CODICI DI HUFFMAN

- CONSENTONO FATTORI DI COMPRESSIONE TRA IL 20% E IL 90%

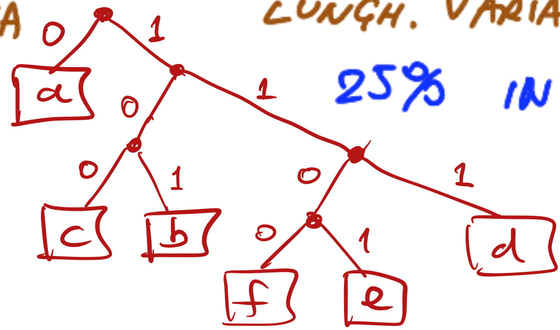
- **PROBLEMA**: TROVARE UNA CODIFICA DI UN FILE DI CARATTERI IN MODO DA MINIMIZZARNE LA DIMENSIONE

ESEMPIO: FILE DI 100 CARATTERI

CAR.	FREQ.	COD1 (8 BIT)	COD2 (3 bit)	COD3	
a	45 x 1	00000000	000	0	45
b	13 x 3	00000001	001	101	39
c	12 x 3	00000010	010	100	36
d	16 x 3	00000011	011	111	48
e	9 x 4	00000100	100	1101	36
f	5 x 4	00000101	101	1100	20
	100	800 bit	300 bit		224 bit

$\underbrace{\text{800 bit} \quad \text{300 bit}}_{\text{LUNGHEZZA FISSA}}$ $\quad$ $\underbrace{\text{224 bit}}_{\text{LUNGH. VARIABILE}}$

25% IN MENO



ES. abac

COD 2
$\underline{000}\,\underline{001}\,\underline{000}\,\underline{010}$

COD 3
$\underline{0}\,\underline{101}\,\underline{0}\,\underline{100}$

$300 : 100 = 76 : X$

$X = \frac{100 \cdot 76}{300} = 25{,}3\%$

$$86 \times 3 + 14 \times 2 = 258 + 28$$

ALBERI DI DECODIFICA

CAR.	FREQ.	COD2 (3 bit)	COD3
a	45	000	0
b	13	001	101
c	12	010	100
d	16	011	111
e	9	100	1101
f	5	101	1100

ES.

abac

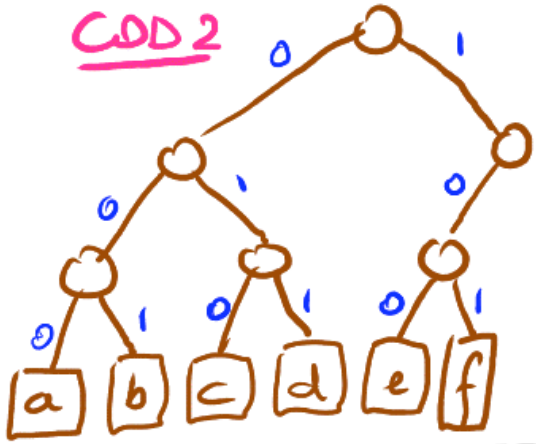
COD 2

$\underbrace{000}_{a}\underbrace{001}_{b}\underbrace{000}_{a}\underbrace{010}_{c}$

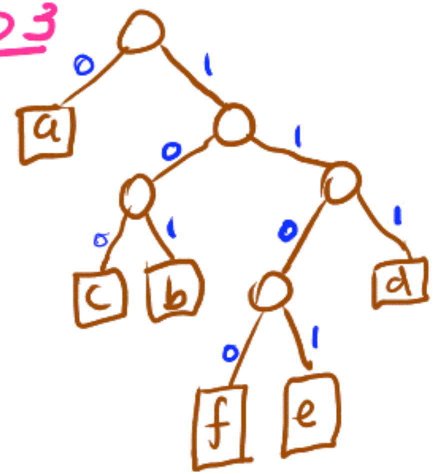
COD 3

$\underbrace{0}_{a}\underbrace{101}_{b}\underbrace{0}_{a}\underbrace{100}_{c}$

COD 2



COD 3



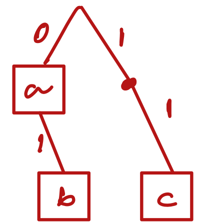
PIENO / FULL

- **CODICI PREFISSI**: SONO CODICI IN CUI NESSUNA CODIFICA E' PREFISSO DI UN'ALTRA CODIFICA

ESEMPIO DI CODICE NON PREFISSO NON AMBIGUO

a	0
b	01
c	11

$\underbrace{01}_{b}\underbrace{11}_{c}\underbrace{11}_{c}\underbrace{11}_{c}\underbrace{11}_{c}\underbrace{11}_{c}1$



ESEMPIO DI CODICE NON PREFISSO AMBIGUO

a	0
b	1
c	01

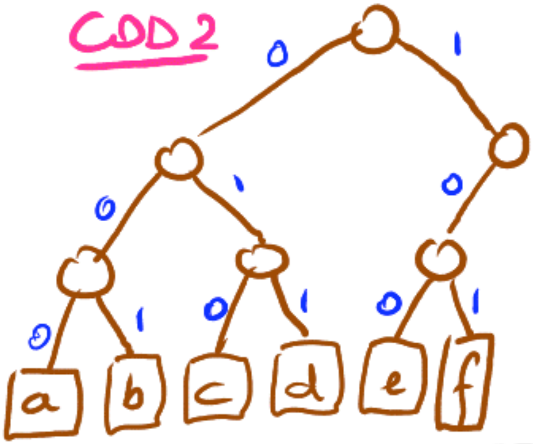
?

$f : C \to \mathbb{N}$

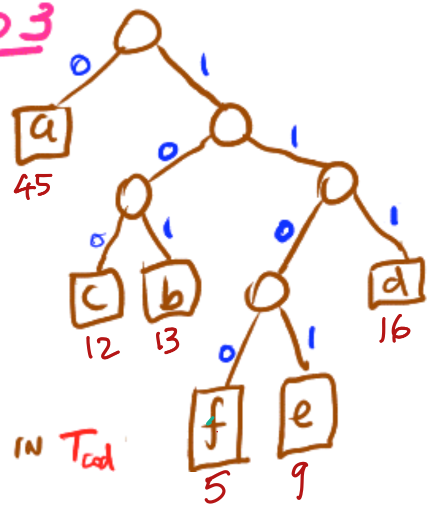
ALBERI DI DECODIFICA

CAR.	FREQ.	COD2 (3 bit)	COD3
a	45 × 1	000	0
b	13 × 3	001	101
c	12 × 3	010	100
d	16 × 3	011	111
e	9 × 4	100	1101
f	5 × 4	101	1100

COD2



COD3



COMPLESSITA' DELLA CODIFICA:

$$B(cod) = \sum_{c \in C} f(c)\, |cod(c)|$$

$$= \sum_{c \in C} f(c)\, d_{T_{cod}}(c) =_{def} B(T_{cod})$$

T_{cod} : ALBERO DI DECODIFICA

C : ALFABETO

$f: C \to \mathbb{N}$

$d_{T_{cod}}$: PROFONDITA' IN T_{cod}

PROBLEMA: TRA TUTTI GLI ALBERI DI DECODIFICA RELATIVI AD UN SISTEMA (C, f) (DOVE $f: C \to \mathbb{N}$) DETERMINARE QUELLO DI COSTO MINIMO, CIOE' L'ALBERO BINARIO DI DECODIFICA T TALE CHE

$$B(T) = \sum_{c \in C} f(c)\, d_T(c)$$

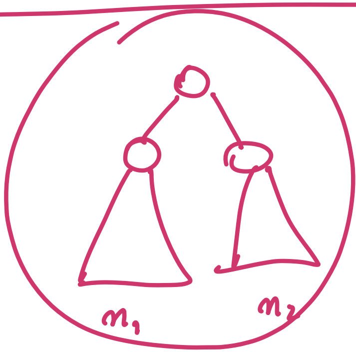
SIA MINIMO

OSSERVAZIONE: POSSIAMO LIMITARE LA NOSTRA RICERCA AGLI ALBERI BINARI PIENI, QUELLI CIOE' PRIVI DI NODI INTERNI CON UN SOLO FIGLIO.

OSSERVAZIONE: IL NUMERO DI NODI INTERNI IN UN ALBERO BINARIO PIENO CON n FOGLIE E' $n-1$.

$n = 1 \qquad 0 = n - 1 = 1 - 1$

$n > 1$

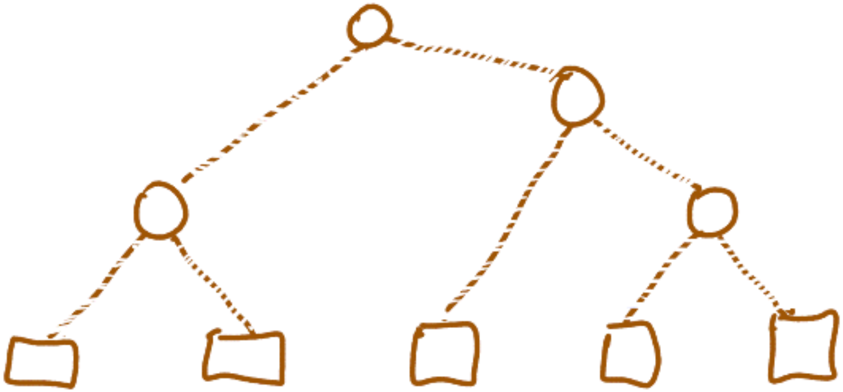


$n_1 + n_2 = n$

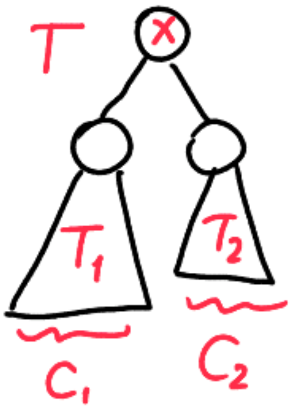
$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1$

$= n_1 - 1 + n_2 \cancel{-1} \cancel{+1}$

$= n - 1$



- PER COSTRUIRE UN ALBERO BINARIO PIENO CON n NODI SI POSSONO EFFETTUARE $(n-1)$ OPERAZIONI DI MERGING



$C_1 \cup C_2 = C$

$c \in C_1 \quad d_{T_1}(c) + 1 = d_T(c)$

$c \in C_2 \quad d_{T_2}(c) + 1 = d_T(c)$

$$B(T) = \sum_{c \in C} f(c) \cdot d_T(c)$$

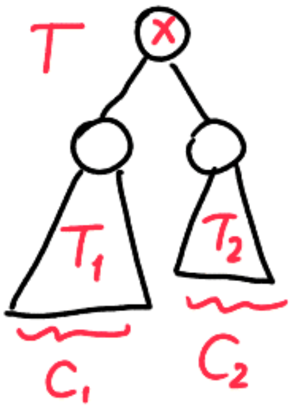
$$= \sum_{c \in C_1} f(c) \cdot d_T(c) + \sum_{c \in C_2} f(c)\, d_T(c)$$

$$= \sum_{c \in C_1} f(c)\left(d_{T_1}(c)+1\right) + \sum_{c \in C_2} f(c)\left(d_{T_2}(c)+1\right)$$

$$= \sum_{c \in C_1} f(c)\, d_{T_1}(c) + \sum_{c \in C_1} f(c)$$

$$+ \sum_{c \in C_2} f(c)\, d_{T_2}(c) + \sum_{c \in C_2} f(c)$$

$$= B(T_1) + B(T_2) + \sum_{c \in C} f(c)$$



$$B(T) = B(T_1) + B(T_2) + \sum_{c\in C} f(c)$$

$$\Delta B = B(T) - (B(T_1)+B(T_2))$$

$$= \sum_{c\in C} f(c)$$

← COSTO DELL'OPERAZIONE DI MERGING DI T_1 E T_2

$C_1 \cup C_2 = C$

$c\in C_1 \quad d_{T_1}(c)+1 = d_T(c)$

$c\in C_2 \quad d_{T_2}(c)+1 = d_T(c)$

14
30
25
55
100

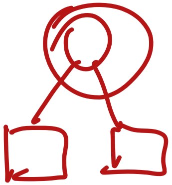
224

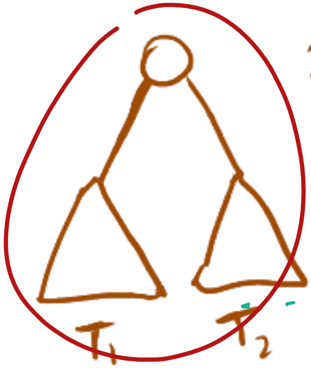
PER INDUZIONE SULL'ALTEZZA DI T, SI DIMOSTRA CHE:

$B(T)$ = SOMMA DEI COSTI DI TUTTE LE OPERAZIONI DI MERGING

<u>CASO BASE</u>: $\text{heigth}(T) = 1$ $\qquad B(T) = \text{merging}(\text{root}(T))$

<u>PASSO INDUTTIVO</u>:





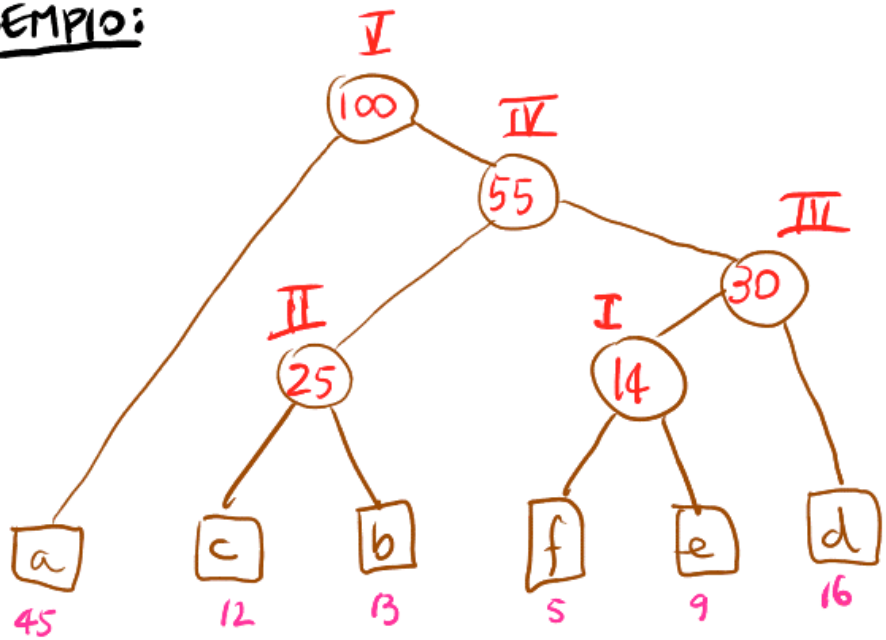
$$B(T) = B(T_1) + B(T_2) + \sum_{c \in C} f(c)$$

$$= \sum_{v \in \text{int}(T_1)} \text{merging}(v) + \sum_{v \in \text{int}(T_2)} \text{merging}(v)$$

$$+ \text{merging}(\text{root}(T))$$

$$= \sum_{v \in \text{int}(T)} \text{merging}(v)$$

ESEMPIO:



1 1 0 0 1 0 1

$$\begin{array}{r} 14 + \\ 30 + \\ 25 + \\ 55 + \\ 100 \\ \hline 224 \end{array}$$

- UNA POSSIBILE STRATEGIA "GREEDY" PER COSTRUIRE UN ALBERO DI COSTO MINIMO CONSISTE NELL'EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI MERGING DI COSTO MINIMO

HUFFMAN (C, f)

$n := |C|$

$Q :=$ make_queue (C, f)

for $i := 1$ **to** $n-1$ **do**

- SI ALLOCHI UN NUOVO NODO INTERNO z

left$[z] := x :=$ EXTRACT_MIN(Q)

right$[z] := y :=$ EXTRACT_MIN(Q)

$f[z] := f[x] + f[y]$

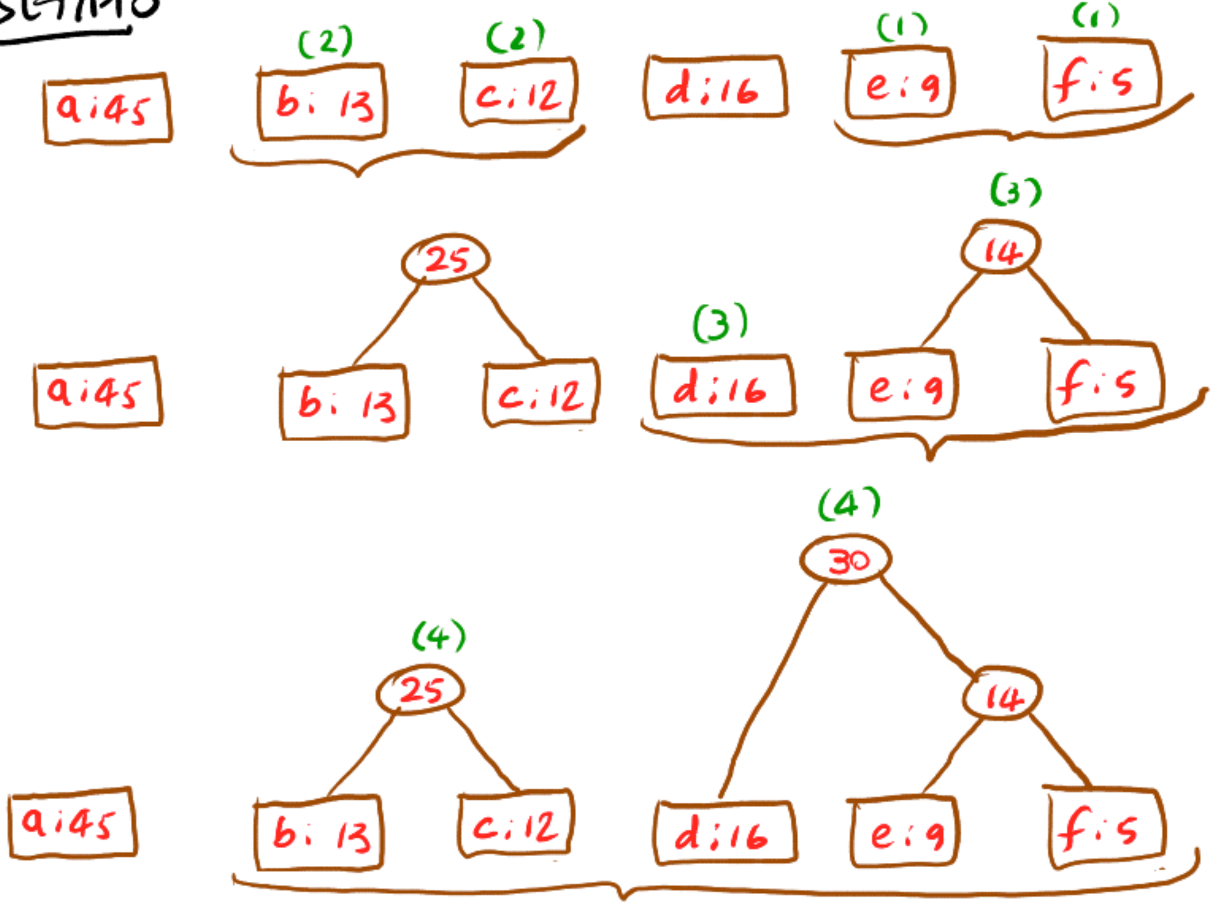
INSERT(Q, z, f)

return EXTRACT_MIN(Q)

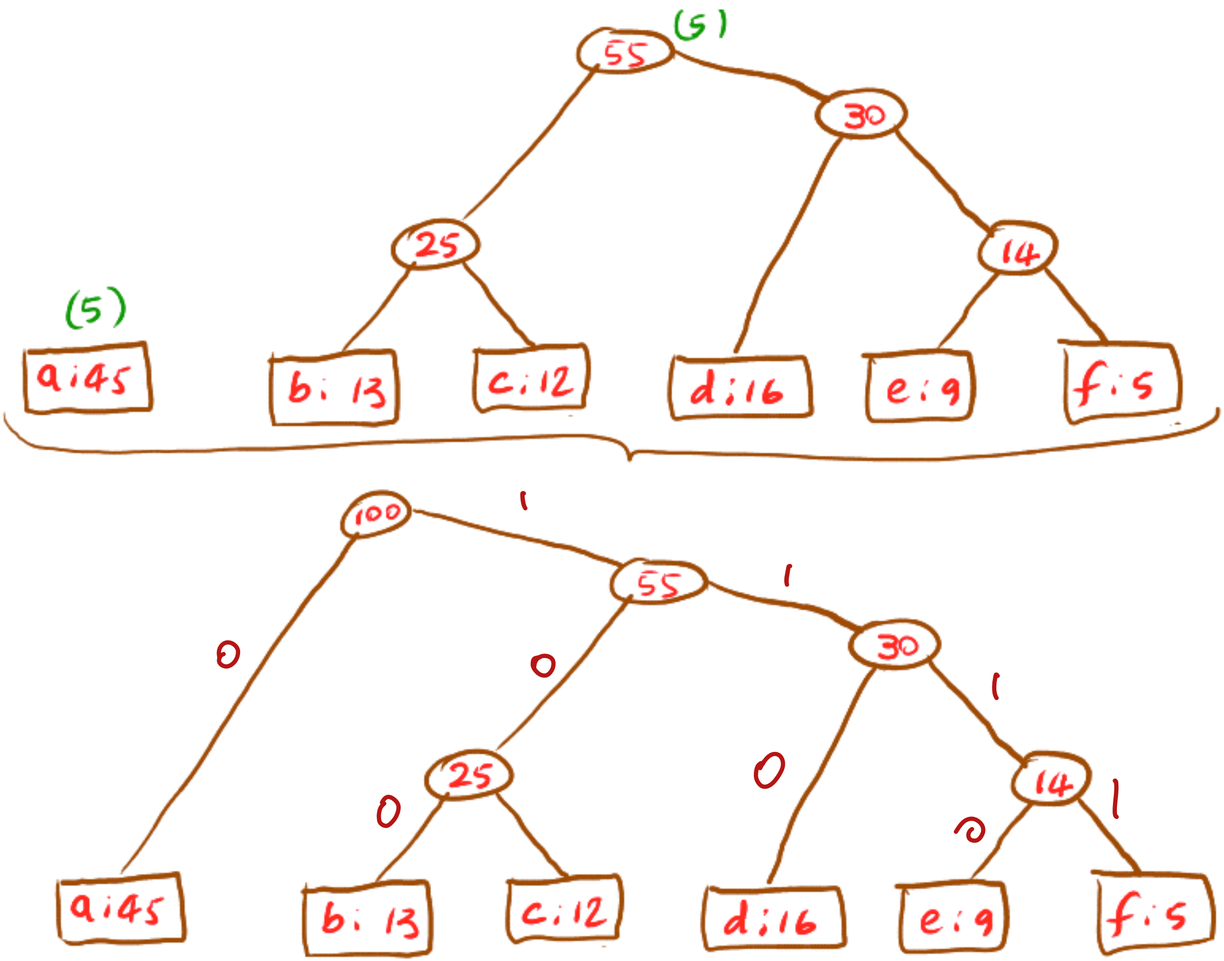
COMPLESSITA'

$(2n-1)$	EXTRACT MIN	$O(n \log n)$
$(n-1)$	INSERT	$O(n \log n)$
	BUILDHEAP	$O(n)$
		$O(n \log n)$

ESEMPIO



(2)
(2)
(1)
(1)
a:45
b: 13
c:12
d:16
e:9
f:5
(3)
25
14
(3)
a:45
b: 13
c:12
d:16
e:9
f:5
(4)
30
(4)
25
14
a:45
b: 13
c:12
d:16
e:9
f:5



a = 0

b = 100

c = 101

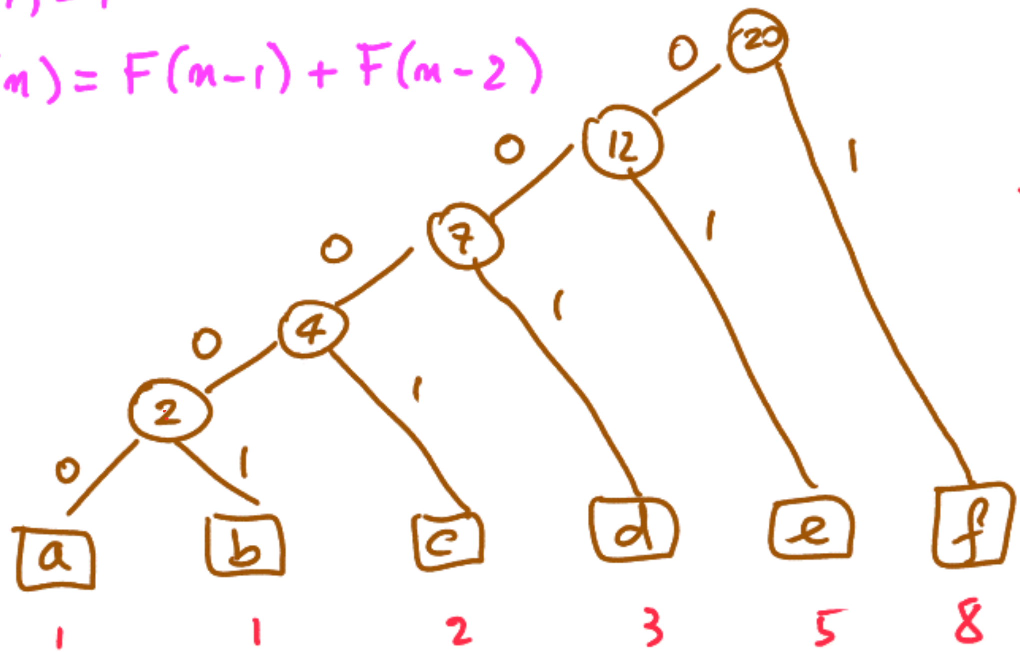
d = 110

e = 1110

f = 1111

LOWER-BOUND SULLA COMPLESSITA': $\Omega(n \lg n)$

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ F(1) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2) \end{cases}$$



a	00000
b	00001
c	0001
d	001
e	01
f	1

CORRETTEZZA DELL'ALGORITMO DI HUFFMAN

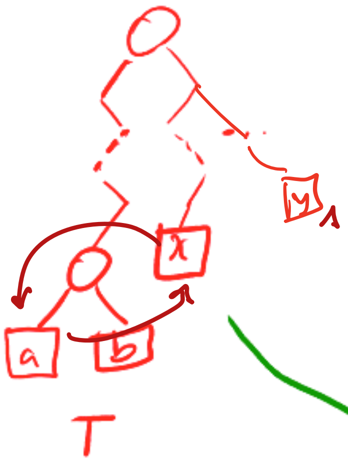
LEMMA SIA C UN ALFABETO E $f: C \to \mathbb{N}$ UNA FUNZIONE FREQUENZA.
SIANO x ED y I DUE CARATTERI IN C DI FREQUENZA MINIMA.
ALLORA ESISTE UN CODICE OTTIMO PREFISSO PER C IN CUI LE CODIFICHE DI x ED y DIFFERISCONO SOLO PER L'ULTIMO BIT.

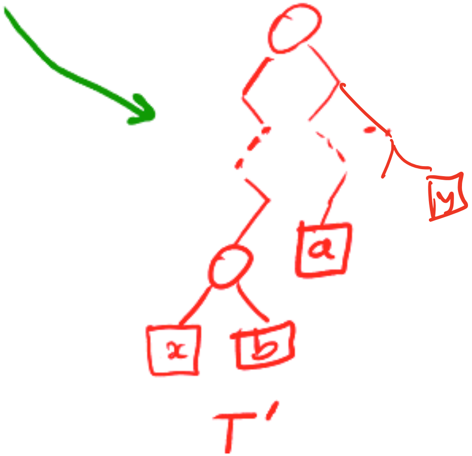
DIM. SIANO a E b DUE CARATTERI RESIDENTI SU FOGLIE SORELLE DI PROFONDITÀ MASSIMA IN UN ALBERO OTTIMO T.

SUPPONIAMO CHE $f(a) \le f(b)$ E $f(x) \le f(y)$.

ALLORA: $f(x) \le f(a)$ E $f(y) \le f(b)$.

SIA T' L'ALBERO OTTENUTO DA T SCAMBIANDO I CARATTERI a ED x.





SI HA:

$$B(T) - B(T') = \sum_{c \in C} f(c)\, d_T(c) - \sum_{c \in C} f(c)\, d_{T'}(c)$$

$$= f(a) d_T(a) + f(x) d_T(x) - f(a) d_{T'}(a) - f(x) d_{T'}(x)$$

$$= f(a) d_T(a) + f(x) d_T(x) - f(a) d_T(x) - f(x) d_T(a)$$

$$= f(a)\big(d_T(a) - d_T(x)\big) - f(x)\big(d_T(a) - d_T(x)\big)$$

$$= \big(f(a) - f(x)\big)\big(d_T(a) - d_T(x)\big) \geq 0$$

POICHE':

- $c \in C \setminus \{a, x\} \longrightarrow d_T(c) = d_{T'}(c)$
- $d_{T'}(a) = d_T(x)$
- $d_{T'}(x) = d_T(a)$

- SIA T'' L'ALBERO OTTENUTO DA T' SCAMBIANDO I CARATTERI b ED y.
- ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO PRIMA, SI HA:

$$B(T') - B(T'') \geq 0$$

- PERTANTO: $B(T) - B(T'') \geq 0$, DA CUI $B(T) \geq B(T'')$
- POICHE' T E' OTTIMO, $B(T'') \geq B(T)$, E QUINDI $B(T'')$ E' ANCH'ESSO OTTIMO
- INOLTRE IN T'' I CARATTERI x E y RISIEDONO SU FOGLIE SORELLE E QUINDI I LORO CODICI DIFFERISCONO SOLO PER L'ULTIMO BIT. ■

LEMMA

- SIA C UN ALFABETO E $f: C \rightarrow \mathbb{N}$ UNA FUNZIONE FREQUENZA.
- SIANO x ED y I DUE CARATTERI IN C DI FREQUENZA MINIMA.
- SIA $C' = (C \setminus \{x,y\}) \cup \{z\}$, CON $z \notin C$.
- SIA $f': C' \rightarrow \mathbb{N}$ TALE CHE: $f'(c) = \begin{cases} f(c) & \text{SE } c \neq z \\ f(x)+f(y) & \text{SE } c = z \end{cases}$
- SIA T' UN ALBERO OTTIMO PER (C', f').
- SIA T L'ALBERO OTTENUTO DA T' SOSTITUENDO LA FOGLIA z CON UN NODO INTERNO AVENTE COME FIGLI DUE FOGLIE ETICHETTATE CON x ED y, RISPETTIVAMENTE.

ALLORA T E' OTTIMO PER (C, f).

SIN QUI 30/11/2021

DIM. SI HA:

$$B(T) = \sum_{c \in C} f(c) d_T(c) = \sum_{c \in C \setminus \{x,y\}} f(c) d_T(c) + f(x) d_T(x) + f(y) d_T(y)$$

$$= \sum_{c \in C \setminus \{x,y\}} f'(c) d_{T'}(c) + f(x)(d_{T'}(z)+1) + f(y)(d_{T'}(z)+1)$$

$$= \sum_{c \in C \setminus \{x,y\}} f'(c) d_{T'}(c) + f'(z) d_{T'}(z) + f(x) + f(y)$$

$$= \sum_{c \in C'} f'(c) d_{T'}(c) + f(x) + f(y)$$

$$= B(T') + f(x) + f(y)$$

DA CUI: $B(T') = B(T) - f(x) - f(y)$

- SE T NON FOSSE OTTIMO PER (C,f), ESISTEREBBE UN ALBERO T'' OTTIMO PER (C,f) TALE CHE: $B(T'') < B(T)$.
- GRAZIE AL LEMMA PRECEDENTE, POSSIAMO SUPPORRE CHE x E y SI TROVINO SU FOGLIE SORELLE IN T''.
- SIA T''' OTTENUTO DA T'', SOSTITUENDO IL PADRE DI x E y CON UNA FOGLIA z CON FREQUENZA $f(x)+f(y)$.
- ALLORA:

$$\begin{aligned} B(T''') &= B(T'') - f(x) - f(y) \\ &< B(T) - f(x) - f(y) \\ &= B(T') \end{aligned}$$

CONTRADDICENDO L'OTTIMALITA' DI T' PER (C',f').
- PERTANTO T E' OTTIMO PER (C,f). ∎