9 GEN 23

lunedì 9 gennaio 2023 09:04

$y' = f(x,y)$ I ordine

$f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ der.

$\forall x \in (\alpha, \beta)$ $(x, y(x)) \in X$
$y'(x) = f(x, y(x))$

$(x_0, y_0) \in X$ $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

VAR. SEPAR. $y' = X(x)\, Y(y)$ $X : (a,b) \to \mathbb{R}$, $Y : (c,d) \to \mathbb{R}$ cont

$y : (\alpha, \beta) \subseteq (a,b) \to (c,d)$ der.
$\forall x \in (\alpha, \beta)$ $y'(x) = X(x)\, Y(y(x))$

$H = \{ k \in (c,d) : Y(k) = 0 \}$ $k \in H \to y(x) = k$ $\forall x \in (a,b)$

$y(x) \neq k$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$, $\forall k \in H$

$\dfrac{y'(x)}{Y(y(x))} = X(x)$ A prim di X, B prim di $\dfrac{1}{Y}$

$B(y(x)) = A(x) + k$
$y(x) = B^{-1}(A(x) + k)$

LINEARI I ORD (1) $y' + a(x)\, y = f(x)$ $a, f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ cont.

(2) $y' + a(x) y = 0$
OMOG. ASSOC.

y sol di (2), $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $k y$ sol di (2)
y, z sol di (1) $\Rightarrow$ $y - z$ sol di (2)
y sol di (1), z sol di (2) $\Rightarrow$ $y + z$ sol di (1)

(2) $y' = -a(x) y$ INT GEN $y(x) = k e^{-A(x)}$
A prim di a

int partic. di (1) $\bar{y}(x) = k(x)\, e^{-A(x)}$ $k \in \int f(x)\, e^{A(x)}\, dx$

INT GEN DI (1) $\bar{y}(x) + k e^{-A(x)}$

EQ DEL II ORDINE $y'' = f(x, y, y')$
$f : X \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ der. due volte

$\forall x \in (\alpha, \beta)$ $(x, y(x), y'(x)) \in X$

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

$(x_0, y_0, y'_0) \in X$ PC $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

EQ LIN DEL II ORD

(1) $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$

$a, b, f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ CONT

a, b coeff

f term noto

(1) completa

omog assoc. (2) $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

TEOREMA 1

Un PC legato alla (1) (o alla (2)) ha una e una sola sol. definita in (α, β)

TEOREMA 2

i) y_1, y_2 sol di (2), $k_1, k_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow w = \underline{k_1 y_1 + k_2 y_2}$ è sol di (2)

ii) y_1, y_2 " (1) $\Rightarrow w = y_1 - y_2$ è sol di (2)

iii) y sol di (1), z sol di (2) $\Rightarrow w = y + z$ è sol di (1)

iv) se $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ allora la funz $y(x) = z(x) + i\,w(x)$ è sol di (1) se e solo se z è sol di $y'' + a(x)y' + b(x)y = u(x)$ e w " ... $= v(x)$

DIM. i), ii), iii)

$w' = k_1 y'_1 + k_2 y'_2$

$w'' = k_1 y''_1 + k_2 y''_2$

i) $w''(x) + a(x)w'(x) + b(x)w(x) =$

$= k_1 (y''_1(x) + a(x)y'_1(x) + b(x)y_1(x)) +$

$+ k_2 (y''_2(x) + a(x)y'_2(x) + b(x)y_2(x)) = k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0$

$w' = y'_1 - y'_2$

$w'' = y''_1 - y''_2$

ii) $w''(x) + a(x)w'(x) + b(x)w(x) =$

$= \underline{y''_1(x)} - y''_2(x) + \underline{a(x)y'_1(x)} - a(x)y'_2(x) +$

$+ \underline{b(x)y_1(x)} - b(x)y_2(x) = f(x) - f(x) = 0$

$w' = y' + z'$

$w'' = y'' + z''$

iii) $w''(x) + a(x)w'(x) + b(x)w(x) =$

$= \underline{y''(x)} + z''(x) + \underline{a(x)y'(x)} + a(x)z'(x) +$

$+ \underline{b(x)y(x)} + b(x)z(x) = f(x) + 0 = f(x)$

i) $\Rightarrow$ date due sol di (2) ogni loro comb. lin. è sol di (2)

Osserv. che $y(x) = 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$ è sol di (2)

Ne segue che l'ins. S delle sol della (2) è uno sp. vett.

Supp. che y_1, y_2 siano due sol di (2) e cons.

$$W(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{bmatrix}$$

WRONSKIANO

$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

$y'' = -a y' - b y$

$W(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)$

$W'(x) = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - \cancel{y_1' y_2'} =$

$= y_1(-a y_2' - b y_2) - y_2(-a y_1' - b y_1) =$

$= -a y_1 y_2' - b \cancel{y_1 y_2} + a y_1' y_2 + \cancel{b y_1} y_2 =$

$= a(y_1' y_2 - y_1 y_2') = -a\, W(x)$

$\Rightarrow \quad W'(x) + a(x)\, W(x) = 0 \quad \Rightarrow W$ è sol dell'eq
$W + a(x) W = 0$

che è un'eq lineare del I ordine $\Rightarrow W(x) = k\, e^{-A(x)}$
A prim di a

$\Rightarrow W(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ OPPURE $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

DEF. Se $W(x) \neq 0$ y_1, y_2 indipendenti ($\Leftrightarrow$ linearm. indip)

TEOR. 3

i) $\exists$ due sol. indip.

ii) tutte e sole le sol sono le loro comb. lin.

DIM. i) Cons. due PC scegliendo ad arbitrio $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} y'' + a(x) y' + b(x) y = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + a(x) y' + b(x) y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Teor. 1 $\Rightarrow$ $\exists$ una e una sol per ciascuno di questi PC,
siano y_1 e y_2

$$W(x_0) = \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{sono indip.}$$

ii) y_1, y_2 sol $\Rightarrow k_1 y_1 + k_2 y_2$ è sol lo abbiamo già provato
Sia ora z un'altra sol, facciamo vedere che $\exists\, k_1, k_2$: $z = k_1 y_1 + k_2 y_2$

Scegliamo $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e cons il PC

$$\begin{cases} y'' + a(x) y' + b(x) y = 0 \\ y(x_0) = z(x_0) \\ y'(x_0) = z'(x_0) \end{cases}$$

z è la sua sol (unica per il teor. 1)

cerchiamo k_1, k_2 in modo che $k_1 y_1 + k_2 y_2$ sia sol

$$\begin{cases} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) = z(x_0) \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) = z'(x_0) \end{cases}$$

il det dei coeff di questo sistema è $\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} = W(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ il sist è di Cramer $\Rightarrow$ ammette una e una sola sol $(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$

$\Rightarrow \quad z = \bar{k}_1 y_1 + \bar{k}_2 y_2$

DUNQUE

L'ins delle sol della (2) è uno sp. vettor. di dim. 2

Metodo risolutivo per le eq. omogenee
a coefficienti costanti.

(2) $y'' + a y' + b y = 0$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ $\quad (\alpha, \beta) =]-\infty, +\infty[$

cerchiamo una sol del tipo $y(x) = e^{\alpha x}$ $\quad \alpha \in \mathbb{C}$

$y'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, $y''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$ sostit. nella (2)

$\alpha^2 e^{\alpha x} + a \alpha e^{\alpha x} + b e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + a\alpha + b = 0$

$\Rightarrow e^{\alpha x}$ è sol di (2) se α è sol dell'eq. algebrica

(3) $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ EQ. CARATTERISTICA DELLA (2)

Si hanno tre casi:

i) $\Delta > 0$ la (3) ha due sol reali $\alpha_1 \neq \alpha_2$ Si hanno allora
$e^{\alpha_1 x}$, $e^{\alpha_2 x}$ sol di (2)

ii) $\Delta = 0$ la (3) ha una sol α di molt. 2 Si hanno allora
$e^{\alpha x}$ $\quad x e^{\alpha x}$ sol di (2)

iii) $\Delta < 0$ la (3) ha due sol coniug $\beta \pm i\gamma$ $(\gamma \neq 0)$. Si hanno
$e^{\beta x} \cos\gamma x$ $\quad e^{\beta x} \sin\gamma x$ sol di (2)

$$\boxed{\begin{aligned} e^{(\beta+i\gamma)x} &= e^{\beta x}(\cos\gamma x + i \sin\gamma x) \\ e^{(\beta-i\gamma)x} &= e^{\beta x}(\cos\gamma x - i \sin\gamma x) \end{aligned}}$$

Dim. che sono indipendenti

i) $y_1(x) = e^{\alpha_1 x}$
$y_2(x) = e^{\alpha_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} \end{vmatrix} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)x}(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0$$

ii) $y_1(x) = e^{\alpha x}$
$y_2(x) = x e^{\alpha x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & x e^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x} \end{vmatrix} = e^{2\alpha x}(1 + \alpha x - \alpha x) = e^{2\alpha x} \neq 0$$

iii) $y_1(x) = e^{\beta x}\cos\gamma x$
$y_2(x) = e^{\beta x}\sin\gamma x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\beta x}\cos\gamma x & e^{\beta x}\sin\gamma x \\ \beta e^{\beta x}\cos\gamma x - \gamma e^{\beta x}\sin\gamma x & \beta e^{\beta x}\sin\gamma x + \gamma e^{\beta x}\cos\gamma x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\beta x}\left(\cancel{\beta \cos\gamma x \sin\gamma x} + \gamma\cos^2\gamma x - \cancel{\beta \sin\gamma x \cos\gamma x} + \gamma \sin^2\gamma x\right) = \gamma e^{2\beta x} \neq 0$$

ESEMPI

1) $y'' + 2y' - 8y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 + 2\alpha - 8 = 0$ $\qquad \alpha = -1 \pm 3 \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$

int gen $y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-4x}$

2) $y'' - 9y' + 18y = 0$

eq. caratt $\alpha^2 - 9\alpha + 18 = 0$ $\qquad \alpha = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} \begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases}$

int gen $y(x) = k_1 e^{6x} + k_2 e^{3x}$

3) $y'' - 10y' + 25y = 0$

eq caratt $\alpha^2 - 10\alpha + 25 = 0$ $\qquad \alpha = 5$ molt. 2

int gen $y(x) = k_1 e^{5x} + k_2 x e^{5x}$

4) $y'' + 8y' + 16y = 0$

eq caratt $\alpha^2 + 8\alpha + 16 = 0$ $\qquad \alpha = -4$ molt 2

int gen $y(x) = k_1 e^{-4x} + k_2 x e^{-4x}$

5) $y'' - y' + 3y = 0$

eq caratt $\alpha^2 - \alpha + 3 = 0$ $\qquad \alpha = \dfrac{1 \pm i\sqrt{11}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm i \dfrac{\sqrt{11}}{2}$

int gen $y(x) = k_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + k_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x$

6) $y'' + 2y' + 5y = 0$

eq caratt $\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 0$ $\qquad \alpha = -1 \pm 2i$

int gen $y(x) = k_1 e^{-x} \cos 2x + k_2 e^{-x} \sin 2x$

ESERCIZIO SUL CAP 3

$f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\sin \frac{\pi t}{2}}{t^3}\, dt$ $\qquad$ eq. tang. nel p. $x = 1$

$y = f(c) + f'(c)(x - c)$

$f'(x) = \dfrac{\sin \frac{\pi x^2}{2}}{x^6} 2x = \dfrac{2 \sin \frac{\pi x^2}{2}}{x^5}$

$f'(1) = 2$

$f(1) = 0$ $\qquad$ eq. $y = 2(x-1)$

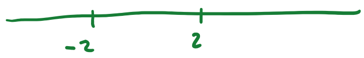
---

primfd $\qquad |x^2 - 4|$ $\qquad f(3) = 1$

prim d $x^2 - 4$ in $]-\infty, -2[$

$4 - x^2$ in $[-2, 2]$

primitiva



primitive x^2-4 in $]-\infty,-2[$

$4-x^2$ in $[-2,2]$

x^2-4 in $]2,+\infty[$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}-4x+c_1 & \text{in }]-\infty,-2[\\ 4x-\frac{x^3}{3}+c_2 & \text{in } [-2,2] \\ \frac{x^3}{3}-4x+c_3 & \text{in }]2,+\infty[\end{cases}$$

cont

$$-\frac{8}{3}+8+c_1=-8+\frac{8}{3}+c_2 \Rightarrow c_2=c_1-\frac{16}{3}+16=c_1+\frac{32}{3}$$

$$8-\frac{8}{3}+c_1+\frac{32}{3}=\frac{8}{3}-8+c_3 \Rightarrow c_3=c_1+16-\frac{16}{3}+\frac{32}{3}=$$

$$=c_1+\frac{64}{3}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}-4x+c_1 & \text{in }]-\infty,-2[\\ 4x-\frac{x^3}{3}+c_1+\frac{32}{3} & \text{in } [-2,2] \\ \frac{x^3}{3}-4x+c_1+\frac{64}{3} & \text{in }]2,+\infty[\end{cases}$$

$f(3)=1$ $\quad 9-12+c_1+\frac{64}{3}=1 \Rightarrow c_1=4-\frac{64}{3}=-\frac{48}{3}$

$$f(3)=\int_3^x |t^2-4|\,dt+1$$