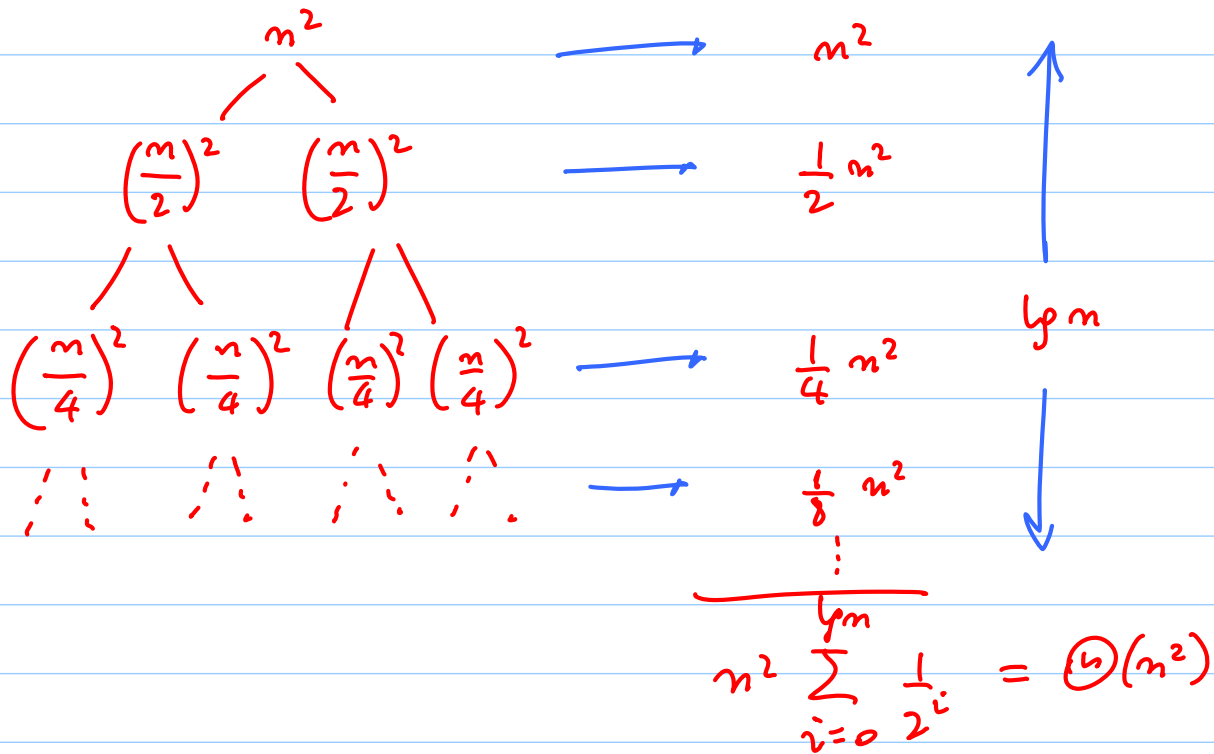
## ALBERI DI RICORSIONE

- SONO PARTICOLARMENTE UTILI NELL'APPLICAZIONE DEL METODO ITERATIVO

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 = \Omega(n^2)$$

$T(n)$





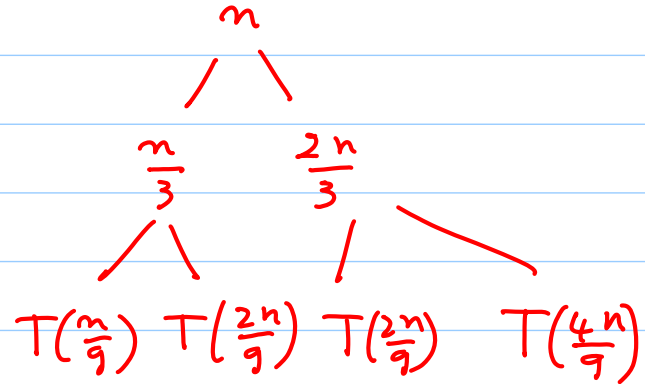
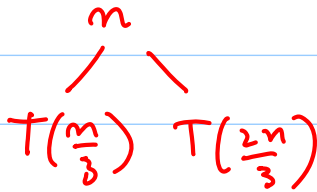
SIN QUI

Es.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

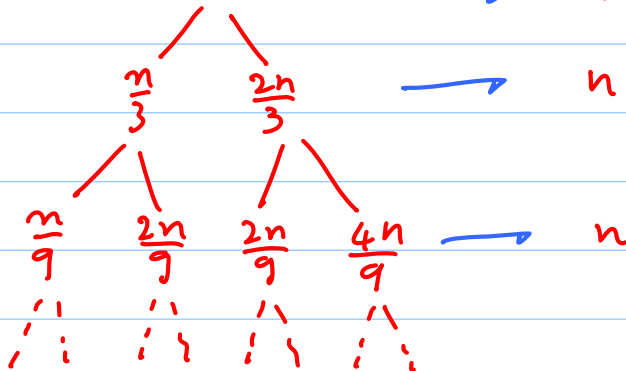
$$T\left(\frac{2^m}{3}\right) = \frac{2^m}{3} + T\left(\frac{1}{3} \frac{2^m}{3}\right) + T\left(\frac{2}{3} \frac{2^m}{3}\right)$$

$T(n)$



$$\lfloor \frac{1}{3} n \rfloor < \lfloor \frac{2}{3} n \rfloor$$

$\lfloor \frac{1}{3} n \rfloor$



$$\log_{3/2} n$$



$$n \log_{3/2} n = \Theta(n \lg n)$$

# ESERCIZI

$$n \lg_3 n \leq T(n) \leq n \lg_{3/2} n = n \cdot \lg_3 n \cdot \lg_{3/2} 3$$

4.3-1

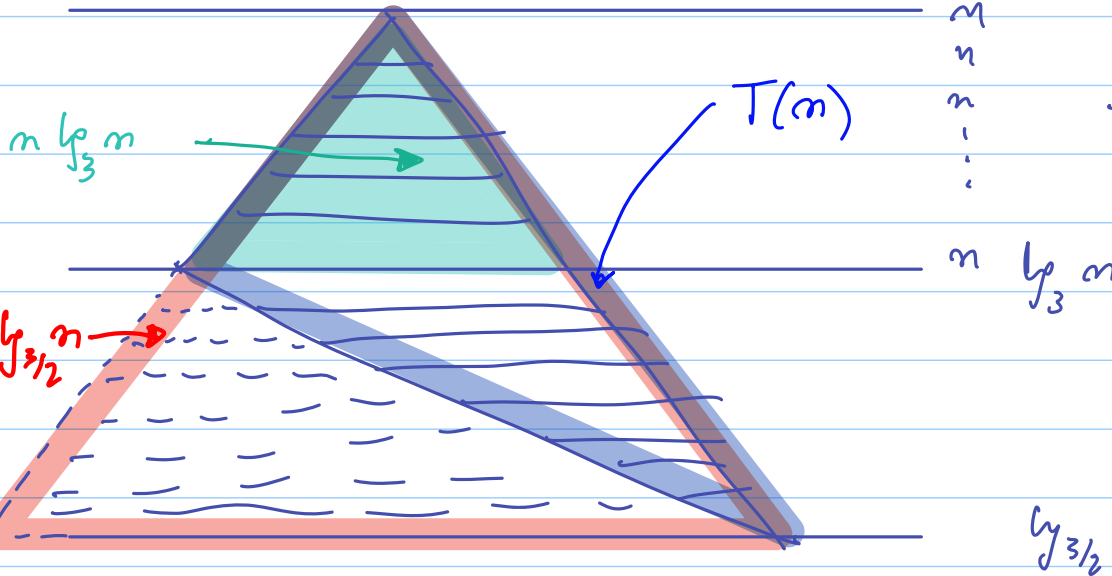
Show that the solution of  $T(n) = T(n-1) + n$  is  $O(n^2)$ .

$$< 2.71 \cdot n \lg_3 n$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n \lg_3 n) = \Theta(n \lg n)$$

- RISOLVERE L'EQUAZIONE

$$T(n) = T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1$$



$$\lg_{3/2} 3 = \frac{\lg 3}{\lg 3/2} = 2.71$$

## RICORRENZE DELLA FORMA

$$T(n) = a T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

### TEOREMA "MASTER":

SIANO  $a > 0$ ,  $b > 1$  COSTANTI E  
SIA  $f(n)$  UNA FUNZIONE ASSEGNATA.

SI A INOLTRE  $T(n)$  TALE CHE  $T(n) = a T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ ,

1. SE  $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$  PER QUALCHE  $\varepsilon > 0$ ,

ALLORA  $T(n) = O(n^{\log_b a})$   $O(f(n) \cdot \lg n)$

2. SE  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ , ALLORA  $T(n) = \underline{\Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)}$

3. SE  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$  PER QUALCHE  $\varepsilon > 0$  E SE

CONDIZIONE DI REGOLARITA'

$a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$  PER QUALCHE  $c < 1$  E PER  
VALORI DI  $n$  SUFFICIENTEMENTE GRANDI,

ALLORA  $T(n) = \Theta(f(n))$ ,

## GENERALIZZAZIONE

IL CASO 2 PUO' ESSERE GENERALIZZATO:

2'. SE  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg^k n)$ , CON  $k \geq 0$ ,

$$\text{ALLORA } T(n) = \underline{\Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg^{k+1} n)} = \Theta(f(n) \cdot \lg n)$$

$$n^0 \stackrel{?}{=} O(n^{0-\varepsilon}) \quad n^0 \stackrel{?}{=} \Theta(n^0) \quad n^0 \stackrel{?}{=} \Omega(n^{0+\varepsilon})$$

## ESEMPI

$$- T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9, b = 3, n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$$

$$f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon \leq 1) \xRightarrow{\text{CASO 1}} T(n) = \Theta(n^2)$$

$$a = 1, b = \frac{3}{2}, \log_{3/2} 1 = 0$$

$$- T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$$

$$a = 1, b = \frac{3}{2}, n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0$$

$$f(n) = 1 = \Theta(n^0) \xRightarrow{\text{CASO 2}} T(n) = \boxed{\Theta(\lg n)}$$

$$\stackrel{?}{=} O(n^{-\varepsilon})$$

$$\stackrel{?}{=} \Theta(n)$$

$$\stackrel{?}{=} \Omega(n + \varepsilon)$$

$$- T(n) = 3 T\left(\frac{n}{4}\right) + n \lg n$$

$$a=3, b=4, n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$$

$$f(n) = n \lg n = \Omega(n^{\log_4 3 + \varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon \leq 1 - \log_4 3)$$

$$\text{INOLTRE: } a f\left(\frac{n}{b}\right) = 3 \cdot \frac{n}{4} \lg \frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} n \lg n \quad (c = \frac{3}{4})$$

CASO 3

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n \lg n)$$

$$= \frac{3}{4} f(n)$$

$$f\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4} \cdot \lg \frac{n}{4}$$

$$- T(n) = 2 T\left(\frac{n}{2}\right) + n \lg n$$

$$a=2, b=2, n^{\log_2 2} = n^1$$

$$f(n) = n \lg n = \Theta(n \cdot \lg n) \xRightarrow{\text{CASO 2'}} T(n) = \Theta(n \lg^2 n)$$

$$(\forall \varepsilon) 0 < \varepsilon \leq \lg_2 2 - 2$$



$$n^2 \stackrel{?}{=} O(n^{\frac{1}{2} - \varepsilon})$$

$$n^2 \stackrel{?}{=} \Theta(n^{\frac{1}{2} + \varepsilon})$$

$$n^2 \stackrel{?}{=} \Omega(n^{\frac{1}{2} + \varepsilon})$$

RISOLVERE LE SEGUENTI RICORRENZE:

$$- T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$$

$$- T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$$

a.  $T(n) = 2T(n/4) + 1.$

b.  $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}.$

c.  $T(n) = 2T(n/4) + n.$

d.  $T(n) = 2T(n/4) + n^2.$

e.  $T(n) = 2T(n/4) + n^3.$

COROLLARIO: SIANO  $a > 0$ ,  $b > 1$ ,  $k \geq 0$ ,  $h \geq 0$  COSTANTI.

SIA INOLTRE  $T(n)$  TALE CHE  $T(n) = a T\left(\frac{n}{b}\right) + n^k (\lg n)^h$ .

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n^{\log_b a}) & \text{SE } \log_b a > k \\ \mathcal{O}(n^k (\lg n)^{h+1}) & \text{SE } \log_b a = k \\ \mathcal{O}(n^k (\lg n)^h) & \text{SE } 0 \leq \log_b a < k \end{cases}$$

DIM. - SE  $\log_b a > k$ , ALLORA  $n^k (\lg n)^h = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$  PER  
QUALCHE  $\varepsilon > 0$ , E QUINDI  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$ .

- SE  $\log_b a = k$ , ALLORA  $n^k (\lg n)^h = \mathcal{O}(n^{\log_b a} \cdot (\lg n)^h)$   
E QUINDI  $T(n) = \mathcal{O}(n^k (\lg n)^{h+1})$ .

✓

- INFINE, SE  $0 \leq \log_b a < k$ , ALLORA  $n^k (\lg n)^h = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$   
PER QUALCHE  $\varepsilon > 0$ ,

INOLTRE VALE LA CONDIZIONE DI REGOLARITA'. INFATTI:

$$\begin{aligned} a \left(\frac{n}{b}\right)^k (\lg \frac{n}{b})^h &< a \frac{n^k}{b^k} (\lg n)^h \\ &= \frac{a}{b^k} n^k (\lg n)^h \\ &\leq c n^k (\lg n)^h \end{aligned}$$

(PER OGNI COSTANTE  $c$   
TALE CHE  $\frac{a}{b^k} \leq c < 1$ ;  
TALI COSTANTI ESISTONO  
DATO CHE  
 $\log_b a < k \rightarrow a < b^k$   
 $\rightarrow \frac{a}{b^k} < 1$ )

PERTANTO IN QUESTO CASO SI HA  $T(n) = \Theta(n^k (\lg n)^h)$ . ■

## ESERCIZIO

Si enuncino il Teorema Master ed il suo Corollario, quindi si risolva la seguente equazione di ricorrenza al variare del parametro  $\alpha \geq 1$ :

$$T(n) = \alpha \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log^2 n. \quad (*)$$

Per quali valori di  $\alpha$  si ha: (a)  $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$ ; (b)  $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$ ; (c)  $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$ ?

- PER COMINCIARE, RISOLVIAMO L'EQUAZIONE DI RICORRENZA PARAMETRICA (\*).

$$\lg \alpha \geq 2 \iff \alpha \geq 4$$

- APPLICANDO DIRETTAMENTE IL COROLLARIO, SI HA:

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n^{\lg \alpha}) \\ \mathcal{O}(n^2 (\lg n)^3) \\ \mathcal{O}(n^2 (\lg n)^2) \end{cases}$$

$$\text{SE } \lg \alpha > 2 \iff \alpha > 4$$

$$\text{SE } \lg \alpha = 2 \iff \alpha = 4$$

$$\text{SE } 0 \leq \lg \alpha < 2 \iff 1 \leq \alpha < 4$$

$$T(n) = \alpha \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log^2 n.$$

POLICHE'

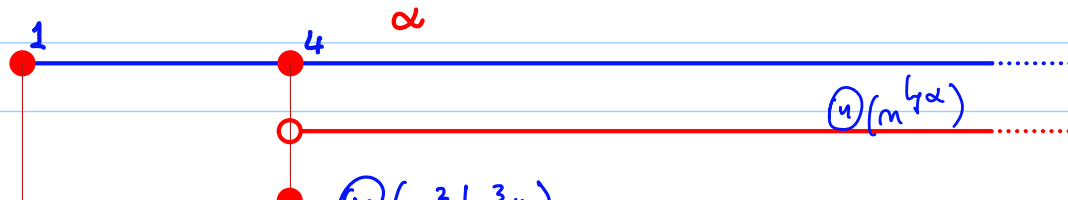
$$\lg \alpha > 2 \iff \alpha > 4$$

$$\lg \alpha = 2 \iff \alpha = 4$$

$$0 \leq \lg \alpha < 2 \iff 1 \leq \alpha < 4$$

LA SOLUZIONE TROVATA PUÒ ESSERE RISCRISSA COSÌ:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\lg \alpha}) & \text{SE } \alpha > 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^3) & \text{SE } \alpha = 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^2) & \text{SE } 1 \leq \alpha < 4 \end{cases}$$



$$\odot (n^2 \lg^2 n) \quad \odot (n \lg n)$$

RISPONDIAMO ADESSO AI QUESITI (a), (b) E (c)

(a) Per quali valori di  $\alpha$  si ha:  $T(n) = O(n^3)$  ?

CASO  $\alpha > 4$

SI HA  $n^{\lg \alpha} = O(n^3) \iff \lg \alpha \leq 3 \iff \alpha \leq 8$

$\Rightarrow$  PER  $\boxed{4 < \alpha \leq 8}$  SI HA  $T(n) = O(n^3)$

CASO  $\alpha = 4$

SI HA  $n^2 (\lg n)^3 = O(n^3)$

$\Rightarrow$  PER  $\boxed{\alpha = 4}$  SI HA  $T(n) = O(n^3)$

CASO  $1 \leq \alpha < 4$

SI HA  $n^2 (\lg n)^2 = O(n^3) \Rightarrow$  PER  $\boxed{1 \leq \alpha < 4}$  SI HA  $T(n) = O(n^3)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E':

$\boxed{1 \leq \alpha \leq 8}$

(b) Per quali valori di  $\alpha$  si ha:  $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$  ?

CASO  $\alpha > 4$

$$\text{SI HA } n^{\lg \alpha} = \Omega(n^2 \lg^3 n) \iff \lg \alpha > 2 \iff \alpha > 4$$

$$\Rightarrow \text{PER } \boxed{\alpha > 4} \quad \text{SI HA } T(n) = \Omega(n^2 \lg^3 n)$$

CASO  $\alpha = 4$

$$\text{SI HA } n^2 (\lg n)^3 = \Omega(n^2 \lg^3 n)$$

$$\Rightarrow \text{PER } \boxed{\alpha = 4} \quad \text{SI HA } T(n) = \Omega(n^2 \lg^3 n)$$

CASO  $1 \leq \alpha < 4$

$$\text{SI HA } n^2 (\lg n)^2 \neq \Omega(n^2 \lg^3 n)$$

PERTANTO LA SOLUZIONE E' :

$$\boxed{\alpha \geq 4}$$

(c) Per quali valori di  $\alpha$  si ha:  $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$  ?

CASO  $\alpha > 4$

$$\text{SI HA } n^{\log \alpha} = \Omega(n^2 \log^4 n) \iff \log \alpha > 2 \iff \alpha > 4$$

$$\Rightarrow \text{PER } \boxed{\alpha > 4} \quad \text{SI HA } T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$$

CASO  $\alpha = 4$

$$\text{SI HA } n^2 (\log n)^3 \neq \Omega(n^2 \log^4 n)$$

CASO  $1 \leq \alpha < 4$

$$\text{SI HA } n^2 (\log n)^2 \neq \Omega(n^2 \log^4 n)$$

PERTANTO LA SOLUZIONE E' :

$$\boxed{\alpha > 4}$$



## METODO DI AKRA-BAZZI (CASO PARTICOLARE)

SIA  $T(n) = g(n) + \sum_{i=1}^k a_i T\left(\frac{n}{b_i} + h_i(n)\right)$ , PER  $n \geq n_0$ ,

DOVE

-  $a_i > 0$ ,  $b_i > 1$  COSTANTI ( $i = 1, 2, \dots, k$ )

-  $|g(n)| = \mathcal{O}(n^c)$

-  $|h_i(n)| = \mathcal{O}(n/(\lg n)^2)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ )

$$\log_b a$$

SIA INOLTRE (P) TALE CHE  $\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{b_i^p} = 1$ .

$$p = \log_{\vec{b}} \vec{a}$$

ALLORA:

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n^p) & \text{SE } c < p \\ \mathcal{O}(n^p \log n) & \text{SE } c = p \\ \mathcal{O}(n^c) & \text{SE } c > p \end{cases}$$

PONIAMO  $\vec{a} := (a_1, \dots, a_k)$ ,  $\vec{b} := (b_1, \dots, b_k)$

## ESEMPLI

$$\log_b \vec{a} := p \in \mathbb{R}^+ \text{ TALE CHE } \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{b_i^p} = 1$$

$$- T(n) = n^2 + \frac{7}{4} T(\lfloor \frac{1}{2} n \rfloor) + T(\lceil \frac{3}{4} n \rceil) \quad (n \geq 3)$$

$$\frac{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1 \quad \text{HA SOLUZIONE} \quad x=2$$

$$\text{DUNQUE: } p=2, c=2 \rightarrow T(n) = \Theta(n^2 \log n)$$

$$- T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + T\left(\frac{7n}{10} + 2\right) + \Theta(n)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1$$

$$x=1 \rightarrow \frac{1}{5} + \frac{7}{10} = \frac{2+7}{10} = \frac{9}{10} < 1$$

QUINDI LA SOLUZIONE  $p$  DI  $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1$   $\in' < 1$ .

PERTANTO  $T(n) = \Theta(n)$ .

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \downarrow \quad \left(\frac{7}{10}\right)^x \downarrow$$

decreasing.

