25 OTTOBRE

GUIDA AGLI ESERCIZI

1) LIMITI

passaggi consigliati:

- studiare il limite delle restrizioni alle rette passanti per (x_0, y_0)

il limite dipende dalla retta

(a) $\Downarrow$

f non ha limite per $(x,y) \to (x_0, y_0)$

il limite non dipende dalla retta

(b) $\Downarrow$

provare a verificare se il limite è quello. In ogni caso scrivere che <u>potrebbe</u> esserlo

Esempi

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$$

restriz. ad r_m $= \dfrac{x^3+m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{x+m^2}{1+m^2} \to \dfrac{m^2}{1+m^2}$ dipende da m

$\Downarrow$

il limite non esiste

(b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ Considero $|f(x,y)|$

restriz. ad r_m $= \dfrac{m x^2}{\sqrt{x^2+m x^2}} = \dfrac{m\,|x|}{\sqrt{1+m^2}} \to 0 \Rightarrow$ il limite POTREBBE essere zero.

Si ha

$$0 \le |f(x,y)| = \underbrace{|x|}_{\downarrow\, 0} \ \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\le 1} \to 0 \Rightarrow \text{il limite è zero.}$$

DISEGUAGLIANZE UTILI:

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$x^2 \leq x^2+y^2$$

$$y^2 \leq x^2+y^2$$

$$|xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

2) DERIVATE PARZIALI

- Calcolo del gradiente: $\nabla f(x_0, y_0) = \left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\right)$

- Derivate in punti "particolari"

es. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ derivate nei punti dell'asse $\vec{y}$

$P(0, y_0)$ 1) $\exists f_x(P)$? 2) $\exists f_y(P)$?

1) si deve cons. $f(x, y_0) = \sqrt{x^2+y_0^2} = g(x)$

$g'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y_0^2}}$ se $y_0 \neq 0$, $\nexists g'(0)$ se $y_0 = 0$

quindi se $y_0 = 0$ $\nexists f_x(0,0)$

se $y_0 \neq 0$ $f_x(0, y_0) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y_0^2}}$

2) si deve cons. $f(0, y) = |y| = h(y)$ $\nexists h'(0)$

quindi $\nexists f_y(0,0)$

$$f_y(0, y_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } y_0 > 0 \\ -1 & \text{se } y_0 < 0 \end{cases}$$

- Differenziabilità

- se entrambe le derivate esistono continue $\Rightarrow f$ è differenziabile
- in punti "particolari" prima si calcolano le derivate (se ci sono) e poi si studia il $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}}$

es. $f(x,y) = |y| \log(1+x)$ $P = (0,0)$

1) $\exists f_x(P)$? 2) $\exists f_y(P)$?

1) si deve cons. $f(x, 0) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

2) si deve cons. $f(0, y) = 0 \Rightarrow f_y(0,0) = 0$

$$0 \le \left| \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \left| \frac{|k| \log(1+h)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \underbrace{|\log(1+h)|}_{\downarrow \atop 0} \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\le 1} \to 0$$

$\Rightarrow f$ è differenz.

- ~~D~~erivate direzionali

Basta fare il prodotto scalare del gradiente per il versore.
Se non è indicato il versore ma la direzione della retta, prima si deve trovare il versore.

es. $f(x,y) = x\sqrt{y-3}$ $\quad P(2,12)$

diret. della retta di eq. $r: 4x+3y-7=0$

N. B. nell' eq. cartesiana della retta
$r: ax+by+c=0$

il vettore (a,b) è perpendicolare ad r

il vettore $(b,-a)$ è parallelo ad r

un vettore parallelo ad r è $v=(3,-4)$ $\quad |v| = 5 \ne 1$

il versore da considerare è $w = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x,y) = \sqrt{y-3} \\ f_y(x,y) = \dfrac{x}{2\sqrt{y-3}} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla f(2,12) = \left(3, \frac{1}{3}\right)$$

$$D_w f(2,12) = \left(\left(3, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \right) = \frac{23}{15}$$

3) RICERCA DEGLI ESTREMI

- Estremi relativi

Si deve risolvere il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ trovando i punti

stazionari. Sia P uno di essi. Si calcola $H(P)$ e $f_{xx}(P)$

$H(P) < 0 \Rightarrow$ NON È punto di estremo

$H(P) = 0 \Rightarrow$ PUÒ ESSERE punto di estremo (studio locale)

$H(P) > 0 \Rightarrow$ se $f_{xx}(P) > 0$ minimo rel; se $f_{xx}(P) < 0$ massimo rel

- Estremi assoluti

$f: A \to \mathbb{R}$ cont. A chiuso e limitato

$A_1 = \{(x,y) \in \text{int}(A) : \nabla f(x,y) = (0,0)\}$

$A_2 = \{(x,y) \in \text{int}(A) :$ ∄ le derivate oppure una non esiste e l'altra è nulla $\}$

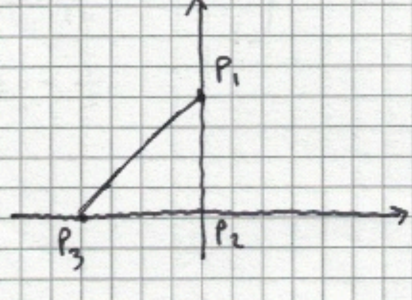
$A_3 = \partial(A)$

su ciascun segmento che compone $\partial(A)$ si deve cons. la funzione "parametrizzata" di una sola variabile e individuare i punti "interni al segmento" in cui la sua derivata è nulla

es. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x$

i) estr rel in $\mathbb{R}^2$

ii) estr ass nel triang di vertici $P_1(0,2)$ $P_2(0,0)$ $P_3(-2,0)$



i) $f_x(x,y) = 2x + y + 1$

$f_y(x,y) = 2y + x$

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y + y + 1 = 0 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = 2 \\ f_{yy}(x,y) = 2 \\ f_{xy}(x,y) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} H(P) = 3 \\ f_{xx}(P) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow P \text{ p. di min rel}$$

se non sono richiesti pb estr. rel.

questi calcoli NON SI DEVONO FARE

ii) $A_1 = \{P\}$ $\quad A_2 = \emptyset$

Studiamo f su $A_3 = \mathrm{f}(A)$

$P_1 P_2$: $x=0$ $\quad g(y) = f(0,y) = y + 1 \quad y \in [0,2]$

$g'(y) = 1 \Rightarrow g$ cresc.

$P_2 P_3$: $y=0$ $\quad h(x) = f(x,0) = 2x + 1 \quad x \in [-2,0]$

$h'(x) = 2 \Rightarrow h$ cresc.

$P_3 P_1$: $y = x+2$ $\quad l(x) = f(x, x+2) = 3x^2 + 7x + 4 \quad x \in [-2, 0]$

$l'(x) = 6x + 7 = 0$ per $x = -\frac{7}{6} \in]-2, 0[\Rightarrow P_4\left(-\frac{7}{6}, \frac{5}{6}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(P_1) = 4 \\ f(P_2) = 0 \\ f(P_3) = 2 \\ f(P_4) = -\frac{1}{12} \\ f(P) = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \max_A f = 4 = f(P_1) \\ \\ \min_A f = -\frac{1}{3} = f(P) \end{array}$$

TEOREMI DIMOSTRATI

1) se $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{|E}(x,y) = \ell$

essendo $E \subseteq A$: (x_0, y_0) sia di accum. sia per A che per E

2) se f è differenziabile in P allora è continua in P

3) " " " $\exists f_x(P), f_y(P)$

4) " " " $\exists D_v f(P) \quad \forall v$

5) teorema di Fermat