11 GEN 2023

mercoledì 11 gennaio 2023 10:03

QUARTA PC 31/1 ORE 9 } AULA 22
PRIMO APPELLO 31/1 ORE 9

PRIMA PROVA DI RECUPERO 10/2 ORE 9

SECONDA PROVA DI RECUPERO 2/3 ORE 9

SECONDO APPELLO 2/3 ORE 9

$y' + a(x)y = f(x)$

$y' + a(x)y = 0$ $\qquad y(x) = k e^{-A(x)}$ $\quad$ A prim di a

$y(x) = k e^{-A(x)} + \bar{y}(x)$

$\bar{y}(x) = k(x) e^{-A(x)}$

$k \in \int f(x) e^{A(x)} dx$

$y'' + a(x) y' + b(x) y = f(x)$

$y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$

$$W(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$

$y'' + a y' + b y = 0$ $\qquad y(x) = e^{\alpha x}$

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ $\quad$ eq caratt $\qquad \Delta = a^2 - 4b$

$\Delta > 0 \Rightarrow \alpha_1 \neq \alpha_2$ $\quad$ int gen $\quad k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x}$

$\Delta = 0 \Rightarrow \alpha$ doppia $\quad$ " $\quad k_1 e^{\alpha x} + k_2 x e^{\alpha x}$

$\Delta < 0 \Rightarrow \beta \pm i\gamma$ $\quad$ " $\quad k_1 e^{\beta x} \cos\gamma x + k_2 e^{\beta x} \sin\gamma x$

EQ COMPL A COEFF COSTANTI $\qquad y'' + a y' + b y = f(x)$

Studiamo solo il caso $\quad f(x) = e^{hx} p(x)$ $\quad$ p polin. di gr. m, $h \in \mathbb{C}$

Metodo di somiglianza

cerchiamo $\quad \bar{y}(x) = e^{hx} x^s q(x)$ $\quad$ q polin. di gr. m

s = molteplicità di h come sol dell' eq. caratt.

(s = 0 se h non è sol dell' eq. caratt.)

Esempi

1) $y'' - y' = e^x (x+2)$

omog. assoc. $y'' - y' = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 - \alpha = 0$ $\qquad \alpha = 0 \;,\; \alpha = 1$

int gen dell'omog $\quad y(x) = k_1 + k_2 e^x$

int parte della completa $\quad h = 1 \quad s = 1 \quad m = 1$

$$\bar{y}(x) = e^x\, x\,(ax+b) = e^x\,(ax^2 + bx)$$

$$\bar{y}'(x) = e^x\,(ax^2 + bx + 2ax + b)$$

$$\bar{y}''(x) = e^x\,(ax^2 + bx + 2\underbrace{ax} + \underbrace{b} + 2\underbrace{ax} + \underbrace{b} + 2a)$$

Sostituisco nell'eq.

$$\cancel{e^x}\left(\cancel{ax^2} + \cancel{bx} + 4ax + 2b + 2a - \cancel{ax^2} - \cancel{bx} - 2ax - b\right) = \cancel{e^x}(x+2)$$

$$2ax + 2a + b = x + 2$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{matrix}$$

int gen della compl $\quad y(x) = k_1 + k_2 e^x + e^x\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$

2) $\quad y'' - y' = e^{2x}(x-1)$

into gen. dell'omog $\quad y(x) = k_1 + k_2 e^x$

$h = 2 \qquad s = 0 \qquad m = 1$

$$\bar{y}(x) = e^{2x}(ax+b)$$

$$\bar{y}'(x) = 2e^{2x}(ax+b) + e^{2x}a = e^{2x}(2ax + a + 2b)$$

$$\bar{y}''(x) = 2e^{2x}(2ax + a + 2b) + e^{2x}\cdot 2a = e^{2x}(4ax + 4a + 4b)$$

sostituisco nell'eq

$$\cancel{e^{2x}}(4ax + 4a + 4b - 2ax - a - 2b) = \cancel{e^{2x}}(x-1)$$

$$2ax + 3a + 2b = x - 1 \qquad \begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b = -1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{4} \end{matrix}$$

int gen della compl $\quad y(x) = k_1 + k_2 e^x + e^{2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right)$

3) $\quad y'' + 2y' = x^2 \cos x \qquad (a)$

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)}$$

$$\boxed{e^{ix} = e^0(\cos x + i \sin x)}$$

Risolv. l'eq

$$y'' + 2y' = x^2 e^{ix} \qquad (b)$$

e poi prenderemo la parte reale della sol.

omog. ass. $\quad y'' + 2y' = 0$

eq. caratt. $\quad \alpha^2 + 2\alpha = 0 \qquad \alpha = 0 \;,\; \alpha = -2$

int gen dell'omog $\quad y(x) = k_1 + k_2 e^{-2x}$

$h = i \qquad s = 0 \qquad m = 2$

$$\bar{y}(x) = e^{ix}(ax^2 + bx + c)$$

$$\bar{y}'(x) = i e^{ix}(ax^2 + bx + c) + e^{ix}(2ax + b) =$$

$$= e^{ix}\left(iax^2 + ibx + ic + 2ax + b\right)$$

$$\bar{y}''(x) = ie^{ix}\left(iax^2 + ibx + ic + 2ax + b\right) + e^{ix}\left(2iax + ib + 2a\right) =$$

$$= e^{ix}\left(-ax^2 - bx - c + 2aix + ib + 2iax + ib + 2a\right)$$

sostit. nell' eq.

$$\cancel{e^{ix}}\left(-ax^2 - bx - c + 4iax + 2ib + 2a + 2iax^2 + 2ibx + 2ic + 4ax + 2b\right) = x^2 \cancel{e^{ix}}$$

$$a(2i-1)x^2 + (4a + 4ai - b + 2ib)x + 2ib + 2b + 2a + 2ic - c = x^2$$

$$\begin{cases} a(2i-1) = 1 \\ 4a + 4ai - b + 2ib = 0 \\ 2ib + 2b + 2a + 2ic - c = 0 \end{cases} \qquad a = \frac{1}{-1+2i} = \frac{-1-2i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$-\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i - \frac{4}{5}i + \frac{8}{5} - b + 2ib = 0$$

$$b(2i-1) = -\frac{4}{5} + \frac{12}{5}i \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-\frac{4}{5} + \frac{12}{5}i}{-1+2i} = \frac{(-1-2i)\left(-\frac{4}{5} + \frac{12}{5}i\right)}{5}$$