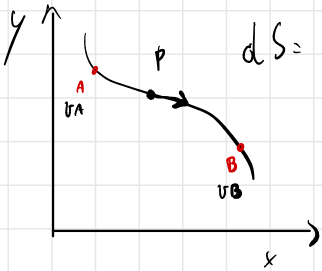
$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dL = \vec{F} \times d\vec{S} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \times d\vec{S} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$



$$dS = \vec{v}\,dt$$

$$v^2 = \vec{v} \times \vec{v} \qquad \frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow v\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(v)^2}{dt} \Rightarrow \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}dv^2 = \frac{dv^2}{2}$$

$$dL = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$L = \int_B^A d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_{v_A}^{v_B} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \left[\frac{mv^2}{2}\right]_{v_A}^{v_B}$$

$$L_{AB} = \frac{mv^2_B}{2} - \frac{mv^2_A}{2} = \Delta K$$

Energia cinetica $\Rightarrow$ $K = \dfrac{mv^2}{2}$

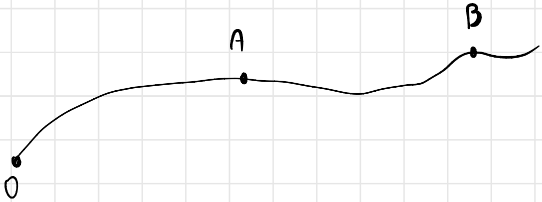
Vale sempre $\Rightarrow$ $\boxed{L_{AB} = K_B - K_A}$ $\rightarrow$ Il lavoro è uguale alla variazione dell'energia cinetica della particella

In una certa regione nello spazio, abbiamo un **campo di forze** se in quella regione c'è una forza diversa da zero.

$$L_{AB} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{S} = \underbrace{V_{(B)} - V_{(A)}}_{\Downarrow \text{ funzione potenziale}} \Rightarrow \text{Solo se } F \text{ è conservativa}$$

In base alla definizione , dato che **dS** è calcolato lungo la traiettoria, il lavoro può dipendere dalla traiettoria.
Diremo che la forza è **conservativa** se il lavoro è indipendente dalla traiettoria, ma dipende solo dal punto iniziale e finale dello spostamento.

Posso scrivere il lavoro tra a e b come la differenza del potenziale tra questi due punti, infatti V(a) rappresenta la **funzione potenziale** di a.



$$L_{OB} = L_{OA} + L_{AB}$$

$$\Rightarrow L_{AB} = L_{OB} - L_{OA} = V(B) - V(A)$$

Quando la forza è conservativa, il lavoro per spostare la particella da A a B è dato dalla differenza del lavoro fatto per spostare la particella dal riferimento a B e del lavoro fatto per spostare la particella dal riferimento a A.
La funzione potenziale è definita sempre a meno di una costante.

$$V(B) = L_{OB} \qquad V(A) = L_{OA}$$

$$L_{AB} = \underbrace{K_B - K_A}_{\text{sempre}} = \underbrace{V_{(B)} - V_{(A)}}_{\text{conserv.}} \Rightarrow K_B - V_B = K_A - V_A$$

$$\Rightarrow \boxed{K - V} = \text{COSTANTE SE } F \text{ È CONSERVATIVA}$$

La forza conservativa mantiene costante la differenza tra l’energia cinetica e la funzione potenziale

Energia potenziale $\Rightarrow U = -V$

Se F è conservativa $\Rightarrow F = K + U =$ COSTANTE

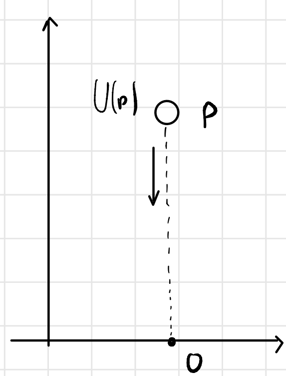
Energia meccanica $\Rightarrow E = K + U$

La forza conservativa mantiene costante l’energia meccanica.

Quindi l’energia potenziale misura il lavoro che il campo di forza compie per spostare la particella dal punto P fino al punto di riferimento :

$$\boxed{U(p) = L_{po}}$$

$\Rightarrow$ generalmente O è il suolo



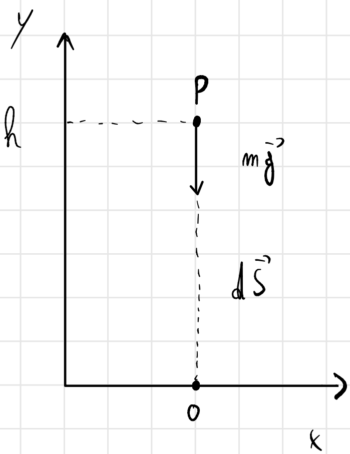
$$L_{AB} = V_{(B)} - V_{(A)} = U_{(A)} - U_{(B)} = -\left(U(B) - U(A) \right)$$

$$dL = dV = -dU$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = dV \Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} V_L \Rightarrow \boxed{\vec{F} - \vec{\nabla} U}$$

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{dU}{dx} \\ F_y = -\dfrac{dU}{dy} \\ F_z = -\dfrac{dU}{dz} \end{cases}$$

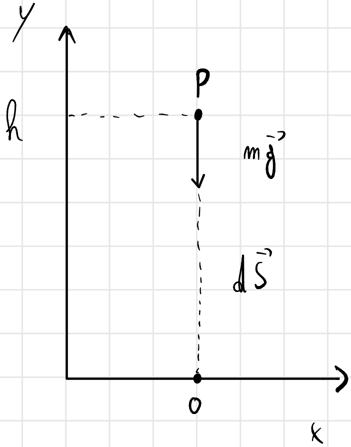
La forza peso è sempre conservativa



$$U(p) = L_{p0} = L_{h0} = \int_h^0 m\vec{g} \cdot d\vec{S}$$

$m\vec{g}\, d\vec{S} = -mg\,dy$ dato che lo spostamento avviene solo lungo l'asse y

$$U_{(p)} = -\int_h^0 mg\,dy = -mg \int_h^0 dy = -mg(0-h) = mgh$$



Voglio calcolare la velocità con cui la particella tocca il suolo

$$v_0 = 0$$

$$E_i = mgh$$

$$E_F = \frac{1}{2} m v_F^2 + 0 \quad // \quad L = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_F^2$$

$$\boxed{E_i = E_F} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_F^2$$

Hp

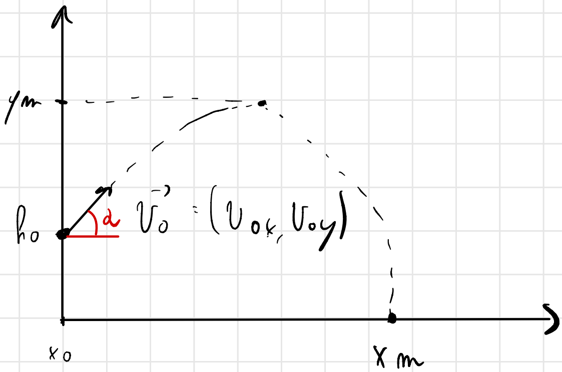
$$U_{(h)} = mgh \qquad E = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{E_F} + \underbrace{mgh}_{E_i}$$

$$V_F^2 = 2gh$$

$$V = \sqrt{2gh}$$

Esercizio

Suppongo di lanciare una palla con una velocità iniziale vo, utilizzare la conservazione dell'energia per calcolare ym la quota massima che può raggiungere la particella e la gittata massima



1) $E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + m g h$

Dato che in y_m si ha $v = 0$

$$E = m g y_m \Rightarrow y_m = \frac{E}{mg}$$

In $x_0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m v^2 + 0 \Rightarrow y_m = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{m g} = \boxed{\frac{v^2}{2g}}$

2) In corrispondenza di x_m si ha che $y = 0$

$$t_{max} \Rightarrow (v_0 \sin\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$t \left(V_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t\right) = 0 \rightarrow t = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{2 V_0 \sin\alpha}{g}$$

Calcolo la gittata $x(t_{max})$

$$\Rightarrow \quad x(t_m) = (V_0 \cos\alpha) \cdot \frac{2 V_0 \sin\alpha}{g}$$

$$= \boxed{\frac{2 V_0^2 (\cos\alpha \sin\alpha)}{g}}$$