N.B. I presenti appunti, dal cap. 1 al cap. 4, sono destinati esclusivamente agli studenti del corso di Elementi di Analisi Matematica 2 (a.a. 2022-2023) da noi tenuto presso il CdL in Informatica dell'Università di Catania, ed è vietato ogni altro utilizzo.Ringraziamo fin da ora coloro che ci segnaleranno eventuali refusi.
proff. G.R. Cirmi, O. Naselli

# Capitolo 2

# Serie numeriche

## 2.1 Prime definizioni

Sia data una successione di numeri reali $\{a_n\}$.

La somma di tutti i suoi termini viene indicata con uno dei simboli

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots$$

oppure

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.1}$$

ed è chiamata serie numerica di termine generale $a_n$. Per attribuire un significato, eventualmente numerico, alla serie, si introducono le seguenti somme (con un numero finito di addendi):

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1\\
&s_2 = a_1 + a_2\\
&\vdots\\
&s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \;\; n \in \mathbb{N}, n > 1.
\end{aligned}$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$ il numero $s_n$ si chiama *somma parziale di posto* $n$ (o *somma parziale* $n$*- esima*) della serie (2.1) e si può scrivere anche nella forma

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Il comportamento al limite della successione $\{s_n\}$ delle somme parziali è chiamato *carattere* della serie.

Precisamente:

- se $s_n \to s$, si dice che la serie **converge** ed ha *somma* $s$, e si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

- se $s_n \to +\infty(-\infty)$, si dice che la serie **diverge positivamente** (**negativamente**)
- se $\{s_n\}$ è non regolare, si dice che la serie è **indeterminata** o **oscillante** o **non regolare**

*Studiare il carattere di una serie numerica vuol dire stabilire se è regolare o no e, in caso di regolarità, se è convergente o divergente positivamente o divergente negativamente.*

Esempio 1 Sia $k \in \mathbf{R}$.

La serie di termine generale

$$a_n = k, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ha la somma parziale $n$-esima

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ kn & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi se $k = 0$ converge ed ha somma 0, se $k > 0$ diverge positivamente, se $k < 0$ diverge negativamente.

Esempio 2 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

ha somma parziale $n$-esima

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque diverge positivamente.

Esempio 3 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

è indeterminata, in quanto la somma parziale $n$-esima è data da

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e quindi $\{s_n\}$ non è dotata di limite.

Esempio 4 Sia $\{x_n\}$ una successione numerica. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1})$$

è detta *serie telescopica.*

La sua somma parziale di posto $n$ è

$$s_n = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{n+1}$$

e quindi la serie

- converge ed ha somma $x_1 - l$ se $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$;
- diverge positivamente (negativamente) se $\lim x_n = +\infty(-\infty)$;
- è indeterminata se non esiste il $\lim x_n$.

Ad esempio, se $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la serie telescopica (serie di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

converge ad 1.

Esempio 5 Sia $x \in \mathbf{R}$. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

si chiama *serie geometrica di ragione $x$*.

Se $x = 1$ la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ e diverge positivamente.

Se $x \neq 1$, la somma parziale di posto $n$ è

$$s_n = 1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Poichè

$$\lim x^n \begin{cases} = +\infty & \text{se } x > 1 \\ = 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \\ \end{cases}$$

la serie geometrica

- diverge positivamente se $x > 1$;
- converge ed ha somma $\dfrac{1}{1-x}$ se e solo se $-1 < x < 1$;
- è indeterminata se $x \leq -1$.

Ad esempio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

Esempio 6 La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
si chiama *serie armonica* . La somma parziale $n$-esima è

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Diversamente dagli esempi precedenti, in questo caso non riusciamo a trovare un'espressione analitica della successione $\{s_n\}$ che consente di determinarne il limite. Osserviamo, tuttavia, che poichè

$$e = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right\}$$

per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e$$

e dunque
$$\log \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 1$$

che implica
$$\log \frac{k+1}{k} < \frac{1}{k}. \tag{2.2}$$

Utilizzando la disuguaglianza (2.2) si ottiene

$$\begin{aligned} s_n &> \log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \cdots + \log \frac{n+1}{n} \\ &= \log \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \quad \cdots \quad \cdot \frac{n+1}{n}\right) \\ &= \log(n+1) \end{aligned}$$

cioè

$$s_n > \log(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dato che

$$\lim \log(n+1) = +\infty$$

per il Teorema del confronto sulle successioni, si ottiene che

$$\lim s_n = +\infty$$

e quindi la serie armonica diverge positivamente.

## 2.2 Risultati generali

.

Per le serie numeriche convergenti vale la seguente

**Teorema 1 (Condizione necessaria per la convergenza)** *Se la serie (2.1) converge allora*

$$\lim a_n = 0$$

.

**Dimostrazione** Basta osservare che $a_n = s_n - s_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 1 La condizione espressa dal Teorema 1 è una condizione **solo necessaria** per la convergenza, ma non sufficiente, cioè

$$\lim a_n = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{converge.}$$

Ad esempio,

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

ma la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge positivamente.

**Definizione 1 (Serie resto)** *Sia $p \in \mathbb{N}$.*

*La serie*

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$$

*ottenuta dalla serie (2.1) sopprimendo i suoi primi $p$ termini, è detta resto di posto $p$ della (2.1) .*

Si ha subito la seguente

**Proposizione 1** *Una serie e tutti i suoi resti hanno il medesimo carattere.*

*In particolare, in caso di convergenza si ha:*

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + \cdots + a_p)$$

**Dimostrazione** Basta osservare che, indicata con $S_n$ la somma parziale $n-$ esima della serie resto, si ha

$$\begin{aligned} S_n &= a_{p+1} + \cdots + a_{p+n} \\ &= s_{n+p} - s_p \end{aligned}$$

e che la successione $\{s_{n+p}\}$ ha lo stesso comportamento al limite di $\{s_n\}$ essendo definitivamente uguale ad essa.

Esempio 7 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

è il primo resto della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ quindi è convergente e la sua somma è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Utilizzando la Proposizione 1 possiamo provare la seguente

**Proposizione 2** *Se due serie differiscono per un numero finito di termini, esse hanno lo stesso carattere.*

**Dimostrazione** Accanto alla serie (2.1), consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2.3}$$

e supponiamo che $b_n \neq a_n$ solo per un numero finito di indici, siano essi $n_1, \cdots, n_k$. Se $p = \max\{n_1, \cdots, n_k\}$, i resti di posto $p$ delle due serie coincidono, la tesi segue allora dalla Proposizione 1.

**Proposizione 3** *Sia $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Allora, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$$

*è regolare se e solo se la serie (2.1) è regolare.*

*In particolare*

*i)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} ka_n \quad \textit{converge}$$

*e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

*ii)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{diverge positivamente}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n \begin{cases} \textit{diverge positivamente} & \textit{se } k > 0 \\ \textit{diverge negativamente} & \textit{se } k < 0 \end{cases}$$

*iii)*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge negativamente}$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n \begin{cases} \text{diverge negativamente} & \text{se } k > 0 \\ \text{diverge positivamente} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

**Dimostrazione** Basta osservare che le somme parziali della serie (3) sono $S_n = k s_n$.

Alla luce della Proposizione 3, la serie dell'esempio 7 può essere rivista come ottenuta moltiplicando per $\frac{1}{2}$ i termini della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, ottenendo ancora una volta che la somma è $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

**Definizione 2** *Date le serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; e \;\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
*la serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$
*si chiama serie somma.*

Vale la seguente

**Proposizione 4** *Se* $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *si ha* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + S$. *Se una delle due serie converge e l'altra diverge, o entrambe divergono con lo stesso segno, la serie somma diverge.*

**Dimostrazione** Basta osservare che le somme parziali della serie somma si ottengono sommando le somme parziali delle due serie.

Ci sono due categorie di serie per le quali, a partire da considerazioni sul termine generale, si possono avere informazioni sul carattere della serie. Una è quella delle serie i cui termini hanno tutti lo stesso segno, l'altra è quella delle serie i cui termini sono alternativamente positivi e negativi.

## 2.3 Serie a termini di segno costante

Grazie alla Proposizione 3 senza ledere la generalità possiamo supporre che $a_n \geq 0 \;\; \forall n \in \mathbf{N}$. Osserviamo subito che, in questo caso, si ha

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La successione delle somme parziali è dunque crescente, quindi

$$\exists \lim s_n = \sup\{s_n\}.$$

Pertanto, vale il seguente

**Teorema 2 (Regolarità delle serie a termini non negativi)** *Ogni serie a termini non negativi è regolare.*

Precisamente, la serie converge se e solo se la successione delle somme parziali è limitata superiormente, e in tal caso la somma della serie è l'estremo superiore delle somme parziali.

Esponiamo alcuni criteri utili per stabilire il carattere di una serie a termini non negativi.

**Teorema 3 ( Criterio del confronto)** *Siano*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

*due serie a termini non negativi, tali che*

$$a_n \leq b_n \qquad \textit{per ogni } n \in \mathbf{N} \textit{ o definitivamente.}$$

*Allora si ha:*

*i) se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge;*

*ii) se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

**Dimostrazione** Il risultato segue subito osservando che, indicate rispettivamente con $s_n$ e $S_n$ le somme parziali delle due serie, si ha $s_n \leq S_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ . In particolare, in caso di convergenza, indicate rispettivamente con $s$ e $S$ le somme delle due serie, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n \leq S_n \leq S$$

e quindi $s \leq S$.

**Teorema 4 ( Criterio del confronto asintotico.)** *Siano*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

*due serie a termini positivi.*

*i) se* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = l > 0$ *le due serie hanno lo stesso carattere*

*ii) se* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge allora* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge;*

*iii) se* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge positivamente allora* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge positivamente.*

**Dimostrazione.** *i)* Basta osservare che, definitivamente, si ha

$$\frac{l}{2}\, b_n \leq a_n \leq 2l\, b_n$$

e applicare il criterio precedente.

*ii), iii)* Basta osservare che, definitivamente, si ha $a_n \leq b_n$ e anche stavolta applicare il criterio precedente.

Osservazione 2 Ricordiamo che se

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

si dice che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche e si scrive $a_n \sim b_n$. Invece, se

$$\lim a_n = \lim b_n = 0$$

e

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$$

si dice che $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\{b_n\}$ e si scrive $a_n = o(b_n)$.

Esempio 8 Sia $a_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ e supponiamo che

$$\lim 2^n a_n = 3.$$

Cosa si può dire sul carattere della serie di termine generale $a_n$? Dall'ipotesi segue che

$$a_n \sim \frac{3}{2^n}$$

e, dato che la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, anche la serie di termine generale $a_n$ converge.

Esempio 9 Sia $a_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ e supponiamo che

$$\lim a_n = +\infty \quad \text{e} \lim \frac{a_n}{n} = 0.$$

Cosa si può dire sul carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}?$$

Dall'ipotesi segue che $\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{a_n}} = 0$, quindi $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{a_n})$, ne segue che la serie considerata diverge.

**Teorema 5 ( Criterio del rapporto.)** *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*una serie a termini positivi tale che*

$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

*i) Se $l > 1$ oppure $l = +\infty$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente;*

*ii) se $l < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

**Dimostrazione** *i)* Per il teorema della permanenza del segno generalizzato esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \forall n > \nu$ ovvero

$$a_{n+1} > a_n, \forall n > \nu.$$

La successione $\{a_n\}$ è definitivamente crescente e, pertanto,

$$\lim a_n = \sup\{a_n, n > \nu\} > 0.$$

Poichè il termine generale della serie non tende a zero, per il Teorema 1 la serie non converge e quindi diverge positivamente.

*ii)* Sia $h \in ]l, 1[$. Come nel caso precedente esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che se $n > \nu$ si ha $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < h$ quindi $a_{n+1} < h a_n$ . Si ha dunque

$a_{\nu+1} < h a_\nu$

$a_{\nu+2} < h a_{\nu+1} < h^2 a_\nu$

$\dots$

$$a_{n+\nu} < h^n a_\nu.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} h^n a_\nu$ converge perchè ha lo stesso carattere della serie geometrica di ragione $h$ e, per il Teorema del confronto, anche la serie data converge.

ESEMPIO 10 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1} n!}.$$

Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}(n+1)!} \, \frac{3^{n+1} n!}{2^n} = \frac{2}{3(n+1)} \to 0$$

quindi la serie converge.

ESEMPIO 11 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n+2} n!}.$$

Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+3}(n+1)!} \, \frac{2^{n+2} n!}{n^n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1$$

quindi la serie diverge.

OSSERVAZIONE 3 Se $l = 1$ il criterio non fornisce alcuna informazione: ad esempio la serie armonica diverge positivamente mentre, come vedremo dopo, la serie di termine generale $\frac{1}{n^2}$ converge e in entrambi i casi si ha $l = 1$.

**Teorema 6 (Criterio della radice)** *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*una serie a termini non negativi tale che*

$$\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = l.$$

*. Allora si ha*

*i) se* $l > 1$ *oppure* $l = +\infty$ *la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge positivamente;*

*ii) se* $l < 1$, *la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*

**Dimostrazione.** *i)* Si ha, definitivamente, $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ovvero $a_n > 1$, quindi il termine generale della serie non può tendere a zero e per il Teorema 1 la serie diverge positivamente.

*ii)* Sia $h \in ]l, 1[$.Allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per $n > \nu$ si ha $\sqrt[n]{a_n} < h$ quindi

$$a_n < h^n \quad \forall n > \nu,$$

e la serie converge per confronto con la serie geometrica di ragione $h$.

Esempio 12 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{3n+4} \right)^n.$$

Si ha

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{3n+4} \to \frac{1}{3},$$

quindi la serie converge.

Osservazione 4 Anche in questo caso, se $l = 1$ il criterio non fornisce alcuna informazione. La serie armonica diverge positivamente mentre, come vedremo dopo, la serie di termine generale $\frac{1}{n^2}$ converge e in entrambi i casi si ha $l = 1$.

**Teorema 7 (Criterio di Raabe.)** *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*una serie a termini positivi tale che*

$$\exists \lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l.$$

*Allora si ha:*

*i) se $l > 1$ oppure $+\infty$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge*

*ii) se $l < 1$ oppure $-\infty$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente.*

Omettiamo la dimostrazione del criterio di Raabe, lo utilizziamo per studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

detta *serie armonica generalizzata di esponente* $x$, essendo $x$ un numero reale. Si ha

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{\frac{1}{n^x}}{\frac{1}{(n+1)^x}} - 1\right) =$$

$$n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^x - 1\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x - 1}{\frac{1}{n}} \to x$$

quindi la serie armonica generalizzata converge se e solo se $x > 1$ (il caso $x = 1$ era già noto).

**Teorema 8 (Criterio del confronto con la serie armonica generalizzata)** *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*una serie a termini non negativi. Se esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che*

$$\lim\ n^x\ a_n = l > 0$$

*allora si ha*

*i) se $x > 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;*

*ii) se $x \leq 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente.*

**Dimostrazione** Basta osservare che

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^x}} \to l$$

ed applicare il Criterio del confronto asintotico .

Osservazione 5 . Il criterio appena esposto è anche detto **Criterio dell'ordine di infinitesimo** perché se $\{a_n\}$ è infinitesima ([1]) dal fatto che $n^x a_n \to l > 0$ segue che $a_n \sim \frac{l}{n^x}$, ossia che $\{a_n\}$ è infinitesimo di ordine $x$ rispetto all'infinitesimo campione $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

Utilizzando i criteri sulle serie a termini non negativi, siamo in grado di introdurre una classe di serie che possono essere studiate abbastanza facilmente.

---

[1] Se $\lim a_n \neq 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente

## 2.4 Serie assolutamente convergenti

Accanto alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{2.4}$$

si consideri la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{2.5}$$

che è a termini non negativi.

**Definizione 3** *Diremo che la serie (2.4) è assolutamente convergente se la serie (2.5) è convergente.*

Si ha il seguente risultato

**Teorema 9** *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

**Dimostrazione.**
Osserviamo che

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poichè

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ è convergente per il criterio del confronto sulle serie a termini non negativi. La tesi segue dal fatto che la serie data è differenza di due serie convergenti.

Esempio 13 (Serie esponenziale) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

essendo $x \in \mathbb{R}$.

Per $x = 0$ conveniamo che $x^{n-1} = 1$ se $n = 1$, pertanto essa converge ed ha somma 1 .

Per $x > 0$ possiamo studiarla con il criterio del rapporto; poiché si ha

$$\frac{x^n}{n!} \, \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} \to 0$$

la serie converge.

Se $x < 0$ la serie dei valori assoluti è quella di termine generale $\dfrac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$ e converge perché rientra nel caso precedente. La serie esponenziale, dunque, converge (assolutamente) per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 6 In generale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge assolutamente}$$

Infatti, nel prossimo paragrafo vedremo che la serie armonica a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge, ma non è assolutamente convergente.

## 2.5 Serie a segni alterni

Data una successione $\{a_n\}$ di numeri positivi (o negativi), consideriamo la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{2.6}$$

i cui termini di posto dispari sono positivi e quelli di posto pari sono negativi (o viceversa). Se la successione $\{a_n\}$ è monotona è possibile stabilire dei criteri che permettono di studiare il carattere della serie (2.6).

Premettiamo il seguente risultato.

**Lemma 1** *Se la successione $\{a_n\}$ è monotona, la serie (2.6) non può divergere.*

**Dimostrazione.** Per fissare le idee, supponiamo che la successione $\{a_n\}$ sia decrescente. Indichiamo con $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali e proviamo che la sua estratta $\{s_{2n}\}$ è una successione crescente. Si ha infatti, dato che $\{a_n\}$ è decrescente, $a_{2n+1} > a_{2n+2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > s_{2n}$$

dunque la successione $\{s_{2n}\}$ è crescente, quindi non può divergere a $-\infty$. Allo stesso modo si prova che la successione $\{s_{2n-1}\}$ delle somme parziali di posto dispari è decrescente, quindi non può divergere a $+\infty$. Ne segue la tesi.

Siamo in grado ora di stabilire i seguenti criteri:

**Teorema 10 (Criterio di Leibniz.)** *Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ sia decrescente e che*

$$\lim a_n = 0.$$

*Allora, la serie (2.6) è convergente e, indicata con $s$ la sua somma si ha*

$$|s - s_n| \leq a_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

**Dimostrazione.** Dal lemma precedente segue che la serie non diverge; per provare che converge basta dimostrare che $\{s_{2n}\}$ e $\{s_{2n-1}\}$ convergono allo stesso limite. Come osservato nella dimostrazione del lemma, $\{s_{2n-1}\}$ è decrescente, ed essendo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1}$$

essa è a termini non negativi, in quanto è somma di addendi non negativi e quindi è limitata inferiormente. Pertanto, $\{s_{2n-1}\}$ non tende a $-\infty$ ma ad un numero $s = \inf s_{2n-1}$.

Osserviamo che

$$s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \to s$$

e la convergenza della serie è dunque acquisita. Inoltre , dato che $\{s_{2n}\}$ è crescente, si ha $s = \sup s_{2n}$.

Proviamo ora la disuguaglianza (2.7). Sia $n \in \mathbf{N}$. Se $n$ è pari, si ha $s \geq s_n$ quindi la (2.7) equivale a $s - s_n \leq a_{n+1}$, ovvero $s \leq s_{n+1}$, che è vera in quanto $n+1$ è dispari. Se $n$ è dispari, si ha $s \leq s_n$ quindi la (2.7) equivale a $s_n - s \leq a_{n+1}$, ovvero $s \geq s_{n+1}$, che è vera in quanto $n + 1$ è pari.

**Teorema 11 ( Criterio di non regolarità.)** *Se la successione $\{a_n\}$ è crescente ed ha almeno un termine positivo, oppure è decrescente e non tende a zero, la serie (2.6) è indeterminata.*

**Dimostrazione.** Sotto le ipotesi fatte

$$\lim a_n \neq 0$$

e per il Teorema 1 la serie non può convergere. D'altra parte per il Lemma 1 non può divergere, dunque essa è indeterminata.

Esempio 14 (Serie armonica alternata) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Dal criterio di Leibniz segue che essa converge.

Esempio 15 (Serie logaritmica) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

essendo $x \in \mathbb{R}$. Per $x = 0$ essa converge ed ha somma zero. Per $x > 0$ possiamo studiarla con il criterio del rapporto; poi chè

$$\lim \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{x^n} = x$$

la serie converge per $0 < x < 1$ e diverge per $x > 1$.

Se $x = 1$ diverge (è la serie armonica).

Se $x < 0$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{n}$$

che è a segni alterni.

Se $-1 < x < 0$ allora $|x| < 1$ e la serie dei valori assoluti per il caso precedente è convergente, quindi la serie logaritmica è assolutamente convergente.

Se $x = -1$ la serie logaritmica converge (è la serie armonica alternata).

Se $x < -1$, trattandosi di una serie a segni alterni, studiamo la monotonia della successione $\left\{ \frac{|x|^n}{n} \right\}$. Precisamente, proviamo che definitivamente si ha

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1} > \frac{|x|^n}{n}.$$

Questa diseguaglianza equivale infatti a $|x| > \frac{n+1}{n}$, che definitivamente è vera perché $|x| > 1$ e il secondo membro tende ad 1. In definitiva, la serie logaritmica converge se e solo se $-1 \leq x < 1$.

Esempio 16 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n+2}$$

essendo $x \in \mathbb{R}$.

Per $x = 0$ essa converge ed ha somma zero.

Per $x > 0$ possiamo studiarla con il criterio del rapporto, si ha

$$\lim \frac{(2x)^{n+1}}{n+3} \, \frac{n+2}{(2x)^n} = 2x,$$

quindi se $0 < x < \frac{1}{2}$ la serie converge, se $x > \frac{1}{2}$ diverge. Per $x = \frac{1}{2}$ diverge essendo il secondo resto della serie armonica.

Se $x < 0$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, |2x|^n}{n+2}$$

e quindi è a segni alterni.Se $-\frac{1}{2} < x < 0$ la serie converge assolutamente, per $x = -\frac{1}{2}$ converge non assolutamente essendo il secondo resto della serie armonica alternata.

Se $x < -\frac{1}{2}$ studiamo la monotonia della successione

$$\left\{ \frac{|2x|^n}{n+2} \right\}.$$

Verifichiamo che definitivamente si ha

$$\frac{|2x|^n}{n+2} < \frac{|2x|^{n+1}}{n+3}.$$

Quest'ultima disuguaglianza equivale a $\dfrac{n+3}{n+2} < |2x|$ che definitivamente è vera perché $|2x| > 1$ e il secondo membro tende ad 1.

## 2.6 Cenni sulle serie di funzioni

Consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, una funzione $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$. In modo del tutto analogo a come abbiamo introdotto le serie numeriche, è possibile prendere in considerazione la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2.8}$$

Per una serie di funzioni si possono introdurre varie nozioni di convergenza, punteremo la nostra attenzione solo su due di esse.

**Definizione 4** *Sia $\bar{x} \in (a, b)$. Si dice che la serie di funzioni* (2.8) *converge nel punto $\bar{x}$ se la serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\bar{x})$$

*è convergente.*

**Definizione 5** *La serie di funzioni* (2.8) *si dice convergente puntualmente in $(a, b)$ se è convergente in ogni punto $x \in (a, b)$.*

*In tale caso la funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ che ad ogni $x \in (a, b)$ associa la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è detta funzione somma della serie* (2.8) *e si scrive $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.*

Ad esempio, per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo le funzioni potenza

$$f_n(x) = x^{n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e consideriamo la corrispondente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}. \tag{2.9}$$

Ricordando lo studio della serie geometrica di ragione $x$, possiamo dire che la serie di funzioni (2.9) converge puntualmente in $]-1, 1[$. La sua funzione somma è definita da

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

**Definizione 6** *Si dice che la serie di funzioni* (2.8) *converge totalmente in $(a, b)$ se esiste una serie numerica a termini non negativi, convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, tale che*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in (a, b), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dalla definizione segue subito che una serie totalmente convergente è puntualmente convergente. Sia infatti $\bar{x} \in (a,b)$; la serie di termine generale $|f_n(\bar{x})|$ è maggiorata dalla serie di termine generale $M_n$ quindi converge per il criterio del confronto sulle serie numeriche; dunque la serie di termine generale $f_n(\bar{x})$ è assolutamente convergente.

Si ha il seguente risultato, che non dimostriamo e del quale potremo apprezzare l'importanza alla fine di questo paragrafo.

**Teorema 12 (di derivazione per serie)** *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2.10}$$

*una serie di funzioni derivabili in un intervallo limitato* $(a,b)$*.*

*Siano verificate le seguenti ipotesi:*

*i) esiste* $\bar{x} \in (a,b)$ *tale che la serie* (2.10) *converga nel punto* $\bar{x}$

*ii) la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *converge totalmente in* $(a,b)$*.*

*Allora, si ha:*

*j) la serie* (2.10) *converge totalmente in* $(a,b)$*;*

*jj) posto,* $\forall x \in (a,b)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

*e*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

*si ha* $f$ *derivabile in* $(a,b)$ *e* $f'(x) = F(x)\ \forall x \in (a,b)$*.*

Una categoria particolarmente interessante di serie di funzioni è costituita dalle cosiddette serie di potenze, nelle quali si ha

$$f_n(x) = a_n(x-c)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ovvero

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots \tag{2.11}$$

essendo $a_n (n \in \mathbb{N}_0)$ e $c$ numeri reali assegnati. In particolare, i numeri $a_n$ sono detti coefficienti della serie e $c$ centro della serie.

Si può provare che, data una serie di potenze, si verifica una (e una sola) delle seguenti situazioni:

i) esiste $r > 0$ tale che la serie converge puntualmente in $]c-r, c+r[$, non converge in nessun punto esterno all'intervallo $[c-r, c+r]$ e converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq ]c-r, c+r[$

ii) la serie converge solo nel punto $c$

iii) la serie converge puntualmente in $]-\infty, +\infty[$ e converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq ]-\infty, +\infty[$

Nel caso i), il numero $r$ si chiama raggio di convergenza della serie e l'intervallo $]c-r, c+r[$ si chiama intervallo di convergenza. Agli estremi di tale intervallo, alcune serie convergono ed altre no.

Ad esempio, la serie logaritmica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

è una serie di potenze di centro $c = 0$ e, per quanto sappiamo su tale serie, possiamo concludere che essa ha raggio di convergenza 1, converge nel punto $-1$ e non converge nel punto 1.

Nel caso ii), il raggio di convergenza è 0 e non si definisce intervallo di convergenza, mentre nel caso iii) il raggio di convergenza è $+\infty$ e l'intervallo di convergenza è $]-\infty, +\infty[$.

Osservazione 7 Data la serie di potenze (2.11), introduciamo la serie i cui termini sono le derivate dei termini della serie data. La serie delle derivate è, evidentemente, ancora una serie di potenze, e si può dimostrare che il suo raggio di convergenza è uguale a quello della (2.11).

Supponiamo che la serie (2.11) abbia raggio di convergenza non nullo e sia $f$ la sua funzione somma. Prima di tutto notiamo che

$$f(c) = a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{f(c)}{0!}$$

Ora, per ogni punto $x$ appartenente all'intervallo di convergenza, è possibile individuare un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ contenente $x$ e contenuto nell'intervallo di convergenza; in tale intervallo si può applicare il Teorema 12 grazie al quale, indicata con $f$ la funzione somma della serie e tenendo conto dell'osservazione 7, si ha

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

da cui $f'(c) = a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f'(c)}{1!}$

Analogamente, applicando di nuovo il procedimento appena visto, si ha

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-c) + \cdots$$

da cui $f''(c) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(c)}{2!}$.

Analogamente, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, si ha

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

dunque la serie (2.11) assume la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

ovvero, i coefficienti della serie possono essere espressi mediante le derivate successive della funzione somma.

Questo procedimento può essere in qualche modo invertito. Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ dotata di derivate di qualunque ordine, se $c \in (a, b)$ si costruisce la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

detta **serie di Taylor** relativa alla funzione $f$ di centro $c$. Se in un punto $x_0 \in (a,b)$ tale serie converge ed ha somma $f(x_0)$, si dice che la funzione $f$ è sviluppabile in serie di Taylor nel punto $x_0$.

OSSERVAZIONE 8 Consideriamo la serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

della quale sappiamo che converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi è una serie di potenze (di centro $c = 0$) con raggio di convergenza $+\infty$. Detta $f$ la sua funzione somma, si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

Per il Teorema 12, si ha

$$f'(x) = 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

ne segue che la funzione $f$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

quindi $f(x) = e^x$. In particolare, per $x = 1$, si ha

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

abbiamo quindi espresso il numero irrazionale $e$ come somma di una serie di numeri razionali.