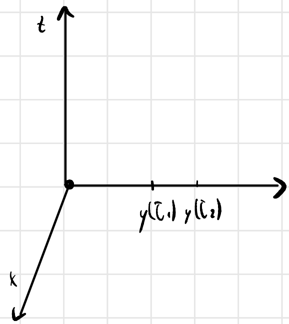
Legge oraria di un punto materiale

La legge oraria di un punto materiale si riferisce alla relazione matematica che descrive la posizione del punto materiale nel tempo. In altre parole, è un'equazione che ci dice come la posizione del punto materiale cambia al variare del tempo.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



$t_2 > t_1$
$\Delta t = t_2 - t_1$

Il vettore posizione identifica univocamente in ogni istante di tempo la posizione della particella nello spazio.

La stessa legge oraria, in funzione di un istante di tempo **t** , fornisce le coordinate del vettore posizione del punto materiale.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Ad esempio la legge oraria del moto rettilineo uniforme è la seguente :

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = a + bt \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(a + bt_2) - (a + bt_1)}{t_2 - t_1} = \frac{b(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = b$$

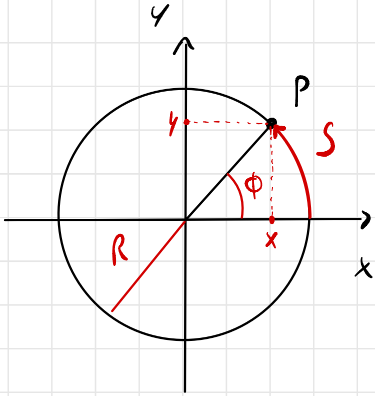
da cui $\boxed{b = \frac{\Delta y}{\Delta t}}$ var. spaz. / var. temp. $\Rightarrow$ $\Delta y = b \cdot \Delta t$

lo spazio y è proporzionale al tempo t

Ovvero il punto materiale percorre spazi uguali in tempi uguali, e questa è la legge oraria del moto rettilineo.
In oltre, dato che la velocità è costante, definiremo questo moto come rettilineo uniforme.

Moto circolare uniforme

Il moto circolare uniforme è un tipo di movimento in cui un oggetto si muove lungo una traiettoria circolare con velocità costante. Nel moto circolare uniforme, la direzione del moto cambia continuamente mentre il modulo della velocità rimane costante.



$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\phi \\ y = R \cdot \sin\phi \end{cases}$$

proporzionale al tempo

$$\left.\begin{aligned} s &\propto t \\ s &= \phi R \end{aligned}\right\} \qquad \phi R = v t \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{v}{R} t}$$

Velocità angolare

Nel moto circolare uniforme, la velocità angolare ω è definita come il rapporto tra la velocità e il raggio della circonferenza lungo la quale si muove l'oggetto. La velocità angolare è l’angolo percorso nell’unità di tempo.

$$\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\phi(t_2) - \phi(t_1)}{\Delta t} = \frac{(v/R)t_2 - (\frac{v}{R})t_1}{\Delta t} = \frac{v}{R}$$

$$\boxed{\omega = \frac{v}{R}}$$

Velocità media

Possiamo definire un nuovo vettore **v** detto velocità media della particella, che da informazioni sullo spazio percorso nell'unità di tempo , dalla particella. La velocità media è da intendersi in un intervallo di tempo.

$$\vec{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} \qquad t' > t \qquad \text{es } v_x = \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$$

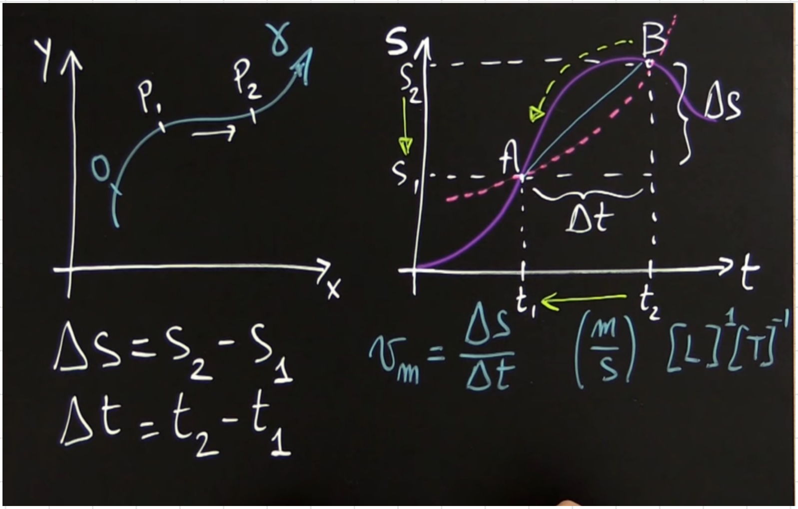
Velocità istantanea

Possiamo invece intendere la velocità in un punto come il limite del rapporto incrementale tra la variazione della posizione ed il tempo. Questa viene detta velocità istantanea ed è un vettore che descrive la velocità di un punto materiale in un determinato istante di tempo.

In altre parole, il vettore velocità istantanea ti dice quanto veloce si sta muovendo il punto materiale e in quale direzione.

$$\lim_{t' \to t} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \boxed{\frac{dr}{dt} = \vec{v}}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$



Prendendo per esempio il moto rettilineo uniforme

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = a + bt \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{dr_x}{dt} = \frac{0}{dt} = 0$$

$$V(y) = \frac{dr_y}{dt} = \frac{a+bt}{dt} = b$$

$$V(z) = \frac{dr_z}{dt} = \frac{0}{dt} = 0$$

$$v(0, b, 0)$$

Infatti nel caso del modo rettilineo uniforme la velocità del punto materiale corrisponde alla variazione della coordinata y dell'equazione.

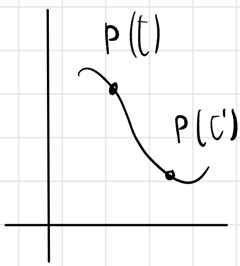
Accelerazione

Il vettore accelerazione **a** è una quantità vettoriale che rappresenta il tasso di variazione della velocità di un oggetto in movimento. Ricaviamo l'accelerazione come la derivata della velocità fratto il tempo.

Dallo spostamento del punto materiale si evince che ci sia un'accelerazione, in quanto $\vec{r}(t) \neq \vec{r}(t')$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \neq 0$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$ spostamento



$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt} = \vec{v}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

⇒ l'accelerazione è sempre nulla nel moto rett. uniforme (la derivata della velocità è zero perché è costante)

Moto uniformemente accelerato

Il moto uniformemente accelerato è un tipo di movimento in cui la velocità di un oggetto cambia in modo costante durante un certo periodo di tempo. Questo cambiamento costante nella velocità è dovuto a un'accelerazione costante.

$\vec{a}\ (a_x, 0, 0)$

$\vec{a} = \text{costante}$

$a_x = \text{costante}$

$y = z = \text{costante}$

- Voglio calcolare la legge oraria

$a_x = a > 0$

$a_y = a_z = 0$

$v_x(t=0)$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a \Rightarrow v_x = at + v_{0x}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = v_{0y} = 0$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} \Rightarrow v_z = v_{0z} = 0$$

velocità

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + \vec{a}t \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t (v_{0x} + a t') \, dt' =$$

$$= v_{0x} \cdot t + a \int_0^t t' \, dt'$$

$$= v_{0x} t + \frac{1}{2} a t^2$$

quindi $x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a t^2$

Legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a t^2 \\ y = \text{costante} \\ z = \text{costante} \end{cases}$$

Moto del proiettile

Il moto del proiettile segue le leggi del moto parabolico, poiché il punto materiale segue una traiettoria curva a causa dell'influenza della gravità. Ecco le caratteristiche principali del moto di un proiettile:

- Lancio iniziale: Il proiettile viene sparato con una velocità iniziale v in una direzione specifica.

- Gravità: La gravità esercita una forza costante verso il basso, influenzando la traiettoria del proiettile.

- Moto parabolico: La traiettoria del proiettile è una parabola, con un'ascensione iniziale seguita da una discesa. Il proiettile raggiungerà l'apice della traiettoria a metà percorso tra il punto di lancio e il punto in cui colpisce il bersaglio.

- Velocità orizzontale costante: L'accelerazione orizzontale è generalmente trascurabile (a meno che il proiettile non subisca resistenza dell'aria significativa), quindi la velocità orizzontale rimane approssimativamente costante durante il volo.

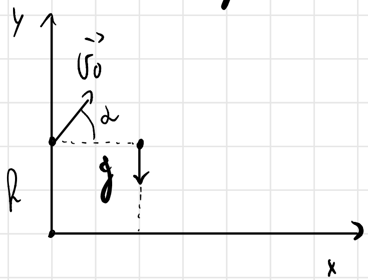
- Velocità verticale variabile: La velocità verticale varia a causa dell'accelerazione gravitazionale costante. La velocità verticale sarà massima al momento del lancio e diminuirà mentre il proiettile si alza, fino a quando raggiunge l'apice della traiettoria. Poi, la velocità verticale aumenta di nuovo durante la discesa.

- Punto di impatto: Il proiettile colpirà il bersaglio o il suolo in un punto specifico, a meno che non sia sparato con un angolo molto elevato e raggiunga una traiettoria parabolica molto ampia, che potrebbe causare un impatto lontano dal punto di lancio.

g = accelerazione gravitazionale $\simeq 9.81\ m/s^2$

$\Downarrow$

è un moto uniformemente accelerato



$$\begin{cases} v_{0x} = |v_0| \cos \alpha \\ v_{0y} = |v_0| \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_y = -g \\ a_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = h + (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x(t) = (v_0 \cos \alpha) t \end{cases}$$

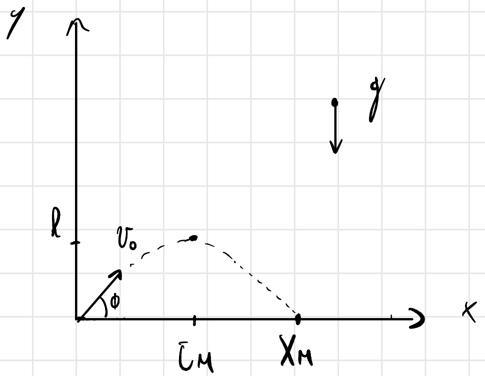
Calcolo della traiettoria del punto a partire dalla legge oraria

$$\begin{cases} y(x) = h + (V_0 \sin \alpha) \dfrac{1}{V_0 \cos\alpha} x - \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{(V_0 \cos\alpha)^2} \\ t = \dfrac{x}{V_0 \cos \alpha} \end{cases}$$

$\downarrow$

parabola

Calcolare la distanza massima a cui la particella tocca il suolo, il tempo massimo che ci mette a toccare il suolo e l'altezza massima della particella lasciando V0 come unica variabile



$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\phi \\ V_{0y} = V_0 \sin\phi \end{cases}$$

Legge oraria

$$\begin{cases} y(t) = (V_0 \sin\varphi)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x(t) = (V_0 \cos\phi)\, t \end{cases}$$

- Tempo Massimo $\Rightarrow$ quando $y = 0$

$$y(t) = 0 \Rightarrow (V_0 \sin\varphi)\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$t\left(-\frac{1}{2} g t + V_0 \sin\varphi\right) = 0 \rightarrow 0$$

$$\rightarrow 2\,\frac{V_0 \sin\phi}{g}$$

- Distanza massima $\Rightarrow$ quando t è massimo

$$x(t_{max}) = 2 V_0 \cos\phi \,\frac{V_0 \sin\phi}{g}$$

$$= \frac{2}{g} V_0^2 (\cos\phi \sin\phi)$$

- Altezza massima :

Ottengo la velocità derivando $y(t) = (v_0 \operatorname{sen} \varphi) t - \frac{1}{2} g t^2$

$$v_y(t) = v_0 \operatorname{sen} \varphi - g t$$

Trovo il tempo all'altezza massima

$$v_0 \operatorname{sen} \varphi - g t = 0$$

$$t_M = \frac{v_0 \operatorname{sen} \varphi}{g}$$

$$y(t_M) = (v_0 \operatorname{sen} \varphi) t_M - \frac{1}{2} g t_M^2$$

$$= v_0 \operatorname{sen} \varphi \cdot \frac{v_0 \operatorname{sen} \varphi}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \varphi}{g} \right)^2$$

$$= \frac{(v_0 \operatorname{sen} \varphi)^2}{g} - \frac{(v_0 \operatorname{sen} \varphi)^2}{2g}$$

$$= \frac{(v_0 \operatorname{sen} \varphi)^2}{2g}$$