Universitá degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Informatica

Esercizi di **Elementi di Analisi Matematica 2**

Proff. R.Cirmi (corso A-.L) e O. Naselli (corso M-Z)

Integrali indefiniti e definiti

1 Determinare e i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{\arctan^2 x - \arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\log^2 x - 3\log x + 1}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int x \arctan x\,\mathrm{d}x, \quad \int x^3 \log x\,\mathrm{d}x, \quad \int x \sin x\,\mathrm{d}x, \quad \int (x+2)\cos x\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{x+1}{x^3-6x^2+9x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{x+4}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{x+1}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{2x-1}{x^2+x+4}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+3)}$$

2 Determinarei seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x, \quad \int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \quad \int \cos(\log x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{\log(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int x^3 \mathrm{sen}\,(9x)\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{x\log x\big(1+\log^2 x\big)}\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{x^5}{x^4-1}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x, \int \sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$
$$\int \frac{\log x + 1}{x(\log^2 x + 3)}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\log x + 4}{x(\log^2 x - 2\log x - 3)}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\tan x + 1}{(\tan x)\ (\tan^2 x + 1)}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}\ (e^x-1)}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^x+3}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\tan x + 2}{\tan^2 x + 4}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\tan x}{\tan x + 2}\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{e^x+5}{e^{2x}+e^x-12}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^x+1}{e^{2x}+2e^x+8}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{dx}{e^x+2}$$
$$\int \frac{1}{(x-3)^2}\log(x+1)\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{x^2}\arctan x^2\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{\log x + 1}{x(\log^2 x + \log x + 4)}\,\mathrm{d}x\,, \int \frac{\sin x(\cos x + 1)}{\cos^3 x + \sin^2 x - 1}\,\mathrm{d}x.$$

3 Determinare i seguenti integrali indefiniti

$$\int (\sin^3 x)\ (\cos^4 x)\,\mathrm{d}x, \quad \int (\sin^4 x)\ (\cos^4 x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \cos^2 x\ \sin^4\ x\,\mathrm{d}x, \quad \int (\cos^3 x)\ (\sin^6 x)\,\mathrm{d}x$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Determinare i seguenti integrali definiti

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{|\cos x|}{\sin^2 x + 2\sin x + 2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^4 \frac{|\log x - 1|}{x\log^2 x + x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{(2+\cos 2x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^2 \frac{|2x-3|}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{3+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_{-1}^1 \frac{|e^x-1|}{e^{2x}+1}dx\,, \int_{-1}^1 \frac{|x|}{x^3+8}dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin 2x|\sin x}{\sin^2 x+4}dx\,, \int_1^3 x\log(1+|x^2-4|)dx.$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Determinare la funzione $F(x)$ primitiva in $\mathbb{R}$ della funzione definita dalla legge

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e tale che $F(4) = e$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Determinare la funzione F, primitiva nell'intervallo $]0, \frac{\pi}{2}[$ della funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{1}{\tan x + 1}$$

e tale che $F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Determinare la funzione F, primitiva della funzione nell'intervallo $]0, +\infty[$ della funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

e tale che $F(1) = \log(e-1)$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Determinare la funzione F, primitiva nell'intervallo $[0, 2]$ della funzione definita dalla legge

$$f(x) = |x^2 - x|$$

e tale che $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Determinare la funzione F, primitiva nell'intervallo $[-1, 2]$ della funzione definita dalla legge

$$\begin{cases} \sin(x-1)+2 & \text{se } x < 1 \\ x^2 + \cos(x-1) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e tale che $F(0) = 0$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Determinare, se esistono, tutte le primitive nell'intervallo $[-1, 1]$ della funzione definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e, fra esse, determinare la funzione F tale che $F(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Determinare $F(x)$ primitiva in $]1,+\infty[$ della funzione definita dalla legge

$$f(x) = |x-2| \log \frac{x-1}{x+1}$$

tale che $F(2) = 0$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Determinare $F(x)$ primitiva in $\mathbb{R}$ della funzione definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x \arctan \frac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

e tale che

$$F(0) = 2\,.$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Determinare $F(x)$ primitiva in $[-1,2]$ della funzione definita dalla legge

$$f(x) = |x-1| \arctan x$$

e tale che $F(0) = 0$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Determinare $F(x)$ primitiva in $]0,+\infty[$ della funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$$

e tale che $F(12) = 8$.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^2 (x + |x-1|) \log(1+x) \mathrm{dx}.$$

$\boxed{\mathbf{17}}$ Data la funzione definita dalla legge

$$G(x) = \int_1^{1+x^2} \sqrt{3+t^2} \mathrm{dt}$$

i) calcolarne la derivata prima;

ii) scrivere l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x = 0$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{\sin x} (e^{t^2} - 1) dt\,.$$