9 NOVEMBRE 2022

mercoledì 9 novembre 2022 08:01

RIPASSO

crit. Raabe $\quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \to \ell \neq 1 \quad (\ell = \pm\infty)$

$\ell < 1 \Rightarrow$ la serie diverge

$\ell > 1 \Rightarrow$ " conv.

$x \in \mathbb{R} \quad \sum \frac{1}{n^x} \quad x \leq 1 \Rightarrow$ div.

$x > 1 \Rightarrow$ conv.

$\frac{a_n}{\frac{1}{n^x}} \to \ell > 0 \Rightarrow \sum a_n$ ha lo stesso caratt. di $\sum \frac{1}{n^x}$

$\Updownarrow$

$\exists x \in \mathbb{R} : n^x a_n \to \ell > 0 \Rightarrow$ se $x \leq 1$ la serie div.

se $x > 1$ conv.

$x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \qquad 0! = 1$

$x = 0$ conv. e ha somma 1

$x > 0$ crit. del rapp. $\Rightarrow$ conv.

$x < 0$

$\left|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right| = \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \qquad |x| > 0 \Rightarrow$ la serie dei val. ass. conv.

$\Rightarrow$ la serie conv. assol.

(1) $\sum \frac{n 4^n}{(2n)!}$ crit. del rapp.

(2) $\sum \left(\frac{3n^2+1}{(n+6)^2}\right)^n$ crit della rad.

(3) $\sum \frac{2n+4}{(n+2)^3}$ crit dell' ord. di infinit.

(3) $\sim \quad (n+2)^3$

(4) $$\frac{\sin\left(\frac{1+\log(2n+1)}{\sqrt[4]{(n+6)^3}}\right)}{n^3}$$ si cerca per confronto la convergenza assoluta

(1) $$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)4^{n+1}}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{n\,4^n} = \frac{(n+1)\,4\cdot\cancel{4^n}\,\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)(2n+2)\,n\,\cancel{4^n}} =$$

$$= \frac{(\cancel{n+1})\cdot 4}{(2n+1)\,2\,(\cancel{n+1})\,n} = \frac{2}{n(2n+1)} \to 0 \quad \Rightarrow \text{la s. conv.}$$

(2) $$x_n = \sqrt[n]{a_n} = \frac{3n^2+1}{(n+6)^2} \to 3 > 1 \quad \Rightarrow \text{la s. div.}$$

(3) $$\frac{2n+4}{(n+2)^3} \to 0 \qquad x = 3-1 = 2 > 1 \quad \Rightarrow \text{la serie conv.}$$

$$n^2\,\frac{2n+4}{(n+2)^3} \to 2$$

(4) $$a_n = \frac{\sin \dots}{n^3} \qquad |\sin x| \le 1$$

$$|a_n| = \frac{|\sin \dots|}{n^3} \le \frac{1}{n^3} \quad \Rightarrow \sum |a_n| \text{ conv.} \Rightarrow \text{la s. conv. assol.}$$

analog. $|\cos x| \le 1$, $|\operatorname{arctg} x| \le \frac{\pi}{2}$

$$\sum \frac{\cos\sqrt{n\sin(n+3)}}{n^4} \qquad |a_n| \le \frac{1}{n^4} \Rightarrow \text{conv. ass.}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{2n+3}{\sqrt{n-2}}}{(n+4)^5} \qquad |a_n| \le \frac{\frac{\pi}{2}}{(n+4)^5} \Rightarrow \text{conv. ass.}$$

$$\frac{n^5\,\frac{\pi}{2}}{(n+4)^5} \to \frac{\pi}{2}$$

$(m+n)^s$

Serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad a_n \geq 0 \quad \forall n$$

$$(-1)^n \qquad \cos n\pi$$

es. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2+3}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2+3}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\pi) \frac{2n}{n^2+3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin n$ NON è a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad a_n \geq 0 \quad \forall n \qquad s_n$$

Prima di tutto, in genere, si studia la monotonia della succ $\{a_n\}$

Lemma

Se $\{a_n\}$ è monotona, allora la serie non diverge

DIM. Supp. che $\{a_n\}$ sia decrescente.

Cons. $\{a_n\}$ e cons. l'estratta di posto pari $a_2, a_4, \ldots$ $\{a_{2n}\}$
" dispari $a_1, a_3, \ldots$ $\{a_{2n-1}\}$

- Se $a_n \to \ell$ (event. $\ell = \pm\infty$) allora anche $a_{2n} \to \ell$, $a_{2n-1} \to \ell$
- Se $a_{2n} \to \ell$, $a_{2n-1} \to L$ allora $\{a_n\}$ non è regolare
- se $a_{2n} \to \ell$, $a_{2n-1} \to \ell$ allora $a_n \to \ell$

Cons. $\{s_{2n-1}\}$ e $\{s_{2n}\}$ e facciamo vedere che non possono divergere entrambe con lo stesso segno

Dim. che sono entrambe monotone

Dim. che sono entrambe monotone

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} \underbrace{- a_{2n} + a_{2n+1}}_{\leq 0} \leq s_{2n-1}$$

$a_{2n} > a_{2n+1}$

$a_{2n+1} - a_{2n} < 0$

$\Rightarrow \{s_{2n-1}\}$ è decr. $\Rightarrow$ se diverge, divergerà a $-\infty$

$$s_{2n+2} = s_{2n} \underbrace{+ a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n}$$

$a_{2n+1} > a_{2n+2}$

$a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$

$\Rightarrow \{s_{2n}\}$ è cresc. $\Rightarrow$ se diverge, divergerà a $+\infty$

Ne segue che $\{s_n\}$ non può divergere

Criterio di convergenza di Leibniz

Sia $\sum (-1)^{n+1} a_n$ una serie a segni alterni.

Se $\{a_n\}$ è decrescente e $a_n \to 0$, allora la serie è convergente e si ha $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

DIM. Nella dim. del Lemma abbiamo visto che $\{s_{2n-1}\}$ è decr. e $\{s_{2n}\}$ è cresc.

Cons. $s_{2n-1} = \underbrace{a_1 - a_2}_{\geq 0} + \underbrace{a_3 - a_4}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{a_{2n-3} - a_{2n-2}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2n-1}}_{\geq 0} \geq 0$

$\Rightarrow \{s_{2n-1}\}$ non può div. a $-\infty$ $\Rightarrow$ converge a $s = \inf s_{2n-1}$

$s_{2n} = \underset{\downarrow\, s}{s_{2n-1}} - \underset{\downarrow\, 0}{a_{2n}} \to s$, possiamo anche dire, dato che $\{s_{2n}\}$ è cresc., che $s = \sup s_{2n}$

Ne segue che $s_n \to s$

Dim. ora che $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ (dim. facoltativa)

$\uparrow$

errore che si commette approssimando s con s_n

se n è pari $\quad s \geq s_n \Rightarrow |s - s_n| = s - s_n$

si deve provare che $\quad s - s_n \leq a_{n+1} \Rightarrow s \leq s_n + a_{n+1} = s_{n+1}$

vera perchè $n+1$ è dispari e $s = \inf s_{2n-1}$

se n è disp. $\quad s \leq s_n \Rightarrow |s - s_n| = s_n - s$

si deve provare che $\quad s_n - s \leq a_{n+1} \Rightarrow$ ~~s_n~~ $s \geq s_n - a_{n+1} = s_{n+1}$

vera perchè $n+1$ è pari

Es. $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad$ serie arm. alternata

$a_n = \frac{1}{n}$ che è decr. e $\to 0 \Rightarrow$ la serie converge

NON ASSOLUTAMENTE

Criterio di non regolarità

$\sum (-1)^{n+1} a_n \quad$ a segni alterni

Se i) $\{a_n\}$ è crescente ed ha almeno un termine positivo

ii) $\{a_n\}$ è decr. ma non tende a zero

allora la serie è indeterminata

DIM. Per il lemma, la serie non può divergere.

Non può nemmeno convergere perchè $\{a_n\}$ non tende a zero

Serie logaritmica

$x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$x = 0 \qquad$ conv. e ha somma zero

$x = 1 \qquad$ div. (serie armonica)

$x > 0 \qquad$ crit. del rapp. $\quad \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{x^n} = x \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\downarrow 1} \to x$

$0 < x < 1 \qquad$ conv.

$x > 1 \qquad$ div.

$x < 0 \qquad$ cons. $\sum \left| \frac{x^n}{n} \right| = \sum \frac{|x|^n}{n} \quad$ è logaritmica

$-1 < x < 0 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow$ conv. assol.

$x = -1$ conv. non assol. (serie arm. altern.)

$x < -1 \Rightarrow |x| > 1$ e la serie dei val. ass. diverge, allora studiamo la serie come serie a segni alterni

$$\frac{|x|^n}{n} < \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \; ? \iff \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\downarrow \; 1} < |x| \text{ vero definitiv.}$$

$\Downarrow$

la serie è indeterm.

Esercizi

(1) $\sum \frac{x^{3n}}{(n+2)\sqrt{n}}$ $x \in \mathbb{R}$

$x = 0$ conv. $s = 0$

$x > 0$ crit. del rapp. $\frac{x^{3n+3}}{(n+3)\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+2)\sqrt{n}}{x^{3n}} =$

$$= x^3 \underbrace{\frac{n+2}{n+3}}_{\downarrow \; 1} \underbrace{\sqrt{\frac{n}{n+1}}}_{\downarrow \; 1} \to x^3$$

$x > 1 \Rightarrow x^3 > 1 \Rightarrow$ div.

$0 < x < 1 \Rightarrow x^3 < 1 \Rightarrow$ conv.

$x = 1 \Rightarrow x^3 = 1$ la serie è $\sum \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}}$ $\quad n^{3/2} \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} \to 1, \; \frac{3}{2} > 1$

$\Downarrow$

la serie conv.

$$\boxed{\begin{array}{ll} 0 \le x \le 1 & \Rightarrow \text{conv.} \\ x > 1 & \Rightarrow \text{div.} \end{array}}$$

$x < 0$ Cons. $\sum \left| \frac{x^{3n}}{(n+2)\sqrt{n}} \right| = \sum \frac{|x|^{3n}}{(n+2)\sqrt{n}}$

$0 \le |x| \le 1 \Rightarrow$ la serie dei val. ass. conv.

$\Rightarrow$ se $-1 \le x < 0$ la serie conv. assol.

Se $x < -1$ studiamo la monotonia di $\left| \frac{x^{3n}}{(n+2)\sqrt{n}} \right|$

$3n$ $\quad$ $3n+3$

Se $x < -1$ studiamo la monotonia di $\frac{|x|^{3n+3}}{(n+2)\sqrt{n}}$

$$\frac{|x|^{3n+3}}{(n+2)\sqrt{n}} < \frac{|x|^{3n+3}}{(n+3)\sqrt{n+1}} \quad ?$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\frac{(n+3)\sqrt{n+1}}{(n+2)\sqrt{n}}}_{\downarrow \atop 1} < |x|^3$$ vera definitiv. $\Rightarrow$ la serie è indet.

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n^2+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$x = 0$ conv. $s = 0$

$x > 0$ è a termini pos.

crit. del rapp. $$\frac{(4x)^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{(4x)^n} = 4x \underbrace{\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}}_{\downarrow \atop 1} \to 4x$$

$0 < x < \frac{1}{4} \Rightarrow$ la serie conv.

$x > \frac{1}{4} \Rightarrow$ div.

$x = \frac{1}{4}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2+1}$ conv. per il crit dell'ordine di infinit.

$x < 0$ cons. $\sum \left| \frac{(4x)^n}{n^2+1} \right| = \frac{|4x|^n}{n^2+1}$

$-\frac{1}{4} \le x < 0$ conv. assol.

$x < -\frac{1}{4}$ la studiamo come serie a segni alterni

$$\frac{|4x|^n}{n^2+1} < \frac{|4x|^{n+1}}{(n+1)^2+1} \quad ?$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}}_{\downarrow \atop 1} < |4x|$$ vera definitiv. $\Rightarrow$ indeterm.

$\Downarrow$
1

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n\sqrt{n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{\sqrt{n+3}}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+4}$ $a_n \to 2 \Rightarrow$ la serie div.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n!}$ conv. il resto di posto 3

$$\frac{n-2}{(n+1)!} \frac{n!}{n-3} = \frac{n-2}{n-3} \frac{1}{n+1} \to 0 \Rightarrow \text{conv.}$$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2nx-1} = \sum e^{-1} (e^{2x})^n$

stud. $\sum (e^{2x})^n$ $\sqrt[n]{a_n} = e^{2x}$

$e^{2x} > 1 \Rightarrow$ div. $e^{2x} < 1 \Rightarrow$ conv.

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$x > 0$ $x < 0$

$x = 0$ div.

Per calc. la somma la cons. come serie geom.
è il I resto della serie geom. di rag. e^{2x}, moltipl. per e^{-1}

conv. per $-1 < e^{2x} < 1 \Rightarrow x < 0$

$$s = \left(\frac{1}{1-e^{2x}} - 1 \right) e^{-1}$$

t^{n-1} $\frac{1}{1-t}$

(7) $\sum \frac{\cos \frac{2n+1}{n^2+4}}{n^3}$

$$|a_n| = \frac{|\cos \dots|}{n^3} \le \frac{1}{n^3} \text{ conv.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum |a_n|$ conv. per confronto $\Rightarrow$ la serie conv. assol.

(8) $\sum \left(\sin \frac{3n}{n^5+6}\right) \frac{n^4+5}{n^7+2}$

$$|a_n| = \left|\sin \text{—}\right| \frac{n^4+5}{n^7+2} \le \frac{n^4+5}{n^7+2}$$

$\sum \frac{n^4+5}{n^7+2}$ conv. perché $7-4 = 3 > 1$

$$\left(n^3 \frac{n^4+5}{n^7+2} \to 1 \right)$$

$\Rightarrow \sum |a_n|$ conv. per confr. $\Rightarrow$ la serie conv. assol.

(9) $\sum \frac{3n+1}{n! + 2^n}$

$$n! + 2^n > n! \Rightarrow \frac{3n+1}{n!+2^n} < \frac{3n+1}{n!}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{n!+2^n} < \frac{1}{n!} \nearrow$$

conv. $\sum \frac{3n+1}{n!}$

$$\frac{3(n+1)+1}{(n+1)!} \frac{n!}{3n+1} = \frac{3n+4}{3n+1} \frac{1}{n+1} \to 0 \Rightarrow \sum \frac{3n+1}{n!} \text{ conv.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ la serie data converge per confronto