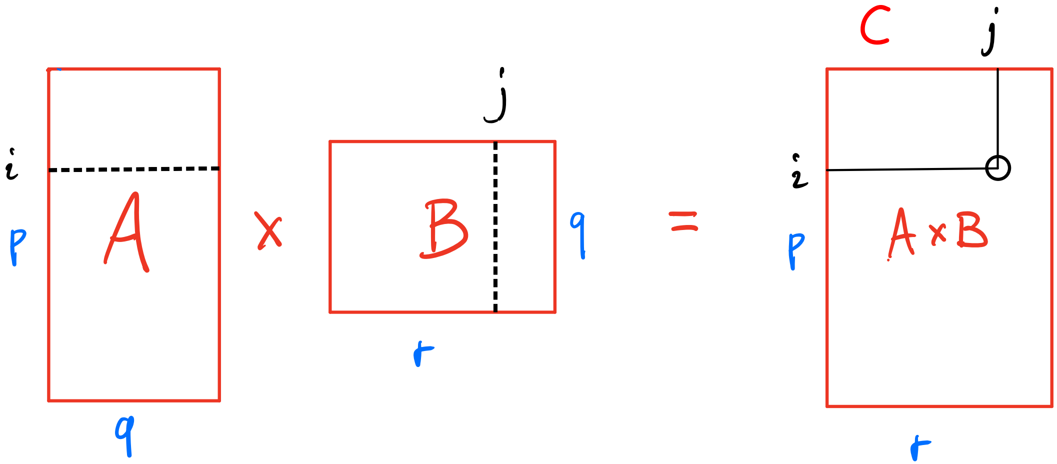
IL PROBLEMA DELLA MOLTIPLICAZIONE DI SEQUENZE DI MATRICI

- A - MATRICE $p \times q$
- B - MATRICE $q \times r$

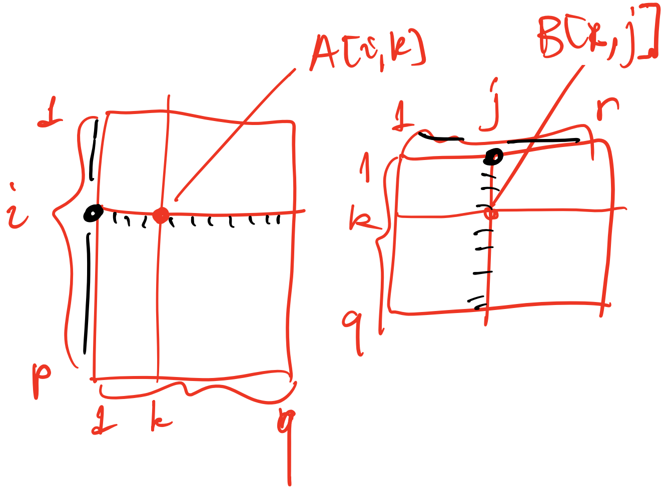
(E QUINDI A E B SONO COMPATIBILI)



$$C_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j} + \dots + A_{iq} \cdot B_{qj}$$

PRODOTTO DI MATRICI "RIGHE-PER-COLONNE"

```
MATRIX-MULTIPLY (A,B)
  p := rows[A]
  q := columns[A]
  r := columns[B]
  for i := 1 to p do
      for j := 1 to r do
          C[i,j] := 0
          for k := 1 to q do
              C[i,j] := C[i,j] + A[i,k] · B[k,j]
  return C
```

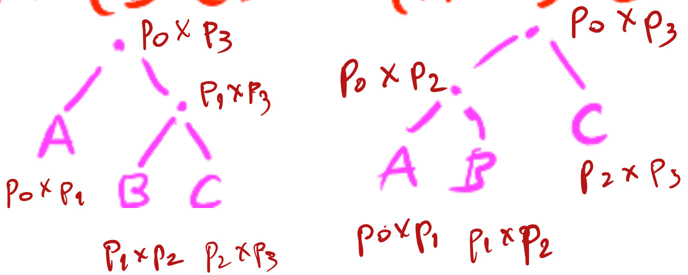


COMPLESSITA' $O(p \cdot q \cdot r)$

MOLTIPLICAZIONE DI SEQUENZE DI MATRICI

$$\left.\begin{cases} A_1 & p_0 \times p_1 \\ A_2 & p_1 \times p_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & p_{n-1} \times p_n \end{cases}\right\} \text{SEQUENZA DI MATRICI COMPATIBILI}$$

- A NOI INTERESSA CALCOLARE $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$
- IL PRODOTTO DI MATRICI E' ASSOCIATIVO, CIOE' $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$



ESEMPIO

A_1 : 10×100

A_2 : 100×5

A_3 : 5×50

$$\#(\overset{10 \times 5}{(A_1 \cdot A_2)} \cdot \overset{5 \times 50}{A_3}) = 10 \cdot 100 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 50 = 5000 + 2500 = 7500$$

$$\#(\overset{10 \times 100}{A_1} \cdot \overset{100 \times 50}{(A_2 \cdot A_3)}) = 100 \cdot 5 \cdot 50 + 10 \cdot 100 \cdot 50$$

$$= 25000 + 50000 = 75.000$$

ESEMPIO (DIVERSE PARENTESIZZAZIONI)

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$$

$$((A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4))$$

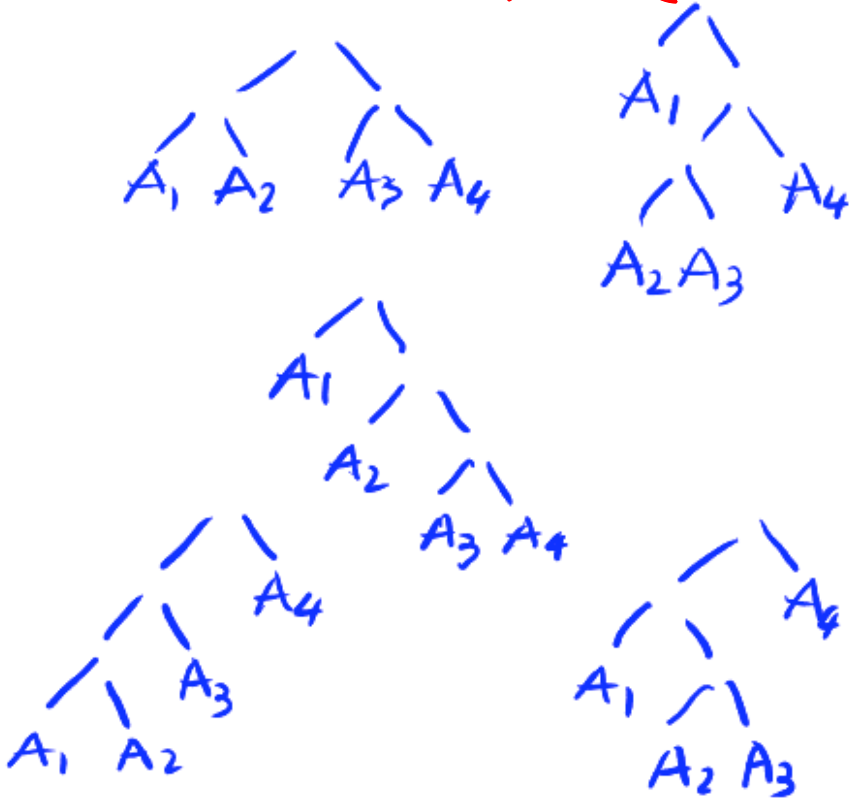
$$(A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4))$$

$$(A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4)))$$

$$(((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4)$$

$$((A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times A_4)$$

$A_1 \times (A_3 \times A_4)$ (A_2, A_3, A_4)



DEF. PARENTESIZZAZIONI COMPLETE DI UNA SEQUENZA DI MATRICI

SI DICE CHE UN'ESPRESSIONE E E' COMPLETAMENTE PARENTESIZZATA SE VALE UNA DELLE SEGUENTI CONDIZIONI:

- E E' UNA SINGOLA MATRICE
- E HA LA FORMA $(E_1 \cdot E_2)$, DOVE E_1 ED E_2 SONO ESPRESSIONI COMPLETAMENTE PARENTESIZZATE.

METODO ESAUSTIVO

LA COMPLESSITÀ DEL METODO ESAUSTIVO È DOMINATA DAL NUMERO DI DIVERSE PARENTESIZZAZIONI

$P(n) = \#$ DIVERSE PARENTESIZZAZIONI DI UNA SEQUENZA DI n MATRICI

$$\begin{cases} P(1) = 1 \\ P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(i) \cdot P(n-i) \end{cases}$$

$P(1) = 1$

$P(2) = 1$

$P(3) = P(1)P(2) + P(2) \cdot P(1) = 2$

$P(4) = P(1) \cdot P(3) + P(2) \cdot P(2) + P(3) \cdot P(1) = 2 + 1 + 2 = 5$

$n \geq 3,$

$$- P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(i) \cdot P(n-i) =$$

$$= 2P(1) \cdot P(n-1) + \sum_{i=2}^{n-2} P(i) \cdot P(n-i) \geq 2\, P(n-1)$$

$$P(n) \geq 2P(n-1) \geq 2 \cdot 2P(n-2) = 2^2 P(n-2)$$

$$\geq 2^{n-2} P(2) = 2^{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad P(n) = \Omega(2^n)$$

NUMERI DI CATALAN

$$P(n+1) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\, n!}$$

$$P(n) = \Omega\left(4^n / \sqrt{n^3}\right)$$

CARATTERIZZAZIONE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

SIA E UNA PARENTESIZZAZIONE OTTIMA PER LA SEQUENZA DI MATRICI $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ DI DIMENSIONI $(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

SUPPONIAMO CHE $n \geq 2$.

$E = (E_1 \cdot E_2)$,

CON E_1 PARENTESIZZAZIONE DI $(A_1, \ldots, A_k)$

E_2 PARENTESIZZAZIONE DI $(A_{k+1}, \ldots, A_n)$

$1 \leq k \leq n-1$

POICHE'

$$\#(E) = \#(E_1) + \#(E_2) + p_0 p_k p_n$$

NE SEGUE CHE

- E_1 PARENTESIZZAZIONE OTTIMA DI $(A_1, \ldots, A_k)$
- E_2 PARENTESIZZAZIONE OTTIMA DI $(A_{k+1}, \ldots, A_n)$

PERTANTO LA CLASSE DEI SOTTOPROBLEMI DA RISOLVERE E' DATA DA:

$$\{(A_i, \ldots, A_j) : 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

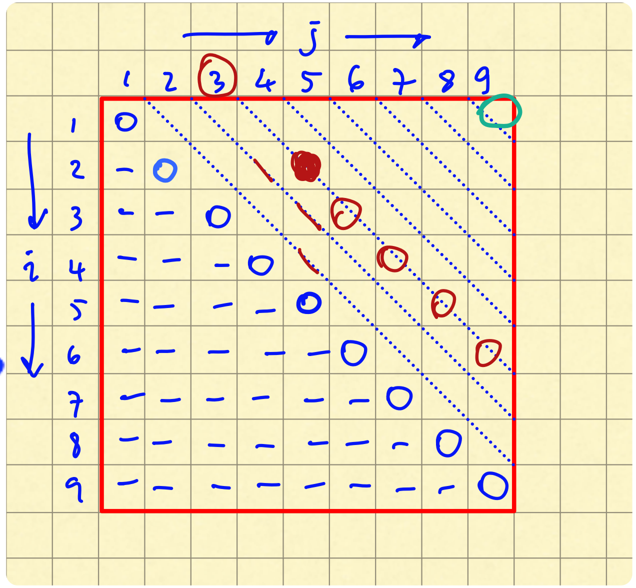
$m[i,j]$ = COSTO DI UNA SOLUZIONE OTTIMA DI $(A_i, \ldots, A_j)$

DEFINIZIONE RICORSIVA DEL COSTO DI UNA PARENTESIZZAZIONE OTTIMA

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & i=j \\ \min\limits_{i \le k < j} \left(m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j \right) & i<j \end{cases}$$

PASSO 3: CALCOLO DEL VALORE DI UNA SOLUZ. OTTIMA

```
MATRIX_CHAIN_ORDER(p)
for i:=1 to n do
    m[i,i]:=0
for Δ:=1 to n-1 do
    for i:=1 to n-Δ do
        j:=Δ+i
        m[i,j]:=+∞
        for k:=i to j-1 do
            q:=m[i,k]+m[k+1,j]+P_{i-1} P_k P_j
            if q<m[i,j] then
                m[i,j]:=q
                s[i,j]:=k
return m,s
```



FIN QUI 9/11/2021

PASSO 4 : COSTRUZIONE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

```
MATRIX_CHAIN_MULTIPLY(A, s, i, j)
  if i = j then
      return Ai
  else
      X := MATRIX_CHAIN_MULTIPLY(A, s, i, s[i,j])
      Y := MATRIX_CHAIN_MULTIPLY(A, s, s[i,j]+1, j)
      return MATRIX_MULTIPLY(X, Y)
```

$$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6)$$

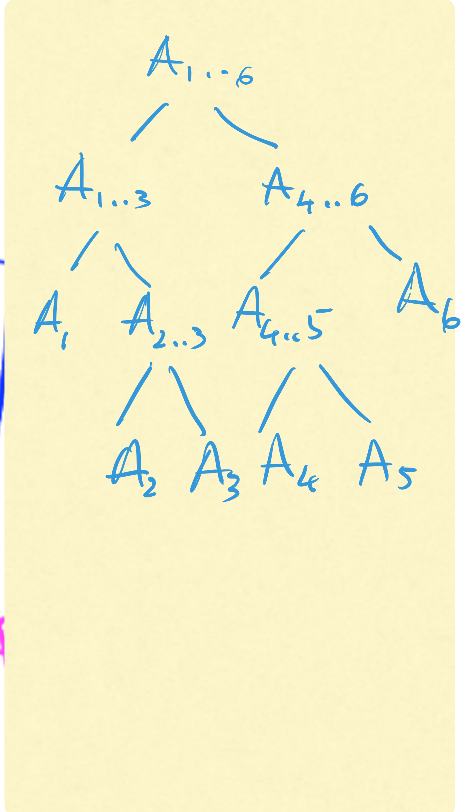
ESEMPIO

$$A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$$

$$p = (30, 35, 15, 5, 10, 20, 25)$$

	1	2	3	4	5	6
1	0	15750 [1]	7875 [1]	9375 [3]	11875 [3]	15125 [3]
2	–	0	2625 [2]	4375 [3]	7125 [3]	10500 [3]
3	–	–	0	750 [3]	2500 [3]	5375 [3]
4	–	–	–	0	1000 [4]	3500 [5]
5	–	–	–	–	0	5000 [5]
6	–	–	–	–	–	0

$$(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) \cdot ((A_4 \cdot A_5) \cdot A_6)$$



ESEMPIO

$A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$

$p = (30, 35, 15, 5, 10, 20, 25)$

$m[i,j]$

$s[i,j]$

	1	2	3	4	5	6
1	0	15750^{1}	7875^{1}	9375^{3}	11875^{3}	15125^{3}
2	–	0	2625^{2}	4375^{3}	7125^{3}	10500^{3}
3	–	–	0	750^{3}	2500^{3}	5375^{3}
4	–	–	–	0	1000^{4}	3500^{5}
5	–	–	–	–	0	5000^{5}
6	–	–	–	–	–	0

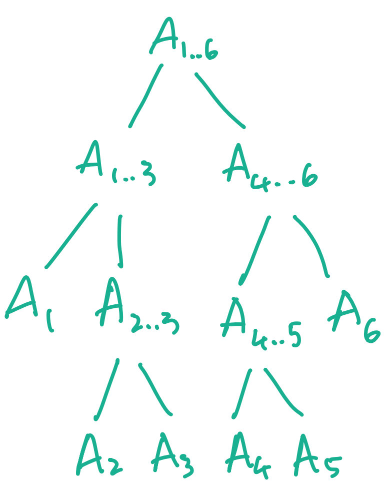
$p = (30, 35, 15, 5, 10, 20, 25)$

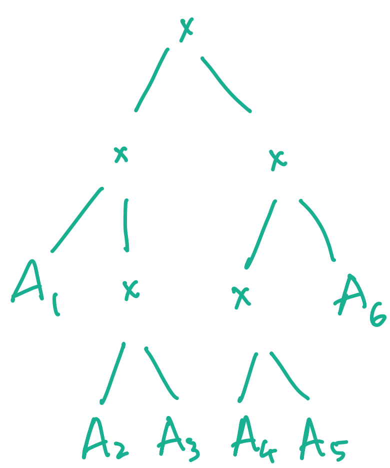
	30×35×15=15,750
35×15×5=	15,750÷30×5=2,625
15×5×10=	2,625÷35×10=750
5×10×20=	750÷15×20=1,000
10×20×25=	1,000÷5×25=5,000

$A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$

$p = (30, 35, 15, 5, 10, 20, 25)$

	1	2	3	4	5	6
1	0	15750^{1}	7875^{1}	9375^{3}	11875^{3}	15125^{3}
2	—	0	2625^{2}	4375^{3}	7125^{3}	10500^{3}
3	—	—	0	750^{3}	2500^{3}	5375^{3}
4	—	—	—	0	1000^{4}	3500^{5}
5	—	—	—	—	0	5000^{5}
6	—	—	—	—	—	0





$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6)$

Es. $m[1,5] = \min\limits_{1 \le k < 5} \left(m[1,k] + m[k+1,5] + p_0 \, p_k \, p_5 \right)$

$$
\begin{aligned}
&= \min \begin{cases} m[1,1] + m[2,5] + p_0 \, p_1 \, p_5 , \\ m[1,2] + m[3,5] + p_0 \, p_2 \, p_5 , \\ m[1,3] + m[4,5] + p_0 \, p_3 \, p_5 , \\ m[1,4] + m[5,5] + p_0 \, p_4 \, p_5 \end{cases} \\
&= \min \begin{cases} 0 + 7125 + 30 \cdot 35 \cdot 20 , \\ 15750 + 2500 + 30 \cdot 15 \cdot 20 , \\ 7875 + 1000 + 30 \cdot 5 \cdot 20 , \\ 9375 + 0 + 30 \cdot 10 \cdot 20 \end{cases} \\
&= \min \begin{cases} 0 + 7125 + 21000 , \\ 15750 + 2500 + 9000 , \\ 7875 + 1000 + 3000 , \\ 9375 + 0 + 6000 \end{cases} \\
&= \min \{ \underset{k=1}{28125} , \underset{k=2}{27250} , \underset{k=3}{11875} , \underset{k=4}{15375} \} \\
&= 11875
\end{aligned}
$$

$s[1,5] = 3$