21 NOVEMBRE 2022

lunedì 21 novembre 2022 08:55

1) $$\sum \frac{(2x^2)^{n+3}}{\pi^{3n+1}}$$

$$a_n = \frac{(2x^2)^3}{\pi}\left(\frac{2x^2}{\pi^3}\right)^n \qquad \text{ragione } \frac{2x^2}{\pi^3}$$

conv. $\iff -1 < \frac{2x^2}{\pi^3} < 1$

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{\pi^3} > -1 \\ \frac{2x^2}{\pi^3} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2x^2+\pi^3}{\pi^3} > 0 \\ \frac{2x^2-\pi^3}{\pi^3} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 > -\frac{\pi^3}{2} \\ x^2 < \frac{\pi^3}{2} \end{cases} \qquad -\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} < x < \sqrt{\frac{\pi^3}{2}}$$

Per gli altri valori di x diverge

$$s = \left(\frac{1}{1-\frac{2x^2}{\pi^3}} - 1\right)\frac{8x^6}{\pi^3}$$

2) $$\sum (\cos n\pi)\frac{\sqrt{n+2}}{n+3} \qquad \cos n\pi = (-1)^n$$

ass. conv. ? $\quad |a_n| = \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} \qquad 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \implies \sum |a_n|$ div.

la studiamo come serie a s. alterni

$$\frac{\sqrt{n+2}}{n+3} \to 0$$

$$\frac{\sqrt{n+2}}{n+3} > \frac{\sqrt{n+3}}{n+4} \ ?$$

$$(n+4)\sqrt{n+2} > (n+3)\sqrt{n+3}$$

$$(n^2+8n+16)(n+2) > (n^2+6n+9)(n+3)$$

$$\cancel{n^3} + 8n^2 + 16n + 2n^2 + 16n + 32 > \cancel{n^3} + 6n^2 + 9n + 3n^2 + 18n + 27$$

$n^2 + 5n + 5 > 0$? vero

crit. di Leibniz $\Rightarrow$ la serie conv. non assolut.

$1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots$ s. geom. $s = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots$ primo resto $s = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1$

---

1. Data $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si cons. la succ. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Se essa conv. ad un numero s, si dice che la serie è conv. ed ha somma s

2. $a_n > 0 \ \forall n$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 2$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge per il crit. del rapp.

infatti $\exists \ \alpha \in \mathbb{N}$: se $n \geq \alpha$ si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ $(2 > 1)$

$\Rightarrow$ $a_{n+1} > a_n$ quindi definitiv. la succ.

$\{a_n\}$ è crescente $\Rightarrow$ non tende a zero.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ è a segni alt.

$\{a_n\}$ $\overline{\underline{\text{e}}}$ cresc. $\Rightarrow$ la serie è indet. per il crit. di non regolarità

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{n+1}}{x^{3n+2}}$ $a_n = \frac{\pi}{x^2} \left(\frac{\pi}{x^3}\right)^n$ I RESTO DELLA SERIE GEOM ragione $\frac{\pi}{x^3}$

conv. $\Leftrightarrow -1 < \frac{\pi}{x^3} < 1$

div. $\Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{x^3} \geq 1$

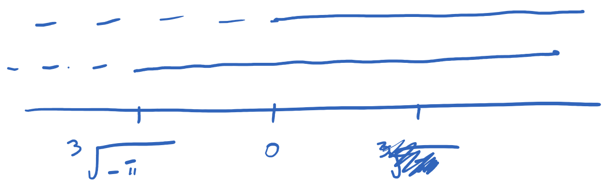
indet. $\Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{x^3} \leq -1$

$\left\{ \frac{\pi}{x^3} > -1 \right.$ $\left\{ \frac{\pi}{x^3} + 1 > 0 \right.$ $\left\{ \frac{\pi + x^3}{x^3} > 0 \right.$ $\left\{ x < \sqrt[3]{-\pi} \right.$, $x > 0$

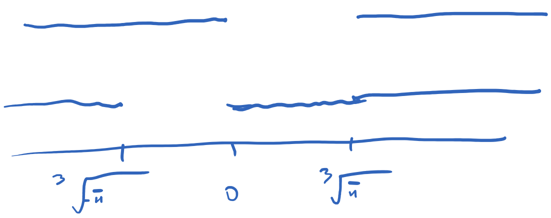
$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{x^3} > -1 \\ \dfrac{\pi}{x^3} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\pi}{x^3} + 1 > 0 \\ \dfrac{\pi}{x^3} - 1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\pi + x^3}{x^3} > 0 \\ \dfrac{x^3 - \pi}{x^3} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \sqrt[3]{-\pi}\ ,\ x > 0 \\ x < 0\ ,\ x > \sqrt[3]{\pi} \end{cases}$$

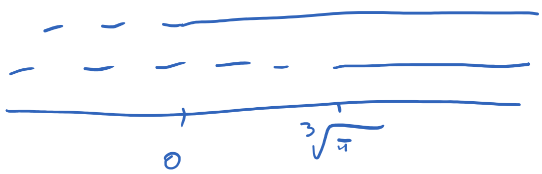
$x^3 + \pi > 0$ quando $x > \sqrt[3]{-\pi}$

$x^3 - \pi > 0$ " $x > \sqrt[3]{\pi}$



I dis.





II dis.

per $x < \sqrt[3]{-\pi}$ e per $x > \sqrt[3]{\pi}$ la serie conv.

$$s = \left(\frac{1}{1 - \frac{\pi}{x^3}} - 1 \right) \frac{\pi}{x^2}$$

$\dfrac{\pi}{x^3} \geq 1$ cioè $0 < x \leq \sqrt[3]{\pi}$ la serie div.

$\dfrac{\pi}{x^3} \leq -1$ cioè $\sqrt[3]{-\pi} \leq x < 0$ la serie è indet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2 + 3n}}{n^3 + \sin^2 n}$$

cons. $\sum \left| \dfrac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3 + \sin^2 n} \right|$

$n^3 + \sin^2 n \geq n^3$

$$\frac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3 + \sin^2 n} \leq \frac{\sqrt[3]{\quad}}{n^3}$$

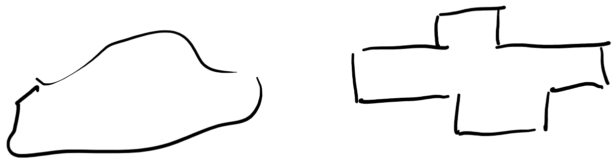
$\sum \dfrac{\sqrt[3]{n^2+3n}}{n^3}$ conv. $\left(3 - \frac{2}{3} > 1\right)$ per conf. con la serie arm. gen.

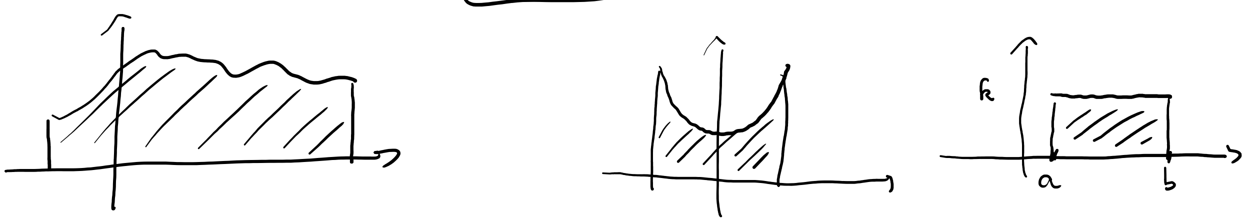
$\Rightarrow \quad \sum \frac{\sqrt[3]{}}{n^3 + \sin^2 n}$ conv. per confronto $\Rightarrow$ la serie data conv. assolut.

CAP 3

I PROBLEMA: data una funz. f, trovare una funz. di cui essa sia la derivata

II PROBLEMA calcolo delle aree di alcuni sottoinsiemi del piano





area $= (b-a)\,(k)$

$f(x)$

I PROBL.: si risponde con l'integrazione indefinita

II " " " definita

INTEGRAZIONE INDEFINITA

DEF. Siano $f, F : (a,b) \to \mathbb{R}$ con F deriv. e tale che

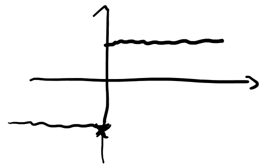
$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Si dice allora che F è una PRIMITIVA di f in (a,b)

Es. $f(x) = e^x$ in $]0,+\infty[$ $\quad F(x) = e^x$

Es. di funzione che non ha prim.

$f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Sia f.a. F una prim. di f in $]-\infty,+\infty[$

in $[0,+\infty[$ $\quad F'(x)=1$ $\quad$ cons. $G(x)=x$, si ha $G'(x)=1$

quindi se $H(x) = F(x) - G(x)$ si ha $H'(x) = 1-1=0 \ \forall x \in [0,+\infty[$

Ne segue che H è costante $\quad F(x) = x + c \quad \forall x \in [0,+\infty[$

in $]-\infty,0[$ $\quad F'(x) = -1$ $\quad$ procedendo come prima si trova che

$$F(x) = -x + c' \quad \forall x \in]-\infty,0[$$

$$F(x) = \begin{cases} x+c & x \geq 0 \\ -x+c' & x<0 \end{cases}$$

F prim. di f in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ deriv. in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ cont. in $\mathbb{R}$, in partic. cont. in $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^-} F(x) \quad \Rightarrow \quad c=c'$$

in definitiva $\quad F(x) = \begin{cases} x+c & x \geq 0 \\ -x+c & x<0 \end{cases} = |x| + c$ $\quad$ che quindi risulterebbe deriv. in tutto $\mathbb{R}$, assurdo

Teorema sulle primitive. Sia F una prim. di f in (a,b).
Allora, tutte e sole le prim. sono $F(x)+k$, $k \in \mathbb{R}$

DIM. $\quad$ Se F è una prim., allora $G(x) = F(x)+k$ è prim.

infatti $\quad G'(x) = F'(x)+0 = f(x)$

Viceversa, se G è un'altra prim. devo provare che è del tipo $F(x)+k$. Cons. $H(x) = G(x) - F(x)$

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ H è costante.

DEF. $\quad$ INTEGRALE INDEFINITO DI f = l'insieme delle sue primitive

$$\int f(x)\,dx$$

$\uparrow$

funzione integranda

$\mid \ \emptyset$ $\quad$ se f non ha prim.

funzione integranda

Si ha: $\int f(x)\,dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha prim.} \\ F(x) + k & \text{se } F \text{ è una prim. di } f \end{cases}$

$\int e^x\,dx = e^x + k$

$\int \cos x\,dx = \sin x + k$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + k$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + k = -\arccos x + k$

$\int (\mathrm{tg}^2 x + 1)\,dx = \mathrm{tg}\, x + k$

$\int \frac{dx}{x} = \log x + k$

$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad (\alpha \neq -1)$

$$\boxed{D(x^3) = 3x^2 \Rightarrow \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + k}$$

$\int \cos(cx)\,dx = \frac{\sin(cx)}{c} + k$

$\int \sin(cx)\,dx = -\frac{\cos(cx)}{c} + k$

$\int e^{cx}\,dx = \frac{e^{cx}}{c} + k$

$$\boxed{\begin{aligned} &D\,\sin(cx) = c\cos cx \\ &D\,\frac{\sin(cx)}{c} = \frac{\cancel{c}\cos cx}{\cancel{c}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{D(\log|f(x)|) = \frac{1}{\cancel{|f(x)|}}\,\frac{\cancel{|f(x)|}}{f(x)}\,f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + k$

es. $\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \log(x^2+4) + k$

Proprietà di omogeneità

$\int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$

$c \in \mathbb{R}$
$c \neq 0$
f dotata di prim.

ins. delle prim. di cf ↑ — ↑ ins. delle prim. di f moltiplicate per c

es. $\int 6\cos x\,dx = 6\sin x + k$ (inutile scrivere $6k$ perché k è una costante generica) se $c=0$ $\quad c f(x) \cancel{dx} = 0 \quad \Rightarrow$ I membro = tutte le funz. costanti $\neq$

$0 \cdot \int f(x)\,dx \quad \Rightarrow$ II membro = funz. ident. nulla

DIM. Sia $F \in$ I M. cioè $F'(x) = c f(x)$

Si ha $F(x) = c \dfrac{F(x)}{c}$, cons. $G(x) = \dfrac{F(x)}{c}$, si ha $G'(x) = \dfrac{F'(x)}{c} =$

$= \dfrac{c f(x)}{c} = f(x)$

$\Rightarrow F = c$ per una prim di f

Viceversa sia $F \in$ II M. cioè $F(x) = c\, G(x)$ con $G'(x) = f(x)$
allora $F'(x) = c f(x) \Rightarrow F \in$ I membro

Allora ad es.

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+4)\ dx$$

Proprietà distributiva (senza dim.)

f, g dotate di primitive $\Rightarrow f+g$ è dotata di prim.

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$\uparrow$

ins. delle somme di una prim. di f e una di g

Se F è una prim. di f $\quad \int (f(x)+g(x))\,dx = F(x) + \int g(x)\,dx$

es. $\int \left(e^x + \sqrt{x-1}\right) dx = e^x + \int \sqrt{x-1}\,dx$

Mettendo insieme le due proprietà viste si ottiene il Metodo di integr. indef. per decomposizione in somma

f, g dotate di prim. $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int f(x)\,dx + c_2 \int g(x)\,dx =$$

$= c_1 F(x) + c_2 \int g(x)\,dx$ se F è una prim. di f

es. $\int(-2x+3\sin x)\,dx = -x^2 - 3\cos x + k$

$$\int \frac{3x+2}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{3}{2}\log(x^2+1) + 2\,\mathrm{arctg}\,x + k$$

Metodo di integrazione indefinita per parti

f, g derivabili e tali che $f'(x)\,g(x)$ sia dotata di prim.

Allora anche ~~fg~~ $f g'$ è dot. di prim. e si ha

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\ \text{F.F.}}}{f(x)}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{F.D.}}}{g'(x)}\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

DIM. $\int f g'\,dx = \int (f g' + f' g - f' g) = \int \underbrace{(f g' + f' g)}_{D(fg)} - \int f' g =$

$$= fg - \int f' g$$

$$\int x\, e^x\,dx$$

F.D. x ? una prim. è $\frac{x^2}{2}$

$\int x e^x = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x$ non conviene

F.D e^x ? una prim. è e^x

$$\int x\, e^x\,dx = x e^x - \int e^x \cdot 1\,dx = x e^x - e^x + k$$

$$\int x^4 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{FD}}}{e^x}\,dx = x^4 e^x - 4\int x^3 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{FD}}}{e^x}\,dx = x^4 e^x - 4\left(x^3 e^x - 3\int x^2 e^x\,dx\right) =$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12\int x^2 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{FD}}}{e^x}\,dx =$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24\int x e^x \, dx =$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24 e^x + k$$

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{x^2 \cos x} \, dx = x^2 \sin x - 2\int x \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{\sin x} \, dx =$$

$$= x^2 \sin x - 2\left(x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx \right) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + k$$

$$\int \log x \, dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ FD}}{1} \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= x \log x - x + k$$

$$\int x^2 \log x \, dx$$