24 ottobre 2022

lunedì 24 ottobre 2022 08:57

Successioni

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{N} \to f(n) = a_n \quad \{a_n\}$

$a_n \to \ell \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha \in \mathbb{N} !$ se $n > \alpha$ si ha $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

$a_n \to +\infty$ $\quad \forall k > 0$ " $\quad a_n > k$

$-\infty$ $\quad < -k$

$$\begin{cases} a_n \le b_n & \forall n \\ \text{se } b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty \\ \text{se } a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty \end{cases}$$

$\forall n \quad a_n \le a_{n+1} \to \{a_n\}$ crescente

$\{a_n\}$ crescente $\Rightarrow a_n \to \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Serie numeriche

$\{a_n\}$ successione

Serie di termine generale a_n $\qquad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

L'idea è quella di dare, se possibile, significato numerico alla serie

$\forall n \in \mathbb{N}$ poniamo

$n = 1 \quad s_1 = a_1$

$n = 2 \quad s_2 = a_1 + a_2$

$- - -$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$s_n =$ somma parziale di posto n $\qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Cons. la succ. $\{s_n\}$

Il comportamento al limite di $\{s_n\}$ viene chiamato CARATTERE della serie

- Se $s_n \to s \in \mathbb{R}$ si dice che la serie converge ed ha SOMMA s $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

- Se $s_n \to \pm\infty$ si dice che la serie diverge

. se $\{s_n\}$ è oscillante si dice che la serie è indeterminata
o non regolare

Esempi

- $a_n = k \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} k \quad s_n = k n$

se $k = 0$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

se $k \neq 0$ la serie diverge

- Sia $x_n \to \ell$, poniamo $a_n = x_n - x_{n+1}$
(serie telescopica) cons. $\sum_{n=1} a_n$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = x_1 - \cancel{x_2} + \cancel{x_2} - \cancel{x_3} + \cancel{\dots} + \cancel{x_n} - \underbrace{x_{n+1}}_{\ell} \to x_1 - \ell$$

es. $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad \ell = 0 \quad a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

$$s_n = -1 + 1 - 1 + 1 + \dots + (-1)^n = \begin{cases} -1 & n \text{ disp.} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases} \quad \text{non è reg.}$$

$s_2 = -1 + 1 = 0 \qquad s_1 = -1$

$s_4 = -1 + 1 - 1 + 1 \qquad s_3 = -1 + 1 - 1$

- $x \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \qquad 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$

serie geometrica di ragione x

se $x = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverge

se $x \neq 1$ $\quad s_n = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$

$n = 2 \qquad 1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$

$\qquad\qquad \dots x^2 = 1 - x^3$

$n=2 \qquad 1-x^2 = (1+x)(1-x)$

$n=3 \qquad 1+x+x^2 = \dfrac{1-x^3}{1-x}$

$$(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})(1-x) = 1+\cancel{x}+\cancel{x^2}+\dots+\cancel{x^{n-1}}-\cancel{x}-\cancel{x^2}-\dots\cancel{-}x^n = 1-x^n$$

Sappiamo che $\quad x^n \to 0 \quad$ se $\quad -1 < x < 1$

$\to +\infty \quad$ se $\quad x > 1$

oscill. $\quad$ se $\quad x \leq -1$

la serie è non regolare se $x \leq -1$

diverg. $\quad$ se $\quad x \geq +1$

conv. $\quad$ se $\quad -1 < x < 1 \qquad s = \dfrac{1}{1-x}$

es. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{7}{8}} = 8$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ SERIE ARMONICA

proviamo che diverge

Ricordiamo che $\quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \log e = 1 \qquad \forall n$$

$$n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \qquad \forall n$$

$$\log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \qquad \forall n$$

Cons. $\quad s_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$$\log\frac{k+1}{k} < \frac{1}{k} \qquad \forall k = 1,\dots,n$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\log(k+1)-\log k\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = s_n$$

$$\cancel{\log 2} - \underbrace{\log 1}_{=0} + \cancel{\log 3} - \cancel{\log 2} + \cancel{\dots} + \log(n+1) - \cancel{\log n} < s_n$$

$$s_n > \log(n+1) \Rightarrow s_n \to +\infty$$
$\log(n+1) \to +\infty$

Primi teoremi

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) s_n $\qquad k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ (2) S_n

(per $k=0$ la (2) è la serie fatta tutta da zeri)

$k \neq 0 \quad S_n = k a_1 + \dots + k a_n = k s_n$

se $s_n \to s \Rightarrow k s_n \to k s \Rightarrow$ se $\sum a_n = s$ allora $\sum k a_n = k s$

se $s_n \to +\infty \Rightarrow k s_n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } k>0 \\ -\infty & \text{se } k<0 \end{cases}$

se $s_n \to -\infty \Rightarrow k s_n \to \begin{cases} -\infty & \text{se } k>0 \\ +\infty & \text{se } k<0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ anche la (2) diverge

se $\{s_n\}$ oscill $\Rightarrow \{k s_n\}$ oscill.

(2) Serie resto $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) s_n

$r \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n$ (2) S_n serie resto di posto r

es. (1) serie armonica

$r = 3 \qquad$ (2) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

(1) serie geom. di ragione $\frac{1}{2}$

$r = 1 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$1 + \frac{1}{2} + \dots = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = 1$?

Teorema sulle serie resto

Una serie e tutti i suoi resti hanno il medesimo carattere

DIM. $\qquad S_n = a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_{r+n} =$

$= \underbrace{a_1 + \dots + a_r + a_{r+1} + \dots + a_{r+n}} - a_1 - \dots - a_r =$

$= s_{r+n} - s_r \Rightarrow \{s_n\}$ e $\{S_n\}$ hanno lo stesso carattere. In caso di convergenza si avrà $\boxed{S = s - s_r}$

allora è vero che $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \underset{s}{2} - \underset{s_r}{1} = 1$

Possiamo osservare anche che $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{= \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} 2 = 1$$

3) (Corollario) Cambiando valore a un numero finito di termini della serie, il carattere non cambia

IP $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$a_n \neq b_n$ solo per un numero finito di termini

TS le due serie hanno lo stesso carattere

DIM. Sia $r = \max \{ n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n \}$

i due resti r-mi coincidono $\Rightarrow$ hanno lo stesso carattere $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ le due serie avranno lo stesso carattere. (non avranno la stessa somma)

4) Serie somma $\underset{s_n}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ (1) $\underset{S_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$ (2)

cons. $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{t_n}{(a_n + b_n)}$ (3)

$$t_n = s_n + S_n$$

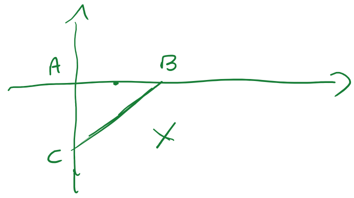
se $(1) = s$, $(2) = S$ $\Rightarrow$ $(3) = s + S$

- se una conv. e una div. $\Rightarrow$ (3) div.
- se entrambe div. con lo stesso segno $\Rightarrow$ (3) div.
- se una div. positiv. e l'altra negativ. $\Rightarrow$ bisogna effettuare uno studio ad hoc

es. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) + 1 = \frac{3}{2}$

Esercizio sul cap. 1

$f(x,y) = xy - x^2 + xy^2$ estr ass nel triang di vert $A(0,0)$ $B(1,0)$ $C(0,-1)$



$f_x(x,y) = y - 2x + y^2$

$f_y(x,y) = x + 2xy$

$$\begin{cases} y^2 + y - 2x = 0 \\ x(2y+1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(y+1) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$X_1 = \left\{ (0,0); (0,-1); \left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right) \right\}$

$X_2 = \emptyset$

AB $y=0$ $g(x) = f(x,0) = -x^2$ $0 \le x \le 1$

$g'(x) = -2x \neq 0 \quad \forall x \in]0,1[$

BC $y = x-1$ $h(x) = f(x, x-1) = x(x-1) - x^2 + x(x-1)^2 =$

$= \cancel{x^2} \cancel{-x} \cancel{-x^2} + x^3 \cancel{+x} - 2x^2 = x^3 - 2x^2$ $0 \le x \le 1$

$h'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4) = 0$ per $x = 0$

$x = \frac{4}{3} > 1$

AC $x=0$ $f(y) = 0 \quad \forall y$ $-1 \le y \le 0$

$(0,b)$ $-1 \le b \le 0$ $(1,0)$ $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right)$

$f(0,b) = 0$

$f(1,0) = -1$

$f\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{1}{32} = \frac{1}{64}$

$\max_X f = \frac{1}{64} = f\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right)$

$\min_X f = -1 = f(1,0)$

Cerchiamo gli estremi relativi in $\mathbb{R}^2$

$f(x,y) = xy - x^2 + xy^2$ $f_x(x,y) = y - 2x + y^2$

$f_y(x,y) = x + 2xy$

p. stazionari $\quad (0,0) \quad (0,-1) \quad \left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right)$

$f_{xx}(x,y) = -2 \qquad H(0,0) = -1 \qquad$ p. sella

$f_{yy}(x,y) = 2x \qquad H(0,-1) = -1 \qquad$ p. sella

$f_{xy}(x,y) = 2y+1 \qquad H\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ p. di max rel

$f_{xx}\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right) < 0$