MOTO PARABOLICO

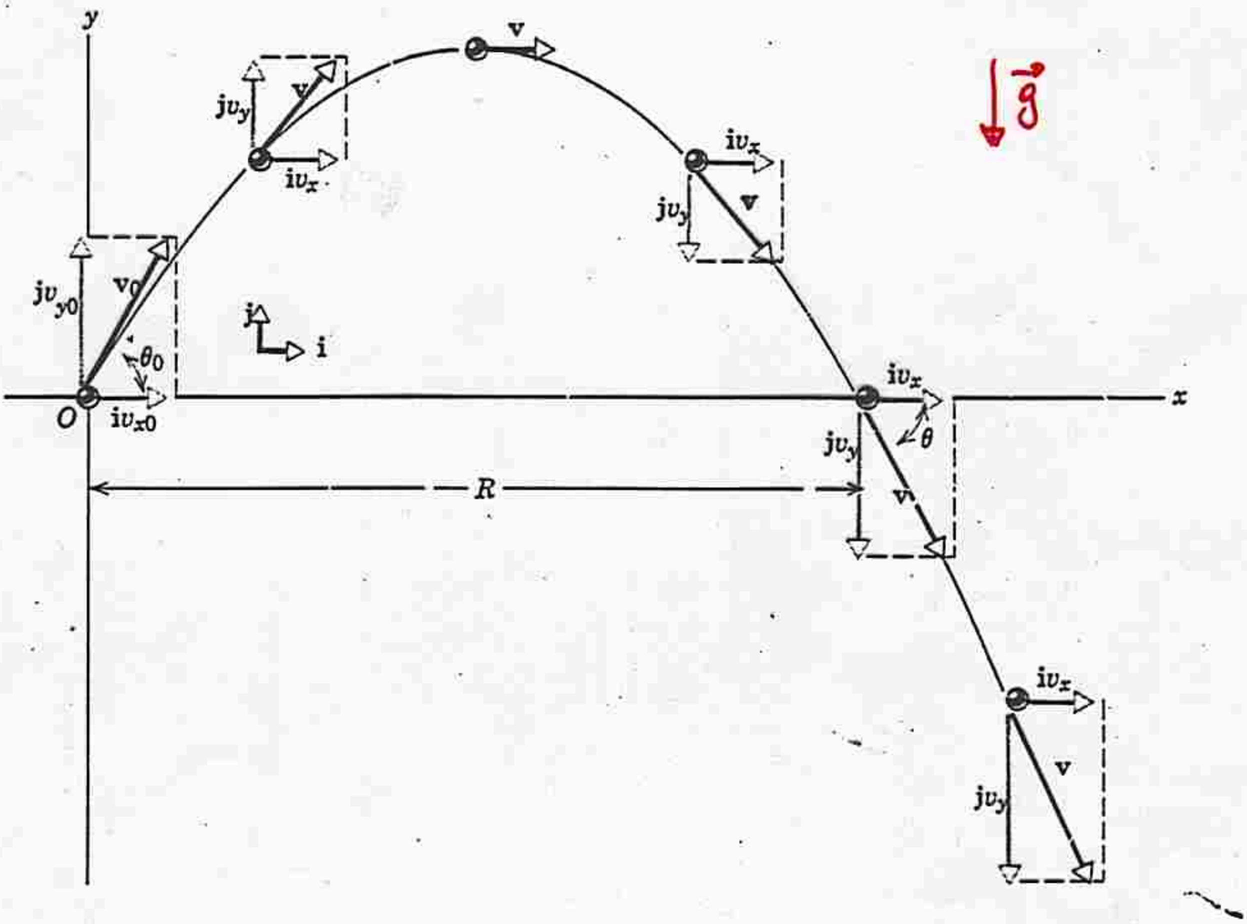


Figura 4-2 La traiettoria di un proiettile, la velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ e i suoi vettori componenti, nonché la velocità $\mathbf{v}$ e i suoi componenti in cinque istanti successivi. Si noti che $v_x = v_{x0}$ per l'intero percorso. La distanza R è chiamata *gittata*.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = 0\hat{x} - g\hat{y} + 0\hat{z} \\ \vec{v}_0 = v_{x_0}\hat{x} + v_{y_0}\hat{y} + 0\hat{z} \\ \vec{r}_0 = 0\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z} \end{cases} ; \qquad \begin{cases} v_{x_0} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{y_0} = v_0 \sin\theta_0 \end{cases}$$

- Equazioni orarie

$$\begin{cases} x = v_{x_0} t & \text{moto rettilineo uniforme} \\ y = v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2 & \text{moto rettil. unif. accelerato} \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_{x_0} & a_x = 0 \\ v_y = v_{y_0} - gt & a_y = -g \end{cases}$$

- Traiettoria

$$t = x / v_{x_0}$$

$$y = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{x_0}^2} \qquad \text{parabola}$$

- Massima quota e tempo di salita t_s

$$v_y(t_s) = 0 \Rightarrow v_{y_0} - g t_s = 0 \Rightarrow \boxed{t_s = v_{y_0}/g}$$

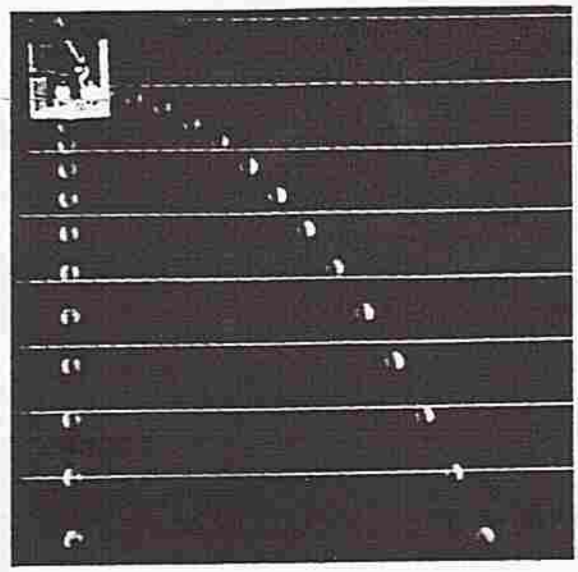
$$y_{MAX} = y(t_s) = \frac{v_{y_0}^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{y_0}}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_{y_0}^2}{g}$$

- Massima distanza o gittata

$$y(x_{max}) = 0 \Rightarrow \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{x_0}^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{MAX} = 2 \frac{v_{x_0} v_{y_0}}{g}$$

MOTO PARABOLICO



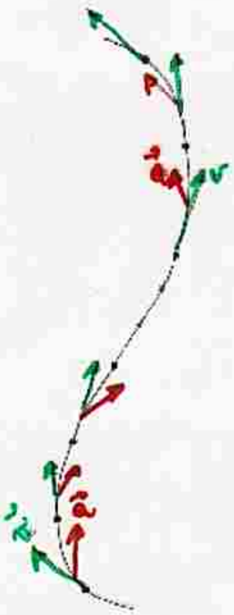
Cronofotografia che mostra una palla abbandonata a sé stessa e un'altra lanciata orizzontalmente allo stesso istante. A ogni istante le loro posizioni verticali sono identiche, la qual cosa indica che il moto verticale e il moto orizzontale sono indipendenti. L'intervallo di tempo tra due immagini consecutive è (1/30) s e la distanza tra due fili orizzontali consecutivi è 15,25 cm.

Ad ogni istante : posizioni verticali uguali

⇓

moto orizzontale e moto verticale
<u>indipendenti</u>

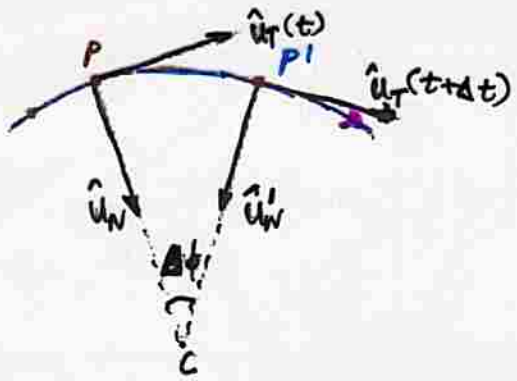
ACCELERAZIONE NEL MOTO PIANO

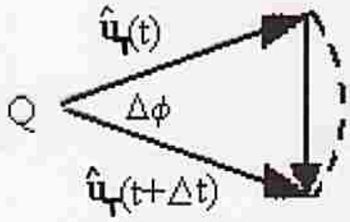


$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(v\,\hat{\mathbf{v}}) = \frac{d}{dt}(v\,\hat{\mathbf{u}}_T) =$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + v\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt}$$

Derivata del versore $\hat{\mathbf{u}}_T$:





$\Delta \hat{u}_T = \hat{u}_T(t+\Delta t) - \hat{u}_T(t)$

Al limite per $\Delta t \to 0$ $\quad \Delta\hat{\mathbf{u}}_T = \hat{\mathbf{u}}_T(t+\Delta t) - \hat{\mathbf{u}}_T(t) \quad \to \quad d\hat{\mathbf{u}}_T$

- La corda Δu coincide con l'arco $\Delta s = |\hat{\mathbf{u}}_T|\Delta\phi$
- La direzione di $\Delta\hat{\mathbf{u}}_T$ è ortogonale a $\hat{\mathbf{u}}_T$

$$\Downarrow$$

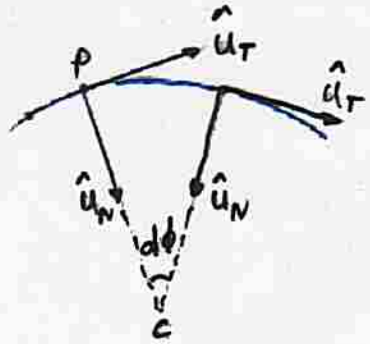
$$d\hat{u}_T = |d\hat{\mathbf{u}}_T| = |\hat{\mathbf{u}}_T(t)|\,d\phi = d\phi$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\hat{\mathbf{u}}_N$$

N.B.:

$$\hat{u}_N \equiv \hat{u}_R$$

coincide con la direzione che punta verso il centro della traiettoria nel punto P (Centro C della circonferenza osculatrice, tangente alla traiettoria nel punto P)



$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + v\frac{d\phi}{dt}\hat{\mathbf{u}}_N$$

Inoltre: $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$ (R = *CP* = raggio di curvatura)

In definitiva:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_T + \vec{\mathbf{a}}_N =$$
$$= a_T\hat{\mathbf{u}}_T + a_N\hat{\mathbf{u}}_N$$

<u>Accelerazione tangenziale</u> : $a_T = \frac{dv}{dt}$

<u>Accelerazione normale (o radiale o centripeta)</u> $a_N = \frac{v^2}{R}$

Casi particolari:

- TRAIETTORIA RETTILINEA

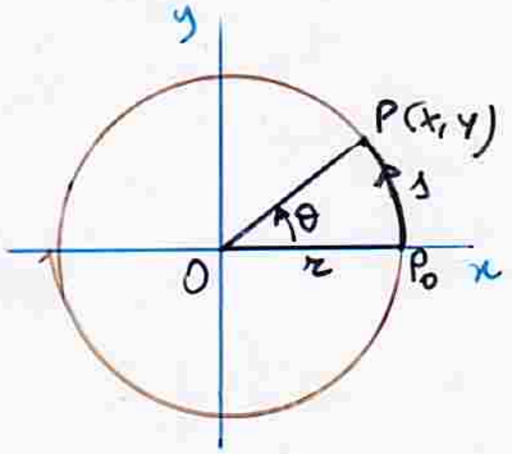
$$R \to \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{R\to\infty} a_N = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}_T = a_T\hat{u}_T$$

- MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$v = \text{cost} \Rightarrow a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_N = a_N\hat{u}_N$$

CINEMATICA ROTAZIONALE

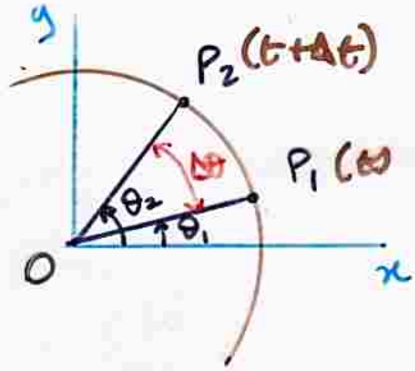
IN UN PIANO



- Posizione angolare

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(radianti)}$$

$$\theta = \theta(t) \qquad s = s(t)$$



- Velocità angolare

$$\theta_1 = \theta(t_1) \; ; \quad \theta_2 = \theta(t_2)$$

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{(rad/sec)}$$

$$\omega = \omega(t)$$

- Accelerazione angolare

$$\omega_1 = \omega(t_1) \; , \quad \omega_2 = \omega(t_2)$$

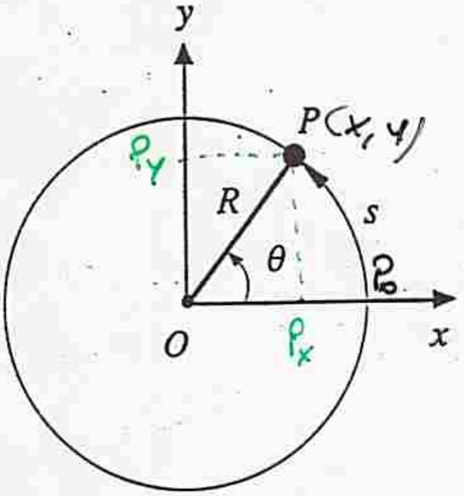
$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\text{(rad/sec}^2\text{)}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Traiettoria : circonferenza



Velocità : $v = |\vec{v}| = \text{costante}$

Descrizione :

arco $s(t)$

angolo $\theta(t)$

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R} \qquad \text{(radianti)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \text{cost} \Rightarrow \qquad s(t) = s_0 + vt \qquad \text{eq. oraria}$$

Definizione : Velocità angolare ω

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} = \text{cost}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cost} \Rightarrow \qquad \theta(t) = \theta_0 + \omega t \qquad \text{eq. oraria}$$

• Introducendo sist. rif. cartesiano ortogonale Oxy

$$x(t) = R\cos[\theta(t)] \qquad y(t) = R\sin[\theta(t)]$$

- $\omega = \text{cost}$ moto circolare uniforme

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

- $\alpha = \text{cost}$ moto circolare unif. accelerato

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

- Cinem. lineare $\Leftrightarrow$ Cinem. rotazionale

$$s = \theta R$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \Rightarrow \boxed{v = \omega R}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \Rightarrow \boxed{a_T = \alpha R}$$

$$a_R = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{a_R = \omega^2 R}$$

- Descrizione angolare :

problema bidimensionale $\rightarrow$

$\rightarrow$ problema unidimensionale