17 ottobre 2022

lunedì 17 ottobre 2022 09:01

RIPASSO

$$\underbrace{f(c+h)-f(c)}_{\Delta f} - \underbrace{f'(c)h}_{df} = o(h) \qquad \frac{\Delta f - df}{h} \to 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \qquad df = \left(\nabla f, (h,k)\right) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$

DEF. f different. in (x_0,y_0) se $\exists\ \ell, m \in \mathbb{R}$: $\Delta f - (\ell h + m k) = o(\sqrt{h^2+k^2})$

f diff $\Rightarrow$ cont

$\Rightarrow \exists\ f_x(x_0,y_0) = \ell,\quad f_y(x_0,y_0) = m$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$f: X \to \mathbb{R} \qquad X \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad g_1, g_2 : (a,b) \to \mathbb{R}$

$\forall t \in (a,b) \quad (g_1(t), g_2(t)) \in X$

$G(t) = (g_1(t), g_2(t)) \qquad G: (a,b) \to \mathbb{R}^2$

$F(t) = f(G(t)) \qquad F: (a,b) \to \mathbb{R}$

TEOR

IP $\quad c \in (a,b) \qquad \exists\ g_1'(c),\ g_2'(c) \qquad f$ diff in $(g_1(c), g_2(c))$

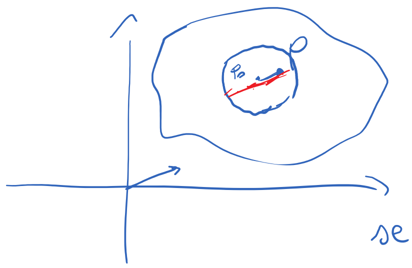
TS $\quad \exists\ F'(c) = \left(\nabla f(g_1(c), g_2(c)),\ (g_1'(c), g_2'(c))\right) =$

$f_x(g_1(c), g_2(c))\, g_1'(c) + f_y(g_1(c), g_2(c))\, g_2'(c)$

$f: X \to \mathbb{R} \quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ af. $\qquad (x_0, y_0) \in X \qquad v = (a,b)$ versore

$|v| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$

$P\,(x_0 + a t,\ y_0 + b t)$



se $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 1$

si costruisce $w\left(\frac{a}{|v|}, \frac{b}{|v|}\right)$

se $d(P, P_0) = |t| < r \Rightarrow P \in X$

$f(t) = f\,(x_0 + a t,\ y_0 + b t)$

è del tipo $f(g_1(t), g_2(t))$

$t = 0 \qquad g_1'(t) = a \qquad g_2'(t) = b \quad \Big\} \Rightarrow$

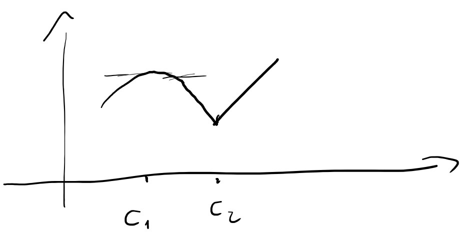
se f diff in (x_0, y_0)

$\Rightarrow \exists\ f'(0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$

$f_v(x_0, y_0) \qquad D_v f(x_0, y_0)$

$f: X \to \mathbb{R} \qquad X \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad P_0(x_0, y_0) \in X$ p. di min (max) relativo se

$\exists\ r > 0$: se $P \in X \cap I_r(P_0)$ si ha $f(P) \geq f(P_0)$
$(\leq)$



Teorema di Fermat

IP $\quad f: X \to \mathbb{R} \qquad X \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $\qquad P_0(x_0, y_0) \in \cancel{X}$ p. di estremo rel.

$\exists\ f_v(P_0)$

TS $\quad f_v(P_0) = 0$

DIM $\quad f_v(P_0) = f'(0) \quad$ con $\quad f(t) = f(x_0 + at,\ y_0 + bt)$

Per Ip. $\exists\, r > 0$! se $P \in I_r(P_0) \cap X$ si ha $f(P) \le f(P_0)$
$(\ge)$

in partic. se $|t| < r$ $\quad P(x_0 + at,\ y_0 + tb)$ verifica questa condiz $\Rightarrow$ $t = 0$ è di estr rel per f $\Rightarrow$ $F'(0) = 0$ $\Rightarrow$ TS

In particolare se P_0 è di estr. rel. per f si ha $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

Viceversa NO

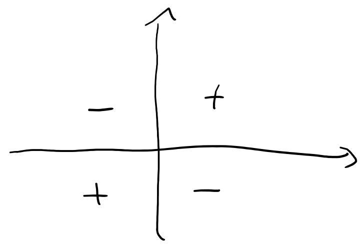
$f(x, y) = xy \qquad P_0 = 0$

$f_x(x, y) = y$

$f_y(x, y) = x$

$\Rightarrow \nabla f(0,0) = 0$

$f(0,0) = 0$



non è di estr. rel.

Ricerca degli estr. relativi

<u>Condizioni del primo ordine</u>: se P_0 è di estr. rel. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \nabla f(P_0) = 0$

quindi cerchiamo gli estr. rel. nei punti in cui
$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ $\quad$ (punti stazionari)

e nei punti in cui $\nexists$ una delle der. parz. e l'altra è zero
o $\nexists$ nessuna delle der. parz.

<u>Condizioni del secondo ordine</u>

f sia dotata di derivate seconde ~~con~~

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx}$$

se le der. miste sono continue $H(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$

H = HESSIANO DI f nel punto (x,y)

COND. DEL II ORD. Sia P_0 un punto stazionario

NECESS.	SUFF.
P_0 p. di min (max) rel. $\Rightarrow H(P_0) \geq 0$ $f_{xx}(P_0),\ f_{yy}(P_0) \geq 0$	$H(P_0) > 0,\ f_{xx}(P_0) \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \Rightarrow$ $\Rightarrow P_0$ p. di min (max) rel.

Procedimento

a) si cercano i punti staz. risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Sia P_0 uno di tali punti

b) si calcola $H(P_0)$ Può accadere che

i) $H(P_0) < 0 \Rightarrow$ non c'è estr. rel in P_0 (P_0 punto di sella)

ii) $H(P_0) > 0$ Allora si calcola $f_{xx}(P_0)$

Se $f_{xx}(P_0) > 0 \Rightarrow P_0$ p. di min rel

Se $f_{xx}(P_0) < 0 \Rightarrow$ " max rel

iii) $H(P_0) = 0$ si calcola $f(P_0)$ e si cerca di capire se c'è un intorno in cui $f(P) \underset{(\geq)}{\leq} f(P_0)$ (studio locale)

Esempi

1) $f(x,y) = 2x^2 + xy^2 + x + \frac{1}{2}y^2$ $X = \mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = 4x + y^2 + 1$

$f_y(x,y) = 2xy + y$

$f_y(x,y) = 2xy + y$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-y^2-1}{4} \\ \dfrac{-y^2-1}{2}\, y + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \text{———} \\ -y^3 - y + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-y^2-1}{4} \\ y(y^2-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

$P_1\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ $P_2\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ $P_3\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ punti stazionari

$f_{xx}(x,y) = 4$ $f_{xy}(x,y) = 2y$ $f_{yy}(x,y) = 2x + 1$

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$$

$H(P_1) = 2 - 0 > 0$ $f_{xx}(P_1) > 0 \Rightarrow P_1$ p. di min rel.

$H(P_2) = 0 - 4 < 0 \Rightarrow P_2$ p. di sella

$H(P_3) = 0 - 4 < 0 \Rightarrow P_3$ p. di sella

2) $f(x,y) = 2x^2 + xy - x - y$ $X = \mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = 4x + y - 1$

$f_y(x,y) = x - 1$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$P(1, -3)$ p. staz.

$f_{xx}(x,y) = 4$ $f_{xy} = 1$ $f_{yy} = 0$

$H(P) = 0 - 1 < 0 \Rightarrow P$ p. di sella

Ricerca degli estremi assoluti

$f: X \to \mathbb{R}$ CONTINUA, $X \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato

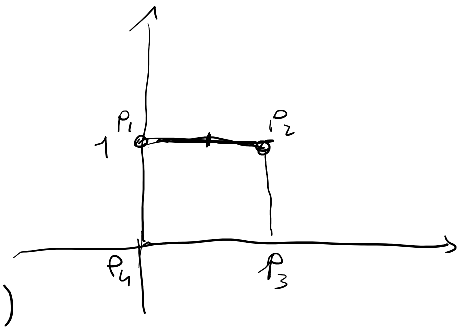
Allora $\exists \min_X f = m$, $\max_X f = M$

Cerchiamo i punti in cui m e M sono assunti.

$X_1 = \{ P \in \mathrm{int}(X) : f_x(P) = f_y(P) = 0 \}$

$X_2 = \{ P \in \mathrm{int}(X) :$ $f_x(P) = 0$ e $\nexists f_y(P)$ o viceversa, oppure $\nexists f_x(P)$, $\nexists f_y(P) \}$

$X_3 = f(X)$



<u>es.</u> $f(x,y) = 2x^2 + xy - x - y$

estr. ass. nel quadrato di vert.

$P_1(0,1)$ $P_2(1,1)$ $P_3(1,0)$ $P_4(0,0)$

$f_x(x,y) = 4x + y - 1$

$f_y(x,y) = x - 1$

$P(1,-3) \notin X$

$X_1 = \emptyset$

$X_2 = \emptyset$

studiamo la restriz. a $X_3 = f(X)$

$P_1 P_2$ $y = 1$ $g(x) = f(x,1) = 2x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} - 1$ $0 \leq x \leq 1$

$g'(x) = 4x = 0$ per $x = 0 \notin]0,1[$ $\Rightarrow$ prenderemo in considerazione solo P_1, P_2

$P_2 P_3$ $x = 1$ $h(y) = f(1,y) = 2 + y - 1 - y = 1$ prenderemo in consid. solo P_2, P_3

$P_3 P_4$ $y = 0$ $l(x) = f(x,0) = 2x^2 - x$ $0 \leq x \leq 1$

$l'(x) = 4x - 1 = 0$ per $x = \frac{1}{4}$ prenderemo in consid. P_3, P_4

$P(\frac{1}{4}, 0)$

$P_1 P_4$ $x = 0$ $m(y) = f(0,y) = -y$ $0 \leq y \leq 1$ prenderemo in consid. solo P_1, P_4

Dobbiamo calc. $f(0,1) = -1$

$\min_X f = -1 = f(0,1)$

Dobbiamo calc.

$f(0,1) = -1$

$f(1,1) = 3$

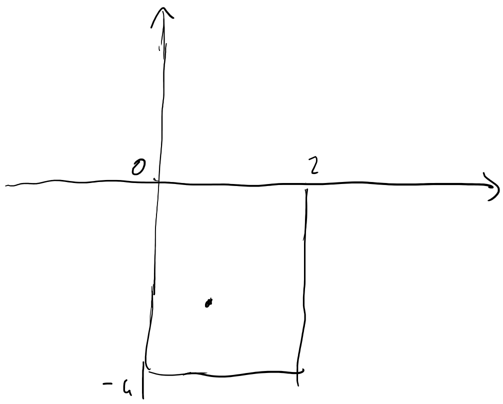
$f(1,0) = 1$

$f(0,0) = 0$

$f(\frac{1}{4},0) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$

$\min_X f = -1 = f(0,1)$

$\max_X f = 3 = f(1,1)$



$X = [0,2] \times [-4,0]$

stessa funzione

$X_1 = \{(1,-3)\}$

$X_2 = \emptyset$

$X_3 = f(X)$