26 ottobre 2022
mercoledì 26 ottobre 2022 08:00

RIPASSO

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$s_1 = a_1$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ se $s_n \to s$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ reg.

$s_n \to \pm\infty$ serie div.

$\{s_n\}$ oscill. serie indeterm.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ armonica div.

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ geom. conv. $\iff -1 < x < 1 \qquad s = \frac{1}{1-x}$

$k \neq 0 \quad \sum a_n$ e $\sum k a_n$ hanno lo stesso carattere

$\sum a_n \qquad \sum b_n \qquad \sum (a_n + b_n)$

$\underset{s_n}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \qquad r \in \mathbb{N} \qquad \underset{S_n}{\sum_{n=r+1}^{\infty} a_n} \qquad S_n = s_{r+n} - s_r$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \qquad 1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5}\,\frac{5}{4} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots$$

$$\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

Proposizione

Se $\sum a_n$ conv., allora $a_n \to 0$

(quindi se $\{a_n\}$ non tende a zero, la serie NON può convergere)

$s_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{s_{n-1}} + a_n$

DIM. $\quad a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$

$\quad\quad\quad\quad\quad \downarrow \quad\quad \downarrow$

DIM. $\quad a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$

$$\begin{array}{cc} s_n & s_{n-1} \\ \downarrow & \downarrow \\ s & s \end{array}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad {}_{n-1}}_{s_{n-1}}\ a_n$

La condizione NON è sufficiente

es. $\frac{1}{n} \to 0$ ma $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Serie di termini a segno costante

Basta cons. il caso $a_n > 0 \ \forall n^{(\cdot)}$ (se fossero < 0 si potrebbe cons. la serie degli opposti)

$(\cdot)$ o definitivamente (eventualm. si cons. un resto della serie)

TEOREMA Se $a_n \geq 0 \ \forall n$, la serie è regolare.

(osserv. Se $\{a_n\}$ non tende a zero, la serie diverge

Se $a_n \to 0$, la serie potrebbe convergere)

DIM. $\quad s_{n+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{} + a_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$

$\Rightarrow \{s_n\}$ è crescente $\Rightarrow$ regolare.

Se converge, $s = \sup s_n$

quindi la serie $\sum a_n$ $\begin{cases} \text{converge se } \{s_n\} \text{ è limit. sup. e si ha } s = \sup s_n \\ \text{diverge se } \{s_n\} \text{ non è limit. sup.} \end{cases}$

Ne segue che $s_n < s \ \forall n$ e approssimando s con s_n si commette un errore per difetto.

Criteri di convergenza e divergenza per le serie a termini non negativi

Criterio del confronto

IP $\quad \sum^{(1)} a_n \ (s_n) \qquad \sum^{(2)} b_n \ (S_n) \qquad a_n \geq 0 \ \forall n, \ b_n \geq 0 \ \forall n$

$a_n \leq b_n \quad \forall n$

TS i) (1) div $\Rightarrow$ (2) div.

ii) (2) conv $\Rightarrow$ (1) conv e $s \leq S$

DIM. $s_n \leq S_n$

i) se $s_n \to +\infty \Rightarrow S_n \to +\infty$

ii) $s_n \leq S_n \leq S \Rightarrow \{s_n\}$ è limit. sup. $\Rightarrow$ (1) conv.

$s_n \to s = \sup s_n \leq S$ (perché S è un maggiorante)

Forma asintotica

$a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n$ e suff. che $\frac{a_n}{b_n} \to \ell > 0$

Allora le serie (1) $\sum a_n$ e (2) $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere

$\frac{a_n}{b_n} \to \ell \Rightarrow$ definitivam. si ha

$\frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2\ell \Rightarrow \frac{\ell}{2} b_n < a_n < 2\ell b_n$

Cons. $\sum a_n$ (1) $\sum b_n$ (2) $\sum \frac{\ell}{2} b_n$ (3) $\sum 2\ell b_n$ (4)

(1) conv $\Rightarrow$ (3) conv $\Rightarrow$ (2) conv

(1) div $\Rightarrow$ (4) div $\Rightarrow$ (2) div

(2) conv $\Rightarrow$ (4) conv $\Rightarrow$ (1) conv

(2) div $\Rightarrow$ (3) div $\Rightarrow$ (1) div

Serie assolutamente convergenti

Cons. $\sum a_n$ (1) e $\sum |a_n|$ (2)

DEF. La (1) si dice assolutamente convergente se la (2) è conv.

TEOR. Una serie assolut. conv. è convergente.

[Il viceversa non vale, ad es. $\sum \frac{1}{n}$ div. ma $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

(di cui esse è ~~il va~~ la serie dei val. ass.) è conv. (lo proveremo)

DIM. Premettiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si possono introdurre i seguenti numeri

$$x^+ = \frac{|x| + x}{2} \qquad x^- = \frac{|x| - x}{2}$$

e si ha $0 \le x^+ \le |x|$ e $x = x^+ - x^-$

$0 \le x^- \le |x|$

Cons. Σa_n^+ (3) $\qquad \Sigma a_n^-$ (4)

$$0 \le a_n^+ \le |a_n|$$

Per Ip. (2) conv., dal criterio del confronto segue che (3) conv.
allo stesso modo (4) conv.

$a_n = a_n^+ - a_n^-$ $\Rightarrow$ la (1) conv. perchè differenza di due serie conv.

Torniamo ai criteri di convergenza e divergenza

Criterio del rapporto.

Sia $\Sigma a_n (1)$ a term. positivi e cons. la succ.

$x_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, supp. che sia regolare e il suo limite sia $\ell \ne 1$ ($\ell \ge 0$ opp. $\ell = +\infty$)

Allora

i) se $\ell < 1$ $\Rightarrow$ (1) conv.

ii) se $\ell > 1$ $\Rightarrow$ (1) div.

DIM. Sia $h \in]\ell, 1[$ $\Rightarrow \exists\, \nu \in \mathbb{N}$: se $n \ge \nu$ si ha $x_n < h$

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} < h \Rightarrow a_{\nu+1} < h\, a_\nu$$

$$\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}} < h \Rightarrow a_{\nu+2} < h\, a_{\nu+1} < h^2 a_\nu$$

$$a_{\alpha+n} < h^n a_\alpha$$

La serie $\sum h^n$ conv. perché $0 < h < 1 \Rightarrow \sum h^n a_\alpha$ conv

$\Rightarrow \sum a_{\alpha+n}$ conv $\Rightarrow$ (1) conv.

ii) $x_n \to l > 1 \Rightarrow$ definitiv. $x_n > 1$ cioè $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

cioè $a_{n+1} > a_n \Rightarrow \{a_n\}$ non può tendere a zero $\Rightarrow$ la serie non conv $\Rightarrow$ div.

Se ~~ha~~ $l = 1$ non si può dire niente

es. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad x_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$ e $\sum \frac{1}{n}$ div.

$a_n = \frac{1}{n^2}$ $\quad x_n = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ conv.

(lo proveremo)

Esempi di Applicazione del crit. del rapporto

$$\sum \frac{n+2}{n^2+3}$$

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+3}{(n+1)^2+3}}{\frac{n+2}{n^2+3}} = \frac{(n^2+3)(n+3)}{((n+1)^2+3)(n+2)} \to 1$$ il crit. non si può usare

$$\sum \frac{n!}{n^n} \qquad a_n \to 0$$

$$x_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}\; n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n\,\cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{conv}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

Criterio della radice

Sia $a_n \geq 0$ $\forall n$ cons. la succ. $x_n = \sqrt[n]{a_n}$, supp. che $\{x_n\}$ sia regolare, $x_n \to l \neq 1$ ($l \geq 0$ opp. $l = +\infty$)

Allora

i) se $l < 1 \Rightarrow$ (1) conv

ii) se $\ell > 1 \Rightarrow (1)$ div.

se $\ell = 1$ il crit. non si può appl.

DIM. i) Sia $h \in]\ell, 1[$, definitiv. $x_n < h$ cioè

$$\sqrt[n]{a_n} < h \Rightarrow a_n < h^n$$

$0 < h < 1 \Rightarrow \sum h^n$ conv $\Rightarrow$ (1) conv per confronto

ii) $\sqrt[n]{a_n} \to \ell > 1 \Rightarrow$ definitiv. $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1$

$\Rightarrow$ non può tendere a zero.

Esempio di applic. $a_n = \left(\dfrac{n^2+1}{(2n+3)^2}\right)^n$ $\quad \sum a_n$?

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^2+1}{(2n+3)^2} \to \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{conv.}$$

$$a_n = \left(\frac{2n^2+3}{(n+2)^2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n^2+3}{(n+2)^2} \to 2 \Rightarrow \text{div.}$$

$\exists\, \ell, m \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \ell h - m k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

diff $\Rightarrow$ cont

DIM.

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \ell h - m k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\downarrow\, 0} \cdot \overset{\nearrow 0}{\sqrt{h^2+k^2}} + \underbrace{\ell h + m k}_{\downarrow\, 0}$$

$$f(x,y) = |x|$$

$$\lim \frac{x \sin^2 y}{\ldots}$$

$y = m x$

$\ldots \quad x \sin^2 mx \quad \ldots$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin^2 y}{\sqrt[9]{x^2+y^2}}$$

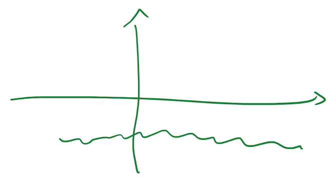
$y = mx$

$$\left| \frac{x \sin^2 mx}{\sqrt[9]{(1+m^2)\,x^2}} \right| =$$

$$\frac{x^{\frac{7}{9}} \sin^2 mx}{\sqrt[9]{1+m^2}} \to 0$$

$$0 \le \left| \frac{\quad}{\quad} \right| = \frac{|x|}{\sqrt[9]{\quad}} \, |\sin^2 y| = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\le 1} \; \underbrace{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[9]{x^2+y^2}}}_{= (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{9}} \to 0} \; \underbrace{|\sin^2 y|}_{\le 0} \to 0$$

$$\left| \frac{\quad}{\quad} \right| \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[9]{\quad}}$$



$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x-3y}{y+1}$$

$$f_x(x,y) = \frac{2x-2}{y+1} \qquad f_y(x,y) = \frac{(2y-3)(y+1) - (x^2+y^2-2x-3y)}{(y+1)^2} =$$

$$= \frac{2y^2+2y-\cancel{3y}-3-x^2-y^2+2x+\cancel{3y}}{(y+1)^2}$$

$$= \frac{y^2-x^2+2x+2y-3}{(y+1)^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-2}{y+1} = 0 \\[2mm] \dfrac{y^2-x^2+2x+2y-3}{(y+1)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y^2-1+2+2y-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2+2y-2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$A(1, -1-\sqrt{3}) \qquad B(1, -1+\sqrt{3})$

$$f_{xx} = \frac{2}{y+1} \qquad f_{xy} = \frac{2-2x}{(y+1)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(y+1)^{2} - 2\cancel{(y+1)}(y^2-x^2+2x+2y-3)}{(y+1)^{3}} =$$

$$= \frac{\cancel{2y^2}+\cancel{4y}+2-\cancel{2y^2}+2x^2-4x-\cancel{4y}+6}{(y+1)^3} = \frac{2x^2-4x+8}{(y+1)^3}$$

$\sqrt{-1-\sqrt{3}+1} =$

$$= \frac{\cancel{2y^2} + \cancel{4y} + 2 - \cancel{2y^2} + 2x^2 - 4x - \cancel{4y} + 6}{(y+1)^3} = \frac{2x^2 - 4x + 8}{(y+1)^3}$$

$-1 - \sqrt{3} + 1 = -\sqrt{3}$

$-1 + \sqrt{3} + 1 = \sqrt{3}$

$H(A) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{-6}{3\sqrt{3}}\right) - 0 = \frac{4}{3} > 0$

$f_{xx}(A) = -\frac{2}{\sqrt{3}} < 0$

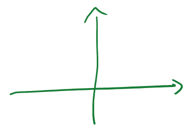
$\Rightarrow$ A p. di max rel

$H(B) = \frac{2}{\sqrt{3}} \; \frac{6}{3\sqrt{3}} - 0 = \frac{4}{3} > 0$

$f_{xx}(B) = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$

$\Rightarrow$ B p. di min rel.

$$f(x,y) = |y|(xy^2 - x^2) = \begin{cases} xy^3 - x^2 y & y \geq 0 \\ x^2 y - x y^3 & y < 0 \end{cases}$$



$y > 0$ $\quad f_x(x,y) = y^3 - 2xy$

$\quad f_y(x,y) = 3xy^2 - x^2$

$y < 0$ $\quad f_x(x,y) = 2xy - y^3$

$\quad f_y(x,y) = x^2 - 3xy^2$

$\exists f_x(a,0)$? $\qquad g(x) = f(x,0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow f_x(a,0) = 0 \quad \forall a$

$\exists f_y(a,0)$? $\qquad h(y) = f(a,y) \qquad \exists h'(0)$?

$h'_+(0) = -a^2 \qquad h'_-(0) = a^2$

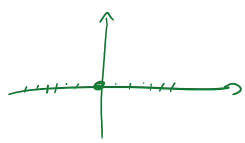
$-a^2 = a^2 \iff a = 0 \Rightarrow \exists f_y(0,0) = 0$

$\nexists f_y(a,0)$ se $a \neq 0$

in tutti i punti $(a,0)$ con $a \neq 0$ f non è diff.

" $\notin$ asse delle ascisse f è diff

in $(0,0)$ f è diff ?



Si per il teor del diff totale

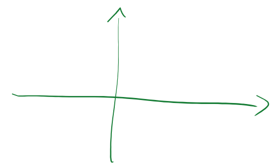
$$\frac{|k|(hk^2 - h^2) - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{}}}_{\leq 1}\left(\underbrace{h k^2 - h^2}_{\downarrow 0}\right) \to 0$$

$\begin{cases} y^3 - 2xy = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \quad \begin{cases} y(y^2 - 2x) = 0 \\ x(3y^2 - x) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y^3 - 2xy = 0 \\ 3xy^2 - x^2 = 0 \end{cases} \longleftarrow \qquad \begin{cases} y(y^2 - 2x) = 0 \\ x(3\cancel{y}y^2 - x) = 0 \end{cases}$$

$$(0,0) \qquad \begin{cases} y^2 - 2x = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2} y^2 \\ x = \frac{1}{3} y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

$$f_{xx} = -2y \qquad f_{xx}(0,0) = 0$$

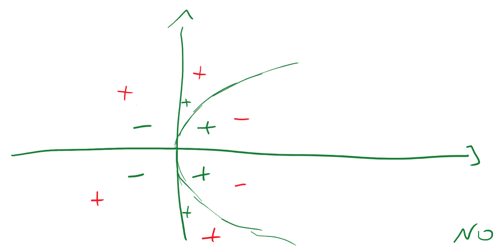


$$f_{x\cancel{x}}(0,y) = \begin{cases} y^3 & 3y^2 \\ -y^3 & -3y^2 \end{cases} \qquad f_{xy}(0,0) = 0$$

$$H(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(0,0)\ ? \qquad f_y(0,y) = 0 \qquad f_{yy}(0,0) = 0$$

$$|y|(xy^2 - x^2) = |y|\, x\, (y^2 - x)$$



NO ESTR
REL

$$f(x,y) = x^2 y - y^2 + y$$

estr ass in $[-2,0] \times [0,1]$