Dinamica del punto materiale

Principio di relatività

Se due laboratori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo uniforme, non esiste esperimento che dia risultati diversi nell'uno e nell'altro laboratorio.

In altri termini:

I due laboratori sono completamente indistinguibili.

Esempio del giocare a palla sul treno

Nota

Le **relazioni** tra le grandezze fisiche devono essere le stesse nei due sistemi di riferimento. La misura delle grandezze fisiche può dare risultati diversi nei due laboratori (ES. VELOCITÀ)

↓

Covarianza delle leggi fisiche

I due membri di una legge fisica devono essere COVARIANTI passando da un riferimento ad un altro che si muove rispetto al primo di moto rettilineo uniforme.

Principio di inerzia (Primo principio della dinamica)

Un sistema di riferimento è inerziale se in esso un punto materiale $\boxed{\text{libero,}}$ se posto inizialmente in quiete, permane in quiete.

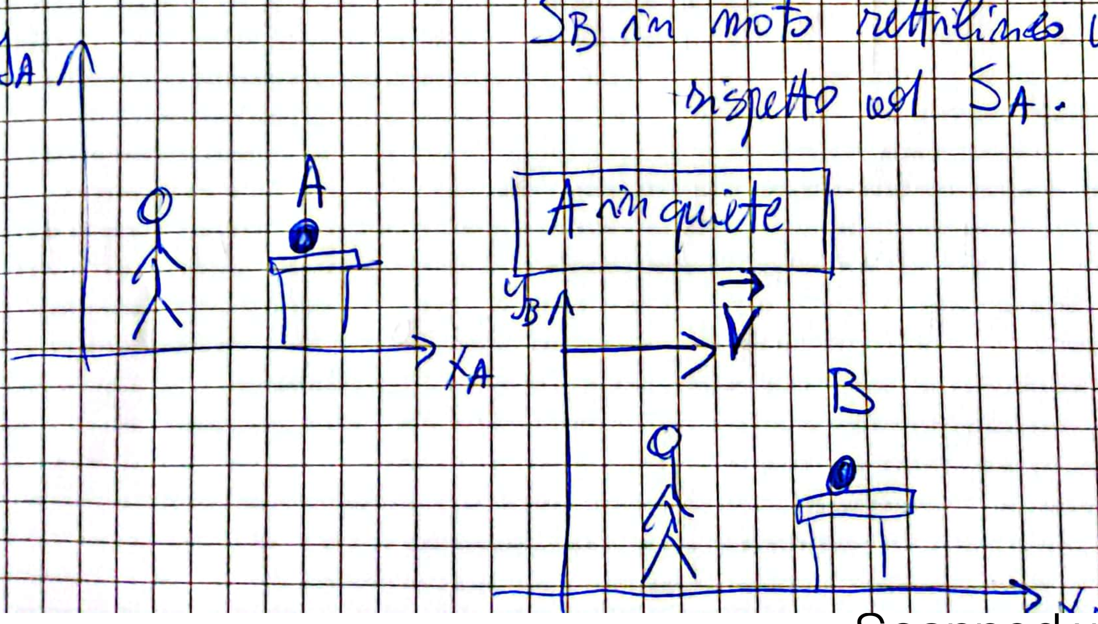
Se un riferimento è inerziale, per il principio di relatività ogni altro sistema di riferimento che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al primo è anch'esso inerziale.

> In un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale libero che abbia ad un certo istante una velocità $\vec{v}$ mantiene indefinitamente il suo stato di moto rettilineo uniforme ($\boxed{\vec{v} = \text{costante}}$).

Nota

Il principio di inerzia è una conseguenza del principio di relatività.

Infatti consideriamo due sistemi inerziali, S_A e S_B. S_B in moto rettilineo uniforme rispetto ad S_A.



Se non valesse il principio di inerzia, l'osservatore in S_A vedrebbe la velocità di B cambiare nel tempo, in disaccordo col principio di relatività.

Secondo principio della dinamica

In un sistema inerziale, una forza può solo cambiare la velocità di un punto materiale (un punto libero permane in uno stato di moto rettilineo uniforme). Per cui, forza e variazioni di velocità sono collegate tra loro.

Infatti, possiamo usare questa osservazione per definire una forza:

Diciamo che su un punto materiale, in un sistema inerziale, agisce una forza, F, se l'accelerazione del punto materiale è $\neq 0$.

Sperimentalmente si trova che la forza è proporzionale all'accelerazione di un punto materiale in un sistema inerziale. Poiché l'accelerazione è un vettore, anche la forza è un vettore. Possiamo quindi scrivere in un sistema inerziale:

$$\boxed{\vec{F} = m_i \cdot \vec{a}}$$

m_i si chiama massa inerziale. La massa inerziale è indipendente dal tipo di forza applicata al punto materiale. Rappresenta la resistenza che il punto esercita a cambiare la propria velocità.

Forza peso

- Massa gravitazionale: quantità che si misura con la bilancia

Unità di misura: $\boxed{kg}$ massa di 1 kg: massa di un campione apposito.

Su ogni corpo di massa m, sulla Terra, agisce una forza $\vec{p}$

- $$\boxed{\vec{p} = m\vec{g}}$$ FORZA PESO

$\vec{g}$ = accelerazione di gravità $\simeq 9.81\ m/s^2$ rivolta verso il basso

$\vec{g}$ è indipendente dal corpo considerato, ma dipende dalla quota a cui si trova il corpo (e in maniera minore dalla sua posizione sulla Terra).

- Sperimentalmente si trova che massa inerziale e massa gravitazionale sono uguali. Per cui possiamo scrivere il secondo principio della dinamica come

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Questa è la forma che useremo.

- Unità di misura della forza: 1 N (Newton)

$$\boxed{1N = 1\,kg \cdot \frac{m}{s^2}}$$

$\vec{F} = m\vec{a}$ corrisponde a un sistema di eq. differenziali

$$\begin{cases} F_x(x,y,z) = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_y(x,y,z) = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ F_z(x,y,z) = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

EQUAZIONI DEL MOTO

$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)$

In generale le forze dipendono dalla posizione del punto materiale a cui sono applicate.

Impulso e quantità di moto

$$\vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{f}\,dt = m\,d\vec{v}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}\,dt = \int_{v_1}^{v_2} m\,d\vec{v}$$

$$\int_{v_1}^{v_2} m\,d\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}\,dt \equiv \text{IMPULSO DELLA FORZA}$$

$\vec{q} = m\vec{v}$ QUANTITÀ DI MOTO

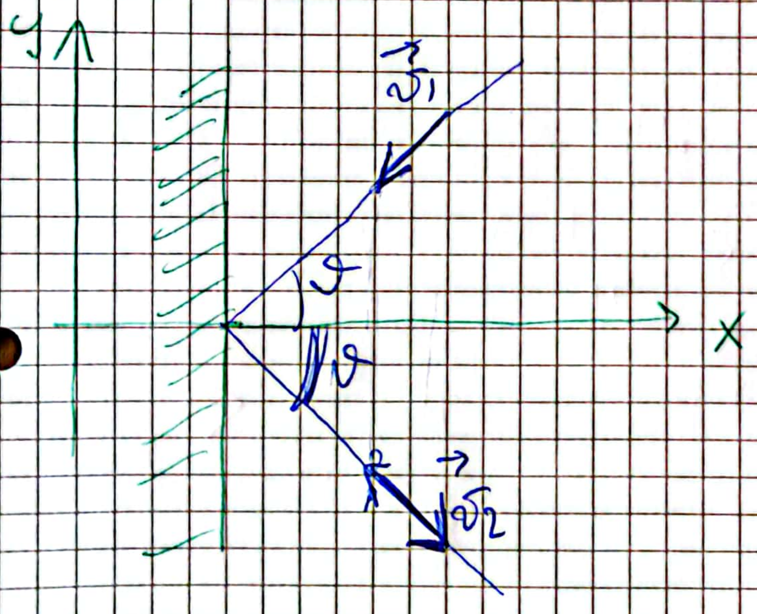
$$\boxed{\vec{I}_{12} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1 = \Delta\vec{q}}$$ Teorema dell'impulso e della q. di moto

Queste definizioni ci permettono di riscrivere il Secondo Principio della Dinamica come:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}}$$

Fai notare che questa vale anche nel caso di sistemi a masse variabili

Esempio



$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$

Urto elastico

Calcoliamo il valore medio della forza che il muro esercita sulla biglia, sapendo che il tempo di contatto è $\Delta t = 0.01$ secondi.

Vediamo $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$:

$$\begin{cases} q_{1x} = -mv_1 \cos\vartheta \\ q_{1y} = -mv_1 \sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} q_{2x} = mv_1 \cos\vartheta \\ q_{2y} = -mv_1 \sin\vartheta \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} I_{12x} = q_{2x} - q_{1x} = 2mv_1 \cos\vartheta \\ I_{12y} = q_{2y} - q_{1y} = 0 \end{cases}$$

- Notiamo che nel caso di urto elastico, la forza esercitata dalla parete è ortogonale alla parete stessa.

Il valore medio della forza è:

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}\, dt = \frac{1}{\Delta t} \vec{I}_{12}$$

- Quindi $\langle f_y \rangle = 0$, mentre

$$\boxed{\langle f_x \rangle = \frac{1}{\Delta t} I_{12x} = \frac{2mv_1 \cos\vartheta}{\Delta t}}$$

Se $m = 10\,g$, $v_1 = 10\,m/s$, $\vartheta = 30°$ abbiamo

$$\langle f_x \rangle = \frac{2 \times (1 \times 10^{-2}\,kg) \times (10\,m/s) \times (\cos 30°)}{0.01\,s} \simeq 17.32\,N$$

$\cos 30° \to \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Nota: $\langle f \rangle \propto \frac{1}{\Delta t}$

Esempio Moto di una punto materiale sotto azione di una forza costante.

$$\vec{f} = (f, 0, 0)$$

Ad esempio, moto di una carica elettrica puntiforme in un campo elettrico costante e uniforme. Altro esempio: moto di un punto materiale per effetto della forza peso.

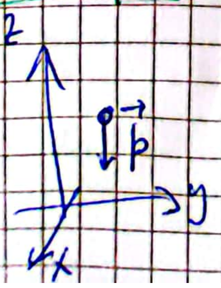
$$\vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow \quad v_y, v_z \text{ costanti}$$

$$\boxed{a_x = \frac{f}{m}} \qquad \vec{a} \text{ costante}$$

il moto è uniformemente accelerato, con accelerazione nella direzione della forza. componenti $\vec{v} \perp \vec{f}$ costanti

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2}\left(\frac{f}{m}\right) t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t \\ z(t) = z_0 + v_{0z} t \end{cases}$$

Esempio Nel caso specifico della forza peso

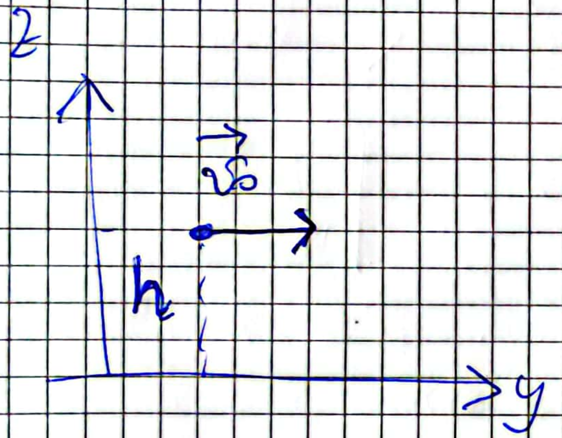


$$\vec{p} = m\vec{g} = m(0, 0, -g)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t \\ z(t) = z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

In particolare se il moto avviene nel piano yz:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_{0y} t \\ z(t) = z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



$$\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$$

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_0 t \\ z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Lo spostamento lungo y è:

$$\Delta y = y(t) - y_0 = v_0 t$$ moto rettilineo uniforme

Abbiamo già studiato questo moto in dettaglio in una lezione precedente. Abbiamo visto in particolare che la traiettoria è parabolica.

Calcoliamo ~~in~~ quanto tempo ci mette il punto materiale per raggiungere il suolo

$$h = 10\ m \qquad v_0 = 140\ km/h\ \text{(baseball)}$$

$$g = 9.81\ m/s^2 \qquad y_0 = 20m$$

$$v_0 = 140\ \frac{km}{h} = 140 \cdot \frac{1000\ m}{3600\ s} = \frac{140}{3.6}\ m/s \simeq \boxed{39\ m/s}$$

quindi:

$$z(\bar{t}) = 0 = h - \frac{1}{2} g \bar{t}^2 \Rightarrow \frac{1}{2} g \bar{t}^2 = h$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq \boxed{0.45\ s}$$

Calcoliamo lo spostamento lungo y nel tempo $\bar{t}$:

$$\Delta y(\bar{t}) = v_y \bar{t} = v_{0y} \bar{t} = 39 \times 0.45 \simeq \boxed{17.6\ m}$$

Calcoliamo la velocità lungo z al tempo $\bar{t}$:

$$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow v_z(t) = \frac{dz}{dt} = -gt$$

$$\Rightarrow v_z(\bar{t}) = -g\bar{t} \simeq \boxed{4.43\ m/s} = 4.43\ \frac{10^{-3}\ km}{\frac{1}{3600}\ h}$$

$$= -4.43 \times 3.6\ km/h \simeq \boxed{-16\ km/h}$$

Calcoliamo il modulo della velocità al tempo $\bar{t}$:

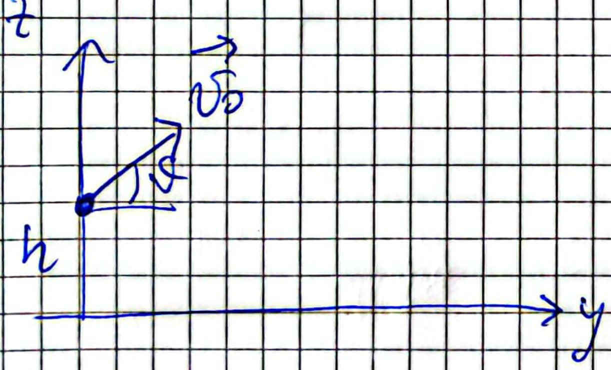
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_z^2(\bar{t}) + v_y^2(\bar{t})} = \sqrt{4.43^2 + 39^2} \simeq \boxed{39.25\ m/s}$$

$$\simeq \boxed{141\ km/h}$$

<u>Esempio</u> Come nel problema precedente, ma adesso:

$h = 10\ m$ $\qquad$ $v_0 = 140\ km/h$

$y_0 = 0$ $\qquad$ $\vartheta = 45° \ (= \pi/4)$



$$\begin{cases} v_{0y} = v_0 \cos\vartheta \\ v_{0z} = v_0 \sin\vartheta \end{cases}$$

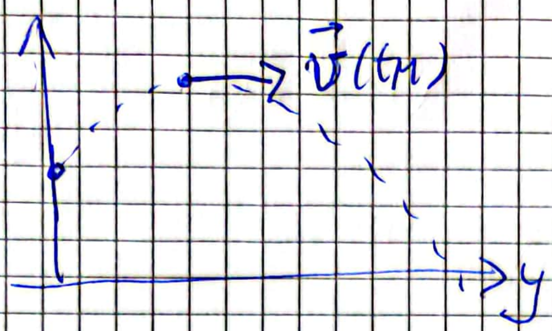
$$\cos\vartheta = \sin\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707$$

$$\boxed{\begin{cases} v_{0y} \simeq 27.5\ m/s \\ v_{0z} \simeq 27.5\ m/s \end{cases}}$$

$$\begin{cases} y(t) = v_{0y}\, t & \text{rettilineo uniforme lungo } y \\ z(t) = h + v_{0z}\, t - \frac{1}{2} g t^2 & \text{uniformem. accelerato lungo } z \end{cases}$$

Calcoliamo in quanto tempo il corpo raggiunge l'altezza massima. Denotiamo questo tempo con t_M.

Nel punto in cui l'altezza è massima:



$$v_z(t_M) = 0$$

$$v_z(t) = v_{0z} - gt \Rightarrow 0 = v_{0z} - g t_M \Rightarrow \boxed{t_M = \frac{v_{0z}}{g}}$$

Sostituendo i dati:

$$t_M = \frac{27.5 \, m/s}{9.81 \, m/s^2} \Rightarrow \boxed{t_M \simeq 2.8 \, sec}$$

Calcoliamo l'altezza massima:

$$z_{MAX} = z(t_M) = h + v_{0z} t_M - \frac{1}{2} g t_M^2$$

$$= h + \frac{v_{0z}^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{0z}^2}{g^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{MAX} = h + \frac{v_{0z}^2}{2g}}$$

Sostituendo i dati

$$z_{MAX} = 10 + \frac{(27.5)^2 \, m^2/s^2}{9.81 \, m/s^2} \simeq \boxed{87.1 \, m}$$

Calcoliamo il tempo necessario affinché il punto materiale raggiunge il suolo:

$$0 = h + v_{0z}\bar{t} - \frac{1}{2} g \bar{t}^2$$

da cui:

$$\frac{1}{2} g \bar{t}^2 - v_{0z}\bar{t} - h = 0 \Rightarrow \bar{t} = \frac{v_{0z}}{g} \pm \frac{\sqrt{v_{0z}^2 + 2gh}}{g}$$

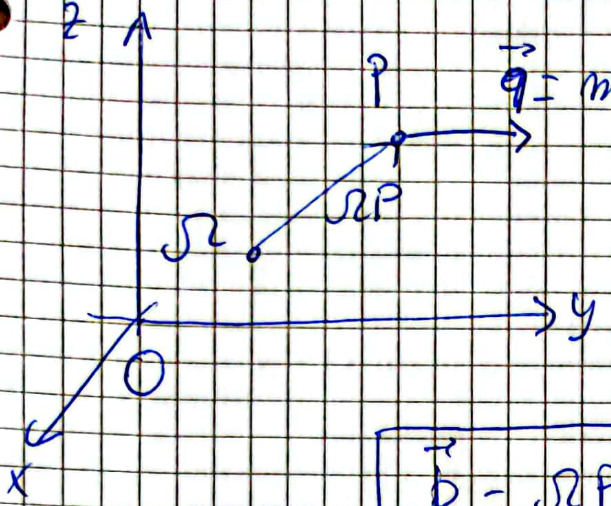
$$\bar{t} = \frac{v_{0z}}{g} \pm \frac{v_{0z}}{g}\sqrt{1 + \frac{2hg}{v_{0z}^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{t} \simeq 5.94\, s}$$

Calcoliamo lo spostamento lungo y:

$$y(t) = v_{0y}\, t \Rightarrow y(\bar{t}) = v_{0y}\bar{t} \approx \boxed{163.6\, m}$$

Momento angolare e momento delle forze



$$\boxed{\vec{p} = \Omega P \times \vec{q}}$$ MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt} \Rightarrow \Omega P \times \vec{f} = \Omega P \times \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{m} = \Omega P \times \vec{f}}$$ MOMENTO DELLA FORZA

quindi:

$$\vec{m} = \Omega \vec{P} \times \frac{d\vec{q}}{dt} .$$

Ora osserviamo che:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\Omega P \times \vec{q}) = \frac{d\Omega P}{dt} \times \vec{q} + \boxed{\Omega P \times \frac{d\vec{q}}{dt}}$$

per cui:

$$\vec{m} = \frac{d}{dt}(\Omega P \times \vec{q}) - \frac{d\Omega P}{dt} \times \vec{q} = \frac{d\vec{p}}{dt} - \frac{d\Omega P}{dt} \times \vec{q}$$

Inoltre:

$$\Omega P = \vec{r} - \vec{r}_\Omega$$

quindi:

$$\frac{d\,\Omega P}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} - \frac{d\vec{r}_\Omega}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_\Omega$$

Abbiamo quindi:

$$\vec{m} = \frac{d\vec{p}}{dt} - (\vec{v} - \vec{v}_\Omega)\times\vec{q} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{v}_\Omega \times \vec{q} - \vec{v}\times\vec{q}.$$

$$\vec{v}\times\vec{q} = m\vec{v}\times\vec{v} = 0$$

$$\Downarrow$$

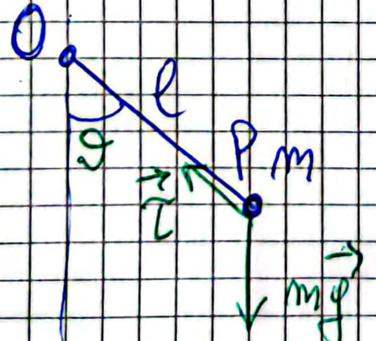
$$\boxed{\vec{m} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{v}_\Omega \times \vec{q}}$$

Se nel sistema inerziale considerato il punto Ω è fisso $\vec{v}_\Omega = 0$ possiamo scrivere:

$$\boxed{\vec{m} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Teorema del momento angolare

Esempio: pendolo semplice



Filo inestensibile

$\vec{\tau}$: reazione vincolare

La massa m si muove lungo un arco di circonferenza di raggio ℓ.

Potremmo applicare il secondo principio della dinamica, ma dovremmo conoscere $\vec{\tau}$. Questo si può determinare dalle equazioni del moto. Noi usiamo invece il teorema del momento angolare, che elimina $\vec{\tau}$ dalle equazioni.

Infatti $\vec{\tau}$ è sempre diretta verso il punto fisso O, quindi:

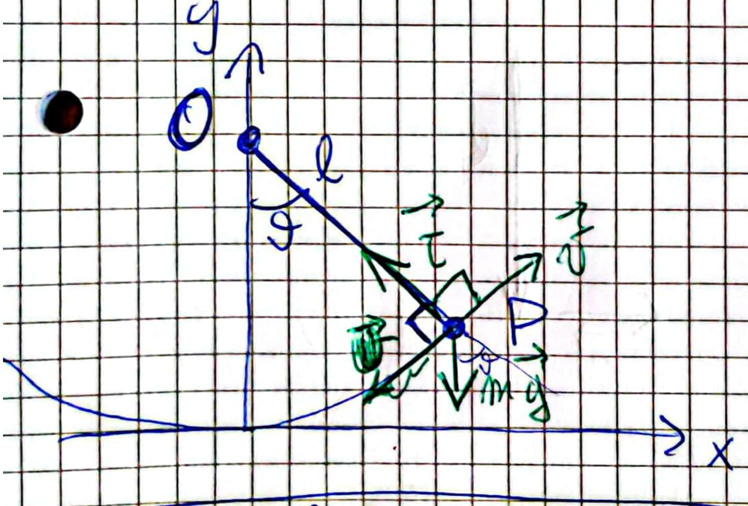
$$\boxed{OP \times \vec{\tau} = 0}$$

per cui:

$$\vec{m} = OP \times (\vec{\tau} + m\vec{g}) = \vec{OP} \times m\vec{g}$$

Abbiamo quindi:

$$\vec{m} = \vec{OP} \times m\vec{g} = \frac{d}{dt}(\vec{OP} \times m\vec{v})$$



Consideriamo il moto nel piano xy

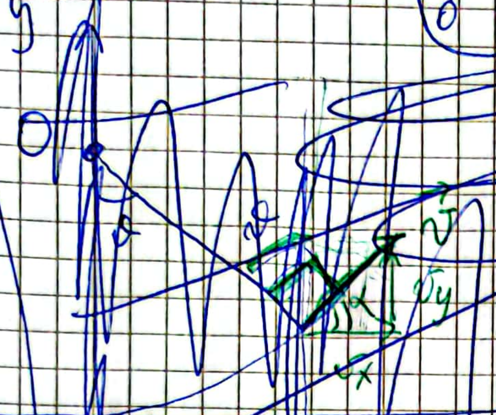
$$f_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_z = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$$(\vec{OP} \times \vec{v})_x = (OP)_y v_z - (OP)_z v_y = 0$$

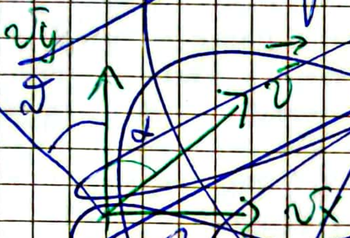
$$(\vec{OP} \times \vec{v})_y = (OP)_z v_x - (OP)_x v_z = 0$$

$$(\vec{OP} \times \vec{v})_z = (OP)_x v_y - (OP)_y v_x \neq 0$$

$$(\vec{OP}\times\vec{g})_z = (OP)_x\, g_y - (OP)_y \underbrace{g_x}_{0} = (OP)_x\, g_y = -g\,(OP)_x = \boxed{-g\,\ell\sin\vartheta}$$



$$\begin{cases} (OP)_x = \ell\sin\vartheta \\ (OP)_y = -\ell\cos\vartheta \end{cases}$$



$$\vartheta + \alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \vartheta - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} v_y = v\cos\alpha = v\sin\vartheta \\ v_x = v\sin\alpha = v\cos\vartheta \end{cases}$$

$$(\vec{OP}\times\vec{v})_z = (OP)_x\, v_y - (OP)_y\, v_x = \ell v\sin^2\vartheta + \ell v\cos^2\vartheta = \boxed{\ell v}$$

quindi:

$$(\vec{OP}\times m\vec{g})_z = -\ell m g\sin\vartheta$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{OP}\times m\vec{v}) = m\ell\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\ell m g\sin\vartheta = m\ell\frac{dv}{dt}} \quad \boxed{= m\ell^2\frac{d\omega}{dt}} \quad \text{pag. } \boxed{52}$$

$$v = \ell\omega = \ell\frac{d\vartheta}{dt} \quad\Rightarrow\quad -g\sin\vartheta = \ell\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) = \ell\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\vartheta = 0}$$ incognita: $\vartheta(t)$

Approssimazione piccoli angoli: $\sin\vartheta \simeq \vartheta$ da cui:

$$\boxed{\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\vartheta = 0}$$

$$\boxed{\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\omega t + \phi)} \quad (*)$$ MOTO ARMONICO

$$\boxed{\omega = \sqrt{g/\ell}}$$

Verifichiamo che la (*) è una soluzione dell'equazione differenz.

$$\begin{cases} \dfrac{d\vartheta}{dt} = \vartheta_0 \omega \cos(\omega t + \phi) \\ \dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\vartheta_0 \omega^2 \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\vartheta_0 \omega^2 \sin(\omega t + \phi) + \frac{g}{\ell}\vartheta_0 \sin(\omega t + \phi) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = g/\ell$$

quindi la (*) è soluzione dell'eq. differenziale, per ogni ϑ_0 e ϕ, se $\omega^2 = g/\ell$.

ϑ_0 e ϕ possono determinarsi con le condizioni iniziali.

$$\vartheta(t=0) = \vartheta_0 \sin\phi$$

$$\left.\frac{d\vartheta}{dt}\right|_{t=0} = \vartheta_0 \omega \cos\phi$$

Per esempio, se al tempo $\boxed{t=0}$ abbiamo $\boxed{\vartheta = \vartheta_M}$ con $\boxed{\frac{d\vartheta}{dt}=0}$ possiamo prendere

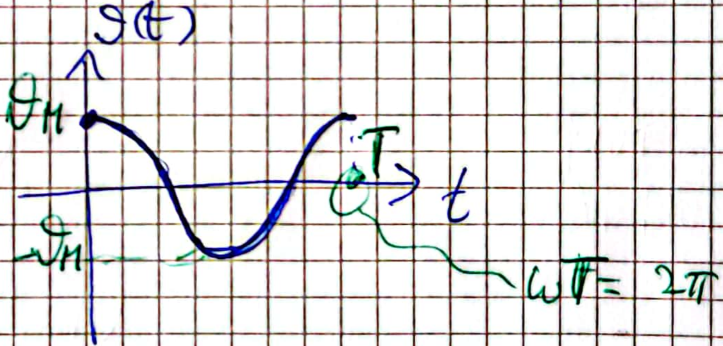
$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \vartheta_0 = \vartheta_M$$

e quindi:

$$\boxed{\vartheta(t) = \vartheta_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \quad \vartheta_M \cos\omega t$$

Analisi del moto

$$\vartheta(t) = \vartheta_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \vartheta_M \cos(\omega t)$$



- ϑ varia nell'intervallo $[-\vartheta_M, \vartheta_M]$
- il moto è periodico, con periodo T dato da

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

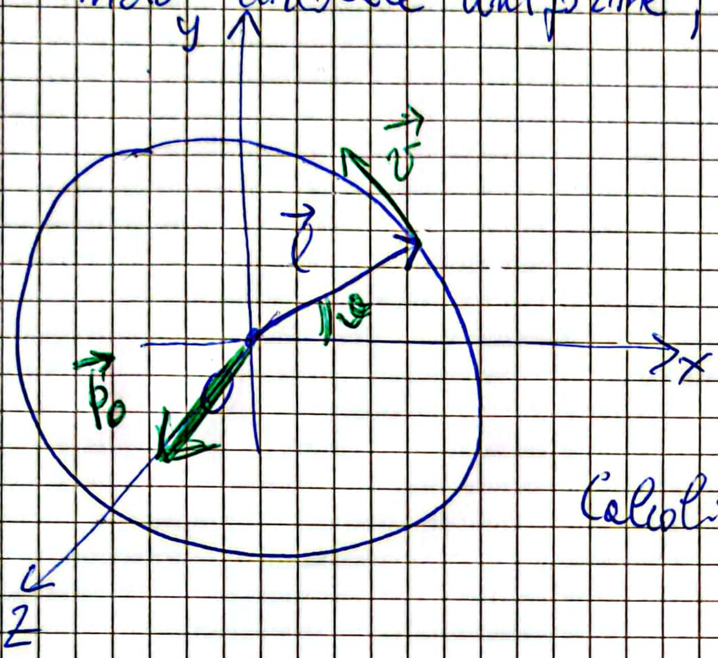
Quindi, il moto del pendolo semplice è un moto armonico, con pulsazione $\omega = \sqrt{g/l}$ e periodo $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

NOTA Il periodo non dipende da m, ma solo da l e g.

Scanned with CamScanner

• Esempio: mom. angolare di un punto materiale in moto circolare uniforme.

Consideriamo un punto materiale di massa m che si muove di moto circolare uniforme, nel piano xy.



Assumiamo che il moto avvenga in senso antiorario.

Calcoliamo $\vec{p}$ rispetto ad O.

$$\vec{p}_0 = m\,\vec{\ell} \times \vec{v}$$

Notiamo che $\vec{\ell}$ e $\vec{v}$ sono perpendicolari tra loro, quindi:

$$|\vec{p}_0| = m\ell v$$

Inoltre, per sovrapporre $\vec{\ell}$ a $\vec{v}$ con un angolo minore di π, bisogna ruotare $\vec{\ell}$ in senso antiorario, quindi il vettore $\vec{p}_0$ è lungo l'asse z positivo:

$$\boxed{\vec{p}_0 = m\ell v\,\hat{z}}$$

Moto antiorario

Se il moto del punto materiale avvenisse in senso orario avremmo:

$$\boxed{\vec{p}_0 = -ml v \hat{z}}$$ Moto orario

Ora osserviamo che nel moto circolare uniforme

$$v = l\omega = l \frac{d\vartheta}{dt}$$

Inoltre:

$$\begin{cases} \vec{p}_0 = ml^2 \omega \hat{z} & \text{moto antiorario} \\ \vec{p}_0 = -ml^2 \omega \hat{z} & \text{moto orario} \end{cases}$$

Notiamo che ~~[illegible]~~ per il moto piano nel piano xy:

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \omega \hat{z} & \text{moto antiorario} \\ \vec{\omega} = -\omega \hat{z} & \text{moto orario} \end{cases}$$

In definitiva, in entrambi i casi:

$$\boxed{\vec{p}_0 = m l^2 \vec{\omega}}$$

Momento angolare di un punto materiale in moto circolare uniforme.

da fare prima dell'esempio a pg. 45

- Esempio: momento angolare di un punto materiale in moto circolare generico.

Anche per questo moto vale:

$$\boxed{\vec{p}_0 = ml^2 \vec{\omega}}$$

Momento angolare di un punto materiale in moto

Infatti, l'unica ipotesi che abbiamo fatto nell'esempio precedente è che $\vec{\ell}$ e $\vec{v}$ siano perpendicolari, e questo vale anche nel moto circolare vario.

Ricapitolando: per un punto materiale in moto circolare, sia uniforme che vario:

$$\boxed{\vec{p}_0 = m\ell^2\vec{\omega}}$$

In particolare, se il moto è nel piano xy, $\vec{p}_0$ è diretto lungo l'asse z.

Esempio: ulteriore analisi del moto armonico.

$$\vartheta(t) = \vartheta_M \cos\omega t \qquad \omega = \sqrt{g/\ell}$$

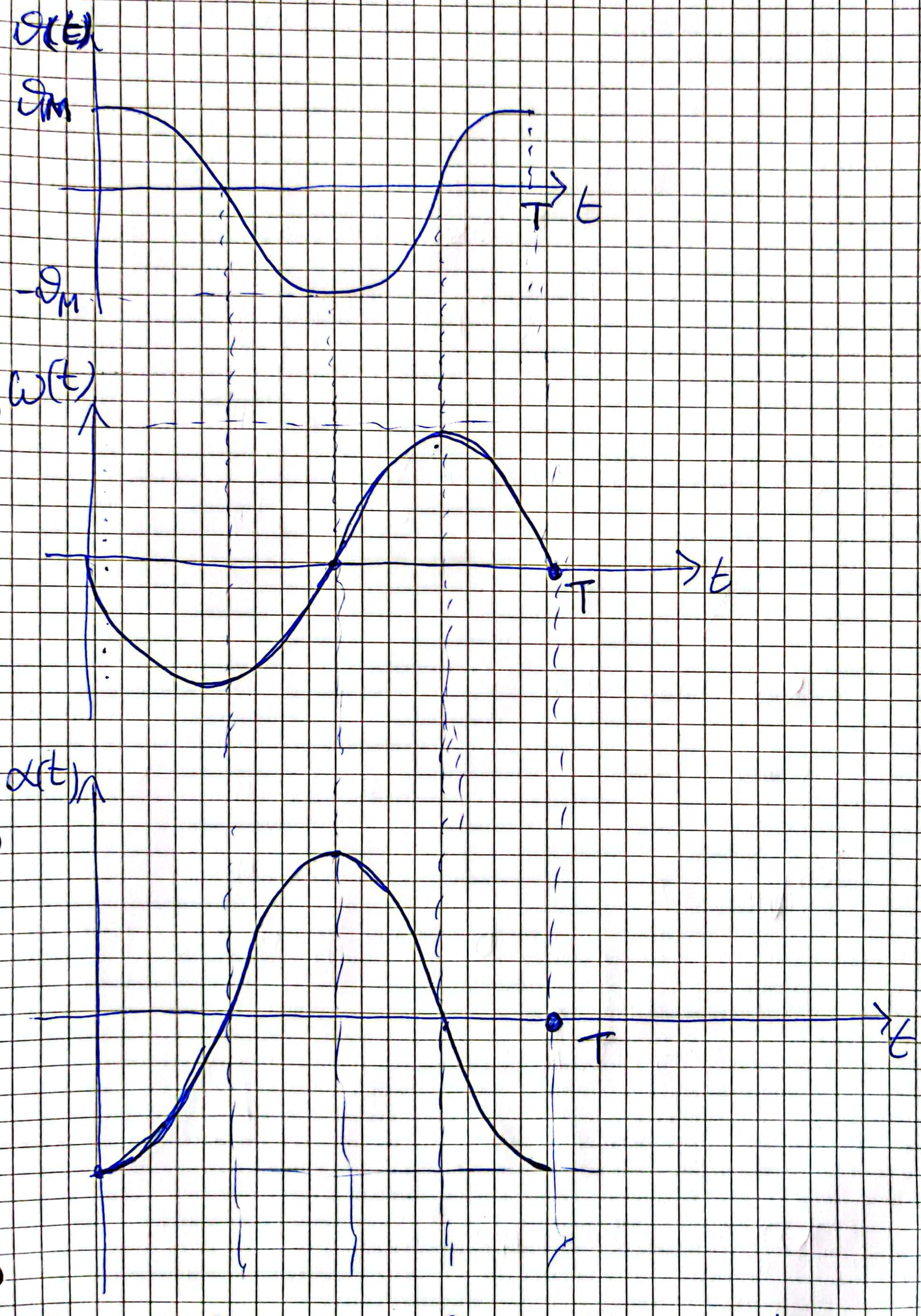
$$\vartheta(0) = \vartheta_M \qquad T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

$$\omega(0) = \left.\frac{d\vartheta}{dt}\right|_{t=0} = -\omega\vartheta_M \sin(0) = 0$$

Vediamo l'accelerazione angolare.

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2\vartheta_M\cos\omega t = -\omega^2\vartheta(t) \\[2ex] \omega = \dfrac{d\vartheta}{dt} = -\omega\vartheta_M \sin\omega t \end{cases}$$

ω e α sono periodiche, con lo stesso periodo T di $\vartheta(t)$.



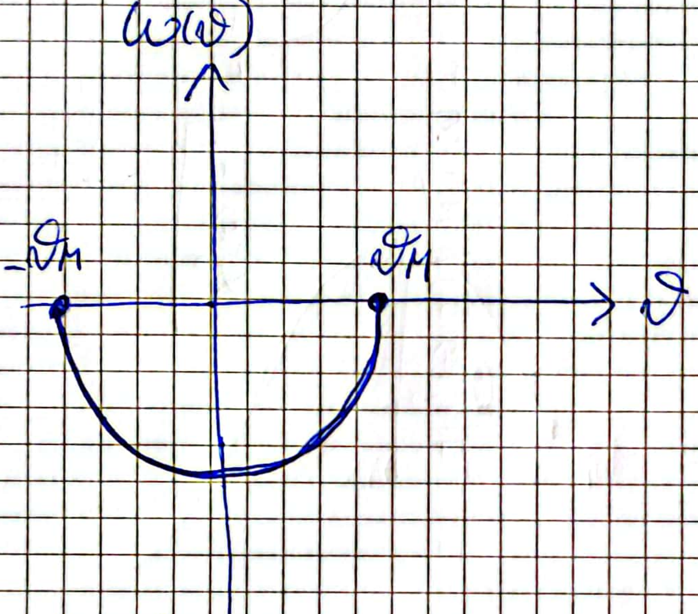
In particolare, quando $\vartheta = 0$, il modulo di ω è massimo e quello di α è anche zero.

Plot di $\boxed{\omega = \omega(\vartheta)}$ e $\boxed{\alpha = \alpha(\vartheta)}$:

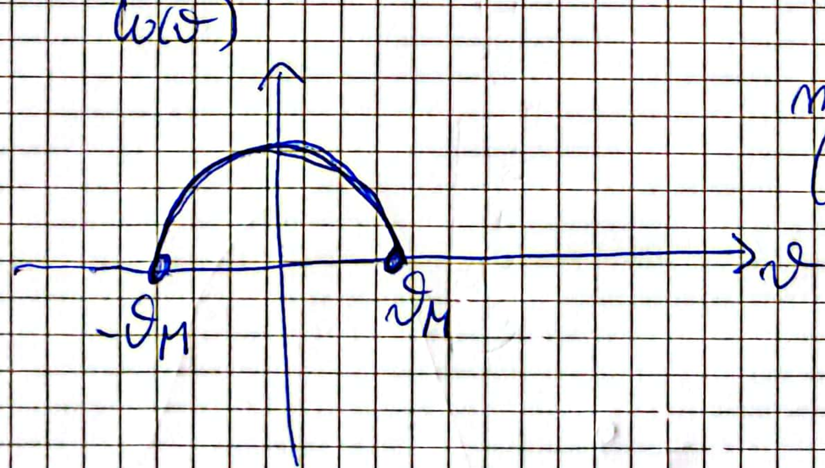
$$\begin{cases} \vartheta(t) = \vartheta_M \cos\omega t \\ \omega(t) = -\omega\,\vartheta_M \sin\omega t = \mp\,\omega\sqrt{\vartheta_M^2 - \vartheta^2(t)} \\ \alpha(t) = -\omega^2 \vartheta_M \cos\omega t = -\omega^2 \vartheta(t) \end{cases}$$

$(-)$: $\sin x > 0$

$(+)$: $\sin x < 0$



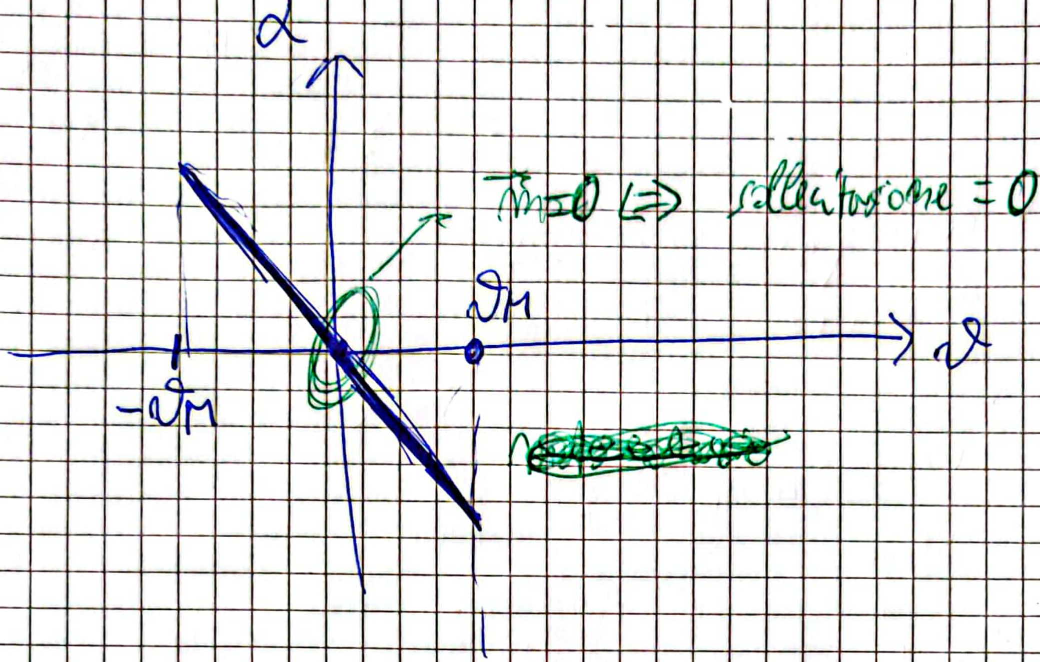
moto orario (prima metà dell'oscillazione)



moto antiorario (seconda metà dell'oscillazione)

Fai il disegno del pendolo alla lavagna evidenziando le zone ϑ e $\omega(\vartheta)$ corrispondenti

$$\alpha(t) = -\omega^2 \vartheta(t) \Rightarrow \boxed{\alpha = -\omega^2 \vartheta}$$



il momento della forza richiama il punto materiale nella posizione $\vartheta = 0$.

NOTA **Conservazione del momento angolare**

$$\vec{m} = \vec{OP} \times \vec{f} = \frac{d\vec{p}_O}{dt}$$

Se $\vec{f}$ è diretta sempre verso un punto fisso O, allora

$$\vec{m} = \vec{OP} \times \vec{f} = 0 \quad \forall P$$

In questo caso si dice che la forza è CENTRALE.
Il teorema del momento angolare mostra quindi che per una forza centrale:

$$\frac{d\vec{p}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_O = \text{COSTANTE}}$$