Capitolo 3

Integrali indefiniti e definiti

3.1 Integrale indefinito

Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Definizione 1 *Sia $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b) e tale che*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Si dice allora che F è una primitiva di f in (a, b).

Si ha il seguente

Teorema 1 (Caratterizzazione delle primitive) *Sia F una primitiva di f in (a, b). Allora, tutte e sole le primitive di f in (a, b) sono le funzioni $F(x) + k$, al variare di k in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Se F è una primitiva di f in (a, b) e $k \in \mathbb{R}$, posto $G(x) = F(x) + k$, si ha subito $G'(x) = f(x) + 0 = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Viceversa, se F e G sono due primitive di f in (a, b) la funzione differenza

$$H(x) = G(x) - F(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

è derivabile in (a, b) e si ha

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Per il teorema sulle funzioni con derivata identicamente nulla (conseguenza del Teorema di Lagrange) ([1]) H è costante in (a, b) e quindi esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - G(x) = k$, $\forall x \in (a, b)$.

Da questo teorema segue che una funzione, se ha una primitiva, ne ha infinite. Esistono tuttavia delle funzioni che non hanno alcuna primitiva, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1 Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e supponiamo per assurdo che F sia una primitiva di f in $]-\infty, +\infty[$. In particolare, F è una primitiva di f sia in $[0, +\infty[$ sia in $]-\infty, 0[$. Osserviamo che, un'altra primitiva di f in $[0, +\infty[$ è la funzione $g(x) = x$, quindi, per il teorema precedente, esiste un numero reale k tale che $F(x) = x + k \quad \forall x \geq 0$. Analogamente si conclude che esiste un numero reale c tale che $F(x) = -x + c \ \forall x < 0$.

Dato che F è una funzione derivabile e quindi continua in $]-\infty, +\infty[$ si ha $\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x)$, cioè $c = k$. In definitiva,

$$F(x) = |x| + k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e ciò è assurdo perché implica che la funzione $|x|$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

Definizione 2 *Si chiama integrale indefinito di f e si denota con il simbolo*

$$\int f(x)\mathrm{dx},$$

l'insieme formato dalle primitive di f, se f è dotata di primitive, l'insieme vuoto se f non è dotata di primitive .

[1] Se x_1, x_2 sono due punti distinti di (a, b), supposto che $x_1 < x_2$ possiamo applicare il Teorema di Lagrange alla restrizione di H all'intervallo $[x_1, x_2]$ e otteniamo che esiste $c \in]x_1, x_2[$ tale che $H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1) = 0$ e dunque $H(x_2) = H(x_1)$.

Per quanto visto sopra, se F è una primitiva di f, si suole scrivere

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

.

L'integrale indefinito è dunque un insieme di funzioni, vuoto o costituito da infiniti elementi.

Dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari si può facilmente costruire una tabella di integrali indefiniti immediati:

$$\begin{aligned}
&\int e^x\ \mathrm{dx} = \mathrm{e^x + k}, \\
&\int \cos x\ \mathrm{dx} = \mathrm{\sin x + k} \\
&\int \sin x\ \mathrm{dx} = \mathrm{-\cos x + k} \\
&\int \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{dx} = \mathrm{\arctan x + k} \\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{dx} = \mathrm{\arcsin x + k = -\arccos x + k} \\
&\int x^\alpha\ \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{k}, (\alpha \neq -1) \\
&\int \frac{1}{x}\ \mathrm{dx} = \mathrm{\log|x| + k}.
\end{aligned}$$

Tenendo presente la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha poi, se f è una funzione derivabile tale da potere effettuare di volta in volta la composizione indicata:

$$\int e^{[f(x)]} f'(x)\ \mathrm{dx} = \mathrm{e}^{\mathrm{f(x)}} + \mathrm{k},$$
$$\int \cos[f(x)] f'(x) \mathrm{dx} = \sin[\mathrm{f(x)}] + \mathrm{k}$$
$$\int \sin[f(x)] f'(x)\ \mathrm{dx} = -\cos[\mathrm{f(x)}] + \mathrm{k}$$
$$\int \frac{1}{[f(x)]^2 + 1} f'(x)\ \mathrm{dx} = \arctan[\mathrm{f(x)}] + \mathrm{k}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} f'(x)\ \mathrm{dx} = \arcsin[\mathrm{f(x)}] + \mathrm{k} = -\arccos[\mathrm{f(x)}] + \mathrm{k}$$
$$\int [f(x)]^\alpha f'(x)\ \mathrm{dx} = \frac{[\mathrm{f(x)}]^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + \mathrm{k}, (\alpha \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{f(x)} f'(x)\ \mathrm{dx} = \log|\mathrm{f(x)}| + \mathrm{k}.$$

Teorema 2 (Proprietà di omogeneità.) *Se f è dotata di primitive in (a, b) e k è un numero reale diverso da zero, allora*

i) *kf è dotata di primitive in (a, b);*

ii) $\displaystyle\int kf(x)\ \mathrm{dx} = k \int f(x)\ \mathrm{dx}.$

dove il secondo membro indica l'insieme delle funzioni ottenute moltiplicando per k le primitive di f.

Dimostrazione. Se
$$F \in \int kf(x)\ dx$$
allora $F'(x) = kf(x), \quad \forall x \in (a, b)$. Posto
$$G(x) = \frac{F(x)}{k} \quad \forall x \in (a, b),$$
si ha $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$, cio è G è una primitiva di f in (a, b). Poichè $F(x) = kG(x), \quad \forall x \in (a, b)$ la funzione F appartiene al secondo membro

della *ii)* in quanto è il prodotto di k per una primitiva di f. Viceversa, se $F \in k \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$, esiste G primitiva di f tale che

$$F(x) = kG(x) \qquad \forall x \in (a,b),$$

da cui $F'(x) = kf(x)$, $\quad \forall x \in (a,b)$ e quindi

$$F \in \int kf(x)\,\mathrm{d}x.$$

Osservazione 1 Se $k = 0$ la tesi non vale, infatti in questo caso il primo membro è l'integrale della funzione identicamente nulla, cioè l'insieme delle funzioni costanti, mentre il secondo membro è formato dalla sola funzione identicamente nulla.

Esempio 2 . Riprendendo quanto osservato prima a proposito dell'integrale di una funzione composta, e applicando la proprietà di omogeneità si ottiene, ad esempio, se $c \neq 0$

$$\int e^{cx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int ce^{cx}\mathrm{d}x = \frac{e^{cx}}{c} + k.$$

Analogamente

$$\int \cos(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(cx)}{c} + k$$

e

$$\int \sin(cx)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(cx)}{c} + k.$$

Teorema 3 (Proprietà distributiva.) *Siano f e g due funzioni dotate di primitive in (a,b). Allora*

i) $f+g$ è dotata di primitive in (a,b)

ii) $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x$

dove il secondo membro indica l'insieme delle funzioni ottenute sommando una primitiva di f ed una primitiva di g.

Dai due risultati precedenti segue il

Metodo di integrazione per decomposizione in somma

Se f, g sono due funzioni dotate di primitive in (a,b) e h,k sono due numeri reali, non entrambi nulli, allora la funzione $hf+kg$ è dotata di primitive in (a,b) e si ha

1. $\displaystyle\int (hf(x)+kg(x))\ \mathrm{d}x = h\int f(x)\ \mathrm{d}x + k\int g(x)\ \mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int (hf(x)+kg(x))\ \mathrm{d}x = hF(x) + k\int g(x)\ \mathrm{d}x,$

   essendo F una primitiva di f in (a,b).

Il seguente risultato fornisce un utile metodo di integrazione quando la funzione integranda è il prodotto di una funzione per la derivata di un'altra funzione.

Teorema 4 (Integrazione indefinita per parti) *Siano f,g due funzioni derivabili in (a,b). Se fg' è dotata di primitive in (a,b) allora*

i) *$f'g$ è dotata di primitive in (a,b);*

ii) $\displaystyle\int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$

Dimostrazione. Per la regola di derivazione del prodotto si ha

$$f(x)g'(x) = (f(x)g'(x)+f'(x)g(x)) - f'(x)g(x) =$$

$$D[f(x)g(x)] - f'(x)g(x), \quad \forall x \in (a,b)$$

e la *i)* è vera per la proprietà distributiva dell'integrale indefinito. Inoltre, applicando la formula di integrazione per decomposizione in somma si ottiene la *ii)*.

Questa formula si usa dunque quando è possibile individuare, nella funzione integranda, un fattore di cui sia nota una primitiva. I fattori f e g' si chiamano, rispettivamente, *fattore finito* e *fattore differenziale*.

Applichiamo il metodo di integrazione per parti in alcuni casi notevoli.

Esempio 3 Sia $n \in \mathbb{N}$. Determiniamo

$$\int e^x x^n \mathrm{d}x.$$

Scegliendo e^x come fattore differenziale e x^n come fattore finito si ha

$$\int e^x x^n \mathrm{d}x = e^x x^n - n \int e^x x^{n-1} \mathrm{d}x =$$

$$= e^x x^n - n \left(e^x x^{n-1} - (n-1) \int e^x x^{n-2} \mathrm{d}x \right) = \cdots .$$

e dopo n integrazioni per parti, il problema viene ricondotto alla determinazione dell'integrale indefinito di e^x. Osserviamo che in questo caso avremmo potuto scegliere e^x come fattore finito (la sua derivata e^x) e x^n come fattore differenziale, (una sua primitiva è $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$). Tuttavia, tale scelta giusta non è vantaggiosa, perchè riconduce alla determinazione dell'integrale $\int e^x x^{n+1} \mathrm{d}x$. Scegliendo, invece, e^x come fattore differenziale e x^n come fattore finito, il grado di x^n diminuisce (si osservi che derivando il grado di x^n diminuisce), Ad esempio, se $n = 2$, si ha

$$\int e^x x^2 \mathrm{d}x = e^x x^2 - 2 \int e^x x \mathrm{d}x =$$

$$e^x x^2 - 2\Big(e^x x - \int e^x \cdot 1 \ \mathrm{d}x \Big) = e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + k.$$

Esempio 4 Determiniamo
$$\int \log x \, \mathrm{d}x.$$
Considerando 1 come fattore differenziale si ha
$$\int \log x \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \log x \mathrm{d}x = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x(\log x - 1) + k$$

Esempio 5 Applicando il metodo di integrazione per parti, si determinano gli integrali indefiniti
$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} \mathrm{d}x$$
con $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (per $n = 1$ l'integrale è immediato). Occupiamoci del caso $n = 2$.

$$I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x =$$
$$\int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \cdot x \mathrm{d}x =$$
$$\arctan x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \cdot 1 \right) =$$
$$\frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1} \right) + k.$$
Si osservi che $\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ è la derivata di $\frac{1}{x^2+1}$.

Osservazione 2 In alcuni casi, integrando per parti, si giunge ad una eguaglianza (insiemistica) del tipo
$$\int f(x) \mathrm{d}x = g(x) + c \int f(x) \mathrm{d}x$$
Se $c \neq 1$, si può dimostrare che
$$\int f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{1-c} g(x) + k.$$

Esempio 6 Applichiamo l'osservazione precedente per determinare

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x.$$

Risulta

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x =$$

$$e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \mathrm{d}x$$

e quindi

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + k.$$

Il seguente risultato fornisce un utile metodo di integrazione quando la funzione integranda è il prodotto di una funzione composta per la derivata della funzione interna.

Teorema 5 (Primo teorema di integrazione indefinita per sostituzione) *Siano: $g : (a,b) \to (\alpha,\beta)$ una funzione derivabile, $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ una funzione dotata di primitive in (α,β) .*

Allora, si ha:

i) $f(g(x))g'(x)$ *è dotata di primitive in* (a,b)*;*

ii) $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = \left[\int \ f(t)\mathrm{d}t\right]_{t=g(x)}$

dove il secondo membro è l'insieme delle funzioni ottenute componendo con g le primitive di f in (α,β).

Dimostrazione Sia F una primitiva di f, consideriamo la funzione $G(x) = F(g(x))$, si ha $G'(x) = f(g(x))g'(x)$ quindi G è una primitiva di $f(g(x))g'(x)$. Dunque, il primo membro della tesi è uguale a $G(x) + k$, il secondo membro è uguale a $\big[F(t) + k\big]_{t=g(x)} = F(g(x)) + k = G(x) + k$. La tesi è dunque provata.

Esempio 7 Prima di tutto osserviamo che, senza averlo specificato, abbiamo applicato proprio questa proprietà nell'Esempio 2. Infatti, si ha

1. $\int e^{cx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int ce^{cx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{c}\left[\int e^t\, dt\right]_{t=cx} = \frac{e^{cx}}{c} + k$
   dato che la derivata di cx è c.
2. Si ha $\int x\cos(x^2{+}5)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x)\cos(x^2{+}5)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \quad cos\, tdt\right]_{t=x^2+5} =$
   $\frac{1}{2}\sin(x^2+5)+k$
   dato che la derivata di x^2+5 è $2x$.
3. Si ha $\int \frac{e^x}{e^x+5}\mathrm{d}x = \left[\int \quad \frac{1}{t+5}dt\right]_{t=e^x} = \log(e^x+5)+k$
   dato che la derivata di e^x è e^x.

Integrazione dei polinomi trigonometrici.
Ci limiteremo ad integrali del tipo

$$I_n = \int \cos^n x\, \mathrm{d}x, \quad J_n = \int \sin^n x \mathrm{d}x$$

$$H = \int \cos^m x\ \sin^n x\, \mathrm{d}x$$

essendo $n, m \in \mathbb{N}$.
Si ha:

$$I_1 = \sin x + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

$$I_2 = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

$$I_3 = \int \cos x \cdot \cos^2 x\, \mathrm{d}x = \int \cos x(1-\sin^2 x)\, \mathrm{d}x = \left[\int (1-t^2)\, \mathrm{d}t\right]_{t=\sin x}$$

e analogamente si procede per $n > 3$. In pratica, per n pari si utilizzano le formule di bisezione e per n dispari si ricorre all'integrazione per sostituzione.

Analogamente

$$J_1 = -\cos x + k$$

$$J_2 = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x$$

e si procede come per I_2

$$J_3 = \int \sin x \cdot \sin^2 x\ \mathrm{d}x = -\int (-\sin x)(1-\cos^2 x)\ \mathrm{d}x$$

e si procede come per I_3.

Per determinare H si distinguono due casi:

i) se almeno uno fra m, n è dispari, ad esempio $m = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}_0$si procede per sostituzione:

$$H = \int \cos x \cdot (\cos^2 x)^p \cdot \sin^n x\ \mathrm{d}x = \int \cos x(1-\sin^2 x)^p \sin^n x\ \mathrm{d}x =$$

$$= \Big[\int (1-t^2)^p t^n\ \mathrm{d}t\Big]_{t=\sin x}$$

quindi ci si riconduce all' integrale di un polinomio

ii) se m, n sono entrambi pari, ovvero $m = 2p, n = 2q$, con $p, q \in \mathbb{N}$ si procede nel seguente modo

$$H = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^p \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^q\ \mathrm{d}x$$

e ci si riconduce a integrali del tipo I_n.

Esempio 8 Determiniamo alcuni integrali indefiniti di polinomi trigonometrici.

1. $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x \mathrm{d}x = -\int (-\sin x)\cos^3 x \mathrm{d}x = -\left[\int t^3 \mathrm{d}t\right]_{t=\cos x} =$
$\displaystyle -\frac{\cos^4 x}{4} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

2. $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^2 x \mathrm{d}x = \int (\cos x)\cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x = \int (\cos x)(1-\sin^2 x)\sin^2 x \mathrm{d}x =$
$\displaystyle\left[\int (t^2 - t^4)\mathrm{d}t\right]_{t=\sin x} =$
$\displaystyle\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + k, \quad k \in \mathbb{R}$

3. $\displaystyle\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\frac{1-\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2(2x)}{4}\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\frac{1}{4}\int \Big(1 - \frac{1+\cos(4x)}{2}\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\Big)\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

Alla fine del paragrafo presenteremo un altro metodo, più raffinato, di integrazione per sostituzione.

3.2 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Sia f una funzione razionale fratta

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \tag{3.1}$$

con a, b polinomi primi fra loro.

Se il grado di a è maggiore o uguale del grado di b, effettuando la divisione fra a e b si ottengono due polinomi q e r, quest'ultimo avente grado minore di quello di b, tali che

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}.$$

Quindi per integrare una qualsiasi funzione razionale fratta basta integrare un polinomio e una funzione razionale fratta propria, ossia una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore è minore di quello del denominatore.

Supponiamo dunque che la funzione (3.1) sia una funzione razionale fratta propria. e sia m il grado del polinomio b. È noto che l'equazione $b(x) = 0$ ha esattamente m soluzioni reali o complesse, ciascuna con una sua molteplicità. In particolare se α è una soluzione reale con molteplicità n allora $b(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^n$, mentre se il numero complesso $k + ic$ è una soluzione con molteplicità n, anche il suo coniugato $k - ic$ è una soluzione con la stessa molteplicità e il polinomio $b(x)$ è divisibile per $[x-(k+ic)]^n\,[x-(k-ic)]^n = [(x - k)^2 + c^2]^n$.

Dunque, il polinomio b si decompone nel prodotto di fattori del tipo $(x - \alpha)^n$ e fattori del tipo $[(x - k)^2 + c^2]^n$, cioè nel prodotto di potenze di polinomi di primo grado e di polinomi di secondo grado con discriminante negativo.

A questo punto, si dimostra che è possibile decomporre la funzione razionale f nella somma di funzioni razionali (dette fratti semplici) del tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n} \tag{3.2}$$

$$\frac{Ax+B}{[(x-k)^2+c^2]^n}, \quad c > 0. \tag{3.3}$$

con $A, B, \in \mathbb{R}$.

Precisamente, ogni fattore di b del tipo $(x - \alpha)^n$ dà luogo ad n fratti semplici

$$\frac{A_1}{x-\alpha}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

Ogni fattore del tipo $[(x - k)^2 + c^2]^n$ dà luogo ad n fratti semplici

$$\frac{A_1x+B_1}{(x-k)^2+c^2}, \frac{A_2x+B_2}{[(x-k)^2+c^2]^2}, \dots, \frac{A_nx+B_n}{[(x-k)^2+c^2]^n}.$$

Esempio 9 Ad esempio, se una funzione razionale fratta (propria) ha denominatore nella forma

$$x^3(x-2)(x^2+5)(x^2+1)^2$$

i suoi fratti semplici saranno:

$$\frac{A_1}{x},\ \frac{A_2}{x^2},\ \frac{A_3}{x^3},\ \frac{A_4}{x-2}$$

e

$$\frac{C_1x+B_1}{x^2+5},\ \frac{C_2x+B_2}{(x^2+1)},\ \frac{C_3x+B_3}{(x^2+1)^2}.$$

L' integrazione di una funzione razionale fratta propria viene ricondotta all'integrazione dei suoi fratti semplici.

Integrazione dei fratti semplici

II fratti semplici (3.2) si integrano nel seguente modo. Intanto osserviamo che, grazie alla proprietà di omogeneità, possiamo supporre $A = 1$. Poniamo

$$I_n = \int \frac{1}{(x-c)^n}\,\mathrm{d}x$$

Se $n = 1$ si ha

$$I_1 = \log|x-c| + k.$$

Se $n > 1$ si ha

$$I_n = \int (x-c)^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x-c)^{n-1}} + k$$

Integriamo i fratti semplici (3.3). Tratteremo solo i casi $n = 1$ e $n = 2$.

Primo caso: $n = 1$**.**

Prima di tutto osserviamo che, grazie al primo teorema di integrazione per sostituzione, possiamo supporre $k = 0$. Si ha, decomponendo in somma:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{x}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x + B\int \frac{1}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x.$$

Senza ledere la generalità, possiamo supporre che $A = B = 1$.

Consideriamo separatamente i due integrali ottenuti.

$$\int \frac{x}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(x^2+c^2) + k;$$

$$\int \frac{1}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{c^2\left[\left(\frac{x}{c}\right)^2+1\right]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int \frac{1}{c}\,\frac{1}{\left[\left(\frac{x}{c}\right)^2+1\right]}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{c}\left[\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\right]_{t=\frac{x}{c}} = \frac{1}{c}\,\arctan\frac{x}{c} + k$$

dato che la derivata di $\frac{x}{c}$ è $\frac{1}{c}$.

Secondo caso: $n = 2$**.**

Anche questa volta, senza ledere la generalità possiamo supporre che $A = B = 1$ e che $k = 0$. Si ha, decomponendo in somma:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$$

essendo

$$I_1 = \int \frac{x}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Si ha

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{t^2}\,dt\right]_{t=x^2+c^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+c^2} + k$$

Per determinare I_2 procediamo come abbiamo visto nell'Esempio 5 relativo all'integrazione per parti:

$$I_2 = \frac{1}{c^2}\int \frac{c^2}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c^2}\int \frac{x^2+c^2-x^2}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{c^2}\int \frac{1}{x^2+c^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{c^2}\int \frac{-x^2}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Il primo dei due integrali è stato già studiato nel caso $n = 1$,. Per determinare il secondo osserviamo che la derivata di $\frac{1}{x^2+c^2}$ è $\frac{-2x}{x^2+c^2}$ quindi è possibile procedere per parti:

$$\int \frac{-x^2}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\cdot\frac{-2x}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+c^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x.$$

e anche stavolta ci si riconduce a quanto studiato nel caso $n = 1$.

Con le considerazioni fatte finora, siamo in grado di integrare una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}.$$

Posto $\Delta = p^2 - 4q$, distinguiamo tre casi:

1. $\Delta > 0$.
   In questo caso il trinomio al denominatore ha due zeri reali e distinti x_1, x_2 e si ha $x^2+px+q = (x-x_1)(x-x_2)$. Si cercano A e B tali che

   $$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}.$$

   Si deve risolvere il sistema

   $$\begin{cases} A+B=a \\ -x_2A - x_1B = b \end{cases}$$

   che ammette una sola soluzione in quanto il determinante dei coefficienti vale $x_2 - x_1 \neq 0$. Ci si riconduce quindi al caso (3.2).

2. $\Delta = 0$.
   In questo caso il trinomio al denominatore ha un solo zero x_0 di molteplicità 2 e si ha

   $$x^2+px+q = (x-x_0)^2.$$

   Procedendo come nel caso precedente, si determinano due numeri A e B tali che

   $$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}.$$

   In questo modo, ci si riconduce nuovamente al caso (3.2).

3. $\Delta < 0$.

   In questo caso, si utilizza il metodo del completamento dei quadrati:

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \Big(x + \frac{p}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\Big)^2$$

quindi il trinomio al denominatore si scrive nella forma $(x-k)^2 + c^2$ e si ha

$$\begin{aligned}
\int f(x)\mathrm{d}x = a\int \frac{x}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + b\int \frac{1}{(x-k)^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \\
\frac{a}{2}\int \frac{2x}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + b\int \frac{1}{(x-k)^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \\
\frac{a}{2}\int \frac{2x+p-p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + b\int \frac{1}{(x-k)^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \\
\frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \Big(b - \frac{ap}{2}\Big)\int \frac{1}{(x-k)^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \\
\frac{a}{2}\log(x^2+px+q) + \Big(b - \frac{ap}{2}\Big)\Big[\int \frac{1}{t^2+c^2}\,\mathrm{d}t\Big]_{t=x-k}.
\end{aligned}$$

Ci si riconduce quindi al caso (3.3).

Esempio 10 Determiniamo

$$I = \int \frac{x+4}{x^2-x-6}\mathrm{d}x.$$

Si ha

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

quindi i fratti semplici saranno del tipo

$$\frac{A}{x-3}, \quad \frac{B}{x+2}.$$

Determiniamo le costanti A, B in modo che

$$\frac{x+4}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A-3B}{x^2-x-6}$$

quindi deve essere $A+B=1, 2A-3B=4$. Si trova

$$A = \frac{7}{5}, \quad B = -\frac{2}{5}$$

e, integrando i due fratti semplici, l'integrale richiesto risulta

$$I = \frac{7}{5}\log|x-3| - \frac{2}{5}\log|x+2| + k.$$

Esempio 11 Determiniamo

$$\int \frac{x+4}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x.$$

In questo caso i fratti semplici sono del tipo

$$\frac{A}{x-1}, \quad \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Si trova $A=1, B=5$ quindi l'integrale richiesto risulta $\log|x-1| - \frac{5}{x-1} + k$.

Esempio 12 Determiniamo

$$I = \int \frac{x+4}{x^2+x+4}\mathrm{d}x.$$

Il denominatore ha discriminante negativo, quindi si procede nel seguente modo

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+x+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{7}{x^2+x+4}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\log(x^2+x+4) + \frac{7}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}} =$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{2}}\arctan\sqrt{\frac{2}{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + k..$$

Esempio 13 Determiniamo il seguente integrale

$$I = \int \frac{x+3}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$$

Risulta

$$I == \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\int \frac{dt}{t^2}\Big]_{t=x^2+4} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2} =$$

$$-\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} - \frac{3}{8}\int -\frac{2x}{(x^2+4)^2}\cdot x\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{8}\arctan\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} =$$

$$-\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{9}{16}\arctan\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+4} + k.$$

Vediamo ora alcuni esempi in cui la funzione razionale fratta non è propria. Come detto prima, la funzione deve essere decomposta nella somma di un polinomio e di una funzione razionale fratta propria.In alcuni casi basta effettuare alcune semplici trasformazioni (primi tre esempi a seguire), altre volte è conveniente effettuare la divisione fra il numeratore e il denominatore (ultimi due esempi). (Gli integrali proposti possono essere facilmente completati per esercizio).

Esempio 14 Determinare i seguenti integrali indefiniti

1. $$\int \frac{x+1}{2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3-1}{2x+3}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int \Big(1 - \frac{1}{2x+3}\Big)\mathrm{d}x.$$

2. $$\int \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int (\frac{x^4-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1})\mathrm{d}x =$$
$$\int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x.$$

3. $$\int \frac{x^2+2}{x-5}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-25+25+2}{x-5}\mathrm{d}x = \int \left(x+5+\frac{27}{x-5}\right)\mathrm{d}x$$

4. $$\int \frac{x^3}{x^2+2}\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{-2x}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x$$

5. $$\int \frac{x^4+1}{x^3-2}\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{3x+1}{x^3-2}\right)\mathrm{d}x$$

Integrazione per razionalizzazione.

Grazie al primo teorema di integrazione per sostituzione, è possibile ricondurre alcuni integrali a quelli di funzioni razionali fratte. Lo vediamo attraverso alcuni esempi.

1. $$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t\right]_{t=e^x} = \log(e^x+1)+k$$

2. $$\int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int e^x \frac{e^x+4}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{t+4}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\right]_{t=e^x}$$

   qui abbiamo osservato che è presente il fattore $D(e^x) = e^x$. Se esso non è presente, basta, per ottenerlo, moltiplicare il numeratore e il denominatore per e^x, come nel seguente esempio:

3. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+3} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3t}\right]_{t=e^x}$$

   e, analogamente

4. $$\int \frac{\tan x}{\tan x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x(\tan^2 x + 1)}{(\tan x + 1)(\tan^2 x + 1)}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t\right]_{t=\tan x}$$

   qui abbiamo moltiplicato numeratore e denominatore per $\tan^2 x + 1$ che è la derivata di $\tan x$.

Concludiamo il paragrafo presentando il seguente

Teorema 6 (Secondo teorema di integrazione per sostituzione) *Siano: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione dotata di primitive, $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che Im $g = (a, b)$. Se g è invertibile si ha*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Dimostrazione. Dal primo teorema di integrazione per sostituzione segue che

$$\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=g(t)}.$$

Componendo ambo i membri con $t = g^{-1}(x)$ si ottiene la tesi.

Esempio 15 Facciamo vedere alcune applicazioni del Teorema precedente

1. Determinare
$$\int \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x.$$
   Procediamo nel seguente modo. Si ha $(a, b) = [-3, +\infty[$ e l'obiettivo è quello di porre
$$\sqrt{x+3} = t.$$

Si deve scegliere dunque $(c, d) = [0, +\infty[$ e $g(t) = t^2 - 3$ (si trova ricavando x da $\sqrt{x+3} = t$). Si prova subito che tutte le ipotesi del teorema sono soddisfatte, in particolare si ha

$$g'(t) = 2t, \quad g^{-1}(x) = \sqrt{x+3};$$

quindi

$$\int \sqrt{x+3}\ \mathrm{d}x = \left[\int t \cdot 2t\ \mathrm{d}t\right]_{t=\sqrt{x+3}} = \frac{2}{3}(\sqrt{x+3})^3 + k.$$

2. Sia

$$f(x) = \sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}$$

con $ps - qr \neq 0$ (in caso contrario f sarebbe costante) una funzione definita in un intervallo (a, b) in cui il radicando è non negativo. La sostituzione da fare in questo caso è

$$t = \sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}$$

con $t \geq 0$. Si ha allora

$$g(t) = \frac{st^2 - q}{p - rt^2}, \quad g'(t) = \frac{2(ps - qr)t}{(p - rt^2)^2}.$$

Poichè g' ha sempre segno costante , la funzione g è invertibile. Applicando il secondo teorema di integrazione per sostituzione si ottiene

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \left[\int \frac{2(ps - qr)t^2}{(p - rt^2)^2} \mathrm{d}t\right]_{t=\sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}}$$

che è l'integrale di una funzione razionale. Vediamo a titolo di esempio un caso particolare.

3. Sia
$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}},$$
vogliamo determinare le primitive in $(a, b) =]3, +\infty[$. Poniamo
$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}},$$
con $t > 0$. Ricavando x, si ottiene
$$g(t) = \frac{3t^2+1}{t^2-2}.$$
Si vede facilmente che sono verificate le ipotesi del secondo teorema di integrazione per sostituzione, in particolare si ha
$$g'(t) = -\frac{14t}{(t^2-2)^2} < 0,$$
quindi g è invertibile. Applicando il teorema si ottiene
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -14\left[\int \frac{t^2}{(t^2-2)^2} dt\right]_{t=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}}$$
che si risolve con il metodo di integrazione delle funzioni razionali.

3.3 Integrale definito secondo Riemann.

Ricordiamo che dati due insiemi numerici A e B, se
$$a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B,$$
si dice che A e B sono separati. In tal caso, si prova che
$$\sup A \leq \inf B$$

e tutti i numeri $c \in [\sup A, \inf B]$ vengono detti elementi di separazione fra A e B. Se

$$\sup A = \inf B$$

l'elemento di separazione è unico e gli insiemi A e B sono detti contigui. Si può provare che A e B sono contigui se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Definizione 3 *Chiameremo decomposizione di* $[a, b]$ *ogni insieme di punti*

$$D = \{x_0; x_1; \cdots, x_{n-1}; x_n\}$$

tali che

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

I punti $x_0, x_1, \cdots, x_n$ *si chiamano capisaldi della decomposizione.*

Il numero

$$|D| = \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \cdots, (x_n - x_{n-1})\}$$

si chiama ampiezza di D.

Sia $D = \{x_0; x_1; \cdots, x_{n-1}; x_n\}$ una decomposizione di $[a, b]$. Poichè f è continua in ognuno degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, è ivi dotata di massimo e minimo assoluto.

Per ogni $i = 1, \cdots, n$ siano $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tali che

$$f(y_i) = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad f(z_i) = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

Definizione 4 *Le quantità*

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1})$$

e

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

si chiamano, rispettivamente, somma inferiore e somma superiore (secondo Riemann) della funzione f *relative a* D.

Al variare della decomposizione D, queste somme descrivono due insiemi numerici $\underline{S}$ (insieme delle somme inferiori) e $\overline{S}$ (insieme delle somme superiori).

Si può provare che qualunque siano le decomposizioni D_1 e D_2, si ha

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

cioè gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono separati. Ne segue che

$$\sup \underline{S} \leq \inf \overline{S}.$$

Proviamo che

Teorema 7 *Gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono contigui.*

Dimostrazione. Dimostreremo che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists D \,\text{decomposizione di}\ [a, b]\ \text{tale che}\ S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo f una funzione continua in $[a, b]$, per il Teorema di Cantor essa è uniformemente continua in $[a, b]$.

Scriviamo la definizione di uniforme continuità in corrispondenza ad $\frac{\varepsilon}{b-a}$ e troviamo che

$$\exists \delta > 0 \,\text{tale che} \quad x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{3.4}$$

Costruiamo una decomposizione D di $[a, b]$ tale che $|D| < \delta$. Siano $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ i capisaldi di questa decomposizione e $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i punti di minimo e massimo assoluto di f in $[x_{i-1}, x_i]$. Dato che $|D| < \delta$, si ha $|z_i - y_i| < \delta$, quindi, usando la (3.4), per tale coppia di punti vale la disuguaglianza

$$f(z_i) - f(y_i) = |f(z_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Si ha allora

$$S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^{n} (f(z_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) <$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\,(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) = \varepsilon.$$

In virtù del teorema precedente gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono contigui e $\sup \underline{S} = \inf \overline{S}$ è il loro unico elemento di separazione. Ha senso, quindi dare la seguente

Definizione 5 *Il numero*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup \underline{S} = \inf \overline{S}$$

si chiama integrale definito (secondo Riemann) di f *in* $[a, b]$

Esempio 16 Consideriamo la funzione costante,

$$f(x) = k \quad \forall x \in [a, b].$$

Qualunque sia la decomposizione D scelta, si ha subito

$$s(f, D) = S(f, D) = k(b-a),$$

quindi

$$\int_a^b k \ \mathrm{d}x = k(b-a).$$

Osserviamo che, se $k > 0$, il valore dell'integrale risulta uguale all'area del rettangolo

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le x \le b, \quad 0 \le y \le f(x)\Big\}.$$

Quest'osservazione sarà utile nell'ultimo paragrafo.

Osservazione 3 Il valore dell'integrale dipende da f, da a e da b, non cambia cambiando il nome della variabile di integrazione: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \cdots$.

Sia f una funzione continua in un intervallo (α, β) e siano $a, b \in (\alpha, \beta)$. Se $a < b$ abbiamo già definito l'integrale definito $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$. Tale definizione si generalizza al caso in cui $a \geq b$, nel seguente modo.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a = b \\ -\displaystyle\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x & \text{se} \quad a > b. \end{cases}$$

3.4 Proprietà dell'integrale definito

Enunciamo le principali proprietà dell'integrale definito.

- **Proprietà additiva**
  Se f è una funzione continua in (α, β) allora

  $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

  qualunque siano i punti $a, b, c \in (\alpha, \beta)$.

- **Proprietà distributiva**
  Se f, g sono continue in $[a, b]$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ si ha

  $$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\ \mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + c_2 \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

- **Proprietà della media**
  Sia f continua in $[a, b]$. Posto $m = \min_{[a,b]} f$ e $M = \max_{[a,b]} f$ si ha

  $$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b - a).$$

  Inoltre, esiste $c \in [a, b]$ tale che

  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(c)(b - a).$$

La prima proprietà della media segue dalla definizione di integrale usando la decomposizione $D = \{a; b\}$. Per ottenere la seconda, basta osservare che

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \leq M$$

e applicare la proprietà dei valori intermedi alla funzione f.

- **Prima poprietà di monotonia**
  Sia f continua in $[a, b]$ e tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

  Allora si ha

  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

  L'eguaglianza si ha se e solo se f è identicamente nulla.

  La proprietà di monotonia si può provare usando quella della media e osservando che $m \geq 0$.

  Da questo risultato, applicando la proprietà distributiva, segue subito

- **Seconda proprietà di monotonia**
  Siano f, g continue in $[a, b]$ e tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

  Allora si ha

  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

  Si ha infine la seguente proprietà:

- Sia f continua in $[a, b]$. Allora

  $$\Big|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x.$$

3.5 Funzione integrale

Sia $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Per ogni $x \in (\alpha, \beta)$ l'integrale definito $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ è un numero (che dipende da x). Possiamo quindi considerare la funzione $F : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ definita mediante la legge

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t, \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

La funzione F si chiama *funzione integrale di f di punto iniziale x_0*. Ovviamente,

$$F(x_0) = 0.$$

Inoltre, vale la seguente proprietà

Teorema 8 *Siano $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $x_0, x_1 \in (\alpha, \beta)$.*
Se F e G sono due funzioni integrali di punto iniziale x_0 e x_1 rispettivamente, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Dimostrazione. Per definizione di funzione integrale si ha:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt, \quad G(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\ dt, \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Usando la proprietà additiva, dell'integrale definito

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\ dt + \int_{x_1}^{x} f(t)\ dt = G(x) + \int_{x_0}^{x_1} f(t)\ dt$$

e l'ultimo addendo è costante.

Si ha il seguente importante

Teorema 9 (Teorema di derivazione della funzione integrale.) *Siano $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e F una funzione integrale di f. Allora, F è derivabile e si ha $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$.*

Dimostrazione Consideriamo la funzione integrale F di punto iniziale x_0. Proviamo la tesi in un punto $c \in (\alpha, \beta)$. Consideriamo il rapporto incrementale della funzione F nel punto c. Usando la definizione di F e la proprietà additiva dell'integrale definito, se $x \in (\alpha, \beta), x \neq c$ si ha

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{x_0}^{c} f(t)\ \mathrm{d}t}{x - c} = \frac{\displaystyle\int_{c}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t}{x - c}.$$

Supponendo, per semplicità, che $x > c$, dal teorema della media applicato alla restrizione di f in $[c, x]$ segue che esiste $\bar{x} \in [c, x]$ tale che

$$\frac{\displaystyle\int_{c}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t}{x - c} = f(\bar{x}).$$

Osserviamo che $\bar{x}$ dipende da x e al tendere di x a c anche $\bar{x}$ tende a c quindi, per la continuità di f nel punto c si ha

$$\lim_{x \to c} f(\bar{x}) = f(c)$$

da cui segue la tesi.

Dal risultato appena dimostrato segue che ogni funzione integrale di una funzione continua f è una primitiva di f. Il fatto, provato prima, che due funzioni integrali differiscono per una costante, ne è un'ulteriore conferma. In conclusione, possiamo dunque enunciare il seguente

Teorema 10 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Una funzione continua in un intervallo è ivi dotata di primitive.*

llustriamo alcune applicazioni del Teorema fondamentale del calcolo integrale

Esempio 17 Trovare la funzione F, primitiva in $]0, +\infty[$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \forall x > 0$$

e tale che $F(2) = 5$.

Dato che ogni funzione integrale è una primitiva di f, basta porre

$$F(x) = \int_2^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t + 5.$$

Esempio 18 Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t, \quad \forall x > 0.$$

Si tratta della funzione integrale di una funzione continua, quindi

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Esempio 19 Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t, \quad \forall x > 0.$$

Non è una funzione integrale in quanto l'estremo variabile di integrazione è quello inferiore. Tuttavia, si osserva che

$$F(x) = -\int_1^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

e quindi

$$F'(x) = -\frac{\sin x}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Esempio 20 Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_1^{x^3} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t, \quad \forall x > 0.$$

F è composta mediante la funzione integrale $\displaystyle\int_1^y \frac{\sin t}{t} dt$ e la funzione x^3, quindi

$$F'(x) = 3x^2 \frac{\sin x^3}{x^3}, \quad \forall x > 0.$$

ESEMPIO 21 Derivare la funzione definita in $]0,+\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_{x^4}^{\log x} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t, \quad \forall x > 0.$$

Non è una funzione integrale in quanto gli estremi di integrazione sono entrambi variabili, allora si procede nel seguente modo:

$$F(x) = \int_{x^4}^{2} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t + \int_{2}^{\log x} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

e quindi

$$F'(x) = -4x^3 \frac{\sin x^4}{x^4} + \frac{1}{x} \frac{\sin(\log x)}{\log x}, \quad \forall x > 0.$$

Dal teorema su esposto segue un altro risultato che stabilisce un importante legame fra l'integrale indefinito e l'integrale definito.

Teorema 11 (Formula fondamentale del calcolo integrale) *Sia $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia F una sua primitiva. Se $a, b \in (\alpha, \beta)$, si ha*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Dimostrazione. La funzione $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t) \, dt$ è una primitiva di f, quindi esiste una costante k tale che, per ogni $x \in (\alpha, \beta)$, si ha $F(x) = G(x) + k$. In particolare, per $x = a$ ne segue $F(a) = k$ quindi $F(x) = G(x) + F(a)$. Calcolando i due membri di quest'eguaglianza per $x = b$ ne segue

$F(b) = \displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + F(a)$ che è la tesi.

ESEMPIO 22 Calcoliamo i seguenti integrali definiti

1. $\displaystyle\int_1^e \log x \mathrm{d}x = \big[x \log x - x\big]_1^e = 1$

2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \mathrm{d}x = \big[\sin x\big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

3.6 Interpretazione geometrica dell'integrale di Riemann

.

È necessaria una premessa: si vuole attribuire un'area a sottoinsiemi del piano che non siano necessariamente dei poligoni. . A tale scopo ci riferiremo alla *Teoria della misura secondo Peano e Jordan*, che in questa sede accenneremo solo relativamente ad insiemi che siano limitati e dotati di punti interni. Intanto, se $X = (a, b) \times (c, d)$ è. un rettangolo limitato chiameremo area di X il numero

$$area(X) = (b - a)(d - c).$$

Chiameremo *plurirettangolo* ogni insieme che sia unione finita di rettangoli a due a due privi di punti interni a comune. Se X è un plurirettangolo chiamiamo $area(X)$ la somma delle aree dei rettangoli che lo compongono.

Supponiamo che X sia limitato e dotato di punti interni. Siano rispettivamente $\underline{P}$ e $\overline{P}$ rispettivamente le famiglie dei plurirettangoli contenuti in X e dei plurirettangoli contenenti X. Esse sono non vuote (basti pensare ad un quadrato inscritto in un intorno di un punto interno ad X e ad un quadrato circoscritto ad un cerchio contenente X). Introduciamo gli insiemi numerici $\underline{A}$ e $\overline{A}$ costituiti, rispettivamente, dalle aree degli elementi di $\underline{P}$ e $\overline{P}$, si tratta evidentemente di due insiemi numerici separati. Se essi sono anche contigui, X è detto misurabile e il loro elemento di separazione è chiamato area di X; se non sono contigui, X è detto non misurabile. Un esempio di insieme non misurabile è $X = \big(([0,1] \times [0,1]) \cap \mathbf{Q}^2\big) \cup ([0,1] \times [1,2])$. Si ha infatti in questo caso $\sup \underline{A} = 1$ e $\inf \overline{A} = 2$.

Sia ora f una funzione reale continua e non negativa in $[a, b]$. Introduciamo l'insieme, che chiameremo **rettangoloide di** f

$$R(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Siano D una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ di capisaldi $x_0, x_1, \cdots, x_n$ e $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i punti di minimo e massimo assoluto di f nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$.

Osserviamo che la quantità $f(y_i)(x_i - x_{i-1})$ rappresenta l'area di un rettangolo contenuto nella porzione di rettangoloide relativa all'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. L'unione di tutti i rettangoli ottenuti in tal modo costituisce un plurirettangolo contenuto nel rettangoloide, e la sua area è $s(f, D)$. Analogamente $S(f, D)$ fornisce l'area di un plurirettangolo contenente il rettangoloide. Dire che la funzione è integrabile, cioè che gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono contigui equivale, dunque, a dire che sono contigui gli insiemi $\underline{A}$ e $\overline{A}$, quindi garantisce che il rettangoloide è misurabile e la sua area è l'elemento di separazione fra tali insiemi, quindi l'integrale.

Questa conclusione generalizza quanto detto nel paragrafo precedente a proposito dell'integrale di una funzione costante.

Se f è a valori non positivi, si può in modo simile introdurre il rettangoloide e la sua area risulta uguale a $-\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, dato che in questo caso $R(f)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse a $R(-f)$ quindi ha la sua stessa area.

Se, infine, f e g sono due funzioni continue in $[a, b]$ tali che $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [a, b]$, si può dimostrare che l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

che chiameremo **dominio normale rispetto all'asse delle ascisse**, è misurabile e la sua area è uguale a $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x$.