Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Informatica

Esercizi di **Elementi di Analisi Matematica 2**

Calcolo differenziale per funzioni reali di due variabili reali

1 Determinare il dominio A di ciascuna delle seguenti funzioni
(a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$
(b) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{2x+y}}$
(c) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$
(d) $f(x,y) = \log_2(x^2+y^2-4)$
(e) $f(x,y) = \sqrt{3y-x} - \sqrt[4]{x-2y^2}$
(f) $f(x,y) = \arccos(x^2+y^2-4)$.
Determinare poi l'interno, la frontiera e il derivato dell'insieme A.

2 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x\log y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin^2 x \sin^2 y \log(x^4+y^4)$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\log(1+x)$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+3y}{x^2-y^2}$

3 (a) Sia f la funzione reale di due variabili reali definita dalla legge $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e sia $(x_0,y_0) = (2,-1)$. Calcolare $\nabla f(x_0,y_0)$. Determinare, poi, ∇f precisandone l'insieme di definizione.

4 (a) Dire se le funzioni

$$a)\ u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}, \qquad b)\ u(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x, \qquad c)\ u(x,y) = x^3+3xy^2$$

soddisfano l'equazione $u_{xx}+u_{yy}=0$, nota come *equazione di Laplace*.

(b) Verificare che la funzione $u(x,y) = \mathrm{e}^{-t}\sin kx$ soddisfa l'equazione $u_t = \frac{1}{k^2}u_{xx}$, nota come *equazione del calore.*

(c) Verificare che le funzioni

$$a)\ u(x,t) = \sin x \sin t, \qquad b)\ u(x,t) = \sin(x-t) + \log(x+t)$$

soddisfano l'equazione $u_{tt} = u_{xx}$, nota come *equazione delle onde.*

5 Verificare che la funzione $f(x,y) = |y|\log(1+x)$ è differenziabile in $(0,0)$.

6 Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = x\sqrt{y-3}$$

nel punto $(2,12)$ e lungo il vettore $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

7 Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = y^2\sqrt{2x-3}$$

nel punto $(2,1)$ e lungo il vettore $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

8 Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = x\sqrt{y-3}$$

e calcolarne, se esiste, la derivata direzionale nel punto $(1,4)$ lungo la direzione della retta di equazione $4x+3y-7=0$.

9 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(|x|+|y|) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Studiare la continuità e la differenziabilità di f nel punto $(0,0)$).

10 Data la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{2x^2+3y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità e l'esistenza delle derivate parziali prime nel punto $(0,0)$.

11 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(x^2y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) stabilire se è continua nel suo insieme di definizione;
(b) stabilire se è differenziabile nel suo insieme di definizione.

12 Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali prime e la differenziabilita' in $(0,0)$ delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{y^2+|x|} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

13 Determinare e classificare gli eventuali punti stazionari delle seguenti funzioni reali di due variabili reali:
(a) $f(x,y) = xe^{y-x} - y$
(b) $f(x,y) = 2x^3 + 3y^3 + 3x^2 - 36y$
(c) $f(x,y) = x^3 - xy^2 + 2xy$
(d) $f(x,y) = 4xy^2 + 4x^2y - 6xy + 5$

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 1 + (x+y)^2$

$\boxed{\textbf{14}}$ Data la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x$$

i) determinarne gli eventuali estremi relativi in $\mathbb{R}^2$
ii) determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0),(0,2)e(2,0)$.

$\boxed{\textbf{15}}$ Data la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2$$

i) determinarne gli eventuali estremi relativi in $\mathbb{R}^2$
ii) determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0),(1,0)$ e $(1,1)$.

$\boxed{\textbf{16}}$ Data la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x$$

i) determinarne gli eventuali estremi relativi in $\mathbb{R}^2$
ii) determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0),(0,2)e(2,0)$.

$\boxed{\textbf{17}}$ Determinare gli eventuali estremi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x,y) = x(\log^2 x + y^2)\,.$$

$\boxed{\textbf{18}}$ Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x,y) = \log\frac{x}{x^2+y^2}$ nell'insieme $X = [1,5]\times[-1,4]$

$\boxed{\textbf{19}}$ Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = xy(x - y^2 + 1)$$

nell'insieme $T = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, y^2 \le x \le 1\big\}$.