5 ottobre 22

mercoledì 5 ottobre 2022 07:53

RIPASSO

$P_1(x_1, y_1)$

$P_2(x_2, y_2)$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$P_0(x_0, y_0)$ $\quad r > 0 \quad$ $B(P_0, r) = I_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, P_0) < r\}$

es. $\quad B((0,0), 3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 3\}$

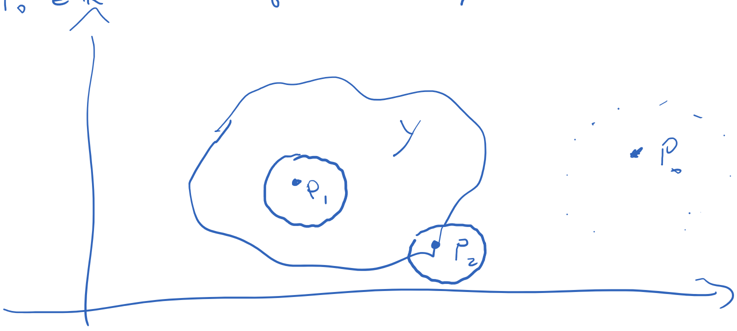
$X \subseteq \mathbb{R}^2 \quad P_0 \in X \quad P_0$ interno ad X se $\exists\, r > 0 : B(P_0, r) \subseteq X$

$P_0 \in \mathbb{R}^2$ di accumulazione per X se $\forall r > 0 \quad B(P_0, r) \cap (X \setminus \{P_0\}) \neq \emptyset$

$D(X)$ = ins. dei punti di accum.

$P_0 \in \mathbb{R}^2$ di frontiera per X se $\forall r > 0 \quad \exists\, P_1, P_2 \in B(P_0, r)$ con $P_1 \in X$, $P_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus X$

$F(X)$ = ins. dei p. di frontiera



$X = Y \cup \{P_0\}$

$P_0 \in X$

$P_0 \notin D(X)$

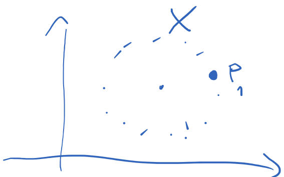
$P_0 \in F(X)$

P_0 punto isolato

$P_1 \in \text{int}(X)$, $P_1 \in D(X)$

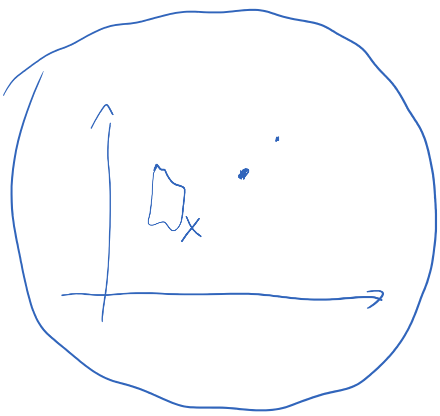
$P_2 \in F(X)$, $P_2 \in D(X)$

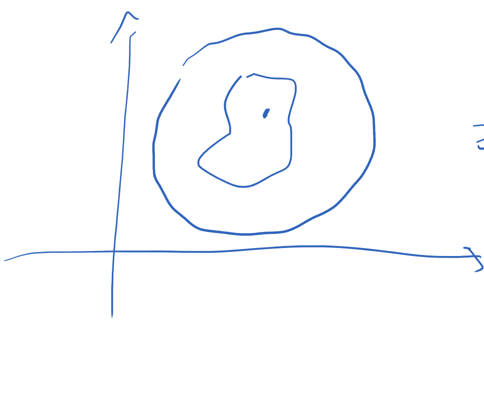
$P_2 \in X$



$P_1 \in F(X)$, $P_1 \in D(X)$

$P_1 \notin X$





X limitato se $\exists$ un cerchio che lo contiene

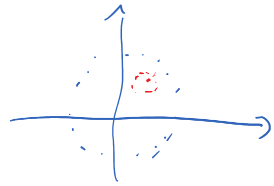
X aperto se $X = \emptyset$ oppure $X \neq \emptyset$ e $X = \text{int}(X)$

X aperto se $X = \emptyset$ oppure $X \neq \emptyset$ e $X = \text{int}(X)$

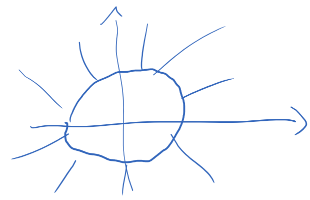
X chiuso se $\mathbb{R}^2 \setminus X$ è aperto

$X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \} = B((0,0), 1)$

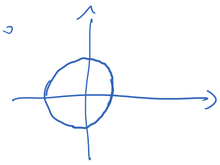
aperto



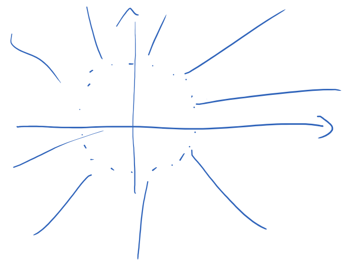
$\mathbb{R}^2 \setminus X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1 \}$ chiuso



$X = \{ (x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \}$ chiuso



$\mathbb{R}^2 \setminus X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} > 1 \}$



aperto

X chiuso $\iff$ $F(X) \subseteq X$ $\iff$ $D(X) \subseteq X$

$X \cup F(X) = X \cup D(X) = \overline{X}$ chiusura di X

X chiuso $\iff$ $X = \overline{X}$

$\emptyset$ aperto $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2$ chiuso

$\mathbb{R}^2$ aperto $\Rightarrow$ $\emptyset$ chiuso

$\emptyset$ e $\mathbb{R}^2$ sono gli unici aperti e chiusi $\iff$ sono gli unici ad avere frontiera vuota

---

5 ottobre

$X \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad f : X \to \mathbb{R}$ $\quad (x, y) \in X \to f(x, y) \in \mathbb{R}$

$f(X) = \{ f(x, y) : (x, y) \in X \}$ immagine di f

se $f(X)$ è limitato f si dice limitata se $M = \max f(X)$ $\quad M =$ massimo assoluto di f

$M = f(\bar{x}, \bar{y})$ $\quad (\bar{x}, \bar{y})$ punto di massimo assol.

minimo assoluto analogamente

P_0 è di massimo relativo (minimo) se $\exists\, r > 0$: se $(x, y) \in X$, $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$

si ha $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$
$(\geq)$

$f : X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad P_0(x_0, y_0) \in D(X)$

$\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \ell$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: se $(x, y) \in X$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$,

$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ si ha $|f(x, y) - \ell| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$\ell - \varepsilon < f(x, y) < \ell + \varepsilon$

$\left(\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \qquad \lim\limits_{P \to P_0} \right)$

$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = +\infty$ $(-\infty)$ se $\forall\, k > 0\ \exists\, \delta > 0$: se $(x, y) \in X$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$,

$(x, y) \in B((x, y), \delta)$ si ha $f(x, y) > k$
$(< -k)$

f regolare se converge o diverge

Valgono ancora:

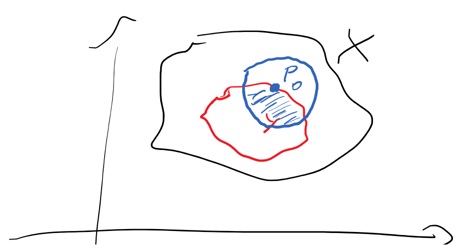
teorema dell'unicità del limite

" della permanenza del segno

teoremi di confronto

operazioni con i limiti

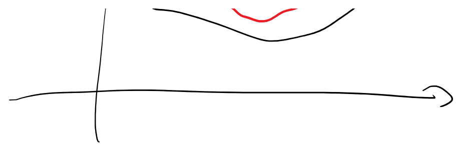
teorema sulle restrizioni



IP. $f : X \to \mathbb{R}$ $\quad P_0 \in D(X)$

$Y \subseteq X$ $\quad P_0 \in D(Y)$

$Y \subseteq X \qquad P_0 \in D(Y)$



$g = f_{|Y}$ restrizione di f ad Y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$

TS $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \ell$

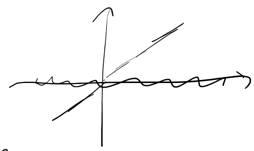
DIM. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$ se $(x,y) \in X$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ e $(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$

si ha $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$

in partic. ciò vale anche per $(x,y) \in Y \implies$ TS.

Se due restriz. hanno limiti diversi $\Rightarrow f$ non è regolare.

es. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\qquad \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?



$y = 0 \qquad f(x,0) = 0 \implies$ se $\exists \lim f$ esso sarà zero

$y = x \qquad f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ se $\exists \lim f$ esso sarà $\dfrac{1}{2}$ $\qquad \implies \nexists \lim f$

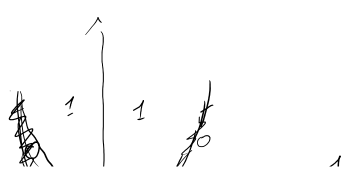
IN GENERALE

$y = mx \quad h(x) = f(x, mx)$ si cerca $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$ Se esso dipende da m il limite non esiste

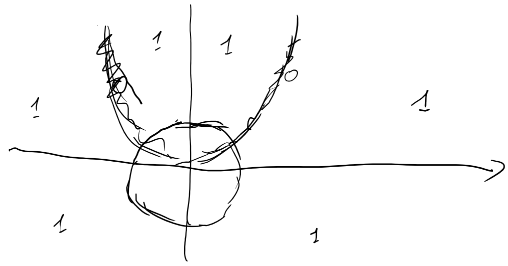
es. per $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\qquad h(x) = \dfrac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$ dipende da m

Se esso non dipende da m allora il limite di f POTREBBE ESSERE lui

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = x^2 \\ 1 & \text{se } y \neq x^2 \end{cases}$$



$$f(x,y) = \begin{cases} \\ 1 & \text{se } y \neq x^2 \end{cases}$$



f non è regolare per $(x,y) \to (0,0)$

$\forall$ retta passante per $(0,0)$ NON interseca la parabola (almeno in un intorno dell'origine) quindi il limite delle restriz. alle rette fa sempre 1.

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad h(x) = f(x, mx) = \frac{m x^3}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}\, x \to 0$$

$\Rightarrow$ FORSE il limite è zero

$0 \leq |f(x,y)| \leq$ una cosa che tende a zero

$$0 \leq |f(x,y)| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \underbrace{|y|}_{\to 0} \to 0 \qquad \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

DISEGUAGLIANZE UTILI

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \qquad \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \qquad \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \qquad \left(|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \text{ vera perché } x^2 \leq x^2+y^2 \right)$$

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad \left(0 \leq (|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|xy| \Rightarrow 2|xy| \leq x^2+y^2 \right)$$

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \qquad h(x) = f(x, mx) = \frac{m x^2}{\sqrt[3]{(1+m^2)x^2}} =$$

$$= \frac{m}{\sqrt[3]{1+m^2}} \; x^{2-\frac{2}{3}} \to 0 \quad \forall m \Rightarrow \text{il lim}$$

potrebbe essere zero

$$0 \le |f(x,y)| \le |x| \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} =$$

$\sqrt{a} : \sqrt[3]{a} =$
$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} =$
$= a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$

$$= \underbrace{|x|}_{\to 0} \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\le 1} \underbrace{(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}}_{\to 0} \to 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x y^2 \log(x^2+y^2) = 0$$

$$0 \le |x y^2 \log(x^2+y^2)| = \underbrace{|x|}_{\to 0} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\le 1} \underbrace{(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)}_{\to 0} \to 0$$

$$\lim_{t\to 0} t \log t = 0$$

$$t \log t = \frac{\log t}{\frac{1}{t}}$$

raff. der. $\quad \dfrac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -t \to 0$

FUNZ COMPOSTE

(1) IP $\quad f : (a,b) \to \mathbb{R}$

$g : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to (a,b)$

$(x,y) \in X \to g(x,y) \in (a,b) \to h(x,y) = f(g(x,y))$

$(x_0, y_0) \in D(X) \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \bar{t} \in [a,b]$

$\lim_{t\to\bar{t}} f(t) = \ell \quad (+\infty, -\infty)$

TS $\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \ell \quad (+\infty, -\infty)$

2 IP $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g_1, g_2 : (a,b) \to \mathbb{R} \quad (g_1(t), g_2(t)) \in X \quad \forall t \in (a,b)$

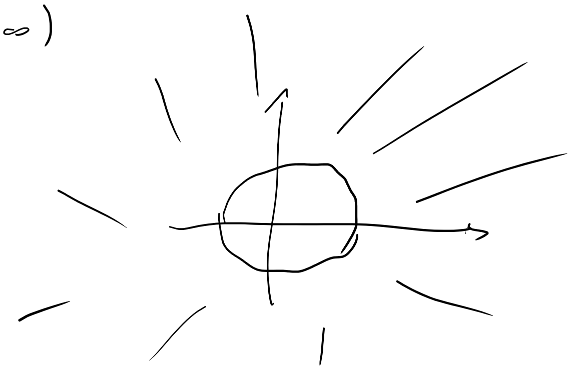
$t \in (a,b) \to (g_1(t), g_2(t)) \in X \to f(t) = f(g_1(t), g_2(t))$

$t_0 \in (a,b)$

$\lim_{t \to t_0} g_1(t) = x_0 \qquad \lim_{t \to t_0} g_2(t) = y_0$

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \qquad (+\infty, -\infty)$

TS $\lim_{t \to t_0} f(t) = \ell \qquad (+\infty, -\infty)$



CONTINUITÀ

$f: X \to \mathbb{R} \qquad X \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad P_0 \in X$ non isolato

DEF f continua in P_0 se $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

Operazioni e funz. composte fra funz. continue sono continue

Teorema di Weierstrass

IP $X \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato

$f: X \to \mathbb{R}$ continua

TS f ammette minimo e massimo assoluti

FUORI PROGRAMMA

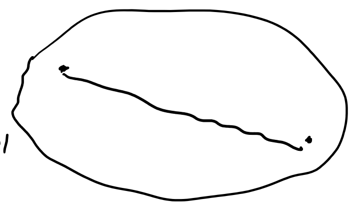
$X \subseteq \mathbb{R}^2$

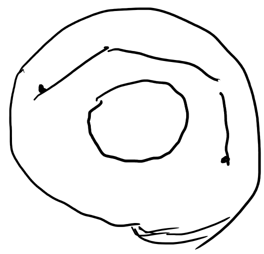
CONNESSO se:

se X è aperto (chiuso) non è possibile decomporlo nella unione di due aperti (chiusi) disgiunti

$$\Updownarrow$$

$\forall\ P_1, P_2 \in X$ $\exists$ una poligonale $\subseteq X$ che li congiunge





TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

IP X connesso

$f : X \to \mathbb{R}$ continua

TS Se f assume due valori, assume anche tutti quelli compresi fra essi