CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

PUNTO MATERIALE sistema fisico le cui dimensioni sono piccole rispetto alla precisione con cui si interessa determinarne la posizione.

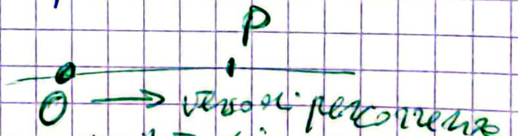
Esempio della neve

La cinematica del punto materiale si occupa di descrivere come varia la posizione di un punto materiale nel tempo.

POSIZIONE

Posizione: indica dove si trova un corpo.
In uno spazio vuoto tutte le posizioni sono equivalenti: la posizione di un corpo è relativa, e ha senso solo in relazione alla posizione di altri corpi presi come riferimento.
L'insieme dei riferimenti scelti per individuare la posizione dei corpi che si trovano in una certa ~~porzione~~ porzione di spazio viene detto sistema di riferimento.

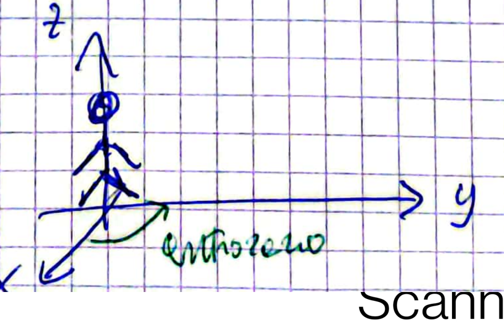
Esempio: moto rettilineo →



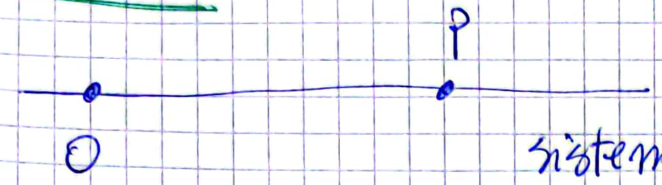
unità di misura
un solo numero reale, COORDINATA, è necessario a determinare la posizione di P

Esempio: moto piano
↓
Assi ortogonali
Sistema cartesiano

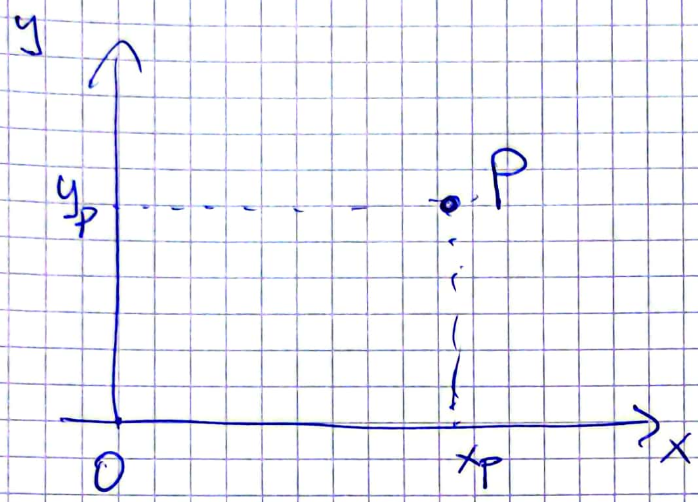
Sistema Levogiro



Dimensioni

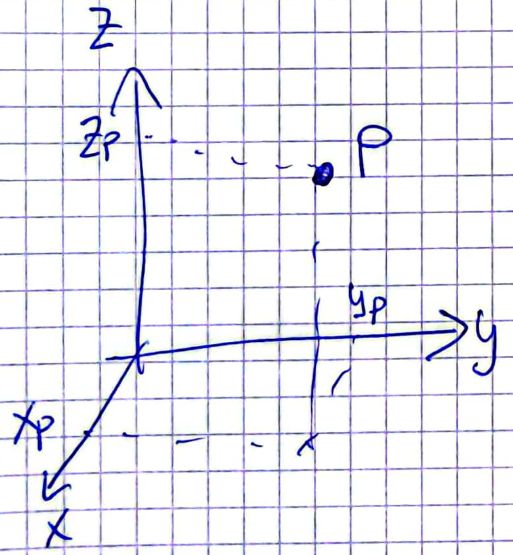


sistema 1-dim



(x_P, y_P)

sistema 2-dim



(x_P, y_P, z_P)

sistema 3-dim

Gradi di libertà

Numero di parametri indipendenti necessari a individuare la posizione di un sistema fisico.

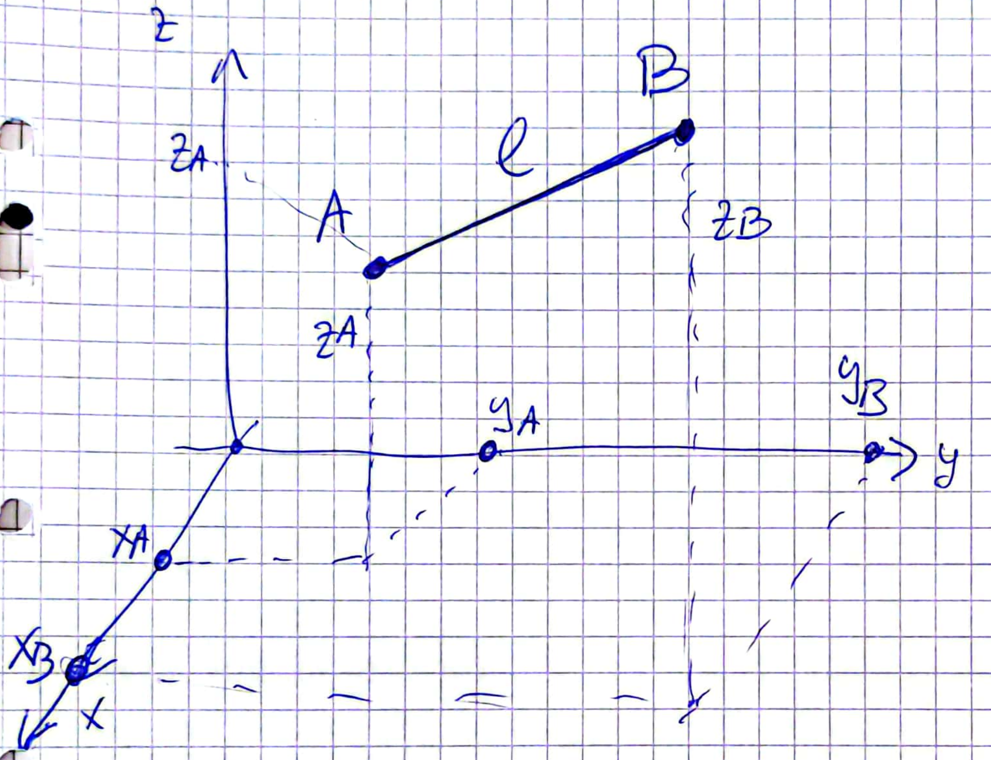
\# g.d.l. in generale $\neq$ \# dim. spazio Esempio sistema di 2 punti

Esempi di gradi di libertà

- N punti materiali, non vincolati, nello spazio.

$$3N$$

- Sbarretta rigida di sezione trascurabile, non vincolata.



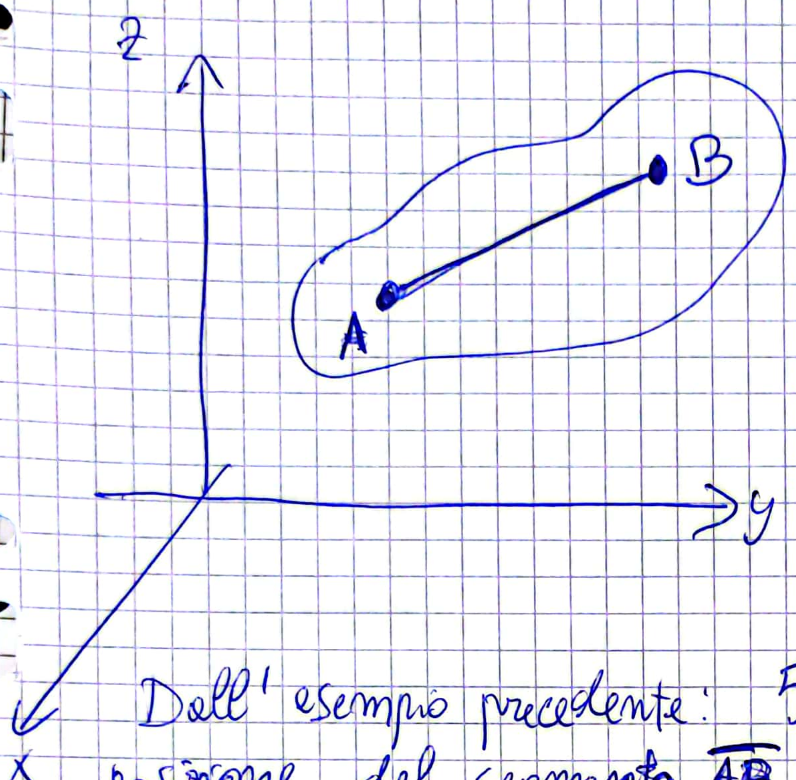
(x_A, y_A, z_A)

(x_B, y_B, z_B)

$$l = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

l è fissa perché la sbarretta è rigida per ipotesi. Note 5 delle 6 coordinate, la sesta è calcolabile tramite l. Il sistema ha 5 gradi di libertà.

• Sistema rigido libero di muoversi nello spazio

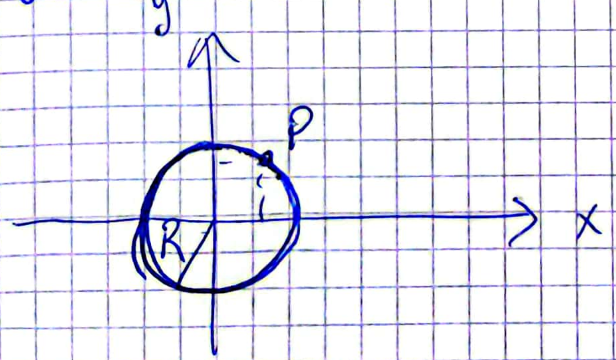


Dall'esempio precedente: 5 g.d.l. per specificare la posizione del segmento $\overline{AB}$.

Questi non bastano a specificare la posizione del sistema perché il sistema può ruotare intorno ad $\overline{AB}$.

La rotazione intorno ad $\overline{AB}$ può essere specificata tramite un solo angolo. Quindi il sistema ha 6 g.d.l.

• Punto materiale vincolato a percorrere una circonferenza di raggio R.



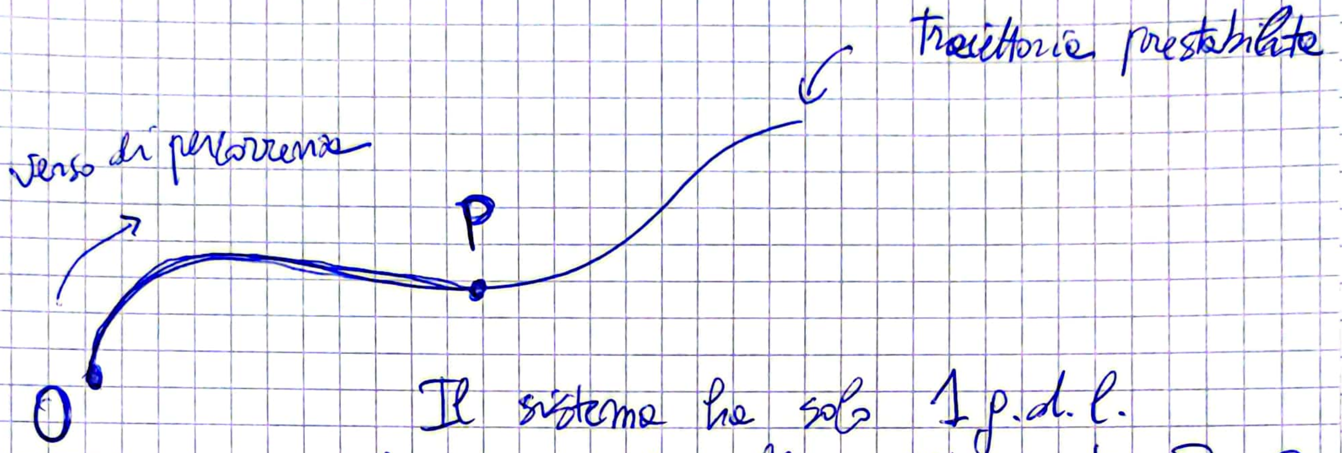
$$\sqrt{x_P^2 + y_P^2} = R$$

Il sistema ha 1 g.d.l.

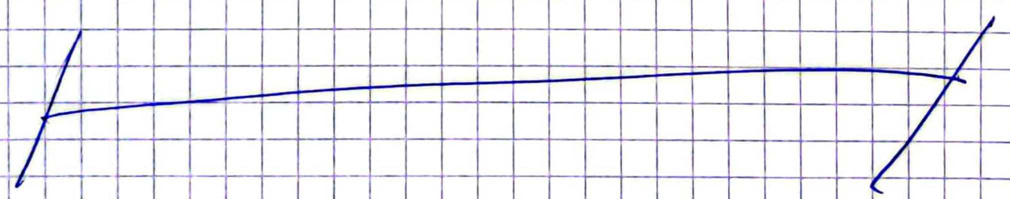
Osservazioni

- TRAIETTORIA luogo dei punti che il punto materiale occupa durante il suo moto.

ASCISSA CURVILINEA

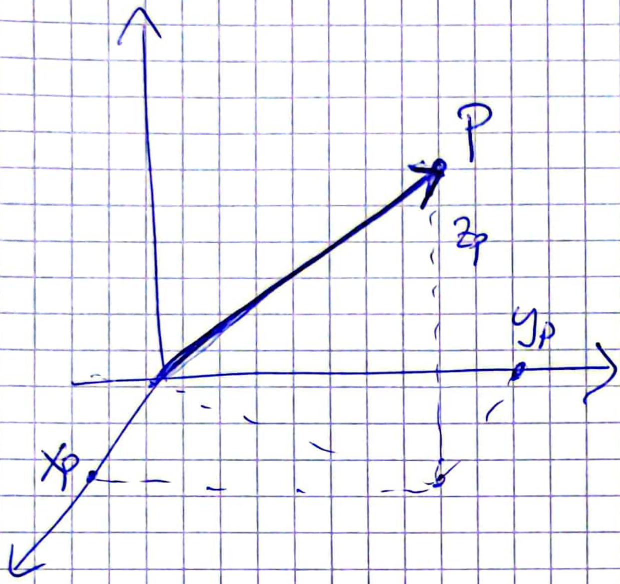


Il sistema ha solo 1 g.d.l.
che corrisponde alla distanza tra P e O
misurata lungo la curva.
Questa distanza, che corrisponde alla
lunghezza del tratto di curva OP, prende
il nome di ASCISSA CURVILINEA.



VETTORI

Posizione di un punto materiale nello spazio: 3 numeri

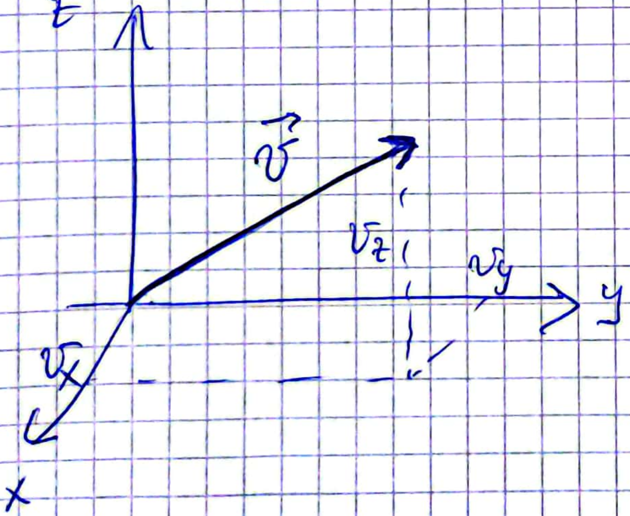


$P(x_P, y_P, z_P)$

grandezze vettoriali: modulo (intensità), direzione, verso

$\vec{v}$

modulo: $|\vec{v}|$ o v



$\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$

componenti di $\vec{v}$

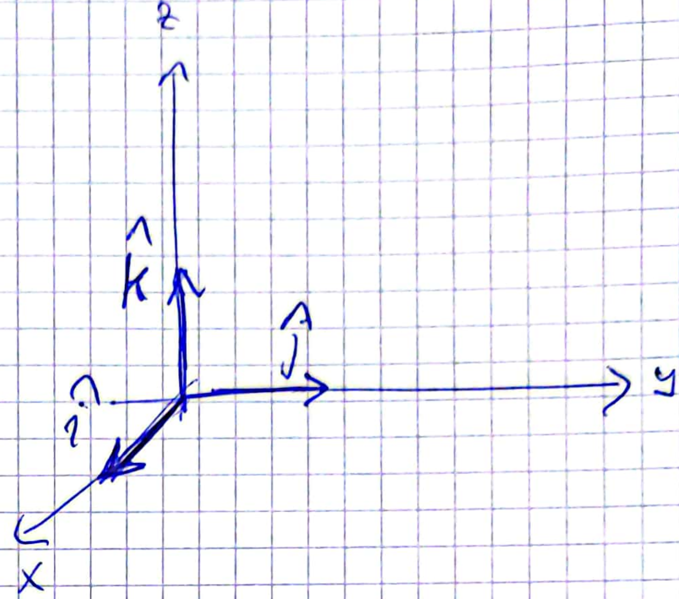
vettori di modulo unitario: VERSORI ($\hat{v}$)

- versori degli assi coordinati (vettori orientati come gli assi):

$\hat{i} \equiv (1, 0, 0)$

$\hat{j} \equiv (0, 1, 0)$

$\hat{k} \equiv (0, 0, 1)$



OPERAZIONI SUI VETTORI

Prodotto di un vettore $\vec{v}$ per un numero k

$$k\vec{v} = (kv_x, kv_y, kv_z)$$

modulo: kv

direzione: stessa di $\vec{v}$

verso: $\begin{cases} \text{quello di } \vec{v} \text{ se } k>0 \\ \text{quello opposto a } \vec{v} \text{ se } k<0 \end{cases}$

In particolare: $\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{v}$ è il versore di $\vec{v}$.

fai il disegno alla lavagna

Somma di vettori

- Consideriamo 2 vettori:

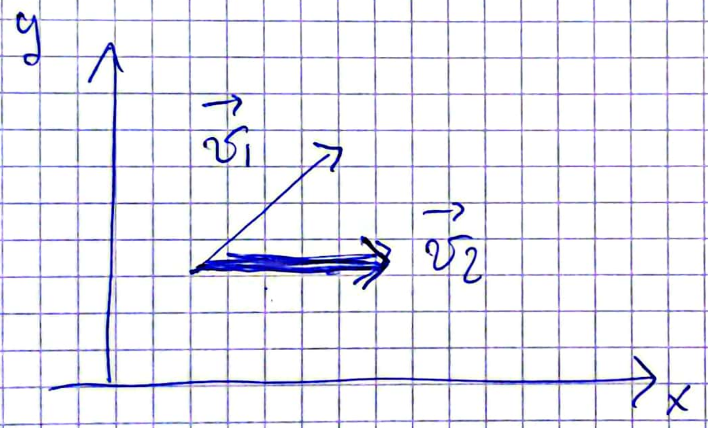
$\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ $\qquad$ $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$

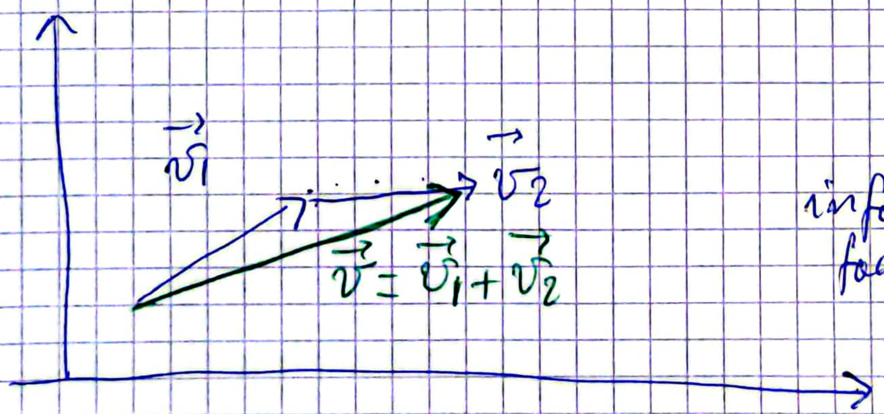
Allora:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad \text{SOMMA}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{1x} + v_{2x} \\ v_y = v_{2y} + v_{1y} \\ v_z = v_{1z} + v_{2z} \end{cases}$$

ESEMPIO

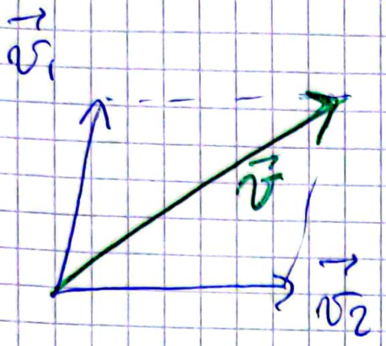




infatti si verifica facilmente:

$$\begin{cases} v_x = v_{1x} + v_{2x} \\ v_y = v_{1y} + v_{2y} \end{cases}$$

Nel caso di due vettori:



$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

Più in generale, per N vettori:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i$$

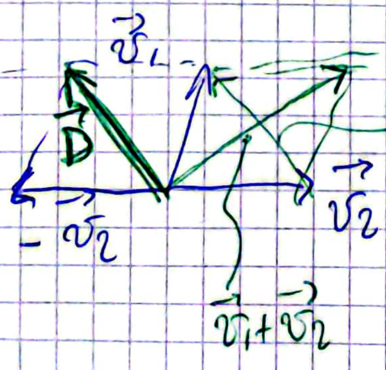
$$\begin{cases} v_x = \sum_{i=1}^{N} v_{ix} \\ v_y = \sum_{i=1}^{N} v_{iy} \\ v_z = \sum_{i=1}^{N} v_{iz} \end{cases}$$

Possiamo usare la somma per scrivere:

$$\boxed{\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}}$$

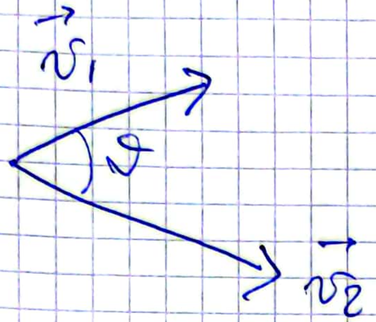
Differenza di due vettori

$$\vec{D} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$$



$\vec{D}$ corrisponde all'altra diagonale del parallelogramma

Prodotto scalare tra due vettori



$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\vartheta$$

Se $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ allora $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

Se $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ allora $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2$

In particolare:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$$

Altre proprietà:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}) \\ \vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}) \end{array}\right| \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} v_{2x} + v_{1y} v_{2y} + v_{1z} v_{2z}$$

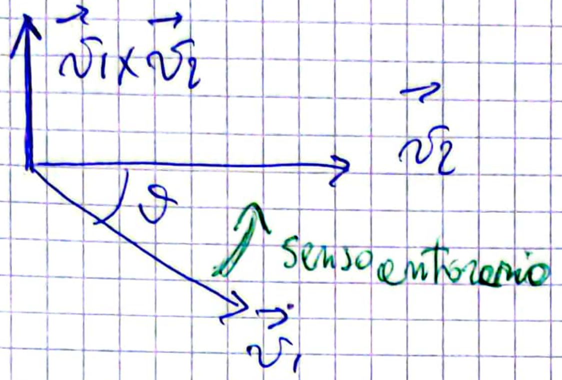
facile da dimostrare

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j} + v_{1z}\hat{k} \\ \vec{v}_2 = v_{2x}\hat{i} + v_{2y}\hat{j} + v_{2z}\hat{k} \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j} + v_{1z}\hat{k}) \cdot (v_{2x}\hat{i} + v_{2y}\hat{j} + v_{2z}\hat{k})$$

$i \cdot j = 0 \qquad i \cdot k = 0 \qquad j \cdot k = 0$

Prodotto vettoriale tra due vettori



$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = v_1 v_2 \sin\vartheta$$

Proprietà

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$$ facile da vedere graficamente

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \hat{i}\,(v_{1y} v_{2z} - v_{1z} v_{2y}) + \hat{j}\,(v_{1z} v_{2x} - v_{1x} v_{2z}) + \hat{k}\,(v_{1x} v_{2y} - v_{1y} v_{2x})$$

facile da verificare. Fallo in classe

ovvero:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0.$$

Legge oraria di un punto materiale

Punto materiale nello spazio: il moto è noto se conosciamo la sua posizione ad ogni ~~[illegible]~~ tempo.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ Legge oraria

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ $\vec{r} = (x, y, z)$ vettore posizione

Esempio: moto rettilineo uniforme

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = bt + c \\ z = 0 \end{cases}$$

Il punto si muove sempre sull'asse y, quindi su una retta.
Il moto si dice rettilineo.

$t = 0$: $\vec{r} = (0, c, 0)$ posizione iniziale

t_1: $y(t_1) = bt_1 + c$

t_2: $y(t_2) = bt_2 + c$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{b(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = b \quad \text{costante}$$

quindi

spazio percorso $= b \cdot$ tempo

oppure: $\frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo}} = b$ COSTANTE

Il moto in questo caso si dice rettilineo e uniforme.

$b =$ velocità del punto materiale.

Esempio: moto circolare uniforme

Punto materiale vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R che giace nel piano xy con raggio R. Il punto percorre archi uguali in tempi uguali. Scrivere la legge oraria in coordinate polari e cartesiane.

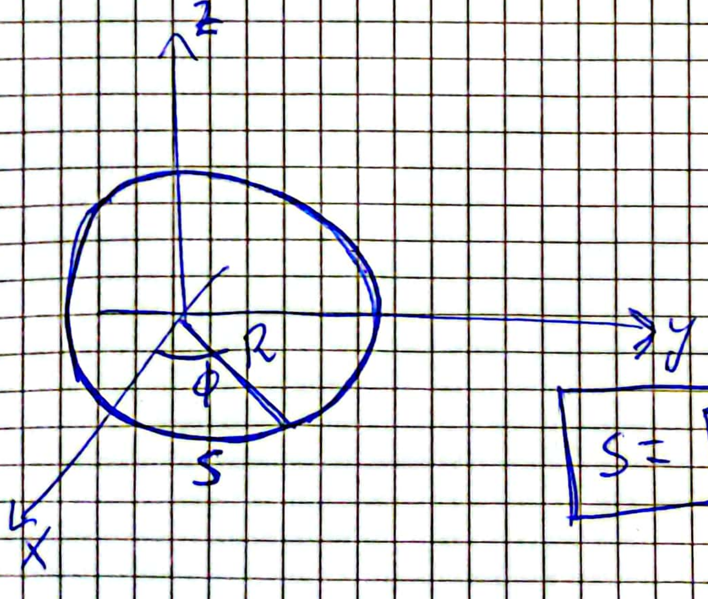
$$\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\phi \\ y = r \sin\vartheta \sin\phi \\ z = r \cos\vartheta \end{cases}$$

fai il disegno alla lavagna

Sul piano xy: $\vartheta = \pi/2$ da cui:

$$\begin{cases} x = r \cos\phi \\ y = r \sin\phi \\ z = 0 \end{cases}$$

Sulla traiettoria $r = R =$ costante.



$$\boxed{s = R\phi}$$

Il punto percorre archi uguali in tempi uguali, per cui:

$$s \propto t$$

Possiamo scrivere:

$$\boxed{s = R\phi = v t}$$

v = velocità

da cui:

$$\boxed{\phi = \frac{s}{R} = \frac{v}{R} t}$$

Il moto si dice circolare uniforme, perché v è costante.

Come prima:

t_1: $\phi(t_1) = \frac{v}{R} t_1$

t_2: $\phi(t_2) = \frac{v}{R} t_2$

da cui:

$$\frac{\phi(t_2) - \phi(t_1)}{\Delta t} = \frac{v/R\,(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v}{R}$$

Definiamo:

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}}$$

velocità angolare
angolo percorso nell'unità di tempo

nota

$$\boxed{\omega R = v} \Rightarrow \boxed{\phi = \omega t}$$

Traiettoria:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi = R\cos\phi \\ y = r\sin\phi = R\sin\phi \end{cases}$$

$$x^2+y^2 = R^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = R^2 \Rightarrow x^2+y^2=R^2$$

$\phi = \omega t$

Velocità media e istantanea

Consideriamo un punto materiale che si muove con legge oraria

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$ Velocità media

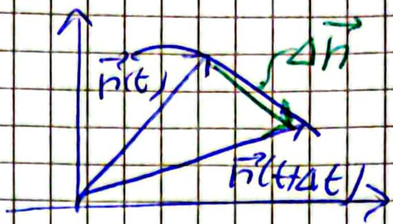
$\Delta\vec{r}$: vettore spostamento

$$v_x = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{\Delta t}, \quad v_y = \frac{y(t_2)-y(t_1)}{\Delta t}, \quad v_z = \frac{z(t_2)-z(t_1)}{\Delta t}$$

Componenti della velocità media

Definiamo la velocità istantanea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



ovvero:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

In termini di componenti:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \left(= x'(t)\right)$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} \left(= y'(t)\right)$$

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} \left(= z'(t)\right)$$

Esempio

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 2t+1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = 4t \\ v_y = 2 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{16t^2 + 4}$$ $|\vec{v}|$ non è costante

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{2t} \xrightarrow{t \to \infty} 0$$ per tempi grandi $v_y \ll v_x$

fai il disegno alla lavagna

Esempio: moto rettilineo uniforme (2)

$$\boxed{x(t) = x_0 + vt}$$ legge oraria del moto rettilineo uniforme

$v(t) = v$ costante.

x_0: posizione iniziale.

Esempio: velocità nel moto circolare uniforme

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = -\omega R\sin\omega t \\ v_y = \omega R\cos\omega t \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$|\vec{v}| = \sqrt{\omega^2 R^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} = \omega R$ come trovato in precedenza.

$|\vec{v}|$ è costante, e misura l'arco percorso nell'unità di tempo.

NOTA La velocità è tangente alla circonferenza.

Infatti, $\boxed{\vec{r}\cdot\vec{v} = 0}$ ad ogni tempo

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = r_x v_x + r_y v_y = -\omega R^2\cos\omega t\sin\omega t + \omega R^2\cos\omega t\sin\omega t = 0$$

NOTA

$|\vec{r}| = R$ costante

ma

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \neq 0$$

Affinché la derivata di un vettore sia nulla, è necessario che tutte le sue componenti siano costanti e non solo il suo modulo.

Accelerazione

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 \\ y(t) = 2t+1 \\ z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = 4t \\ v_y(t) = 2 \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x(t) = 4 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

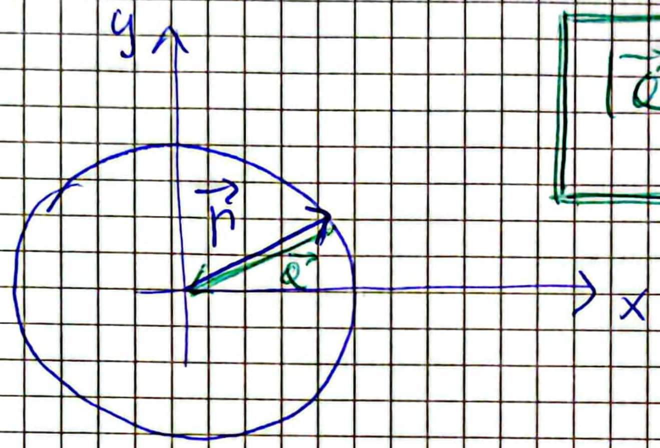
Esempio: accelerazione nel moto circolare uniforme

$$\begin{cases} v_x = -\omega R \sin\omega t \\ v_y = \omega R \cos\omega t \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = -\omega^2 R \cos\omega t \\ a_y = -\omega^2 R \sin\omega t \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 R \neq 0$ nonostante $|\vec{v}|$ costante

NOTA

$$\boxed{|\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}}$$



$\vec{a} \propto \vec{r}$

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$$

quindi $\vec{a}$ è diretto lungo $\vec{r}$, verso il centro

accelerazione centripeta

Inoltre: $\boxed{\vec{v} \perp \vec{a}}$

Infatti

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a_x v_x + a_y v_y = 0$$

- Formule di Poisson.

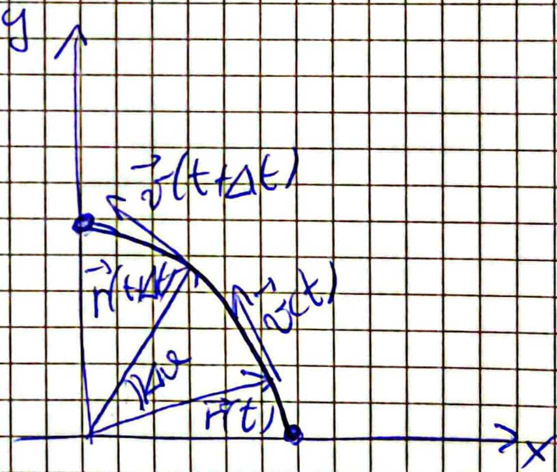
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

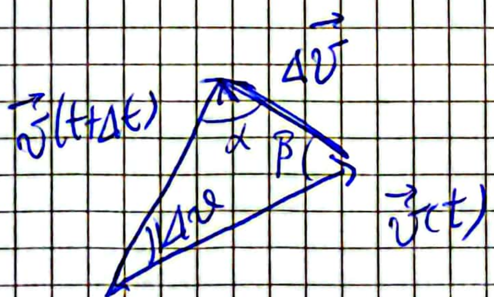
~~Assumiamo che $|\vec{r}|$ sia costante~~

Sappiamo che anche se $|\vec{r}|$ o $|\vec{v}|$ sono costanti, $\vec{v} \neq 0$ o $\vec{a} \neq 0$ (o entrambi $\neq 0$). Questo perché anche se il modulo del vettore è costante, le componenti del vettore possono cambiare nel tempo.

Per cominciare, consideriamo un vettore $\vec{v}$ di modulo costante, $\vec{v}$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$





$|\vec{v}(t)| = |\vec{v}(t+\Delta t)|$

triangolo isoscele

$\alpha = \beta$

$\Delta t \to 0, \Delta\vartheta \to 0$

$\alpha + \beta + \Delta\vartheta = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \pi \Rightarrow 2\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{v} \perp \vec{v}}$

accelerazione $\perp \vec{v}$

diretta verso il centro

Vediamo il modulo di $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$$

$$|\Delta \vec{v}| = 2|\vec{v}| \sin(\Delta \vartheta / 2)$$

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2|\vec{v}| \sin(\Delta \vartheta/2)}{\Delta t} = |\vec{v}| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(\Delta \vartheta/2)}{(\Delta \vartheta/2)} \cdot \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t}$$

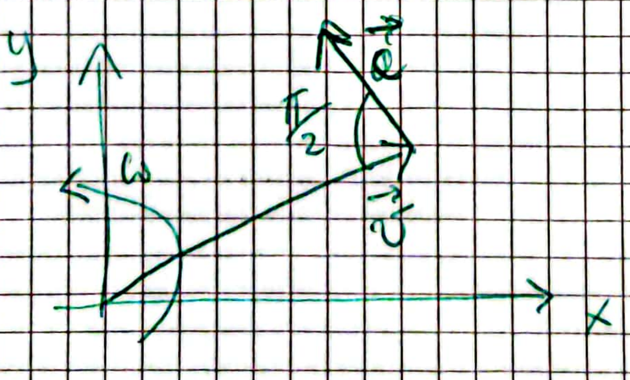
$$= |\vec{v}| \frac{d\vartheta}{dt} = |\vec{v}| \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{a}| = |\vec{v}| \omega}$$

Combinando i due risultati:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -v\omega \hat{r}}$$

Dato un vettore $\vec{v}$ di modulo costante, che ruoti con velocità angolare ω;



$\vec{a}$ ruotato nel senso in cui ruota $\vec{v}$.

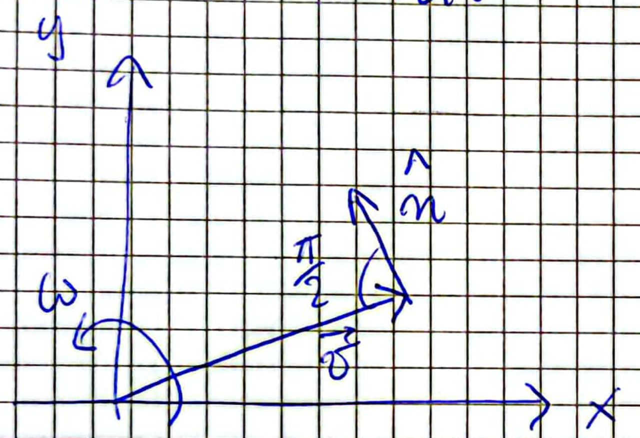
Vediamo il caso generale in cui $|\vec{v}|$ cambia:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{v})$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt}$$

e dal risultato precedente

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = -\omega v \hat{r} = \omega v \hat{n}$$



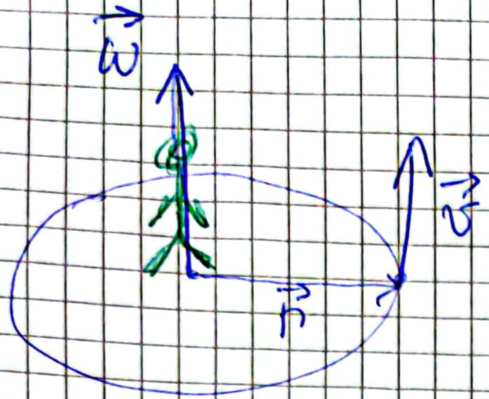
$\hat{n} \perp \vec{v}$ nel verso in cui $\vec{v}$ ruota.

Abbiamo quindi:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\omega\hat{n}}$$

$\vec{a}$ ha una componente $/\!/ \ \hat{v}$ e una $\perp \hat{v}$.

$\vec{\omega}$: modulo $d\theta/dt$, direzione dell'asse di rotazione, verso tale da vedere la rotazione procedere in senso antiorario.



$$\boxed{\vec{\omega} \times \vec{v} = v\,\omega\,\hat{n}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

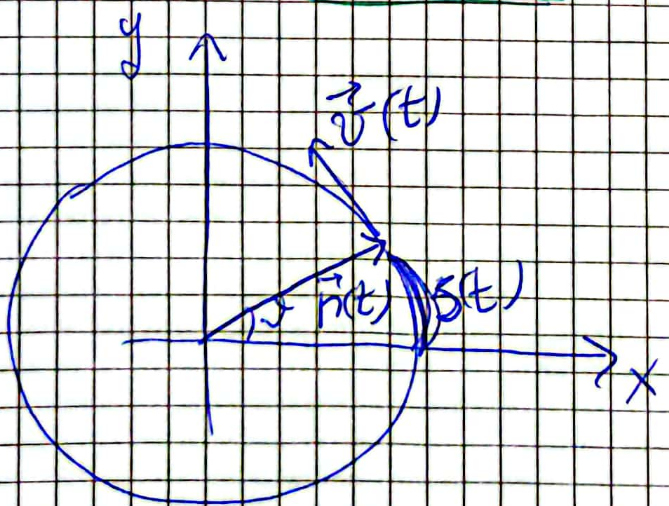
Quindi:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\hat{v} + \vec{\omega} \times \vec{v}}$$ Derivata di un vettore

Se $|\vec{v}|$ è costante:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}}$$ Formula di Poisson.

• Esempio: moto circolare •



Abbiamo già studiato il moto circolare uniforme.

$\vartheta = \vartheta(t)$

Copia questo disegno alla lavagna

$$\vec{r}(t) = R\,\hat{r}(t)$$

$$\vec{r}(t) = R\,\hat{r}(t)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(R\,\hat{r}\right) = \frac{dR}{dt}\hat{r} + R\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$= \frac{dR}{dt}\hat{r} + R\,\omega\,\underbrace{\hat{n}}_{\hat{v}}$$

denotato con $\hat{v}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \omega R\,\hat{v}}$$

$\vec{v}$ perpendicolare a $\vec{r}$
quindi tangente alla traiettoria

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\,\omega\,\underbrace{\hat{n}}_{-\hat{r}}$$

$$v = \omega R$$

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

quindi:

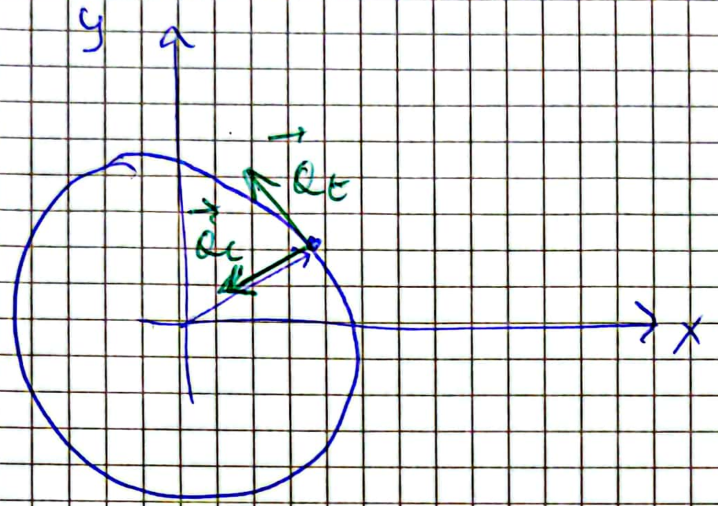
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= R\frac{d\omega}{dt}\hat{v} - \omega^2 R\,\hat{r} \\ \vec{a} &= \frac{dv}{dt}\hat{v} - \omega^2 R\,\hat{r} \end{aligned}}$$

Accelerazione
moto circolare

Notiamo che l'accelerazione ha due componenti:

- $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\hat{v}$ Accelerazione tangenziale

$\vec{a}_c = -\omega^2 R\hat{r}$ Accelerazione centripeta

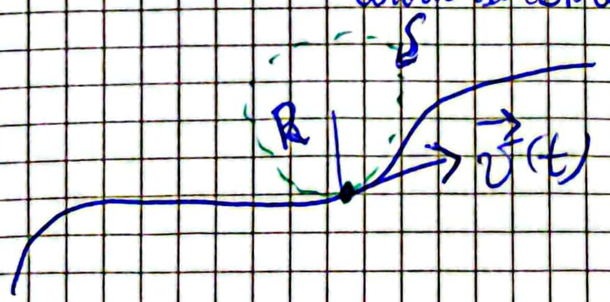


Caso particolare: moto circolare uniforme.

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a}_t = 0$$

in questo caso otteniamo solo l'accelerazione centripeta.

- Moti piani su traiettorie qualsiasi:



R: raggio di curvatura

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$

$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\hat{v}$

$\vec{a}_c = -\omega^2 R\hat{r} = \omega^2 R\hat{n}$

Moto uniformemente accelerato

Consideriamo il moto rettilineo di un punto materiale che si muove con accelerazione costante. Supponiamo che il moto avvenga lungo l'asse **x**.

Abbiamo:

$$a_x = a \quad , \; a_y = a_z = 0$$

Condizioni iniziali: $\begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ $\quad v_y(0) = v_z(0) = 0$, $\quad y(0) = z(0) = 0$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x dt \Rightarrow \int_{v_x(0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t a_x dt$$

$$\Rightarrow v_x(t) - v_x(0) = a_x t \Rightarrow \boxed{v_x(t) = v_x(0) + a_x t}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t v_x(t) dt = \int_0^t [v_x(0) + a_x t] dt$$

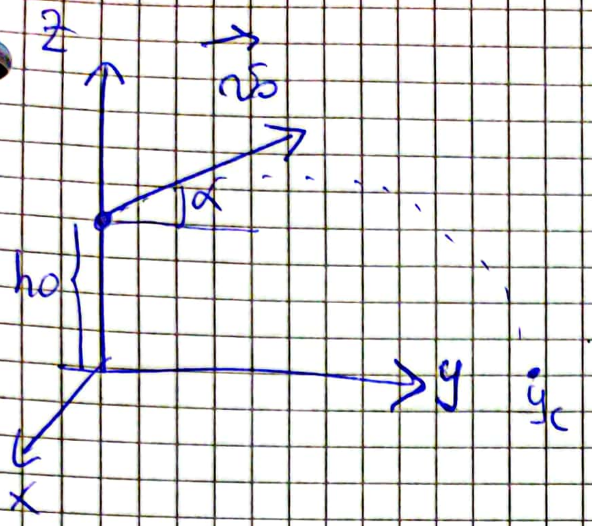
$$\Rightarrow x(t) - x(0) = v_x(0) t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x(0) + v_x(0) t + \frac{1}{2} a_x t^2}$$

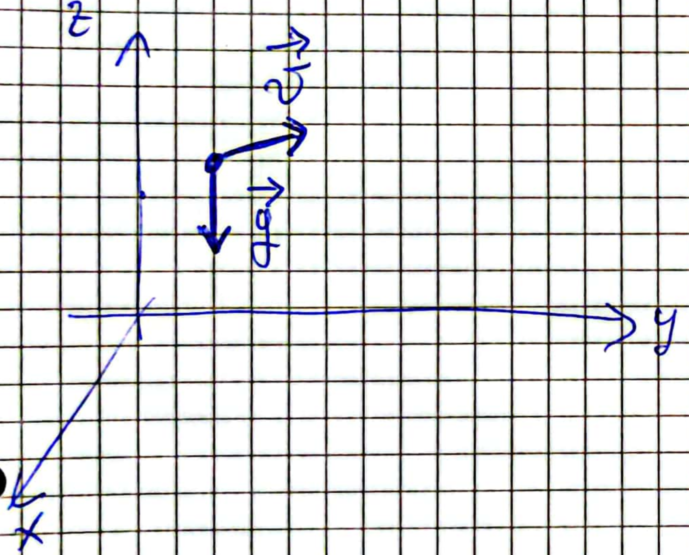
Legge oraria del moto uniformemente accelerato

Esercizio: calcolare la legge oraria per le coordinate y e z

Moto del proiettile



Determiniamo la legge oraria, la distanza y_c dal punto iniziale dove il punto materiale tocca terra, e il tempo t_c necessario affinché il punto materiale arrivi in y_c



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

La condizione iniziale è:

$$\begin{cases} v_x(0) = 0 \\ v_y(0) = v_0 \cos\alpha \\ v_z(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = h_0 \end{cases}$$

Ovviamente $x(t) = 0$ ad ogni tempo.

Integrando abbiamo:

$$\begin{cases} v_y(t) = v_y(0) = v_0 \cos\alpha \\ v_z(t) = a_z(t) + v_z(0) = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

Integrando ancora:

$$\begin{cases} y(t) = v_y(0)\, t + y(0) = v_0 t \cos\alpha \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha + h_0 \end{cases}$$ Legge oraria

Calcoliamo y_c: $\quad y_c = v_0 t_c \cos\alpha$

$$z(t_c) = 0 = -\frac{1}{2} g t_c^2 + v_0 t_c \sin\alpha + h_0$$

$$\frac{1}{2} g t_c^2 - v_0 t_c \sin\alpha - h_0 = 0$$

$$t_c = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2 h_0 g}}{g}$$

$$= \frac{v_0}{g} \sin\alpha \pm \frac{v_0}{g} \sin\alpha \sqrt{1 + \frac{2 h_0 g}{v_0^2 \sin^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_c = \frac{v_0}{g} \sin\alpha \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 h_0 g}{v_0^2 \sin^2\alpha}} \right]}$$

In particolare se $\alpha = 0$: $\quad \boxed{t_c = \sqrt{\frac{2 h_0}{g}}}$

Noto t_c, possiamo calcolare y_c:

$$y_c = v_0 t_c \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{y_c = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 h_0 g}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right]}$$

In particolare, se $\alpha = 0$:

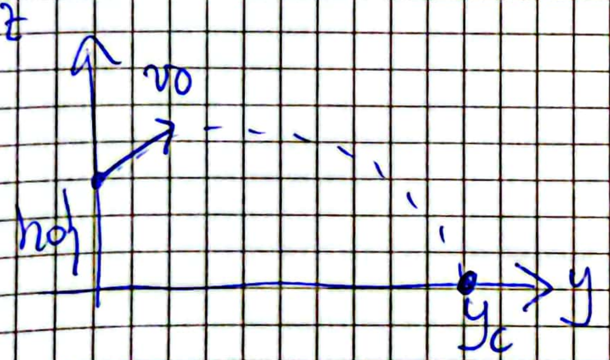
$$t_c = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \Rightarrow \boxed{y_c = v_0 \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

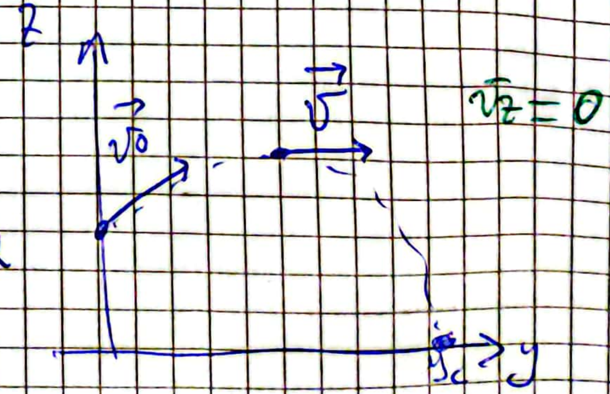
Determiniamo l'equazione della traiettoria:

$$t = \frac{y}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \frac{y}{v_0 \cos\alpha} + h_0$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -\frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + (\operatorname{tg}\alpha) y + h_0}$$

Traiettoria parabolica





Calcoliamo la quota massima.

$$0 = v_z(\bar{t}) = -g\bar{t} + v_z(0) = -g\bar{t} + v_0 \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \bar{t} = (v_0/g) \sin\alpha$$

Il tempo ~~al~~ $\bar{t}$ per raggiungere la quota massima è

$$\bar{t} = \frac{v_0}{g}\sin\alpha.$$

$$y_M(\bar{t}) = (v_0\cos\alpha)\,\bar{t} \Rightarrow y_M = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$z_M = -\frac{1}{2}g\bar{t}^2 + v_0\sin\alpha\,\bar{t} + h_0$$

$$\Rightarrow \boxed{z_M = h_0 + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}}$$ Quota massima

Esercizio: Calcolare il tempo necessario affinché il punto materiale tocchi il suolo, nel caso in cui $\alpha = \pi/2$