16 novembre 2022

mercoledì 16 novembre 2022 08:00

RIPASSO

$f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ $\qquad (1) \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

$c \in (a,b)$ se $\sum f_n(c)$ conv. si dice che la (1) conv. nel punto c

Se conv. $\forall x \in (a,b)$ si dice che conv. PUNTUALMENTE in (a,b)

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ funz. somma $\qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

se $\exists \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ conv. con $M_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in (a,b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si dice che (1) conv. TOTALMENTE

conv. totale $\Rightarrow$ conv. puntuale

Teor. di deriv. per serie $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (1)$

IP $\quad f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile, (a,b) limitato

$\exists\, c \in (a,b) : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ conv.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ sia totalm. conv.

TS $\quad$ (i) $\quad$ (1) tot. conv.

(ii) se $f(x) = \sum f_n(x)$ e $g(x) = \sum f_n'(x)$ si ha $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in (a,b)$

Serie di potenze

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ $\qquad c \in \mathbb{R}$ $\qquad (1) \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

a_n coefficienti

c centro

$(1)'$ $\qquad a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$

$x = c$ conv. $\quad s = a_0$

i) $\quad$ (1) conv. solo per $x = c$

ii) $\quad$ (1) " $\forall x \in (a,b)$

iii) $\quad \exists\, r > 0$; (1) conv in $\forall x : |x-c| < r$ e non conv. in nessun $x : |x-c| > r$

iii) r = raggio di convergenza $I =]c-r, c+r[$ intervallo di convergenza

ii) $r = +\infty$ = " $I =]-\infty, +\infty[$ "

i) 0 = " non si def int. di conv.

Se $r \neq 0$ in ogni $[a,b] \subseteq I$ la (1) conv. totalmente

Cons. (1') $a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$

costruiamo la serie derivata

(2) $a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \dots$

è una serie di potenze, ha lo stesso raggio di conv. della (1')

Supp. che $r \neq 0$, cons. $x \in I$

sia $[a,b] \subseteq I$: $x \in [a,b]$

in $[a,b]$ appl. il teor. di deriv. per serie quindi

se $f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$

e $F(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \dots$

si ha $f'(x) = F(x)$

NERO

Serie esponenziale $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ $x \in \mathbb{R}$

la possiamo vedere come serie di potenze

$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ $a_n = \frac{1}{n!}$ $c = 0$

da quanto sappiamo già si ha $r = +\infty$, $I =]-\infty, +\infty[$

Per quanto detto prima si ha $f'(x) = F(x)$

La serie derivata è:

$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$\frac{2x}{2!} = \frac{2x}{1 \cdot 2} = \frac{x}{1}$

$\frac{\cancel{3}x^2}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}$

è la stessa serie

quindi $f'(x) = F(x) = f(x)$

f è dunque tale che $f'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ Chi è f?

$f(x) = 0$ è una sol.

cerchiamo sol. che non assumono mai il valore zero

Sia f una tale funz., sarà sempre >0 o sempre <0

$$f'(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \qquad ''$$

il I membro è la derivata di $\log|f(x)|$

il II " " x

$$D\left(\log|f(x)|\right) = = \frac{1}{\cancel{|f(x)|}} \frac{\cancel{|f(x)|}}{f(x)} f'(x)$$

$$\log|f(x)| = x + c$$

$$|f(x)| = e^{x+c} = e^x \underbrace{e^c}_{\substack{\| \\ k>0}} = k e^x$$

$$f(x) = k e^x \qquad k \in \mathbb{R}$$

$k>0$ le sol. positive

$k<0$ " negative

$k=0$ le sol. nulle

Sappiamo che $f(0) = 1$

$$k e^0 = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$f(x) = e^x$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$x = 1$ $\qquad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + a_4(x-c)^4 + \cdots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4\cancel{a_4}(x-c)^3 + \cdots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-c) + 12a_4(x-c)^2 + \cdots$$

$$\cdots$$

$$f(c) = a_0 \Rightarrow a_0 = f(c) = \frac{f(c)}{0!}$$

$$f'(c) = a_1 \Rightarrow a_1 = f'(c) = \frac{f'(c)}{1!}$$

$$f''(c) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(c)}{2} = \frac{f''(c)}{2!}$$

$$f'''(c) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(c)}{6} = \frac{f'''(c)}{3!}$$

$$\cdots$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$f'''(c) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(c)}{6} = \frac{f'''(c)}{3!}$

$\dots$

La serie si riscrive $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$

Sia f dotata di derivate di $\forall$ ordine, sia $c \in$ interv. di def. di f

Scriviamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ serie di TAYLOR

Se essa in un punto $x \neq c$ conv. e ha somma $f(x)$ si dice che f è sviluppabile in serie di Taylor nel punto x.

FINE CAP 2

Esercizi

① Sia $a_n > 0 \ \forall n$

i) $\sum \frac{1}{a_n}$ div $\Rightarrow \sum a_n$ conv? NO

ii) $\sum \frac{1}{a_n}$ conv $\Rightarrow \sum a_n$ div? SI

② $\sum \left(\frac{1}{n^2} + |x-3|^n \right) \quad x \in \mathbb{R}$

③ $\sum \frac{3^n}{4^n + n!}$

④ $\sum \frac{3^n}{2^n + n!}$

① i) $a_n = n \qquad \sum \frac{1}{a_n}$ dv. $\qquad \sum n$ div.

ii) $\frac{1}{a_n} \to 0 \Rightarrow a_n \to +\infty$

② serie somma

$\sum \frac{1}{n^2}$ conv.

$\sum |x-3|^n$ conv. $\iff |x-3| < 1$

$-1 < x - 3 < 1$

$2 < x < 4$

Se $2 < x < 4$ la s. somma conv.

Se $x \leq 2$ opp. $x \geq 4$ la s. somma div.

(3) $\sum \dfrac{3^n}{4^n + n!}$

$4^n + n! > 4^n \Rightarrow \dfrac{3^n}{4^n+n!} < \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ serie geom. conv.

$4^n + n! > n! \Rightarrow \dfrac{3^n}{4^n + n!} < \dfrac{3^n}{n!}$

$\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} \dfrac{n!}{3^n} = \dfrac{3}{n+1} \to 0 \Rightarrow$ conv.

Per confronto la serie data è conv.

(4) $\dfrac{3^n}{2^n + n!}$

$2^n + n! > n! \Rightarrow \dfrac{3^n}{2^n + n!} < \dfrac{3^n}{n!}$ $\quad \sum \dfrac{3^n}{n!}$ conv.

$\Rightarrow$ la serie data conv. per confronto

[$2^n + n! > 2^n \Rightarrow \dfrac{3^n}{2^n + n!} < \dfrac{3^n}{2^n} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ $\quad \sum \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ div.

questa scelta non era conveniente

(5) $\sum \dfrac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$

(6) $\sum \left(\cos \dfrac{2n}{n^2+1} - 1\right)$

(7) $\sum \dfrac{(2x^2)^{n+3}}{\pi^{3n+1}}$

(8) $(\cos n\pi) \dfrac{\sqrt{n+2}}{n+3}$

(5) $(-1)^{2n+1} = \underbrace{(-1)^{2n}}_{1} \underbrace{(-1)^1}_{-1} = -1$ $\quad \sum - \dfrac{1}{(n+2)^{\frac{1}{3}}}$

$\dfrac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$ div $\Rightarrow$ la serie data div. negativ.

⑥ $\sum \left(\cos \frac{2n}{n^2+1} - 1\right)$ è a term. neg.

cons. $\sum \left(1 - \cos \frac{2n}{n^2+1}\right)$

$\frac{2n}{n^2+1} \to 0$

$$\underbrace{\frac{1-\cos\frac{2n}{n^2+1}}{\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2}}_{\to \frac{1}{2}} \underbrace{\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2}_{\to 0} \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$n^2 \frac{1-\cos\frac{2n}{n^2+1}}{\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2 \to 2$$

$\Rightarrow$ questa serie conv.

$\Downarrow$

la serie data conv.

$$\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2 = \frac{4n^2}{n^4+2n^2+1} \qquad 4-2=2$$

$a_n \to 0$

$n^\alpha a_n \to \ell > 0$