21 dicembre 2022

mercoledì 21 dicembre 2022 07:47

tang $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ nel p. $x=1$

se $\int_1^x f(t)\,dt$ $\quad F(1)=0$ $\quad$ invece in questo caso $F(1)=\int_1^2 f(t)dt$ (si lascia indicato)

EQ. DIFF. DEL PRIMO ORDINE

$f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y)$

(1) $\quad y' = f(x,y)$

sol. $\quad y: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $\forall x \in (a,b)$ si abbia

$(x, y(x)) \in X$

$y'(x) = f(x, y(x))$

es. $\quad y' = \cos x\, y^2$ $\qquad y' = e^x$ $\leftarrow$ (ricerca delle primitive)

Problema di Cauchy: sia $(x_0, y_0) \in X$

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

le sol. di (1) si chiamano anche integrali della (1)

ins. delle sol. INTEGRALE GENERALE

una sol. " PARTICOLARE

EQ. DIFF. DEL SECONDO ORDINE

$f: X \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x, y, y')$

(2) $\quad y'' = f(x, y, y')$

sol. $\quad y: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che $\forall x \in (a,b)$

si abbia $\qquad (x, y(x), y'(x)) \in X$

$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$

Problema di Cauchy

Sia $(x_0, y_0, y_0') \in X$

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Eq. diff del primo ordine a variabili separabili

$y' = X(x)\, Y(y)$ $\qquad X: (a,b) \to \mathbb{R}$ cont.

$Y: (c,d) \to \mathbb{R}$ "

$f(x,y) = X(x)\, Y(y)$

l'ins. di def di f è

$(a,b) \times (c,d)$

sol. $y : (\alpha, \beta) \subseteq (a, b) \to (c, d)$ deriv. e tale che $\forall x \in (\alpha, \beta)$

$$y'(x) = X(x)\, Y(y(x))$$

I categoria di sol. Si risolve l'eq. $Y(y) = 0$

$$H = \{ k \in (c,d) : Y(k) = 0 \}$$

sia $k \in H$ poniamo $y(x) = k \quad \forall x \in (a,b)$

$$0 = y'(x) = X(x)\, \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Y(k)}$$

y è una sol. costante

II categoria di sol. $y : (\alpha, \beta) \subseteq (a, b) \to (c, d) \setminus H$

(sol. che non assumono mai nessuno dei valori $k \in H$)

Sia y una di tali sol. $y : (\alpha, \beta) \subseteq (a, b) \to (c', d') \subseteq (c, d)$

$\forall x \in (\alpha, \beta)$ $y'(x) = X(x)\, Y(y(x))$ separiamo le variabili

$$\frac{y'(x)}{Y(y(x))} = X(x)$$

$\neq 0$ perché $y(x) \neq k \ \forall k \in H \ \forall x \in (\alpha, \beta)$

$\frac{1}{Y}$ è cont. in (c', d'), sia B una sua prim. $B : (c', d') \to (\gamma, \delta)$

sia A una prim. di X

$$D\big(B(y(x))\big) = \frac{1}{Y(y(x))}\, y'(x)$$

$B(y(x))$ e $A(x)$ hanno la stessa derivata

$$B(y(x)) = A(x) + k$$

$\forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow y(x) \in (c', d') \Rightarrow B(y(x)) \in (\gamma, \delta)$

$B' = \frac{1}{Y} \neq 0 \Rightarrow B$ ha la derivata di segno costante $\Rightarrow$ è monot $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ invert

$$\underset{\overset{\shortparallel}{y(x)}}{B^{-1}(B(y(x))} = B^{-1}(A(x) + k)$$

da qui si valuta anche l'intervallo (α, β)

es. $y' = \frac{1 + y^2}{x^2}$ $\quad X(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad Y(y) = 1 + y^2$ $\quad (c,d) = \mathbb{R}$

$H = \emptyset$ $\quad (a,b) =]0, +\infty[$ opp. $]-\infty, 0[$

Sia y una sol. (della II categ.) $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$

$\forall x \in (\alpha, \beta)$ $\quad y'(x) = \frac{1 + (y(x))^2}{x^2} \Rightarrow \frac{y'(x)}{1 + y^2(x)} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{Y(y)} = \frac{1}{1 + y^2} \Rightarrow B(y) = \operatorname{arctg} y$ $\quad A(x) = -\frac{1}{x}$

anche $y(x) = -\frac{1}{x} + k = \frac{kx-1}{x}$

$y(x) = \tg \frac{kx-1}{x}$ $\qquad \frac{kx-1}{x} \neq \frac{\pi}{2}$

$\frac{kx-1}{x} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{kx-1}{x} - \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \frac{2kx-2-\pi x}{2x} = 0$

$x = \frac{2}{2k-\pi}$

anche $\frac{kx-1}{x} \neq -\frac{\pi}{2}$ $\qquad (\alpha, \beta)$ dovrà escludere queste sol.

$y'(x) = x y^2 \qquad X(x) = x \qquad (a,b) = \mathbb{R}$

$Y(y) = y^2 \qquad (c,d) = \mathbb{R}$

$Y(y) = 0 \Rightarrow y = 0 \qquad H = \{0\} \qquad y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ è sol (I cat)

sia $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ sol di II cat. $\quad y(x) \neq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$

$y'(x) = x\, y^2(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y^2(x)} = x \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

$\frac{1}{Y(y)} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow B(y) = -\frac{1}{y} \qquad B(y(x)) = A(x) + k$

$A(x) = \frac{1}{2}x^2$

$-\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x^2 + k$

$\frac{1}{y(x)} = -\frac{x^2+2k}{2} \Rightarrow y(x) = -\frac{2}{x^2+2k}$

se $y(x) > 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow -\frac{2}{x^2+2k} > 0 \Rightarrow x^2 + 2k < 0$

$-\sqrt{-2k} < x < \sqrt{-2k}$ se $k < 0$

(se $k>0$ non ci sono sol. positive)

se $y(x) < 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow -\frac{2}{x^2+2k} < 0 \Rightarrow x^2 + 2k > 0$

se $k > 0 \quad (\alpha, \beta) =]-\infty, +\infty[$

se $k < 0 \quad (\alpha, \beta) =]\sqrt{-2k}, +\infty[$

Sol. di III cat. $\qquad$ sia $y(x) = h$ sol di I cat

sia $y(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ sol di II cat

Se $\lim_{x \to \alpha} y(x) = h$ (opp. $\lim_{x \to \beta} y(x) = h$) allora la funz

$$\begin{cases} y(x) & \text{in } (\alpha, \beta) \\ h & x < \alpha \end{cases}$$ è sol di III cat

es. $y' = \sqrt{|y|} \qquad X(x) = 1 \qquad (a,b) = \mathbb{R}$

$Y(y) = \sqrt{|y|} \qquad (c,d) = \mathbb{R}$

$Y(y) = 0 \Rightarrow y = 0$ $\qquad H = \{0\}$ $\quad y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

sol della I cat.

Sia y una sol di II cat $\quad (y(x) \neq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta))$

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{|y(x)|}} = 1$$

Se $y(x) > 0 \ \forall x$ $\qquad \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{2}x + k = \frac{x+2k}{2}$$

$\frac{x+2k}{2} > 0 \qquad x > -2k \qquad$ ~~sentenza~~ $(\alpha, \beta) =]-2k, +\infty[$

$$y(x) = \left(\frac{x+2k}{2}\right)^2 \qquad \text{I caso}$$

Se $y(x) < 0 \ \forall x$ $\qquad -\frac{y'(x)}{2\sqrt{-y(x)}} = -\frac{1}{2}$

$$\sqrt{-y(x)} = -\frac{x}{2} + k = \frac{2k-x}{2}$$

$\frac{2k-x}{2} > 0 \qquad x < 2k \qquad (\alpha, \beta) =]-\infty, 2k[$

$$y(x) = -\left(\frac{2k-x}{2}\right)^2 \qquad \text{II caso}$$

nel I caso $\lim_{x \to -2k} y(x) = 0$ $\qquad$ nel II caso $\lim_{x \to 2k} y(x) = 0$

$$y(x) = \begin{cases} -\left(\frac{2k-x}{2}\right)^2 & x < 2k \\ 0 & 2k \leq x \leq -2k \\ \left(\frac{x+2k}{2}\right)^2 & x > -2k \end{cases} \qquad (k < 0)$$

è sol della III cat.

~~y(x)~~ $\begin{cases} y' = y\, e^x \\ y(\cancel{x}) = 1 \end{cases}$ $\qquad X(x) = e^x \quad (a, b) = \mathbb{R}$

$Y(y) = y \quad (c, d) = \mathbb{R}$

$H = \{0\} \quad y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

sol I cat

sia y sol II cat $\quad y(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

$\forall x \in (\alpha, \beta) \qquad \frac{y'(x)}{y(x)} = e^x$

$\frac{1}{Y(y)} = \frac{1}{y} \qquad B(y) = \log|y| \qquad A(x) = e^x$

$$\log|y(x)| = e^x + k$$

$$|y(x)| = e^{e^x + k} = c\, e^{e^x} \qquad c > 0 \qquad (c = e^k)$$

sol positive $y(x) = c\, e^{e^x}$ $c>0$

" negative $-y(x) = c\, e^{e^x}$ $c>0 \Rightarrow y(x) = c\, e^{e^x}$ $c<0$

INT GEN $y(x) = c\, e^{e^x}$ $c \in \mathbb{R}$

(non ci possono essere sol di III cat.)

$y(e)=1$ $c\, e^{e^e} = 1$ $c = \frac{1}{e^e}$

$$y(x) = \frac{1}{e^e}\, e^{e^x}$$

EQ DIFF LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$y' + a(x)\, y = b(x)$ $a, b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continue

[$f(x,y) = b(x) - a(x)\, y$ $X = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$]

sol y def in un sottoint di (α,β) a valori reali deriv.

e tale che $y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x)$ $\forall x$

a = coefficiente

b = termine noto

se $b=0$ eq. omogenea

(1) $y' + a(x)\, y = b(x)$ eq. completa

(2) $y' + a(x)\, y = 0$ eq. omogenea associata

TEOR.

i) y, z sol di (1) $\Rightarrow$ $w = y - z$ sol di (2)

ii) y sol di (1), z sol di (2) $\Rightarrow$ $w = y + z$ sol di (1)

[quindi se abbiamo I = int gen della (2) e $\bar{y}$ = int part. di (1) $\Rightarrow$ $\bar{y} + I$ = l'int. gen. della (1)

sia infatti z un'altra sol di (1) $\Rightarrow$ $\bar{y} - z \in I$]

DIM. i) $w'(x) + a(x)\, w(x) = 0$?

$w' + aw = y' - z' + a(y-z) = y' + ay - (z' + az) = b(x) - b(x) = 0$

ii) $w'(x) + a(x)\, w(x) = b(x)$?

$w' + aw = y' + z' + a(y+z) = \underbrace{y' + ay} + \underbrace{z' + az} = b(x) + 0 = b(x)$

Sol della (2) $y' + a(x)\, y = 0$

$y' = -a(x)\, y$ è a var. sep.

$X = -a(x)$ $(a,b) = (\alpha, \beta)$

$Y(y) = y \qquad (c,d) = \mathbb{R}$

$H = \{0\} \qquad y(x) = 0 \ \forall x$

sol di I cat.

Sia y sol di II cat. $\quad (y(x) \neq 0)$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x) \qquad \text{sia } A \text{ una prim di } a$$

$$\log|y(x)| = -A(x) + c$$

$$|y(x)| = e^{-A(x)+c} \ (\cdot) = k\, e^{-A(x)} \qquad k > 0$$

sol. positive $\quad y(x) = k\, e^{-A(x)} \quad k > 0$

sol negative $\quad y(x) = k\, e^{-A(x)} \quad k < 0$

$$\boxed{(\cdot) \quad e^{-A(x)+c} = e^{-A(x)} e^{c} \qquad e^{c} = k}$$

INT GEN $\quad y(x) = k\, e^{-A(x)} \quad k \in \mathbb{R}$

es. $\quad y' + \cos x\, y = 0 \qquad a(x) = \cos x$

$A(x) = \sin x$

INT GEN $\quad y(x) = k\, e^{-\sin x}$

Sol della (1) $\qquad y' + a(x)\, y = f(x)$

si cerca una sol $\quad y(x) = k(x)\, e^{-A(x)}$

con k funz derivabile

(metodo di Lagrange della variazione della costante)

Sostituiamo y nell' eq.

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = f(x)$$

$$k'(x)\, e^{-A(x)} \cancel{- \underbrace{A'(x)}_{= a(x)} e^{-A(x)} k(x)} + \cancel{a(x)\, k(x)\, e^{-A(x)}} = f(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k'(x) = e^{A(x)} f(x) \quad \Rightarrow \quad k \in \int e^{A(x)} f(x)\, dx$$

es. $\quad y' + x\, y = e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad a(x) = x \qquad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$A(x) = \frac{1}{2} x^2$

omog. assoc. $\quad y' + x\, y = 0$

INT GEN OMOG $\quad y(x) = k\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

INT PARTIC DELL' EQ COMPL $\quad y(x) = k(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$k \in \int e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \Rightarrow \quad k(x) = x$$

INT GEN DELL' EQ COMPL $\quad y(x) = x\, e^{-\frac{x^2}{2}} + k\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \ k \in \mathbb{R}$

PROBL DI CAUCHY $\quad \begin{cases} y' + x\, y = e^{-\frac{x^2}{2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$y(0) = 1 \iff k = 1$

sol $\quad y(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}}$

IN GENERALE EQ LINEARE DI ORDINE n

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)\, y = f(x)$$

EQ DIFF LINEARI DEL SECONDO ORDINE

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)$$

ESERCIZI SUL CAP 3

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{\sin x} \left(e^{t^2} - 1\right) dt$$

$$\frac{\int_0^{\sin x} \left(e^{t^2} - 1\right) dt \to 0}{x^3 \to 0}$$

rapp. deriv. $$\frac{\left(e^{\sin^2 x} - 1\right) \cos x}{3x^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x}}_{\downarrow\, 1} \; \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\downarrow\, 1} \; \underbrace{\frac{\cos x}{3}}_{\downarrow\, \frac{1}{3}} \to \frac{1}{3}$$

2) eq tang $(x=0)$ $\qquad G(x) = \int_1^{1+x^2} \sqrt{3+t^2}\, dt$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

$G(0) = 0$

$G'(x) = 2x \sqrt{3 + (1+x^2)^2} \qquad G'(0) = 0$

$y = 0$ eq. tang.

$$I = \int_0^1 x \arctg(1-x^2)\, dx = \int_0^1 \dots$$

TROVIAMO LE PRIM.

$$\int x \arctg(1-x^2)\, dx = \dots$$

$$I = \Big[\quad \Big]_0^1$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + x^2 & x < 0 \\ e^x + \log(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ $\quad$ f è cont $\Rightarrow$ è dotata di prim.

$$F(x) = \begin{cases} \text{prim di } \cos x + x^2 + c_1 & x < 0 \\ \text{"} \quad e^x + \log(x+1) + c_2 & x \geq 0 \end{cases}$$

imponiamo la continuità $\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x)$

$c_2 = c_1 + \dots$

$$\int_0^1 |2x-1| \log(x^2+x+1)\,dx = \text{ per la propr. additiva}$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1) \log(x^2+x+1)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1) \log(x^2+x+1)\,dx$$

troviamo le prim.

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FD}}}{(2x-1)} \log(x^2+x+1)\,dx$$

$y' - y = e^{2x}$ $\quad a(x) = -1$ $\quad f(x) = e^{2x}$

INT GEN OMOG $\quad y(x) = k\, e^x$

INT PARTIC DELLA COMPL $\quad \bar{y}(x) = k(x)\, e^x$

$$k \in \int e^{-x} e^{2x}\,dx = e^x + c$$

$\bar{y}(x) = e^{2x}$

INT GEN COMPL $\quad y(x) = e^{2x} + k\, e^x \quad k \in \mathbb{R}$