7 NOVEMBRE '22

lunedì 7 novembre 2022 09:00

RIPASSO

$\{a_n\}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$\dots$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\dots$

$\{s_n\}$ $\quad s_n \to s \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv.

$s_n \to \pm\infty$ div.

$\{s_n\}$ oscill. indeterm.

$a_n = k \in \mathbb{R}$ $\quad k=0 \quad 0+0+\dots = 0$

$k \neq 0 \quad k+k+\dots \quad s_n = kn$ div.

$a_n = \frac{1}{n}$ serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ div.

$a_n = x_n - x_{n+1} \quad x_n \to \ell \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = x_1 - \ell$

se $x_n = \frac{1}{n} \quad a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - 0 = 1$

$a_n = (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ indet.

$x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ serie geom.

$x \neq 1 \quad s_n = \frac{1 - x^n}{1 - x}$

La serie geom. conv. $\iff -1 < x < 1 \quad s = \frac{1}{1-x}$

div. se $x > 1$
indet. se $x \leq -1$

$k \in \mathbb{R},\ k \neq 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} k\, a_n$

$\sum a_n \qquad \sum b_n \qquad \sum (a_n + b_n)$

$\sum a_n$ conv $\Rightarrow a_n \to 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad r \in \mathbb{N} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{r+n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

$a_n \geq 0 \quad \forall n$ La serie è regolare

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$$

converge se $\{s_n\}$ è limitata sup. e in tal caso $s = \sup s_n$

diverge se " non è " "

Criterio del confronto $\qquad \sum a_n \ (1) \quad s_n \qquad \sum b_n \ (2) \quad S_n$

$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \Rightarrow s_n \leq S_n$

(1) div $\Rightarrow$ (2) div

(2) conv. e ha somma $S \Rightarrow$ (1) conv. e $s \leq S$

forma asintotica $\quad a_n, b_n > 0 \quad \forall n$
$\frac{a_n}{b_n} \to \ell > 0 \quad \Rightarrow$ le due serie hanno lo stesso carattere

es. $\sum \frac{n+1}{n^2+3}$

$\frac{n+1}{n^2+3} \qquad \frac{n^2+n}{} \quad -1 \Rightarrow$ la serie div.

$$\frac{\frac{n+1}{n^2+3}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2+n}{n^2+3} \to 1 \Rightarrow \text{la serie div.}$$

Crit del rapp. $a_n > 0$ $\quad x_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad (x_1 = a_1)$

suff. che $a_n \to \ell \neq 1$ (event. $\ell = +\infty$)

se $\ell < 1 \Rightarrow$ la serie conv.

se $\ell > 1 \Rightarrow$ " div.

$$\sum \frac{e^n}{(n+1)!}$$

$$x_n = \frac{e^{n+1}}{(n+2)!}\,\frac{(n+1)!}{e^n} = \frac{e\cdot \cancel{e^n}\,\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}\,(n+2)\,\cancel{e^n}} = \frac{e}{n+2} \to 0 \Rightarrow \text{la serie conv.}$$

$$6! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}_{5!}\cdot 6$$

Crit. della radice

$\sum a_n$ $\quad a_n > 0$ $\quad x_n = \sqrt[n]{a_n}$

$x_n \to \ell \neq 1$ (event. $\ell = +\infty$)

se $\ell < 1 \Rightarrow$ la serie conv.

se $\ell > 1 \Rightarrow$ " div.

$$a_n = \left(\frac{2n^2+1}{(n+3)^2}\right)^n \qquad x_n = \frac{2n^2+1}{(n+3)^2} \to 2 > 1 \Rightarrow \text{la serie div.}$$

$$\underset{(1)}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \qquad \underset{(2)}{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}$$

DEF. Se (2) conv. si dice che la (1) è ASSOLUT. CONV.

Teor. ass. conv. $\Rightarrow$ conv.

Teor. ass. conv. $\Rightarrow$ conv.

il viceversa non vale es. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ è conv. ma

$\sum \frac{1}{n}$ è div.

Serie esponenziale $\quad (0! = 1)$

$x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$

provo ad appl. il crit. del rapp.

$x > 0$

$$\frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{x^n}{n!} \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{\cancel{x^{n-1}} \cdot x \,\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\, n \,\cancel{x^{n-1}}} = \frac{x}{n} \to 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ la serie converge $\forall x > 0$

$x = 0 \qquad 1 + 0 + 0 + \dots$ conv. e ha somma 1

$x < 0 \qquad a_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad$ Cons. $|a_n| = \left| \frac{\quad}{\quad} \right| = \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$

è la serie espon. costruita a partire da $|x| > 0 \Rightarrow$ conv.

$\Rightarrow$ la serie converge assolut.

$$\boxed{\text{La serie esponenziale converge } \forall x \in \mathbb{R}}$$

Per alcune serie non possiamo appl. né il crit. del rapp.
né quello della radice

es. $a_n = \frac{n+1}{n^2+3}$

RAPP

$\frac{n+2}{(n+1)^2+3} \; \frac{n^2+3}{n+1} \to 1$

RAD

$\sqrt[n]{\frac{n+1}{n^2+3}} \to 1$ (si può provare)

l'abbiamo studiata confrontandola con la serie armonica

$(n+1)^2+3 \qquad n+1$

l'abbiamo studiata confrontandola con la serie armonica

$\frac{n+1}{n^3+3}$ non si può fare in nessuno dei modi visti finora

Abbiamo bisogno di altri criteri!

CRITERIO DI RAABE (solo enunc.)

IP $\sum a_n \quad a_n > 0 \ \forall n \qquad x_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

Supp. che $x_n \to l \neq 1$ (event. $l = \pm\infty$)

TS Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie conv.

Se $l < 1 \Rightarrow$ " div.

Serie armonica generalizzata di esponente x

$x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

$x = 1$ div.

$x \neq 1$ proviamo ad applicare il crit. di Raabe

$$n\left(\frac{\frac{1}{n^x}}{\frac{1}{(n+1)^x}} - 1\right) = n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^x - 1\right] = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x - 1}{\frac{1}{n}} \to x$$

$$\left[\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^x - 1}{t} = x\right]$$

la serie arm. gen. conv. $\Longleftrightarrow x > 1$

Allora se cons. $\sum \frac{n+1}{n^3+3}$

$$\frac{\frac{n+1}{n^3+3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3+n^2}{n^3+3} \to 1 \Rightarrow \text{la serie conv.} \quad (2 > 1)$$

$$\sum \frac{n+2}{n\sqrt{n}+4}$$

$\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$$n^{\frac{1}{2}} a_n = \frac{n\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+4} \to 1 \Rightarrow \text{la serie diverge}$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Criterio del confronto con la serie armonica generalizzata

IP $\quad \sum a_n \quad a_n > 0 \quad a_n \to 0$

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \quad n^{\alpha} a_n \to l > 0$

TS $\quad$ Se $\alpha > 1 \Rightarrow$ la serie conv.

Se $\alpha \leq 1 \Rightarrow$ " div.

DIM. $\quad n^{\alpha} a_n = \dfrac{a_n}{\frac{1}{n^{\alpha}}}$ quindi stiamo appl. il crit del confronto asintotico

es. $\quad \sum \dfrac{3n+2}{n^2+5} \qquad \alpha = 2-1 = 1 \Rightarrow$ la serie div.

$\sum \dfrac{3n+2}{n^4+5} \qquad \alpha = 4-1 = 3 \Rightarrow$ " conv.

Questo criterio è anche chiamato crit. dell'ordine di infinitesimo perchè confrontare la serie $\sum a_n$ con la serie arm. generalizzata equivale a confrontare l'infinitesimo a_n con l'infinitesimo fondamentale $\frac{1}{n}$

In definitiva

1) $\quad \sum \dfrac{(n+2)!}{n^n} \qquad$ crit. del rapp.

2) $\quad \sum \left(\dfrac{3n+1}{n^2+5}\right)^n \qquad$ crit della radice

3) $\quad \sum \dfrac{(2\sqrt{n}+1)^3}{n^5+3} \qquad$ crit del confr. con la serie arm. gen.

2) $\quad x_n = \dfrac{3n+1}{n^2+5} \to 0 < 1 \Rightarrow$ conv.

1) $\quad x_n = \dfrac{(n+3)!}{(n+1)^{n+1}} \dfrac{n^n}{(n+2)!} = \dfrac{\cancel{(n+2)!}\,(n+3)\; n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\;\cancel{(n+2)!}} =$

1) $x_n = \frac{(n+3)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n+2)!} = \frac{\cancel{(n+2)!}\,(n+3)\, n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\,\cancel{(n+2)!}} =$

$= \underbrace{\frac{n+3}{n+1}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\downarrow\, \frac{1}{e}} \to \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ conv.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$

3) gr. del num. $\frac{3}{2}$, gr. del den. 5 $\quad \alpha = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} > 1 \Rightarrow$ conv.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (|x|-2)^n$ I resto della serie geom. di rag. $|x|-2$

$-1 < |x|-2 < 1 \iff 1 < |x| < 3$

$-3 < x < -1 \quad \vee \quad 1 < x < 3$

$$s = \frac{1}{1-(|x|-2)} - 1$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(n+1)x + 3x + 4}$

$a_n = 2^{nx + x + 3x + 4} = (2^{x})^n\, 2^{x+3x+4} = (2^x)^n\, 2^{4x+4}$

$(2^x)^n$ è il primo resto della serie geom. di rag. 2^x

conv. $\iff -1 < 2^x < 1 \Rightarrow x < 0$

Se $x < 0$ la serie conv. e ha somma $\left(\frac{1}{1-2^x} - 1\right) 2^{4x+4}$