ESERCIZIO 2

(A) Data la funzione $h(x,i) =_{Def} (x+3i) \mod 17$, si illustri l'inserimento delle chiavi

$$23,\ 43,\ 21,\ 5,\ 62,\ 72,\ 58,\ 48,\ 52,\ 46,\ 78,\ 55,\ 35,\ 17,\ 51$$

in una tabella hash di dimensione 17, inizialmente vuota e organizzata con l'indirizzamento aperto, utilizzando $h(x,i)$ come funzione hash.

(B) Si enunci l'ipotesi di *hashing uniforme*, si forniscano dei limiti superiori al numero medio di scansioni in ricerche *con* e *senza* successo in una tabella hash con fattore di carico α, assumendo l'ipotesi di hashing uniforme.

A)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	52	35	51	21	5	23	72		43	58	62	46	78	48		55

- $h(23,0) = 23 \bmod 17 = 6$
- $h(43,0) = 9$
- $h(21,0) = 4$
- $h(5,0) = 5$
- $h(62,0) = 11$
- $h(72,0) = 4$, $h(72,1) = 7$
- $h(58,0) = 7$, $h(58,1) = 10$
- $h(48,0) = 14$
- $h(52,0) = 1$
- $h(46,0) = 12$
- $h(78,0) = 10$, $h(78,1) = 13$

17
34
51
68

- $h(55,0) = 4 \to 7 \to 10 \to 13 \to 16$
- $h(35,0) = 1 \to 4 \to 7 \to 10 \to 13 \to 16 \to 2$
- $h(17,0) = 0$
- $h(51,0) = 0 \to 3$

B) L'ipotesi di hashing uniforme assume che ad ogni chiave può essere associata una qualunque delle m! sequenze di scansione (permutazioni di <0, ….., m-1>).
Sotto questa ipotesi si possono fissare dei limiti superiori al numero medio di operazioni da fare nelle operazioni di ricerca con e senza successo :

Con successo $O\left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}\right)$

senza successo $O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$

```
Search (T, K)

i ← 0
WHILE (i < m AND T(h(K), i) ≠ NULL)
    IF (T(h(K), i) = K)
        RETURN true
    i ← i+1
RETURN false
```

Concatenamento + Hashing unif. semplice

senza succ. $O(\alpha+1)$

con succ. $O(\frac{\alpha}{2}+1)$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right)\right]$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{m}\right)$$

$$1+\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\left(n-i\right)$$

$$1+\frac{1}{mn}\left(\sum n-\sum i\right)$$

$$1+\frac{1}{mn}\left(n^2-\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$1+\frac{n-1}{2m}$$

$$1+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2m} \simeq O\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)$$

Complessità della ricerca nel caso di Hashing uniforme semplice + concatenamento

Ricerca senza successo $\Rightarrow \Theta(\alpha + 1)$ compreso il calcolo di $h(x)$

// con successo $\Rightarrow O(\frac{\alpha}{2} + 1)$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{m}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}(n-i)$$

$$= 1 + \frac{1}{nm}\left(\sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{nm}\left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{(n-1)}{2m}$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2n} \simeq O\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$