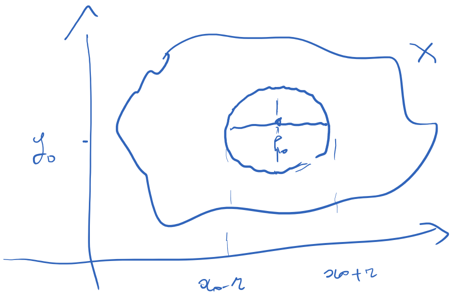
12 OTT. 2022

mercoledì 12 ottobre 2022 07:58

RIPASSO



$$f(x, y_0) = g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = f_x(x_0, y_0)$$

$$f(x,y) = \frac{2x^2 y}{x} - y^2 + \log xy$$

$$f_x(x,y) = \frac{4x^2 y - 2x^2 y}{x^2} + \frac{y}{xy}$$

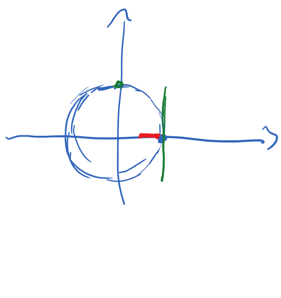
$$f_y(x,y) = \frac{2x^2}{x} - 2y + \frac{x}{xy}$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) \right)$$

f_{xx} $\quad$ f_{xy}

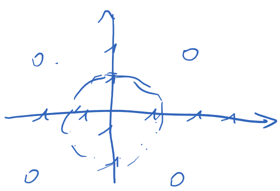
f_{yy} $\quad$ f_{yx}

se f_{xy}, f_{yx} esistono in tutto X e sono continue in (x_0, y_0) allora $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$



$P_0(1, 0)$

$\exists f_x, f_y \Rightarrow f$ continua? NO



$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$$

$P_0(0,0)$

f non è cont. in $(0,0)$ ma $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

f non è cont. in $(0,0)$ ma $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

---

in una variabile $\quad \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$\Updownarrow$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\,h}{h} = 0$$

$f(x_0+h) -$
$[f(x_0) + h f'(x_0)]$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x_0+h) - f(x_0) = \Delta f$

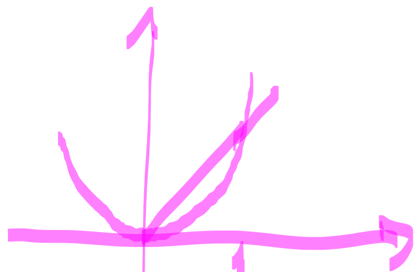
$h = x - x_0 = \Delta x$

$f'(x_0)\,h = d f(x_0) \quad$ differenziale di f

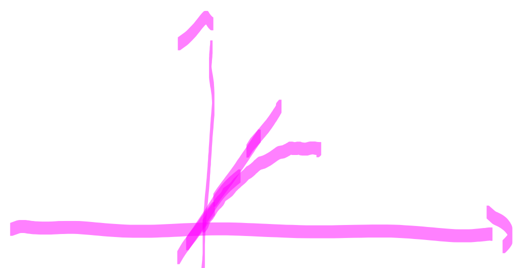
$\exists f'(x_0) \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \dfrac{\Delta f - df}{h} = 0 \quad (*) \quad$ df un polinomio di primo grado nella variabile h

$\Updownarrow$

$\Delta f - df = o(h)$



$\dfrac{x^2}{x} \to 0$



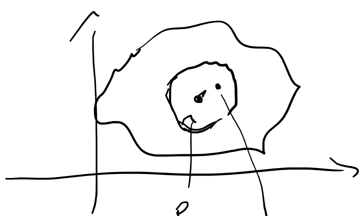
$\dfrac{\sin x}{x} \to 1$

IN DUE VARIABILI: $\quad (x_0, y_0) \to (x_0 + h, y_0 + k)$

$(x_0, y_0) \in \mathrm{int}(X) \Rightarrow \exists \; B((x_0,y_0), r) \subseteq X$

se $\quad (h,k) \in B((0,0), r) \Rightarrow d((x_0+h, y_0+k), (x_0,y_0)) = \sqrt{h^2+k^2} < r$

$\Rightarrow (x_0+h, y_0+k) \in X$



P_0

$P(x_0+h, y_0+k)$

Per riprodurre in due variabili la $(*)$ ci aspettiamo una relazione del tipo $\quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \quad$ con df polin. di primo grado in h, k, ci aspettiamo $df = f_x(x_0,y_0)\,h + f_y(x_0,y_0)\,k$

primo grado in h, k, ci aspettiamo $df = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$

Se $\exists$ un polinomio del tipo $\ell h + m k$ (cioè se $\exists\, \ell, m \in \mathbb{R}$) tale che
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \ell h - m k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

allora f si dice DIFFERENZIABILE in (x_0,y_0)

TEOREMA

IP $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $\quad P_0(x_0,y_0) \in X$

f differenziabile in P_0

TS a) f continua in P_0

b) $\exists\, f_x(x_0,y_0) = \ell$, $\quad \exists\, f_y(x_0,y_0) = m$

OSSERV. se definiamo $df(P_0) = \ell h + m k = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$ (differenziale di f) la differenziabilità si esprime dicendo che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \qquad (**)$$

ovvero $\Delta f - df = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$

$(**)$ è l'analoga della $(*)$ in due variabili.

DIM.

a) TS $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta f = 0$

$$\Delta f = \Delta f - \ell h - m k + \ell h + m k =$$

$$= \underbrace{\frac{\Delta f - \ell h - m k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\to 0} \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\to 0} + \underbrace{\ell h}_{\to 0} + \underbrace{m k}_{\to 0} \to 0$$

b) TS $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \ell$

b) TS $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \ell$

IP $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \ell h - m k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \Rightarrow$ per $k=0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - \ell h}{|h|} = 0 \qquad (1)$$

Cons. allora $\displaystyle\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - \ell h + \ell h}{h} =$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - \ell h}{|h|}}_{\downarrow \; 0 \text{ per la } (1)} \; \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\pm 1}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\ell h}{h}}_{= \ell} \to \ell$$

$f_y(x_0,y_0) = m$ si prova allo stesso modo.

Il viceversa non vale

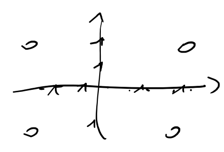
es. 1 $\quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ è cont. in $(0,0)$

$g(x) = f(x,0) = |x| \qquad \nexists \; f_x(0,0)$

$h(y) = f(0,y) = |y| \qquad \nexists \; f_y(0,0)$

f è cont. ma NON differenz. (se lo fosse, avrebbe le derivate)

es. 2 $\quad f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$



$f_x(0,0) = 0 \qquad f_y(0,0) = 0$

f è deriv. ma NON è differenz. (se lo fosse, sarebbe continua)

es. 3 $\quad f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ è cont. $\qquad P_0(0,0)$

$f_x(0,0) = 0$

es. 3 $\quad f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ è cont.

$\exists f_x(0,0)$? $\quad g(x) = f(x,0) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

$f_y(0,0) = 0$

f è diff. in $(0,0)$? $\quad df = 0$

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{\frac{|hk|}{h^2+k^2}}$$

$h = 0 \to 0$

$h = k \to \sqrt{\frac{h^2}{2h^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \Rightarrow \nexists \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{\cdot}} \Rightarrow f$ NON è diff.

Teorema del differenziale totale (senza dim.)

IP $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $\quad P_0 \in X \quad f : X \to \mathbb{R}$

$\exists f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ e una almeno di esse esiste in un intorno di P_0 ed è continua in P_0

TS $\quad f$ è diff. in P_0

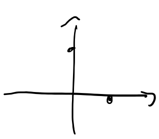
es. $\quad f(x,y) = 3x^2y^4 - 2xy + x^3 - 2y^2$

è diff. in $(1,3)$? SI

$f(x,y) = |xy|$

se $xy > 0 \quad f_x(x,y) = y \quad f_y(x,y) = x$

se $xy < 0 \quad f_x(x,y) = -y \quad f_y(x,y) = -x$



$\exists f_x(a,0)$? $\quad g(x) = f(x,0) = 0 \Rightarrow f_x(a,0) = 0 \quad \forall a$

$\exists f_y(a,0)$? $\quad l(y) = f(a,y) = |a||y| = \begin{cases} |a|y & \text{se } y > 0 \\ -|a|y & \text{se } y < 0 \end{cases}$

der. "destra" $|a|$

" "sin." $-|a|$

$|a| = -|a| \iff a = 0$

$\exists f_y(0,0) = 0 \quad \nexists f_y(a,0)$ se $a \neq 0$

$\exists f_x(0,b)$? analog. si trova che $\exists f_x(0,0) = 0$

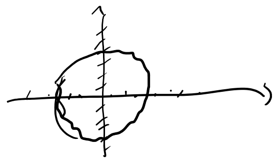
$\nexists\ f_{yx}\ (0,b)$ se $b \neq 0$

$f_y\ (0,b) = 0$

Non possiamo appl. il teor. del diff totale $\qquad d f = 0$

f è diff. ?
$$\frac{\Delta f - d f}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|h k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \underbrace{|k|}_{\downarrow 0} \to 0 \Rightarrow f \text{ è diff}$$

quindi il teor. del diff totale fornisce una condiz. solo suff. per la differenziabilità.



Teorema di derivazione delle funzioni composte

IP $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $\quad f : X \to \mathbb{R}$ $\qquad (x, y)$

$(a,b) \subseteq \mathbb{R} \qquad g_1, g_2 : (a,b) \to \mathbb{R}$ $\qquad t$

$\forall\ t \in (a,b) \quad (g_1(t), g_2(t)) \in X$

$t \in (a,b) \to F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$

$t_0 \in (a,b) \quad \exists\ g_1'(t_0),\ g_2'(t_0)$

f differenz. in $(g_1(t_0), g_2(t_0))$

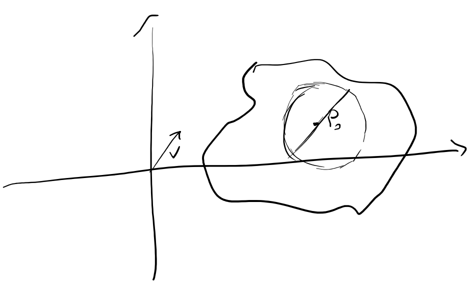
TS $\quad \exists\ F'(t_0) = f_x(g_1(t_0), g_2(t_0))\, g_1'(t_0) + f_y(g_1(t_0), g_2(t_0))\, g_2'(t_0)$

OSSERV. cons. la funz. $t \in (a,b) \to G(t) = (g_1(t), g_2(t)) \in \mathbb{R}^2$
(funzione vettoriale)

def. $\quad G'(t) = (g_1'(t), g_2'(t))$

$\left(f_x(g_1(t_0), g_2(t_0)),\ f_y(g_1(t_0), g_2(t_0)) \right) = \nabla f(G(t_0))$

quindi $\quad F'(t_0) = (\nabla f(G(t_0)), G'(t_0))$ prodotto scalare



$v = (a,b)$ vettore

$\sqrt{a^2+b^2} = |v|$ modulo di v

se $|v| = 1$ $\quad v$ versore

es. $(1,0)$ versore dell'asse $\vec{x}$

$(0,1)$ $\quad$ " $\quad \vec{y}$

es. $(1,0)$ ...
$(0,1)$ " $\vec{y}$

DERIVATE DIREZIONALI $\quad f: X \to \mathbb{R} \quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $\quad P_0\ (x_0, y_0) \in X \quad v = (v_1, v_2)$, $|v| = 1$

Cons. $\quad F(t) = f(x_0 + t v_1,\ y_0 + t v_2)$ sto incrementando P lungo la direzione di V

$P(x_0 + t v_1,\ y_0 + t v_2) \in X$?

$P_0 \in X$ aperto $\Rightarrow \exists\ r > 0 : B(P_0, r) \subseteq X$

se $|t| < r$

$d(P, P_0) = \sqrt{(x_0 + t v_1 - x_0)^2 + (y_0 + t v_2 - y_0)^2} = \sqrt{t^2 (\underbrace{v_1^2 + v_2^2}_{=1})} = |t| < r \Rightarrow$

$\Rightarrow P \in X$

$f :]-r, r[$ se $\exists\ f'(0)$ si dice che f ammette derivata in P_0 lungo la direzione v

$$f_v(x_0, y_0) = f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t v_1,\ y_0 + t v_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

se $v = (1, 0)$ $\quad f_v(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = f_x(x_0, y_0)$

se $v = (0, 1)$ $\quad f_v(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$

$f(t)$ è composta mediante f e $g_1(t) = x_0 + t v_1$,
$g_2(t) = y_0 + t v_2$

quindi per calc. $f'(0)$ faccio riferimento al teor. di derivat. delle funz. composte ottenendo

TEOREMA $\quad$ Se f è diff in (x_0, y_0) allora $\forall v$

$\exists\ f_v(x_0, y_0) = (\nabla f(x_0, y_0), v) \leftarrow$ prodotto scalare

DIM. $\quad f'(0) = f_x(x_0, y_0)\, \underbrace{g_1'(0)}_{= v_1} + f_y(x_0, y_0)\, \underbrace{g_2'(0)}_{= v_2}$

... x^3 ... $P(1, 2)$

es. 1) $f(x,y) = 3x^2 y - y + x^3$

$f_v(1,2)$

$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\nabla f(x,y) = \left(6xy + 3x^2,\ 3x^2 - 1\right)$

$f_v(1,2) = 15\,\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{17}{\sqrt{2}}$

2) $f(x,y) = \dfrac{3xy^2}{x^2+y}$

$P_0(1,1)$

$f_v(1,1)$ $\quad v = (2,3)$

$|v| = \sqrt{13}$ non è un versore

Costruiamo il versore che rappresenta la direzione di v

$y \neq -x^2$

$w = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{3x^2y^2 + 3y^3 - 6x^2y^2}{(x^2+y)^2},\ \frac{6x^3y + 6xy^2 - 3xy^2}{(x^2+y)^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{3y^3 - 3x^2y^2}{(x^2+y)^2},\ \frac{6x^3y + 3xy^2}{(x^2+y)^2}\right)$$

$$f_w(1,1) = 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{9}{4}\,\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{27}{4\sqrt{13}}$$

3) $f(x,y) = \dfrac{2xy^3}{x^2+3y}$

$P_0(1,1)$

$f_v(1,1)$ dove v è la direz. della retta di eq. $r: 2x - y + 3 = 0$

$\boxed{r:\ ax + by + c = 0 \quad v \parallel r \quad v = (b, -a)}$

$v = (1,2)$

$|v| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \neq 1$

il versore è

$w = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x^2y^3 + 6y^4 - 4x^2y^3}{(x^2+3y)^2}, \frac{6x^3y^2 + 18xy^3 - 6xy^3}{(x^2+3y)^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{6y^4 - 2x^2y^3}{(x^2+3y)^2}, \frac{6x^3y^2 + 12xy^3}{(x^2+3y)^2} \right)$$

$$f_w(1,1) = \frac{4}{16}\frac{1}{\sqrt5} + \frac{18}{16}\frac{2}{\sqrt5} = \frac{5}{4}\frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{4}$$

4) $f(x,y) = \cancel{\ldots}\ 2x^2y + 3xy^3$

$f_v(2,1)$ $\quad v =$ direz. della retta di eq. $x + 3y - 2 = 0$

$v = (3,-1)$ $\quad |v| = \sqrt{10}$ $\quad w = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$$\nabla f(x,y) = (4xy + 3y^3, 2x^2 + 6xy^2)$$

$$f_w(2,1) = \frac{33}{\sqrt{10}} - \frac{20}{\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}}$$

ES. DI FUNZ. CHE HA LE DUE DER. PARZ. MA NON ALTRE DIREZ.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{t^2 v_1 v_2}{t^2v_1^2 + t^2v_2^2}}{t} = \frac{\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}}{t} =$$

$$= \frac{v_1 v_2}{t}$$

se $v_1 = 0$ opp. $v_2 = 0$ (assi) il rapp increm. fa zero

$\Rightarrow \exists f_x(0,0) = 0$, $\exists f_y(0,0) = 0$

se $v_1, v_2 \neq 0$ il rapp increm diverge $\Rightarrow \nexists f_v(0,0)$