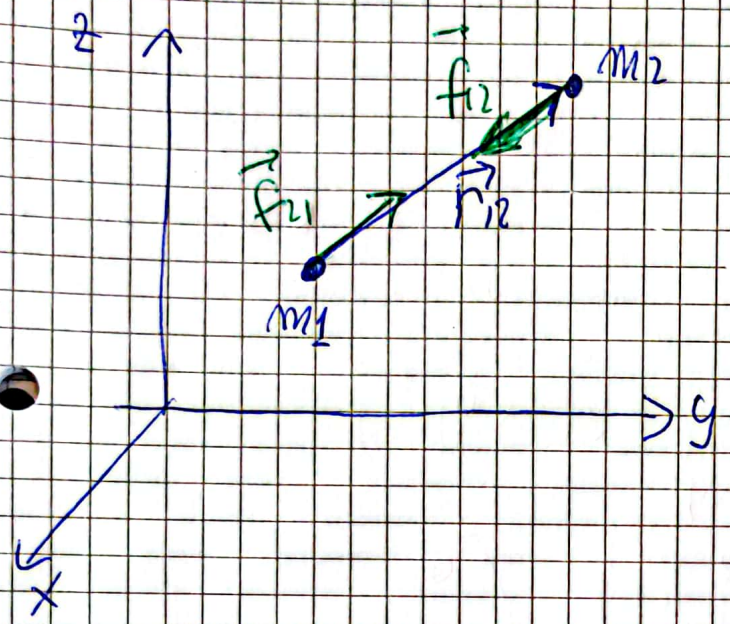
Legge della gravitazione universale

Date due masse puntiformi, m_1 e m_2, la forza di attrazione gravitazionale ~~[illegible]~~ che m_1 esercita su m_2 è:



$$\boxed{\vec{f}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}}$$

forza che la massa m_1 esercita su m_2

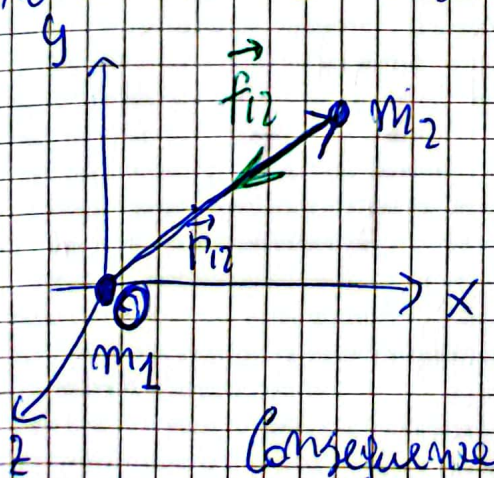
Inoltre:

$$\boxed{\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}}$$

$$G = 6.66 \times 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Costante di gravitazione universale

NOTA $\vec{f}_{12}$ è una forza centrale, in quanto sempre diretta verso lo stesso punto (m_1 in questo caso).
Di conseguenza, il momento angolare di m_2 rispetto alla posizione di m_1 si conserva durante il moto. Infatti:



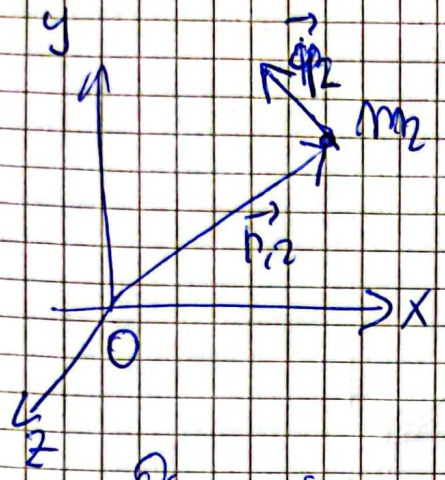
$$\vec{m}_0 = \vec{r}_{12} \times \vec{f}_{12} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_0 = \text{costante}}$$

Conseguenza: il moto di m_2 è piano.

Scanned with CamScanner

Infatti, calcoliamo il $\vec{p}_0$ di m_2. Assumiamo che al un certo istante $\vec{p}_2$ sia nel piano xy. Allora:



$$\vec{p}_2 = \vec{r}_{12} \times m_2 \vec{v}_2$$
$$= m_2 \, \vec{r}_{12} \times \vec{v}_2$$

Osserviamo che $\vec{v}_2$ e $\vec{r}_{12}$ sono nel piano xy, quindi

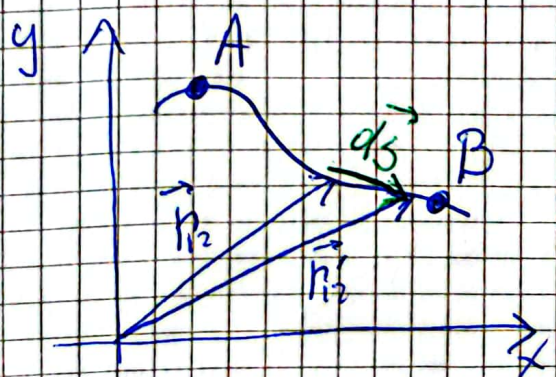
$$(\vec{r}_{12} \times \vec{v}_2)_x = y \underbrace{v_{2z}}_{0} - \overset{0}{z} v_{2y} = 0$$

$$(\vec{r}_{12} \times \vec{v}_2)_y = \underbrace{z}_{0} v_{2x} - x \underbrace{v_{2z}}_{0} = 0$$

$$(\vec{r}_{12} \times \vec{v}_2)_z = x v_{2y} - y v_{2x} \neq 0$$

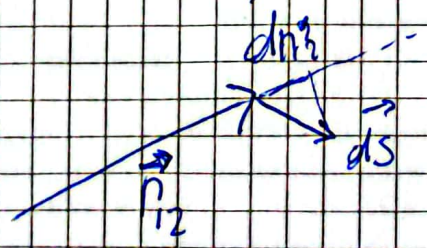
Vediamo quindi che $\vec{p}_0$ è lungo l'asse z. Poiché $\vec{p}_0$ è costante, rimarrà lungo l'asse z per tutto il moto, quindi $\vec{v}_2$ rimarrà nel piano xy. Concludiamo dunque che il moto di m_2 è piano.

- Energia potenziale del campo gravitazionale -



$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = -G m_1 m_2 \int_A^B \frac{\hat{r}_{12} \cdot d\vec{s}}{r_{12}^2}$$

$$\hat{r}_{12} \cdot d\vec{s} = dr_{12}$$



$$L_{AB} = -G m_1 m_2 \int_A^B \frac{dr_{12}}{r_{12}^2}$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \quad L_{AB} = -G m_1 m_2 \int_A^B \frac{dr_{12}}{r_{12}^2}$$

$$= -G m_1 m_2 \left[-\frac{1}{r_B} - \left(-\frac{1}{r_A}\right) \right]$$

$$= G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_{AB} = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)}$$

Lavoro compiuto dalla forza gravitazionale per spostare m_2 da r_A a r_B.

Notiamo che L_{AB} dipende solo dalle posizioni iniziale e finale di m_2, non dal percorso seguito per andare da A a B. La forza gravitazionale è quindi $\boxed{\text{CONSERVATIVA.}}$ Possiamo quindi introdurre l'energia potenziale gravitazionale

$$V_B - V_A = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = L_{AB} \qquad \boxed{U = -V}$$

$$\Rightarrow \quad U_B - U_A = -\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = -L_{AB}$$

$$= -G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

differenza di en. potenziale definita a meno di una cost.

$$U = -\frac{G m_1 m_2}{r} + cost.$$

Assumiamo che $\boxed{r_A = \infty}$: in questo caso, $L_{\infty B}$ è il lavoro che la forza gravitazionale compie per spostare m_2 da distanza (separazione) infinita fino alla posizione r_B.

Definiamo quindi:

$$U(r_B) = U_B - U_\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r_B) = -\frac{G m_1 m_2}{r_B}}$$

En. potenziale di m_2 nel campo gravitazionale generato da m_1.

$U(r) = -$ lavoro compiuto dalla forza gravitazionale per spostare m_2 da separazione infinita fino alla distanza r.

Quindi:

$$\boxed{E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r}}$$

rappresenta l'energia meccanica totale della massa m nel campo gravitazionale generato da M.

Essendo la forza gravitazionale una forza conservativa, la $\boxed{E \text{ è costante}}$.

Esempio: moto di un meteorite

meteorite di massa $m = 2 \times 10^3$ kg viaggia verso la Terra ~~[illegible]~~ Terra con velocità $v_0 = 5000$ m/s. La distanza minima a cui si avvicina alla Terra è $d_1 = 6 \times 10^4$ km.

Calcoliamo a che velocità, v_1, il meteorite passa dalla distanza d_1.

M: massa Terra

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \quad \text{costante}$$

Scanned with CamScan

A grande distanza l'energia potenziale gravitazionale è trascurabile:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

A distanza d_1 dobbiamo considerare sia U che K:

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{d_1^2}$$

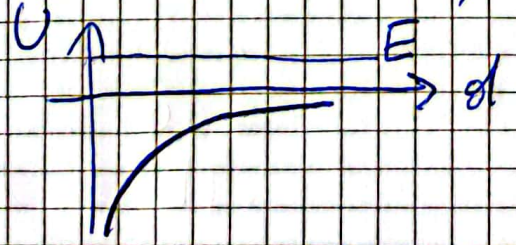
L'energia è costante, quindi $E_0 = E_1$ e:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{d_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{GMm}{d_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_1^2 = v_0^2 + \frac{2GM}{d_1^2}}$$

Notiamo che $v_1 > v_0$ ovvero il meteorite accelera. Questo perché $U < 0$, e quando il meteorite si avvicina alla Terra U aumenta in modulo, diventa sempre più negativa, per cui K deve aumentare per mantenere K costante.



Scanned with CamScan

Sostituiamo i valori numerici:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \times 2\times10^3\,kg \times (5\times10^3)^2 \frac{m^2}{s^2} = 2.5\times10^{10}\,J$$

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{2GM}{d_1^2}$$

$$\approx (5000)^2 \frac{m^2}{s^2} + 2\times 6.66\times10^{-11} \frac{N\cdot m^2}{kg^2} \times \overbrace{6\times10^{24}\,kg}^{\approx M} \frac{1}{(6\times10^7\,m)^2}$$

$$= 5000^2 \frac{m^2}{s^2} + 1.3\times10^7 \frac{m^2}{s^2}$$

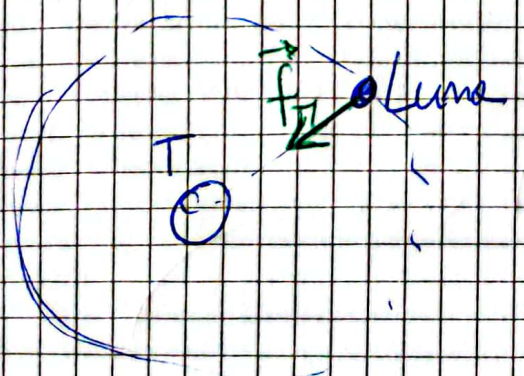
$$\Rightarrow \boxed{v_1 \approx 6190\ m/s}$$

Esempio: calcolo ~~della~~ raggio dell'orbita lunare

$T_{luna} = 27$ giorni e $\frac{1}{4}$ (di giorno)

$M_T = 6\times10^{24}\,kg$

Calcoliamo il raggio dell'orbita lunare, ammettendo che questa sia circolare.



$\vec{f}_{TL}$ diretta sempre verso il centro della traiettoria

$\Downarrow$

$\vec{a}_{LUNA}$ sempre diretta verso il centro $\Rightarrow$ $\vec{a}$ CENTRIPETA.

Scanned with CamScanner

$$\vec{f}_{TL} = m_{LUNA}\,\vec{a}_{LUNA} = -m_{LUNA}\,\omega^2\,\vec{r} = -m_{LUNA}\,\omega^2 r\,\hat{r}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{LUNA}}$$

$$\parallel$$

$$-\frac{G M_T m_{LUNA}}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{G M_T}{r^2} = \omega^2 r \Rightarrow r^3 = \frac{G M_T}{\omega^2} = \frac{G M_T T_{LUNA}^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \quad r = \left(\frac{G M_T T_{LUNA}^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Calcoliamo T_{LUNA}:

$$1 \text{ giorno} = 24 \text{ ore} = 24 \times 3600 \text{ sec} = 86400 \text{ sec.}$$

$$\Rightarrow 27.25 \text{ giorni} = 27.25 \times 86400 = 2.35 \times 10^6 \text{ sec} = T_{LUNA}$$

Quindi:

$$r = \left(6.66\times10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2} \times \frac{1}{4\pi^2} \times 6\times10^{24}\,kg \times (2.35\times10^6)^2\,sec^2\right)^{1/3}$$

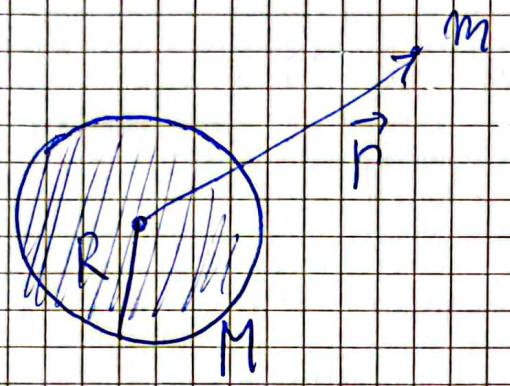
$$= (5.59\times10^{25})^{1/3}\,m = 3.82\times10^8\,m$$

$$= 3.82\times10^5\,km = 382000\,km$$

Scanned with CamScan

Esempio: velocità di fuga

Diamo senza dimostrazione il seguente risultato: per una distribuzione di massa sferica, il campo gravitazionale **all'esterno** della distribuzione è uguale a quello di una massa puntiforme situata al centro della distribuzione.



$$\vec{F}_{Mm} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \quad r \geq R$$

Velocità di fuga: velocità alla quale bisogna lanciare un corpo dalla superficie del pianeta (ad esempio, della Terra) verso l'alto affinché il corpo sfugga all'attrazione del pianeta e si allontani indefinitamente da esso.

Calcoliamo la velocità di fuga della Terra.

Quando il corpo è vicino alla superficie della Terra, la sua energia potenziale è:

$$U = -\frac{GM_T m}{R_T^2}$$

dove:

m: massa del corpo

M_T: massa della Terra

R_T: raggio della Terra $\simeq 6.3 \times 10^3$ km

Scanned with CamScan

L'energia iniziale del corpo è quindi:

$$E = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{G M_T m}{R_T}$$

v_F è la velocità iniziale del corpo.

A grande distanza dalla Terra, l'energia meccanica del corpo è:

$$E = \frac{1}{2} m v_\infty^2 \qquad (r \to \infty)$$

Per la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{G M_T m}{R_T} = \frac{1}{2} m v_\infty^2 \qquad (*)$$

Se la (*) è soddisfatta, allora il corpo si allontana indefin. dalla Terra con velocità v_∞ (il corpo arriva a distanza infinita con velocità v_∞).

Per la velocità di fuga basta porre $v_\infty = 0$ (il corpo arriva a distanza infinita con velocità nulla). Abbiamo:

$$\frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{G M_T m}{R_T} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_F = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}}$$

VELOCITÀ DI FUGA dalla Terra

Sostituendo i dati abbiamo:

$$v_F = \left(2 \times 6.66 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \times 6 \times 10^{24}\, kg \times \frac{1}{6.3 \times 10^6\, m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\simeq 11263\ m/s$$

$$\Rightarrow \boxed{v_F \simeq 11623\ m/s \simeq 40547\ km/h}$$

Quindi, lanciando VERTICALMENTE dalla superficie della Terra un corpo con velocità $v_F \simeq 40547\ km/h$, il corpo si allontana indefinitamente dalla Terra.

NOTA

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

La velocità di fuga non dipende dalla massa del corpo ma solo dalla massa del pianeta e dal suo raggio.

Calcoliamo la velocità di fuga di $\boxed{\text{Giove}}$

$$\begin{cases} M = 1900 \times 10^{24}\ kg \\ R = 71400\ km \end{cases} \Rightarrow v_F \simeq 60000\ m/s \simeq 24000\ km/h$$

$$= 60\ km/s$$

Vediamo $\boxed{\text{Saturno}}$

$$\begin{cases} M = 569 \times 10^{24}\ kg \\ R = 60400\ km \end{cases} \Rightarrow v_F \simeq 35423\ m/s \simeq 128000\ km/h$$

$$= 35.423\ km/s$$

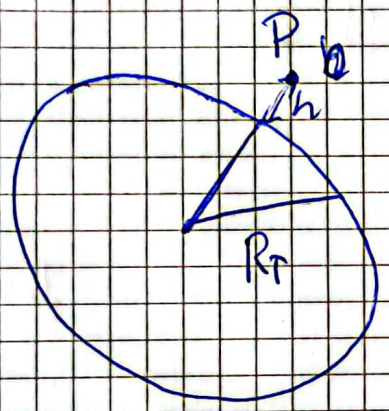
Scanned with CamScan

Vediamo per la $\boxed{\text{Luna}}$:

$$\begin{cases} M = 0.073 \times 10^{24}\ kg \\ R = 1738\ km \end{cases} \Rightarrow v_F \simeq 2635\ m/s \simeq 8515\ km/h$$

$$= 2.635\ km/s$$

Forza peso



Consideriamo un corpo di massa m a distanza h dalla superficie della Terra. Assumiamo che la Terra abbia forma sferica. La forza gravitazionale che la Terra esercita sul corpo è:

$$\vec{f} = -\frac{G M_T m}{r^2}\hat{r} = -\frac{G M_T m}{(R_T+h)^2}\hat{r}$$

$\hat{r}$ diretto dal punto verso il centro della Terra

$$= -\frac{G M_T m}{R_T^2}\frac{1}{(1+h/R_T)^2}\hat{r}$$

$h \ll R_T$

Per $\boxed{h=0}$:

$$\vec{f} = -\frac{G M_T m}{R_T^2}\hat{r}$$

forza diretta verso il centro della Terra.

Possiamo quindi identificare:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{g} &= -\frac{G M_T}{R_T^2}\hat{r} \\ \vec{f}_P &= m\vec{g} \end{aligned}}$$

FORZA PESO

Scanned with CamScan

$$\begin{cases} \vec{f}_p = m\vec{g} \\ \vec{g} = -\dfrac{GM_T}{R_T^2}\hat{p} \end{cases}$$

$[g]$ = accelerazione (m/s^2)

Calcoliamo il modulo di $\vec{g}$:

$$|\vec{g}| = \frac{GM_T}{R_T^2} \simeq \frac{(6.66\times10^{-11})\times(5.97\times10^{24})}{(6.37\times10^{6})^2}\ \frac{m}{s^2} \simeq 9.81\ \frac{m}{s^2}$$

$\vec{g}$ è l'accelerazione di gravità, misurata sulla superficie della Terra.

La forza peso è quindi l'attrazione gravitazionale che la Terra esercita sui corpi. Per $h=0$ l'accelerazione di gravità è $g = GM_T/R_T^2 \simeq 9.81\ m/s^2$.

Per un'altezza h l'accelerazione di gravità è:

$$g = \frac{GM_T}{R_T}\frac{1}{(1+h/R_T)^2}$$

$R_T \simeq 6000\ km$

Per $h \ll R_T$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{(1+h/R_T)} &\simeq 1-\frac{h}{R_T} \\ (1-x)^2 &\simeq 1-2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{(1+h/R_T)^2} \simeq 1-\frac{2h}{R_T}$$

Scanned with CamScanner

quindi per $h \ll R_T$, la dipendenza dell'accelerazione di gravità da h è:

$$\boxed{g = \frac{GM_T}{R_T^2}\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)}$$

Notiamo che g diminuisce con l'altezza.

Ad esempio, per $h = 10$ km (quota di volo aerei di linea):

$$\frac{g(h=10\,km)}{g(h=0)} = 1 - \frac{2 \times 10\,km}{6.37 \times 10^3\,km} = 1 - 3.1 \times 10^{-3}$$

$$\simeq 0.997$$

quindi la variazione di g è di circa il 3‰. molto piccola

Per tutte le applicazioni pratiche possiamo trascurare la dipendenza di g da h.

Ci sono anche effetti dovuti alla rotazione della Terra, che noi non studiamo (forza centrifuga e schiacciamento della Terra ai poli).

Esempio Satellite in orbita radente intorno alla Luna.

$T = 110$ minuti

$R_{LUNA} = 1738$ km

$(M_{LUNA} = 0.073 \times 10^{24}$ kg$)$ $\rightarrow \rho \simeq 3.3 \times 10^3$ kg/m^3

Scanned with CamScan

Possiamo ricavare ρ anche dall'informazione su T:

$$\frac{G M_{LUNA}}{r^2} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\Rightarrow \frac{M_{LUNA}}{r^3} = \frac{1}{G} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow \bar{\rho} = \frac{M_{LUNA}}{V_{LUNA}} = \frac{M_{LUNA}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{G} \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{3}{4\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\rho} = \frac{3\pi}{G T^2}}$$ Relazione tra $\bar{\rho}$ e T

Dalla misura di T in orbita radente si ricava la densità media della Luna. Questa relazione vale per qualunque corpo celeste che possa essere approssimato da una sfera.

Sostituendo i numeri:

$$\bar{\rho} = \frac{3\pi}{6.66 \times 10^{-11} \cdot [(110 \times 60)s]^2} \approx 3930 \ kg/m^3$$

In buon accordo con la stima precedente

Forze elastiche

$$\boxed{\vec{f} = -k\vec{r}}$$ forza elastica

Ci limitiamo a considerare una forza elastica unidimensionale

$$\boxed{f = -kx}$$

x misura l'elongazione del sistema. $x = X - X_0$

X_0: posizione di equilibrio

k = costante elastica (N/m)

Esempio della molla

La forza elastica è centrale, in quanto sempre diretta verso un punto. È quindi una forza conservativa.

$$L_{AB} = -(U_B - U_A) = \int_A^B dx(-kx) = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

$$\Rightarrow U_B - U_A = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$$

$$\Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cost.$$

Scegliamo la costante arbitraria in modo che $U = 0$ per $x = 0$: questo comporta

$$cost = 0$$

per cui:

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$ EN. POTENZIALE FORZA ELASTICA

Scanned with CamScan

Eq. moto Il moto è unidimensionale

$$f = ma \Rightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Equazione del moto armonico

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \\ \omega^2 = \frac{k}{m} \end{cases}$$

simile all'eq. per ϑ trovata per il pendolo semplice.

Il moto quindi è un $\boxed{\text{moto armonico}}$ con ampiezza A e pulsazione ω. Il sistema si chiama $\boxed{\text{Oscillatore armonico}}$.

Condizione iniziale

$t=0$: $x(0) = x_0$ elongazione iniziale

$$x'(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi)$$

$$x'(0) = 0 = \omega A\cos\phi \Rightarrow \phi = \pi/2$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos\omega t}$$

x_0 è il valore massimo di $x(t)$.

Il periodo delle oscillazioni è

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Scanned with CamScan

Energia meccanica

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2}$$

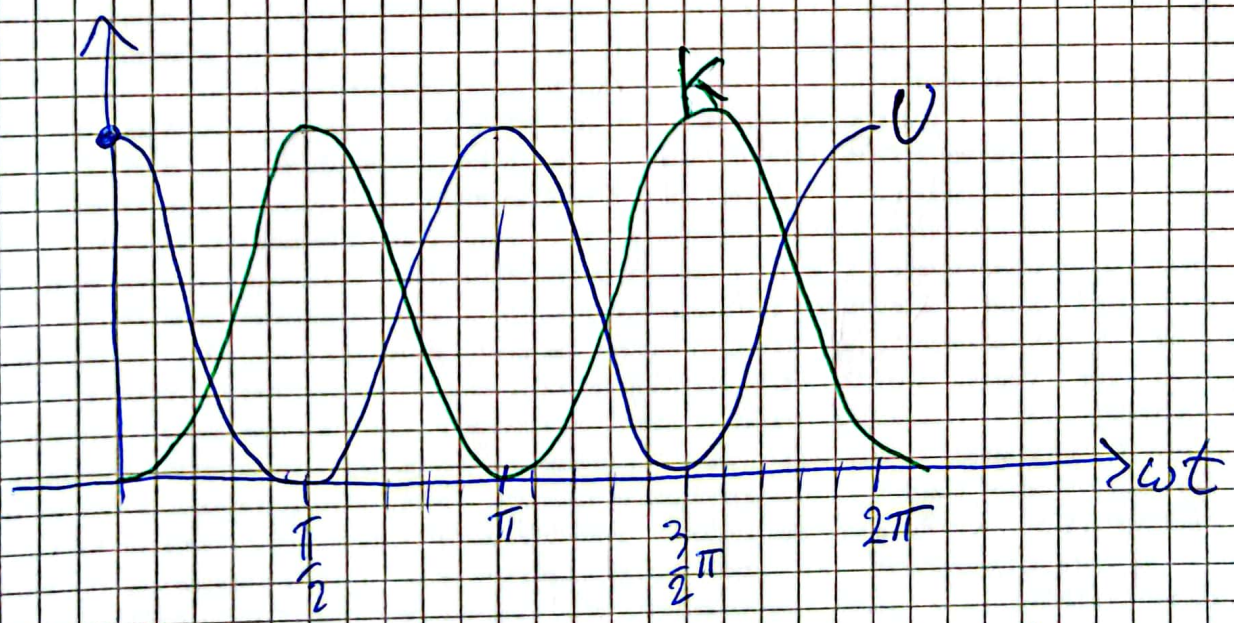
Energia cinetica: $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega x_0 \sin \omega t)^2$

$\omega^2 = k/m$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Energia potenziale: $\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (x_0 \cos \omega t)^2$

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2 \omega t.$$



Nel moto vi è una continua conversione tra energia potenziale ed energia cinetica.

$$E = \frac{1}{2} k x_0^2 [\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t] = \frac{1}{2} k x_0^2 = \text{COSTANTE}$$

Scanned with CamScan

L'energia totale è dunque:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} k x_0^2}$$

EN. TOTALE OSCILLATORE ARMONICO

ed è uguale al valore dell'energia potenziale iniziale.

Esempio

$$\begin{cases} m = 10\,g \\ k = 1\,N/m \\ x_0 = 3\,cm \end{cases}$$

Calcoliamo T e l'energia totale del sistema, nonché l'energia cinetica quando $x=0$.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.01\,kg}{1\,N/m}} \approx 0.63 \text{ secondi.}$$

$$E = \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,\frac{N}{m} \times (0.03)^2\,m^2 = 4.5 \times 10^{-4}\,J$$

Quando $x=0$, l'energia potenziale è zero, quindi l'energia cinetica è uguale all'energia totale.

$$K(x=0) = \frac{1}{2} k x_0^2 = 4.5 \times 10^{-4}\,J.$$

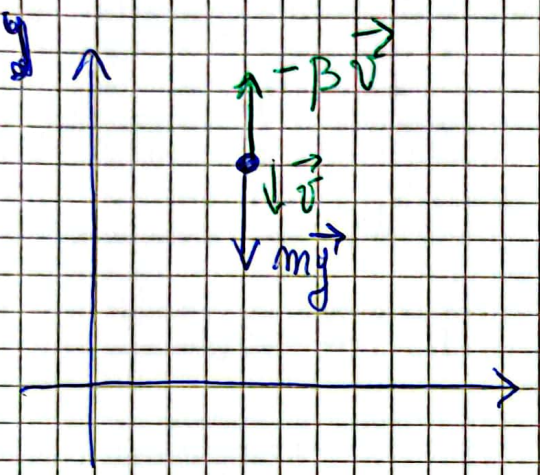
Scanned with CamScan

Forze viscose

$$\boxed{\vec{f} = -\beta \vec{v}}$$

da considerazioni fenomenologiche e in regime di moto laminare

Esempio moto di un grave in caduta libera in un fluido



Eq. moto proiettato su y:

$$\boxed{-mg - \beta v_y = m\frac{dv_y}{dt}}$$

$$mg + \beta v_y = -m\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow -dt = \frac{m\,dv_y}{mg + \beta v_y}$$

$$= \frac{dv_y}{g + \frac{\beta}{m} v_y}$$

$$\Rightarrow -\int_0^t dt = -t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv_y}{g + \frac{\beta}{m} v_y}$$

$$A = g + \frac{\beta}{m} v_y \Rightarrow dv_y = \frac{m}{\beta} dA$$

$$\Rightarrow -t = \frac{m}{\beta}\int_{A_0}^{A} \frac{dA}{A}$$

$$A_0 = g + \frac{\beta}{m} v_{y0}$$

Scanned with CamScan

$$\Rightarrow -\frac{\beta}{m}t = \int_{A_0}^{A} \frac{dA}{A} = \log\frac{A}{A_0}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\beta}{m}t} = \frac{A}{A_0} \Rightarrow A(t) = A_0\, e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\Rightarrow g + \frac{\beta}{m} v_y(t) = \left(g + \frac{\beta}{m} v_{y0}\right) e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Assumiamo per semplicità $\boxed{v_{y0} = 0}$. Abbiamo quindi:

$$\frac{\beta}{m} v_y(t) = g\left(e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_y(t) = \frac{mg}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta t}{m}} - 1\right)}$$

Per $t \to \infty$:

$$\boxed{v_y \to -\frac{mg}{\beta}}$$ Velocità limite

Il corpo di massa m, per effetto della forza viscosa, raggiunge una velocità limite (senza forza viscosa, $\beta = 0$, il corpo per effetto della forza peso accelererebbe ~~[illegible]~~ fino a toccare il suolo).

NOTA $\vec{f} = -\beta \vec{v}$

La forza è sempre opposta alla velocità della particella. Il lavoro compiuto da questa forza è quindi:

Scanned with CamScanner

$$dL = \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\beta \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\beta \vec{v} \cdot \vec{v} dt$$

$$= -\beta v^2 dt < 0 \qquad (*a)$$

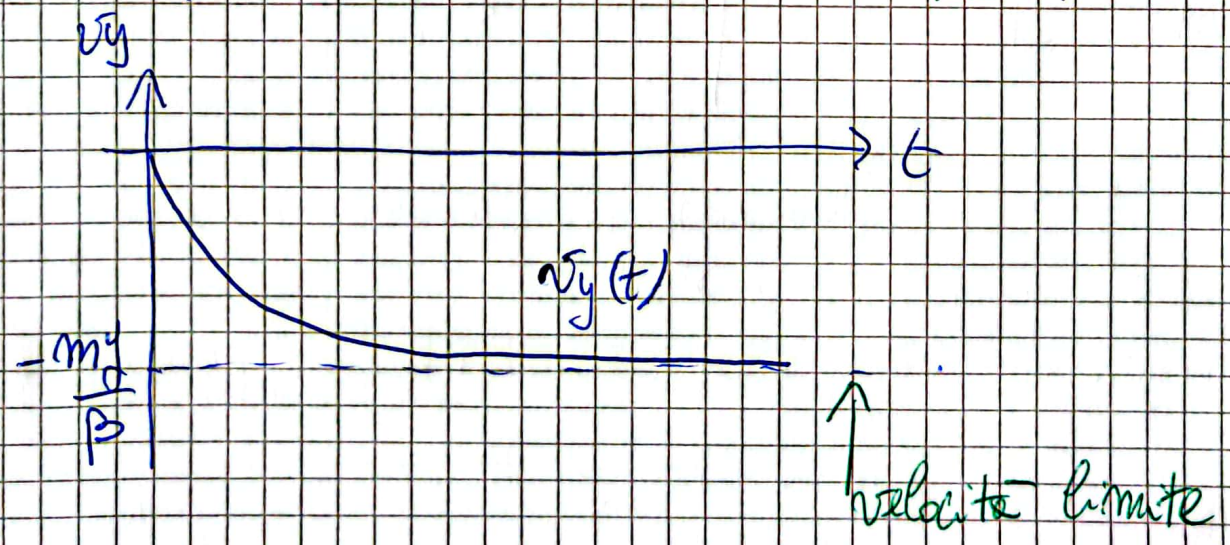
Il lavoro compiuto da questa forza è quindi negativo. ~~Abbiamo~~ ~~quindi~~ Inoltre la forza è $\boxed{\text{non conservativa}}$, perché dipende dalla velocità del corpo e quindi dalla sua traiettoria, per cui il suo lavoro dipende anche dalla traiettoria. Ricordando che:

$$\Delta E = L_{\text{non-conservative}}$$

si ha, per la (*a):

$$\boxed{\Delta E < 0}$$

La forza viscosa dunque $\boxed{\text{diminuisce}}$ l'energia meccanica del corpo. Si dice che la forza è $\boxed{\text{dissipativa}}$.



Oscillazioni smorzate

$$f_v = -\beta v = -\beta \frac{dx}{dt}$$

Equazione del moto:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\beta \frac{dx}{dt} - kx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Soluzione generale:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda_1^2 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B e^{\lambda_2 t}$$

quindi λ_1 e λ_2 soddisfano l'equazione:

$$\boxed{\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0}$$ equazione caratteristica

$$\lambda_{1,2} = \left(-\frac{\beta}{m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}\right)\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\Delta} \qquad \Delta = \frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}$$

Scanned with CamScan

Il comportamento del corpo dipende dal fatto che $\lambda_{1,2}$ siano reali o complesse.

Caso 1: $\boxed{\Delta < 0}$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2} > 0}, \quad \Delta = -\omega^2, \quad \gamma \equiv \frac{\beta}{2m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega}$$

$$\Rightarrow x(t) = A e^{-\gamma t} e^{i\omega t} + B e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}.$$

Ricordiamo che

$$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \sin\omega t$$

quindi:

$$x(t) = A e^{-\gamma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B e^{-\gamma t}(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

$$= e^{-\gamma t}\left[\cos\omega t\,(A+B) + i\sin\omega t\,(A-B)\right]$$

Ora poniamo:

$$A+B = x_0 \sin\phi, \quad i(A-B) = x_0 \cos\omega t$$

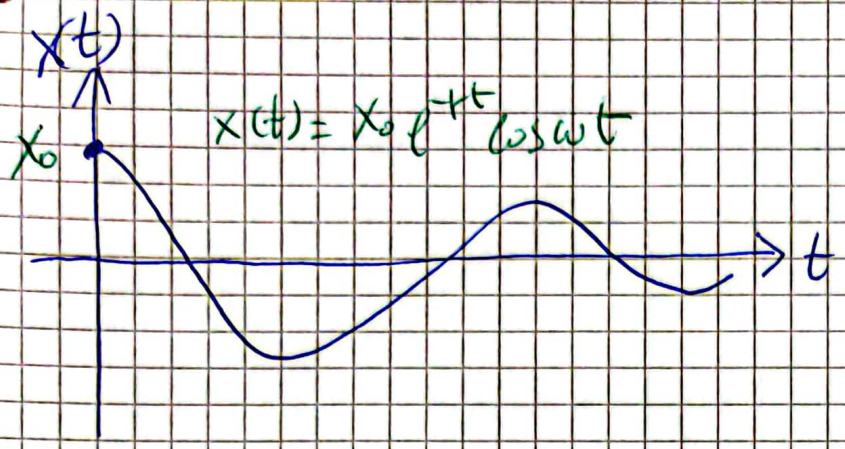
$$\Rightarrow x(t) = x_0 e^{-\gamma t}(\cos\omega t \sin\phi + \sin\omega t \cos\phi)$$

$$= x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$

Scanned with CamScan

quindi:

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)} \qquad \Delta < 0$$



moto oscillatorio smorzato per $\phi = \pi/2$

L'effetto della forza viscosa è quello di <u>smorzare le oscillazioni</u>.

Caso 2: $\boxed{\Delta > 0}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = -\frac{\beta}{2m} \pm \frac{\beta}{2m}\sqrt{1 - \frac{k\,4m^2}{\beta^2 m}}$$

$$\lambda_{1,2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A e^{-|\lambda_1| t} + B e^{-|\lambda_2| t} \\ v(t) = \frac{dx}{dt} = -|\lambda_1| A e^{-|\lambda_1| t} - |\lambda_2| B e^{-|\lambda_2| t} \end{cases}$$

$$t=0: \begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = x_0 \\ -|\lambda_1| A - |\lambda_2| B = 0 \end{cases}$$

dalla seconda abbiamo:

$$B = -\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} A$$

Scanned with CamScan

e quindi:

$$A - \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} A = A\left(1 - \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}\right) = x_0 = A\,\frac{|\lambda_2| - |\lambda_1|}{|\lambda_2|}$$

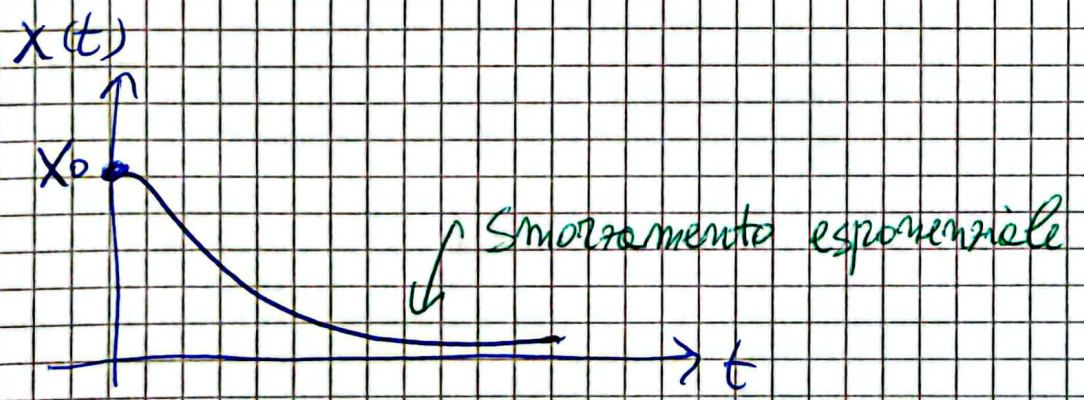
$$\Rightarrow \quad A = x_0 \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2| - |\lambda_1|}$$

$$\Rightarrow \quad B = -x_0 \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2| - |\lambda_1|}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2| - |\lambda_1|} e^{-|\lambda_1| t} - x_0 \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2| - |\lambda_1|} e^{-|\lambda_2| t}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{x_0}{|\lambda_2| - |\lambda_1|}\left(|\lambda_2| e^{-|\lambda_1| t} - |\lambda_1| e^{-|\lambda_2| t}\right)}$$

moto smorzato esponenziale



Caso 3: $\boxed{\Delta = 0}$ In questo caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$.

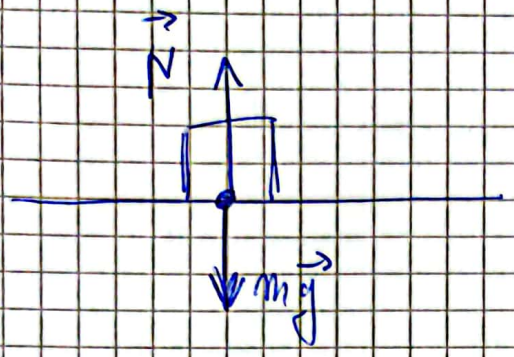
$$\Rightarrow \quad x(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}$$

il moto è qualitativamente simile a quello smorzato.

Scanned with CamScan

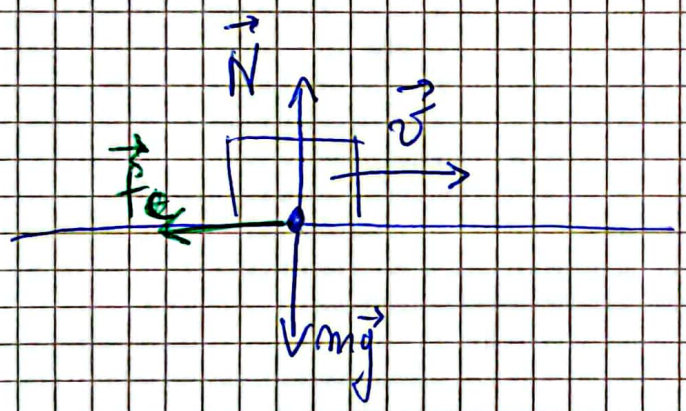
Reazioni vincolari

- Fai il preambolo alla lavagna -

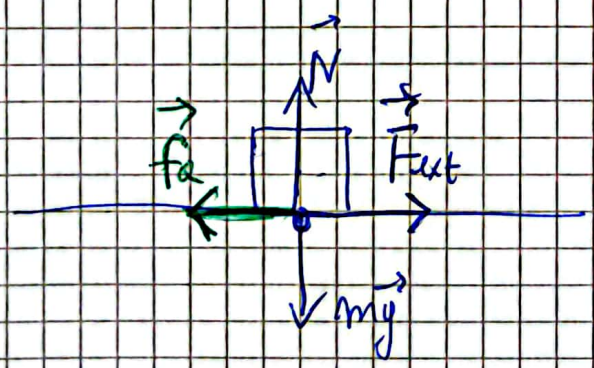


$$\vec{N} + m\vec{g} = 0 \Rightarrow \vec{N} = -m\vec{g}$$

La componente ortogonale al vincolo si chiama **reazione vincolare normale**. La componente orizzontale è nota come **forza di attrito**.



Attrito cinematico radente



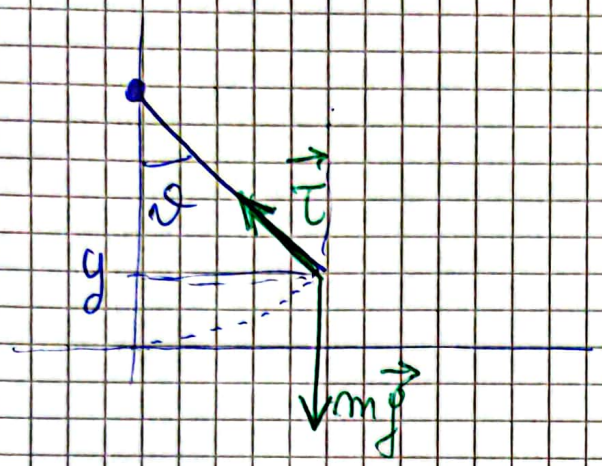
Attrito statico

- Esempio: pendolo semplice

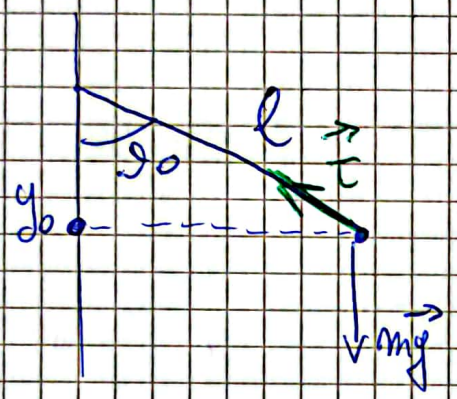
Abbiamo già studiato il pendolo semplice usando l'equazione per il momento angolare. In quel contesto la reazione vincolare del filo non ha giocato alcun ruolo

Scanned with CamScan

in quanto il momento di questa forza rispetto al polo è nullo. Ora calcoliamo la tensione del filo.



$$\vec{\tau} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad (*b)$$



$$\frac{1}{2} m v^2 + mgy = mgy_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mg(y_0 - y)$$

$$= mg\ell(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)$$

Proiettiamo la $(*b)$ lungo la direzione del filo:

$$-\tau + mg\cos\vartheta = m a_p \qquad a_p = -\frac{v^2}{\ell}$$

$$= -m\frac{v^2}{\ell}$$

$x = \ell\sin\vartheta$

$y = \ell - \ell\cos\vartheta$

$$= -2mg\ell(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\frac{1}{\ell}$$

$$= -2mg(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)$$

$$\Rightarrow -\tau + mg\cos\vartheta = -2mg(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)$$

Scanned with CamScan

$$-\tau + mg\cos\vartheta = -2mg(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)$$

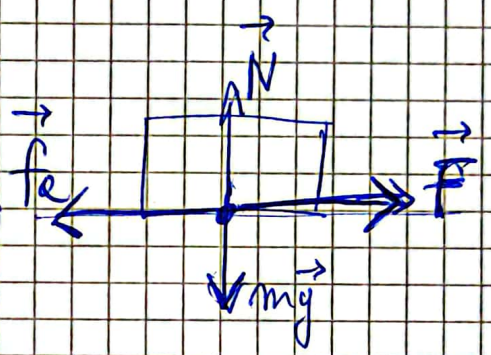
$$\Rightarrow \boxed{\tau = mg(3\cos\vartheta - 2\cos\vartheta_0)}$$

Da questa si possono calcolare

$$\tau_x = -\tau\sin\vartheta, \qquad \tau_y = \tau\cos\vartheta.$$

Forze di attrito

Attrito statico



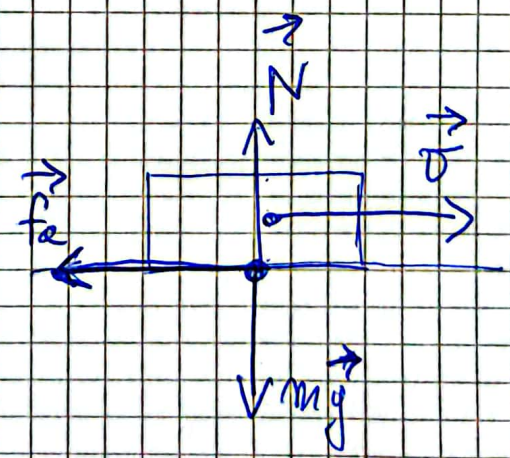
$$f_a \leq f_{max}, \qquad \boxed{f_{max} = \mu_s N}$$

μ_s = coefficiente di attrito statico

f_{max} è indipendente dall'area della superficie di contatto.

Attrito cinematico radente

$$\boxed{\vec{f_a} = -\mu_c N \hat{v}}$$



$\vec{f_a}$ non è conservativa in quanto è sempre opposta a $\vec{v}$ e quindi dipende dalla traiettoria del corpo, e lo stesso

Scanned with CamScan

vale per il lavoro compiuto da $\vec{f_a}$.

$$dL = \vec{f_a} \cdot d\vec{s} = -\mu_c N \hat{v} \cdot d\vec{s} = -\mu_c N \hat{v} \cdot \vec{v}\, dt$$

$$= -\mu_c N v\, dt \leq 0$$

Il lavoro di $\vec{f_a}$ è sempre negativo. Quindi, essendo $\vec{f_a}$ non conservativa:

$$\boxed{\Delta E = L_a \leq 0}$$

quindi $\vec{f_a}$ causa una diminuzione dell'energia meccanica del corpo. È dunque una forza $\boxed{\text{dissipativa}}$.

Se $\vec{N}$ è costante allora il lavoro di fa si scrive come:

$$L_a = \int_A^B \vec{f_a} \cdot d\vec{s} =$$

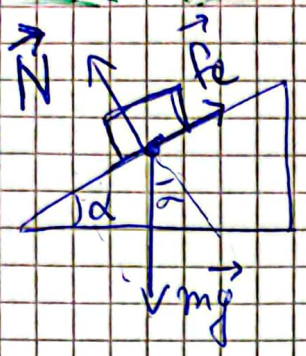
$$= -\mu_c N \int_A^B \hat{v} \cdot d\vec{s} = -\mu_c N \int_A^B \hat{v} \cdot \vec{v}\, dt$$

$$= -\mu_c N \int_A^B v\, dt = -\mu_c N \underbrace{\Delta s}_{\text{spazio percorso dal corpo}}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_a = -\mu_c N \Delta s}$$

Lavoro della forza di attrito se N è costante

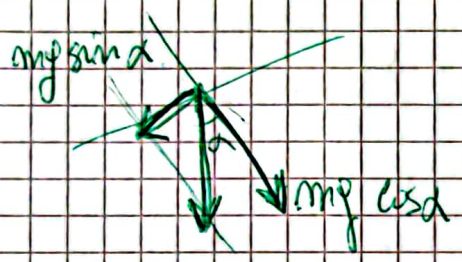
Esempio: piano inclinato con attrito



$\mu_s = 1.0$ $\mu_c = 0.75$

$m = 1\,kg$

Calcoliamo dapprima il valore di α al di sopra del quale il blocco comincia a scivolare. Fino a quando:



$$\boxed{mg\sin\alpha \leq \mu_s N}$$

il blocco non si muove.

$N = mg\cos\alpha \Rightarrow$ la condizione di scivolamento del blocco è quindi

$$mg\sin\alpha = \mu_s\, mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \mu_s = tg\,\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \arctan\mu_s} \boxed{= \alpha_s}$$

angolo di attrito

fino a quando $\alpha < \alpha_s$ il blocco non scivola per via della forza di attrito statico.

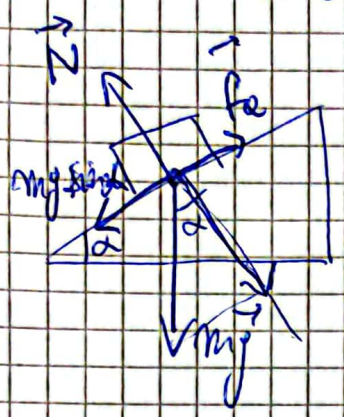
$\alpha_s = \arctan\mu_s = \arctan 1.0 = 0.78$ rad.

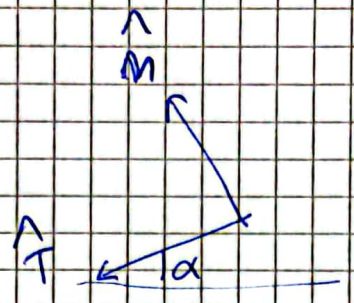
$= 45°$

NOTA. α_s non dipende da g e m ma solo da μ_s.

Scanned with CamScan

Assumiamo ora che $\alpha > \alpha_s$. Determiniamo la legge oraria del corpo.





Scomponiamo $\vec{F} = m\vec{a}$ nelle componenti lungo $\hat{n}$ e $\hat{T}$:

$$\begin{cases} F_n = -mg\cos\alpha + N = 0 & \text{equilibrio} \\ F_T = mg\sin\alpha - f_a = m a_T = m\dfrac{d^2s}{dt^2} \end{cases}$$

il moto è unidimensionale
s misura lo spazio percorso dal blocco lungo il piano inclinato

Abbiamo quindi:

$$mg\sin\alpha - f_a = m\frac{d^2s}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = \boxed{g\sin\alpha - \frac{f_a}{m} = a_T}$$

Notiamo che F_T è costante, per cui anche l'accelerazione è costante $\Rightarrow$ moto uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2 \\ v(t) = v_0 + a_T t \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Assumiamo $v_0 = 0$ ed $s_0 = 0$:

$$\begin{cases} s(t) = \frac{1}{2} a_T t^2 \\ v(t) = a_T t \end{cases}$$

Ad esempio assumiamo $\alpha = 55° \approx 0.96$ radianti. Allora

$$f_a = \mu_c N \Rightarrow \frac{f_a}{m} = \mu_c \frac{mg\cos\alpha}{m} = \mu_c g \cos\alpha$$

$$\Rightarrow a_T = g\sin\alpha - \mu_c g\cos\alpha = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)$$

$$= 9.8 \frac{m}{s^2}(0.82 - 0.75 \times 0.57) = \boxed{3.81 \, m/s^2}$$

Dopo 2 secondi:

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2} \times 3.81 \frac{m}{s^2} \times 4 \, s^2 \approx 7.62 \, m \\ v = 3.81 \frac{m}{s^2} \times 2 s \approx 7.62 \, m/s \end{cases}$$

Se non ci fosse attrito:

$$a_T = g\sin\alpha = 8.04 \, m/s^2$$

quindi dopo $t = 2$ secondi:

$$v = 8.04 \frac{m}{s^2} \times 2s \approx 16.07 \, m/s$$

$\vec{f_a}$ rallenta il moto del corpo.

Scanned with CamScan

Calcoliamo il lavoro delle forze di attrito:

$$L_a = \int_{s_0}^{s} \vec{f_a} \cdot d\vec{s} = -\int_{s_0}^{s} f_a \, ds$$

dove abbiamo usato il fatto che $\vec{f_a}$ è sempre opposta a $d\vec{s}$.
Osservando che f_a è costante abbiamo:

$$L_a = -f_a \int_{s_0}^{s} ds = -f_a (s - s_0) = -f_a s$$

$$= -\mu_c N s = -\mu_c s m g \cos\alpha$$

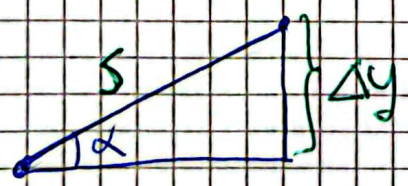
Usando i risultati calcolati sopra per $t = 2s$:

$$= -0.75 \times 7.62\,m \times 1\,kg \times 9.8\,\frac{m}{s^2} \times 0.57 \simeq \boxed{-31.9\,J}$$

Possiamo arrivare allo stesso risultato usando la variazione di energia meccanica:

$$L_a = \Delta E = (U_f + K_f) - (U_i + \overset{0}{K_i})$$

$$= (U_f - U_i) + K_f$$



$$= mg(y_f - y_i) + \frac{1}{2} m v^2$$

$$= -mg\Delta y + \frac{1}{2} m v^2$$

$$= -mg \underbrace{s}_{7.62\,m} \sin\alpha + \frac{1}{2} m \underbrace{v}_{7.62\,m/s}^2$$

Scanned with CamScan

$$= -1\,kg \times 9.81\,\frac{m}{s^2} \times 7.62\,m \times 0.82 + \frac{1}{2} \times 1\,kg \times (7.62)^2\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$\approx (-61.3 + 29.03)\,J = \boxed{-32.27\,J}$$

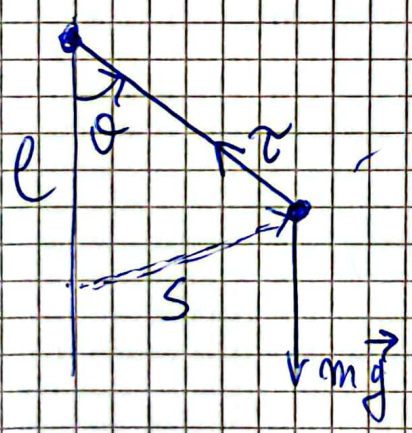
in accordo con quanto calcolato prima.

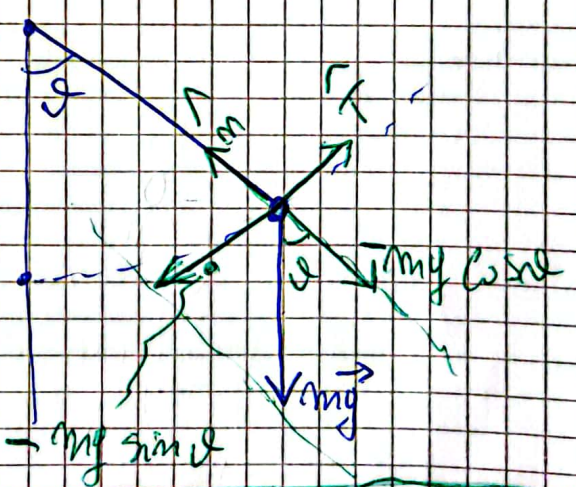
NOTA

$$L_a < 0 \Rightarrow \Delta E < 0 \Rightarrow E_f < E_i$$

L'energia meccanica finale è più bassa di quella iniziale: la forza di attrito dissipa l'energia del corpo.

Esempio: moto del pendolo con la 2ª legge della dinamica





(è fornita la forza centripeta che obbliga il moto sull'arco di circonferenza)

(n) $\boxed{\tau - mg\cos\theta} = m\,a_n = m\,\frac{v^2}{\ell}$ → accelerazione centripeta

(T) $-mg\sin\theta = m\,a_T = m\,\frac{d^2 s}{dt^2}$ → moto lungo un arco di circonferenza

Scanned with CamScan

Notiamo che l'equazione lungo $\hat{T}$ non dipende da $\vec{T}$:

possiamo quindi usare questa per determinare il moto della massa:

$$-g \sin\vartheta = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Sull'arco di circonferenza di lunghezza s:

$$s = l\vartheta$$

quindi:

$$-g \sin\vartheta = l \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

ovvero:

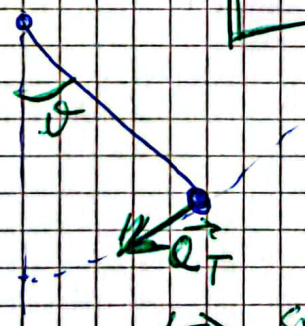
$$\boxed{\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0}$$

Per $\vartheta \to 0$: $\sin\vartheta \simeq \vartheta$, quindi:

$$\boxed{\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\vartheta = 0}$$

eq. moto armonico

$$\boxed{\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\omega t, \quad \omega = \sqrt{g/l}}$$



la componente tangenziale della forza peso agisce come una forza di richiamo.

$\Leftrightarrow$ Spostiamo m dalla posizione di equilibrio $\vartheta = 0$ a ϑ_0; $\vec{F}_T$ riporta m verso $\vartheta = 0$.

Scanned with CamScan