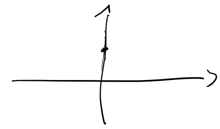
14 NOVEMBRE 2022

lunedì 14 novembre 2022 08:30

Esercizi della prima PC

$$f(x,y) = |x|\,y^2(2x+3y) = \begin{cases} 2x^2y^2+3xy^3 & x \geq 0 \\ -2x^2y^2-3xy^3 & x<0 \end{cases}$$



$x>0$

$f_x(x,y) = 4xy^2+3y^3$

$f_y(x,y) = 4x^2y+9xy^2$

$(0,b)$ $\quad \exists\, f_x(0,b)$? $\quad g(x)=f(x,b) = \begin{cases} 2x^2b^2+3xb^3 & x\geq 0 \\ - \;\; - \;\; - & x<0 \end{cases}$

$g'_+(0) = 3b^3$

$\exists\, f_y(0,b)$? $\quad h(y)=f(0,y)=0 \quad \forall y \Rightarrow f_y(0,b)=0 \quad \forall b\in\mathbb{R}$

$x<0$

$f_x(x,y) = -4xy^2-3y^3 \quad \leftarrow$

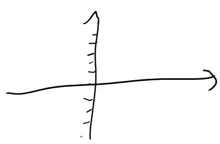
$f_y(x,y) = -4x^2y-9xy^2$

$\exists\, f_x(0,b)$? $\quad g(x) = f(x,b) = - \;\; -$

$g'_-(0) = -3b^3$

$\exists\, f_x(0,b) \iff 3b^3 = -3b^3 \iff b=0 \Rightarrow \exists\, f_x(0,0)=0$

$\nexists\, f_x(0,b)$ se $b\neq 0$



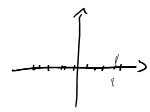
teor. diff tot. $\Rightarrow f$ è diff in $\forall (x,y),\ x\neq 0$

$\nexists\, f_x(0,b)$ se $b\neq 0 \Rightarrow f$ NON è diff in $(0,b)$ $b\neq 0$

in $(0,0)$ è diff. per il teor. del diff tot.

[per la def. $0 \leq \left|\dfrac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \dfrac{|h|\,k^2\,|2h+3k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \underbrace{\dfrac{|h|}{\sqrt{\quad}}}_{\leq 1}\ \underbrace{k^2}_{\to 0}\ \underbrace{|2h+3k|}_{\to 0} \to 0$]

$$f(x,y) = |y|\,x^2(x+4y) = \begin{cases} x^3y+4x^2y^2 & y\geq 0 \\ -x^3y-4x^2y^2 & y<0 \end{cases}$$



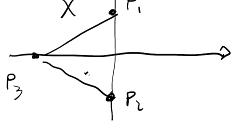
$\nexists\, f_y(a,0)$ $\quad a\neq 0$

$\Downarrow$

f non è diff. in tali punti

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

f è diff. in $\forall (x,y)$ con $y\neq 0$ e in $(0,0)$



$P_1\,(0,1)$

$P_2\,(0,-1)$

$P_3\,(-1,0)$

$f(x,y) = xy+2x^2-y^2+2x-y$

$X_1 = \{(x,y)\in \mathrm{int}(X) : \nabla f(x,y) = 0\}$

$\det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$X_1 = \{(x,y) \in int(X) : \nabla f(x,y) = 0\}$

$f_x(x,y) = y + 4x + 2$

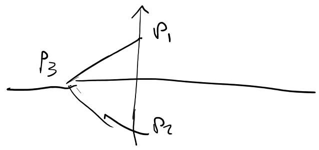
$f_y(x,y) = x - 2y - 1$

$$\begin{cases} 4x + y = -2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}{-9} = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}{-9} = -\frac{2}{3}$$

$X_1 = \{(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})\}$



$X_2 = \emptyset$

Studiamo $X_3 = f(X)$

$P_1 P_2$ $\quad x = 0 \quad -1 \le y \le 1$

$g(y) = f(0,y) = 2y^2 + 2y$

$g'(y) = 4y + 2 = 0$ per $y = -\frac{1}{2}$

$P_4 \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$P_2 P_3$ $\quad y = -1 - x \quad -1 \le x \le 0$

$h(x) = f(x, -1-x) = x(-1-x) + 2x^2 - (-1-x)^2 + 2x - (-1-x) =$

$= \cancel{-x} \cancel{-x^2} + \cancel{2x^2} \cancel{-1} \cancel{-x^2} \cancel{-2x} + \cancel{2x} \cancel{+1} + \cancel{x} = 0 \quad \forall x$

$f(x, -1-x)$

$-1 \le x \le 0$

$P_1 P_3$ $\quad y = x + 1 \quad -1 \le x \le 0$

$l(x) = f(x, x+1) = 2x^2 - 2x$

$l'(x) = 4x = 0$ per $x = 0$

$f(0,1) = -2$

$f(0,-1) = 0$

$f(-1,0) = 0$

$f(0, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$f(x, -1-x) = 0$

$f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$\max_X f = \frac{1}{4} = f(0, -\frac{1}{2})$

$\min_X f = -2 = f(0,1)$

Ripasso

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad \underline{a_n \ge 0} \quad \forall n \qquad (\text{oppure } a_n \le 0 \ \forall n)$

$(-1)^n$

$\cos n\pi$

Lemma Se $\{a_n\}$ è monotona, (1) non diverge

Criterio di conv. di Leibniz $\{a_n\}$ è decr. e $a_n \to 0 \Rightarrow$ (1) conv.

$|s - s_n| \le a_{n+1}$

Crit. di non regol. Se $\{a_n\}$ è decr. ma non tende a zero, oppure cresc. allora (1) è indet.

Serie armonica alternata $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ conv. non assolut.

$\sum \frac{1}{n}$ div.

Serie logaritmica $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad x \in \mathbb{R}$

conv. $\forall x : -1 \leq x < 1$

div. $\forall x > 1$

indet. $\forall x < -1$

$$\frac{|x|^n}{n} < \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \quad \text{def.}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{n+1}{n}} < \underset{>1}{|x|}$$

Esercizi

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n\sqrt{n}} \qquad x \in \mathbb{R}$

$x = \frac{1}{2}$ conv. $s = 0$

$x > \frac{1}{2}$ è a term. pos.

crit. del rapp. $\displaystyle\frac{(2x-1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \frac{n\sqrt{n}}{(2x-1)^n} = \underbrace{\frac{n}{n+1}\sqrt{\frac{n}{n+1}}}_{\downarrow \; 1} (2x-1) \to 2x-1$

$x > 1 \Rightarrow 2x-1 > 1 \Rightarrow (1)$ div.

$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow \quad 2x-1 < 1 \Rightarrow (1)$ conv.

$x = 1 \qquad \displaystyle\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}} \qquad \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ conv.

$x < \frac{1}{2}$ $(\Rightarrow 2x-1 < 0)$ ass. conv? $\displaystyle\sum \frac{|2x-1|^n}{n\sqrt{n}}$

se $|2x-1| \leq 1$ la serie è assol. conv. per $0 \leq x < \frac{1}{2}$

$-1 \leq 2x-1 \leq 1$

$0 \leq x \leq 1$ Dunque per $0 \leq x \leq 1$ la serie è conv.

$\underline{x < 0}$ studiamo la monotonia di $\displaystyle\frac{|2x-1|^n}{n\sqrt{n}}$

$$\frac{|2x-1|^n}{n\sqrt{n}} < \frac{|2x-1|^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \; ?$$

$\displaystyle\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}} < \underset{>1}{|2x-1|}$ vera def. $\Rightarrow$ la serie è indet.

(1) $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{n+2}}{n} x^n \qquad x \in \mathbb{R}$

$x = 0$ conv. $s = 0$

$x > 0$ term. pos.

crit del rapp. $\frac{\sqrt{n+3}}{n+1} x^{n+1} \frac{n}{\sqrt{n+2}} \frac{1}{x^n} = \sqrt{\underbrace{\frac{n+3}{n+2}}_{\downarrow 1}} \frac{n}{n+1} x \to x$

$x > 1 \Rightarrow (1)$ div.

$0 < x < 1 \Rightarrow (1)$ conv.

$x = 1$ $\quad \sum \frac{\sqrt{n+2}}{n}$ $\quad n^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{n+2}}{n} \to 1$ $\quad \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie div.

$x < 0$ Cons. $\sum \frac{\sqrt{n+2}}{n} |x|^n$ conv. se $|x| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1)$ conv. ass. se $-1 < x < 0$

$x = -1$ $\quad \sum (-1)^n \frac{\sqrt{n+2}}{n}$

$\frac{\sqrt{n+2}}{n} > \frac{\sqrt{n+3}}{n+1}$?

$\frac{n+2}{n^2} > \frac{n+3}{(n+1)^2}$

$(n+2)(n^2+2n+1) > (n+3) n^2$

$n^3 + 2n^2 + n + 2n^2 + 4n + 2 > n^3 + 3n^2$ vera

$\frac{\sqrt{n+2}}{n} \to 0$

Per il crit. di Leibniz (1) conv. non assol.

$x < -1$ $\quad \frac{\sqrt{n+2}}{n} |x|^n < \frac{\sqrt{n+3}}{n+1} |x|^{n+1}$?

$\underbrace{\frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{n+2}{n+3}}}_{\downarrow 1} < \underbrace{|x|}_{>1}$ vera def $\Rightarrow (1)$ indet.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{n+3}}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$2(n+1)+1$

$n+1+3$

$x = 0$ conv. $s = 0$

$x > 0$ è a term. pos.

crit del rapp. $\frac{x^{2n+3}}{2^{n+4}} \frac{2^{n+3}}{x^{2n+1}} = \frac{x^2}{2}$

$\frac{x^2}{2} > 1 \Rightarrow (1)$ div. $\quad (x > \sqrt{2})$

$\frac{x^2}{2} < 1 \Rightarrow (1)$ conv. $\quad (0 < x < \sqrt{2})$

$x = \sqrt{2}$ $\quad \sum \frac{(\sqrt{2})^{2n+1}}{2^{n+3}} = \sum \frac{\sqrt{2}\, 2^n}{2^{n+3}} = \sum \frac{\sqrt{2}}{8}$ div.

$x<0 \qquad x^{2n+1} = \underset{+}{x^{2n}}\ \underset{-}{x}$ è a term. neg.

(la serie degli opposti è $\sum \frac{|x|^{2n+1}}{2^{n+3}}$

conv. per $-\sqrt{2}<x<0$ e div. per $x \leq -\sqrt{2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{n}{e^{2n+1}}}{n^4-n}$$

$$\left| \quad \right| = \frac{|\operatorname{arctg} \text{—}|}{n^4-n} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^4-n} \qquad \frac{n^4\, \frac{\pi}{2}}{n^4-n} \to \frac{\pi}{2} \qquad 4>1 \Downarrow \text{conv.}$$

La serie dei val. ass. conv. per confronto $\Rightarrow$ la serie conv. ass.

$$\sum \frac{2}{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})\, n^2}$$

$$\frac{2}{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})\, n^2} = \frac{2(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}{(n+5-n)\, n^2} = \frac{2(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}{5n^2}$$

$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>1 \qquad n^{\frac{3}{2}}\, a_n \to 2$ la serie conv.

$\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \left.\begin{array}{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0 \\ \text{è a term. pos.}\end{array}\right\} \Rightarrow$ la serie div.

$\sum \left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ somma di $\underset{\text{div.}}{\sum 1}$ e di $\underset{\text{conv.}}{\sum \frac{1}{n^2}}$ $\Rightarrow$ div.

$\sum \operatorname{tg} \frac{2n+3}{n^4+4} \to 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{2n+3}{n^4+4}}{\frac{2n+3}{n^4+4}} \to 1$$

$\Rightarrow$ la serie ha lo stesso carattere di $\sum \frac{2n+3}{n^4+4}$ che conv. perché $4-1=3>1$

$\sum n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{2} \Rightarrow n\, a_n \to \frac{1}{2} \Rightarrow \text{la serie diverge}$$

$$\sum \frac{e^n}{4^n + n!} \qquad \sum \left(\frac{e}{4}\right)^n \text{ conv. perché } \frac{e}{4} < 1$$

$$4^n + n! > 4^n \Rightarrow \frac{1}{4^n+n!} < \frac{1}{4^n} \Rightarrow \frac{e^n}{4^n+n!} < \frac{e^n}{4^n} = \left(\frac{e}{4}\right)^n$$

per confronto la serie converge

Serie di funzioni

$n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad (1)\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serie di funzioni

$c \in (a,b)$ $\quad$ cons. la serie numerica $(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$

Se la (2) conv., si dice che la (1) conv. nel punto c

Se ciò accade $\forall c \in (a,b)$ si dice che la (1) conv. PUNTUALMENTE in (a,b)

$\forall x \in (a,b)$ cons. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funzione somma

DEF. Si dice che (1) conv. TOTALMENTE in (a,b) se $\exists \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ con $M_n > 0\ \forall n$, convergente, tale che

$$|f_n(x)| \le M_n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in (a,b)$$

conv. tot. $\Rightarrow$ conv. punt.

Sia $c \in (a,b)$ $\quad \sum f_n(c)$

Per ip. $|f_n(c)| \le M_n \quad \forall n \Rightarrow$ per confronto $\sum |f_n(c)|$ conv. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum f_n(c)$ conv. assolut.

Teorema di derivazione per serie

Ip. $(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $\quad f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad (a,b)$ limitato

f_n deriv. in (a,b) $\forall n$

$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ sia totalmente convergente in (a,b)

$\exists c \in (a,b)$: (1) conv. in c

Ts. α) (1) conv. tot. in (a,b)

β) Se $f(x)$ è la somma della (1) e $F(x)$ è la somma della (2), si ha $f'(x) = F(x)\ \forall x \in (a,b)$

Serie di potenze

∞ $\quad , \quad ^n$ $\qquad a_n \in \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ coefficienti della serie

Serie di potenze

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

$a_n \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ coefficienti della serie

$c \in \mathbb{R}$ centro della serie

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

Esempi:

$1 + x + x^2 + \dots$ $a_n = 1$ $\forall n$, $c = 0$ serie geom.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$, $c = 0$ serie espon.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $a_n = \frac{1}{n}$, $c = 0$ serie logarit.

$\sum \frac{(2x)^n}{\sqrt{n+3}} = \sum \frac{2^n}{\sqrt{n+3}} x^n$ $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n+3}}$, $c = 0$

[in $x = c$ la (1) conv.]

Si verifica una e una sola delle seguenti tre affermazioni

i) (1) conv. solo per $x = c$ $(r = 0)$

ii) (1) conv. $\forall x \in \mathbb{R}$

iii) $\exists r > 0$: (1) conv. $\forall x \in]c-r, c+r[$ e non conv. in nessun $x > c+r$, $x < c-r$

$(2x-1)^n$

$2(x - \frac{1}{2})$

$c = \frac{1}{2}$

$[0, 1]$

$c-r$ c $c+r$

in $c-r$ e $c+r$ alcune serie convergono, altre no

Poniamo;

nel caso ii) $I = \mathbb{R}$ $r = +\infty$

" iii) $I =]c-r, c+r[$ r

I = intervallo di convergenza

r = raggio di conv.

Si ha:

in ogni $[\alpha, \beta] \subseteq I$ la (1) conv. totalmente.

Cons. di nuovo la (1) $a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$

cons. la serie delle derivate (2) $a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \dots$

anch'essa è una serie di potenze e si può dim. che ha lo stesso raggio di convergenza.

Supp. $r \neq 0$ e cons. $x_0 \in I$

α c β

Sia $[\alpha, \beta] \subseteq I$! $x_0 \in [\alpha, \beta]$

$\left.\begin{array}{l}\text{in } [\alpha, \beta] \text{ la (2) conv. tot.} \\ \text{in } c \text{ la (1) conv.}\end{array}\right\} \Rightarrow$ per il teor. di derivaz. per serie si ha

$f'(x) = f(x)$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$, in partic.

$f'(x_0) = f(x_0)$