23 NOVEMBRE 2022

mercoledì 23 novembre 2022 07:59

$f, F : (a,b) \to \mathbb{R}$ se $\exists\, F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

F primitiva di f in (a,b)

TEOR. Se F è una prim. di f in (a,b) allora tutte e sole le prim. sono $F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

un' eventuale primitiva è $|x| + k$ ancora

DEF. L'insieme delle primitive di f è detto INTEGRALE INDEFINITO DI f $\quad \int f(x)\, dx$

$\uparrow$ funzione integranda

$$\int f(x)\, dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha prim.} \\ F(x) + k & \text{se } F \text{ è una prim.} \end{cases}$$

$F(x) + k = \{ F(x) + k : k \in \mathbb{R} \}$

$$\int e^x\, dx = e^x + k$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + k$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + k$$

$$\int (\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx = \operatorname{tg} x + k$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + k = -\arccos x + k$$

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad (\alpha \neq -1)$$

es. $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + k$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log |x| + k$$

$\Uparrow$

$$D(\log|x|) = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x}$$

$$\boxed{D(f(g(x))) = f'(g(x))\, g'(x)}$$

$$\int \cos(f(x))\, f'(x)\, dx = \sin(f(x)) + k$$

$$\int e^{f(x)} \dots = e^{f(x)} + k$$

$$\int \cos(f(x))\, f'(x)\, dx = \sin f(x) + k$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log|f(x)| + k \qquad D(\log|f(x)|) = \frac{1}{\cancel{|f(x)|}} \frac{\cancel{|f(x)|}}{f(x)} f'(x)$$

$$\int \frac{4}{4x+3}\, dx = \log|4x+3| + k$$

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\, dx = \log(x^2+3) + k$$

$$\int 2e^{2x}\, dx = e^{2x} + k$$

$$\int 3 \sin 3x\, dx = -\cos 3x + k$$

in generale $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + k$ se F è una prim. di f

invece

$$\int \sin 3x\, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + k \qquad D(\cos 3x) = -3\sin 3x$$

$$D\left(\frac{\cos 3x}{3}\right) = -\sin 3x$$

$$\int e^{4x}\, dx = \frac{e^{4x}}{4} + k$$

Proprietà di omogeneità

Ip f dot. di prim.
$c \neq 0$

TS cf è dot. di prim.

$$\int c f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

ins. delle prim. di $c f(x)$

ins. delle primitive di f moltiplicate per c

DIM. Sia $F \in \int c f(x)\, dx \Rightarrow F'(x) = c f(x)$

Si ha $F(x) = c \frac{F(x)}{c}$ e $D\left(\frac{F(x)}{c}\right) = \frac{\cancel{c} f(x)}{\cancel{c}} \Rightarrow \frac{F(x)}{c} \in \int f(x)\, dx$

Sia ora $F \in c \int f(x)\, dx \Rightarrow \exists\, G$ prim. di f : $F = cG$

$\Rightarrow F'(x) = c\, G'(x) = c f(x) \Rightarrow F \in \int c f(x)\, dx$

es. $\int 4x^3\,dx = 4\int x^3\,dx = 4\frac{x^4}{4} + k = x^4 + k$

$\int -2\cos x\,dx = -2\int \cos x\,dx = -2\sin x + k$

$\int \cos 2x\,dx = \int \underbrace{2}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\cos 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + k$

$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + k$

Proprietà distributiva (senza dim.)

IP f, g dot. di prim.

TS $f + g$ "

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

↑

ins. delle funz. ottenute sommando una prim. di f e una di g

es. $\int (e^x + \cos x)\,dx = e^x + \sin x + k$ $\left(e^x + \dot{k} + \sin x + \dot{c}\right)$

se F è una prim di f $\int (f(x)+g(x))\,dx = F(x) + \int g(x)\,dx$

Metodo di integr. per decomp. in somma

$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int f(x)\,dx + c_2 \int g(x)\,dx$

$= c_1 F(x) + c_2 \int g(x)\,dx$ se F è una prim. di f

es. $\int \frac{3x-2}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} =$

$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{3}{2}\log(x^2+1) - 2\,\mathrm{arctg}\,x + k$

Metodo di integrazione per parti

IP f, g derivabili

TS $f'g$ è dot. di prim.

$\int f'(x) g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x) g'(x)\,dx$

IP $\quad f, g$ derivabili

$\quad\; f g'$ dot. di primitive

TS $\quad f' g$ è dot. di prim.

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

f = fattore finito $\qquad$ FF

g' = " $\quad$ differenziale $\qquad$ FD

DIM. $\displaystyle \int f' g = \int (f' g + f g' - f g') = \int \underbrace{(f' g + f g')}_{D(fg)} - \int f g' = f g - \int f g'$

Esempi

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{x} \cos x\, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x\, dx \qquad \text{NON CONVIENE}$$

$$\int x \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{\cos x}\, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + k$$

$$\int x^2 \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{e^x}\, dx = x^2 e^x - 2 \int x \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{e^x}\, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int 1 \cdot e^x\, dx =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + k$$

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{1} \cdot \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + k$$

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{x^2} \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx$$

lo faremo dopo

$$\int \log x\, dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{1} \cdot \log x\, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x (\log x - 1) + k$$

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{x^3} \log x\, dx = \frac{x^4}{4} \log x - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^4}{4} \log x - \frac{1}{16} x^4 + k$$

$$\int \sin x\, e^x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx =$$

$$(*)\quad \underbrace{\int \sin x \, \underset{\uparrow \text{ FD}}{e^x} \, dx}_{} = e^x \sin x - \int \underset{\uparrow \text{ FD}}{e^x} \cos x \, dx =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{}$$

Se si trova

$$\int f(x)\,dx = g(x) + c\int f(x)\,dx \qquad c \neq 1$$

$$X = g + cX \Rightarrow (1-c)X = g \Rightarrow X = \frac{g}{1-c}$$

si ha $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{1-c}\,g(x) + k$

Nell' es. $(*)$ $c=-1$ $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x\right) + k$

es. $\displaystyle\int \sin x \underset{\uparrow \text{ FD}}{\cos x} \, dx = \sin^2 x - \int \sin x \cos x \, dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + k$$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\qquad \displaystyle\int \sin x \cos x = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + c$

$-\frac{1}{4}\cos 2x = -\frac{1}{4}\left(1 - 2\sin^2 x\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x$ differiscono per una costante

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{\cancel{x^2+1}}{(x^2+1)^{\cancel{2}}}\,dx + \int \frac{-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int \underset{\uparrow \text{ FD}}{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}}\, x \, dx = \qquad D\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{[illegible]}\,\frac{1}{[illegible]}\,x - \frac{1}{[illegible]}\int \frac{1}{[illegible]}\cdot 1 \, dx = \frac{1}{[illegible]}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{[illegible]}\,\frac{x}{[illegible]} + k$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\cdot 1\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + k$$

Integrazione per sostituzione (I formula)

IP $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ dot. di prim. TS. $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=g(x)}$

$g : (a,b) \to (c,d)$ deriv.

ins. delle primitive di f composte di g

$$\cancel{g(x) = t \qquad dg = g'(x)\,dx = dt}$$

quindi basta determinare l'integrale della funzione esterna

$$\int 3e^{3x}\,dx = \left[\int e^t\,dt\right]_{t=3x} = e^{3x} + k$$

$D(3x)$

$f(t) = e^t$
$g(x) = 3x$
$g'(x) = 3$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$D(\sin x)$

$$= \left[\int (1-t^2)\,dt\right]_{t=\sin x} = \left[t - \frac{1}{3}t^3 + k\right]_{t=\sin x} = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + k$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx = \left[\int \frac{dt}{t+4}\right]_{t=e^x} =$$

$= D(e^x)$

$f(t) = \frac{1}{t+4}$
$g(x) = e^x$
$g'(x) = e^x$

$$= \left[\log|t+4| + k\right]_{t=e^x} = \log(e^x+4) + k$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x + 2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \left[\int (t^2+2t)\,dt\right]_{t=\operatorname{arctg} x} =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + \operatorname{arctg}^2 x + k$$

$$\int \frac{\log^3 x - \log x + 4}{x}\,dx \quad \left[\int (t^3 - t + 4)\,dt\right]_{t=\log x} =$$

$$= \frac{\log^4 x}{4} - \frac{\log^2 x}{2} + 4 \log x + k$$

$$\int \frac{\log \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int \frac{\log \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, dx =$$

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(t) = \log t$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$= 2\left[\int \log t \, dt\right]_{t=\sqrt{x}} =$$

$$= 2\sqrt{x}\,(\log\sqrt{x} - 1) + k$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^x}{e^x(e^x+1)}\, dx = \left[\int \frac{dt}{t(t+1)}\right]_{t=e^x}$$ ← lo faremo dopo

DIM. della formula $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=g(x)}$

Sia F una prim di f, allora il II membro è $\left[F(t)+k\right]_{t=g(x)} = F(g(x)) + k$

Cons. ora $D\big(F(g(x))\big) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x) \Rightarrow$ il I membro è $F(g(x)) + k$

Integrali dei polinomi trigonometrici

$\cos^n x \quad \sin^m x$

$$I_n = \int \cos^n x\, dx \qquad J_m = \int \sin^m x\, dx$$

$$I_1 = \int \cos x\, dx = \sin x + k$$

$$I_2 = \int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2} + k$$

$$I_3 = \int \cos^3 x\, dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\, dx = \left[\int (1-t^2)\, dt\right]_{t=\sin x}$$

$$I_4 = \int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 4x}{4}\right) + k$$

$$I_5 = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)^2\, dx$$

$$I_6 = \int (\cos^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx$$

$I_5 = \int \cos x \, (1-\sin^2 x)^2 \, dx$

$I_6 = \int (\cos^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx$

$J_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x + k$

$J_2 = \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$J_3 = \int \sin x \, (1-\cos^2 x) \, dx$ $\qquad J_4 = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$I = \int \cos^n x \, \sin^m x \, dx$$

n, m entrambi pari $\to$ bisezione

almeno uno è dispari $\to$ sostituzione

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = -\underset{(\cdot)}{\int}(-\sin x)(1-\cos^2 x)\cos^4 x \, dx = \left[-\int (1-t^2)\, t^4 \, dt\right]_{t=\cos x}$$

$$\int \sin^6 x \cos^5 x \, dx = \int \cos x \sin^6 x \, (1-\sin^2 x)^2 dx = \left[\int t^6 (1-t^2)^2 dt\right]_{t=\sin x}$$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int \cos x \sin^3 x \, (1-\sin^2 x) \, dx = ---$$

$$\left[(\cdot) \quad \int \sin^3 \cos^4 = \int \sin \cdot \sin^2 \cos^4 = \int \sin (1-\cos^2)\cos^4 = -\int (-\sin)(1-\cos^2)\cos^4 \right.$$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos^2 2x - 2\cos 2x)(1+\cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x + \cos^2 2x + \cos^3 2x - 2\cos 2x - 2\cos^2 2x)\, dx$$

<u>esec.</u> $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx \qquad \int \sin^2 x \cos^6 x \, dx$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ $\qquad a, b$ polinomi

gr. a < gr. b $\qquad$ propria

Se non è propria eseguiamo la divisione

dati i pl. a, b $\exists$ due pl. q, r con gr r < gr b :

$$a(x) = \underset{\uparrow \text{ quoziente}}{b(x)\,q(x)} + \underset{\nwarrow \text{ resto}}{r(x)}$$

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$$ ← propria

Basta dunque ~~sap~~ limitarsi al caso in cui f è propria.

Una funz. raz. fratta propria si può decomporre ~~in~~ nella somma di FRATTI SEMPLICI che sono funz. del tipo

$$\frac{A}{(x-c)^n} \qquad A, c \in \mathbb{R} \qquad \text{es. } \frac{5}{(x-3)^2} \quad \frac{8}{x} \quad \frac{2}{(x+4)^3} \quad \cdots$$

oppure del tipo $\dfrac{Bx + C}{[(x-p)^2 + q^2]^n}$ $\quad B, C, p, q \in \mathbb{R}$

es. $\dfrac{2x}{x^2+3} \quad \dfrac{4x-1}{(x-2)^2+8} \quad \dfrac{3x+2}{[(x-1)^2+6]^3} \quad \cdots$

si risolve l'eq. $b(x) = 0$ sia c una sua sol. ($c \in \mathbb{R}$ o $c \in \mathbb{C}$)

gr. $b = n$

allora $b(x) = (x-c)\, b_1(x)$ gr. $b_1 = n-1$

si risolve $b_1(x) = 0$ ecc.

alla fine si avrà $b(x) = (x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)$

$c_1, c_2, \ldots c_n$ sol. dell'eq. $b(x) = 0$

(si può sempre supporre che il coeff. di x^n sia 1)

se $c_1 = c_2 = c_3$ $\quad c_1$ di molt. 3

$b(x) = (x-c_1)^3 (x-c_4) \cdots (x-c_n)$

se $c \in \mathbb{C}$ $\quad c = \alpha + i\beta$ è sol di molt. s

anche $\bar{c} = \alpha - i\beta$ " "

$$(x-c)(x-\bar{c}) = [x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)] =$$
$$= [(x-\alpha) - i\beta]\,[(x-\alpha) + i\beta] = (x-\alpha)^2 - (i\beta)^2 =$$
$$= (x-\alpha)^2 + \beta^2$$

dunque b si può decomporre in fattori di I grado $(x-c)^r$

e " II $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^s$

$(x-c)^r$ dà luogo a r fratti semplici

$$\frac{A_1}{x-c} \quad \frac{A_2}{(x-c)^2} \quad \cdots \quad \frac{A_r}{(x-c)^r}$$

$[(x-\alpha)^2+\beta^2]^s$ dà luogo a s fratti semplici

$$\frac{B_1 x + C_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]} \quad \frac{B_2 x + C_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2} \quad \cdots \quad \frac{B_s x + C_s}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^s}$$