

Indice

Presentazione della terza edizione italiana

Prefazione

Capitolo 1 Introduzione

- 1.1 Introduzione
- 1.2 Il metodo scientifico
- 1.3 Unità di misura fondamentali
- 1.4 Sistemi di unità di misura
- 1.5 Dimensioni, unità di misura e cifre significative
- 1.6 Tecniche di soluzione dei problemi

Riepilogo

Quesiti

Esercizi

Capitolo 2 I vettori

- 2.1 Introduzione
- 2.2 Scalari e vettori
- 2.3 Somma grafica di vettori
- 2.4 Vettori unitari (o versori) e scomposizione dei vettori
- 2.5 Somma vettoriale con il metodo analitico
- 2.6 Altre operazioni fra vettori
- 2.7 Campo scalare e campo vettoriale

Riepilogo

Quesiti

Esercizi

Problemi

Capitolo 3 La cinematica del punto materiale in tre dimensioni e il moto in una dimensione

- 3.1 Introduzione
- 3.2 Vettori posizione e spostamento
- 3.3 La velocità
- 3.4 L'accelerazione
- 3.5 Il moto con accelerazione costante
- 3.6 La caduta libera

Riepilogo

Quesiti

Esercizi

Problemi

Capitolo 4 La cinematica del punto materiale in due dimensioni e i moti relativi

- 4.1 Introduzione
- 4.2 Velocità e accelerazione
- 4.3 Accelerazione costante: il moto dei proiettili
- 4.4 Il moto circolare uniforme
- 4.5 Accelerazione centripeta (o normale) e accelerazione tangenziale
- 4.6 Moti relativi

Riepilogo

Quesiti

Esercizi

Problemi

IX Capitolo 5 Le leggi del moto di Newton ovvero i tre principi della dinamica

- | | | | |
|----|------------|--|-----|
| IX | Capitolo 5 | Le leggi del moto di Newton ovvero i tre principi della dinamica | 79 |
| XI | I | 5.1 Introduzione | 79 |
| | 1 | 5.2 Forza e massa | 79 |
| | 1 | 5.3 La prima legge di Newton e il primo principio della dinamica | 82 |
| | 2 | 5.4 La seconda legge di Newton e il secondo principio della dinamica | 86 |
| | 4 | 5.5 La terza legge di Newton o il principio di azione e reazione | 87 |
| | 5 | 5.6 La forza peso | 90 |
| | 10 | 5.7 Risoluzione dei problemi di meccanica | 92 |
| | 11 | Riepilogo | 95 |
| | 11 | Quesiti | 96 |
| | 11 | Esercizi | 97 |
| | | Problemi | 100 |

X Capitolo 6 Applicazioni delle leggi del moto di Newton

- | | | | |
|----|------------------|--|-----|
| X | Capitolo 6 | Applicazioni delle leggi del moto di Newton | 103 |
| 13 | 6.1 Introduzione | 103 | |
| | 13 | 6.2 Forze di contatto: la forza normale e la forza d'attrito | 103 |
| | 15 | 6.3 Dinamica del moto circolare uniforme | 110 |
| | 18 | 6.4 Il moto in sistemi di riferimento non inerziali | 114 |
| | 20 | Riepilogo | 116 |
| | 22 | Quesiti | 117 |
| | 23 | Esercizi | 118 |
| | 24 | Problemi | 121 |
| | 25 | | |
| | 26 | | |
| | 27 | | |

XI Capitolo 7 La legge di gravitazione universale di Newton

- | | | | |
|----|------------------|---|-----|
| XI | Capitolo 7 | La legge di gravitazione universale di Newton | 125 |
| 29 | 7.1 Introduzione | 125 | |
| | 29 | 7.2 La legge di gravitazione universale | 125 |
| | 31 | 7.3 La costante di gravitazione G | 129 |
| | 35 | 7.4 Massa gravitazionale e massa inerziale | 133 |
| | 39 | 7.5 La variazione di g sulla superficie della Terra | 134 |
| | 43 | 7.6 Il campo gravitazionale | 135 |
| | 46 | 7.7 Le leggi di Keplero e la legge di gravitazione | 137 |
| | 46 | Riepilogo | 139 |
| | 48 | Quesiti | 139 |
| | 51 | Esercizi | 140 |
| | | Problemi | 143 |

XII Capitolo 8 Lavoro ed energia

- | | | | |
|-----|------------------|--|-----|
| XII | Capitolo 8 | Lavoro ed energia | 145 |
| 53 | 8.1 Introduzione | 145 | |
| | 53 | 8.2 Lavoro compiuto da una forza costante | 145 |
| | 58 | 8.3 Il prodotto scalare | 147 |
| | 63 | 8.4 Lavoro compiuto da una forza variabile | 149 |
| | 66 | 8.5 Il teorema lavoro-energia e l'energia cinetica | 155 |
| | 67 | 8.6 La potenza | 160 |
| | 70 | Riepilogo | 162 |
| | 70 | Quesiti | 162 |
| | 72 | Esercizi | 163 |
| | 75 | Problemi | 165 |



Capitolo 9	La conservazione dell'energia	167	Capitolo 13	Dinamica del moto rotatorio e leggi generali del moto dei sistemi	269
9.1	Introduzione	167	13.1	Introduzione	269
9.2	Sistemi conservativi unidimensionali	167	13.2	Momento angolare di un punto materiale	269
9.3	Analisi grafica dei sistemi conservativi	173	13.3	Il momento angolare totale di un sistema di punti materiali e le equazioni cardinali della meccanica	273
9.4	Forze conservative ed energia potenziale in tre dimensioni	175	13.4	Dinamica della rotazione di un corpo rigido intorno a un asse fisso	275
9.5	La conservazione dell'energia meccanica	178	13.5	Lavoro ed energia per un sistema di corpi	280
9.6	Forze non conservative e lavoro interno	180	13.6	La conservazione del momento angolare	284
9.7	La legge di conservazione dell'energia	182	13.7	Il moto del giroscopio	288
9.8	Il moto dei satelliti e la velocità di fuga	183			
Riepilogo		187	Riepilogo		290
Quesiti		188	Quesiti		291
Esercizi		189	Esercizi		293
Problemi		192	Problemi		296
Capitolo 10	La quantità di moto e il moto dei sistemi	195	Capitolo 14	Oscillazioni	301
10.1	Introduzione	195	14.1	Introduzione	301
10.2	Il centro di massa	195	14.2	Cinematica del moto armonico	301
10.3	Il moto del centro di massa	197	14.3	Dinamica del moto armonico	305
10.4	La quantità di moto	200	14.4	L'energia dell'oscillatore armonico	307
10.5	La conservazione della quantità di moto	201	14.5	Esempi di moto armonico	308
10.6	L'impulso	203	14.6	Moto armonico e moto circolare uniforme	314
10.7	Urti	205	14.7	Il moto armonico smorzato	316
10.8	Il moto dei razzi	212	14.8	Oscillazioni forzate e risonanza	318
Riepilogo		213	Riepilogo		320
Quesiti		214	Quesiti		320
Esercizi		215	Esercizi		321
Problemi		219	Problemi		324
Capitolo 11	Equilibrio statico di un corpo rigido	221	Capitolo 15	Solidi e fluidi	327
11.1	Introduzione	221	15.1	Introduzione	327
11.2	I corpi rigidi e il loro equilibrio	221	15.2	Proprietà dei solidi	327
11.3	Momento di una forza rispetto a un asse	223	15.3	La densità	331
11.4	Condizioni per l'equilibrio statico	225	15.4	La pressione in un fluido statico	332
11.5	Il centro di gravità	230	15.5	Il principio di Archimede	337
11.6	Il prodotto vettoriale e il momento di una forza	232	15.6	L'equazione di Bernoulli	338
Riepilogo		236	15.7	La viscosità	345
Quesiti		237	Riepilogo		347
Esercizi		237	Quesiti		347
Problemi		240	Esercizi		350
			Problemi		353
Capitolo 12	Cinematica del moto rotatorio	243	Capitolo 16	Temperatura e calore	355
12.1	Introduzione	243	16.1	Introduzione	355
12.2	Traslazione e rotazione di un corpo rigido	243	16.2	Descrizione microscopica e macroscopica	355
12.3	Misura degli angoli	245	16.3	L'equilibrio termico e il principio zero della termodinamica	356
12.4	Coordinata, velocità e accelerazione angolari	246	16.4	I termometri e la scala della temperatura del gas perfetto	358
12.5	Cinematica della rotazione intorno a un asse fisso	248	16.5	Altre scale termometriche	362
12.6	Relazioni tra grandezze lineari e grandezze angolari	250	16.6	La dilatazione termica	363
12.7	Energia cinetica di rotazione: il momento di inerzia	253	16.7	La trasmissione del calore	365
12.8	Il momento di inerzia	255	Riepilogo		371
12.9	Rotolamento di un corpo rigido	259	Quesiti		372
Riepilogo		262	Esercizi		372
Quesiti		263	Problemi		375
Esercizi		264			
Problemi		266			

Capitolo 17	Il primo principio della termodinamica	377			
17.1	Introduzione	377	19.4	Reversibilità e ciclo di Carnot	433
17.2	Equazioni di stato	377	19.5	La temperatura termodinamica	435
17.3	Calore specifico e calore latente	381	19.6	L'entropia	438
17.4	Lavoro e trasformazioni termodinamiche	384	19.7	L'entropia e il secondo principio	443
17.5	Il primo principio della termodinamica	387	Riepilogo		445
17.6	Alcune applicazioni del primo principio	390	Quesiti		446
		395	Esercizi		447
Riepilogo		395	Problemi		449
Quesiti		396			
Esercizi		399			
Problemi					
Capitolo 18	La teoria cinetica dei gas	401	Capitolo 20	Brevi cenni sulle onde e sul suono	453
18.1	Introduzione	401	20.1	Introduzione	453
18.2	Modello molecolare di un gas perfetto	401	20.2	Caratterizzazione delle onde	453
18.3	L'interpretazione microscopica della temperatura	405	20.3	Onde progressive	454
18.4	L'equipartizione dell'energia	407	20.4	Onde armoniche ed equazione delle onde	459
18.5	Capacità termiche dei gas perfetti e dei solidi elementari	409	20.5	L'equazione delle onde dedotta dalla seconda legge di Newton	462
18.6	Trasformazione adiabatica di un gas perfetto	414	20.6	Densità di energia, potenza e intensità di un'onda	464
18.7	La distribuzione delle velocità molecolari	416	20.7	Le onde sonore	468
		418	20.8	L'udito	471
Riepilogo		419	Riepilogo		474
Quesiti		420	Quesiti		475
Esercizi		422	Esercizi		476
Problemi			Problemi		479
Capitolo 19	Il secondo principio della termodinamica	425	Appendice A	Calcolo differenziale	483
19.1	Introduzione	425	Appendice B	Costanti fondamentali	487
19.2	Le macchine termiche e il secondo principio	425	Appendice C	Calcolo integrale ed equazioni differenziali	488
19.3	Le macchine frigorifere e il secondo principio	429	Appendice D	Approssimazioni matematiche e formule	495
			Appendice E	Tavola periodica degli elementi	496
			Appendice F	Trigonometria	498
			Appendice G	Soluzioni di alcuni esercizi e problemi	500
			Indice analitico		511

CAPITOLO I

INTRODUZIONE

1.1 INTRODUZIONE

Fino al 1850 circa, vi furono testi e corsi aventi per oggetto quella che era chiamata filosofia naturale o sperimentale. Il nome testimoniava la contrapposizione tra le discipline che dipendevano dagli esperimenti e quelle che, come la letteratura e la religione, non ne dipendevano. Con il progressivo accumularsi dei risultati e delle conclusioni della filosofia sperimentale, divenne sempre più difficile per il singolo studioso occuparsi dell'intera disciplina, e questa cominciò a suddividersi. Già molto prima del 1850 la chimica, l'astronomia, la geologia e altre scienze si erano costituite in discipline indipendenti. Il nucleo che rimase in seguito a queste scissioni prese il nome di *fisica*. A causa della sua importanza cruciale per tutte le scienze, un certo grado di conoscenza e di comprensione della fisica è necessario in molte discipline.

La fisica è una scienza quantitativa che comprende meccanica, termologia, elettricità e magnetismo, ottica, acustica. Questi argomenti fanno parte della fisica classica. Se in un problema fisico svolgono un ruolo significativo velocità prossime a quella della luce o dimensioni vicine a quelle di un atomo, entrano in gioco i temi della fisica moderna, ossia gli sviluppi del ventesimo secolo, che comprendono relatività e meccanica quantistica.

La fisica è lo studio di sistemi particolarmente semplici, come i singoli atomi. I metodi della scienza si manifestano spesso in modo più chiaro nello studio di questi semplici sistemi della fisica che in molte altre scienze: per questo sovente la fisica è considerata un modello per il «metodo scientifico».

1.2 IL METODO SCIENTIFICO

La base della filosofia sperimentale e della fisica in particolare è il metodo che viene utilizzato per raggiungere la comprensione dei fenomeni naturali: il *metodo scientifico*. Tale metodo si basa sulle *misurazioni* e sugli *esperimenti* e ha come scopo la descrizione *oggettiva, razionale e quantitativa* dei fenomeni. Il primo passo di questo procedimento consiste nella definizione dei concetti e delle grandezze in gioco nei fenomeni che si intendono studiare. Per soddisfare ai criteri di oggettività, razionalità e quantitatività si è adottata quella che è stata chiamata la *definizione operativa*: i concetti scientifici si possono definire solo partendo dall'esperienza e quindi solo utilizzando le operazioni che tale esperienza richiede; questo significa che un concetto scientifico e una grandezza fisica possono essere definiti solo precisando tutte le operazioni necessarie a misurarli. Gli esperimenti servono proprio a questo, a misurare grandezze e a scoprire o verificare le possibili relazioni fra loro. Le misurazioni che si effettuano negli esperimenti portano ad associare un numero a ogni grandezza misurata. Va qui ricordato che nel concetto di misura è insito il concetto di *incertezza* che generalmente viene chiamato *errore* e che dà una stima dell'attendibilità della misura.

Il criterio di oggettività impone che la ripetizione delle misure delle stesse grandezze, nelle stesse condizioni, anche con strumentazione diversa, porti sempre a risultati compatibili fra loro, cioè uguali entro gli errori delle misurazioni. Questo "vincolo" (chiamato di *riproduciibilità*) è di cruciale importanza perché implica la validità dei ri-

Definizione operativa delle
grandezze fisiche.

Errori di misura.

Esercizi. La maggior parte degli esercizi non presenta difficoltà, richiedendo spesso un semplice calcolo in un solo passaggio. Dal momento che ciascun esercizio è connesso a un particolare paragrafo del capitolo, per affrontarlo allo studente basta padroneggiare un numero limitato di argomenti.

Problemi. I problemi sono di norma più difficili degli esercizi, richiedendo diversi passaggi e la conoscenza di una più ampia gamma di argomenti. Alcuni problemi pongono approfondimenti di quanto esposto nel testo, e in qualche caso possono essere assai impegnativi.

gli Autori

sultati ottenuti e quindi porta a una conoscenza di tipo universale, non legata al singolo soggetto che conduce gli esperimenti.

Poiché le misurazioni portano alla determinazione di numeri per le grandezze che entrano nei fenomeni fisici, il linguaggio che la Fisica usa per descrivere i fenomeni naturali è quello della Matematica. Quindi non solo le grandezze saranno rappresentate da numeri, ma le relazioni esistenti in natura fra le grandezze saranno espresse in termini di relazioni analitiche. Si può dire che l'oggettività della Matematica sia una condizione necessaria per l'oggettività della descrizione dei fenomeni.

Leggi fisiche.

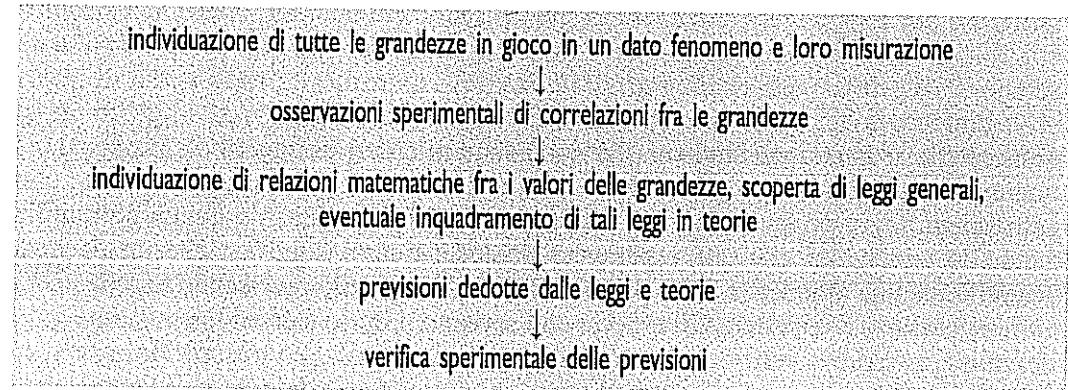
Le relazioni quantitative fra grandezze, ricavate dagli esperimenti, possono avere carattere generale e riguardare un insieme di fenomeni; in questo caso tali relazioni mostrano l'esistenza di leggi ed esprimono quelle che vengono chiamate *leggi fisiche*. Si deve notare che le leggi fisiche così ricavate risultano valide entro gli errori con cui si sono misurate le grandezze fisiche che entrano in relazione. Uno dei compiti dei ricercatori è, pertanto, proprio quello di raffinare sempre più le misure per verificare ed eventualmente correggere o ampliare le leggi fisiche.

Teorie.

L'insieme dei risultati sperimentali e delle leggi fisiche trovate in un dato campo può essere analizzato razionalmente per trovarne la spiegazione e l'interpretazione. Questo procedimento porta alla enunciazione di *teorie*. In pratica una teoria è l'inquadramento in uno schema razionale e quantitativo delle leggi fisiche. All'interno delle teorie esistono delle affermazioni, delle assunzioni, delle regole di validità che vengono ricavate dalle osservazioni, ma mediante processi di generalizzazione, di estrappolazione e alle volte di astrazione. Tali affermazioni sono dette *principi* e costituiscono la base delle teorie e delle leggi. La validità di tali principi non viene mai assunta come un dogma, ma viene continuamente verificata, vagliata e riprovata sperimentalmente confrontando le previsioni delle teorie con le osservazioni sperimentali.

Principi.

Il procedimento che, partendo dalle osservazioni sperimentali, arriva a stabilire leggi generali e teorie viene chiamato procedimento *induttivo*. Vi è poi quel momento del metodo scientifico, chiamato *deduttivo*, in cui dalle leggi e dalle teorie si prevedono fenomeni nuovi e si calcolano risultati relativi a particolari situazioni. L'esistenza di tali fenomeni nuovi e la correttezza delle previsioni viene poi controllata sperimentalmente. Questo momento di *verifica sperimentale* assume un ruolo essenziale nel progresso della scienza in quanto porta o alla conferma della validità delle leggi e delle teorie o, in caso di contraddizioni e contrasti fra previsioni e risultati degli esperimenti di verifica, alla loro *invalidazione*. In quest'ultimo caso si aprono nuovi campi di indagine, si iniziano nuove ricerche sperimentali e speculazioni teoriche che allargano la conoscenza della natura e delle sue leggi. A chi non è abituato a ragionare scientificamente può sembrare un paradosso, ma l'invalidazione di una teoria è un evento fortunato e fruttuoso: la storia del progresso delle scienze e della conoscenza umana è costellata di tali eventi. Schematicamente si può riassumere il procedimento del metodo scientifico in questo modo:



I.3 UNITÀ DI MISURA FONDAMENTALI

Come abbiamo visto, in fisica le grandezze vengono definite tramite il procedimento che porta alla loro misura. Tale misura viene espressa con un numero e con l'unità di misura a cui il numero si riferisce, per esempio il metro se si tratta di una misura di

lunghezza. Spesso le misure devono essere espresse utilizzando più di una unità di misura. La velocità, per esempio, è di solito misurata in metri al secondo. I metri e i secondi devono essere riferibili a un metro campione e a un secondo campione.

Nella prima parte di questo corso si farà riferimento a tre sole unità di misura fondamentali, relative al tempo, alla lunghezza e alla massa. Un'ulteriore unità fondamentale si renderà necessaria successivamente, quando verrà trattata l'elettricità. Le unità di misura di tutte le altre grandezze che compariranno in questa parte del corso possono essere ricavate a partire da quelle del tempo, della lunghezza e della massa. Dal momento che queste tre grandezze fondamentali non sono definite in termini di altre, sono dette a volte *indefinibili*. I campioni del tempo, della lunghezza e della massa sono determinati da prescrizioni che forniscono un metodo per riprodurli e per confrontarli con le grandezze da misurare: una definizione di questo genere è proprio una definizione operativa delle grandezze tempo, lunghezza e massa, in quanto specifica appunto le operazioni che si debbono eseguire per riprodurre i campioni e per confrontarli con le grandezze da misurare. Quindi, benché il tempo, la lunghezza e la massa siano grandezze non suscettibili di essere definite in termini di altre grandezze, ciascuna di esse ammette una definizione di carattere operativo.

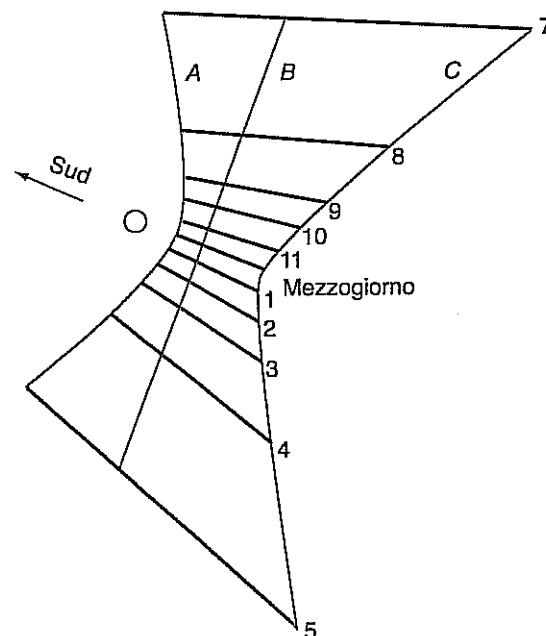
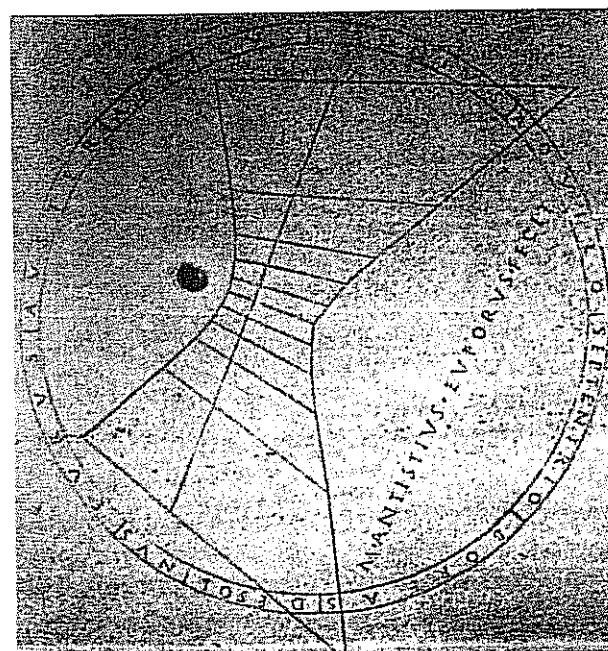
Vanno tenute presenti le caratteristiche che sono richieste in un campione di unità di misura:

1. Deve essere invariabile, di modo che le misurazioni effettuate siano sempre ripetibili.
2. Deve essere facilmente riproducibile, in modo che il maggior numero possibile di laboratori possa dotarsi di una sua copia.
3. Deve essere preciso, in modo che il campione risulti riproducibile con il più alto grado di precisione consentito dalla tecnologia.
4. Deve esserci su di esso un accordo universale, cosicché le misure ottenute in differenti paesi siano confrontabili.

A titolo di esempio si consideri la definizione dell'unità di misura del tempo. Il secondo fu definito in origine a partire dalla durata del giorno. In seguito si scoprì che la lunghezza del giorno quale veniva misurata da orologi basati su altri fenomeni variava nel corso dell'anno, da anno ad anno e da secolo a secolo. Se il secondo fosse ancora definito come 1/86400 di giorno, tali variazioni della durata del giorno sarebbero impossibili per definizione. Ma una simile definizione avrebbe conseguenze sconcertanti: in base ad essa, il periodo delle vibrazioni di un atomo o la velocità della luce risulterebbero dipendere dalla data in cui venissero misurati. Dal momento che siamo convinti che le vibrazioni degli atomi e la velocità della luce non varino nel tempo, è da preferirsi una definizione dell'unità di tempo che si basi sulle proprietà degli atomi o su grandezze che, come la velocità della luce, sono considerate costanti di natura.

Tempo, lunghezza e massa hanno definizioni di carattere operativo.

Meridiana rinvenuta ad Aquileia. Il foro alloggiava lo «gnomon», un'asta verticale la cui ombra si proiettava sul quadrante. Gli 11 segmenti rettilinei sono linee orarie: quando l'ombra ne raggiungeva una, era un'ora esatta. Le linee A, B e C indicano il percorso del Sole in particolari giorni: A è il percorso relativo al solstizio d'estate, il giorno più lungo dell'anno, che segna l'inizio dell'estate; B corrisponde agli equinozi, che segnano l'inizio della primavera e dell'autunno; C è quello del solstizio d'inverno, il giorno più breve dell'anno. Questi orologi solari erano comuni nelle città romane: a Pompei ne sono stati trovati più di trenta. (Museo Archeologico Nazionale di Aquileia)



L'autorità riconosciuta a livello mondiale per quanto riguarda la definizione delle unità di misura è un'organizzazione internazionale chiamata Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM).

Le definizioni attualmente accettate dalla CGPM per le unità di misura del tempo, della lunghezza e della massa sono:

Tempo. Il *secondo* è pari a 9 192 631 770 periodi di una certa vibrazione dell'atomo di Ce¹³³. Non è necessario entrare nei particolari del comportamento degli atomi o del funzionamento degli orologi che utilizzano questi atomi, se non per rilevare che questi orologi sono i cronometri meglio riproducibili che si conoscano attualmente. L'accordo tra due di essi si manterrà con una precisione di una parte su 10^{13} , ossia all'incirca con un errore di un secondo in un milione di anni. Per quanto riguarda l'immutabilità degli atomi, siamo convinti che le loro proprietà siano indipendenti dal tempo, ma questo è soltanto uno dei presupposti della definizione. Basterebbe pensare a ciò che accadrebbe se le proprietà degli atomi fossero effettivamente cambiate nel corso della vita dell'universo! Ma le proprietà dell'universo che risultano dall'osservazione impongono delle rigide restrizioni all'entità del possibile mutamento delle proprietà degli atomi.

Questi orologi non sono né economici né particolarmente facili da costruire, ma vengono comunque utilizzati nei laboratori metrologici di parecchi paesi (Ufficio Metrico Centrale di Roma, National Bureau of Standards di Washington ecc.)

Lunghezza. Il *metro* è definito come distanza percorsa dalla luce nel vuoto durante un intervallo di tempo di 1/299 792 458 di secondo. Si noti che la definizione del metro dipende da quella del secondo, nonché dal presupposto della costanza della velocità della luce nel vuoto.

Massa. Il *chilogrammo* è definito come massa di un cilindro di platino-iridio conservato a Sèvres presso Parigi. Ciò fu stabilito alla prima riunione della CGPM nel 1889. Il motivo per cui questa definizione non si basa ancora su campioni atomici è il fatto che la misura delle masse atomiche e il loro confronto con le masse macroscopiche non hanno ancora raggiunto il grado di precisione delle misure che possono essere effettuate sugli oggetti di grandi dimensioni come il chilogrammo campione. Il chilogrammo fu comunque definito in modo che la massa di 10^{-3} metri cubi d'acqua a temperatura prossima a quella ambiente fosse assai vicina a un chilogrammo.

Campioni copie ottenuti per confronto con i campioni primari vengono custoditi nei laboratori specializzati di tutto il mondo. Tramite questi campioni è possibile connettere la lunghezza di una comune asta metrica da laboratorio con la distanza percorsa dalla luce in 1/299 792 458 di secondo, il secondo di un normale orologio alle vibrazioni di un atomo di cesio e la bilancia di un negozio con il chilogrammo campione che si trova in Francia.

I.4 SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

Oltre alle unità fondamentali su cui si basano tutte le misurazioni, occorre anche un sistema di unità di misura. Un sistema di misura comprende (i) le unità fondamentali, (ii) un metodo per ottenere unità più grandi e più piccole di quelle fondamentali e (iii) definizioni delle unità derivate, cioè composizioni delle unità fondamentali, come quelle relative a energia, potenza, e forza. Per esempio, negli Stati Uniti gran parte delle attività commerciali fanno uso del sistema britannico di unità, nel quale l'unità di lunghezza è il pollice (che, per definizione, è pari a 0.0254 metri campione) mentre l'unità di massa è la libbra-massa (per definizione pari a 0.45 359 237 chilogrammi campione). Del sistema britannico di unità fanno parte anche unità più grandi e più piccole, come il piede (12 pollici) e l'oncia (1/16 di libbra); si definiscono altresì unità derivate come l'horsepower (550 piedi quadrati per libbre-massa al secondo cubo). Benché queste unità siano ancora di uso comune negli Stati Uniti, raramente vengono utilizzate altrove, e quasi mai in contesti di carattere scientifico; comunque, negli Stati Uniti, gli ingegneri devono in generale conoscere bene sia il sistema britannico sia il Sistema Internazionale, che ora descriveremo.

Il Sistema Internazionale di Unità (SI) fu istituito nel 1960 dalla CGPM. Si tratta del sistema usato in quasi tutto il mondo, e praticamente da tutta la comunità scientifica, e lo adotteremo anche in questo libro. Come unità fondamentali esso utilizza il chilogrammo (kg), il metro (m) e il secondo (s); inoltre è previsto un metodo generale per la formazione di unità maggiori e minori. Tale metodo si avvale di prefissi che modificano le unità fondamentali e quelle derivate, moltiplicandole per fattori che sono potenze di mille. Questi prefissi e le relative abbreviazioni sono elencati nella Tabella 1.1. Le unità derivate, come l'unità di potenza, il watt (definito come $\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$, ove s^{-3} significa secondi elevati alla -3), vengono modificate nel medesimo modo dai medesimi prefissi. Quindi un microwatt ($1 \mu\text{W}$) è un milionesimo di watt, mentre un chilowatt (1 kW) è pari a 1000 watt.

Tabella 1.1 Prefissi per le unità del SI		
Simbolo	Nome	Valore
E	exa	10^{18}
P	peta	10^{15}
T	tera	10^{12}
G	giga	10^9
M	mega	10^6
k	chilo	10^3
↓	↓	↓
m	milli	10^{-3}
μ	micro	10^{-6}
n	nano	10^{-9}
p	pico	10^{-12}
f	femto	10^{-15}
a	atto	10^{-18}
Prefissi non SI accettati:		
h	etto-	10^2
da	deca-	10^1
d	deci-	10^{-1}
c	centi	10^{-2}

Non sempre la definizione di una grandezza derivata coincide con il significato che il suo nome ha nel linguaggio quotidiano. Quando un detergente in un messaggio pubblicitario viene definito potente, o quando di qualcuno si dice che ha molta forza o molta energia, le parole «potente», «forza», «energia» sono usate per suscitare un'impressione: ma in fisica queste parole hanno un significato molto preciso che consente di associare loro un numero. Ciò potrà comportare forse per qualcuno la perdita di parte del carattere allusivo, e quindi della bellezza, del linguaggio, ma consente di costruire una scienza esatta dotata di una bellezza tutta particolare, oltre che di comprovata utilità. La consapevolezza della bellezza delle parole e della natura può anzi essere maggiore, se si conoscono i significati delle parole e le ragioni, le cause degli eventi e dei fenomeni.

La Figura 1.1 illustra gli intervalli su cui si estendono le misure che vengono compiute in fisica.

I.5 DIMENSIONI, UNITÀ DI MISURA E CIFRE SIGNIFICATIVE

La fisica è una scienza quantitativa. La maggior parte dei docenti ritiene che obiettivi di un corso di fisica siano tanto la comprensione dei concetti quanto la capacità di applicare tale conoscenza a livello quantitativo. Per acquisire questa capacità, si dovranno risolvere numerosi problemi. Per quanto possibile, cercheremo di fare sì che i problemi proposti nel testo si riferiscano all'esperienza quotidiana, in modo che il lettore, mentre impara a risolvere problemi di carattere quantitativo, si renda anche conto di come la fisica si applica al mondo reale.

La soluzione dei problemi di fisica differisce sotto diversi aspetti dalla soluzione dei problemi di matematica: le differenze dipendono dal fatto che la fisica è, rispetto alla

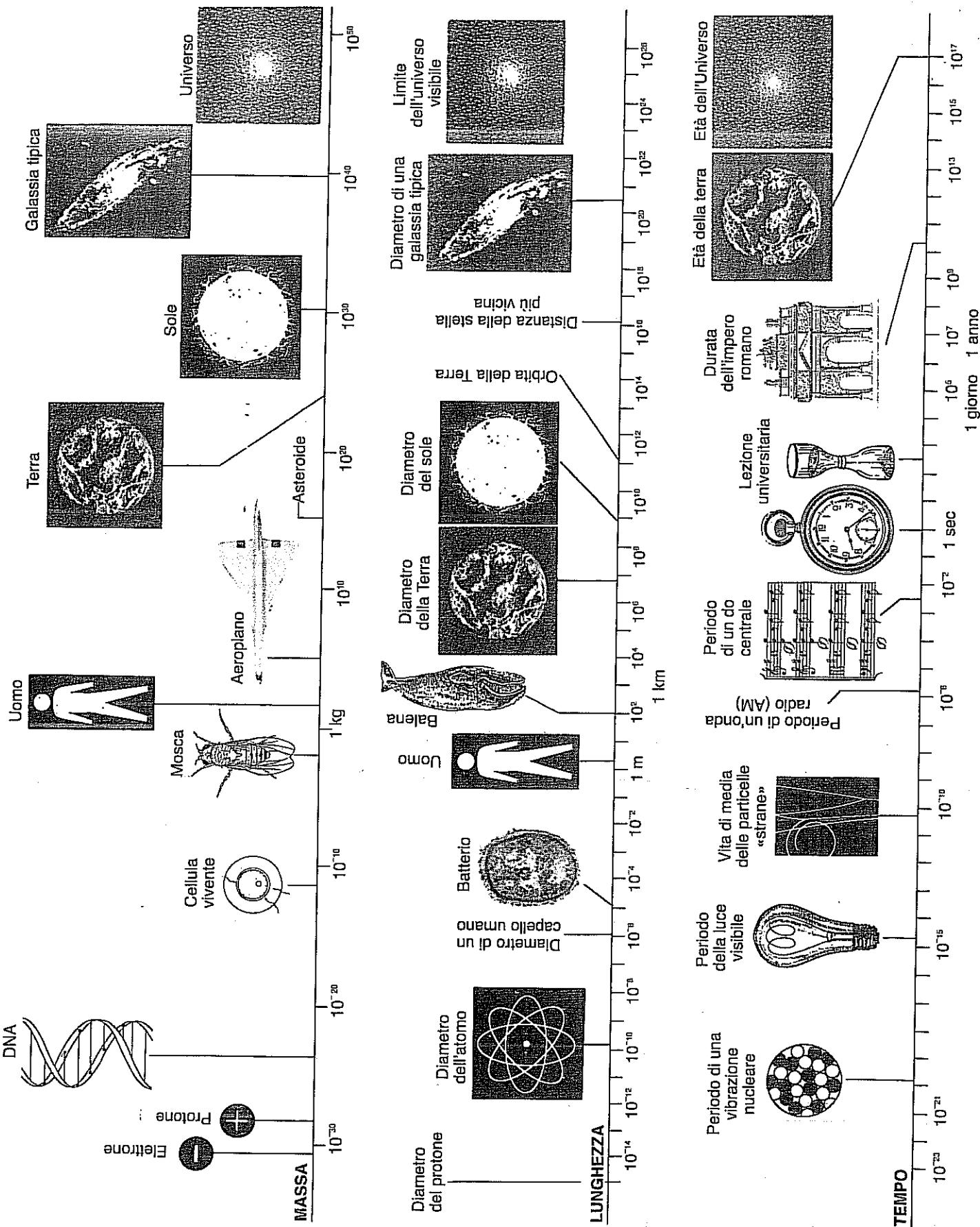


Figura 1.1 La tavola dà un'idea degli intervalli di variazione delle grandezze fisiche fondamentali. Le misure del tempo e delle distanze si estendono su un intervallo di ampiezza pari a 10^{40} , mentre le misure di massa si estendono su un intervallo pari a 10^{80} . (Arthlyn Ferguson and Clifford Swartz/*Physics Teacher*).

matematica, più direttamente connessa al mondo reale, dovendo occuparsi dei particolari «impuri» della misurazione. Alla misura di una grandezza fisica devono essere associate delle dimensioni, un'unità di misura nonché una precisione. Consideriamo per esempio una lunghezza di 4.2 m: il simbolo «m» ci dice che la dimensione è la lunghezza e che l'unità di misura utilizzata è il metro; il valore «4.2» (piuttosto che 4.21 569) ci dà un'idea della precisione con la quale la misura è stata effettuata. Quindi dobbiamo prendere in esame dimensioni, unità di misura e precisione.

Dimensioni. Un'equazione come $6 = 6$ da un punto di vista matematico è una tautologia, ma in fisica un'equazione come $6 \text{ m} = 6 \text{ pollici}$ è falsa! L'equazione $6 \text{ m} = 6 \text{ kg}$, poi, non ha alcun senso, dal momento che nessuna misura di lunghezza può essere uguale a una misura di massa. *La dimensione di una grandezza è determinata dalla proprietà fisica che essa descrive.* L'equazione $x = y$ non ha senso se x rappresenta una distanza e y rappresenta una massa. Quindi simboli connessi da segni di uguaglianza devono rappresentare grandezze che hanno le medesime dimensioni. Analogamente, se $x + y = z$, sia x che y devono avere le stesse dimensioni di z , dato che non è possibile sommare misure di grandezze fisiche qualitativamente diverse. Non è possibile sommare metri e chilogrammi, come non è possibile confrontare mele e arance. Dunque tutti i termini di un'equazione che sono connessi da segni + o - devono avere le stesse dimensioni. Se le grandezze vengono moltiplicate o divise tra loro, come nell'equazione $x = vt$, dove x rappresenta una lunghezza, v una velocità e t un tempo, allora le dimensioni di v moltiplicate per le dimensioni di t devono essere uguali alle dimensioni di x . In questo caso le dimensioni di v sono quelle di una lunghezza divisa per un tempo, la dimensione di t è il tempo e quella di x è la lunghezza. Qui si è ammesso che le dimensioni si moltiplichino e si dividano tra loro proprio come i numeri. L'aspetto dimensionale dell'equazione data sopra viene rappresentato ponendo tra parentesi quadre le dimensioni di ciascun simbolo

$$x = vt$$

$$[\text{lunghezza}] = [(\text{lunghezza})/(\text{tempo})][\text{tempo}]$$

$$[\text{lunghezza}] = [\text{lunghezza}]$$

Un esempio un po' più complicato è fornito dall'equazione

$$x = vt + \frac{at^2}{2}$$

dove le dimensioni di x , v e t sono le stesse di prima e l'accelerazione a ha le dimensioni di una lunghezza divisa per un tempo al quadrato. Si può verificare che le dimensioni dell'equazione sono corrette, purché il divisore 2 che compare nell'ultimo termine sia adimensionale. Dunque, le regole da applicare nell'analisi dimensionale di un'equazione sono (i) assegnare a ciascun simbolo che compare nell'equazione una dimensione in accordo con il carattere qualitativo dell'entità che esso misura, per esempio la massa, la lunghezza o il tempo; (ii) moltiplicare o dividere le dimensioni secondo la medesima algebra valida per i numeri; e (iii) accertarsi che le dimensioni che così risultano per ciascun termine dell'equazione siano le stesse.

Un'ulteriore regola è che gli argomenti delle funzioni trascendenti, come il seno o la funzione esponenziale, devono essere adimensionali, ossia dei numeri puri. Per esempio, $\sin(6 \text{ m})$ non ha senso, come non ce l'ha e^{4s} . Ci si può convincere che ciò deve essere vero, rammentando che $\sin x$ può essere rappresentato come somma infinita $x + x^3/3! + x^5/5! + \dots$ Soltanto se x è adimensionale questa somma può avere senso. L'espressione « $\cos(t/T)$ » ha senso se t e T hanno le medesime dimensioni, perché in tal caso il loro rapporto sarà adimensionale.

Questo genere di analisi dimensionale non consente di stabilire se in un'equazione vi siano numeri puri (adimensionali), e neppure di determinare il valore di uno qualunque di questi numeri. Essa però può servire per controllare la validità di qualsiasi equazione: se le dimensioni non sono coerenti, l'equazione non può essere corretta; se lo sono, l'equazione può essere giusta.

Al risultato di una misurazione sono associate dimensioni, unità di misura e precisione.

Tutti i termini di un'equazione devono avere le medesime dimensioni.

Quando si prende in esame un'equazione che si è appena ricavata o che si sospetta possa essere errata, uno dei primi e più semplici controlli da fare è appunto quello della coerenza dimensionale: se quest'ultima non sussiste, l'equazione non può essere corretta.

■ Esempio 1.1

Si scrivano le dimensioni di ciascuna delle grandezze che compaiono nell'equazione

$$v^2 = 2a(x - x_1) + v_1^2$$

e si stabilisca se l'equazione è dimensionalmente corretta. Si utilizzino le abbreviazioni L per la lunghezza e T per il tempo e si assegnino a ciascun simbolo le stesse dimensioni attribuitegli in precedenza nel testo.

Soluzione

Nell'equazione

$$v^2 = 2a(x - x_1) + v_1^2$$

le dimensioni sono

$$[L/T]^2 = [L/T^2][L] + [L/T]^2$$

ossia

$$[L^2/T^2] = [L^2/T^2] + [L^2/T^2]$$

Quindi le dimensioni di ciascun termine sono uguali e l'equazione è, almeno dal punto di vista dimensionale, corretta. ■

Tutti i termini di un'equazione devono essere espressi nelle medesime unità di misura.

Unità di misura. Non è sufficiente che ciascun termine di un'equazione abbia le stesse dimensioni: è necessario che ogni grandezza della medesima dimensione sia espressa nella medesima unità di misura. *Le unità sono la scala con cui si misurano le dimensioni.* In un'equazione tutti i termini possono avere le dimensioni, per esempio, di una lunghezza, ma se un termine è espresso in pollici e l'altro in metri, i diversi numeri non possono essere sommati direttamente. Un risultato di 3 m e 6 pollici, pur essendo dimensionalmente corretto, è difficile da verificare con una normale asta di misura. Dal momento che un pollice è pari a 0.0254 m, 6 pollici equivalgono a 0.1524 m. Quindi 3.0000 m più 6.000 pollici va scritto, in modo più appropriato, come 3.1524 m.

Può capitare che si conosca la misura di una grandezza in un sistema di unità, e che essa occorra invece in un altro sistema di unità. Un comodo metodo per convertire una grandezza da un tipo di unità di misura in un altro (sempre della stessa dimensione) consiste nello scrivere un'uguaglianza che esprima la relazione tra i valori delle due unità. Per esempio,

$$0.0254 \text{ m} = 1 \text{ pollice}$$

Dividendo un membro dell'equazione per l'altro, si può scrivere

$$1 = \frac{1 \text{ pollice}}{0.0254 \text{ m}}$$

oppure

$$1 = \frac{0.0254 \text{ m}}{1 \text{ pollice}}$$

Il rapporto 0.0254 m/1 pollice coincide con il numero puro 1. Esso viene detto *fattore di conversione* e può sempre essere utilizzato come fattore moltiplicativo in qualunque equazione. Per esempio,

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= (1 \text{ km}) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \left(\frac{1 \text{ pollice}}{0.0254 \text{ m}} \right) \\ &= 39\,370 \text{ pollici} \end{aligned}$$

Si noti che i km e i m vengono semplificati. Il risultato, 1 km = 39 370 pollici, è un'equazione i due membri della quale hanno la medesima dimensione (una lunghezza).

Nei problemi che verranno proposti in questo testo, la soluzione non può essere considerata corretta se non ha le unità appropriate: una risposta «32 piedi» in un problema la cui soluzione è «32 m» è errata.

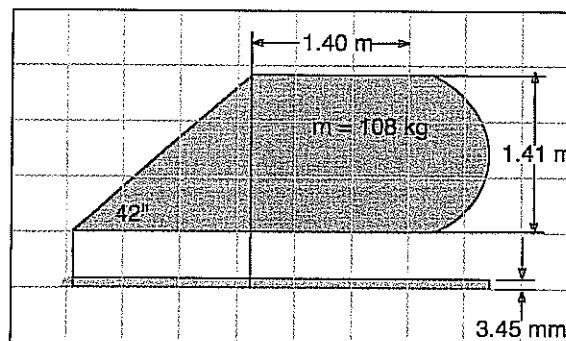
Cifre significative. Supponi che ti venga chiesto di esprimere la tua altezza in unità SI, e che tu sappia di essere alto 68 pollici. Potresti effettuare una conversione moltiplicando con la tua calcolatrice 68 pollici per 0.0254 m/pollice e otterresti, per la tua altezza stimata, il valore 1.7272 m. Questo risultato sembra implicare che tu conosca la tua statura con un'incertezza di 0.1 mm, ossia con un'incertezza pari allo spessore di un foglio di carta. È impossibile conoscere la propria altezza con una precisione simile. Per non attribuire alla tua stima una precisione eccessiva, dovresti assegnare al valore espresso in unità SI all'incirca la stessa precisione che aveva il valore espresso in unità britanniche, cioè 1 parte su 68. Una risposta di 1.7 m o di 1.73 m comporta più o meno la stessa precisione del valore 68 pollici, e fornisce approssimativamente la medesima informazione. Lo stesso principio vale per qualunque misurazione: la precisione con la quale è nota una grandezza deve riflettersi nel numero che viene impiegato per rappresentarla.

Una *cifra significativa* nel numero che rappresenta una grandezza è una cifra che non sia uno zero iniziale o finale; gli zeri finali contano però se seguono il punto decimale. Quindi 0.2547 ha quattro cifre significative, come anche 345 600. Altri esempi possono essere: 3.14 (tre cifre significative), 0.003800 (quattro cifre significative), pi greco ($3.1415926\dots$, noto con oltre un milione di cifre significative), e $3.4560 \cdot 10^5$ (cinque cifre significative). La più a destra delle cifre dotate di significato di un numero viene detta *cifra meno significativa*. Per esempio, la cifra meno significativa in 3.456 è il 6, mentre in 0.003800 è l'ultimo zero a destra. Le regole che adotteremo in questo testo per le cifre significative sono le seguenti.

1. Quando si moltiplicano o si dividono dei numeri, il risultato ha un numero di cifre significative pari a quello della meno precisa delle grandezze date. Per esempio, $(0.456 \text{ s})(7.8 \text{ m})/9.0123 \text{ m} = 0.39 \text{ s}$.
2. Quando si eseguono somme o sottrazioni, si deve trovare, tra le grandezze date, quella la cui cifra meno significativa è più a sinistra rispetto al punto decimale: la cifra meno significativa del risultato è nella medesima posizione rispetto al punto decimale. Per esempio, $8.5675 \text{ kg} - 8.556 \text{ kg}$ è uguale a 0.011 kg , cosicché dati di partenza con quattro o cinque cifre significative possono condurre a un risultato con solo due cifre significative. D'altra parte, $8.4 \text{ m} + 3.2 \text{ m} + 6.2 \text{ m} - 1.1 \text{ m}$ è uguale a 16.7 m , e il risultato ha una cifra significativa più dei dati di partenza. Se si sommano 0.032 s e 11.6 s , essendo 0.032 s minore dell'incertezza di 11.6 s , il risultato è 11.6 s .
3. Le funzioni trascendenti, come il seno, l'arcotangente e la funzione esponenziale, hanno lo stesso numero di cifre significative dei loro argomenti. Per esempio, $\sin 35.4^\circ = 0.579$; $\sin 35^\circ = 0.58$; $\ln 9.356 = 2.236$; $\ln 9.3 = 2.2$; $e^{4.11} = 60.9$; $\exp 4 = 50$.

Esempio 1.2

Si determini la densità della lamina metallica rappresentata nella Figura 1.2. La *densità* di un corpo è definita come rapporto tra la sua massa e il suo volume.



Il numero delle cifre significative indica la precisione del risultato.

Figura 1.2 Esempio 1.2.

Soluzione

Il volume della lamina è dato dal prodotto della sua area per lo spessore. Inoltre

$$\begin{aligned}
 \text{Area} &= \text{semicerchio} + \text{rettangolo} + \text{triangolo} \\
 &= \frac{\pi(0.705 \text{ m})^2}{2} + (1.40 \text{ m})(1.41 \text{ m}) + \frac{1}{2}(1.41 \text{ m})[(1.41 \text{ m})/(\tan 42^\circ)] \\
 &= 0.781 \text{ m}^2 + 1.97 \text{ m}^2 + 1.1 \text{ m}^2 = 3.9 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

$$\text{Volume} = (\text{area})(\text{spessore})$$

$$= (3.9 \text{ m}^2)(3.45 \times 10^{-3} \text{ m}) = 0.013 \text{ m}^3$$

$$\text{Densità} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

$$= \frac{108 \text{ kg}}{0.013 \text{ m}^3} = 8.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Qui abbiamo scritto l'unità di misura nella forma «kg/m³». In altri casi, se ciò è necessario per evitare confusioni nei calcoli successivi, scriveremo «kg m⁻³».

È da notare che, se si usa una calcolatrice per effettuare questo calcolo, si dovrebbero prendere i risultati intermedi con almeno una cifra significativa in più di quanto previsto dalle nostre regole. Ciò ridurrebbe la probabilità che gli errori di arrotondamento alterino il risultato. Meglio ancora sarebbe lasciare i risultati intermedi nella calcolatrice, dove solitamente sono rappresentati con circa nove cifre. La calcolatrice però non dà indicazioni sul numero delle cifre significative del risultato: tale numero va determinato in base alle regole date sopra.

Sebbene le regole per le cifre significative introdotte qui non siano pienamente soddisfacenti dal punto di vista statistico, esse danno un'idea della precisione con cui è noto un risultato. Se si prende per buono tutto ciò che compare sul display della calcolatrice, si finisce quasi sempre per dire delle assurdità!

Va qui ricordato che tutti i risultati delle misurazioni sono affetti da incertezze, dovute ai limiti e/o defezienze degli strumenti, a metodi di misura non corretti e a cause accidentali. Tali incertezze, comunemente chiamate *errori*, hanno influenza anche sulle cifre significative dei numeri che esprimono i valori delle grandezze misurate. In pratica il valore dell'errore incide sul numero di cifre con cui una misura deve essere quotata. Per esempio, se misuro l'altezza di un tavolo con un "metro da sarto", che sappiamo avere una imprecisione di 0.5 cm, un risultato corretto sarà (80.5 ± 0.5) cm, mentre non sarebbe corretto scrivere (80.532 ± 0.5) cm. In sostanza, dal valore dell'errore si vede qual è la cifra che non è "sicura", e pertanto nel risultato di una qualunque misura non ha senso riportare cifre che si riferiscono a frazioni, minori di uno, dell'errore; quindi, praticamente, è opportuno mettersi nella situazione in cui l'ultima cifra significativa (la meno significativa) è dello stesso ordine di grandezza dell'errore.

1.6 TECNICHE DI SOLUZIONE DEI PROBLEMI

In quasi tutti i corsi di fisica, la capacità di risolvere problemi raggiunta dallo studente viene assunta come misura dei progressi compiuti nell'apprendimento. È bene affrontare la soluzione dei problemi con un'impostazione sistematica che aiuti a organizzare le idee e a decidere da dove cominciare. Le indicazioni riportate sotto rappresentano una sintesi di tecniche che le passate generazioni di studenti hanno trovato utili: adottandole fin dall'inizio, potrai evitare di dover perdere in seguito abitudini meno utili.

- Disegna un diagramma e usalo per rendere esplicite le condizioni del problema. Utilizzalo come un'estensione della tua memoria, scrivendo sul foglio i dati. Identifica, se possibile, l'incognita o le incognite nel diagramma.
- Scegli un'equazione. Di solito è meglio fare uso dell'equazione più generale che si adatta al problema. Se c'è più di una incognita, può occorrere più di un'equazione.
- Risovi le equazioni, cominciando a farlo a livello simbolico, in modo da rendere l'algebra quanto più possibile semplice. Poi sostituisci i valori numerici e controlla le unità di misura per verificare che siano coerenti.
- Analizza criticamente la tua soluzione. Confrontala con il diagramma. Valutala alla luce della tua intuizione e del senso comune.

RIEPILOGO

La fisica comprende la meccanica, la termologia, lo studio dell'elettricità e del magnetismo, l'ottica e l'acustica. Le unità fondamentali usate per definire le grandezze che ricorrono nella fisica sono state stabilite dalla CGPM. Esse sono: il secondo (definito come un certo numero di periodi delle vibrazioni dell'atomo di cesio), il metro (definito come distanza che la luce percorre in un certo tempo) e il chilogrammo (definito come massa di un cilindro conservato presso Parigi).

Il Sistema Internazionale di unità comprende tre unità fondamentali: il secondo, il metro e il chilogrammo; un metodo per definire unità più grandi e più piccole che differiscono l'una dall'altra per un fattore mille; e un insieme di unità derivate, come quel-

le della forza e della potenza.

Le grandezze fisiche hanno, oltre a un valore numerico, delle dimensioni. Quando in fisica si risolvono dei problemi bisogna accertarsi che le dimensioni delle grandezze utilizzate siano coerenti, che queste ultime siano espresse nelle medesime unità di misura, e che la precisione della soluzione sia indicata in modo corretto. In questo libro la precisione sarà indicata dal numero delle cifre significative.

Per risolvere i problemi di fisica è bene fare uso di una tecnica standard: quando è possibile, si deve disegnare un diagramma, poi si deve scegliere un'equazione (o più equazioni), si devono risolvere queste ultime e infine si deve valutare la soluzione.

QUESITI

- 1.1 Quali sono le dimensioni del volume di un cubo? Quelle del volume di una sfera? E quelle del rapporto tra il volume di una sfera e il volume del cubo il cui spigolo è uguale al diametro della sfera?
- 1.2 Quali sono le dimensioni dell'unità di misura «litro»?
- 1.3 Quali sono le dimensioni di 60 miglia/ora e di 2.5 kg/m^3 ?
- 1.4 Se ti dicessero che, mentre dormivi questa notte, tutti gli oggetti dell'universo si sono dilatati raddoppiando le loro dimensioni, come potresti verificare la cosa? Che cosa accadrebbe se tutti gli orologi all'improvviso si mettessero a marciare con velocità dimezzata? E se le masse di tutti gli oggetti dell'universo raddoppiassero? E se tutte queste cose si verificassero contemporaneamente?
- 1.5 Supponiamo che venga stabilito un contatto con gli abitanti di un'altra galassia: saremmo in grado di comunicare loro l'entità di qualcuna delle nostre unità fondamentali? Di tutte?
- 1.6 La misura del tempo in realtà dipende da due elementi: la grandezza dell'unità di misura e l'origine del tempo. Come si potrebbe stabilire se un orologio attribuisce al secondo la grandezza corretta? Come si potrebbe stabilire se misura a partire dall'origine corretta? Come si risponde alla domanda «che ore sono»?
- 1.7 Dal momento che la misura del tempo civile si basa sulle proprietà del moto apparente del Sole, mentre quella del tempo fisico si basa sulle proprietà degli atomi, di tanto in tanto si deve operare una correzione inserendo dei

«secondi bisestili». Pensi che la correzione venga apportata al tempo fisico o a quello civile? Perché?

- 1.8 A causa degli effetti relativistici, le scale temporali basate sulle proprietà atomiche differiscono sia in grandezza sia in sincronizzazione per osservatori in moto l'uno rispetto all'altro. Che cosa ci dice questo fatto circa l'esistenza di un tempo universale?
- 1.9 Perché si fa riferimento a un chilogrammo campione e non a un metro campione o a un orologio campione?
- 1.10 Qual è la differenza tra dimensioni e unità di misura?
- 1.11 Se un'equazione è coerente in un sistema di unità di misura, è dimensionalmente coerente? Perché?
- 1.12 Se si effettua il prodotto di vari numeri con precisioni differenti, quale di essi determina la precisione del risultato?
- 1.13 Se si somma una serie di numeri con la medesima precisione ma di diverse entità, quale di essi determina la precisione del risultato?
- 1.14 Se dico che la mia massa è di 75.6234 kg, in che senso faccio un'affermazione fuorviante?
- 1.15 La velocità della luce è approssimativamente pari a $3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Se definiamo una nuova unità di tempo, il «baleno», con 1 baleno = $30 \mu\text{s}$, qual è la velocità della luce in metri al baleno? Quale distanza percorre la luce in un baleno?

ESERCIZI

Negli Esercizi da 1.1 a 1.6, x rappresenta una lunghezza, t un tempo, v una velocità (con dimensioni [lunghezza]/[tempo]), a rappresenta un'accelerazione (con dimensioni [lunghezza]/[tempo] 2), m rappresenta una massa e k rappresenta un numero adimensionale.

- 1.1 L'equazione $x = vt + kat^2$ è dimensionalmente corretta?
 (a) Nell'equazione $v^n = ka^jx$, che valori devono avere n e j perché l'equazione sia dimensionalmente corretta? (b) In base all'analisi dimensionale, si può dire qualche cosa su k ? Che cosa?

- 1.3 Più avanti utilizzeremo l'equazione $W = (ma)x$. Quali sono le dimensioni di W ?
- 1.4 Si verifichi la coerenza dimensionale delle seguenti equazioni:
 - (a) $v^2 + v^3 = 2ax$
 - (b) $x = v^2/a$
 - (c) $v = 3at + x/t$
 - (d) $x = at^2 \sin(x/t^2)/a$

- 1.5 Si trovino gli interi non nulli b , c e d tali che $a^b v^c t^d$ sia adimensionale.
- 1.6 La frequenza di oscillazione f di una massa appesa a una molla ha le dimensioni del reciproco di un tempo, $1/[T]$. Gli esperimenti dimostrano che f dipende dalla grandezza della massa m e dalla rigidità r della molla. Se r ha dimensioni $[M]/[T]^2$, si determinino gli esponenti b e c nella relazione $f = (\text{costante})m^b r^c$.
- 1.7 Qual è il fattore di conversione tra km/h e m/s?
- 1.8 Un «furlong» è definito come lunghezza del solco dell'aratro in un campo quadrato di 10 acri [1 acre $\approx 4046 \text{ m}^2$], ed è pari a 1/8 di miglio [1 miglio = 1609 m]. Si converta 1 furlong al giorno in m/s.
- 1.9 Un'automobile ha un'accelerazione di $10 \text{ miglia h}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Qual è la sua accelerazione in m/s^2 ?
- 1.10 Un carato è un'unità di massa pari a 200 mg. Una libbra-massa è pari a 0.454 kg. Quanti diamanti da 1 carato occorrono per fare una libbra?
- 1.11 Qual è la densità dell'acqua in libbre-massa/piedi³? (Una libbra-massa è pari a 0.454 kg.)

- 1.12 Si determini il prodotto di 21.6 m e 5.3 m.
- 1.13 Si determini la somma di 84.626 s e 923.1 s.
- 1.14 Si esegua il calcolo

$$(46.1 \text{ m})(0.231 \text{ s}) + \frac{492 \text{ s}}{13 \text{ m}^{-1}}$$

- 1.15 Si esegua il calcolo

$$\frac{5.47 \times 10^4 \text{ m/s}^2}{(26.67 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1})^2} - (3.63 \times 10^{11} \text{ m})(\cos 56^\circ)$$

- 1.16 Si calcoli

$$\frac{8.0786 \times 10^5 \text{ kg}}{5.8832 \times 10^4 \text{ s}} + (1.070653 \text{ kg/s}) \cos \frac{1.3745 \text{ m}}{0.96782 \text{ m}}$$

ove l'argomento del coseno è espresso in radianti.

- 1.17 Di quale frazione $\sin 1^\circ$ differisce da $\sin 1.01^\circ$? Di quale frazione $\sin 88^\circ$ differisce da $\sin 89^\circ$? Si sviluppino alcune considerazioni sul numero di cifre significative della funzione trascendentale $\sin x$ per valori di x prossimi a zero e per valori di x prossimi a 90° .

CAPITOLO

2

I VETTORI

2.1 INTRODUZIONE

In questo corso incontreremo grandezze di diverso tipo. Alcune di esse, come per esempio la velocità di un'automobile, fanno già parte dell'esperienza del lettore. Altre comportano concetti meno familiari e quindi più difficili da afferrare. Vi sono anche differenze per quanto riguarda la complessità matematica delle grandezze utilizzate in questo corso; fortunatamente, ogni grandezza di cui ci serviremo in questo testo ricade o nella categoria delle *grandezze scalari* (chiamate semplicemente *scalari*) o in quella delle *grandezze vettoriali* (chiamate semplicemente *vettori*).

2.2 SCALARI E VETTORI

Uno *scalare* è una grandezza del tipo più semplice ed è definita specificando un solo numero, che ne esprime la misura, assieme all'unità di misura appropriata. Vengono chiamati *scalari* perché i numeri reali che esprimono i valori misurati di queste grandezze possono venire rappresentati su una retta orientata, in una opportuna *scala*. Ecco alcuni esempi di grandezze scalari.

La lunghezza: la circonferenza della vita di una persona è di 0.85 m.

La massa: la massa di una persona è di 58 kg.

La temperatura: la temperatura interna del corpo umano è di 36.5 °C.

Gli scalari obbediscono alle regole dell'algebra ordinaria e possono essere sommati e sottratti, moltiplicati e divisi, proprio come i numeri ordinari. Per esempio, si consideri un rettangolo di dimensioni 3.0 m per 4.0 m. Il perimetro è la somma delle lunghezze dei quattro lati, $3.0\text{ m} + 4.0\text{ m} + 3.0\text{ m} + 4.0\text{ m} = 14.0\text{ m}$. La lunghezza di ciascun lato è uno scalare e anche il perimetro è uno scalare.

Un *vettore* è un'entità più complicata di uno scalare. Un *vettore* è definito, cioè completamente determinato, se si specificano una *direzione* e un *verso* (o senso) oltre che un valore numerico. Quindi per definire un vettore non è sufficiente un numero. Un esempio di vettore è lo *spostamento*. Supponiamo di andare da un punto P a un punto Q : lo spostamento può essere rappresentato da un segmento orientato come quello della Figura 2.1a. Il senso, o verso, del segmento è indicato dalla punta della freccia. Lo spostamento è un vettore che localizza il punto Q rispetto al punto P .

È da notare che lo *spostamento dal punto P al punto Q* rappresenta qualcosa di più della semplice *distanza tra i due punti*; indica anche la *direzione* e il *verso* del segmento PQ nel piano. Supponiamo di esserci spostati dal punto P a un diverso punto R , come mostra la Figura 2.1b. La distanza tra i punti P e R è uguale a quella tra i punti P e Q , ma i due spostamenti, i due vettori, sono diversi perché hanno differenti direzioni. In altre parole, uno spostamento è caratterizzato da una distanza, da una direzione e da un verso.

Due spostamenti sono uguali se hanno la medesima lunghezza, la medesima direzione e il medesimo verso. La Figura 2.1c mostra due spostamenti uguali: uno, dal punto P al punto Q , l'altro dal punto P' al punto Q' . Si può immaginare di prendere uno degli spostamenti e di muoverlo, senza mutarne né la lunghezza né la direzione. fi-

Gli scalari obbediscono alle regole dell'algebra.

Un vettore ha una direzione e un verso.

Uno spostamento è un vettore che va da un punto a un altro punto.

Spostamenti uguali hanno la stessa lunghezza e la stessa direzione.

no a farlo coincidere con l'altro spostamento. Di questo procedimento, consistente traslare uno spostamento conservandone lunghezza e direzione, faremo uso nel pro
mo paragrafo.

Figura 2.1

- (a) Uno spostamento localizza il punto Q rispetto al punto P .
- (b) I punti Q e R sono equidistanti dal punto P , ma i due spostamenti sono diversi perché hanno direzioni differenti.
- (c) Due spostamenti sono uguali se hanno la stessa lunghezza e la stessa direzione.

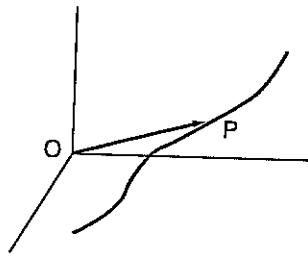
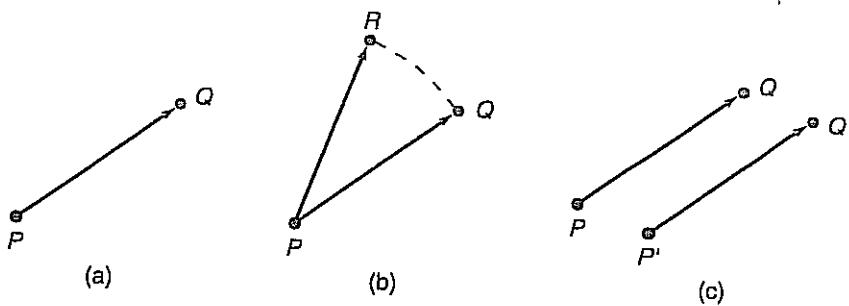


Figura 2.2

- Un vettore posizione localizza un punto P di una traiettoria rispetto a un'origine O .

Il modulo di un vettore è indipendente dalla sua direzione.

Il vettore \mathbf{A} ha intensità A .

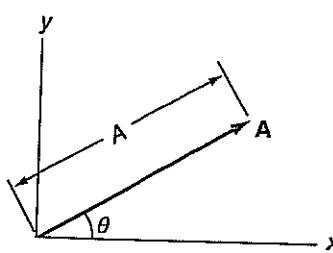


Figura 2.3

- In un piano, un vettore \mathbf{A} può essere individuato dalla sua intensità A e dall'angolo θ .

Il vettore spostamento verrà usato nei Capitoli 3 e 4 per discutere il moto di un corpo. Descrivendo i fenomeni naturali ci si accorge che esistono molte altre grandezze che si comportano come lo spostamento; quindi possiamo dare una definizione più generale di vettore: chiamiamo vettori tutte quelle grandezze che, secondo l'esperienza, si comportano come lo spostamento.

Quando un oggetto si muove nello spazio, un suo punto rappresentativo (per esempio, per una palla, il suo centro), descrive una traiettoria, come mostra la Figura 2. Un dato punto P sulla traiettoria è localizzato rispetto all'origine O della figura da un vettore. Un vettore che localizza un punto rispetto a un'origine è chiamato vettore posizione. Si noti che il vettore posizione è indipendente dai particolari della traiettoria della particella; il vettore posizione localizza soltanto un punto della traiettoria rispetto a un'origine.

Altre grandezze vettoriali saranno introdotte nei prossimi capitoli: la forza, la velocità e l'accelerazione. Come lo spostamento, anche le altre grandezze vettoriali sono definite da una direzione e da un'intensità o modulo. Il modulo di un vettore è un numero non negativo (con un'unità di misura) che indica la grandezza del vettore indipendentemente dalla sua direzione. Il modulo di uno spostamento non è altro che la distanza tra i due punti. Per esempio, il modulo dello spostamento del vertice superiore destro di questa pagina rispetto al vertice inferiore sinistro è di circa 0.3 m. Qual è il modulo dello spostamento del vertice superiore sinistro rispetto a quello inferiore destro? Si rammenti che il modulo di un vettore è indipendente dalla sua direzione e non è mai negativo.

Per distinguere il simbolo che indica un vettore da quello che denota uno scalare, nel testo useremo caratteri in neretto per le grandezze vettoriali: così uno spostamento potrà essere rappresentato da un simbolo come S . Dal momento che è difficile riprodurre il neretto quando si scrive a mano, spesso per contraddistinguere il simbolo di una grandezza vettoriale si usa una freccia posta sopra la lettera: così, tanto \mathbf{A} quanto \vec{A} rappresentano un vettore. L'intensità di un vettore viene spesso chiamata *valore assoluto* del vettore e indicata con $|A| = A$. In altre parole, il vettore è rappresentato dal carattere neretto \mathbf{A} (o da \vec{A}), mentre la sua intensità è rappresentata dal carattere chiaro corsivo A . Anche uno scalare viene denotato da un simbolo in chiaro: in effetti, l'intensità di un vettore, essendo indipendente dalla *direzione* del vettore, è uno scalare.

Quanti numeri sono necessari per specificare un vettore? Si consideri il caso particolare di un vettore in un piano, come il vettore \mathbf{A} della Figura 2.3. Per definire l'intensità A del vettore occorre un numero; per individuare la direzione di tale vettore rispetto alle altre direzioni del piano, occorre un altro numero: è conveniente specificare l'angolo θ compreso tra la direzione del vettore e una direzione di riferimento; solitamente, come direzione di riferimento si assume il semiasse positivo delle x , come in figura. L'angolo θ è assunto come positivo se viene misurato in senso antiorario a partire da questa direzione. Dunque, il vettore \mathbf{A} nel piano della Figura 2.3 è definito dai due numeri, A e θ , che ne forniscono l'intensità e la direzione. Due numeri sono sufficienti per specificare un vettore nelle due dimensioni di un piano. Nel caso più generale di un vettore in tre dimensioni nello spazio sono necessari tre numeri. Prenderemo in considerazione vettori di questo tipo nel Paragrafo 2.4.

Se si hanno due vettori **A** e **B**, si dice che essi sono uguali se hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo. Nel caso in cui i vettori siano definiti, nello spazio tridimensionale, da tre numeri, è evidente che si può dire che due vettori sono uguali se sono definiti dagli stessi tre numeri.

Uguaglianza fra vettori

Esempio 2.1

Una formica cammina sul piano di un tavolo. Un vettore posizione **r** localizza la formica in un punto *P* di coordinate $x = 35$ mm, $y = 45$ mm rispetto all'origine del sistema di coordinate rappresentato nella Figura 2.4. Si determinino il modulo e la direzione di tale vettore.

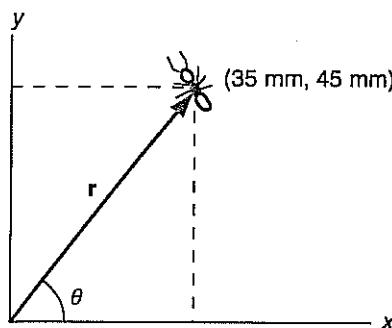


Figura 2.4

Esempio 2.1: un vettore posizione **r** localizza una formica nel punto $x = 35$ mm, $y = 45$ mm.

Soluzione

Il modulo **r** del vettore posizione è la distanza dall'origine al punto *P*. In base al teorema di Pitagora, tale distanza è $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ossia

$$r = \sqrt{(35 \text{ mm})^2 + (45 \text{ mm})^2} = 57 \text{ mm}$$

La direzione del vettore è determinata dall'angolo θ , ove $\tan \theta = y/x = 45 \text{ mm}/35 \text{ mm}$. Quindi

$$\theta = \tan^{-1}(45/35) = 52^\circ.$$

2.3 SOMMA GRAFICA DI VETTORI

Dal momento che un vettore è caratterizzato, oltre che da un valore numerico, anche da una direzione, la somma di vettori non obbedisce alle regole dell'algebra ordinaria. È necessario definire il procedimento con cui si sommano i vettori: tale procedimento può essere illustrato nel modo più semplice in termini grafici. Si considerino due vettori **a** e **b** che giacciono nel piano della Figura 2.5a. Le lunghezze dei segmenti che rappresentano questi vettori sono proporzionali alle intensità dei vettori stessi. Per ottenere la somma **a + b**, si dispone il vettore **b** in modo che la sua coda coincida con la punta del vettore **a**, come nella Figura 2.5b. Si traccia il segmento orientato che va dalla coda di **a** alla punta di **b**: esso rappresenta un vettore **c** = **a + b**, che è la somma, o risultante, dei vettori **a** e **b**. Dato il modo in cui vengono disposti i vettori da sommare, questo metodo grafico viene chiamato *metodo punta-coda*.

Somma grafica di vettori con il metodo punta-coda.

Supponiamo che il vettore **a** sia uno spostamento da un angolo di una stanza, nel quale si incontrano due pareti e il pavimento, all'angolo successivo, e che il vettore **b** sia uno spostamento da questo secondo angolo al terzo, sempre al livello del pavimento. La risultante **c** = **a + b** è uno spostamento in diagonale attraverso la stanza dal primo angolo a quello opposto.

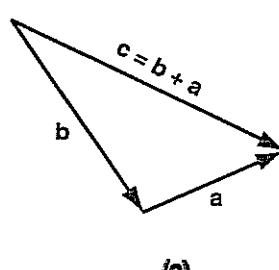


Figura 2.5

I vettori **a** e **b** sono sommati graficamente con il metodo punta-coda.

Proprietà commutativa della somma vettoriale.

Se si scambiano i due vettori di Figura 2.5b, in modo da dar luogo alla somma $\mathbf{b} + \mathbf{a}$, come nella Figura 2.5c, si ottiene la medesima risultante \mathbf{c} . Quindi la somma vettoriale è commutativa, e

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (2.1)$$

Proprietà associativa della somma vettoriale.

Ciò è in accordo con la nostra esperienza nel caso degli spostamenti. Camminando per 3 km verso nord e poi per 2 km verso est si arriva nello stesso punto in cui si arriva camminando per 2 km verso est e poi per 3 km verso nord.

La somma vettoriale gode anche della proprietà associativa illustrata nella Figura 2.6. Sommando prima i vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} e poi il vettore \mathbf{C} , si ottiene il medesimo risultato cui si perviene sommando prima \mathbf{B} e \mathbf{C} e poi sommando \mathbf{A} ; ossia

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (2.2)$$

Prodotto di uno scalare per un vettore.

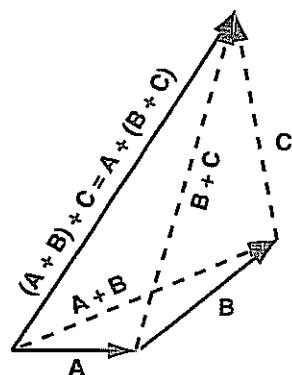


Figura 2.6 I vettori possono essere raggruppati e sommati in qualsiasi ordine.

In virtù delle proprietà associative e commutative della somma vettoriale, i vettori possono essere raggruppati e sommati in qualsiasi ordine che risulti vantaggioso.

Supponiamo di sommare un vettore a se stesso. Il vettore somma $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ è rappresentato nella Figura 2.7. La risultante è un vettore che ha la stessa direzione di \mathbf{A} e modulo $2\mathbf{A}$: tale vettore viene indicato con $2\mathbf{A}$. Più in generale, si consideri il prodotto di uno scalare s per un vettore \mathbf{A} : definiamo il risultato come un vettore, $\mathbf{B} = s\mathbf{A}$, tale che, se s è positivo, \mathbf{B} ha la stessa direzione e lo stesso verso di \mathbf{A} e ha modulo $B = sA$. Se invece lo scalare s è negativo, \mathbf{B} ha la stessa direzione ma verso opposto a quello di \mathbf{A} e intensità $B = |sA| = |s|A$. (Si rammenti che il modulo di un vettore non può essere negativo.) La Figura 2.8 esemplifica entrambi i casi.

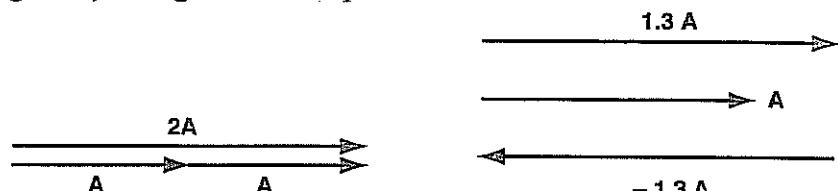


Figura 2.7 Il vettore \mathbf{A} sommato a se stesso fornisce il vettore $2\mathbf{A}$.

Figura 2.8 Il vettore $1.3\mathbf{A}$ è parallelo ad \mathbf{A} ; il vettore $-1.3\mathbf{A}$ è opposto ad \mathbf{A} .

Il vettore nullo ha modulo zero.

Si consideri ora il vettore $-1\mathbf{A}$ o, più semplicemente, $-\mathbf{A}$: tale vettore ha direzione opposta a quella di \mathbf{A} e modulo pari ad A . Si dice che il vettore $-\mathbf{A}$ è uguale e opposto a vettore \mathbf{A} . I due vettori sono rappresentati nella Figura 2.9. Si noti che la loro somma $\mathbf{A} + (-\mathbf{A})$, dà luogo a un vettore di modulo 0, il *vettore nullo*. In altre parole $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{A} = 0$.

Servendoci dell'opposto di un vettore, abbiamo tacitamente introdotto il concetto di sottrazione di vettori. Nel caso generale di due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , definiamo la differenza $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ come somma dei vettori \mathbf{A} e $-\mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (2.3)$$

Un esempio di sottrazione tra due vettori è illustrato nella Figura 2.10. Il vettore $-\mathbf{B}$ viene sommato al vettore \mathbf{A} per ottenere $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. Per confronto, viene riportato anche il vettore $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

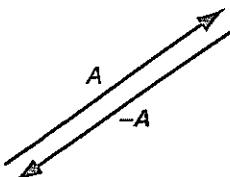


Figura 2.9 I vettori \mathbf{A} e $-\mathbf{A}$ hanno modulo uguale e direzione opposta. La loro somma è il vettore nullo 0.

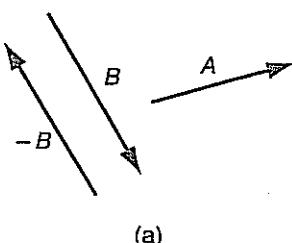
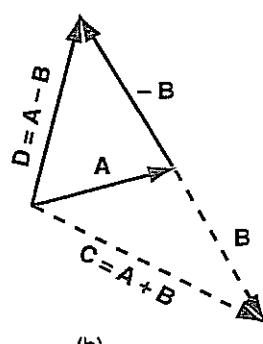
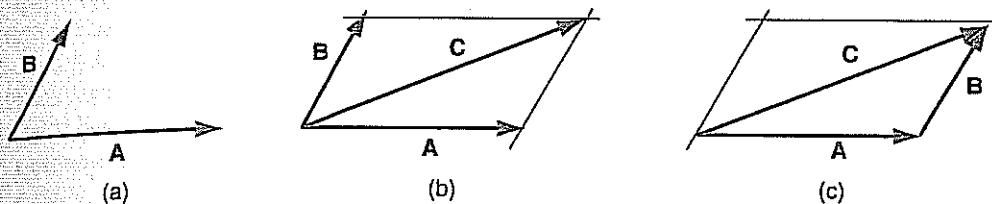


Figura 2.10 Il vettore $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ si ottiene sommando \mathbf{A} e $-\mathbf{B}$. Per confronto è riportato anche il vettore $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.



Spesso conviene rappresentare due o più vettori con la coda (o primo estremo, o origine) nello stesso punto, come nella Figura 2.11a. La somma grafica di due vettori può essere eseguita, senza disporli consecutivamente, servendosi del metodo del parallelogramma: dati due vettori con l'origine in comune, come nella Figura 2.11a, si costruisce il parallelogramma tracciando le parallele ai due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , come mostra la Figura 2.11b. Il vettore risultante \mathbf{C} è rappresentato, in modulo e direzione, dalla diagonale del parallelogramma uscente dall'origine comune. Servendosi della Figura 2.11c, il lettore dovrebbe riuscire a verificare l'equivalenza del metodo del parallelogramma e del metodo punta-coda per la somma dei vettori.

Il metodo del parallelogramma per la somma di vettori.



Esempio 2.2

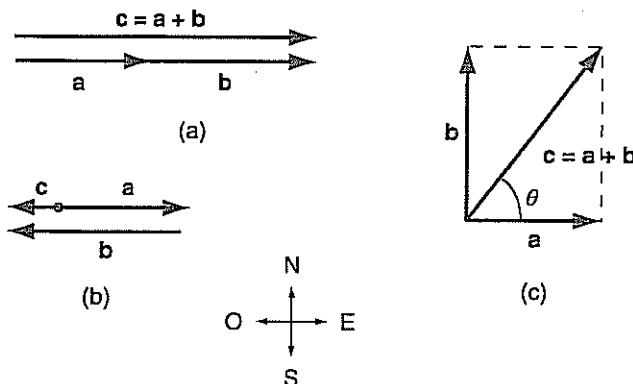
Un elicottero parte da un aeroporto e fa due fermate. In ognuno dei tre casi rappresentati nella Figura 2.12, i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} rappresentano i successivi spostamenti dell'elicottero. Si determini in ciascun caso lo spostamento risultante $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Si assuma che i moduli in tutti i casi siano $a = 3.0 \text{ km}$, $b = 4.0 \text{ km}$.

Soluzione

(a) I vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} sono disposti consecutivamente cosicché $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ è dato dal segmento che va dalla coda di \mathbf{a} alla punta di \mathbf{b} . Il vettore \mathbf{c} è rappresentato un po' sopra gli altri due in modo da poterlo distinguere. Dal momento che tanto \mathbf{a} quanto \mathbf{b} sono diretti verso est, anche la loro somma è diretta verso est e l'intensità di \mathbf{c} è pari alla somma delle intensità di \mathbf{a} e \mathbf{b} : $c = 3.0 \text{ km} + 4.0 \text{ km} = 7.0 \text{ km}$.

(b) In questo caso i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} hanno direzione opposta, e \mathbf{b} è disegnato un po' sotto \mathbf{a} in modo da poterli distinguere. Nella figura è stato utilizzato il metodo punta-coda per ottenere $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. \mathbf{c} è diretto verso ovest, parallelamente a \mathbf{b} e in direzione opposta ad \mathbf{a} . Siccome \mathbf{a} e \mathbf{b} hanno direzioni opposte, il modulo di \mathbf{c} è dato da $c = |b - a| = 4.0 \text{ km} - 3.0 \text{ km} = 1.0 \text{ km}$.

(c) Nella figura i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} sono disposti con l'origine in comune, e la loro somma è stata ottenuta con il metodo del parallelogramma. Il modulo di \mathbf{c} può essere determinato misurando la lunghezza del segmento che lo rappresenta. Adottando una scala in cui $a = 3.0 \text{ km}$, si trova che $c = 5.0 \text{ km}$. La direzione di \mathbf{c} è determinata dall'angolo θ , che, misurato con un goniometro, risulta pari a 53° . Quindi lo spostamento complessivo dell'elicottero è di 5.0 km in una direzione compresa tra nord ed est e formante con l'est un angolo di 53° . A titolo di controllo, si può misurare l'angolo compreso tra \mathbf{a} e \mathbf{b} , che risulta retto, cosicché \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} sono le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo.



Quindi

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3.0 \text{ km})^2 + (4.0 \text{ km})^2} = 5 \text{ km}$$

Inoltre,

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{4.0 \text{ km}}{3.0 \text{ km}} = \frac{4.0}{3.0}$$

$$\theta = 53^\circ$$

Figura 2.11

- (a) Due vettori con l'origine comune. (b) La risultante $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ viene costruita ricorrendo al metodo del parallelogramma.
- (c) Il metodo del parallelogramma per la somma dei vettori è equivalente al metodo punta-coda.

Figura 2.12
Esempio 2.2.

2.4 VETTORI UNITARI (O VERSORI) E SCOMPOSIZIONE DEI VETTORI

Spesso è comodo fare uso di un vettore per specificare una direzione nello spazio. Per esempio, si può usare un vettore per indicare una direzione che sia perpendicolare a una superficie, come il piano di questa pagina. Si consideri un vettore \mathbf{n} perpendicolare a questa pagina e uscente da essa in direzione di chi legge: dal momento che ci serviamo del vettore soltanto per specificare una direzione, possiamo scegliere il modulo di \mathbf{n} pari a 1 ($|\mathbf{n}| = 1$); tale vettore è adimensionale. Un vettore adimensionale di modulo 1 viene chiamato *vettore unitario* o *versore*. Quindi il vettore \mathbf{n} introdotto sopra è un versore diretto perpendicolarmente al piano della pagina e uscente da essa.

Particolarmenete comodi sono i vettori unitari diretti lungo gli assi coordinati: utilizzeremo i simboli \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} per rappresentare rispettivamente i versori degli assi x , y e z di un sistema di coordinate cartesiane, come mostra la Figura 2.13. Dal momento che si tratta di vettori unitari, si ha

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1 \quad (2.4)$$

Questi tre vettori unitari sono mutuamente perpendicolari.

Se si moltiplica un versore \mathbf{n} per uno scalare s , in base a quanto si è visto nel paragrafo precedente, il risultato è un vettore, $\mathbf{s} = s\mathbf{n}$. Se s è positivo, il vettore \mathbf{s} è parallelo al versore \mathbf{n} e ha lo stesso verso. E siccome $|\mathbf{n}| = 1$, si ha $|\mathbf{s}| = |s\mathbf{n}| = s$. In altre parole, un vettore \mathbf{s} di modulo s può essere espresso in termini di un vettore unitario \mathbf{n} che abbia la stessa direzione di \mathbf{s} , $\mathbf{s} = s\mathbf{n}$. Si veda, a questo proposito, il Problema 2.5.

La scomposizione dei vettori. Abbiamo visto come due vettori possano essere sommati graficamente ottenendo un vettore risultante. Ora consideriamo un problema di tipo inverso. Dato un vettore \mathbf{C} , si tratta di trovare dei vettori diretti lungo gli assi coordinati che, sommati, abbiano \mathbf{C} come risultante. Per semplicità consideriamo un vettore nel piano della pagina, che prenderemo come piano xy . Supponiamo che il vettore \mathbf{C} giaccia nel primo quadrante, come accade nella Figura 2.14a, dove sono riportati anche i versori \mathbf{i} e \mathbf{j} . Tracciando a partire dalla punta di \mathbf{C} le rette perpendicolari agli assi coordinati, come nella Figura 2.14b, si ottengono i vettori \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 giacenti sugli assi stessi. Si noti che, in base alla regola del parallelogramma per la somma di vettori $\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}$.

Esprimiamo i vettori \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 in termini dei versori \mathbf{i} e \mathbf{j} . Nel caso illustrato nella Figura 2.14b, il vettore \mathbf{C}_1 è parallelo a \mathbf{i} , cosicché $\mathbf{C}_1 = C_x\mathbf{i}$. Analogamente $\mathbf{C}_2 = C_y\mathbf{j}$. Le grandezze C_x e C_y sono chiamate componente x e componente y del vettore \mathbf{C} . Il vettore \mathbf{C} può essere espresso in termini delle sue componenti C_x e C_y come

$$\mathbf{C} = C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j} \quad (2.5)$$

Questa espressione è rappresentata graficamente nella Figura 2.14c. È importante distinguere tra una componente di un vettore, come C_x , e un vettore. La componente C_x non è un vettore, mentre lo sono $C_x\mathbf{i}$ e $C_y\mathbf{j}$.

Il procedimento con il quale si determinano le componenti di un vettore è detto *scomposizione del vettore nelle sue componenti*. Il metodo grafico descritto sopra consiste nel proiettare il vettore \mathbf{C} sugli assi x e y , e le componenti C_x e C_y possono essere misurate con un righello tarato sulla scala adottata per rappresentare il modulo C del vettore \mathbf{C} .

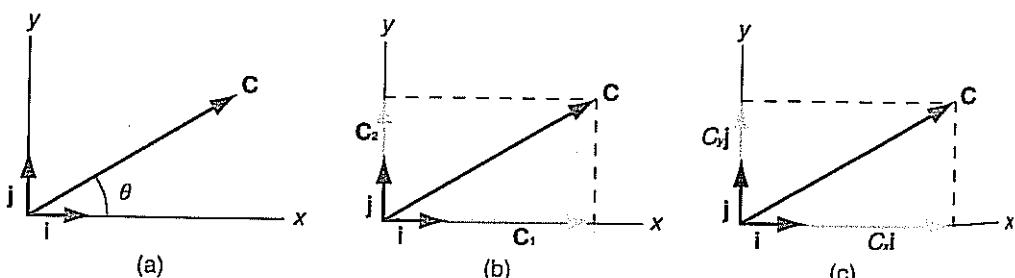
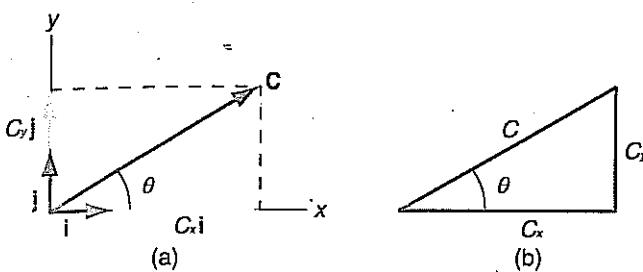


Figura 2.13
I versori \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} lungo gli assi x , y , z .

Le componenti di un vettore:
 C_x e C_y .

Figura 2.14
Un vettore \mathbf{C} viene scomposto nelle sue componenti di modo che $\mathbf{C} = C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j}$.



Servendoci della trigonometria elementare, possiamo sviluppare un metodo analitico per la scomposizione di un vettore nelle sue componenti. Riprendiamo in considerazione il vettore \mathbf{C} definito dal suo modulo C e dall'angolo θ , come risulta dalla Figura 2.15a. Le componenti C_x e C_y costituiscono i cateti di un triangolo rettangolo di ipotenusa C (vedi Fig. 2.15b). Dal momento che $\cos \theta = C_x/C$ e $\sin \theta = C_y/C$, si ha

$$\boxed{\begin{aligned} C_x &= C \cos \theta \\ C_y &= C \sin \theta \end{aligned}} \quad (2.6)$$

Queste equazioni forniscono le componenti di un vettore in termini del suo modulo e della direzione. Per esempio, se $C = 12$ mm e $\theta = 28^\circ$, allora $C_x = 12 \text{ mm} \cos 28^\circ = 11$ mm, e $C_y = 12 \text{ mm} \sin 28^\circ = 5.6$ mm. Anche se le Equazioni (2.6) sono state ricavate dalla Figura 2.15a per il caso di un vettore giacente nel primo quadrante, tali espressioni sono valide per qualunque quadrante. (Si veda l'Esercizio 2.10.) Una componente di un vettore può essere positiva, negativa o nulla. Per esempio, il vettore \mathbf{D} della Figura 2.17 ha componenti D_x negativa e D_y positiva.

Dunque un vettore \mathbf{C} in un piano può essere specificato in due modi: dal suo modulo C e dalla direzione θ , oppure dalle sue componenti C_x e C_y . Se sono date l'intensità e la direzione, le componenti possono essere ricavate dalle Equazioni (2.6). Alternativamente, tali equazioni possono essere risolte rispetto a C e θ , esprimendo queste ultime in termini di C_x e C_y . Elevando al quadrato le equazioni e sommandole membro a membro si ottiene (tenendo presente che $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$) $C_x^2 + C_y^2 = C^2$. Dividendo la seconda delle (2.6) per la prima, si ha $C_y/C_x = \sin \theta/\cos \theta = \tan \theta$. Quindi

$$\boxed{\begin{aligned} C &= \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \\ \tan \theta &= \frac{C_y}{C_x} \end{aligned}} \quad (2.7)$$

Per esempio, se $C_x = 8.1$ m e $C_y = 5.2$ m, $C = \sqrt{(8.1 \text{ m})^2 + (5.2 \text{ m})^2}$ e $\theta = \tan^{-1}(5.2/8.1) = 33^\circ$. Le due coppie di equazioni, (2.6) e (2.7), consentono di passare dall'uno all'altro di questi due modi alternativi di definire un vettore.

Figura 2.15

Le componenti sono date da $C_x = C \cos \theta$ e $C_y = C \sin \theta$.

Scomposizione di un vettore \mathbf{C} nelle sue componenti.

Un vettore può essere definito dal suo modulo e dalla sua direzione, oppure dalle sue componenti.

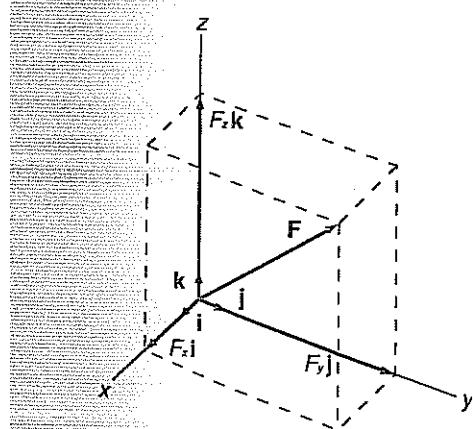
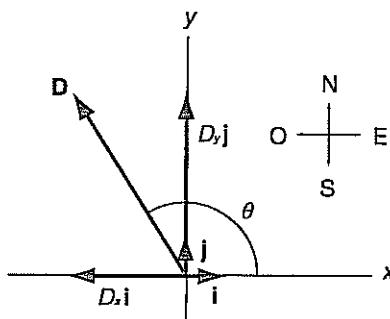
Figura 2.16 Un vettore \mathbf{F} in tre dimensioni ha componenti F_x, F_y, F_z .

Figura 2.17 Esempio 2.3

La seconda delle Equazioni (2.7) fornisce la tangente dell'angolo θ . Se θ subisce un incremento o una diminuzione di 180° , ossia di π radianti, la tangente mantiene lo stesso valore poiché $\tan(\pm 180^\circ) = \tan \theta$. Quindi c'è un'ambiguità nel valore di θ ottenuto usando la funzione arcotangente (arctan o \tan^{-1}). Con la maggior parte delle calcolatrici, quando si valuta $\theta = \tan^{-1}(C_y/C_x)$, si ottiene un risultato compreso tra -90° e $+90^\circ$. L'angolo fornito dalla calcolatrice, cioè, si trova o nel primo o nel quarto quadrante; se il vettore in realtà giace nel secondo quadrante (C_x negativa, C_y positiva), la calcolatrice fornisce un angolo nel quarto quadrante, al quale occorre aggiungere 180° per ottenere l'angolo corretto nel secondo quadrante. Questo procedimento è illustrato nell'esempio che segue. (Che cosa accade se il vettore giace nel terzo quadrante? Alcune calcolatrici hanno un tasto che effettua una conversione tra una coppia cartesiana (C_x, C_y) e una coppia polare ((C, θ)): la maggior parte di queste calcolatrici fornisce l'angolo nel quadrante corretto se si usa questa funzione.)

I vettori in tre dimensioni spaziali di solito vengono specificati tramite tre componenti. Così il vettore \mathbf{F} , rappresentato in prospettiva nella Figura 2.16, può essere espresso come

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

Il modulo del vettore è dato da

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

La direzione del vettore può essere espressa in termini degli angoli che esso forma con gli assi coordinati. Tuttavia, in tre dimensioni, di solito è più conveniente fornire le tre componenti F_x, F_y, F_z . Come caso particolare, consideriamo quello in cui \mathbf{F} rappresenta un vettore posizione \mathbf{r} , che localizza un punto di coordinate (x, y, z) rispetto all'origine di un sistema di coordinate. Per un vettore posizione le coordinate coincidono con le componenti: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Per esempio, $\mathbf{r} = (3 \text{ m})\mathbf{i} + (4 \text{ m})\mathbf{j} + (-5 \text{ m})\mathbf{k}$ localizza il punto $(3 \text{ m}, 4 \text{ m}, -5 \text{ m})$.

Supponiamo che due vettori siano uguali, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Dal momento che i vettori uguali hanno la stessa intensità e la stessa direzione, essi devono avere le medesime componenti; ossia, $A_x = B_x, A_y = B_y, A_z = B_z$. Per converso, se due vettori hanno le medesime componenti, essi sono uguali. Quali sono le componenti del vettore nullo?

Esempio 2.3

Un aeroplano, rullando sulla pista di decollo, compie uno spostamento di componenti $D_x = -1.78 \text{ km}$ e $D_y = 2.96 \text{ km}$. Gli assi coordinati sono orientati in modo che \mathbf{i} è rivolto verso est e \mathbf{j} verso nord, come nella Figura 2.17. Si determinino il modulo e la direzione di questo spostamento.

Soluzione

Usando la prima delle Equazioni (2.7), si ottiene

$$D = \sqrt{(-1.78 \text{ km})^2 + (2.96 \text{ km})^2} = 3.45 \text{ km}$$

La seconda equazione determina l'angolo:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2.96 \text{ km}}{-1.78 \text{ km}} = \tan^{-1}(-1.66)$$

Una calcolatrice fornisce il valore -59.0° per l'angolo, che quindi risulta nel quarto quadrante. Tuttavia, dal momento che D_x è negativo e D_y è positivo, si deve aggiungere 180° per ottenere un angolo nel secondo quadrante. Quindi $\theta = -59.0^\circ + 180^\circ = 121.0^\circ$.

2.5 SOMMA VETTORIALE CON IL METODO ANALITICO

Benché il metodo grafico per la somma di vettori sia utile per visualizzare i vettori e il modo in cui si compongono, esso non consente una grande precisione. Solitamente occorre sommare e sottrarre i vettori ricorrendo a un'impostazione analitica o algebrica. Supponiamo che siano date le componenti di due vettori: $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ e

$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$. \mathbf{C} rappresenti la loro somma: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Esprimendo \mathbf{A} e \mathbf{B} in termini delle loro componenti, si ha

$$\mathbf{C} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) + (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$

Le proprietà commutativa e associativa consentono di riordinare i termini della somma in modo qualsiasi. Raccogliamo i termini che contengono il medesimo versore, ottenendo

$$\mathbf{C} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} + (A_z + B_z) \mathbf{k}$$

Dato che l'espressione del vettore \mathbf{C} in termini delle sue componenti è $\mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}$, un confronto con l'equazione precedente porta a concludere che

Somma di vettori sotto forma di componenti.

$$C_x = A_x + B_x \quad C_y = A_y + B_y \quad C_z = A_z + B_z \quad (2.8)$$

Quindi ciascuna componente del vettore risultante \mathbf{C} è la somma delle corrispondenti componenti di \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Questo metodo analitico può essere facilmente esteso alla somma e alla sottrazione di qualunque numero di vettori. Per esempio, se i vettori \mathbf{e} , \mathbf{f} e \mathbf{g} sono dati in termini delle loro componenti, il vettore $\mathbf{h} = \mathbf{e} - \mathbf{f} + \mathbf{g}$ ha componenti

$$\begin{aligned} h_x &= e_x - f_x + g_x \\ h_y &= e_y - f_y + g_y \\ h_z &= e_z - f_z + g_z \end{aligned}$$

In molti dei prossimi capitoli ci imbatteremo nel problema di sommare analiticamente diversi vettori giacenti nel medesimo piano. Ciascuno di questi vettori sarà definito da un modulo e da una direzione invece che dalle sue componenti. Per effettuare la somma, cominceremo a determinare le componenti, poi le sommeremo utilizzando equazioni del tipo delle (2.8). Infine ricaveremo modulo e direzione del vettore risultante a partire dalle sue componenti. Questo procedimento viene illustrato nel prossimo esempio; dopo aver studiato quest'ultimo, il lettore dovrebbe allenarsi a usare il metodo servendosi degli esercizi proposti alla fine del capitolo.

In questo capitolo abbiamo introdotto la somma e la sottrazione di vettori nonché il prodotto di uno scalare per un vettore. Più avanti sarà necessario prendere in considerazione prodotti di due vettori. Un tipo di moltiplicazione tra vettori sarà introdotto nel Capitolo 8 e un altro tipo nel Capitolo 11. Dal momento che questi prodotti non saranno utilizzati nell'immediato, rimandiamo una loro discussione al momento in cui si renderanno necessari.

I prodotti di vettori verranno discussi nei Capitoli 8 e 11.

Esempio 2.4

Una nave da crociera esce dal porto e naviga verso est per una distanza di 231 km. Per evitare una tempesta, cambia rotta e naviga per 209 km in una direzione 42.1° a sud del punto cardinale est, e poi naviga per 262 km in una direzione 54.8° a nord del punto cardinale est. Si determinino il modulo e la direzione dello spostamento risultante \mathbf{R} . Si trascuri la curvatura della Terra e si ammetta che tutti gli spostamenti giacciono nel medesimo piano.

Soluzione

Chiamati \mathbf{E} , \mathbf{F} e \mathbf{G} i successivi spostamenti, cominciamo a determinare le loro componenti rispetto agli assi coordinati rappresentati nella Figura 2.18. Allora

$$E_x = 231 \text{ km} \cos 0 = 231 \text{ km}$$

$$F_x = 209 \text{ km} \cos (-42.1^\circ) = 155 \text{ km}$$

$$G_x = 262 \text{ km} \cos 54.8^\circ = 151 \text{ km}$$

$$E_y = 231 \text{ km} \sin 0 = 0$$

$$F_y = 209 \text{ km} \sin (-42.1^\circ) = -140 \text{ km}$$

$$G_y = 262 \text{ km} \sin 54.8^\circ = 214 \text{ km}$$

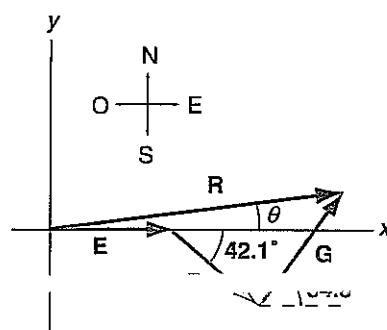


Figura 2.18
Esempio 2.4.

Si osservi che per \mathbf{F} si è usato il valore -42.1° perché un angolo è negativo se viene misurato in senso orario a partire dal semiasse positivo delle x , e positivo se viene misurato in senso antiorario a partire da tale semiasse. Le componenti x e y del risultante \mathbf{R} sono date da

$$R_x = E_x + F_x + G_x = 537 \text{ km}$$

$$R_y = E_y + F_y + G_y = 74 \text{ km}$$

Utilizzando le Equazioni (2.7), si ottiene

$$R = \sqrt{(537 \text{ km})^2 + (74 \text{ km})^2} = 542 \text{ km}$$

$$\theta = \tan^{-1}(74/537) = 7.8^\circ$$

Esempio 2.5

Il teorema del coseno. Si considerino due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} le cui direzioni formano un angolo θ , come mostra la Figura 2.19.

(a) Si dimostri che il modulo del vettore risultante \mathbf{C} è dato dal *teorema del coseno*,

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

(b) Si supponga di camminare per 350 m verso sud lungo la Broadway, poi di girare di 65° verso destra e di continuare per 280 m lungo la Quarantaduesima Strada. Si utilizzi il teorema del coseno per terminare il modulo dello spostamento risultante.

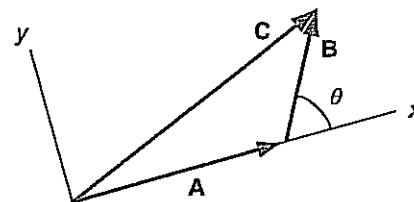


Figura 2.19 Esempio 2.5: $C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$.

Soluzione

(a) Per semplificare, gli assi coordinati sono stati scelti in modo che \mathbf{A} giaccia sull'asse x , così le componenti di \mathbf{A} e \mathbf{B} sono

$$A_x = A \cos 0 = A \quad A_y = A \sin 0 = 0$$

$$B_x = B \cos \theta \quad B_y = B \sin \theta$$

Allora $C_x = A + B \cos \theta$ e $C_y = B \sin \theta$. In base all'Equazione (2.7), $C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$, ossia

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{(A + B \cos \theta)^2 + (B \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{A^2 + 2AB \cos \theta + B^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} \end{aligned}$$

dove si è usata la relazione $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

(b) Ponendo nella formula del teorema del coseno $A = 350 \text{ m}$, $B = 280 \text{ m}$ e $\theta = 65^\circ$, si ottiene

$$C = \sqrt{(350 \text{ m})^2 + (280 \text{ m})^2 + 2(350 \text{ m})(280 \text{ m}) \cos 65^\circ} = 530 \text{ m}$$

2.6 ALTRE OPERAZIONI FRA VETTORI

Benché molto spesso si diano le definizioni formali delle operazioni fra vettori, si deve ricordare che questi sono grandezze fisiche e quindi le operazioni fra essi altro non sono che i vari modi in cui entrano in relazione fra loro in natura. Sono i fenomeni naturali che stabiliscono quali sono le operazioni del calcolo vettoriale e la loro struttura. In pratica la definizione di ogni operazione è giustificata dalla descrizione dei fenomeni naturali.

Si vedrà più avanti nel testo che, per descrivere i fenomeni che riguardano il lavoro e l'energia, e le rotazioni dei corpi, si devono definire alcuni particolari prodotti fra grandezze vettoriali. In particolare, nel Capitolo 8 definiremo il *prodotto scalare* e nel Capitolo 11 il *prodotto vettoriale* fra vettori.

Un ulteriore concetto che è bene ricordare è che alcune grandezze vettoriali, per essere definite, necessitano che si espliciti anche il loro *punto di applicazione*, cioè in che punto dello spazio sta la loro "coda". In questi casi, oltre ai tre numeri che definiscono il vettore, occorrerà esplicitare i tre numeri che definiscono il punto di applicazione. Si parla, allora, di *vettori applicati*. Per capire questo fatto basta la semplice osservazione di come cambia il moto di un corpo applicando a esso la stessa forza (dimostreremo più avanti che le forze sono vettori) in punti diversi. È evidente, quindi, che per poter descrivere il moto di corpi aventi una struttura non puntiforme occorre conoscere le forze come vettori applicati.

Vedremo poi che la descrizione quantitativa dei fenomeni naturali e delle leggi che li governano implica l'esecuzione di operazioni *sulle* grandezze vettoriali e non solo *fra* le grandezze vettoriali (per esempio, di operazioni di derivazione e di integrazione). Diamo qui rapidamente la definizione di derivata e di integrale di un vettore, riservandoci di chiarirne meglio i significati quando eseguiremo tali operazioni su esplicite grandezze fisiche vettoriali.

Derivata di un vettore. Sia \mathbf{B} un vettore che sia funzione di una variabile t . In maniera del tutto analoga alla definizione di derivata di una funzione scalare (e quindi di una qualunque grandezza scalare) si definisce la derivata di \mathbf{B} rispetto a t come il limite, se esiste, per Δt che tende a zero del rapporto incrementale $[\mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{B}(t)] / [\Delta t]$, e si scrive

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{B}(t)}{\Delta t}.$$

Poiché la definizione è formalmente uguale a quella della derivata di una funzione scalare, ne viene che per le derivate di un vettore valgono le stesse proprietà delle derivate di uno scalare. Se \mathbf{B} è definito in termini delle sue componenti, cioè $\mathbf{B}(t) = B_x(t)\mathbf{i} + B_y(t)\mathbf{j} + B_z(t)\mathbf{k}$, se ne deduce immediatamente che il risultato dell'operazione di derivazione di un vettore è un vettore che ha per componenti le derivate delle rispettive componenti del vettore originario.

Integrale di un vettore. Sia \mathbf{B} un vettore funzione della variabile t e sia definito tramite le sue componenti, cioè $\mathbf{B}(t) = B_x(t)\mathbf{i} + B_y(t)\mathbf{j} + B_z(t)\mathbf{k}$; allora definiamo l'integrale definito di tale vettore relativo all'intervallo $(t_1 - t_0)$ come il nuovo vettore che ha come componenti gli integrali definiti delle rispettive componenti di \mathbf{B} nello stesso intervallo.

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_1} B_x dt \mathbf{i} + \int_{t_0}^{t_1} B_y dt \mathbf{j} + \int_{t_0}^{t_1} B_z dt \mathbf{k}$$

2.7 CAMPO SCALARE E CAMPO VETTORIALE

Supponiamo che in una data regione di spazio sia possibile misurare in ogni punto i valori di una certa *grandezza scalare* U o di una certa *grandezza vettoriale* \mathbf{V} . Supponiamo, inoltre, che i valori definiti U e \mathbf{V} dipendano dalle coordinate x, y, z del punto in cui vengono misurate; ciò significa che U e \mathbf{V} sono funzioni di x, y, z .

Le funzioni

$$U = U(x, y, z)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z) = V_x(x, y, z)\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

rappresentano, nella regione di spazio di definizione, un *campo scalare* e un *campo vettoriale*, rispettivamente. Va notato che tali funzioni definiscono grandezze fisiche,

Vettori applicati.

Derivata di un vettore.

Integrale di un vettore.

cioè grandezze che descrivono i fenomeni naturali. Nei casi fisici che ci interessano in questo testo, tali funzioni, proprio perché rappresentano dette grandezze, posseono una regolarità che, in termini analitici, si esprime dicendo che sono continue e derivabili.

Gradiente di un campo scalare.

Gradiente di un campo scalare. Se si ha un campo scalare U (per esempio la temperatura T di una stanza), si definisce il gradiente di U , e si indica $\text{grad } U$, quel vettore che ha per componente lungo x la derivata parziale di U fatta rispetto a x , per componente lungo y la derivata parziale fatta rispetto a y e per componente lungo z la derivata parziale fatta rispetto a z , cioè

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Questa definizione di una nuova operazione, l'*operazione di gradiente*, ci permette di affermare che, dato un campo scalare qualunque U , è sempre possibile, mediante l'operazione di gradiente, dedurne un campo vettoriale $\mathbf{V} = \text{grad } U$.

Per il significato fisico dell'operazione di gradiente rimandiamo al Capitolo 1 che se già dalla sua definizione si capisce che misura la rapidità con cui varia nel spazio la grandezza U .

Potenziale di un campo vettoriale.

Potenziale di un campo vettoriale. Dato un campo vettoriale $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z) = V_x(x, y, z) \mathbf{i} + V_y(x, y, z) \mathbf{j} + V_z(x, y, z) \mathbf{k}$, viene naturale porsi la seguente domanda: esiste una funzione scalare tale che il suo gradiente è uguale al campo vettoriale dato? In altre parole, mentre è sempre possibile (con le regolarità matematiche indicate più sopra) passare da un campo scalare a un campo vettoriale tramite l'operazione di gradiente, è possibile fare l'inverso? Cioè passare da un campo vettoriale a un campo scalare? E, se sì, sotto quali condizioni? La risposta a questo quesito è affatto semplice se e solo se valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial y} &= 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial V_z(x, y, z)}{\partial x} = 0 \\ \text{e} \quad \frac{\partial V_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

cioè se è nullo il vettore

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial V_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial V_z(x, y, z)}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Un vettore siffatto si chiama rotore o rotazionale di \mathbf{V} e si scrive $\text{rot } \mathbf{V}$. Allora si può affermare che un campo vettoriale \mathbf{V} si può scrivere come il gradiente di una funzione scalare U se e solo se $\text{rot } \mathbf{V}$ è uguale a zero. Detto in altro modo: se $\text{rot } \mathbf{V} = 0$, esiste una funzione scalare U tale che $\mathbf{V} = \text{grad } U$. Si dice allora che U è il potenziale del campo vettoriale \mathbf{V} e che \mathbf{V} ammette potenziale.

RIEPILOGO

Paragrafo 2.2 Scalari e vettori

Uno scalare è definito da un unico numero. Un vettore invece ha un'intensità e una direzione, ed è definito da tre numeri. In un piano un vettore è definito da due numeri. Uno spostamento è un vettore che va da un punto dello spazio a un altro.

Paragrafo 2.3 Somma grafica di vettori

I vettori possono essere sommati graficamente usando il metodo del punta-coda o il metodo del parallelogramma. La somma vettoriale gode delle proprietà commutativa e di quella associativa: il prodotto di un vettore per uno scalare è un altro vettore. Il vettore $-A$ ha lo stesso modulo e direzione opposta rispetto al vettore A . La differenza tra vettori è definita dalla formula

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Paragrafo 2.4**Vettori unitari (o versori) e scomposizione dei vettori**

Un versore è un vettore adimensionale di modulo 1. I versori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} giacciono sugli assi di un sistema di coordinate xyz . Un vettore in un piano può essere specificato o dal suo modulo e dalla sua direzione, oppure dalle sue componenti. Le componenti si ricavano dal modulo e dalla direzione tramite le

$$C_x = C \cos \theta \quad C_y = C \sin \theta \quad (2.6)$$

Il modulo e la direzione di un vettore si ricavano dalle componenti tramite le

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \quad \tan \theta = \frac{C_y}{C_x} \quad (2.7)$$

Un vettore in tre dimensioni viene espresso in termini delle sue componenti: $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$.

Paragrafo 2.5**Somma vettoriale con il metodo analitico**

I vettori possono essere sommati analiticamente usando le loro componenti. Se $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, allora

$$C_x = A_x + B_x \quad C_y = A_y + B_y \quad C_z = A_z + B_z \quad (2.8)$$

QUESITI

2.1 Uno scalare può essere negativo? Il modulo di un vettore può essere negativo? La componente di un vettore può essere negativa? Spiega.

2.2 Si considerino gli spostamenti che coincidono con le due diagonali di questa pagina, l'una dall'angolo inferiore sinistro a quello superiore destro e l'altra dall'angolo inferiore destro a quello superiore sinistro. I moduli di questi vettori sono uguali? E i vettori sono uguali? Spiega.

2.3 C'è differenza tra un vettore posizione e uno spostamento? Spiega.

2.4 Due amici decidono di andare dal primo al terzo piano di un grande magazzino: partendo dallo stesso punto vicino all'ascensore, uno sale appunto in ascensore, mentre l'altro, che soffre di claustrofobia, prende la scala mobile; i due si ritrovano al terzo piano, sempre vicino all'ascensore. Si confrontino le lunghezze dei due percorsi. Si confrontino gli spostamenti, e i moduli degli spostamenti.

2.5 Si sommano due vettori della medesima intensità. Il modulo della risultante dipende dalle direzioni dei due vettori: qual è il suo valore massimo? E quale il valore minimo?

2.6 Lo spostamento \mathbf{D} ha modulo 12 m, mentre lo spostamento \mathbf{E} ha modulo 9 m. La risultante, $\mathbf{F} = \mathbf{D} + \mathbf{E}$ ha modulo 3 m. Che cosa si può dire delle direzioni di \mathbf{D} ed \mathbf{E} ?

2.7 Se $\mathbf{A} \neq -\mathbf{B}$, è possibile che $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ sia uguale a zero? Spiega.

2.8 È possibile che $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ sia uguale a zero se i tre vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} hanno (a) intensità diverse, (b) intensità uguali? Spiega.

2.9 Ti capita di sentire un compagno di scuola che descrive una corsa dei 400 m: «Dal momento che la linea di arrivo e la linea di partenza sono nello stesso punto della pista, lo spostamento di un corridore in tutta la gara è nullo». Sei d'accordo con questa affermazione? Spiega.

2.10 Un isolato quadrato ha il lato di 150 m. Se si percorre il marciapiede da un angolo al successivo, qual è il modulo dello spostamento? Se si continua a girare attorno all'isolato fino all'angolo successivo, diagonalmente opposto alla posizione iniziale, qual è il modulo di questo secondo spostamento? Qual è il modulo dello spostamento risultante? Qual è la distanza totale percorsa?

2.11 Rivolti a est fai un gran passo, che produce uno spostamento di modulo 1 m. Questo spostamento è un vettore unitario? Spiega.

- 2.12** È possibile scegliere diversi sistemi di coordinate cartesiane, in modo che gli assi abbiano orientazioni differenti. Il valore di uno scalare dipende dall'orientazione degli assi? Le componenti di un vettore dipendono dall'orientazione degli assi coordinati? Il vettore dipende dall'orientazione degli assi? E il modulo del vettore? Spiega.
- 2.13** Il vettore $\mathbf{V} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ha modulo $V = \sqrt{3}$. Quali sono i moduli dei vettori $\mathbf{U} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{W} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$?
- 2.14** Un vettore posizione giace nel terzo quadrante del piano xy . Qual è il segno di ciascuna delle sue componenti?
- 2.15** Un vettore $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$ giace nel piano yz . Qual è il valore della sua componente x , F_x ?
- 2.16** Passando da un sistema di coordinate a un altro con gli assi orientati in modo diverso, i versori \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} rimangono gli stessi? Spiega.
- 2.17** Quali sono le componenti del versore \mathbf{j} ?
- 2.18** In quale intervallo cadono gli angoli che la tua calcolatrice fornisce quando usi la funzione \tan^{-1} ? E con la funzione \cos^{-1} ? E con la funzione \sin^{-1} ?
- 2.19** La tua calcolatrice esprime gli angoli in radianti o in gradi? Come fai a dirlo?
- 2.20** Quali angoli hanno tangente pari a $+1, -1, 0, +\infty, -\infty$?
- 2.21** Alla fine di ciascun capitolo, l'ultimo quesito richiederà di completare uno specchietto contenente alcuni dei simboli utilizzati nel capitolo per rappresentare le grandezze fisiche. Si riempiano le caselle vuote della tabella, specificando brevemente il significato del simbolo, chiarendo se la grandezza è uno scalare, un vettore o la componente di un vettore, e indicando la relativa unità SI. La tabella che segue contiene alcuni dei simboli utilizzati in questo capitolo: si tratta di completarla.

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
$ \mathbf{A} $	Modulo di un vettore	Scalare	*
C_x		Componente	*
\mathbf{r}	Vettore posizione		m
\mathbf{i}		Vettore	Nessuna

* L'unità SI da collocare in questa casella dipende dalla grandezza considerata. Se A o C_x sono degli spostamenti l'unità SI è il metro.

ESERCIZI

Paragrafo 2.2 Scalari e vettori

- 2.1** Determinare il modulo del vettore posizione che individua il punto di coordinate
 (a) (1.0 m, 2.0 m, 0.0 m);
 (b) (0.0 m, 1.0 m, 2.0 m);
 (c) (1.0 m, 2.0 m, 3.0 m).
- 2.2** L'origine di un sistema di coordinate è in un angolo di una stanza rettangolare, e gli assi coordinati giacciono sui tre spigoli che escono da quell'angolo. Una zanzara parte dall'origine e si muove soltanto lungo gli spigoli raggiungendo l'angolo di coordinate (4.2 m, 3.8 m, 2.6 m). (a) Qual è il percorso di lunghezza minima? (b) Qual è il modulo dello spostamento corrispondente a questo percorso? (c) Qual è la risposta alla domanda (b) se la zanzara vola direttamente dall'origine all'angolo opposto? (d) Qual è la risposta alla domanda (a) se la zanzara cammina lungo le pareti? (*Suggerimento:* si immagini che le pareti della stanza formino una scatola che può essere sviluppata in modo che le facce giacciono nello stesso piano.)
- 2.3** Nel piano di un foglio di carta si introduca un sistema di coordinate xy . Servendosi di una riga e di un goniometro, si traccino i seguenti vettori: (a) il vettore posizione che individua il punto (55 mm, 65 mm); (b) lo spostamento dal punto (32 mm, 18 mm) al punto (87 mm, 83 mm); (c) lo spostamento che parte dal punto (0.0 mm, 18 mm), ha modulo 85 mm e forma un angolo di 50° con il semiasse positivo delle x . Che cos'hanno in comune questi vettori?

Paragrafo 2.3 Somma grafica di vettori

- 2.4** Si usino una riga e un goniometro per trasferire le coppie di vettori della Figura 2.20 su un foglio di carta, e si determini graficamente la somma di ciascuna coppia.

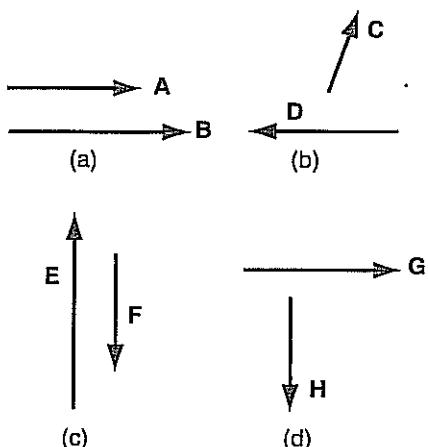


Figura 2.20 Esercizio 2.4.

- 2.5** Cinque vettori che hanno tutti la medesima intensità e giacciono nello stesso piano formano con il semiasse positivo delle x angoli di $0^\circ, \pm 72^\circ, \pm 144^\circ$. Si determini graficamente la loro somma.
- 2.6** I vettori A , B e C giacciono nello stesso piano e sono disposti come risulta dalla Figura 2.21. Usando riga e goniometro, determinare (a) $A + B + C$; (b) $A - B - C$; (c) $C + B + A$.

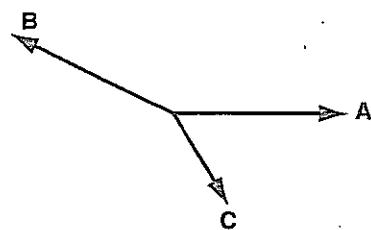


Figura 2.21 Esercizio 2.6.

- 2.7** In un diagramma tracciare coppie di vettori d ed e che
 (a) $d + e = f$, $f = d - e$, $d > e$
 (b) $d + e = f$, $f = d + e$
 (c) $d - e = f$, $f = d + e$
 (d) $d + e = f$, $f = \sqrt{2d}$, $d = e$
- 2.8** Nella Figura 2.11b che illustra il metodo del parallelogramma, la somma $A + B$ è rappresentata una diagonale del parallelogramma. Dimostrare che l'altra diagonale, orientata dalla punta di B alla punta di A , rappresenta $A - B$.

Paragrafo 2.4 Vettori unitari (o versori) e scomposizione dei vettori

- 2.9** (a) Costruire su un foglio di carta un sistema di coordinate xy e disegnare il vettore posizione che individua il punto $x = 54$ mm, $y = 22$ mm.
 (b) Determinare il modulo e la direzione di tale vettore.
 (c) Determinare le componenti x e y di questo vettore.
- 2.10** Verificare che le Equazioni (2.6) determinano in modo corretto le componenti C_x e C_y di un vettore C che giace in uno qualunque dei quattro quadranti del piano xy .
- 2.11** Un sistema di coordinate è orientato in modo che il diretto verso est, j verso nord e k verso l'alto. L'ingresso dell'Istituto di fisica è a 340 m dall'ingresso della biblioteca nella direzione che forma con il nord un angolo di $+49^\circ$. Le due entrate sono sullo stesso lato orizzontale. Determinare le componenti dello spostamento (a) dall'ingresso della biblioteca a quello dell'Istituto di fisica; (b) dall'ingresso dell'Istituto di fisica a quello della biblioteca; (c) dall'ingresso della biblioteca alla bandiera dell'Istituto di fisica, che trova proprio sopra l'ingresso a 35 m di altezza.
- 2.12** (a) Il versore n giace nel piano xy e forma un angolo di θ con il semiasse positivo delle x . Si esprima n in termini di θ . (b) Si dimostri che $i\sqrt{3}/\sqrt{14} - j\sqrt{1}/\sqrt{14} + k\sqrt{2}/\sqrt{14}$ è un vettore unitario.
- 2.13** Il vettore posizione $r = xi + yj$ individua il punto P . (a) Qual è il modulo r di questo vettore? (b) Si determini l'espressione delle componenti del versore $\hat{r} = r/r$.
- 2.14** Un vettore v (una velocità) ha componenti $v_x = 34$ m/s, $v_y = -12$ m/s. Si determinino il modulo e la direzione dei vettori (a) v ; (b) $2v$; (c) $-2v$; (d) $(1/v)v$. (e) Se si rappresentano il modulo e la direzione di v , si determinino le componenti del vettore di modulo 2 e direzione 2θ .

PROBLEMI

Paragrafo 2.5 Somma vettoriale con il metodo analitico

- 2.15 Dati i due vettori adimensionali $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, determinare (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; (b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$; (c) $\mathbf{B} - \mathbf{A}$; (d) $\mathbf{B} + \mathbf{A}$.

- 2.16 Due spostamenti sono dati da $\mathbf{d} = (3 \text{ m})\mathbf{i} + (4 \text{ m})\mathbf{j} + (5 \text{ m})\mathbf{k}$ ed $\mathbf{e} = (2 \text{ m})\mathbf{i} + (-6 \text{ m})\mathbf{j} + (-1 \text{ m})\mathbf{k}$. Determinare (a) la risultante $\mathbf{f} = \mathbf{e} + \mathbf{d}$; (b) un vettore \mathbf{g} tale che $\mathbf{d} - \mathbf{e} + \mathbf{g} = 0$.

- 2.17 Il vettore posizione $\mathbf{r}_Q = x_Q\mathbf{i} + y_Q\mathbf{j}$ individua un punto Q di coordinate (x_Q, y_Q) . (a) Qual è l'espressione del vettore posizione \mathbf{r}_P che individua il punto P di coordinate (x_P, y_P) ? (b) Determinare le componenti dello spostamento dal punto P al punto Q . (c) Spiegare perché queste componenti non dipendono dall'ubicazione dell'origine del sistema di coordinate.

- 2.18 Dato lo spostamento $\mathbf{a} = (5 \text{ m})\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$, trovare altri due spostamenti \mathbf{b} e \mathbf{c} , anch'essi di modulo pari a 5 m e contenuti nel piano xy , tali che $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. La coppia \mathbf{b}, \mathbf{c} è unica? Spiegare.

- 2.19 Un furgoncino compie successivamente gli spostamenti di 1.37 km verso sudest, 0.85 km verso nord e 2.12 km in una direzione che forma con il nord un angolo di $+17^\circ$. Si determinino il modulo e la direzione dello spostamento risultante.

- 2.20 Un panfilo bordeggia contro vento su una rotta a zigzag. Nel primo tratto il panfilo compie uno spostamento di 12 km in una direzione che forma con il nord un angolo di -84° . Dopo che il secondo tratto è stato completato, lo spostamento risultante del panfilo è di 15 km in una direzione che forma con il nord un angolo di -23° . Determinare il modulo e la direzione del secondo tratto della rotta.

- 2.21 Otto vettori disposti in modo che la punta dell'uno coincida con la coda del successivo formano un ottagono regolare di lato pari a 25 mm. Utilizzando il sistema di coordinate indicato nella Figura 2.22, determinare (a) le componenti di ciascuno dei vettori che formano l'ottagono; (b) il modulo e la direzione dei vettori contrassegnati con \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} nella figura.

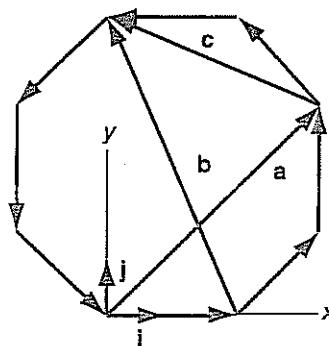


Figura 2.22 Esercizio 2.21.

- 2.22 Un uccello vola per 120 m in linea retta, svolta bruscamente e vola per 160 m lungo una linea retta che forma un angolo di 77° con la direzione iniziale. (a) Si determini il modulo dello spostamento risultante. (Suggerimento: si veda l'Esempio 2.5.) (b) Qual è la distanza totale percorsa dall'uccello?
- 2.23 Si utilizzi il teorema del coseno introdotto nell'Esempio 2.5 per determinare l'angolo compreso tra i vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , se $A = 23 \text{ mm}$, $B = 18 \text{ mm}$, e $C = 7 \text{ mm}$ ($\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$).
- 2.24 Il teorema del coseno a volte viene formulato ricorrendo all'angolo interno ϕ indicato nella Figura 2.23, invece che all'angolo esterno θ . Si dimostri che in questa forma il teorema è espresso da

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \phi}$$

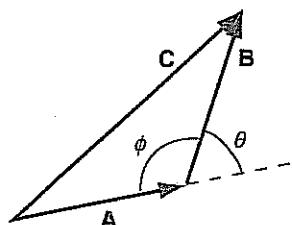


Figura 2.23 Esercizio 2.24.

- 2.25 (a) Dimostrare che, se $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, allora $|A - B| \leq C \leq A + B$. (b) Quanto misura l'angolo compreso tra \mathbf{A} e \mathbf{B} se $|A - B| = C$? (c) E se $A + B = C$?

PROBLEMI

- 2.1 **Coseni direttori.** Un versore \mathbf{n} forma con gli assi coordinati x , y , z rispettivamente gli angoli α , β , γ , come mostra la Figura 2.24. (a) Dimostrare che i coseni direttori ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$) sono le componenti di \mathbf{n} . (b) Dimostrare che i coseni direttori soddisfano l'identità

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

- (c) Se $\mathbf{F} = F\mathbf{n}$, esprimere le componenti di \mathbf{F} in termini dei coseni direttori di \mathbf{n} e del modulo F .

- 2.2 Due spostamenti sono dati da $\mathbf{d} = (2.1 \text{ m})\mathbf{i} + (-1.3 \text{ m})\mathbf{j}$ ed $\mathbf{e} = (0.8 \text{ m})\mathbf{i} + (1.6 \text{ m})\mathbf{j}$. Determinare gli angoli tra (a) \mathbf{d} ed \mathbf{e} ; (b) \mathbf{d} e \mathbf{f} ove $\mathbf{f} = \mathbf{d} + \mathbf{e}$; (c) \mathbf{f} e \mathbf{g} ove $\mathbf{g} = \mathbf{d} - \mathbf{e}$.

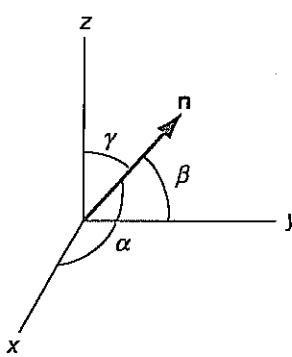


Figura 2.24 Esercizio 2.1.

- 2.3** Sia θ l'angolo compreso tra due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , con
 $b = \frac{1}{2}a$. Se $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, si determini il valore di θ con
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}a/2$
 - $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}a/2$
 - $c = 3a/2$
 - $c = \frac{1}{2}a$

- 2.4** La Figura 2.25 mostra due coppie di assi coordinati con i relativi versori. (a) Dimostrare che

$$\begin{aligned}\mathbf{i}' &= \cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi \\ \mathbf{j}' &= -\mathbf{i} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi\end{aligned}$$

- (b) Un vettore \mathbf{A} può essere espresso come $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$ oppure come $\mathbf{A} = A'_x \mathbf{i}' + A'_y \mathbf{j}'$. Si utilizzi la parte (a) per dimostrare che

$$\begin{aligned}A'_x &= A_x \cos \phi + A_y \sin \phi \\ A'_y &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi\end{aligned}$$

Trattazioni più approfondite dei vettori usano espressioni di questo tipo per definirli.

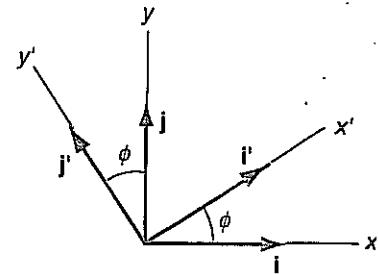


Figura 2.25 Problema 2.4.

- 2.5** Dato un vettore qualsiasi \mathbf{A} di modulo A , si può costruire un vettore unitario con la medesima direzione di \mathbf{A} . Utilizzeremo il simbolo $\hat{\mathbf{A}}$ per denotare il versore o vettore parallelo al vettore \mathbf{A} . Dunque $\hat{\mathbf{A}} = (1/A)\mathbf{A} = \mathbf{A}/A$.
- Dimostrare che $\hat{\mathbf{A}}$ è un vettore unitario parallelo a \mathbf{A} .
 - Il vettore posizione \mathbf{r} localizza il punto (x, y, z) rispetto all'origine di un sistema di coordinate. Determinare le componenti x, y e z del versore $\hat{\mathbf{r}}$.
- 2.6** Quattro vettori $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ e \mathbf{D} hanno moduli rispettivamente uguali a 1, 2, 3 e 4 in unità arbitrarie. Le direzioni non sono specificate e possono essere considerate variabili. Determinare il modulo (a) minimo e (b) massimo della risultante $\mathbf{E} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}$.
- (c) Risolvere nuovamente il problema con la restrizione che tre dei vettori giacciono in un medesimo piano mentre il quarto è perpendicolare a tale piano.

LA CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE IN TRE DIMENSIONI E IL MOTO IN UNA DIMENSIONE

3.1 INTRODUZIONE

La *meccanica* è lo studio del moto. Supponiamo che ci interessi il moto di un satellite in orbita attorno alla Terra; conosciamo la posizione attuale del satellite, la sua velocità e la direzione nella quale si sta muovendo; ci proponiamo di predire la traiettoria del satellite e l'istante in cui raggiungerà ciascun punto della traiettoria. Questo è il tipo di problemi di cui si occupa la meccanica.

Dal punto di vista didattico la meccanica viene divisa in tre parti: la *cinematica*, la *dinamica* e la *statica*. La cinematica studia e descrive il moto dei corpi indipendentemente dalle cause che lo determinano ed è detta anche *geometria del moto*, in quanto associa i concetti della geometria (come la posizione dei corpi nello spazio) al concetto di tempo. La dinamica, che comprende le leggi del moto, studia il movimento dei corpi in relazione alle cause che lo provocano. La statica studia le condizioni per l'equilibrio dei corpi.

In vista dello studio della dinamica, questo capitolo e il prossimo sono dedicati alla cinematica. In particolare, questo capitolo analizza il moto lungo una linea retta, ossia il moto in una dimensione. Il Capitolo 4 analizzerà il moto in due dimensioni.

3.2 VETTORI POSIZIONE E SPOSTAMENTO

Il concetto di moto è intuitivo e molto comune: tutti capiscono quando si dice che un corpo si muove o sta fermo. In realtà la questione è un poco più complicata di quello che sembra. Per esempio osservando il tronco di un albero tutti sono portati a dire che è fermo e guardando un treno che viaggia tutti sono portati a dire che il treno si muove; però, in realtà, il tronco si muove con grande velocità rispetto al Sole; inoltre, un osservatore "ingenuo" (per esempio un bambino) che sta sul treno, guardando l'albero dal finestrino e un suo compagno di viaggio seduto accanto a lui, può affermare che il tronco sta correndo e il suo vicino è fermo. In sostanza ci si accorge che il concetto di moto dipende da chi osserva il fenomeno. Cerchiamo, quindi, di definire razionalmente e oggettivamente il moto.

Un corpo è in moto se la posizione dei suoi punti (in pratica, la sua posizione e/o la sua forma) cambia nel tempo rispetto ad altri corpi, che non mutano la reciproca posizione, presi come riferimento.

Nel concetto di moto, quindi, sono presenti i concetti di spazio e di tempo, e tutto è relativo all'insieme di corpi rispetto al quale si osservano e misurano gli spazi e i tempi. Questo insieme di corpi, che viene utilizzato come riferimento per osservare altri corpi e che può venire schematizzato mediante rette e punti, viene chiamato *sistema di riferimento*. Ne consegue che, per poter parlare di moto e poterlo descrivere, occorre che ci sia un osservatore, in quiete rispetto al sistema di riferimento scelto, che compia misure di tempo e di lunghezze con opportuni apparati.

Diventa quindi importante da un lato la scelta del sistema di riferimento rispetto al quale descrivere i moti e, dall'altro, capire se esistono particolari criteri di scelta e se esistono sistemi di riferimento migliori di altri. Per la descrizione cinematica dei moti tutti i sistemi sono sullo stesso piano, cioè sono ugualmente accettabili e quindi la

Sistemi di riferimento.

Definizione di punto materiale.

Vettore posizione \mathbf{r} .

Spostamento $\Delta\mathbf{r}$.

scelta del sistema viene fatta in base a criteri di semplicità di descrizione del moto, esempio classico è il moto dei pianeti che risulta essere molto complicato se osservata dalla Terra mentre è molto semplice se viene osservato dal Sole. Vedremo poi in dinamica che, quando si cercano le leggi generali che governano i moti, è necessario considerarli da particolari sistemi di riferimento e che, quindi, non tutti i sistemi sono equivalenti.

In questi primi capitoli, per semplificare la discussione del moto dei corpi, trattiamo questi ultimi come punti materiali. Un *punto materiale* è un'entità idealizzata che non ha estensione né struttura interna. Trattare un oggetto esteso alla stregua di punto materiale costituisce un'approssimazione legittima se le dimensioni dell'oggetto sono ininfluenti per il problema in esame. Per esempio, nella descrizione del moto orbitale dei pianeti attorno al Sole, possiamo considerare sia il Sole che i pianeti come punti materiali: infatti il raggio del Sole e quello di qualunque pianeta sono molto minori della distanza di qualsiasi pianeta dal Sole; inoltre il moto di rotazione assiale del Sole e dei pianeti ha un effetto trascurabile sulle orbite planetarie. Perfino una galassia che contenga un miliardo di stelle grandi come il Sole o anche di più, può in certi casi essere trattata come punti materiali.

Una volta scelto il sistema di riferimento, l'esigenza di quantificare la descrizione del moto impone di scegliere il tipo di coordinate che definiscono la posizione di un punto nello spazio. Di norma useremo una terna di assi ortogonali cartesiani e la posizione di un punto nello spazio tridimensionale sarà definita dalle coordinate cartesiane x, y, z . Il *vettore posizione* $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ ci definisce in forma vettoriale la posizione di un punto nello spazio rispetto al sistema di assi scelto. Se il punto si muove spesso a questo sistema cartesiano, il suo vettore posizione cambierà nel tempo, cioè sarà una funzione del tempo $\mathbf{r}(t)$, cioè le sue componenti x, y, z saranno funzioni del tempo. Quindi il moto di un punto materiale sarà noto se si conosce la funzione $\mathbf{r}(t)$, cioè le tre funzioni scalari $x(t), y(t)$ e $z(t)$. Questo è il problema generale per il punto materiale: partendo da certe ipotesi (si vedrà nel seguito che tali ipotesi possono essere la conoscenza della sua accelerazione o delle forze a cui è soggetto) trovare la sua posizione in ogni istante, cioè la sua $\mathbf{r}(t)$, oppure, conoscendo la sua $\mathbf{r}(t)$, trovare le caratteristiche del suo moto.

Nel caso del moto lungo una linea retta, va scelta in primo luogo di un'origine qualche punto della retta, e poi di un verso positivo: le misure saranno fatte allora spesso a questo sistema di riferimento. Consideriamo un'automobile che percorre la strada rettilinea diretta da est a ovest: come origine possiamo prendere, per esempio, un punto adiacente a un grande albero sul ciglio della strada. Posto l'asse x nella direzione della strada, orientiamo il versore \mathbf{i} verso est, scegliendo questo come verso positivo. Il *vettore posizione* \mathbf{r} dell'automobile è dato da

$$\mathbf{r} = xi \quad (3)$$

La coordinata x dell'automobile è la componente del suo vettore posizione. Quando la vettura si trova 55 m a est dall'origine, il suo vettore posizione è $\mathbf{r} = (55 \text{ m})\mathbf{i}$. Quando è 25 m a ovest dall'origine, il suo vettore posizione è $\mathbf{r} = -(25 \text{ m})\mathbf{i}$.

Si ha uno *spostamento* $\Delta\mathbf{r}$ quando si verifica un cambiamento della posizione. È la differenza tra il vettore posizione finale \mathbf{r}_f e il vettore posizione iniziale \mathbf{r}_i :

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i = (x_f - x_i)\mathbf{i} + (y_f - y_i)\mathbf{j} + (z_f - z_i)\mathbf{k} \quad (3)$$

che nel caso di moto rettilineo su un asse, per esempio l'asse x , si riduce a

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i = (x_f - x_i)\mathbf{i} = \Delta x\mathbf{i} \quad (3)$$

Se la posizione iniziale dell'automobile era 25 m a ovest dall'origine e la sua posizione finale è 55 m a est dall'origine, il suo spostamento è stato

$$\Delta\mathbf{r} = [(55 \text{ m}) - (-25 \text{ m})]\mathbf{i} = (80 \text{ m})\mathbf{i}$$

L'uso del versore \mathbf{i} è superfluo nella cinematica in una dimensione. L'oggetto si trova sempre lungo una linea retta, come l'asse x , e il segno della x dice da che parte dell'origine sta. Ciò significa che possiamo descrivere il moto in una dimensione servendoci

della x invece che di r , e di Δx invece che di Δr . Ma questa semplicità non si estende ai casi in due e tre dimensioni. Quindi, sebbene non sia necessaria nella cinematica in una dimensione, usiamo la notazione vettoriale anche in questo capitolo per prepararci in vista della discussione del moto in due e in tre dimensioni.

Esempio 3.1

A volte la soluzione di un problema di dinamica porta a un'espressione della coordinata x di un oggetto come funzione del tempo t , espressione che si scrive $x(t)$. Una volta trovata un'espressione di questo tipo, la si può usare per determinare la coordinata in un particolare istante. Supponiamo che una slitta stia scivolando su per un pendio nevoso diritto; la slitta si muove sempre più lentamente via via che sale lungo la china; poi si arresta per un istante, e prende a scivolare all'indietro giù per il pendio. Un'analisi del moto della slitta fornisce la sua coordinata x come funzione del tempo t :

$$x(t) = 18 \text{ m} + (12 \text{ m/s})t - (1.2 \text{ m/s}^2)t^2$$

ove x viene misurata lungo il percorso della slitta e il semiasse positivo delle x è rivolto lungo la salita. (a) Costruire un grafico della coordinata della slitta come funzione del tempo da $t = 0.0$ s a $t = 8.0$ s riportando i punti a intervalli di 1.0 s. (b) Determinare lo spostamento della slitta tra $t_i = 1.0$ s e $t_f = 7.0$ s. (c) Lo spazio percorso da un oggetto è la lunghezza totale della sua traiettoria. Calcolare lo spazio percorso dalla slitta tra gli istanti $t_i = 1.0$ s e $t_f = 7.0$ s.

Soluzione

(a) La coordinata della slitta, per esempio all'istante $t = 2.0$ s, si trova sostituendo $t = 2.0$ s nell'equazione che dà $x(t)$:

$$x = 18 \text{ m} + (12 \text{ m/s})(2.0 \text{ s}) - (1.2 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s})^2 = 37 \text{ m}$$

Determinando la coordinata negli altri istanti si ottengono i dati riportati nella Tabella 3.1. La Figura 3.1 è un grafico di x in funzione di t . Incidentalmente, si osservi come il prodotto delle unità di misura presenti in ciascun termine dell'equazione dia l'unità m. Per esempio, l'unità del terzo termine è $(\text{m/s}^2)(\text{s})^2 = \text{m}$. Ogniqualvolta si effettua un calcolo di questo genere è bene accertarsi che le unità di misura siano coerenti.

(Il lettore che volesse rinfrescarsi la memoria sulle unità di misura torni al Paragrafo 1.4.)

(b) Facendo uso dei dati della Tabella 3.1, si trova che lo spostamento tra $t_i = 1.0$ s e $t_f = 7.0$ s è

$$\Delta r = (x_f - x_i)\mathbf{i} = (43 \text{ m} - 29 \text{ m})\mathbf{i} - (14 \text{ m})\mathbf{i}$$

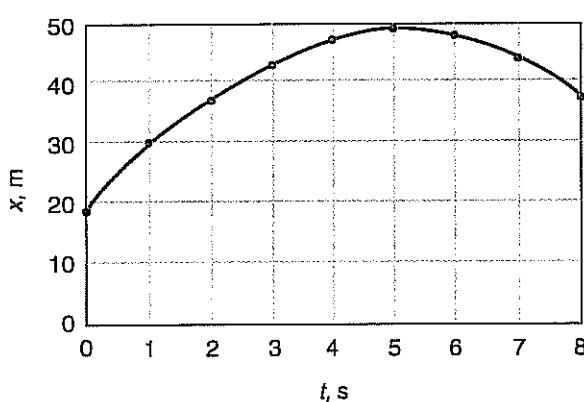
(c) In base al grafico possiamo valutare la posizione nella quale la slitta ha cambiato direzione di marcia. La sua coordinata ha continuato ad aumentare fino a $x \approx 48$ m, e poi ha cominciato a decrescere. A partire dall'istante $t = 1.0$ s, la slitta ha percorso nella direzione $+x$ una distanza di circa 48 m - 29 m = 19 m. Prima dell'istante $t = 7.0$ s, essa ha percorso nella direzione $-x$ una distanza di circa 48 m - 43 m = 5 m. Lo spazio percorso fra $t = 1.0$ s e $t = 7.0$ s è di circa 19 m + 5 m = 24 m. Si noti la distinzione tra spostamento e spazio percorso.

Tabella 3.1

t, s	x, m
0.0	18
1.0	29
2.0	37
3.0	43
4.0	47
5.0	48
6.0	47
7.0	43
8.0	37

Figura 3.1

Esempio 3.1: la coordinata x di una slitta in funzione del tempo t . La slitta inizialmente saliva lungo il pendio, poi, dopo essersi arrestata un istante per $t \approx 5.0$ s, è scivolata all'indietro giù per il declivo.



3.3 LA VELOCITÀ

La posizione di un oggetto ci dice dove esso si trova rispetto a un sistema di riferimento. La velocità di un corpo ci dice con quale rapidità esso si muove e in quale direzione si dirige rispetto al sistema di riferimento.

locità media \bar{v} di un corpo in un intervallo di tempo compreso tra t_i e t_f è

Velocità media.

$$\bar{v} = \frac{\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

ove \mathbf{r}_f e \mathbf{r}_i sono i vettori posizione che individuano il corpo negli istanti t_f e t_i rispettivamente. Un simbolo con un soprassegno, come \bar{v} , rappresenta per convenzione la media di una grandezza. In una dimensione, la velocità media ha una sola componente:

$$\bar{v} = \frac{(x_f - x_i)\mathbf{i}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} = \bar{v}_x \mathbf{i}$$

Tale componente è

$$\bar{v}_x = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Serviamoci della Tabella 3.1 per determinare la componente della velocità media della slitta dell'Esempio 3.1 in due diversi intervalli di tempo. La componente della velocità media nell'intervallo compreso tra l'istante $t_i = 1.0$ s e l'istante $t_f = 4.0$ s è

$$\bar{v}_x = \frac{47 \text{ m} - 29 \text{ m}}{4.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = \frac{18 \text{ m}}{3.0 \text{ s}} = 6 \text{ m/s.}$$

Per l'intervallo di tempo compreso tra $t_i = 1.0$ s e $t_f = 3.0$ s, si ha

$$\bar{v}_x = \frac{43 \text{ m} - 29 \text{ m}}{3.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = \frac{14 \text{ m}}{2.0 \text{ s}} = 7 \text{ m/s}$$

In un grafico di x in funzione di t , la componente della velocità media è pari alla pendenza del segmento di retta che ha per estremi due punti del grafico. Nella Figura 3.3 è rappresentato il segmento che congiunge i punti del grafico corrispondenti agli estremi dell'intervallo $t_i = 1.0$ s e $t_f = 4.0$ s. La figura mostra che la pendenza di tale segmento è $\bar{v}_x = 6$ m/s. Si tenga ben presente che il grafico della coordinata in funzione del tempo non rappresenta la traiettoria del corpo. In questo capitolo, la traiettoria del corpo è sempre una linea retta.

La velocità media esprime la rapidità con cui un oggetto si muove e la direzione in cui si muove durante un certo intervallo di tempo.

Ora passiamo a definire la velocità istantanea, che esprime la rapidità con cui un corpo si muove e la direzione in cui si muove in un certo istante di tempo.

Prendiamo nuovamente in considerazione la slitta dell'Esempio 3.1. Supponiamo di aver riportato nel grafico di x in funzione di t molti punti, in modo che si abbia una curva continua e regolare come nella Figura 3.3. La pendenza del segmento che congiunge due punti qualsiasi della curva fornisce la componente della velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra quei punti. Immaginiamo ora di calcolare la componente della velocità media per intervalli di tempo sempre più brevi, cioè mantenendo fisso t_i e scegliamo t_f via via più vicino a t_i . Osservando la figura si vede che, man mano che t_f si avvicina a t_i , la pendenza del segmento si approssima alla pendenza della tangente alla curva in t_i . La componente della velocità è uguale alla pendenza della tangente alla curva $x-t$; in altre parole, la componente della velocità è il limite che la componente della velocità media quando l'intervallo di tempo tende a zero.

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Al tendere di Δt a zero, anche Δx tende a zero. Al tendere di entrambi a zero, il rapporto tende a v_x .

La pendenza della tangente a una curva in un punto è chiamata solitamente pendenza della curva in quel punto. Tale pendenza è data dalla derivata di x rispetto a t :

$$\text{pendenza della curva} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

3.3 La velocità

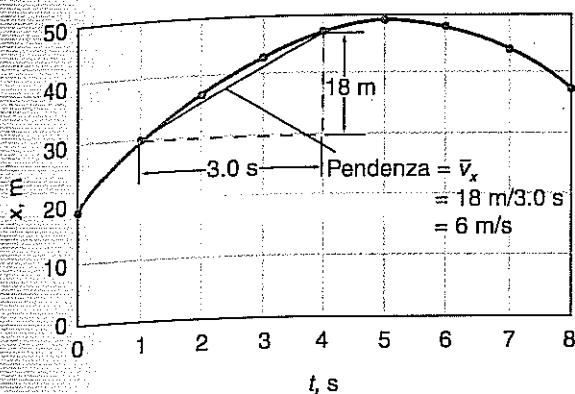


Figura 3.2 La componente della velocità media tra t_i e t_f è pari alla pendenza del segmento di retta che ha per estremi i punti corrispondenti a t_i e t_f sul grafico di x in funzione di t . Per la slitta dell'Esempio 3.1, $\bar{v}_x = 6 \text{ m/s}$ tra $t_i = 1.0 \text{ s}$ e $t_f = 4.0 \text{ s}$.

Quindi v_x è definita come derivata di x rispetto a t :

$$\quad v_x = \frac{dx}{dt}$$

Dal momento che $v_x = dx/dt$, la pendenza di un grafico di x in funzione di t in corrispondenza di un particolare istante fornisce la componente della velocità in quell'istante (Figura 3.4).

Estendendo lo studio alle tre dimensioni, si giunge in modo naturale alla definizione generale della velocità \mathbf{v} ; la velocità è il limite a cui tende la velocità media quando l'intervallo di tempo tende a zero:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{v}}$$

Siccome $\bar{v} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$, si ha

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

ossia, nella notazione del calcolo differenziale,

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}}$$

Definizione della componente della velocità nel caso monodimensionale.

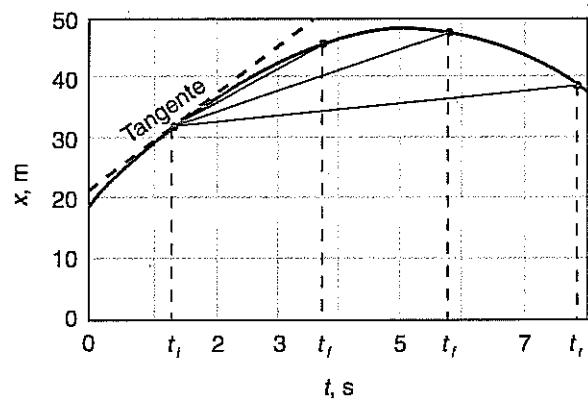


Figura 3.3 Via via che, in un grafico di x in funzione di t , t_f si avvicina a t_i , la pendenza dei vari segmenti che congiungono i punti corrispondenti a t_i e a t_f si avvicina alla pendenza della retta tangente alla curva per $t = t_i$.

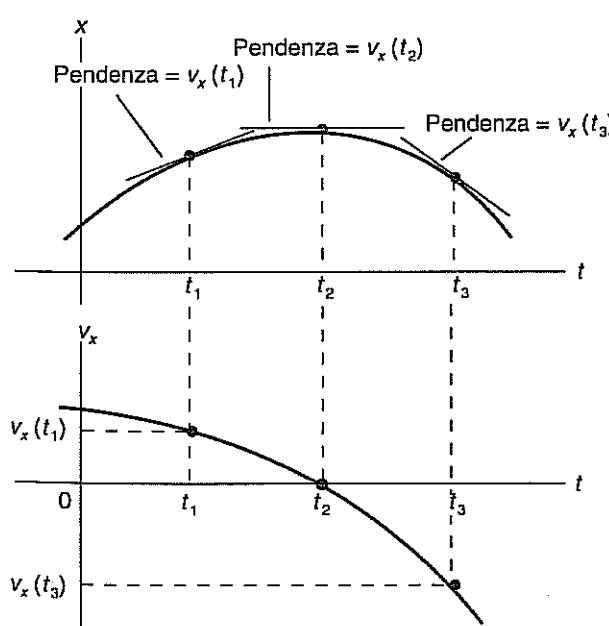


Figura 3.4
La pendenza di un grafico di x in funzione di t fornisce, in ogni istante t , il valore di v_x in quell'istante.

Dato che lo spostamento è una grandezza vettoriale e il tempo è una grandezza, la velocità risulta coerentemente una grandezza vettoriale. L'unità SI dell'amento è il metro e l'unità SI del tempo è il secondo; quindi l'unità SI della velocità è il metro al secondo (m/s).

Poiché il vettore posizione si può scrivere in coordinate cartesiane $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ e per le proprietà delle derivate, si ha che

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

cioè il vettore velocità ha come componenti le derivate delle componenti del posizione, cioè delle coordinate cartesiane del punto materiale che si sta muovendo.

Il modulo della velocità si indica dunque:

Modulo della velocità.

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$$

In coordinate cartesiane tale modulo si può scrivere come la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti (vedi Paragrafo 2.4), cioè

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}.$$

In seguito, indicheremo con il termine "velocità" tanto la grandezza vettoriale quanto il suo modulo, e lasceremo al buon senso del lettore distinguere di volta in volta in base al contesto.

Dal momento che è il modulo di un vettore, ovviamente v è una grandezza positiva, che non è mai negativa. L'unità SI è sempre il m/s. In una dimensione,

$$v = |v_x \mathbf{i}| = |v_x| = \left| \frac{dr}{dt} \right|$$

La Tabella 3.2 riporta i valori di alcune velocità significative.

Tabella 3.2 I valori numerici (approssimativi) di alcune velocità, espressi in m/s.

Deriva continentale dell'America del Nord (rispetto all'Europa)	10 ⁻³
Ghiacciaio (rispetto alla superficie della Terra)	10 ⁻³
Uomo che cammina (rispetto al marciapiede)	1
Jet che decolla (rispetto alla pista)	80
Superficie della Terra all'equatore (rispetto al centro della Terra)	4.6 × 10 ⁻³
Centro della Terra (rispetto al Sole)	3.0 × 10 ⁻³
Sistema solare (rispetto al centro della nostra galassia)	2.5 × 10 ⁻³
Galassia più veloce conosciuta (rispetto alla Terra)	2.4 × 10 ⁻³
Luce	3.0 × 10 ⁸

Esempio 3.2

(a) Si determini, per la slitta dell'Esempio 3.1, un'espressione della componente della velocità come funzione del tempo. (b) Si costruisca un grafico della componente della velocità in funzione del tempo, da $t = 0.0$ s a $t = 8.0$ s, riportando punti a intervalli di 1.0 s. (c) Basandosi sui dati della Tabella 3.1, si illustrino graficamente le posizioni della slitta lungo la sua traiettoria rettilinea, per i tempi $t = 0.0, 2.0, 5.0$ e 8.0 s. Si usino delle frecce per rappresentare la velocità della slitta in ciascuno di questi istanti.

Soluzione

(a) Dall'Esempio 3.1 si ha:

$$x(t) = 18 \text{ m} + (12 \text{ m/s})t - (1.2 \text{ m/s}^2)t^2$$

Dal momento che $x(t)$ è un polinomio in t , ci serviamo della regola per il calcolo della derivata di una potenza di t :

$$\frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{d}{dt}[18 \text{ m} + (12 \text{ m/s})t - (1.2 \text{ m/s}^2)t^2] \\ &= 12 \text{ m/s} - 2(1.2 \text{ m/s}^2)t \\ &= 12 \text{ m/s} - (2.4 \text{ m/s}^2)t \end{aligned}$$

(b) Il valore di v_x , per esempio all'istante $t = 2.0 \text{ s}$, è

$$v_x = 12 \text{ m/s} - (2.4 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s}) = 7 \text{ m/s}$$

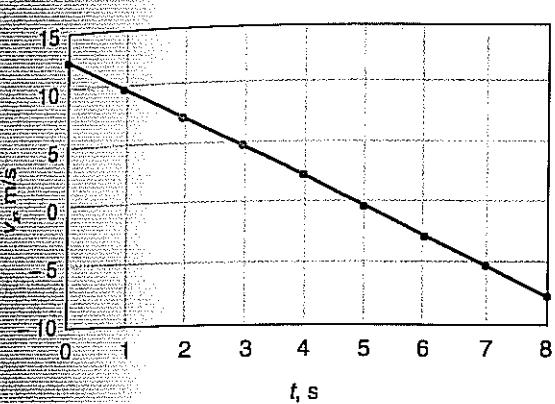
Calcolando il valore della componente della velocità negli altri istanti, si ottengono i dati riportati nella Tabella 3.3, e questi dati sono rappresentati nel grafico della Figura 3.5a. Si noti che v_x assume il valore zero per $t = 5.0 \text{ s}$. In tale istante la slitta è momentaneamente in quiete prima di cominciare a scivolare all'indietro.

(c) Le posizioni e le velocità della slitta nei quattro istanti considerati sono rappresentate nella Figura

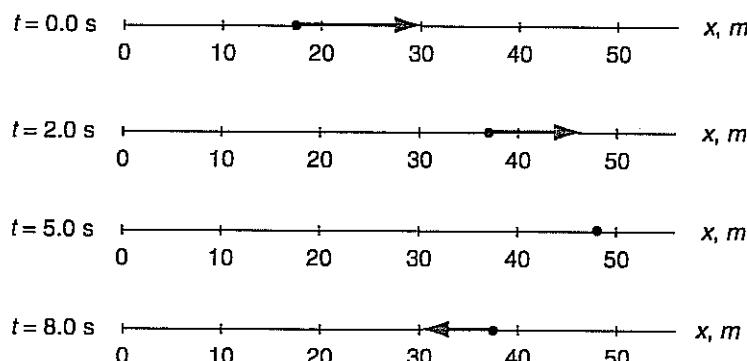
3.5b.

La lunghezza di ciascuna freccia corrisponde al modulo della velocità in quell'istante.

Tabella 3.3	
t, s	$v_x, \text{m/s}$
0.0	12
1.0	10
2.0	7
3.0	5
4.0	2
5.0	0
6.0	-2
7.0	-5
8.0	-7



(a)



(b)

Figura 3.5 Esempio 3.2: (a) la componente della velocità come funzione del tempo. (b) Posizione e velocità in quattro diversi istanti. La slitta era momentaneamente in quiete per $t = 5.0 \text{ s}$.

Esempio 3.3

I tacchimetri delle automobili americane spesso esprimono la velocità nell'unità mi/h (miglia all'ora).

(a) Determinare il fattore di conversione per trasformare una velocità espressa in mi/h in una espressa in m/s. (b) Convertire in m/s una velocità di 55 mi/h.

Soluzione

(a) Si ha: 1 mi = 1.61 km. Inoltre 1 h = 3600 s. Quindi $1 \text{ mi}/1 \text{ h} = 1.61 \text{ km}/3600 \text{ s} = 0.447 \text{ m/s}$, ossia

$$1 \text{ mi/h} = 0.447 \text{ m/s}$$

Dividendo entrambi i membri per 1 mi/h si ottiene:

$$1 = \frac{0.447 \text{ m/s}}{1 \text{ mi/h}} = 0.447 \text{ m h mi}^{-1} \text{s}^{-1}$$

Questo modo di esprimere il numero 1 rappresenta il fattore di conversione cercato.

(b) Utilizzando il fattore di conversione appena ricavato, si ha

$$55 \text{ mi/h} = (55 \text{ mi h}^{-1})(0.447 \text{ m s}^{-1} \text{ mi}^{-1} \text{ h}) = 25 \text{ m s}^{-1} = 25 \text{ m/s}$$

3.4 L'ACCELERAZIONE

L'accelerazione di un corpo esprime la rapidità con la quale la sua velocità varia, sia in modulo che in direzione. Come ci siamo serviti della velocità media per definire la velocità, così ora utilizziamo l'accelerazione media per definire l'accelerazione.

L'accelerazione media \bar{a} di un corpo nell'intervallo di tempo compreso tra t_i e t_f è data da

$$\bar{a} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (3.8) \quad \text{Accelerazione media.}$$

dove \mathbf{v}_f e \mathbf{v}_i sono le velocità negli istanti t_f e t_i rispettivamente. In una dimensione l'accelerazione media ha una sola componente. Dato che $\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i = v_{xf} \mathbf{i} - v_{xi} \mathbf{i}$, si ha

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{(\mathbf{v}_{sf} - \mathbf{v}_{xi})\mathbf{i}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}_x}{\Delta t} \mathbf{i} = \bar{a}_x \mathbf{i}$$

dove v_{xf} e v_{xi} sono le componenti della velocità agli istanti t_f e t_i . La grandezza è la componente dell'accelerazione media:

$$\bar{a} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

Per determinare l'accelerazione, si deve trovare il limite cui tende l'accelerazione media quando l'intervalllo di tempo tende a zero:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Dal momento che

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

definiamo l'accelerazione come

Definizione di accelerazione.

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}}$$

Poiché il vettore velocità è dato dalla derivata rispetto al tempo del vettore posizionale (vedi (3.5)), si può scrivere

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

e dalla (3.6)

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}$$

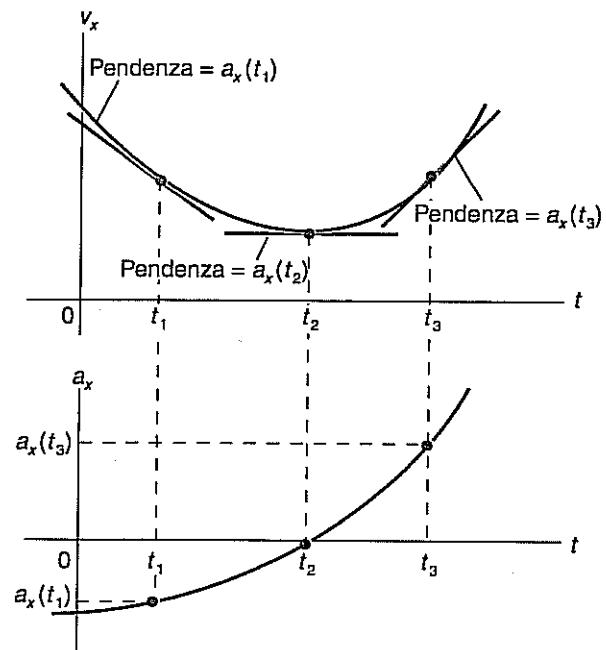
Per il moto unidimensionale lungo l'asse x , $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i}$, e quindi $a_x = dv_x/dt$. Inoltre, essendo $v_x = dx/dt$, si ha

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

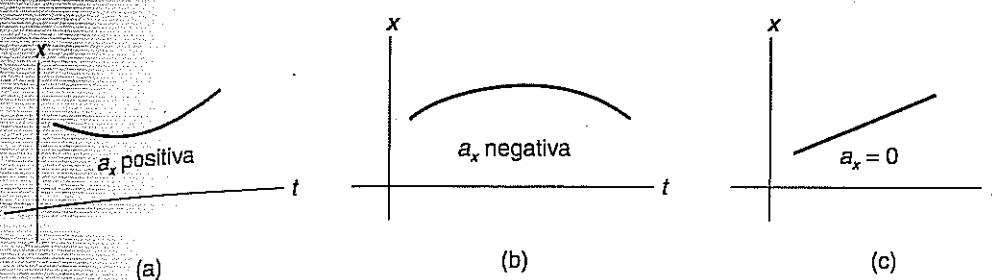
La Figura 3.6 illustra la connessione tra un grafico di v_x in funzione di t e un grafico di a_x in funzione di t . È da notare che la relazione tra a_x e v_x è analoga alla relazione tra

Figura 3.6

La pendenza di un grafico di v_x in funzione di t fornisce, in ogni istante t , il valore di a_x in quell'istante.



3.4 L'accelerazione



L'accelerazione di un corpo può essere determinata anche a partire dal grafico di x in funzione di t . In un diagramma di questo tipo, $v_x = dx/dt$ è la pendenza del grafico. La rapidità con cui varia la pendenza v_x è data da $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$. Quindi a_x rappresenta una misura della rapidità di variazione della pendenza. In altre parole, a_x è connessa alla curvatura del grafico. Quanto più pronunciata è la curvatura del grafico, tanto maggiore è $|d^2x/dt^2|$, ossia il modulo dell'accelerazione. Se il grafico si incurva verso l'alto al crescere di t , come nella Figura 3.7a, v_x aumenta con il tempo e a_x è positiva. Se il grafico si incurva verso il basso al crescere di t , come mostra la Figura 3.7b, v_x diminuisce con il tempo e a_x è negativa. Se il grafico è una retta, come nella Figura 3.7c, v_x è costante e a_x è nulla.

Dal momento che la velocità è una grandezza vettoriale e il tempo una grandezza scalare, l'accelerazione, che è un rapporto tra un vettore e uno scalare, è una grandezza vettoriale. L'unità di misura SI della velocità è il m/s, e questo significa che l'unità di misura SI dell'accelerazione è il m/s². Nella Tabella 3.4 sono elencati i valori numerici di alcune accelerazioni significative.

Tabella 3.4 I valori numerici (approssimativi) di alcune accelerazioni, espressi in m/s².

Sistema solare (rispetto al centro della nostra galassia)	2×10^{-10}
Centro della Terra (rispetto al Sole)	6×10^{-3}
Superficie della Terra all'equatore (rispetto al centro della Terra)	3×10^{-2}
Corpo in caduta in prossimità della superficie terrestre (rispetto al centro della Terra)	10
Piuttosto in un acceleratore di particelle (rispetto all'acceleratore)	10^{14}

Esempio 3.4

Per la slitta dell'Esempio 3.1, $x(t) = 18 \text{ m} + (12 \text{ m/s})t - (1.2 \text{ m/s}^2)t^2$. (a) Determinare un'espressione per la componente dell'accelerazione della slitta. (b) Costruire un grafico della componente dell'accelerazione in funzione del tempo da $t = 0.0 \text{ s}$ a $t = 8.0 \text{ s}$.

Soluzione

(i) Per determinare la componente dell'accelerazione calcoliamo la derivata di v_x rispetto a t . Nell'Esempio 3.2 abbiamo stabilito che l'espressione di v_x per la slitta è

$$v_x = 12 \text{ m/s} - (2.4 \text{ m/s}^2)t$$

Quindi la componente dell'accelerazione è data da

$$a_x = \frac{d}{dt} [12 \text{ m/s} - (2.4 \text{ m/s}^2)t] = -2.4 \text{ m/s}^2$$

In questo caso risulta che la componente dell'accelerazione ha il valore costante -2.4 m/s^2 .

(b) Il grafico di a_x in funzione di t è rappresentato nella Figura 3.8: dal momento che a_x è una costante, si tratta di un segmento di retta orizzontale.

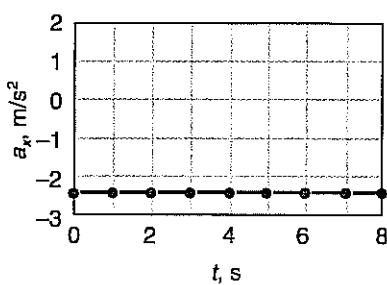


Figura 3.7

- (a) Un grafico di x in funzione di t con la concavità rivolta verso l'alto. In questo caso v_x aumenta con il tempo e a_x è positiva.
- (b) Un grafico di x in funzione di t con la concavità rivolta verso il basso. In questo caso v_x diminuisce con il tempo e a_x è negativa.
- (c) Un grafico di x in funzione di t che ha un andamento rettilineo. In questo caso v_x è costante e a_x è nulla.

Figura 3.8

Esempio 3.4: grafico di a_x in funzione di t quando a_x è costante.

■ Esempio 3.5

Supponiamo che la coordinata di un oggetto sia data da

$$x(t) = (4.0 \text{ m/s})t + (1.1 \text{ m/s}^3)t^3$$

Determinare le espressioni di (a) v_x e (b) a_x . (c) Costruire un grafico di v_x in funzione di t vallo compreso tra $t = 0.0$ s e $t = 4.0$ s. (d) Determinare a_x per $t = 1.0$ s, e tracciare la retta al grafico v_x-t la cui pendenza è pari a questo valore dell'accelerazione.

Soluzione

(a) Dal momento che $v_x = dx/dt$,

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d}{dt} [(4.0 \text{ m/s})t + (1.1 \text{ m/s}^3)t^3] \\ &= 4.0 \text{ m/s} + 3/(1.1 \text{ m/s}^3)t^2 \\ &= 4.0 \text{ m/s} + (3.3 \text{ m/s}^3)t^2 \end{aligned}$$

(b) Dato che $a_x = dv_x/dt$,

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d}{dt} [4.0 \text{ m/s} + (3.3 \text{ m/s}^3)t^2] = 2(3.3 \text{ m/s}^3)t \\ &= (6.6 \text{ m/s}^3)t \end{aligned}$$

(c) Per costruire il grafico, ci serviamo dell'espressione ottenuta nella parte (a) per valutare i valori di un secondo tra $t = 0.0$ s e $t = 4.0$ s. Il valore di v_x , per esempio per $t = 2.0$ s, è

$$v_x(2 \text{ s}) = 4.0 \text{ m/s} + (3.3 \text{ m/s}^3)(2.0 \text{ s})^2 = 17 \text{ m/s}$$

Gli altri valori di v_x sono riportati nella Tabella 3.5, mentre la Figura 3.9 mostra il grafico di v_x in funzione di t .

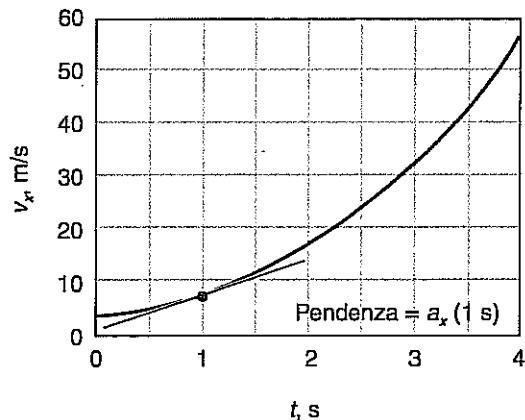
(d) Servendosi dell'espressione di a_x ricavata nella parte (b) si ottiene

$$a_x(1 \text{ s}) = (6.6 \text{ m/s}^3)(1.0 \text{ s}) = 6.6 \text{ m/s}^2$$

La retta la cui pendenza è pari a questo valore dell'accelerazione è tangente al grafico di v_x ne di t per $t = 1.0$ s, come risulta dalla Figura 3.9.

Tabella 3.5	
t, s	$v_x, \text{m/s}$
0.0	4.0
1.0	7.3
2.0	17
3.0	34
4.0	57

Figura 3.9
Esempio 3.5.



■ Esempio 3.6

Una chiatte a motore viaggia avanti e indietro lungo un canale dritto che è allineato con la direzione ovest. La Figura 3.10 è un grafico della coordinata della chiatte in funzione del tempo; l'origine si trova al molo e la direzione $+x$ è verso est. Si utilizzi questo grafico per descrivere il moto della chiatte.

Soluzione

1. La chiatte è rimasta ferma al molo da $t = 0$ s a $t = 10$ s.
2. Per $t = 10$ s la chiatte ha iniziato ad accelerare. Durante l'intervallo di tempo compreso tra $t = 10$ s e $t = 30$ s, a_x è stata positiva (il grafico è concavo verso l'alto); l'accelerazione era diretta verso est. Ciò significa che v_x stava aumentando. Inoltre v_x era positiva (la pendenza del grafico era positiva) cosicché la velocità era diretta verso est e il suo modulo aumentava. La pendenza della tangente per $t = 24$ s mostra che la velocità in quell'istante era $v = (20 \text{ m}/40 \text{ s}) = (0.5 \text{ m/s})$.
3. Da $t = 30$ s fino a $t = 50$ s l'accelerazione è stata nulla (il grafico è un segmento di retta) e la velocità è stata costante, diretta verso est e con modulo

$$v = \frac{26 \text{ m} - 8 \text{ m}}{50 \text{ s} - 30 \text{ s}} = 0.9 \text{ m/s}$$

4. Da $t = 50$ s fino a $t = 80$ s la componente dell'accelerazione è stata negativa (il grafico è concavo verso il basso) e quindi la componente della velocità era decrescente. Per $t = 64$ s la chiatte è stata per un istante in quiete mentre cambiava la direzione di marcia, che prima di questo istante era verso est e dopo verso ovest. Da $t = 50$ s a $t = 64$ s la componente della velocità e il modulo della velocità sono stati decrescenti. Tra $t = 64$ s e $t = 80$ s il modulo della velocità era crescente benché la componente della velocità fosse decrescente. Questo perché la componente della velocità era negativa, e quando una grandezza negativa decresce (diventando più negativa), il suo valore assoluto aumenta.
5. Durante l'intervallo di tempo tra $t = 80$ s e $t = 100$ s la chiatte ha viaggiato verso ovest con una velocità di modulo costante pari a

$$[(22 \text{ m}) - (-6 \text{ m})]/(100 \text{ s} - 80 \text{ s}) = 1.4 \text{ m/s.}$$

6. Tra $t = 100$ s e $t = 120$ s la componente dell'accelerazione è stata positiva cosicché la componente della velocità è stata crescente (diventando meno negativa), mentre il modulo della velocità decresceva. La chiatte si è fermata 18 m a ovest del molo per $t = 120$ s.

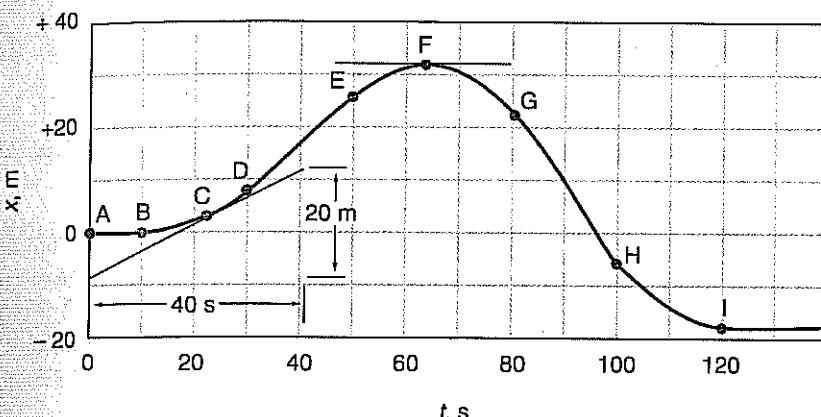


Figura 3.10 Esempio 3.6: grafico di x in funzione di t relativo al moto della chiatte.

3.5 IL MOTO CON ACCELERAZIONE COSTANTE

Un tipo di moto semplice è il moto con accelerazione costante. La slitta di cui abbiamo seguito le evoluzioni negli Esempi 3.1, 3.2 e 3.4, si muoveva con accelerazione costante. Quando un corpo si muove con accelerazione costante, l'accelerazione è uguale all'accelerazione media. Quindi $a_x = \bar{a}_x = \Delta v_x / \Delta t$, ossia $a_x = (v_{xf} - v_{xi}) / (t_f - t_i)$. Per trovare un'espressione di $v_x(t)$, poniamo $t_f = t$ e $t_i = 0$, in modo che $v_{xf} = v_x(t)$ e $v_{xi} = v_x(0) = v_{x0}$. Ciò fornisce

$$a_x = \frac{v_x(t) - v_{x0}}{t - 0}$$

Risolvendo rispetto a $v_x(t)$, si ottiene

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t \quad (3.10)$$

La velocità del corpo dipende linearmente dal tempo t .

Possiamo ricavare l'espressione di $x(t)$ in base alla definizione della velocità e all'Equazione (3.10). Siccome

$$v_x(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t$$

si ha

$$\frac{d}{dt} x(t) = v_{x0} + a_x t \quad (3.11)$$

La componente della velocità in funzione del tempo, per a_x costante.

Ossia, $x(t)$ è una funzione di t tale che la sua derivata temporale sia $v_{x0} + a_x t$. Tenendo presente la regola per cui

$$\frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}$$

è chiaro che, se si calcola la derivata di un polinomio in t , tutti gli esponenti risultano abbassati di 1. Ciò significa che, perché dx/dt dia l'Equazione (3.11), la dipendenza dal tempo di $x(t)$ deve essere della forma

$$x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 \quad (3.12)$$

dove C_0 , C_1 e C_2 sono costanti. Per verificare che l'Equazione (3.12) fornisca la corretta dipendenza temporale per x , calcoliamo la sua derivata e confrontiamo il risultato con l'equazione $v_x = v_{x0} + a_x t$. Il calcolo della derivata dà

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} (C_0 + C_1 t + C_2 t^2) = C_1 + 2C_2 t$$

Confrontando quest'espressione con $v_{x0} + a_x t$, si ha

$$v_{x0} + a_x t = C_1 + 2C_2 t$$

Se poniamo $C_1 = v_{x0}$ e $C_2 = \frac{1}{2} a_x$, la derivata dell'Equazione (3.12) dà l'Equazione (3.11).

Abbiamo verificato che l'Equazione (3.12) ha la dipendenza temporale appropriata per descrivere il moto uniformemente accelerato, e abbiamo determinato i valori di C_1 e C_2 . Ora determiniamo C_0 ponendo $t = 0$ nell'Equazione (3.12): ciò fornisce $x(0) = C_0$. Dal momento che solitamente si indica questo valore iniziale di x con x_0 , poniamo $C_0 = x_0$. Sostituendo i valori delle costanti nell'Equazione (3.12), si ottiene

$$x(t) = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (3.13)$$

Quindi x presenta una dipendenza quadratica da t .

In sostanza, non si è fatto altro che utilizzare l'operazione inversa della derivazione, cioè l'integrazione. In particolare, poiché l'accelerazione è la derivata della velocità, la velocità si trova integrando l'accelerazione; e, poiché la velocità è la derivata della posizione, la posizione si ottiene integrando la velocità. Questo modo di procedere è generale e, data l'accelerazione di un punto materiale o la sua velocità, è possibile trovare il suo moto. Tale problema può essere espresso in termini matematici: data la derivata seconda rispetto al tempo del vettore posizione \mathbf{r} (l'accelerazione) o la sua derivata prima (la velocità), è possibile trovare \mathbf{r} in funzione del tempo. Queste equazioni (l'Equazione (3.11) ne è un esempio) contengono delle derivate (prime o seconde) dell'incognita e perciò si chiamano *equazioni differenziali* (vedi Appendice C).

È un fatto del tutto generale che la descrizione dei fenomeni naturali, come il moto dei corpi, spesso implica la soluzione di equazioni differenziali. Non è un caso che a introdurre per la prima volta il calcolo differenziale sia stato Newton (contemporaneamente a Leibniz), che stava ponendo le basi di tutta la meccanica.

La Figura 3.11 mostra i grafici di x , v_x e a_x in funzione di t per il caso in cui x_0 è positiva, v_{x0} è negativa e a_x è positiva. Questi grafici mettono in evidenza la simmetria del moto rispetto all'istante t_m . In tale momento l'oggetto è istantaneamente in quiete ($v_x = 0$) e sta invertendo la direzione di marcia. In ogni istante *prima di* t_m , il valore di x è uguale a quello dell'istante corrispondente *dopo* t_m . Inoltre il modulo della velocità è il medesimo in momenti ugualmente distanti da t_m , prima e dopo di esso. Dal momento che x presenta una dipendenza quadratica da t , il grafico di x in funzione di t (Figura 3.11a) è una parabola.

Le Equazioni (3.10) e (3.13) descrivono il moto in termini del tempo t . Una terza equazione può essere ricavata da queste due eliminando t . Risolvendo l'Equazione (3.10) rispetto a t , si trova $t = (v_x - v_{x0})/a_x$. Sostituendo questa espressione nell'Equazione (3.10), si ottiene

$$x = x_0 + v_{x0} \left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x} \right) + \frac{1}{2} a_x \left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x} \right)^2$$

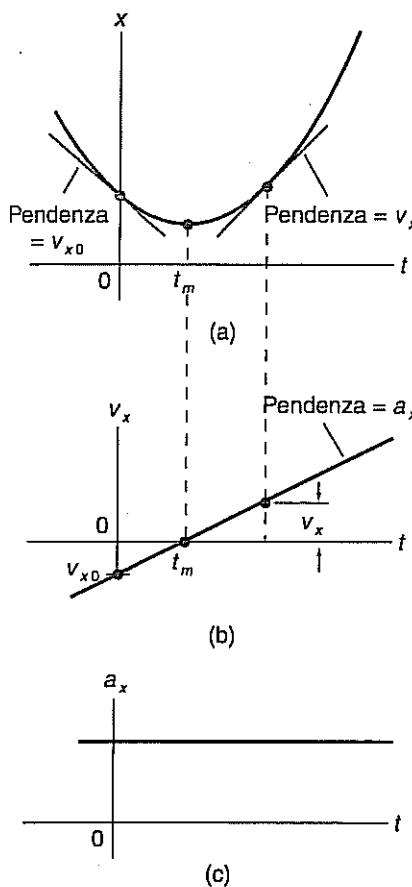


Figura 3.11

Moto con accelerazione costante.

Nel caso illustrato, x_0 è positiva,

v_{x0} è negativa e a_x è positiva.

(a) Il grafico di x in funzione di t

è una parabola la cui pendenza è

data in ogni punto da v_x . (b) Il

grafico di v_x in funzione di t è

una retta con pendenza a_x . (c) Il

grafico di a_x in funzione di t è

una retta orizzontale.

Riordinando e risolvendo rispetto a v_x^2 , si ha

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (3.14)$$

Un'altra equazione che a volte viene utilizzata nella descrizione del moto in una dimensione e con accelerazione costante è

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t \quad (3.15)$$

Quest'ultima espressione può essere ottenuta usando l'Equazione (3.10) per eliminare a_x nell'Equazione (3.13). (Si veda il Problema 3.9.) La Tabella 3.6 riassume le importanti equazioni introdotte in questo paragrafo.

Esempio 3.7

Nell'ambiente tennistico locale, Max è noto per la potenza del suo servizio. (a) Si ammetta che, durante il servizio di Max, l'accelerazione della palla sia costante e che il modulo v della sua velocità immediatamente dopo che si è staccata dalla racchetta sia di 50 m/s. Si stimi il modulo a dell'accelerazione della palla durante il servizio. (b) Gianna deve ricevere il servizio di Max. Si stimi il tempo che ha per reagire, tra l'istante in cui la palla viene servita e quello in cui deve colpirla.

Soluzione

(a) Possiamo usare l'Equazione (3.12) per determinare il modulo dell'accelerazione, ponendo $v_{x0} = 0$, $v_x = v = 50$ m/s e risolvendo rispetto ad $a_x = a$. In questo caso $x - x_0$ corrisponde alla distanza percorsa dalla palla mentre è in contatto con la racchetta. Questa distanza può essere stimata in 0.5 m. Ciò porta a

$$a = \frac{v^2}{2(x - x_0)} = \frac{(50 \text{ m/s})^2}{2(0.5 \text{ m})} = 2 \times 10^3 \text{ m/s}^2$$

(b) Per stimare il tempo che la palla impiega a raggiungere Gianna, ammettiamo che essa si muova in linea retta con velocità costante, il che equivale a usare l'Equazione (3.13) con $a_x = 0$ e $v_{x0} = v$.

La componente della velocità in funzione di x , per a_x costante.

Tabella 3.6

Le equazioni che descrivono il moto con accelerazione costante.

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t$$

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t$$

m. Risolvendo rispetto a t , si ha

$$t = \frac{x - x_0}{v} \approx \frac{25 \text{ m}}{50 \text{ m/s}} = 0.5 \text{ s}$$

In realtà il tempo sarà più lungo di quello calcolato perché la resistenza dell'aria rallenterà la palla. Gianna probabilmente avrà tutto il tempo di accorgersi che Max ha commesso un fallo di piede.

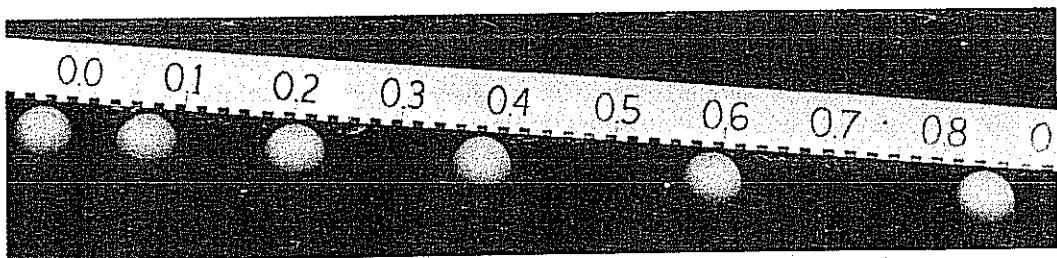
Esempio 3.8

Eperimento con una biglia che rotola

Un congegno utile per l'osservazione del moto di un oggetto è lo stroboscopio. Uno stroboscopio è una sorgente che emette brevi lampi di luce a intervalli di tempo regolari; se viene utilizzato insieme a una macchina fotografica il cui otturatore viene mantenuto aperto, questa registra le successive posizioni dell'oggetto ad ogni lampo.

La Figura 3.12 è una fotografia stroboscopica di una palla da biliardo che rotola lungo un piano inclinato. I lampi di luce sono distanziati di 0.20 s l'uno dall'altro e il regolo è graduato in metri. Il versore i sia orientato nella direzione del moto (verso destra), e sia $t = 0.00$ s l'istante in cui la biglia si trova nel punto più alto del piano inclinato. La Tabella 3.7 fornisce la coordinata del centro della biglia a ogni istante t . (a) Ammettendo che la palla si muova con accelerazione costante, si trovino i valori di x_0 , v_{x0} e a_x . (b) Si scrivano le espressioni di $x(t)$ e di $v_x(t)$. (c) Si verifichi che i dati della Tabella 3.7 siano in accordo con l'ipotesi di un'accelerazione costante.

Figura 3.12
Esempio 3.8: fotografia stroboscopica di una palla da biliardo che rotola lungo un piano inclinato. (Tom Richard)



Soluzione

(a) Se la biglia si muove con accelerazione costante, i dati della Tabella 3.7 devono soddisfare l'Equazione (3.13). Dalla tabella risulta che $x_0 = -0.030 \text{ m}$. Pertanto ci sono due incognite da determinare: a_x e v_{x0} . Dato che due incognite possono essere calcolate a partire da due equazioni, possiamo sostituire nell'Equazione (3.13) due coppie di dati tratte dalla Tabella 3.7, coppie che chiameremo (t_1, x_1) e (t_2, x_2) , e risolvere rispetto alle incognite. Le equazioni che si ottengono sono

$$x_1 = x_0 + v_{x0} t_1 + \frac{1}{2} a_x t_1^2 \quad (\text{A})$$

$$x_2 = x_0 + v_{x0} t_2 + \frac{1}{2} a_x t_2^2 \quad (\text{B})$$

Risolvendo l'Equazione (A) rispetto a v_{x0} , si ha

$$v_{x0} = \frac{x_1 - x_0}{t_1} - \frac{1}{2} a_x t_1 \quad (\text{C})$$

Sostituendo questo risultato nell'Equazione (B) e risolvendo rispetto ad a_x , si ottiene

$$a_x = \frac{2[t_1(x_2 - x_0) - t_2(x_1 - x_0)]}{t_1 t_2^2 - t_1^2 t_2} \quad (\text{D})$$

Dalla Tabella 3.7 scegliamo come coppie di dati $(0.20 \text{ s}, 0.067 \text{ m})$ e $(1.00 \text{ s}, 0.840 \text{ m})$. Sostituendo questi dati nell'Equazione (D) si trova

$$a_x = \frac{2[(0.20 \text{ s})(0.870 \text{ m}) - (1.00 \text{ s})(0.097 \text{ m})]}{(0.20 \text{ s})(1.00 \text{ s})^2 - (0.20 \text{ s})^2(1.00 \text{ s})} = 0.96 \text{ m/s}^2$$

Inserendo questo valore di a_x e una coppia di dati presi dalla tabella, per esempio $(0.20 \text{ s}, 0.067 \text{ m})$, nell'Equazione (C), si ha

$$v_{x0} = \frac{0.097 \text{ m}}{0.20 \text{ s}} - \frac{1}{2}(0.96 \text{ m/s}^2)(0.20 \text{ s}) = 0.39 \text{ m/s}$$

(b) Le espressioni della coordinata della biglia e della componente della velocità in funzione del tempo sono

$$x(t) = -0.030 \text{ m} + (0.39 \text{ m/s})t + (0.48 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$(v_x(t) = 0.39 \text{ m/s} + (0.96 \text{ m/s}^2)t)$$

(c) Per verificare che i dati della Tabella 3.7 siano in accordo con l'ipotesi di un'accelerazione costante, possiamo sostituire nella nostra espressione di $x(t)$ ciascuno dei valori di t presenti nella tabella e controllare se in ogni caso si ottiene il corrispondente valore di x . Per esempio, effettuiamo la verifica per la coppia (0.40 s, 0.203 m):

$$x = -0.030 \text{ m} + (0.39 \text{ m/s})(0.40 \text{ s}) + (0.48 \text{ m/s}^2)(0.40 \text{ s})^2 = 0.20 \text{ m}$$

La coppia di dati è in accordo con l'ipotesi di un'accelerazione costante.

Il lettore dovrebbe controllare nello stesso modo qualche altra coppia di dati.



3.6 LA CADUTA LIBERA

La caduta dei corpi è un fenomeno familiare a tutti: si pensi, per esempio, a un fermacarte che venga accidentalmente spinto oltre il bordo di una scrivania. In molti casi, nella descrizione del moto del fermacarte possiamo trascurare la resistenza dell'aria. Se la resistenza dell'aria ha un'influenza trascurabile sulla caduta di un corpo, è lecito ammettere che l'accelerazione del corpo sia dovuta esclusivamente alla gravità. In questo caso il moto viene detto caduta libera. Trattare il moto del fermacarte come una caduta libera costituisce un'approssimazione legittima, purché esso non cada troppo a lungo. Ma anche per cadute brevi, questa approssimazione risulta insoddisfacente per un corpo come una piuma o una pallina per il gioco del volano.

Galileo Galilei (1564-1642) studiò a livello quantitativo la caduta libera e stabilì che l'accelerazione dovuta alla gravità è costante. (Alcuni dei risultati di Galileo sono discussi nel Problema 3.11.) Le misure moderne confermano che i corpi in caduta libera hanno un'accelerazione costante verso il basso; l'accelerazione è cioè la stessa in ogni istante nel corso della caduta. Inoltre questa accelerazione è uguale per corpi diversi (si veda la Figura 3.13). Tale circostanza ben nota eppure estremamente interessante verrà analizzata in modo più approfondito nel Capitolo 7.

Il modulo di questa accelerazione viene rappresentato dal simbolo g . Benché g vari leggermente da luogo a luogo sulla superficie della Terra, un valore sufficientemente preciso per i nostri scopi è

$$\underline{g = 9.8 \text{ m/s}^2}$$

Discuteremo le piccole variazioni di g sulla superficie della Terra nel Capitolo 7.

Nel descrivere la caduta libera, solitamente si sceglie di disporre l'asse y nella direzione del moto con il versore \mathbf{j} orientato verso l'alto. Allora l'accelerazione di un corpo in caduta libera, o accelerazione di gravità, è data da

$$\underline{\mathbf{a} = -g\mathbf{j}}$$

Definizione di caduta libera.

Intensità dell'accelerazione dovuta alla gravità.

Accelerazione di gravità.

Nell'equazione viene esplicitamente introdotto un segno meno perché l'accelerazione è diretta verso il basso e il simbolo g rappresenta un numero positivo. Dal momento che la caduta libera è un moto con accelerazione costante, possiamo utilizzare le Equazioni (3.10), (3.13) e (3.14) per descrivere questo moto, ponendo $a_x = -g$ e cambiando il nome della coordinata da x a y :

$$v_y(t) = v_{y0} - gt \quad (3.16)$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.17)$$

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0) \quad (3.18)$$

Le equazioni che descrivono la caduta libera.

La Figura 3.14 mostra i grafici di a_y , v_y e y per un corpo che cade liberamente da una posizione di quiete in $v = 0$.

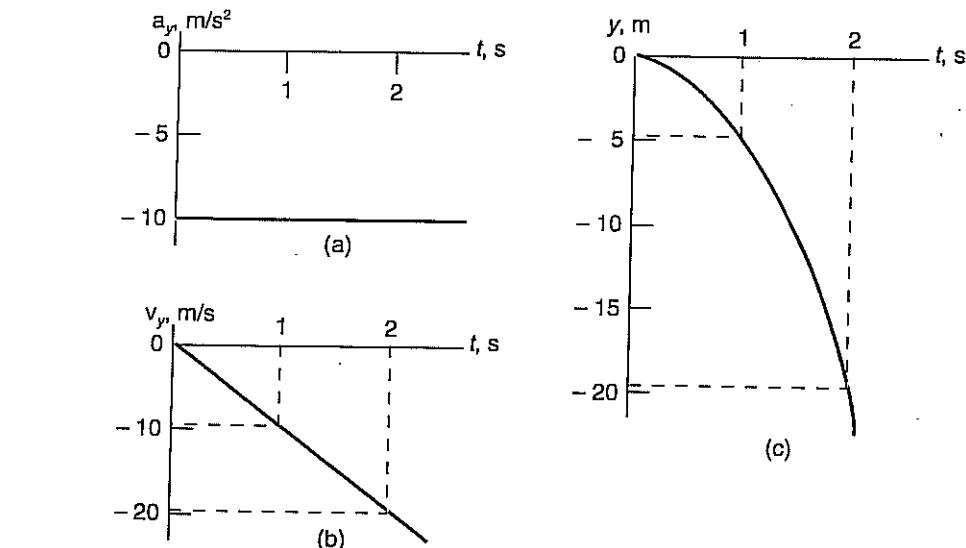
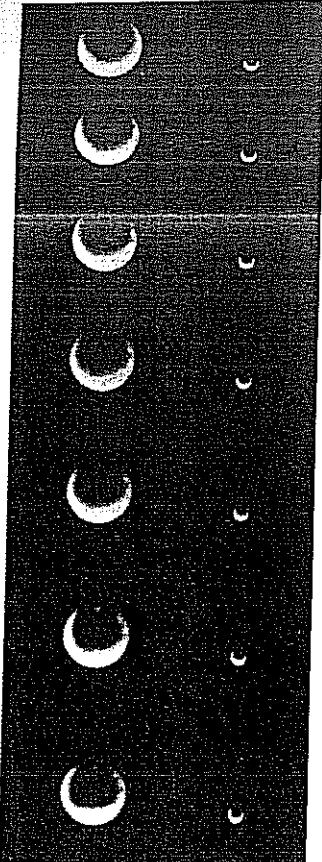


Figura 3.14 Grafici di (a) a_y , (b) v_y e (c) y per la caduta libera, quando $v_{y0} = 0$ e $y_0 = 0$.

Figura 3.13 Una fotografia stroboscopica di due palle che stanno cadendo. Le palle sono state lasciate andare contemporaneamente, e, per quanto si può dire in base alla fotografia, cadono con la medesima accelerazione. (Tom Richard)

Se un corpo, come per esempio una palla da baseball, viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0 , due grandezze che possono essere facilmente misurate sono (i) il tempo t_m necessario perché la palla raggiunga la massima altezza e (ii) l'altezza massima raggiunta dalla palla, h_m . Poniamo l'origine del sistema di coordinate nel punto in cui la palla viene lanciata, e sia $t = 0$ l'istante in cui la palla viene lanciata: $y_0 = 0$ e $v_{y0} = v_0$. Quando la palla raggiunge l'altezza massima, la sua velocità è nulla. Ammettendo che la palla sia in caduta libera, utilizziamo l'Equazione (3.14) e troviamo $v_y(t_m) = 0 = v_0 - gt_m$, ossia

Tempo di salita.

$$t_m = \frac{v_0}{g} \quad (3.19)$$

La coordinata corrispondente a questo istante rappresenta l'altezza massima, $h_m = y(t_m)$. Sostituendo la t_m data dall'Equazione (3.19) nell'Equazione (3.17), si ottiene

$$y(t_m) = h_m = 0 + v_0 \left(\frac{v_0}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2$$

Altezza massima.

$$h_m = \frac{v_0^2}{2g} \quad (3.20)$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto ponendo nell'Equazione (3.16) $v_y = 0$, $v_{y0} = v_0$, e $h_m = y - y_0$.

Esempio 3.9

Un sasso viene lanciato verticalmente verso l'alto in modo che il tempo necessario per raggiungere l'altezza massima sia 1.2 s. Il punto in cui viene lasciato libero è a 1.5 m di altezza da terra.

(a) Supponendo che $t = 0$ sia l'istante in cui il sasso viene lanciato e che $y = 0$ corrisponda al livello del suolo, determinare le espressioni della componente della velocità e della coordinata del sasso in funzione del tempo.

(b) Calcolare il valore di tali espressioni per $t = 0.0, 0.60, 1.2$ e 1.8 s.

(c) Illustrare schematicamente la posizione, la velocità e l'accelerazione del sasso in ciascuno di questi momenti, utilizzando delle frecce per rappresentare la velocità e l'accelerazione. Trascurare la resistenza dell'aria.

Soluzione

(a) Per trovare queste espressioni, dobbiamo determinare i valori di y_0 e di v_{y0} e inserirli nelle Equazioni (3.16) e (3.17). Il valore di y_0 è dato ($y_0 = 1.5 \text{ m}$), e possiamo calcolare v_0 servendoci dell'Equazione (3.19):

$$v_0 = t_m g = (1.2 \text{ s})(9.8 \text{ m/s}^2) = 12 \text{ m/s}$$

Dal momento che il sasso viene lanciato verso l'alto, $v_{y0} = v_0 = 12 \text{ m/s}$. Quindi le espressioni di v_y e y sono

$$v_y = 12 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)t$$

$$y = 1.5 \text{ m} + (12 \text{ m/s})t - (4.9 \text{ m/s}^2)t^2$$

(b) Per $t = 0.0 \text{ s}$, si ha $v_y = v_{y0} = 12 \text{ m/s}$ e $y = y_0 = 1.5 \text{ m}$. Per $t = 0.60 \text{ s}$, si ha

$$v_y = 12 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)(0.60 \text{ s}) = 6.1 \text{ m/s}$$

$$y = 1.5 \text{ m} + (12 \text{ m/s})(0.60 \text{ s}) - (4.9 \text{ m/s}^2)(0.60 \text{ s})^2 = 6.9 \text{ m}$$

Per $t = 1.2 \text{ s}$, si ha $v_y = 0.0 \text{ m/s}$ perché $t_m = 1.2 \text{ s}$. La coordinata in quell'istante è:

$$y = 1.5 \text{ m} + (12 \text{ m/s})(1.2 \text{ s}) - (4.9 \text{ m/s}^2)(1.2 \text{ s})^2 = 8.6 \text{ m}$$

Per $t = 1.8 \text{ s}$, si ha

$$v_y = 12 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)(1.8 \text{ s}) = -5.9 \text{ m/s}$$

$$y = 1.5 \text{ m} + (12 \text{ m/s})(1.8 \text{ s}) - (4.9 \text{ m/s}^2)(1.8 \text{ s})^2 = 6.8 \text{ m}$$

Questi valori per $t = 1.8 \text{ s}$ si sarebbero potuti ottenere da quelli per $t = 0.60 \text{ s}$ tenendo conto della simmetria del moto.

(c) Posizione, velocità e accelerazione del sasso negli istanti indicati sono rappresentate schematicamente nella Figura 3.15.

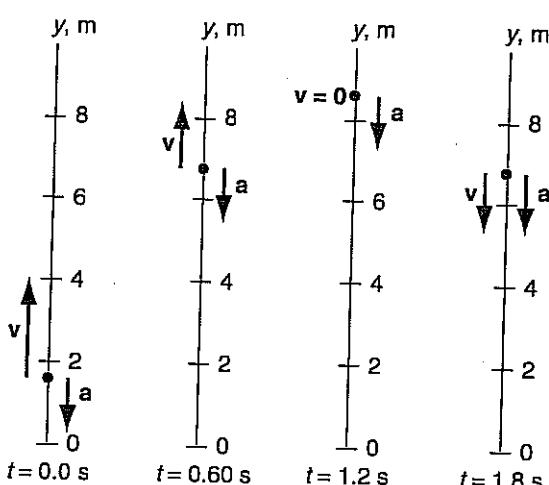


Figura 3.15

Esempio 3.9: un sasso viene lanciato verticalmente verso l'alto. La figura illustra posizione, velocità e accelerazione del sasso in quattro diversi istanti.

Esempio 3.10

Un vaso da fiori cade da una finestra del primo piano. Qual è il modulo della sua velocità immediatamente prima che tocchi il suolo, 3 m più in basso? Si trascuri la resistenza dell'aria.

Soluzione

Poniamo l'origine del nostro sistema di coordinate al livello del suolo e sia $t = 0$ l'istante in cui il vaso comincia a cadere dalla finestra dove era in quiete. Ciò significa che $v_{y0} = 0$ e $y_0 = 3 \text{ m}$. Siccome vogliamo determinare il valore della velocità del vaso in corrispondenza di una data coordinata, cioè per $y = 0$, facciamo uso dell'Equazione (3.18). Il modulo della velocità $v = |v_y| = \sqrt{v_y^2}$, cosicché

$$v = \sqrt{v_y^2} = \sqrt{v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)}$$



RIEPILOGO

Paragrafo 3.2 Vettori posizione e spostamento

Il vettore posizione \mathbf{r} localizza un corpo rispetto all'origine di un sistema di coordinate. In una dimensione, $\mathbf{r} = xi$, ove x è la coordinata del corpo. Lo spostamento $\Delta\mathbf{r}$ è la variazione del vettore posizione,

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$$

Paragrafo 3.3 La velocità

La velocità media di un corpo è il rapporto tra lo spostamento del corpo durante un intervallo di tempo e l'intervallo di tempo stesso, $\bar{v} = \Delta r / \Delta t$. La velocità istantanea è il limite a cui tende la velocità media quando l'intervallo di tempo tende a zero:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \frac{dr}{dt} \quad (3.5)$$

Paragrafo 3.4 L'accelerazione

L'accelerazione media di un corpo durante un certo intervallo di tempo è il rapporto tra la variazione della velocità dell'oggetto e l'intervallo di tempo, $\bar{a} = \Delta v / \Delta t$. L'accelerazione è il limite a

cui tende l'accelerazione media quando l'intervallo di tempo tende a zero:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a} = \frac{dv}{dt} \quad (3.9)$$

Paragrafo 3.5 Il moto con accelerazione costante

Quando un corpo si muove in una dimensione con accelerazione costante:

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t \quad (3.20)$$

$$x(t) = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (3.13)$$

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (3.14)$$

Paragrafo 3.6 La caduta libera

La caduta libera è un esempio particolare di moto con accelerazione costante. Se un corpo in caduta libera si muove lungo una retta verticale (l'asse y), si usano le espressioni date sopra, con y come coordinata e $-g$ come componente dell'accelerazione costante.

QUESITI

- 3.1** Supponiamo di lanciare una moneta verticalmente verso l'alto. Se siamo interessati all'altezza massima raggiunta dalla moneta, è lecito trattare quest'ultima come punto materiale? Se ci interessa sapere su quale faccia cadrà, possiamo trattarla come punto materiale?
- 3.2** Un amante del jogging si sposta da $x = 0$ a $x = 50$ m tra $t = 0$ e $t = 10$ s. Tra $t = 10$ s e $t = 15$ s, va da $x = 50$ m a $x = 25$ m. Lo spazio percorso è uguale al modulo dello spostamento (a) tra $t = 0$ e $t = 10$ s, (b) tra $t = 0$ e $t = 15$ s? Spiega.
- 3.3** Il simbolo $v_x(t)$ significa solitamente « v_x in funzione del tempo t », ma potrebbe anche essere usato per rappresentare il prodotto di v_x per t . Nelle due seguenti equazioni, che interpretazione si può dare di $v_x(t)$?
 (a) $v_x(t) = 7.3$ m
 (b) $v_x(t) = (6.1 \text{ m/s}^2)t$
- 3.4** Durante una gara di corsa della lunghezza di 24 miglia, una ipotetica fondista diventa sempre più stanca. Nella prima ora di gara percorre 12 miglia, nella seconda 6 miglia, nella terza 3 miglia e così via: in ogni ora la fondista percorre metà della distanza rimanente. In quanto tempo porterà a termine la gara?
- 3.5** Nel descrivere il moto di un'automobile che viaggia verso ovest, scegliamo come direzione $+x$ quella da ovest a est. Si considerino le seguenti affermazioni:
 (a) La velocità dell'automobile è -32 m/s.
 (b) La velocità dell'automobile è $(-32 \text{ m})i$.
 (c) La velocità dell'automobile è $(-32 \text{ m/s})i$.
 (d) Il modulo della velocità dell'automobile è -32 m/s.
 (e) Il modulo della velocità dell'automobile è 32 m/s.
 (f) La componente della velocità dell'automobile è -32 m/s.
- Ci sono tra queste delle affermazioni prive di senso? Se sì, quali? Per ciascuna di quelle che non hanno senso, spiega che cosa c'è che non va.
- 3.6** Il modulo della velocità di un corpo può essere negativo? Spiega.
- 3.7** Il contachilometri di un'automobile misura lo spazio percorso o lo spostamento? Spiega.
- 3.8** Un'automobile viaggia lungo una strada diritta che va nella direzione est-ovest. Orientiamo il vettore unitario i verso est. Qual è il segno di v_x se l'automobile viaggia (a) verso est, (b) verso ovest? Qual è il segno di a_x se l'automobile viaggia (c) verso est rallentando, (d) verso est accelerando, (e) verso ovest rallentando, (f) verso ovest accelerando?
- 3.9** *Decelerazione* è un termine che a volte viene usato nella descrizione del moto di un corpo. Uno studente dice che la decelerazione è definita come modulo dell'accelerazione quando la componente dell'accelerazione è negativa. Basandoci su questa definizione, diremmo che un corpo decelera se la componente della sua velocità è decrescente. Un altro studente dice che la decelerazione è il modulo dell'accelerazione quando la velocità di un corpo, in modulo, decresce. Queste due definizioni coincidono? Se no, descrivi una situazione in cui la differenza sia evidente. Scegli la definizione che preferisci e motiva la tua scelta.
- 3.10** Nel descrivere il moto di un sasso lanciato verticalmente verso l'alto, orientiamo il versore j verso l'alto. Qual è il segno della componente della velocità del sasso, v_y , (a) prima che esso raggiunga l'altezza massima, (b) nell'istante in cui raggiunge l'altezza massima, (c) dopo che l'ha raggiunta? (d) Qual è il modulo della velocità del sasso nell'istante in cui raggiunge la massima altezza? Dopo che l'ha raggiunta, (e) la sua velocità è crescente, decrescente o costante? (f) la componente della sua velocità è crescente, decrescente o costante?

- 3.11 Per il sasso del quesito precedente, qual è il segno della componente dell'accelerazione (a) prima che raggiunga l'altezza massima, (b) nell'istante in cui raggiunge l'altezza massima, (c) dopo che l'ha raggiunta? (d) Qual è il modulo dell'accelerazione del sasso nell'istante in cui raggiunge l'altezza massima?
- 3.12 Una ragazza lancia una palla verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale di 10 m/s, e la riprende alla stessa altezza quando essa ricade. Trascurando la resistenza dell'aria, qual è la velocità scalare della palla quando viene ripresa?
- 3.13 Sporgendosi da un balcone, una persona scaglia un sasso *A* verticalmente verso l'alto. Poi, dal medesimo punto, scaglia il sasso *B* verticalmente verso il basso con la stessa velocità iniziale del sasso *A*. Trascurando la resistenza dell'aria, quale dei due sassi ha la velocità più elevata nell'istante prima di raggiungere il suolo?
- 3.14 Due palle da golf vengono lasciate cadere, partendo dalla quiete, dalla cima di un alto edificio. La palla 1 viene lasciata cadere nell'istante $t = 0$, la palla 2 nell'istante $t = 0.5$ s. La palla 1 raggiunge il suolo per $t = 3.0$ s.
 (a) Tra $t = 0.5$ s e $t = 3.0$ s la distanza tra le due palle aumenta, diminuisce o rimane costante? (b) Quando arriva a terra la palla 2?
- 3.15 La Figura 3.16 mostra un grafico di x in funzione di t per un corpo. Quali sono i segni algebrici di v_x e a_x negli istanti (a) t_1 ; (b) t_2 ; (c) t_3 ?

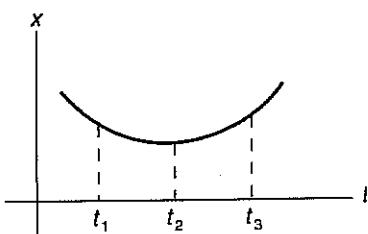


Figura 3.16 Quesito 3.15.

- 3.16 La Figura 3.17 mostra un grafico di v_x in funzione di t . Qual è il segno di a_x negli istanti (a) t_1 ; (b) t_2 ; (c) t_3 ?

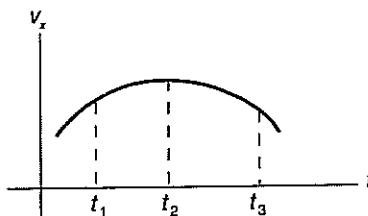


Figura 3.17 Quesito 3.16.

- 3.17 In ciascuna delle Figure 3.18 a, b, c, d si determini se v_x è maggiore in t_1 o in t_2 . In quale caso il modulo v della velocità è maggiore, in t_1 o in t_2 ?
- 3.18 La Figura 3.19 mostra un grafico di x in funzione di t . In quale istante, t_1 o t_2 , il modulo dell'accelerazione è maggiore? Spiega.

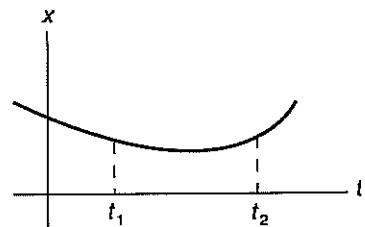


Figura 3.19 Quesito 3.18.

- 3.19 Supponiamo che l'espressione che fornisce a_x in funzione di t sia lineare. Qual è l'espressione di v_x in funzione di t ?
- 3.20 Senza fare uso di valori numerici, si disegnino i grafici di x in funzione di t e di v_x in funzione di t per i casi seguenti di accelerazione costante:
 (a) $a_x < 0$, $v_{x0} > 0$, $x_0 > 0$
 (b) $a_x > 0$, $v_{x0} < 0$, $x_0 > 0$
 (c) $a_x > 0$, $v_{x0} > 0$, $x_0 > 0$
- 3.21 Supponiamo che l'espressione della coordinata di un corpo sia della forma $x(t) = C_0 + C_1t + C_3t^3$. Di che tipo è la dipendenza temporale di a_x ? È quadratica? Lineare? Costante? Di qualche altro tipo?
- 3.22 Si completi la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
r			m
x_0	Coordinata iniziale		
v_x		Componente	
v			
a_x			

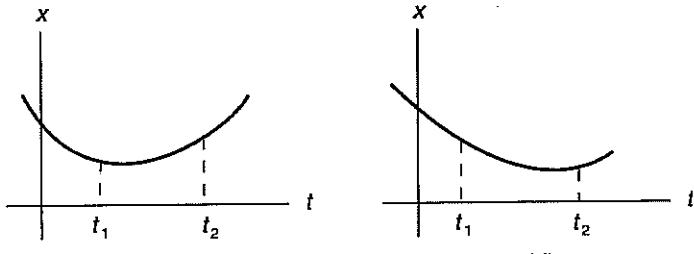
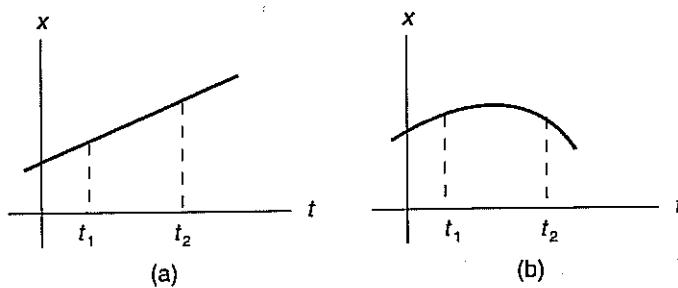


Figura 3.18 Quesito 3.17.

ESERCIZI

Paragrafo 3.2 Vettori posizione e spostamento

- 3.1 Un amante del jogging si trova 16 m a ovest di un segnale di stop all'istante t_i e 37 m a est del segnale all'istante t_f . Posta l'origine in corrispondenza del segnale di stop e orientato il versore \mathbf{i} verso est, si determinino (a) x_i ; (b) x_f ; (c) \mathbf{r}_i ; (d) \mathbf{r}_f ; (e) $\Delta\mathbf{r}$.
- 3.2 La coordinata di una bicicletta è data dall'espressione $x(t) = -(14 \text{ m/s})t + 74 \text{ m}$. Si costruisca un grafico di x in funzione di t , tra $t = 0.0 \text{ s}$ e $t = 6.0 \text{ s}$, riportando i punti a intervalli di 1 secondo. Si tracci una curva passante per i punti così ottenuti.

- 3.3 La coordinata di un oggetto è data dall'espressione $x(t) = 52 \text{ mm} \sin [(0.44 \text{ rad/s})t]$. (Si rammenti che $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. È necessario accertarsi di essere passati dai gradi ai radianti sulla calcolatrice.) (a) Si costruisca un grafico di x in funzione di t nell'intervallo tra $t = 0.0 \text{ s}$ e $t = 15.0 \text{ s}$, segnando un punto ogni secondo. Si tracci una curva passante per i punti così ottenuti. Tra $t = 0.0 \text{ s}$ e $t = 10.0 \text{ s}$, (b) qual è lo spazio percorso dall'oggetto e (c) qual è lo spostamento dell'oggetto?

Paragrafo 3.3 La velocità

- 3.4 Un'automobile che viaggia verso ovest lungo una strada diritta si trova 81 m a est di un tombino per $t_i = 15 \text{ s}$ e 13 m a ovest del tombino per $t_f = 22 \text{ s}$. (a) Se orientiamo verso est il versore \mathbf{i} , qual è la componente della velocità media dell'automobile? (b) Se invece orientiamo verso ovest il vettore unitario \mathbf{i} , che valore ha la componente della velocità media dell'automobile?
- 3.5 (a) Si determini il fattore di conversione da ft/s (piedi al secondo) a m/s. (b) Si converta una velocità di 25 m/s in ft/s.
- 3.6 L'anno-luce (abbreviato a.l.) è la distanza che la luce percorre nel vuoto in un anno. (a) Sapendo che la velocità della luce nel vuoto è di circa $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$, determinare il fattore di conversione tra m e a.l. La distanza tra la Terra e la stella Sirio (la stella più luminosa del cielo, a parte il Sole) è di circa 10 a.l. Determinare la distanza di Sirio (b) in m e (c) in mi (miglia).
- 3.7 La distanza media tra la Terra e il Sole è di circa 100 milioni di miglia ($1 \times 10^8 \text{ mi}$) e la velocità della luce è di $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$. (a) Quanto tempo impiega la luce del Sole a raggiungere la Terra? (b) Il minuto-luce è la distanza che la luce percorre in un minuto. Determinare la distanza del Sole in minuti-luce.
- 3.8 La velocità del suono nell'aria a temperature ordinarie è di circa 340 m/s. Supponiamo di vedere il bagliore di un lampo in un temporale che si avvicina e di sentire il tuono 6.0 s più tardi. (a) Calcolare la distanza del temporale nell'ipotesi che la velocità della luce sia infinita. (b) Che livello di precisione (numero di cifre significative) sarebbe necessario nella misura del tempo perché l'ipotesi della parte (a) risultasse inesatta?
- 3.9 Spesso, un secondo o due circa dopo che le luci elettriche di casa si sono abbassate, capita di sentire il rumore di

un'esplosione lontana. Il rumore può essere dovuto allo scoppio di un trasformatore nei dintorni, e il tremito della luce alla conseguente distruzione del trasformatore stesso. Supponendo che l'energia elettrica venga trasportata lungo i fili con una velocità infinita e che la velocità del suono nell'aria sia di 340 m/s, si calcoli la distanza del trasformatore esploso nel caso in cui lo scoppio venga udito 0.50 s dopo l'abbassamento della luce.

- 3.10 (a) Un traghetti attraversa un fiume largo 550 m dalla sponda orientale a quella occidentale in 1 min e 9 s. Qual è la velocità vettoriale media? (b) La nave compie il viaggio di ritorno in 58 s. Qual è la sua velocità media nel viaggio di ritorno? (c) Qual è la velocità media nell'intero viaggio di andata e ritorno? Si tenga conto del carattere vettoriale della velocità.
- 3.11 L'equazione della coordinata di un corpo in funzione del tempo è $x(t) = (2.2 \text{ m/s}^3)t^3 - 18 \text{ m}$. (a) Qual è la componente della velocità media del corpo tra $t_i = 1.0 \text{ s}$ e $t_f = 3.0 \text{ s}$? (b) Qual è la componente della velocità del corpo per $t = 2.0 \text{ s}$?
- 3.12 La Figura 3.20 mostra il grafico della coordinata di un corpo in funzione del tempo. Determinare \bar{v}_x (a) tra $t = 0.0 \text{ s}$ e $t = 4.0 \text{ s}$; (b) tra $t = 5.0 \text{ s}$ e $t = 9.0 \text{ s}$. Determinare (c) $v_x(3.0 \text{ s})$ e (d) $v(3.0 \text{ s})$. Determinare (e) $v_x(8.0 \text{ s})$ e (f) $v(8.0 \text{ s})$.

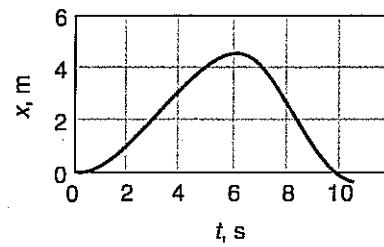


Figura 3.20 Esercizio 3.12.

- 3.13 Si utilizzi il grafico della coordinata in funzione del tempo riportato nella Figura 3.21 per trovare \bar{v}_x tra $t = 1.0 \text{ s}$ e $t = t_f$ quando (a) $t_f = 5.0 \text{ s}$; (b) $t_f = 4.0 \text{ s}$; (c) $t_f = 3.0 \text{ s}$; (d) $t_f = 2.0 \text{ s}$. (e) Si calcoli $v_x(1.0 \text{ s})$.

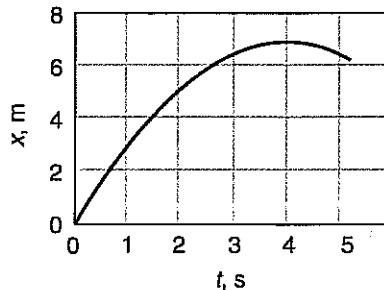


Figura 3.21 Esercizio 3.13.

- 3.14 La Figura 3.22 è una fotografia stroboscopica di un giocatore di golf che colpisce la pallina appoggiata sul supporto di battuta. La lampada stroboscopica emetteva 100 lampi al secondo. Si valuti il modulo della velocità della pallina nel momento in cui si è staccata dal supporto.

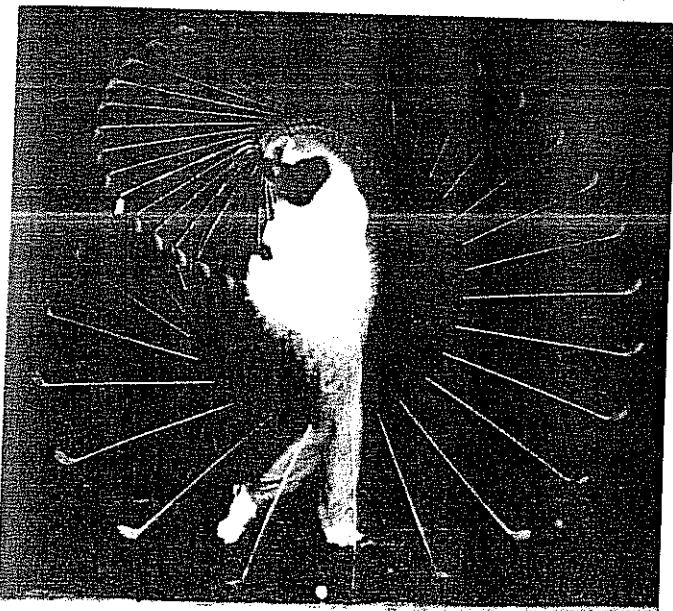


Figura 3.22 Esercizio 3.14. (Dottor Harold Edgerton/M.I.T., Cambridge, Mass.)

- 3.15 La Figura 3.23 mostra una sequenza di fotografie di un getto di gas incandescente emesso dalla superficie del Sole. Si valuti il modulo della velocità del materiale espulso in ciascuno degli intervalli tra una fotografia e la successiva. Il raggio del Sole è di circa 7×10^8 m.
- 3.16 L'espressione della coordinata di un corpo è $x(t) = -(3.5 \text{ m/s}^3)t^3 - (1.8 \text{ m/s})t$. (a) Scrivere l'espressione di $v_x(t)$. (b) Che valore ha $v_x(2.6 \text{ s})$? (c) Che valore ha v_{x0} ?
- 3.17 La Figura 3.24 è una fotografia stroboscopica di una palla da biliardo che rotola su una superficie orizzontale. L'intervallo di tempo tra i lampi di luce è di 0.10 s. Si utilizzi l'asta metrica come sistema di riferimento e si orienti il versore i verso destra. (a) Supponendo che la palla si stia muovendo verso destra, si scriva un'espressione di $x(t)$ con $t = 0.00 \text{ s}$ in corrispondenza della prima posizione della palla all'estremo sinistro. (b) Supponendo che invece la palla si stia muovendo

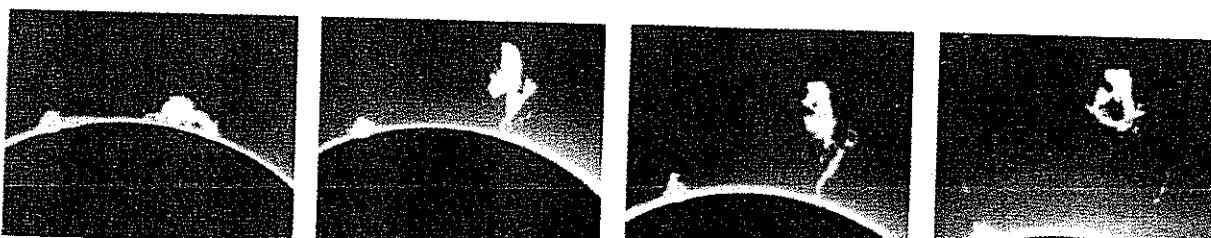


Figura 3.23 Esercizio 3.15. (National Center for Atmospheric Research/National Science Foundation)

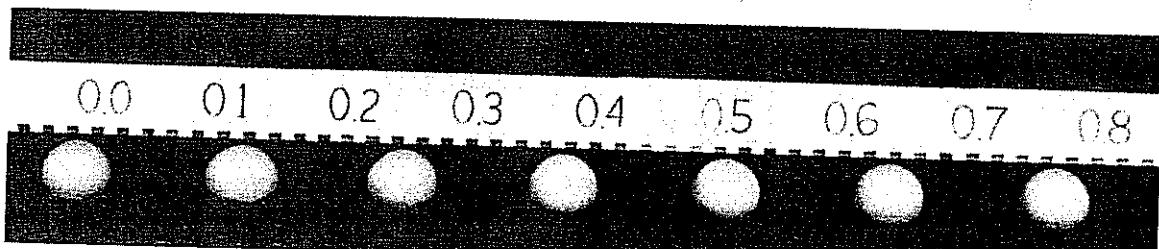


Figura 3.24 Esercizio 3.17. (Tom Richards)

verso sinistra, si scriva un'espressione di $x(t)$ con $t = 0.00 \text{ s}$ in corrispondenza della prima posizione della palla all'estremo destro.

Paragrafo 3.4 L'accelerazione

- 3.18 Le riviste specializzate a volte forniscono il modulo dell'accelerazione delle automobili in $\text{km h}^{-1} \text{s}^{-1}$ (chilometri all'ora al secondo). (a) Trovare il fattore di conversione per passare dai $\text{km h}^{-1} \text{s}^{-1}$ ai m s^{-2} . (b) Convertire in m s^{-2} un'accelerazione di modulo pari a $12 \text{ km h}^{-1} \text{s}^{-1}$.
- 3.19 Il modulo della velocità di un'automobile aumenta da 18 a 23 m/s in un intervallo di tempo di 5.8 s. (a) La direzione $+x$ sia quella del moto; si determini la componente dell'accelerazione media. (b) La direzione $+x$ sia invece quella opposta alla direzione del moto; di nuovo si determini la componente dell'accelerazione media.
- 3.20 Il modulo della velocità di un'automobile diminuisce da 23 m/s a 18 m/s in un intervallo di tempo di 5.8 s. (a) La direzione $+x$ sia quella del moto; si determini la componente dell'accelerazione media. (b) La direzione $+x$ sia invece quella opposta alla direzione del moto; di nuovo si determini la componente dell'accelerazione media.
- 3.21 Nella Figura 3.25 è riportato il grafico della componente della velocità di un corpo in funzione del tempo. Determinare \bar{a}_x (a) tra $t = 0.0 \text{ s}$ e $t = 3.0 \text{ s}$; (b) tra $t = 3.0 \text{ s}$ e $t = 9.0 \text{ s}$. (c) Determinare $a_x(5.0 \text{ s})$.

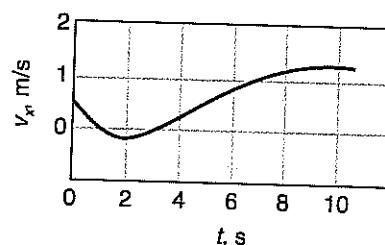


Figura 3.25 Esercizio 3.21.

- 3.22 Ci si serve del grafico della componente della velocità in funzione del tempo riportato nella Figura 3.26 per determinare \bar{a}_x tra $t = 1.0$ s e $t = t_f$ con (a) $t_f = 5.0$ s; (b) $t_f = 4.0$ s; (c) $t_f = 3.0$ s; (d) $t_f = 2.0$ s.
(e) Si stimi $a_x(1)$ s.

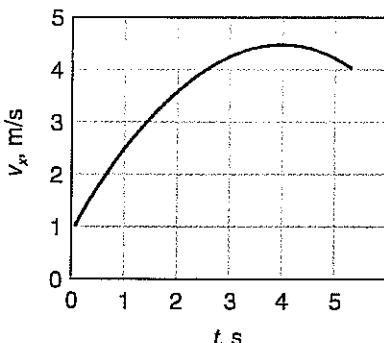


Figura 3.26 Esercizio 3.22.

- 3.23 L'espressione della coordinata di un corpo è $x(t) = -(1.6 \text{ m/s}^3)t^3 + (2.1 \text{ m/s}^2)t^2 - 42 \text{ m}$. (a) Si scriva $a_x(t)$. (b) Si determini $a_x(4.1 \text{ s})$. (c) Che valore ha $a_x(0) = a_{x0}$?

- 3.24 L'espressione della componente della velocità di un corpo è $v_x(t) = (3.2 \text{ m/s}^3)t^2 - 6.1 \text{ m/s}$. (a) Si scriva $a_x(t)$. (b) Si determini $a_x(2.7 \text{ s})$. (c) Che valore ha $a_x(0) = a_{x0}$?

Paragrafo 3.5 Il moto con accelerazione costante

- 3.25 Una gara podistica sulla distanza di 60 km svolta a New York nel 1983 fu vinta con un tempo di circa 4 h e 40 min. Si calcoli il modulo della velocità del vincitore, nell'ipotesi di velocità costante.

- 3.26 Nel baseball, i lanciatori delle squadre della massima divisione lanciano la palla con velocità dell'ordine delle 90 mi/h. La distanza tra la pedana di lancio e la casa base è di circa 20 m. Ammettendo che la palla si muova con velocità costante, si stimi il tempo necessario perché, dal punto di battuta, essa raggiunga la base.

- 3.27 Un amante del jogging corre con una velocità costante di 2.2 m/s verso il nord. Scelta come origine del sistema di coordinate una quercia e orientato il versore \hat{i} verso nord, si ponga $t = 0$ in corrispondenza dell'istante in cui l'uomo si trova 15 m a nord della quercia. (a) Si determini un'espressione della sua coordinata in funzione del tempo. (b) Qual è la coordinata del corridore per $t = 28 \text{ s}$? (c) In quale istante la sua coordinata sarà 51 m?

- 3.28 L'accelerazione di uno scattista all'inizio di una corsa può essere considerata approssimativamente costante. Utilizzando questa approssimazione e supponendo che il modulo dell'accelerazione sia di 3.8 m/s^2 , si determinino (a) la distanza percorsa dal velocista nei primi 2.0 s di una gara e (b) il modulo della sua velocità 2.0 s dopo l'inizio della gara.

- 3.29 Si supponga che un aereo di linea durante la manovra di decollo si muova con un'accelerazione costante di modulo 3.6 m/s^2 . (a) Si scriva l'espressione della componente della velocità dell'aereo in funzione del tempo. (b) Qual è il modulo della velocità dell'aereo 24 s dopo l'inizio della manovra? (c) Si scriva l'espressione della coordinata dell'aereo in funzione del tempo. (d) Qual è lo spazio percorso dall'aereo durante i primi 24 s del moto?

- 3.30 Un oggetto ha un'accelerazione costante di 4.0 m/s^2 verso sud. A un certo istante la sua velocità è di 8.4 m/s verso nord, e la sua posizione è 47 m a nord dell'origine. (a) Si scelgano un sistema di riferimento e un istante iniziale convenienti per la descrizione del moto. Si trovino espressioni (b) della coordinata dell'oggetto e (c) della componente della sua velocità in funzione del tempo. Si determinino (d) la coordinata dell'oggetto ed (e) la componente della sua velocità 3.0 s dopo l'istante menzionato sopra.

- 3.31 Il moto di una particolare scattista può essere approssimato con un'accelerazione costante di modulo 3.4 m/s^2 per i primi 40 m dopo la partenza. Qual è il modulo della sua velocità quando ha percorso (a) 20 m e (b) 40 m?

- 3.32 Un'automobile che viaggia lungo una strada rettilinea con una velocità di 22 m/s comincia a rallentare con un'accelerazione costante di modulo pari a 2.9 m/s^2 nell'istante in cui passa accanto a un segnale che preannuncia uno stop. (a) Qual è il modulo della velocità dell'automobile 30 m dopo il segnale? (b) E 60 m dopo il segnale? (c) Se l'automobile mantiene la sua accelerazione costante fino ad arrestarsi proprio al segnale di stop, qual è la distanza tra i due segnali?

- 3.33 Il guidatore di un'automobile che viaggia lungo una strada diritta con una velocità di 18 m/s vede un segnale che indica un limite di velocità di 25 m/s . Il segnale è 85 m più avanti nell'istante il cui il guidatore comincia ad accelerare. Determinare il modulo dell'accelerazione costante che farà sì che l'automobile passi accanto al segnale con la massima velocità consentita.

- 3.34 Un battello naviga con una velocità di 6.3 m/s nell'istante in cui passa accanto a una boa. In quel momento comincia ad aumentare velocità con un'accelerazione costante di modulo pari a 0.20 m/s^2 . Quale sarà la distanza tra la boa e la nave quando la velocità di quest'ultima sarà di 8.6 m/s ?

- 3.35 Il moto di un velocista durante una corsa di 50 m può essere approssimato con un'accelerazione costante di modulo 3.7 m/s^2 . Posto $t = 0$ in corrispondenza dell'inizio della corsa, si determini il tempo impiegato dal corridore per percorrere (a) 5.0 m e (b) 10.0 m.

- 3.36 Un'automobile viaggia alla velocità di 14 m/s nell'istante in cui passa accanto a un segnale che stabilisce il limite di velocità di 20 m/s . Se l'automobile aumenta velocità con un'accelerazione costante di modulo 1.4 m/s^2 , quanto tempo dopo aver oltrepassato il segnale raggiungerà il limite di velocità?

- 3.37 Un'automobile si trova 18 m oltre l'ingresso di un ristorante e viaggia alla velocità di 16 m/s , quando il guidatore schiaccia il freno. La velocità del veicolo diminuisce con un'accelerazione costante di modulo 2.3 m/s^2 . Quanto tempo dopo l'inizio della frenata l'automobile sarà 65 m oltre l'ingresso?

- 3.38 Nel baseball, i lanciatori delle squadre della massima divisione lanciano la palla con velocità dell'ordine delle 90 mi/h. Si stimi l'accelerazione della palla durante il lancio.

- 3.39** La velocità tipica di un proiettile nel momento in cui esce dalla canna di un fucile è di circa 700 m/s. Si stimi l'accelerazione del proiettile mentre percorre la canna del fucile.
- 3.40** (a) Si ricavi l'Equazione (C) dell'Esempio 3.8 risolvendo l'Equazione (A) rispetto a v_{x0} . (b) Si ricavi l'Equazione (D) dell'Esempio 3.8 sostituendo l'Equazione (C) nell'Equazione (B) e risolvendo rispetto ad a_x .
- 3.41** La Tabella 3.8 fornisce la coordinata di un oggetto in funzione del tempo. Supponendo che l'accelerazione sia costante, si determinino i valori di (a) x_0 ; (b) a_x ; (c) v_{x0} . (d) Si utilizzino i risultati ottenuti per scrivere un'espressione di $x(t)$. (e) Facendo uso dell'espressione ricavata nella parte (d) si verifichi che i dati siano compatibili con l'ipotesi di un'accelerazione costante. (*Suggerimento:* si veda l'Esempio 3.8.)

Tabella 3.8	
<i>t, s</i>	<i>x, m</i>
0.0	3.0
1.0	7.5
2.0	15.2
3.0	26.1
4.0	40.2
5.0	57.5

- 3.42** Due drag racer (vetture per gare di accelerazione) percorrono la medesima pista partendo da fermi. La vettura *A* raggiunge il traguardo in un tempo pari alla metà di quello impiegato dalla vettura *B*. Ammettendo che le accelerazioni di entrambe siano costanti, determinare il rapporto tra l'accelerazione di *A* e quella di *B*.

Paragrafo 3.6 La caduta libera

- 3.43** Talvolta è comodo confrontare un'accelerazione con l'accelerazione di gravità. Definiamo un'unità di misura dell'accelerazione che chiamiamo *g*: $1\ g = 9.8\ m/s^2$ (esattamente). Supponiamo che la velocità di un'automobile aumenti passando da zero a 25 m/s in 4.0 s. Ammettendo che l'accelerazione sia costante, si determini il suo modulo in unità *g*.

PROBLEMI

- 3.1** Un velocista corre i 100 m piani in 10.0 s. Si approssimi il suo moto ipotizzando un'accelerazione costante nei primi 15 m e poi una velocità costante per gli altri 85 m. Si determinino (a) la sua velocità finale; (b) il tempo impiegato per percorrere i primi 15 m; (c) il tempo necessario per gli altri 85 m; (d) il modulo dell'accelerazione per i primi 15 m.
- 3.2** Un pezzo di gomma da masticare viene attaccato nel punto più alto di una ruota, come mostra la Figura 3.27, all'istante t_i . La ruota poi rotola senza slittare nella direzione $+x$, e all'istante t_f la gomma si trova nel punto più basso della ruota. Si utilizzi il sistema di riferimento indicato in figura per esprimere lo spostamento Δr della gomma in funzione del raggio R della ruota.
- 3.3** L'automobile *A*, viaggiando a una velocità costante di 18 m/s, sorpassa l'automobile *B*, che è ferma a un segnale di stop. Nell'istante in cui *A* e *B* sono effettivamente passate

- 3.44** Una pietra inizialmente in quiete viene lasciata cadere nell'istante $t = 0$ dalla cima di una torre di osservazione. Disposto l'asse y verticalmente con il versore j rivolto verso l'alto, si costruisca una tabella che elenchi i valori di a_y , v_y e y a intervalli di mezzo secondo da $t = 0.0$ s fino a $t = 3.0$ s. Si utilizzino questi dati per realizzare i grafici di a_y , v_y e y in funzione di t . Si traccino le curve e le si confronti con la Figura 3.14.
- 3.45** Un astronauta sta in piedi sui gradini della sua astronave che è ferma sulla superficie del pianeta X, e lascia cadere un sasso da un'altezza di 3.5 m. Il sasso arriva al suolo in 0.83 s. Determinare il modulo dell'accelerazione di gravità sulla superficie del pianeta X.
- 3.46** Un vaso di fiori inizialmente in quiete cade da un davanzale che si trova a 6.2 m da terra. (a) Qual è il modulo della velocità del vaso quando tocca terra? (b) Quanto tempo impiega il vaso ad arrivare al suolo? (c) Di quanto è caduto il vaso dopo 0.50 s? (d) Qual è il modulo della sua velocità dopo 0.50 s? (e) Qual è l'accelerazione del vaso dopo 0.50 s?
- 3.47** Una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale di 12 m/s a partire da un punto che si trova a 1.8 m dal suolo. Posto $t = 0$ nell'istante del lancio e posta l'origine delle coordinate al suolo con il versore j diretto verso l'alto, (a) si determinino h_m e t_m . (b) In quale istante precedente a t_m la palla ha componente della velocità pari a +5.0 m/s e in quale istante successivo a t_m ha componente della velocità pari a -5.0 m/s? (c) Quali sono le coordinate che corrispondono ai valori della componente della velocità citati nella parte (b)?
- 3.48** Un sasso lanciato verticalmente verso l'alto per $t = 0$, raggiunge un'altezza massima di 14 m al di sopra del punto da cui è stato lanciato. (a) Qual è il modulo della sua velocità iniziale? (b) In quale istante ripassa dal punto di lancio mentre ricade?
- 3.49** Una palla scagliata verticalmente verso l'alto colpisce un filo del telefono posto 5.1 m sopra il punto di lancio con una velocità di modulo pari a 0.70 m/s. Qual era la velocità iniziale della palla?

con un'intensità costante di $4.6\ m/s^2$. Determinare (a) il tempo necessario a *B* per raggiungere *A*; (b) la distanza percorsa da *B* in tale tempo; (c) il modulo della velocità di *B* quando sorpassa *A*.

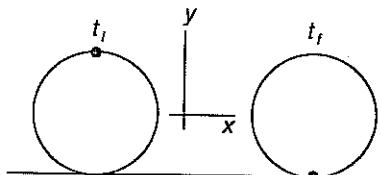


Figura 3.27 Problema 3.2.

- 3.4** Il seguente metodo può essere usato per confrontare i tempi di reazione di persone diverse. Fate tenere a una persona il pollice e l'indice a circa 20 mm di distanza

verticale in modo che la sua estremità inferiore sia tra il pollice e l'indice. La persona che si sottopone alla prova deve afferrare il righello nell'istante in cui vede che voi lo lasciate andare. Misurando il tratto di cui il righello cade prima di essere afferrato, si può determinare il tempo di reazione. Se il righello cade per 200 mm, qual è il tempo di reazione del soggetto? Si supponga la caduta libera.

- 3.5** Supponiamo di dover progettare una pista per il decollo di un particolare tipo di aereo a reazione. Durante la manovra di decollo, la velocità di questo aereo aumenta con un'accelerazione costante di modulo pari a 4.0 m/s^2 , finché esso si alza in volo a una velocità di 85 m/s . Se al pilota venisse richiesto di interrompere il decollo, la velocità del reattore potrebbe diminuire con un'accelerazione costante di modulo pari a 5.0 m/s^2 . Determinare la lunghezza che la pista deve avere per consentire al pilota di interrompere la manovra nell'istante in cui l'aereo raggiunge la velocità di decollo, senza finire fuori della zona asfaltata.
- 3.6** Supponiamo di dover progettare il sistema frenante di un aereo a reazione. Durante il decollo, la velocità dell'aereo aumenta con un'accelerazione costante di modulo 3.5 m/s^2 , finché il velivolo si stacca dal suolo a una velocità di 95 m/s . La lunghezza della pista è di 2500 m . Determinare il modulo dell'accelerazione costante in grado di arrestare l'aereo alla fine della pista, nell'ipotesi che il pilota interrompa la manovra di decollo nell'istante in cui l'aereo raggiunge la velocità necessaria per sollevarsi in volo.
- 3.7** (a) Si dimostri che, per il moto con accelerazione costante, $\bar{v}_x = \frac{1}{2} [v_x(t_f) + v_x(t_i)]$. [Suggerimento: si utilizzi la definizione della componente della velocità media, tenendo presente che $t_f^2 - t_i^2 = (t_f + t_i)(t_f - t_i)$.] (b) Si consideri il caso in cui $a_x = 2.0 \text{ m/s}^2$, $v_{x0} = 1.0 \text{ m/s}$, $t_i = 1.0 \text{ s}$ e $t_f = 3.0 \text{ s}$. Si tracci un grafico di v_x in funzione di t da $t = 0.0 \text{ s}$ a $t = 4.0 \text{ s}$. Si mostrino nel grafico $v_x(t_i)$, $v_x(t_f)$ e \bar{v}_x .
- 3.8** Si consideri un'accelerazione che varia linearmente con il tempo: $a_x(t) = a_{x0} + b_x t$. Si trovino le espressioni di (a) $v_x(t)$ e (b) $x(t)$. (c) Qual è il significato fisico di b_x ?
- 3.9** Si ricavi l'Equazione (3.15) dalle Equazioni (3.10) e (3.13).
- 3.10** Una moneta è stata lanciata verticalmente nell'aria in modo che ruotasse da testa a croce e poi di nuovo a testa 10 volte al secondo. La moneta è stata lanciata con la testa sulla faccia superiore da una altezza di 0.49 m al di sopra della superficie sulla quale è ricaduta, e la sua altezza massima rispetto a tale superficie è stata di 1.13 m . La moneta è ricaduta con la testa o la croce sulla faccia superiore?
- 3.11** *La legge dei numeri dispari di Galileo.* Un oggetto inizialmente in quiete viene lasciato andare e cade liberamente. Dividiamo il tempo di caduta in numerosi intervalli uguali Δt . Dimostrare che la variazione della coordinata durante ognuno dei successivi intervalli di tempo è data dalla sequenza $\Delta y_2 = 3 \Delta y_1$, $\Delta y_3 = 5 \Delta y_1$, $\Delta y_4 = 7 \Delta y_1$, ..., $\Delta y_n = (2n - 1) \Delta y_1$. (Si veda la Figura 3.28.)
- 3.12** Sia $x(t) = A \sin \omega t$, ove A e ω rappresentano delle costanti. Determinare le espressioni di (a) $v_x(t)$ e (b) $a_x(t)$. (c) Dimostrare che $a_x = -\omega^2 x$. Posto $A = 10.0 \text{ mm}$ e $\omega = 0.628 \text{ rad/s}$, costruire i grafici di (d) x ; (e) v_x e a_x in funzione del tempo, da $t = 0.0 \text{ s}$ a $t = 10.0 \text{ s}$. Riportare i punti a intervalli di 1 s e tracciare le curve passanti per tali punti.

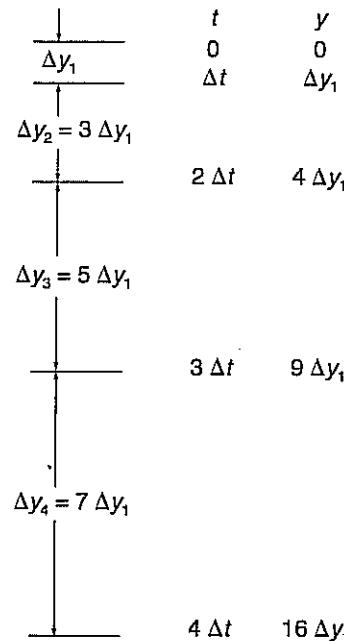
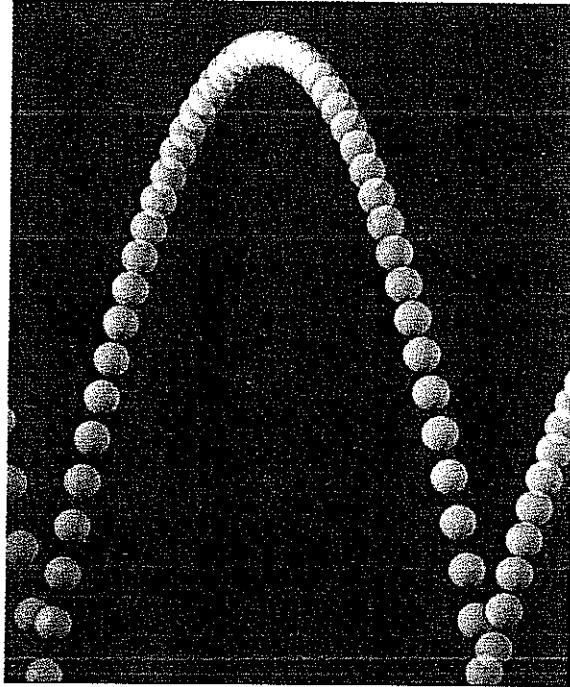


Figura 3.28 Problema 3.11.

LA CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE IN DUE DIMENSIONI E I MOTI RELATIVI

4.1 INTRODUZIONE

Nel Capitolo 3 abbiamo definito le tre grandezze cinematiche – vettore posizione, velocità e accelerazione – e ce ne siamo serviti nella descrizione del moto lungo una linea retta. Ora applicheremo queste definizioni a corpi che si muovono in due dimensioni, ossia che si muovono in un piano. Il carattere vettoriale della velocità e dell'accelerazione si manifesta in modo più chiaro nel moto in due dimensioni: contrariamente a quanto accade nel caso del moto in una dimensione, infatti, ora la velocità e l'accelerazione non giacciono necessariamente sulla stessa retta. L'ulteriore estensione da due a tre dimensioni è immediata e può essere rimandata al momento in cui si renderà necessaria. Inoltre, molti dei moti che si presentano in natura avvengono (approssimativamente) in un piano. Due moti di questo tipo, che descriveremo in modo particolareggiato, sono quello di un corpo lanciato nell'aria, come nel caso di due persone che si rilanciano una palla, e quello di un corpo che percorre una circonferenza, come nel caso di un pianeta che ruota attorno al Sole.



Fotografia stroboscopica di una palla da golf che rimbalza.
(Dottor Harold Edgerton/
M.I.T., Cambridge, Mass.)

4.2 VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Nel capitolo precedente abbiamo dato le definizioni generali di vettore posizione, velocità e accelerazione di un punto materiale. Ora applichiamo tali definizioni al caso del moto di una particella in un piano, identificato dagli assi cartesiani x , y . Per maggiore chiarezza ripetiamo, in questo caso bidimensionale, le operazioni di passaggio al limite che hanno portato alle definizioni generali.

Vettore posizione.

Il vettore posizione localizza un corpo rispetto all'origine di un sistema di riferimento (Figura 4.1). In due dimensioni,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (4.1)$$

dove x e y sono le coordinate del corpo. Si presti la massima attenzione alla differenza tra il grafico della Figura 4.1 e il genere di grafici che abbiamo usato nel Capitolo 3. Nel Capitolo 3 abbiamo analizzato per lo più grafici di x o di v_x in funzione di t . La Figura 4.1, che costituisce un esempio tipico del genere di grafici di cui ci serviremo in questo capitolo, rappresenta invece il percorso di un corpo nel piano xy . Il percorso di un corpo viene spesso chiamato *traiettoria*.

Lo spostamento, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$, è diretto dalla posizione iniziale di un oggetto alla sua posizione finale, come risulta dalla Figura 4.2. Passando alle componenti,

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= (x_f\mathbf{i} + y_f\mathbf{j}) - (x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j}) \\ &= (x_f - x_i)\mathbf{i} + (y_f - y_i)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Ponendo $\Delta x = x_f - x_i$ e $\Delta y = y_f - y_i$, si ha

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}$$

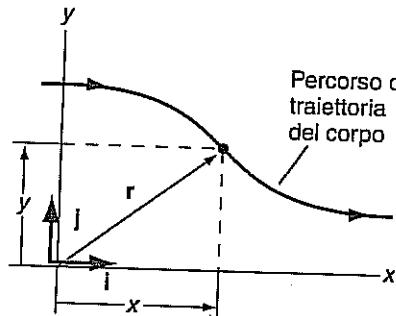


Figura 4.1 Il vettore posizione \mathbf{r} in due dimensioni.

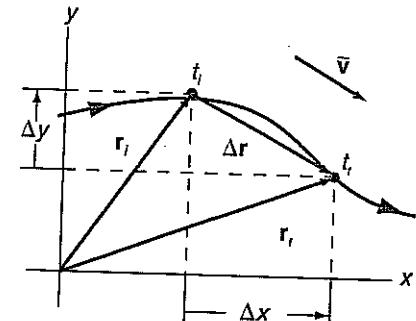


Figura 4.2 Lo spostamento $\Delta\mathbf{r}$ e la velocità media $\bar{\mathbf{v}}$; $\bar{\mathbf{v}}$ è parallela a $\Delta\mathbf{r}$. Il triangolo formato dai vettori posizione e dallo spostamento mostra che $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$, ossia $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}$.

La velocità. La velocità media $\bar{\mathbf{v}}$ di un corpo in un intervallo di tempo Δt è il rapporto tra il suo spostamento e l'intervallo di tempo stesso, ossia $\bar{\mathbf{v}} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} = \bar{v}_x\mathbf{i} + \bar{v}_y\mathbf{j}$$

Dal momento che $\bar{\mathbf{v}} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$, la direzione della velocità media è la stessa di $\Delta\mathbf{r}$ (Figura 4.2).

La *velocità (istantanea)* è definita come limite a cui tende la velocità media quando l'intervallo di tempo tende a zero:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (4.2)$$

La Figura 4.3 mostra questo passaggio al limite nel grafico della traiettoria di un corpo. Nelle varie parti della figura, da (a) a (c), è rappresentata $\bar{\mathbf{v}}$ per intervalli di tempo sempre più brevi, dato che t_f è mantenuto fisso mentre t_i tende a t_f . Via via che ci si avvicina a questo limite, $\Delta\mathbf{r}$ tende a diventare parallelo alla tangente alla traiettoria ed è rivolto nella direzione del moto. Pertanto, *la velocità v, in qualunque punto della traiettoria di un corpo, è diretta parallelamente alla retta tangente alla traiettoria stessa ed è rivolta nel senso del moto* (Figura 4.3d).

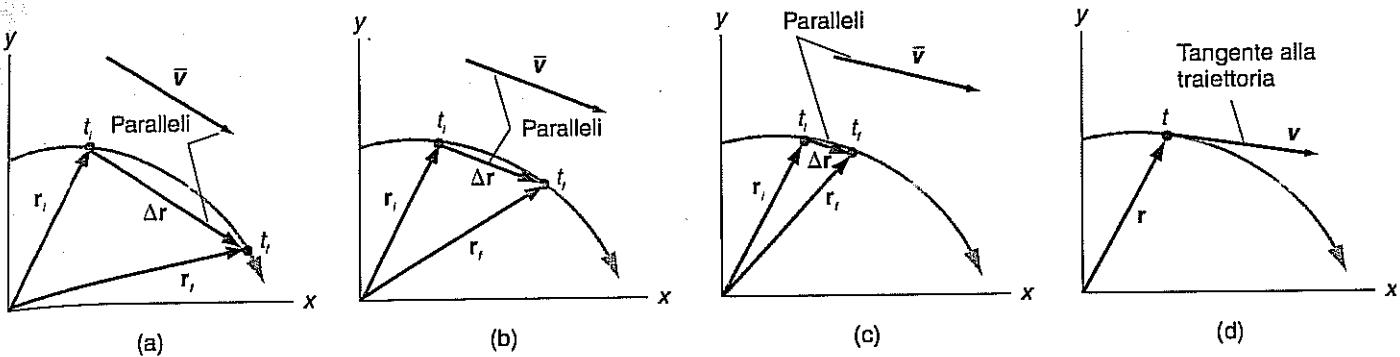


Figura 4.3 Al tendere a zero dell'intervallo di tempo Δt , la velocità media \bar{v} tende alla velocità v . La direzione di v è parallela alla tangente alla traiettoria.

Questo passaggio al limite può essere formulato anche in termini analitici. Esprimendo Δr tramite le sue componenti, si ha

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j} \right) = \mathbf{i} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) + \mathbf{j} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j}$$

Dal momento che $v = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$, si ha

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad (4.3) \quad \text{Le componenti della velocità.}$$

Se le espressioni delle coordinate x e y in funzione del tempo sono note, la velocità può essere determinata calcolando le derivate delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$.

Il modulo della velocità è:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4.4) \quad \text{Modulo della velocità.}$$

La direzione in cui il corpo si dirige in un istante qualsiasi può essere individuata dall'angolo θ compreso tra il vettore velocità e l'asse x . La Figura 4.4 mostra che

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad \text{ossia} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} \quad (4.5) \quad \text{La direzione del moto.}$$

dove θ è positivo quando viene misurato in senso antiorario a partire dall'asse x . Dalla figura si desume che le componenti della velocità sono

$$v_x = v \cos \theta \quad \text{e} \quad v_y = v \sin \theta \quad (4.6)$$

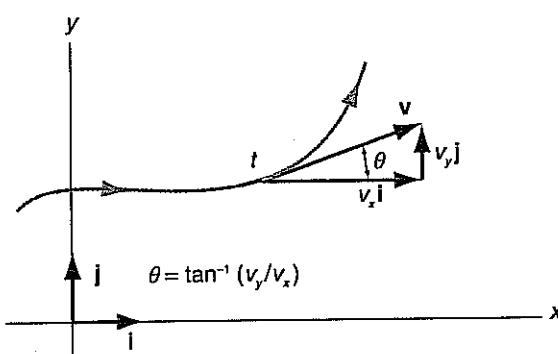


Figura 4.4
Scomponendo la velocità nelle sue componenti si ha $v_x = v \cos \theta$ e $v_y = v \sin \theta$.

Esempio 4.1

Un motoscafo avanza in una direzione 52° a sud del punto cardinale est con una velocità di modulo pari a 12 m/s. Si scelga un sistema di coordinate e si determinino le componenti della velocità dell'imbarcazione.

Soluzione

Orientiamo il semiasse positivo delle x verso est e quello delle y verso nord, come mostra la Figura

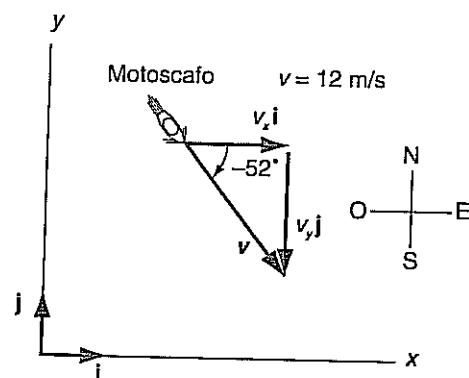
4.5. Dal momento che un angolo è positivo se è misurato in senso antiorario, in questo caso si ha $\theta = -52^\circ$. Dalle Equazioni (4.6),

$$v_x = 12 \text{ m/s} \cos (-52^\circ) = 7.4 \text{ m/s}$$

$$v_y = 12 \text{ m/s} \sin (-52^\circ) = -9.5 \text{ m/s}$$

Figura 4.5

Esempio 4.1: un motoscafo che avanza in una direzione 52° a sud del punto cardinale est. In questo caso $\theta = -52^\circ$.



L'accelerazione. L'accelerazione media \bar{a} di un corpo in un intervallo di tempo Δt è il rapporto tra la variazione del vettore velocità del corpo e l'intervallo di tempo: $\bar{a} = \Delta v / \Delta t$, ossia

$$\bar{a} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \mathbf{j} = \bar{a}_x \mathbf{i} + \bar{a}_y \mathbf{j}$$

L'accelerazione è definita come limite a cui tende l'accelerazione media quando l'intervallo di tempo tende a zero

Accelerazione.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d \mathbf{v}}{dt} \quad (4.7)$$

Dal momento che $\Delta \mathbf{v} = \Delta v_x \mathbf{i} + \Delta v_y \mathbf{j}$, si ha

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \mathbf{j} \right) = \mathbf{i} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \right) + \mathbf{j} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right) = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j}$$

Scrivendo $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$, si vede che

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad (4.8)$$

Inoltre, siccome $v_x = dx/dt$ e $v_y = dy/dt$,

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{e} \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Se si conoscono le espressioni delle componenti della velocità v_x e v_y , oppure delle coordinate x e y , l'accelerazione può essere ricavata calcolando rispettivamente le derivate prime e seconde di tali espressioni.

La Figura 4.6 illustra graficamente questo procedimento di passaggio al limite: nelle parti da (a) a (c) è rappresentata \bar{a} per intervalli di tempo sempre più brevi, via via che, mantenendo fisso t_i , t_f tende a t_i .

La direzione di \mathbf{a} è data dalla direzione del valore limite di $\Delta \mathbf{v}$. Nella Figura 4.7 si studia la direzione di $\Delta \mathbf{v}$ per un corpo che segue una traiettoria curva. La Figura 4.7b mostra un triangolo di vettori velocità di lati \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_f e $\Delta \mathbf{v}$. La Figura 4.7c è un ingrandimento nel quale $\Delta \mathbf{v}$ è decomposta in due vettori: $\Delta \mathbf{v}_{||}$ e $\Delta \mathbf{v}_{\perp}$, che sono rispettivamente parallelo e perpendicolare a \mathbf{v}_i . Passando al limite, \mathbf{v}_f tende a \mathbf{v}_i e quindi \mathbf{v}_i viene indicata semplicemente con \mathbf{v} . Dal momento che \mathbf{v}_f è diretta verso la concavità della traiettoria più di \mathbf{v}_i , $\Delta \mathbf{v}_{||}$ è diretta verso la concavità della curva. Anzi, quando un cor-

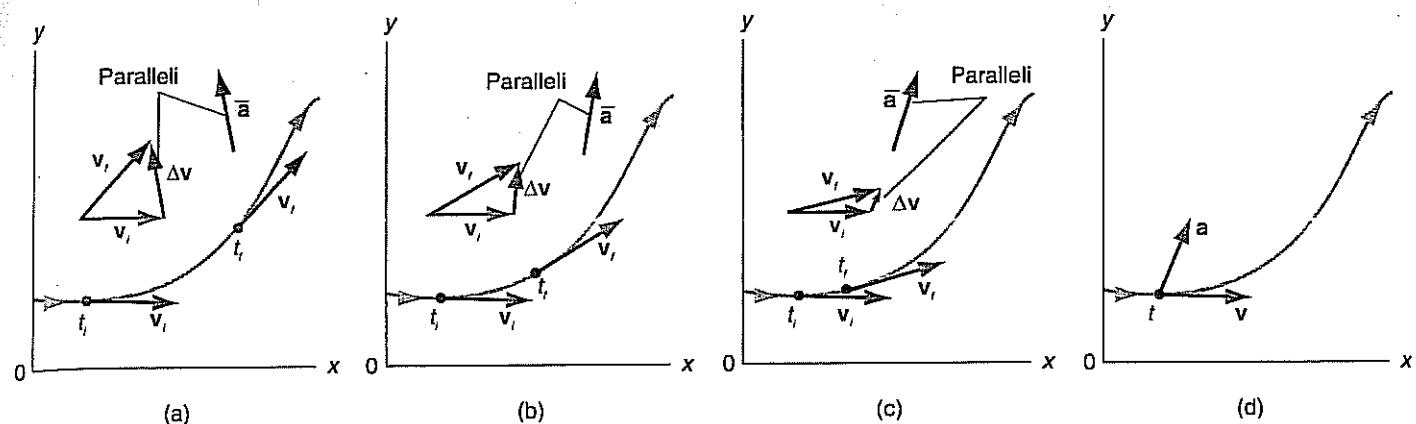


Figura 4.6 Al tendere dell'intervallo di tempo Δt a zero, l'accelerazione media \bar{a} tende all'accelerazione a . Per ciascuno dei triangoli dei vettori velocità $\Delta v = v_f - v_i$, ossia $v_f = v_i + \Delta v$.

po descrive una curva, Δv_{\parallel} è sempre rivolta verso la concavità della traiettoria. Di conseguenza, per qualunque corpo che percorra una traiettoria curva, a ha una componente positiva nella direzione della concavità della traiettoria. In altre parole, a è diretta, almeno parzialmente, verso la concavità della curva. Se la traiettoria è rettilinea $\Delta v_{\perp} = 0$ e a è parallela alla tangente alla traiettoria.

Nella Figura 4.7 v_f è rappresentata con un modulo maggiore di quello di v_i ($v_f > v_i$), il che significa che il modulo della velocità del corpo sta aumentando. In questo caso, Δv_{\parallel} ha il medesimo verso di v , e a ha una componente positiva nella direzione di v (a è diretta parzialmente nella direzione di v). Se il modulo della velocità di un corpo è costante ($v_f = v_i$), $\Delta v_{\parallel} = 0$, e a non ha una componente parallela a v . Se il modulo della velocità di un corpo diminuisce ($v_f < v_i$), Δv_{\parallel} ha verso opposto a v , e a ha una componente negativa nella direzione di v .

La Figura 4.8 mostra tre possibili relazioni tra la velocità e l'accelerazione di un corpo che percorre una traiettoria curva. Nella Figura 4.8a il modulo della velocità del corpo sta aumentando e quindi l'angolo ϕ compreso tra v e a è minore di 90° . Nella Figura 4.8b il modulo della velocità del corpo è costante e quindi $\phi = 90^\circ$, cioè v e a sono perpendicolari. Nella Figura 4.8c il modulo della velocità del corpo sta diminuendo e quindi ϕ è maggiore di 90° .

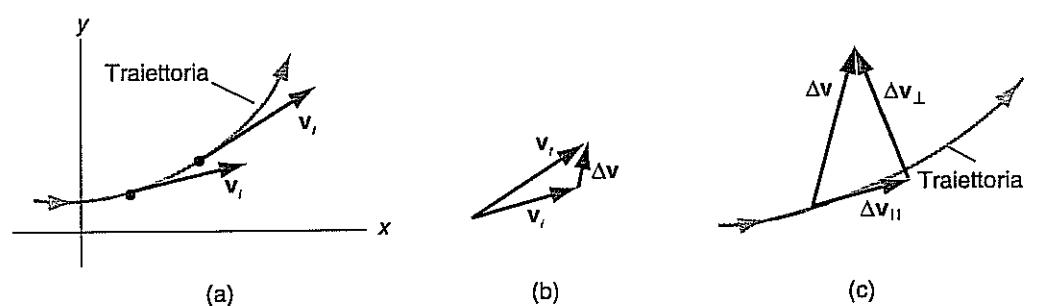


Figura 4.7

La direzione di a coincide con quella del valore limite di Δv al tendere di Δt a zero. (a) Un corpo percorre una traiettoria curva. (b) Il triangolo dei vettori velocità. (c) $\Delta v = \Delta v_{\parallel} + \Delta v_{\perp}$.

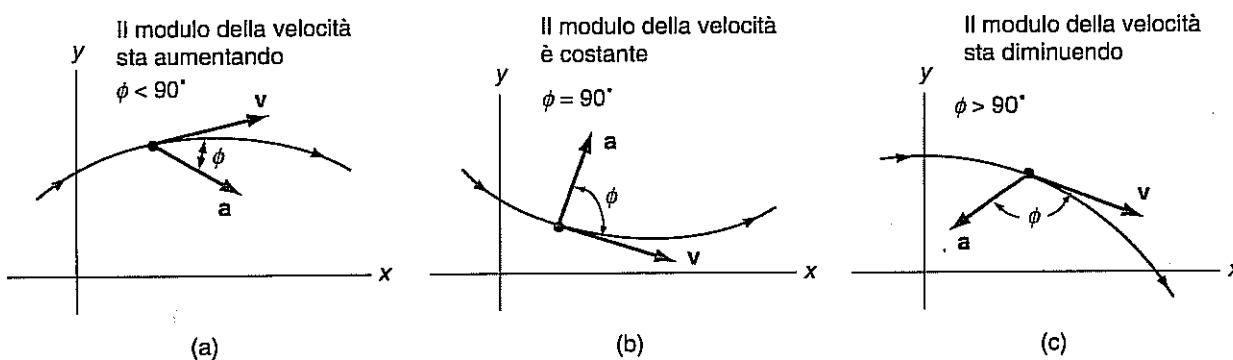


Figura 4.8 Le direzioni relative di v e di a per un corpo che percorre una traiettoria curva quando il modulo della velocità del corpo (a) aumenta, (b) è costante, e (c) diminuisce.

Esempio 4.2

Supponiamo che le coordinate di un corpo siano date da $x = (2.3 \text{ m/s}^3)t^3 - 12 \text{ m}$ e $y = (5.1 \text{ m/s})t$. Trovino le espressioni (a) della velocità e (b) dell'accelerazione del corpo.

Soluzione

(a) Dalle Equazioni (4.3),

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [(2.3 \text{ m/s}^3)t^3 - 12 \text{ m}] = (6.9 \text{ m/s}^3)t^2 \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} [(5.1 \text{ m/s})t] = 5.1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

quindi

$$\mathbf{v} = [(6.9 \text{ m/s}^3)t^2]\mathbf{i} + (5.1 \text{ m/s})\mathbf{j}$$

(b) Analogamente, le Equazioni (4.8) danno

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} [(6.9 \text{ m/s}^3)t^2] = (13.8 \text{ m/s}^3)t \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} (5.1 \text{ m/s}) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto

$$\mathbf{a} = [(13.8 \text{ m/s}^3)t]\mathbf{i}$$



4.3 ACCELERAZIONE COSTANTE: IL MOTO DEI PROIETTILI

Il caso più semplice di moto accelerato è quello del moto con accelerazione costante. Per trovare le espressioni di \mathbf{v} e \mathbf{r} procediamo in modo analogo a come abbiamo fatto per il moto con accelerazione costante in una dimensione (Paragrafo 3.5). Quando l'accelerazione è costante, essa risulta uguale al suo valore medio: $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} = \Delta \mathbf{v}/\Delta t$. Se poniamo $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0$, $t_f = t$ e $t_i = 0$, allora $\mathbf{a} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)/(t - 0)$, ossia

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{at}} \quad (4.9)$$

In termini di componenti

$$\mathbf{v} = (v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j}) + (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t = (v_{x0} + a_xt)\mathbf{i} + (v_{y0} + a_yt)\mathbf{j}$$

Cosicché

$$v_x = v_{x0} + a_xt \quad \text{e} \quad v_y = v_{y0} + a_yt \quad (4.10)$$

L'equazione che fornisce \mathbf{r} può essere determinata trovando un'espressione la cui derivata dia l'Equazione (4.9):

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{at}^2} \quad (4.11)$$

Si verifichi che derivando l'Equazione (4.11) si ottiene l'Equazione (4.9) e che \mathbf{r} calcolato per $t = 0$ dà \mathbf{r}_0 . Separando l'Equazione (4.11) nelle sue componenti, si trova

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y &= y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Queste equazioni mostrano che il moto nella direzione x e quello nella direzione y sono indipendenti l'uno dall'altro. In altre parole, il moto che stiamo studiando può essere ricondotto a due distinti moti unidimensionali simultanei con accelerazione costante lungo direzioni perpendicolari. Questa caratteristica del moto con accelerazione costante risulta evidente nell'esempio del moto dei proiettili, che ora descriveremo.

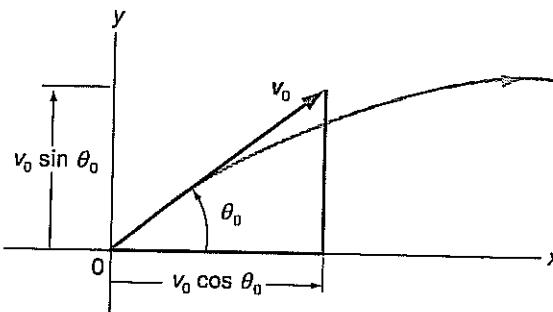
Come abbiamo accennato nel capitolo precedente, in sostanza non si è fatto altro che trovare la soluzione di equazioni differenziali. La prima equazione è: $\frac{dv}{dt} = a$, che permette di trovare la velocità del punto essendone nota la sua derivata, cioè la sua accelerazione, che nel caso presente è costante. Poiché il punto si muove nel piano xy , la precedente equazione vettoriale corrisponde a due equazioni scalari (in tre dimensioni, ovviamente, le equazioni scalari sarebbero tre): $\frac{dv_x}{dt} = a_x$ e $\frac{dv_y}{dt} = a_y$, che sono equazioni differenziali del primo ordine (contengono derivate prime dell'incognita), dalle quali si trovano v_x e v_y . Una volta trovata la velocità, si ha un'altra equazione differenziale da risolvere: $\frac{dr}{dt} = v$, che corrisponde alle due equazioni differenziali scalari (di nuovo, in tre dimensioni, le equazioni scalari sarebbero tre) $\frac{dx}{dt} = v_x$ e $\frac{dy}{dt} = v_y$, dalle quali, conoscendo v_x e v_y , si trovano $x(t)$ e $y(t)$, cioè le espressioni (4.12).

Il moto dei proiettili. Un corpo che sia in volo dopo essere stato lanciato viene detto *proiettile*. Gli esperimenti dimostrano che, se il corpo ha densità di massa sufficientemente elevata (cioè, se è simile a una palla da biliardo e non a una pallina da ping-pong), allora spesso si possono trascurare gli effetti della resistenza dell'aria, e si può supporre che l'accelerazione del corpo sia dovuta alla sola gravità. Com'è consuetudine, orientiamo l'asse x orizzontalmente e l'asse y verticalmente, con il semiasse positivo rivolto verso l'alto. L'accelerazione è allora $a = -g\hat{j}$, e

$$a_x = 0 \quad \text{e} \quad a_y = -g$$

dove $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Supponiamo che il proiettile venga lanciato in modo che la sua velocità iniziale v_0 formi un angolo θ_0 con l'asse x , come mostra la Figura 4.9. Chiameremo θ_0 *angolo di proiezione*. Scomponendo la velocità iniziale si ottengono le sue componenti: $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$ e $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$, dove v_0 è il modulo della velocità iniziale. Sostituendo questi valori nelle Equazioni (4.10), si trova

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \theta_0 \\ v_y &= v_0 \sin \theta_0 - gt \end{aligned} \tag{4.13}$$



Se facciamo coincidere l'origine del nostro sistema di riferimento con la posizione iniziale del proiettile risulta $x_0 = y_0 = 0$ e le Equazioni (4.12) diventano

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos \theta_0)t \\ y &= (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Dunque, il moto lungo l'asse x può essere considerato un moto in una dimensione con velocità costante, e il moto lungo l'asse y può essere considerato un moto in una dimensione con accelerazione costante.

La Figura 4.10, che è una fotografia stroboscopica del moto simultaneo di due palle da golf, dimostra l'indipendenza delle componenti x e y del moto. Una delle due palle è stata lasciata cadere con velocità iniziale nulla nello stesso istante in cui l'altra è stata

Componenti dell'accelerazione di un proiettile.

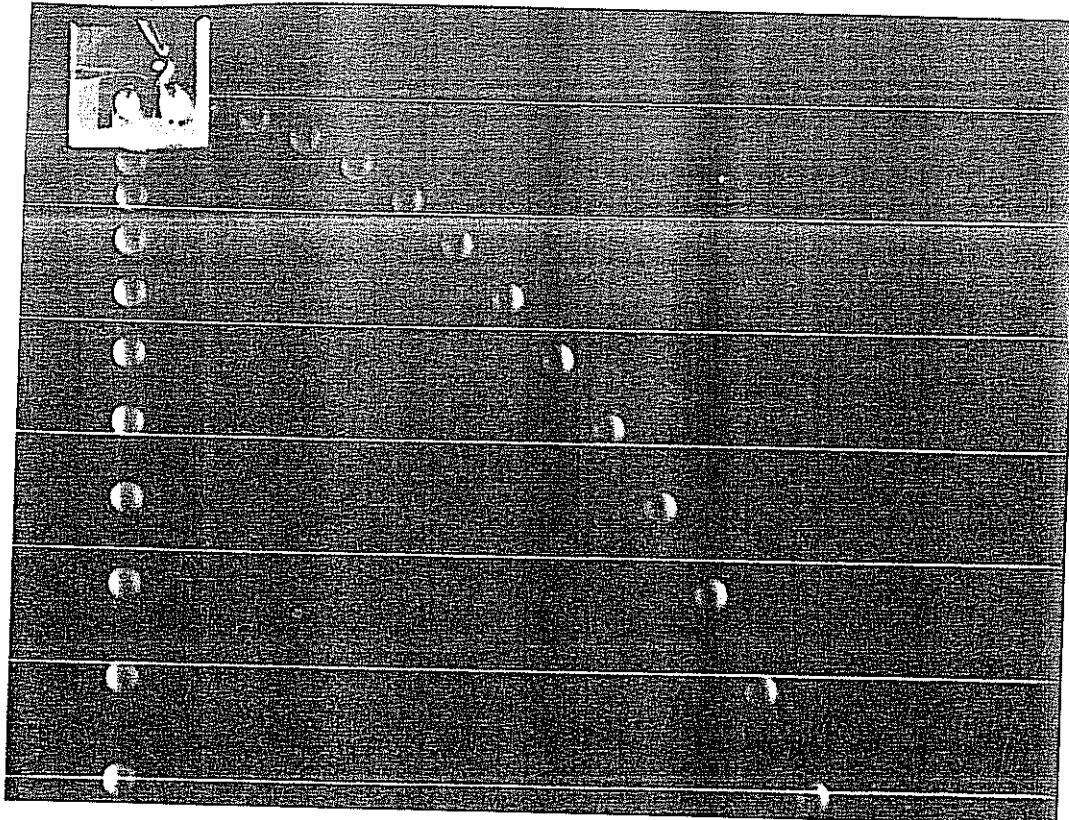
Componenti della velocità di un proiettile.

Figura 4.9
Scomposizione della velocità iniziale di un proiettile nelle sue componenti: $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$ e $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$, ove v_0 è il modulo della velocità iniziale e θ_0 è l'angolo di proiezione.

Coordinate di un proiettile.

Figura 4.10

Fotografia stroboscopica di due palle da golf. Una delle due è stata lasciata cadere con velocità iniziale nulla nello stesso istante in cui l'altra è stata lanciata con una velocità iniziale orizzontale. Le coordinate verticali simultanee delle due palle sono in ogni istante identiche. (Dottor Harold Edgerton/M.I.T., Cambridge, Mass.)



Il moto della palla che cade lungo la verticale è descritto dalle Equazioni (4.14) se in esse si pone $v_0 = 0$. Ciò fornisce $x = 0$ per qualsiasi t e $y = -\frac{1}{2}gt^2$. Il moto della palla lanciata orizzontalmente è descritto dalle Equazioni (4.14) se in esse si pone $\theta_0 = 0$. Ciò fornisce $x = v_0 t$ e $y = -\frac{1}{2}gt^2$. Quindi le Equazioni (4.14) forniscono la medesima coordinata y per entrambe le palle in ogni istante, e tale risultato trova riscontro nella Figura 4.10.

È possibile ricavare un'equazione della traiettoria di un proiettile eliminando il tempo tra le espressioni di x e y nelle Equazioni (4.14). Risolvendo rispetto al tempo l'equazione $x = (v_0 \cos \theta_0)t$ si ottiene $t = x/(v_0 \cos \theta_0)$. Sostituendo tale valore nell'espressione di y e riordinando i termini, si ha

Traiettoria di un proiettile.

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} x^2 \quad (4.15)$$

Abbiamo trovato che, se gli effetti della resistenza dell'aria possono essere trascurati, la traiettoria di un proiettile è una parabola. Nella Figura 4.11 è rappresentata questa traiettoria parabolica unitamente al vettore velocità in diversi punti. Si noti che v_x rimane costante durante tutto il moto, mentre v_y decresce in modulo durante la salita del proiettile e aumenta in modulo durante la discesa del proiettile; ossia, v_y decresce continuamente, in accordo con il fatto che a_y è negativa. Nell'istante in cui il proiettile raggiunge l'altezza massima, $v_y = 0$.

Il moto del proiettile illustrato nella Figura 4.11 è in accordo con le conclusioni raggiunte nel paragrafo precedente circa l'orientazione di \mathbf{a} . Abbiamo mostrato che \mathbf{a} è sempre diretta verso la concavità della traiettoria, e che l'angolo ϕ compreso tra \mathbf{a} e \mathbf{v} è maggiore di 90° quando il modulo della velocità è decrescente, ed è minore di 90° quando il modulo della velocità è crescente. Nel moto del proiettile, \mathbf{a} è orientata verticalmente verso il basso, e quindi è diretta verso la concavità della traiettoria parabolica. Quando il proiettile sale, il modulo della sua velocità diminuisce e $\phi > 90^\circ$. Quando il proiettile scende, il modulo della sua velocità aumenta e $\phi < 90^\circ$. Ciascuna di queste conclusioni trova riscontro nella Figura 4.11.

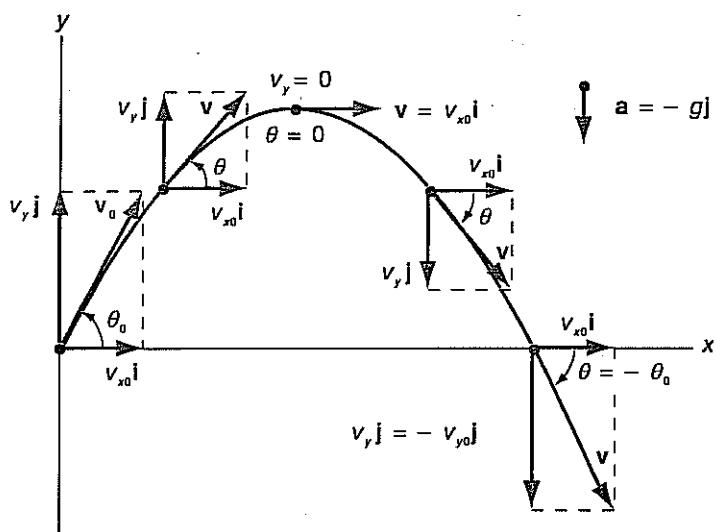


Figura 4.11

Se gli effetti della resistenza dell'aria sono trascurabili, la traiettoria di un proiettile è una parabola. Si noti che la componente x della velocità rimane costante mentre la componente y varia continuamente.

Si consideri ora l'istante t_m in cui il proiettile raggiunge la sua altezza massima. Dal momento che $v_y = 0$ quando $t = t_m$, l'Equazione (4.13) diventa $v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt_m = 0$, ossia

$$t_m = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (4.16)$$

Tempo di salita.

L'altezza massima h_m è il valore di y per $t = t_m$ (Figura 4.12). Sostituendo $y = h_m$ e $t = t_m = v_0 \sin \theta_0 / g$ nell'espressione di y data dalle Equazioni (4.14), si trova

$$h_m = \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g} \quad (4.17)$$

Altezza massima raggiunta da un proiettile.

La distanza orizzontale percorsa dal proiettile tra il punto di lancio e il punto in cui, nel moto discendente, ripassa per $y = 0$ viene chiamata *gittata orizzontale R*. In base alla simmetria della Figura 4.12, si può dire che R è il valore di x calcolato per $t = 2t_m$. Ponendo $x = R$ e $t = 2t_m = 2(v_0 \sin \theta_0) / g$, si trova che l'espressione di x data dalle Equazioni (4.14) diventa

$$R = \frac{2(v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0)}{g}$$

Gittata di un proiettile.

Questa equazione può essere semplificata mediante l'identità trigonometrica $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \quad (4.18)$$

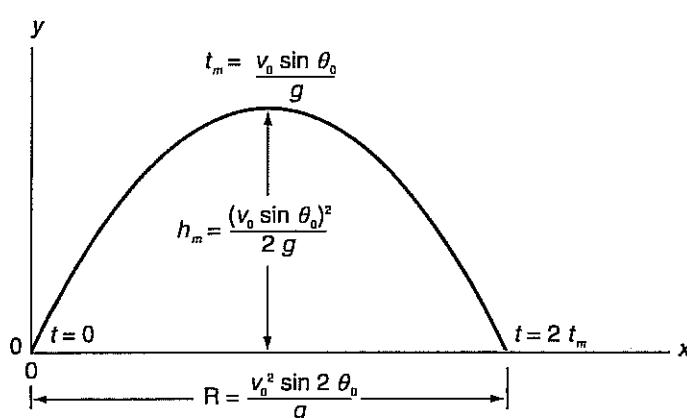


Figura 4.12

La traiettoria di un proiettile; sono messe in evidenza l'altezza massima e la gittata orizzontale.

Un esame dell'Equazione (4.18) ci consente di rispondere a un'interessante domanda: per un dato valore v_0 della velocità iniziale, con quale angolo di proiezione deve essere lanciato un proiettile perché la sua gittata sia massima? Ossia, fissata v_0 , quale angolo θ_0 rende R massima? Poiché $\sin 2\theta_0$ raggiunge il valore massimo 1 quando $2\theta_0 = 90^\circ$, R è massima quando $\theta_0 = 45^\circ$. Quindi la massima gittata è $R_m = v_0^2/g$, e questo massimo si verifica quando l'angolo di proiezione è $\theta_0 = 45^\circ$.

La Tabella 4.1 riassume le importanti equazioni che descrivono il moto dei proiettili. Queste equazioni sono più generali di quelle appena discusse perché in esse alle coordinate iniziali non vengono assegnati i valori particolari $(0, 0)$, ma i valori generici (x_0, y_0) .

Tabella 4.1 Il moto dei proiettili.

$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_0 \cos \theta_0$	$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$
$x = x_0 + (v_0 \cos \theta_0)t$	$y = y_0 + (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$
$y = y_0 + (\tan \theta_0)(x - x_0) - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}(x - x_0)^2$	

Esempio 4.3

Un sasso viene lanciato con una velocità di modulo pari a 17 m/s e con un angolo di proiezione di 58° sopra l'orizzontale. (a) Trovare un'espressione per la traiettoria del sasso. Determinare (b) il tempo impiegato a raggiungere la massima altezza e (c) la massima altezza al disopra del punto di lancio. Trascurare la resistenza dell'aria.

Soluzione

(a) In base all'Equazione (4.15), l'espressione per la traiettoria è

$$y = (\tan 58^\circ)x - \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{2(17 \text{ m/s} \cos 58^\circ)^2}x^2 = (1.6)x - (0.060 \text{ m}^{-1})x^2$$

(b) Servendoci dell'Equazione (4.16), otteniamo

$$t_m = \frac{17 \text{ m/s} \sin 58^\circ}{9.8 \text{ m/s}^2} = 1.5 \text{ s}$$

(c) In base all'Equazione (4.17), l'altezza massima al disopra del punto di lancio è

$$h_m = \frac{(17 \text{ m/s} \sin 58^\circ)}{2(9.8 \text{ m/s}^2)} = 11 \text{ m}$$

Esempio 4.4

Una mazza da baseball colpisce una palla imprimendole una velocità iniziale il cui modulo è 35 m/s, mentre l'angolo di proiezione è di 42° sopra l'orizzontale. Il recinto del fuori campo dista 115 m dalla casa base ed è alto 4 m. Trascurando la resistenza dell'aria, si calcoli se la palla oltrepassa il recinto. Si ammetta che la palla sia stata colpita a un'altezza di 1 m sopra il livello del campo attorno alla casa base.

Soluzione

Ponendo l'origine nella casa base, si ha $x_0 = 0$ e $y_0 = 1 \text{ m}$. Utilizzando l'equazione della traiettoria riportata nella Tabella 4.1, si trova il valore di y quando $x = 115 \text{ m}$:

$$y = 1 \text{ m} + (\tan 42^\circ)(115 \text{ m}) - \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{2(35 \text{ m/s} \cos 42^\circ)^2}(115 \text{ m})^2 = 9 \text{ m}$$

Dato che il recinto è alto 4 m, la palla gli passa 5 m al di sopra e il tiro è un «home run».

Esempio 4.5

Un lanciatore di giavellotto lancia l'attrezzo al massimo a 90 m avendo come angolo di lancio rispetto all'orizzontale quello che massimizza la gittata. Quale altezza massima raggiungerebbe il giavellotto se l'atleta lo lanciasse con un angolo di 90° , cioè verticalmente? Si trascuri la resistenza dell'aria.

Soluzione

Il giavellotto è soggetto solo al suo peso, cioè la sua accelerazione, in tutti i casi, è la stessa ed è l'accelerazione di gravità g . Se si prendono gli assi cartesiani di riferimento come nel Paragrafo 4.3, si ha che la componente dell'accelerazione lungo l'asse x è nulla e lungo l'asse y è $-g$, quindi le equazioni che descrivono il moto sono:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

che si possono scrivere

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

da cui, come si è visto nel testo, si ottengono $v_x = v_0 \cos \theta_0$ e $v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$. Da queste, sapendo che $\frac{dx}{dt} = v_x$ e $\frac{dy}{dt} = v_y$, si ricavano le coordinate del giavellotto in funzione del tempo: $x = (v_0 \cos \theta_0)t + x_0$ e $y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta_0)t + y_0$. Da queste, imponendo quelle che vengono chiamate le condizioni iniziali, cioè imponendo che, alla partenza, cioè all'istante $t = 0$, il giavellotto abbia velocità v_0 , angolo di lancio θ_0 e sia nell'origine degli assi, si ottiene $x = (v_0 \cos \theta_0)t$ e $y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta_0)t$. Dalla conoscenza della gittata, $R = 90$ m, e dell'angolo di lancio, $\theta_0 = 45^\circ$, si ricava v_0 :

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gR}{\sin 2\theta_0}} = 29.7 \text{ m/s}$$

Ora si può ricavare l'altezza massima che raggiunge il giavellotto, per qualunque θ_0 e quindi anche per $\theta_0 = 90^\circ$: $h_m = \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g} = 45$ m. ■

4.4 IL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Si consideri un cubetto che gira sul piatto di un giradischi. La traiettoria del cubetto è una circonferenza e il modulo v della sua velocità è costante. Se un corpo percorre una traiettoria circolare con velocità di modulo costante, il moto è detto *moto circolare uniforme*. La parola «uniforme» si riferisce appunto al valore costante del modulo della velocità. La velocità del cubetto è, in ogni punto della sua traiettoria circolare, tangente alla circonferenza e il suo verso è quello del moto. Pertanto, mentre il cubetto percorre la circonferenza, la sua velocità cambia continuamente: benché il modulo di tale velocità sia costante, il cubetto ha un'accelerazione perché varia la direzione della sua velocità.

Nel Paragrafo 4.2 abbiamo stabilito che l'accelerazione di un corpo che percorre una traiettoria curva è sempre diretta verso la concavità della traiettoria e che, se il modulo della velocità del corpo è costante, \mathbf{a} è perpendicolare a \mathbf{v} . Ciò è illustrato nella Figura 4.13 per il caso particolare di un corpo in moto circolare uniforme. La Figura 4.13a mostra due triangoli: quello dei vettori posizione, formato da \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_f e $\Delta\mathbf{r}$, e quello dei vettori velocità, formato da \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_f e $\Delta\mathbf{v}$. Dal momento che \mathbf{v}_f è perpendicolare a \mathbf{r}_f e \mathbf{v}_i è perpendicolare a \mathbf{r}_i , $\Delta\mathbf{v}$ è perpendicolare a $\Delta\mathbf{r}$. Si rammenti che la direzione di $\Delta\mathbf{v}$ coincide con quella di $\bar{\mathbf{a}}$. Quando Δt viene posto sulla retta che biseca l'angolo compreso tra \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_f , risulta diretto verso il centro della circonferenza. La Figura 4.13b rappresenta questi stessi triangoli per un intervallo di tempo più breve, e $\Delta\mathbf{v}$ è sempre diretto verso il centro della circonferenza. Nella Figura 4.13c si è passati al limite per Δt tendente a zero: $\bar{\mathbf{a}}$ è diventata \mathbf{a} , e \mathbf{a} è diretta verso il centro della circonferenza. Quindi l'accelerazione di un corpo che compie un moto circolare uniforme è diretta verso il centro della circonferenza.

Il modulo dell'accelerazione è il limite a cui tende il rapporto $|\Delta\mathbf{v}|/\Delta t$ quando Δt tende a zero:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t}$$

Definizione del moto circolare uniforme.

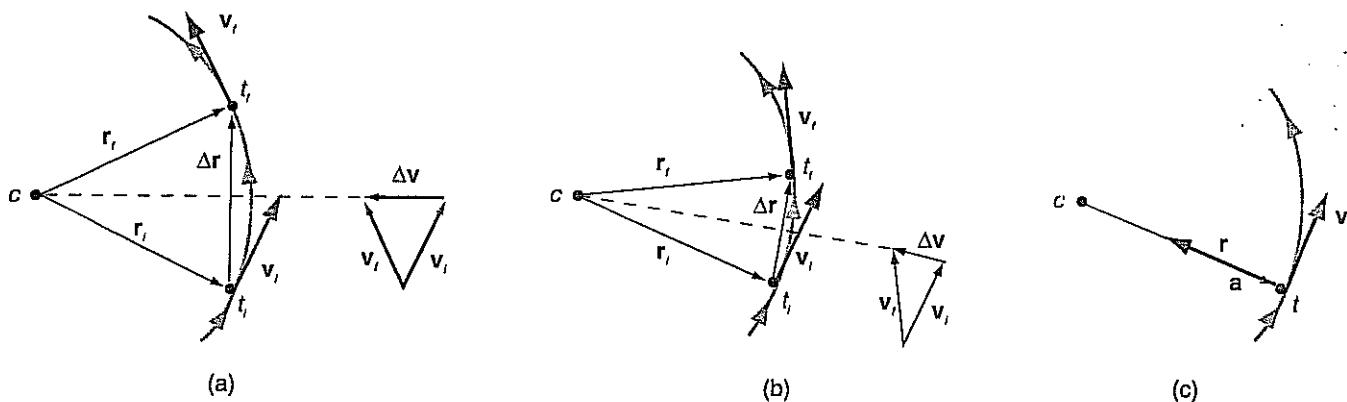


Figura 4.13 La direzione di \bar{a} coincide con quella di Δv . (a) Il vettore Δv , se viene disposto con l'origine nel punto medio tra le posizioni iniziale e finale, risulta diretto verso il centro della circonferenza. (b) Al tendere di t_f a t_i , Δv rimane diretto verso il centro. (c) Passando al limite, \bar{a} diventa a , e a risulta diretta verso il centro della circonferenza.

Si prenda nuovamente in esame la Figura 4.13a. Dato che $r_i = r_f = R$ e $v_i = v_f = v$, sia il triangolo dei vettori posizione che quello dei vettori velocità sono isosceli (avendo due lati uguali). Inoltre, siccome v_i è perpendicolare a r_i e v_f è perpendicolare a r_f , questi triangoli sono simili. In virtù della similitudine, il rapporto tra la lunghezza della base e quella di un lato è uguale nei due triangoli: $|\Delta v|/v = |\Delta r|/R$, ovvero $|\Delta v| = v|\Delta r|/R$. Quindi

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v|\Delta r|/R}{\Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t}$$

dove si è portato il fattore v/R fuori dal limite perché né v né R dipendono da Δt . Dalla Figura 4.14 si vede che, se $|\Delta r|$ è piccolo rispetto a R , allora $|\Delta r| \approx v\Delta t$ ossia $|\Delta r|/\Delta t \approx v$. Passando al limite per Δt che tende a zero, questa approssimazione diventa un'uguaglianza esatta:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = v$$

Quindi $a = (v/R)v = v^2/R$. Dal momento che questa accelerazione è diretta verso il centro della circonferenza, viene chiamata *accelerazione centripeta* (dal latino *petere* «tendere verso»). Di conseguenza, useremo il simbolo a_c per rappresentare il modulo di questa accelerazione:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

(4.19)

Figura 4.14
Quando $|\Delta r|$ è molto minore di R , l'arco $v\Delta t$ ha lunghezza approssimativamente uguale a quella di $|\Delta r|$. Passando al limite per Δt che tende a zero, l'uguaglianza diviene rigorosa.

Modulo dell'accelerazione centripeta.

Poiché v e R sono costanti, il modulo dell'accelerazione centripeta è costante. Tuttavia, mentre il corpo percorre la sua traiettoria circolare, la direzione dell'accelerazione cambia continuamente, essendo questa sempre diretta dal corpo verso il centro della circonferenza. Quindi il vettore accelerazione centripeta non è costante.

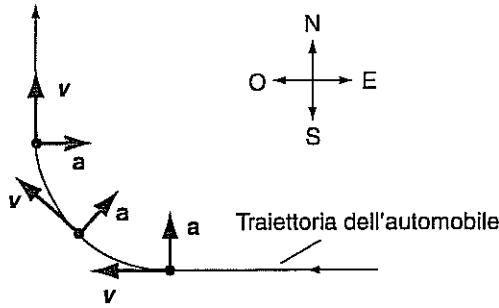
Esempio 4.6

Un'automobile che inizialmente procede verso ovest compie una svolta verso destra percorrendo un arco di circonferenza di raggio $R = 22$ m, e, alla fine della curva, è rivolta verso nord. Il modulo della velocità dell'automobile è costante, $v = 8.5$ m/s durante tutta la curva. Determinare l'accelerazione del veicolo (a) nell'istante successivo all'inizio della curva, (b) quando è a metà della curva e (c) nell'istante prima di completare la curva.

Soluzione

(a) Durante la curva l'automobile si muove di moto circolare uniforme, e quindi il modulo della sua accelerazione è $a_r = v^2/R = (8.5 \text{ m/s})^2/22 \text{ m} = 3.3 \text{ m/s}^2$. Il percorso del veicolo è rappresentato nella

Figura 4.15. Quando l'automobile inizia la curva il centro della circonferenza è a nord. Pertanto l'accelerazione è di 3.3 m/s^2 verso il nord. (b) Nell'istante in cui l'automobile è a metà della curva, il centro della traiettoria è verso nordest: quindi l'accelerazione è di 3.3 m/s^2 verso nord-est. (c) Per analoghe ragioni, immediatamente prima che la curva sia terminata, l'accelerazione è di 3.3 m/s^2 verso est.



Esempio 4.7

Si consideri un satellite artificiale della Terra che si muove su un'orbita circolare con velocità di modulo costante. Il tempo necessario per una rivoluzione completa è detto *periodo* T . (a) Dimostrare che il modulo dell'accelerazione centripeta del satellite può essere espresso come $a_c = 4\pi^2 R/T^2$. (b) Un satellite che orbita attorno alla Terra a un'altezza $h = 200 \text{ km}$ sopra la superficie ha un periodo $T = 1.47 \text{ h} = 5.30 \times 10^3 \text{ s}$. Che valore ha a_c per questo satellite? Il raggio della Terra è $R_t = 6.37 \times 10^6 \text{ m} = 6.37 \text{ Mm}$.

Soluzione

(a) Il modulo costante della velocità del satellite è pari al rapporto tra la distanza percorsa durante una rivoluzione ($2\pi R$) e il tempo impiegato sempre per una rivoluzione (T): $v = 2\pi R/T$. Sostituendo questo valore nell'Equazione (4.19), si ha

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi R/T)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

(b) Il centro della traiettoria circolare del satellite è il centro della Terra, cosicché

$$\begin{aligned} R &= R_t + h = 6.37 \text{ Mm} + 200 \text{ km} \\ &= 6.37 \text{ Mm} + 0.20 \text{ Mm} = 6.57 \text{ Mm} \end{aligned}$$

Per questo satellite dunque si ha

$$a_c = 4\pi^2 \frac{6.57 \text{ Mm}}{(5.30 \times 10^3 \text{ s})^2} = 9.22 \text{ m/s}^2$$

Si noti che il modulo dell'accelerazione del satellite è minore di g alla superficie della Terra. ■

Un concetto importante che viene usato molto frequentemente è quello di *velocità angolare*. Vediamo di darne una definizione semplice e intuitiva. Si consideri il punto materiale che compie un moto circolare e uniforme e si consideri l'angolo $\Delta\varphi$ formato da \mathbf{r}_f e da \mathbf{r}_i ; è facile vedere che al trascorrere del tempo, cambiando il vettore posizione \mathbf{r} , varia l'angolo; se si fa il $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ si ottiene la derivata dell'angolo rispetto al tempo, $\frac{d\varphi}{dt}$, che è una misura di quanto rapidamente cambia nel tempo l'angolo durante il moto del punto. È ovvio che la rapidità con cui cambia questo angolo sia legata alla rapidità con cui cambia la posizione del punto sulla circonferenza, cioè alla sua velocità. Infatti, se si considera il fatto che l'angolo al centro $\Delta\varphi$ (misurato in radianti) e l'arco della circonferenza Δs sono legati dalla relazione $\Delta s = R\Delta\varphi$ e che per intervalli molto piccoli (si ricordi che si considera sempre il limite per intervalli temporali che tendono a zero) $|\Delta\mathbf{r}| = \Delta s$, passando al limite per Δt che tende a zero si ha che $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}v$. Questa nuova grandezza viene chiamata *velocità angolare* e usualmente viene indicata con ω , quindi,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}v \quad (4.20)$$

Figura 4.15

Esempio 4.6: un'automobile che inizialmente procede verso ovest compie una svolta a destra di 90° lungo un arco di circonferenza. Subito dopo l'inizio della curva, \mathbf{v} è rivolta verso ovest e \mathbf{a} è rivolta verso nord; a metà della curva, \mathbf{v} è diretta verso nordovest e \mathbf{a} verso nordest; immediatamente prima della fine della curva, \mathbf{v} è rivolta verso nord e \mathbf{a} verso est.

La velocità angolare.

È utile introdurre una velocità angolare vettoriale: il vettore velocità angolare ω è quel vettore che ha come modulo la velocità angolare scalare definita qui sopra, $\frac{d\varphi}{dt}$, con direzione quella perpendicolare al piano in cui avviene il moto del punto e come verso quello di avanzamento di una vite che ruota nel senso di moto del punto materiale.

4.5 ACCELERAZIONE CENTRIPETA (O NORMALE) E ACCELERAZIONE TANGENZIALE

Come si è visto nel Paragrafo 4.2, la velocità di un punto materiale ha sempre la direzione della tangente alla traiettoria di tale punto. Allora si può scrivere, in modo del tutto generale, il vettore velocità come il prodotto di uno scalare per un versore che esprima la tangente alla curva-traiettoria:

$$\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{t}} \quad (4.21)$$

dove $\hat{\mathbf{t}}$ è il versore della retta tangente alla traiettoria con verso uguale al verso di percorrenza, assunto come positivo, e dove v viene chiamata *velocità scalare*. In generale, sia v sia $\hat{\mathbf{t}}$ saranno funzioni del tempo, in quanto la velocità può avere direzione e intensità che cambiano al trascorrere del tempo. L'accelerazione del punto è definita come la derivata della velocità, quindi

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v \hat{\mathbf{t}})}{dt} \quad (4.22)$$

e, per le proprietà delle derivate,

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v \hat{\mathbf{t}}) = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} \quad (4.23)$$

Questa espressione dell'accelerazione è del tutto generale e quindi vale anche nello spazio tridimensionale. L'accelerazione, che misura le variazioni nel tempo della velocità (per unità di tempo), si può suddividere in due parti: una che misura le variazioni del modulo della velocità e che è tangenziale alla traiettoria, e l'altra che misura le variazioni della direzione della velocità e che è centripeta. Si dimostra, infatti, che $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt}$ risulta essere uguale a $\frac{v}{\rho} \hat{\mathbf{n}}$ dove $\hat{\mathbf{n}}$ è un versore perpendicolare a $\hat{\mathbf{t}}$ giacente nel piano istantaneo del moto (in un intervallo di tempo molto piccolo il punto percorre un tratto di traiettoria che, essendo molto piccolo, giace in un piano, che viene chiamato *osculatore*), e ρ è il *raggio di curvatura* della traiettoria nell'istante considerato (per raggio di curvatura in un punto della traiettoria si intende il raggio di quel cerchio, detto *cerchio osculatore*, che meglio combacia con la traiettoria stessa in quel punto). Il verso di $\hat{\mathbf{n}}$ è quello verso la concavità della curva, cioè verso il centro del cerchio osculatore (centripeto). Risulta quindi che l'accelerazione di un punto materiale si può sempre scrivere così:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}} \quad (4.24)$$

Ne viene immediatamente che, nel caso di moto circolare e uniforme, in cui $\rho = R$ e $v = \text{costante}$, l'accelerazione è $\mathbf{a} = \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{n}}$, cioè l'accelerazione è centripeta e uguale alla (4.19). Generalizzando la definizione di velocità angolare data dalla (4.20) per il caso di una traiettoria qualunque, si ha

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{\rho} \quad (4.25)$$

Quindi il modulo dell'accelerazione centripeta si può anche scrivere come $\omega^2 \rho$, che ovviamente diviene $\omega^2 R$ nel moto circolare su una circonferenza.

4.6 MOTI RELATIVI

Abbiamo visto come la descrizione del moto dei corpi dipenda dal sistema di riferimento da cui l'osservatore misura la posizione e i cambiamenti di posizione dei corpi stessi. La descrizione del moto dei pianeti è un chiaro esempio di come traiettoria, velocità e accelerazione di un corpo dipendano dal sistema di riferimento; infatti è facile capire come il moto di un pianeta, per esempio Venere, osservato dalla Terra sia molto diverso, e più complicato, dello stesso moto osservato dal Sole. Allora capita spesso, per ragioni di convenienza o di semplicità, di dover ricavare la descrizione del moto di una particella rispetto a un sistema di riferimento, conoscendo il moto del punto rispetto a un altro sistema di riferimento e il moto di questo sistema rispetto al primo. Nell'esempio del pianeta Venere, il problema è: noto il moto di Venere rispetto alla Terra e noto il moto della Terra rispetto al Sole, trovare il moto di Venere rispetto al Sole. Per meglio capire come si può affrontare tale problema cominciamo da un esempio semplice.

Un pedone è fermo ad aspettare l'autobus sull'orlo del marciapiede sul lato sud di una strada orientata in direzione est-ovest, come mostra la Figura 4.16. Un automobilista procede verso est al volante della sua vettura alla velocità di 20 m/s. Poco prima di passare accanto al pedone, mentre si trova a nordovest di questi, l'automobilista getta fuori dal finestrino una buccia di banana con una velocità le cui componenti sono (secondo l'automobilista) di 10 m/s verso sud e 10 m/s verso ovest. La buccia di banana va a finire addosso al pedone.

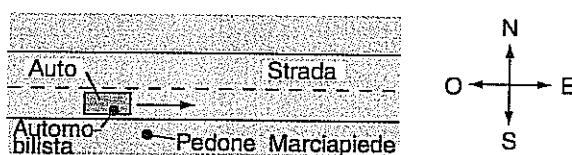


Figura 4.16

L'automobilista procede verso est al volante della sua vettura. Il pedone è fermo sul marciapiede.

I due in seguito si incontrano, e il pedone accusa l'automobilista di avergli tirato la buccia di banana. L'automobilista si protesta innocente, sostenendo in perfetta buona fede di aver gettato la buccia verso sudovest, mentre, al momento del lancio, il pedone si trovava a sudovest del punto di lancio. Questa situazione mette in luce il fatto che due osservatori in moto con velocità costante l'uno rispetto all'altro, se misurano entrambi la velocità di un corpo, ottengono dalle loro misure risultati diversi.

Serviamoci della Figura 4.17 per comprendere la ragione del disaccordo tra il pedone e l'automobilista. Nella figura sono rappresentati due sistemi di riferimento, quello dell'osservatore *A* (il pedone) e quello dell'osservatore *B* (l'automobilista). Ciascuno degli osservatori è in quiete nel proprio riferimento. I due riferimenti sono in moto l'uno rispetto all'altro con velocità costante diretta lungo la comune direzione *x*. (Il versore *i* è rivolto verso est, mentre il versore *j* è rivolto verso nord.)

Per distinguere le misure effettuate da differenti osservatori faremo uso di una notazione a due indici: \mathbf{r}_{PA} sarà il vettore posizione del punto materiale *P* (la buccia) secondo l'osservatore *A*; vale a dire che il primo indice si riferisce all'oggetto la cui posizione viene misurata, mentre il secondo si riferisce all'osservatore che effettua la misura.

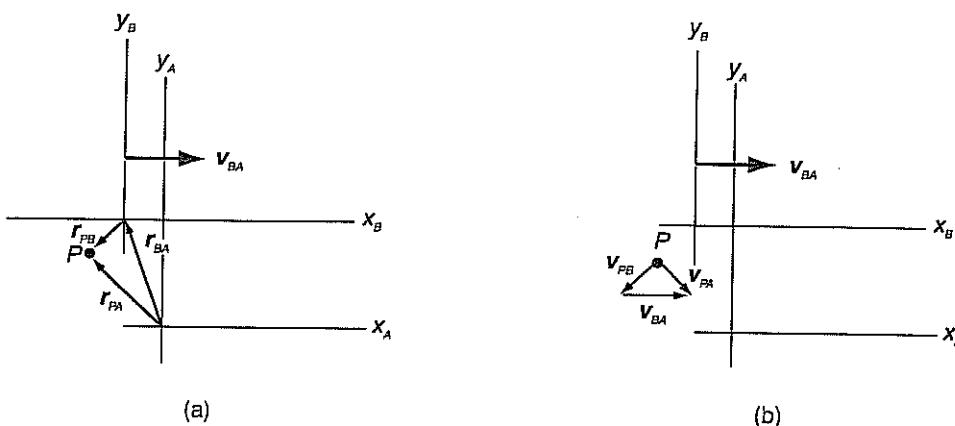


Figura 4.17

Due osservatori nei riferimenti *A* e *B* rispettivamente misurano (a) il vettore posizione e (b) la velocità del punto materiale *P*.

Quindi \mathbf{r}_{PA} è il vettore posizione di P rispetto ad A . Una notazione analoga verrà usata per le velocità: per esempio, \mathbf{v}_{BA} è la velocità dell'osservatore B rispetto all'osservatore A . Se l'osservatore B si muove, secondo A , nella direzione $+x$ con una velocità di modulo v , come mostra la figura, allora $\mathbf{v}_{BA} = vi$. Ciò significa che A si sta muovendo nella direzione $-x$ secondo B : $\mathbf{v}_{AB} = -vi$. In questa notazione a due indici, invertire l'ordine degli indici equivale a mutare il segno della grandezza: $\mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB}$.

In base alla Figura 4.17a, il vettore posizione \mathbf{r}_{PA} di P rispetto ad A è dato da

Vettori posizione relativi.

$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{PB} + \mathbf{r}_{BA} \quad (4.2)$$

ove \mathbf{r}_{PB} è il vettore posizione di P rispetto a B e \mathbf{r}_{BA} è il vettore posizione di B rispetto ad A . La velocità di P rispetto ad A si trova calcolando la derivata di \mathbf{r}_{PA} rispetto a t :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_{PA} = \mathbf{v}_{PA}$$

Analogamente,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_{PB} = \mathbf{v}_{PB} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{BA} = \mathbf{v}_{BA}$$

Pertanto, derivando l'Equazione (4.20) rispetto a t , si trova

Velocità relative.

$$\mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA} \quad (4.27)$$

Questo risultato è illustrato nella Figura 4.17b.¹

Tornando all'esempio del pedone e dell'automobilista, quest'ultimo ha gettato la buccia di banana verso sudovest, $\mathbf{v}_{PB} = (-10 \text{ m/s})\mathbf{i} + (-10 \text{ m/s})\mathbf{j}$, mentre l'automobilista viaggiava verso est, $\mathbf{v}_{BA} = (20 \text{ m/s})\mathbf{i}$. Quindi la velocità della buccia rispetto al pedone era

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{PA} &= (-10 \text{ m/s})\mathbf{i} + (-10 \text{ m/s})\mathbf{j} + (20 \text{ m/s})\mathbf{i} \\ &= (10 \text{ m/s})\mathbf{i} + (-10 \text{ m/s})\mathbf{j} \end{aligned}$$

Ciò significa che la velocità della buccia rispetto al pedone era diretta verso sudest. Dal momento che il pedone era a sudest del punto di lancio, la buccia era diretta proprio contro di lui. Nonostante l'innocenza dell'automobilista, la buccia ha colpito l'orecchio del pedone con una velocità di modulo

$$\sqrt{(10 \text{ m/s})^2 + (-10 \text{ m/s})^2} = 14 \text{ m/s}$$

Si consideri ora l'accelerazione di un corpo rispetto a due osservatori in moto relativo con velocità costante. L'accelerazione \mathbf{a}_{PA} di P rispetto ad A si trova derivando \mathbf{v}_{PA} rispetto a t :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_{PA} = \mathbf{a}_{PA}$$

Analogamente

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_{PB} = \mathbf{a}_{PB} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{a}_{BA}$$

Tuttavia, siccome \mathbf{v}_{BA} è costante, la sua derivata temporale è nulla: $\mathbf{a}_{BA} = 0$. Perciò la derivata dell'Equazione (4.27) rispetto a t è

Accelerazioni relative.

$$\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB} \quad (4.28)$$

¹ L'aspetto forse più sorprendente dell'Equazione (4.27) è il fatto che essa non vale per velocità relative che siano una frazione significativa della velocità della luce ($3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$). A queste elevate velocità, l'Equazione (4.27) deve essere opportunamente sostituita.

Ciò significa che ciascun osservatore, misurando l'accelerazione della particella, per-
viene al medesimo risultato. Si noti che questa conclusione si basa sulla premessa che
la velocità relativa degli osservatori sia costante.

Nel caso più generale in cui \mathbf{v}_{BA} non è costante l'Equazione (4.28) diventa

$$\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB} + \mathbf{a}_{BA} \quad (4.29)$$

Se, in generale, il sistema di riferimento da dove l'osservatore B osserva il moto del punto P si muove di moto qualunque rispetto al sistema dell'osservatore A , allora le relazioni generali fra le velocità e le accelerazioni misurate dai due osservatori sono

$$\mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB} + \mathbf{a}_{BA} + \mathbf{a}_C \quad (4.31)$$

dove \mathbf{a}_C è detta *accelerazione di Coriolis* o *complementare* e dipende dalla velocità angolare del sistema B rispetto ad A , ω_{BA} , e dalla velocità del punto P rispetto a B . Più esattamente \mathbf{a}_C ha come modulo $v_{PB}\omega_{BA} \sin \theta$, dove θ è l'angolo compreso fra i vettori \mathbf{v}_{PB} e $\boldsymbol{\omega}$, come direzione quella perpendicolare a entrambi questi vettori e come verso quello di avanzamento di una vite che ruoterebbe il vettore $\boldsymbol{\omega}$ per sovrapporsi a \mathbf{v}_{PB} .

Accelerazione di Coriolis.

Esempio 4.8

Carlo si trova su un aeroplano che vola, rispetto al suolo, con una velocità orizzontale costante di 75 m/s verso est. Enrica, che è ferma a terra, osserva Carlo che getta un pacchetto dal finestrino dell'aereo, come mostra la Figura 4.18. Nell'istante del lancio, il pacchetto è in quiete rispetto a Carlo. Si descriva il moto del pacchetto secondo (a) Carlo e (b) Enrica. L'origine del riferimento si trovi, sia per Carlo sia per Enrica, nel punto di lancio all'istante del lancio e quest'istante sia $t = 0$. Inoltre, il versore \mathbf{j} sia diretto verticalmente verso l'alto e il versore \mathbf{i} verso est. Si trascuri la resistenza dell'aria.

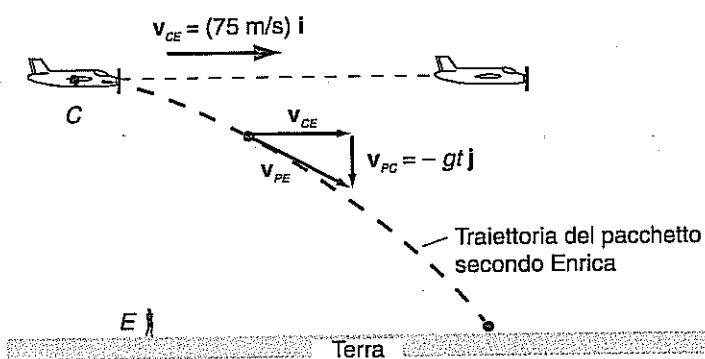


Figura 4.18

Esempio 4.8. Carlo lascia andare un pacchetto dall'aereo. Dal punto di vista di Enrica, la traiettoria del pacchetto è una parabola.

Soluzione

(a) Secondo Carlo, il pacchetto viene lasciato cadere a partire dalla quiete, e quindi esso cade verticalmente verso il basso in linea retta e colpisce il suolo esattamente sotto l'aereo. L'accelerazione del pacchetto (P) rispetto a Carlo (C) è $\mathbf{a}_{PC} = -g\mathbf{j}$. La componente x della velocità del pacchetto è nulla durante tutto il moto, e la componente y della sua velocità è $-gt$, cosicché la velocità del pacchetto rispetto a Carlo è $\mathbf{v}_{PC} = -gt\mathbf{j}$.

(b) Dal momento che la loro velocità relativa è costante ($\mathbf{a}_{CE} = 0$), Enrica (E) è d'accordo con Carlo per quanto riguarda l'accelerazione del pacchetto ($\mathbf{a}_{PE} = -g\mathbf{j}$), ma i due misurano velocità differenti. La velocità \mathbf{v}_{PE} del pacchetto rispetto a Enrica è $\mathbf{v}_{PE} = \mathbf{v}_{PC} + \mathbf{v}_{CE}$, ove \mathbf{v}_{CE} è la velocità di Carlo rispetto a Enrica. La velocità di Carlo rispetto a Enrica coincide con la velocità dell'aereo rispetto al suolo: $\mathbf{v}_{CE} = (75 \text{ m/s})\mathbf{i}$. Quindi

$$\mathbf{v}_{PE} = (75 \text{ m/s})\mathbf{i} - gt\mathbf{j}$$

Questa espressione della velocità corrisponde a quella ottenuta per il moto del proiettile. Secondo Enrica la traiettoria del pacchetto è una parabola, come mostra la Figura 4.18. ■

RIEPILOGO

Paragrafo 4.2 Velocità e accelerazione

In due dimensioni il vettore posizione è

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (4.1)$$

e il vettore velocità è

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

La velocità è parallela alla retta tangente alla traiettoria e ha il verso del moto. L'accelerazione è

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j}$$

Nel caso di una traiettoria curva, \mathbf{a} è sempre rivolta verso la concavità della traiettoria stessa. Se il modulo della velocità aumenta, l'angolo ϕ compreso tra \mathbf{v} e \mathbf{a} è minore di 90° ; se il modulo della velocità diminuisce, ϕ è maggiore di 90° .

Paragrafo 4.3 Accelerazione costante: il moto dei proiettili

Il moto dei proiettili quando la resistenza dell'aria è trascurabile è

QUESITI

- 4.1 Che tipo di relazione (ammesso che ve ne siano) sussiste sempre tra le direzioni (a) del vettore posizione e della velocità di un corpo, (b) del suo spostamento e della sua velocità media, (c) di una retta tangente alla traiettoria e della velocità, (d) della variazione della velocità e dell'accelerazione media, (e) di una retta tangente alla traiettoria e dell'accelerazione?
- 4.2 Se un corpo si sta muovendo in linea retta, che tipo di relazione c'è sempre (ammesso che ve ne siano) tra la direzione della traiettoria del corpo e quella della sua accelerazione?
- 4.3 Se un corpo si muove su una traiettoria curva, che tipo di relazione c'è sempre (ammesso che ve ne siano) tra la direzione in cui la traiettoria si curva e la direzione dell'accelerazione del corpo?
- 4.4 È possibile che un corpo acceleri e nondimeno abbia (a) modulo della velocità costante, (b) una traiettoria rettilinea, (c) velocità costante? Spiega.
- 4.5 Se la velocità di un corpo varia e si annulla a un certo istante, la sua accelerazione deve essere nulla in quell'istante? Può essere nulla in quell'istante? Può essere nulla durante un intervallo di tempo che comprenda quell'istante?
- 4.6 È possibile che la velocità di un oggetto abbia direzione opposta alla sua accelerazione? Se è possibile, fai un esempio. Se no, spiega perché.
- 4.7 Se un corpo subisce un'accelerazione durante un intervallo di tempo, la sua velocità può essere nulla in un istante di questo intervallo? Può essere nulla durante tutto l'intervallo? Fai degli esempi che avvalorino le tue risposte.
- 4.8 Abbiamo visto che, se l'accelerazione di un corpo è costante, la sua velocità varia linearmente con il tempo mentre il vettore posizione varia con il quadrato del
- tempo. Supponiamo ora che l'accelerazione vari linearmente con il tempo. Quale sarà la variazione nel tempo (a) della velocità e (b) del vettore posizione?
- 4.9 Nell'elenco che segue compaiono diversi oggetti e, accanto a ciascuno, la gittata della traiettoria seguita quando esso viene lanciato nell'aria con un'opportuna velocità a un angolo di 45° rispetto a un terreno piano. Supponiamo di voler predire la posizione degli oggetti durante il loro moto con un errore non superiore al 10 per cento. Per quali di essi è lecito trascurare la resistenza dell'aria?
- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| (a) Palla da golf, 5 m | (e) Volano, 3 m |
| (b) Palla da golf, 100 m | (f) Pallina da ping-pong, 3 m |
| (c) Palla da baseball, 5 m | (g) Frisbie, 10 m |
| (d) Palla da baseball, 100 m | (h) Boomerang, 10 m |
- 4.10 Una studentessa dice che un corpo che si muove nell'aria cade se la sua accelerazione è rivolta verso il basso. Un'altra afferma che un oggetto cade se la sua velocità è diretta verso il basso. Su quale parte della traiettoria di un proiettile le due studentesse si troveranno d'accordo? Su quale parte non saranno d'accordo? Quale delle due definizioni del termine «cadere» preferisci?
- 4.11 Un proiettile viene lanciato con una velocità iniziale di $(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (2 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Trascurando la resistenza dell'aria, si calcoli la sua velocità nel punto più alto della traiettoria. Qual è la sua accelerazione nel medesimo punto?
- 4.12 Un proiettile viene lanciato con una velocità iniziale $\mathbf{v}_0 = v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j}$. Si trascuri la resistenza dell'aria. La gittata del proiettile dipende (a) da v_{x0} ; (b) da v_{y0} ? L'altezza massima raggiunta dal proiettile dipende (c) da v_{x0} ; (d) da v_{y0} ?
- 4.13 Un sasso viene scagliato nell'aria a un angolo di 40° rispetto all'orizzontale. La sua velocità è parallela alla sua accelerazione in qualche istante nel corso del moto? Se sì, quando? Se no, spiega perché. La sua velocità è

- perpendicolare alla sua accelerazione in qualche istante nel corso del moto? Se sì, quando? Se no, spiega perché.
- 4.14 Supponi di tirare un sasso a una bottiglia che comincia a cadere da ferma nell'istante in cui lasci andare il sasso. Per colpire la bottiglia, devi mirare al di sopra di essa, al di sotto, oppure verso di essa? Spiega.
- 4.15 È possibile che un corpo si muova con velocità di modulo costante e al tempo stesso acceleri? Se sì, fai un esempio. Se no, spiega.
- 4.16 Se un corpo si muove lungo un percorso curvo, la sua velocità può essere costante? E il modulo della sua velocità può essere costante? La sua accelerazione può essere costante? Il modulo della sua accelerazione può essere costante? Se la risposta a qualcuna di queste domande è affermativa, fai degli esempi.
- 4.17 Supponiamo che un corpo si muova lungo una circonferenza con velocità di modulo costante e che l'origine sia nel centro della circonferenza. Qual è la relazione (ammesso che ve ne sia una) tra le direzioni (a) del vettore posizione e della velocità del corpo, (b) del vettore posizione e dell'accelerazione, (c) della velocità e dell'accelerazione?
- 4.18 In un moto circolare uniforme, (a) il modulo della velocità è costante? (b) La velocità è costante? (c) Il modulo dell'accelerazione è costante? (d) L'accelerazione è costante? Spiega.
- 4.19 Una monetina posta sul piatto di un giradischi in rotazione si muove di moto circolare uniforme con una velocità di modulo pari a 0.8 m/s e un'accelerazione di modulo pari a 4 m/s^2 . La monetina viene spostata sul piatto in modo che il raggio della sua traiettoria circolare risulti dimezzato. Quali sono i moduli della sua velocità e della sua accelerazione dopo lo spostamento?
- 4.20 Una monetina posta sul piatto di un giradischi in rotazione si muove di moto circolare uniforme con una velocità di modulo pari a 0.4 m/s e un'accelerazione di modulo pari a 2 m/s^2 . La velocità di rotazione del piatto viene raddoppiata di modo che il periodo del moto della monetina risulta dimezzato. Che valori hanno in seguito a ciò i moduli della velocità e dell'accelerazione?
- 4.21 *Accelerazione di un pendolo.* Un pendolo è formato da un corpo pesante, come un sasso, posto all'estremità di un filo e libero di oscillare avanti e indietro in un piano verticale (Figura 4.19). Il corpo pesante è chiamato *peso del pendolo*, e la sua traiettoria è un arco di circonferenza. Nella figura, il peso è istantaneamente in quiete quando si trova all'estrema destra. Supponendo che, nel suo moto oscillatorio, esso ritorni verso sinistra, quale freccia rappresenta meglio la direzione della sua accelerazione in ciascuna delle posizioni indicate? E quando oscilla verso destra?
- 4.22 Si consideri un corpo che si trovi nel punto P di ciascuna delle traiettorie rappresentate nella Figura 4.20. (a) Nella Figura 4.20a, quali sono i segni algebrici di v_x e di v_y ? (b) Nella Figura 4.20b, quali sono i segni algebrici di a_x e di a_y , se il modulo della velocità del corpo sta aumentando? (c) Nella Figura 4.20c, quali sono i segni algebrici di a_x e di a_y , se il modulo della velocità del corpo sta diminuendo?

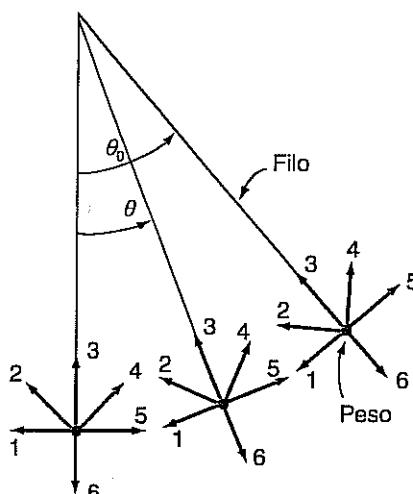


Figura 4.19 Quesito 4.21: tre posizioni di un pendolo che oscilla in un piano verticale.

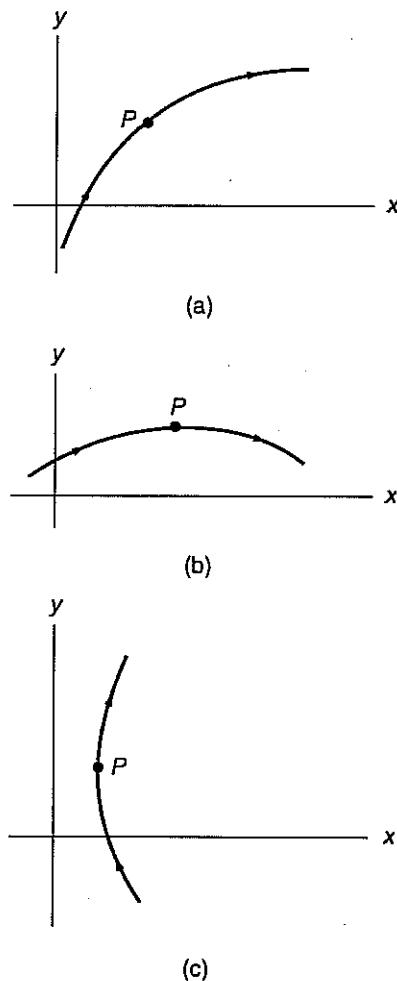


Figura 4.20 Quesito 4.22.

- 4.23 Supponiamo che un corpo percorra una traiettoria a spirale muovendosi con velocità di modulo costante (Figura 4.21). La velocità del corpo è costante? La sua accelerazione è costante? È costante il modulo della sua accelerazione? Se il modulo dell'accelerazione non è costante sta aumentando o diminuendo?

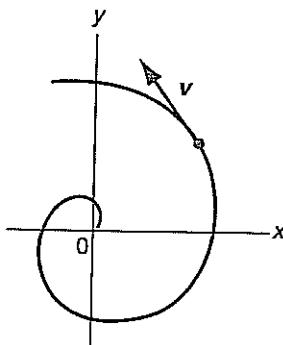


Figura 4.21 Quesito 4.23.

- 4.24** Come è noto, la Terra compie un giro attorno al Sole in un anno. Dal nostro punto di vista terrestre, il Sole ritorna alla posizione iniziale rispetto allo sfondo delle stelle lontane in un anno. Che cosa vedremmo se invece fosse il Sole a girare attorno alla Terra?
- 4.25** (a) Supponiamo che due osservatori in moto con velocità costante l'uno relativamente all'altro misurino entrambi la velocità di un corpo. Troveranno il medesimo risultato? Se sì, spiega. Se no, in che cosa differiranno i loro risultati? (b) Supponiamo che gli osservatori misurino l'accelerazione del corpo: troveranno il

medesimo risultato? Se sì, spiega. Se no, in che cosa differiranno i loro risultati?

- 4.26** Quando l'accelerazione è costante, i moti lungo l'asse x lungo l'asse y risultano indipendenti l'uno dall'altro. Vale a dire che a_x non influenza v_y né y , e a_y non influenza v_x né x . Quindi, quando la resistenza dell'aria ha un effetto trascurabile sul moto di un proiettile, i moti lungo l'asse x e lungo l'asse y sono indipendenti. Ciò è ancora vero quando la resistenza dell'aria non è trascurabile? Spiega.
- 4.27** L'automobilista ha colpito intenzionalmente il pedone con la buccia di banana? (*Suggerimento:* L'automobilista era uno studente molto bravo in fisica.)

- 4.28** Si completi la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
v		Vettore	
a_x			m/s^2
y		Componente	
v_0	Modulo della velocità iniziale		
a_c		Scalare	
v_{BA}			

ESERCIZI

Paragrafo 4.2 Velocità e accelerazione

- 4.1** Un amante del jogging corre su una pista circolare di raggio 45.0 m (Figura 4.22). Posta l'origine di un sistema di coordinate xy nel centro del cerchio, con il versore $+i$ rivolto verso est e il versore $+j$ rivolto verso nord, sia $t = 0.0$ s l'istante in cui le coordinate (x, y) del corridore sono $(45.0 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$. (a) Per $t = 16.8$ s, il corridore è esattamente a nordest dell'origine. Qual è il suo vettore posizione? (b) Per $t = 33.6$ s, è esattamente a nord dell'origine. Qual è il suo spostamento tra $t = 0.0$ s e $t = 33.6$ s? (c) Che spazio ha percorso tra $t = 0.0$ s e $t = 33.6$ s?

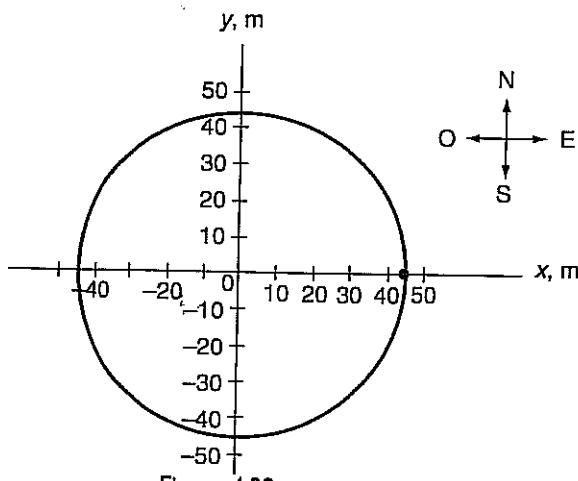


Figura 4.22 Esercizio 4.1.

- 4.2** Il corridore dell'esercizio precedente si trova esattamente a nordovest dell'origine per $t = 50.4$ s.
(a) Qual è il suo vettore posizione? (b) Qual è il suo

spostamento tra $t = 0.0$ s e $t = 50.4$ s? (c) Che spazio ha percorso tra $t = 0.0$ s e $t = 50.4$ s?

- 4.3** (a) Qual è la velocità media dell'amante del jogging dell'Esercizio 4.1 tra $t = 0.0$ s e $t = 33.6$ s? (b) Per $t = 8.4$ s la sua posizione è $(41.6 \text{ m}, 17.2 \text{ m})$, e per $t = 25.2$ s la sua posizione è $(17.2 \text{ m}, 41.6 \text{ m})$. Qual è la sua velocità media in questo intervallo di tempo?
- 4.4** Il corridore dell'Esercizio 4.1 effettua un giro completo in 134.4 s. (a) Se il modulo della sua velocità è costante, che valore ha tale modulo? (b) Qual è la sua velocità per $t = 16.8$ s? Si confronti questa risposta con quelle dell'esercizio precedente.
- 4.5** Un'automobile percorre la traiettoria orizzontale rappresentata nella Figura 4.23 da A a K . I tratti compresi tra C ed E e tra G ed I sono archi di circonferenza di raggi 200 m e 300 m rispettivamente.

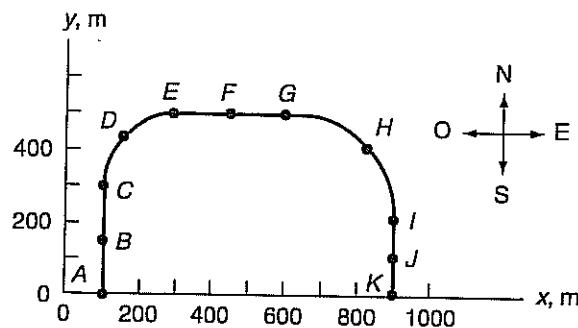


Figura 4.23 Esercizio 4.5.

L'automobile è ferma in A , accelera uniformemente tra A e C , viaggia con velocità di modulo costante pari a 23 m/s tra C e I , quindi rallenta con accelerazione

- costante fino ad arrestarsi in *K*. (a) Qual è la velocità dell'automobile in *B*? (b) Qual è la sua accelerazione in *B*? (c) Qual è la sua velocità in *D*? (d) Qual è la sua accelerazione media tra *C* ed *E*?
- 4.6** Qual è la velocità dell'automobile dell'esercizio precedente (Figura 4.23) (a) in *F*; (b) in *H*; (c) in *J*? Qual è la sua accelerazione (d) in *F* e (e) in *J*? (f) Qual è la sua accelerazione media tra *G* e *I*?
- 4.7** Il vettore posizione di un oggetto è $\mathbf{r} = [(3.5 \text{ m/s})t + 4.2 \text{ m}] \mathbf{i} + [(5.1 \text{ m/s})t] \mathbf{j}$. (a) Determinare \mathbf{v} . (b) Costruire un grafico della traiettoria dell'oggetto tra $t = 0.0 \text{ s}$ e $t = 3.0 \text{ s}$. Riportare un punto ogni 0.5 s e disegnare la traiettoria. Rappresentare \mathbf{v} in diversi punti della traiettoria stessa per mostrare la direzione del moto.
- 4.8** Le coordinate di un corpo sono date da $x = (1.9 \text{ m/s}^2) t^2$ e $y = (0.47 \text{ m/s}^3) t^3 - 5.6 \text{ m}$. Quali sono (a) le componenti della velocità del corpo e (b) le componenti della sua accelerazione?
- 4.9** In un particolare punto del percorso di un ottovolante, la rotaia forma un angolo di 29° con l'orizzontale. Se il vagonecino delle montagne russe passa in questo punto con una velocità di modulo pari a 16 m/s , quali sono (a) la componente orizzontale e (b) la componente verticale della sua velocità?
- 4.10** Mentre un aeroplano prende quota dopo il decollo, la componente orizzontale e quella verticale della sua velocità sono rispettivamente di 97 m/s e 22 m/s . Quali sono i valori (a) del modulo della velocità dell'aereo e (b) dell'angolo che la sua velocità forma con l'orizzontale?
- Paragrafo 4.3 Accelerazione costante: il moto dei proiettili²**
- 4.11** Una palla da biliardo rotola verso est scendendo lungo un'asse diritta che forma un angolo di 15° con l'orizzontale. Durante tutto il moto il modulo dell'accelerazione della biglia è di 1.81 m/s^2 . L'asse *x* è disposto orizzontalmente con il versore $+i$ rivolto verso est, mentre il versore $+j$ è diretto verticalmente verso l'alto. $t = 0$ corrisponde all'istante in cui la biglia viene lasciata libera nell'origine. (a) Scrivere le espressioni di a_x , a_y , v_x , v_y , x e y . (b) Ripetere la parte (a) con i diretto lungo il piano inclinato in senso discendente e j perpendicolare a i . (c) Il moto è in una o in due dimensioni? Spiega.
- 4.12** Un proiettile ha una velocità iniziale di modulo pari a 26 m/s , e l'angolo di proiezione nel punto di lancio è di 48° . All'istante $t = 2.1 \text{ s}$ dopo il lancio, (a) qual è la distanza del proiettile dal punto di lancio? (b) Qual è il modulo della sua velocità? (c) Qual è la direzione del suo moto rispetto all'orizzontale?
- 4.13** Un sasso viene lanciato in aria con una velocità iniziale di modulo pari a 36 m/s e un angolo di proiezione di 62° . L'origine è nel punto di lancio e $t = 0$ corrisponde all'istante del lancio. Scrivere espressioni di v_x , v_y , x e y in funzione del tempo t .
- 4.14** Un lanciatore di baseball scaglia la palla con una velocità iniziale di modulo pari a 40 m/s . Nell'istante del lancio la velocità è diretta orizzontalmente e la palla si trova a

2.1 m da terra e a 20 m (in direzione orizzontale) dalla casa base. (a) Quanto tempo impiega per arrivare a sorvolare la base? (b) Quando la sorvola, qual è la sua altezza da terra?

- 4.15** Un pallone da football lanciato su un campo piano percorre una distanza orizzontale di 17 m prima di toccare terra. Il punto di lancio è a 1.5 m di altezza da terra e l'angolo di proiezione è di 16° . Qual è il modulo della velocità iniziale della palla?
- 4.16** Una palla da golf viene colpita in modo da farle acquistare una velocità iniziale di modulo 105 m/s , mentre l'angolo di proiezione è di 34° . Il terreno è piano. Determinare (a) l'istante in cui la palla raggiunge l'altezza massima, (b) la durata del volo, (c) l'altezza massima e (d) la gittata.
- 4.17** La gittata di un proiettile è di 48 m e il modulo della sua velocità iniziale è di 33 m/s . (a) Qual è l'angolo di proiezione? (b) C'è un altro angolo di proiezione che sia compatibile con questi valori di R e di v_0 ? Se sì, qual è? Se no, spiega.
- 4.18** Una palla viene lanciata da un balcone con una velocità iniziale di modulo pari a 31 m/s e un angolo di proiezione di 24° . Il punto di lancio è 8.2 m al di sopra del terreno (che è piano). (a) Che distanza orizzontale c'è tra il punto di lancio e il punto in cui la palla tocca terra? (b) Qual è la distanza in linea retta tra il punto di lancio e il punto in cui la palla tocca terra?
- 4.19** Un fucile ad aria compressa spara un piombino con una velocità iniziale di modulo pari a 52 m/s . Al momento dello sparo la canna del fucile ha un'inclinazione di 75° sopra l'orizzontale, mentre l'estremità della canna è a 1.9 m d'altezza dal suolo. Il terreno è piano. (a) Quanto tempo dopo lo sparo il piombino raggiungerà la massima altezza? (b) Qual è la massima altezza del piombino sopra il suolo? (c) Qual è la distanza orizzontale percorsa dal piombino tra l'estremità della canna e il punto in cui esso tocca terra?
- 4.20** Si costruisca un grafico della traiettoria di un proiettile. Sia $x_0 = 0.0 \text{ m}$, $y_0 = 0.0 \text{ m}$, $v_0 = 40.0 \text{ m/s}$ e $\theta_0 = 50.0^\circ$. Si riporti un punto ogni 0.5 s e lo si contrassegnerà con il corrispondente valore di t . Si tracci una curva passante per i punti così ottenuti. Si determini t_m e si rappresenti \mathbf{v} nel grafico per $t = 0.5t_m$, $1.0t_m$, $1.5t_m$ e $2.0t_m$.
- 4.21** Nella Figura 4.24 sono rappresentate le traiettorie di un sasso e di una bottiglia. La bottiglia è stata lasciata cadere

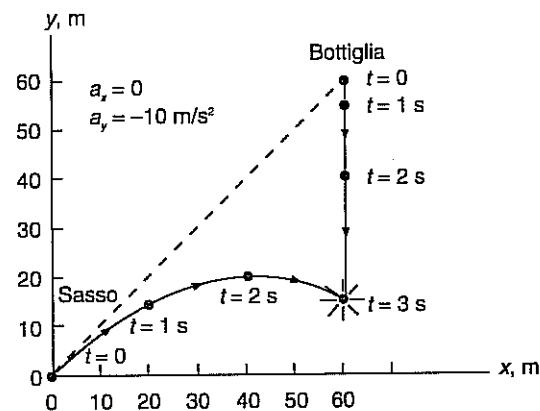


Figura 4.24 Esercizio 4.21.
a partire dalla quiete nell'istante in cui il sasso è stato

² Negli esercizi di questo paragrafo si trascurino gli effetti della re-

lanciato. Si è assunto per g il valore 10.0 m/s^2 in modo da aver a che fare con numeri tondi. Si noti che la velocità iniziale del sasso era diretta verso la bottiglia. In base ai dati tratti dal grafico, si determinino v_0 e θ_0 per il sasso.

Paragrafo 4.4 Il moto circolare uniforme

- 4.22 Un'automobile percorre una curva circolare di raggio $R = 63 \text{ m}$ e il modulo della sua velocità rimane costante, pari a $v = 12 \text{ m/s}$. Qual è il modulo della sua accelerazione centripeta?
- 4.23 Una monetina gira sul piatto di un fonografo alla distanza di 130 mm dal perno. Qual è l'intensità dell'accelerazione centripeta della monetina quando il piatto ruota (a) a 33.3 giri/min e (b) a 45 giri/min ?
- 4.24 Il corridore dell'Esercizio 4.1 (Figura 4.22) corre con velocità di modulo costante e fa un giro in 134.4 s . Quali sono il modulo e la direzione della sua accelerazione centripeta quando si trova (a) a nord dell'origine e (b) a nordovest dell'origine? (c) In ciascun caso si esprima la sua accelerazione in termini dei vettori unitari.
- 4.25 Determinare il modulo e la direzione della velocità dell'automobile dell'Esercizio 4.5 (Figura 4.23) (a) in D e (b) in H . (c) Esprimere in ciascun caso la sua accelerazione in termini dei versori.
- 4.26 Un corpo si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza il cui centro coincide con l'origine di un sistema di coordinate xy . Si tracci un grafico della traiettoria circolare e si rappresentino i vettori velocità e accelerazione con la coda in corrispondenza della posizione del corpo, quando le coordinate (x, y) di questo sono (a) $(R, 0)$; (b) $(0, R)$; (c) $(-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$. Il corpo ruota in senso antiorario. (d) Si ripeta l'esercizio supponendo che il corpo ruoti in senso orario.
- 4.27 Un ragazzo fa girare sopra la propria testa un sasso legato all'estremità di una corda, in modo che esso percorra una circonferenza orizzontale. Il raggio della circonferenza è di 0.96 m e la durata di una rivoluzione è di 1.1 s . Che valore hanno i moduli (a) della velocità e (b) dell'accelerazione del sasso?
- 4.28 L'orbita della Luna attorno alla Terra è pressoché circolare, con un raggio di $3.85 \times 10^8 \text{ m}$ e un periodo di 27.3 giorni . Qual è il modulo dell'accelerazione centripeta della Luna nel suo moto attorno alla Terra?
- 4.29 (a) Il raggio della Terra è di $6.37 \times 10^6 \text{ m}$. Determinare l'accelerazione centripeta rispetto al centro della Terra di un punto sulla sua superficie all'equatore, in m/s^2 e in unità g . (b) Il raggio dell'orbita della Terra attorno al Sole è di $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$. Determinare l'accelerazione centripeta della Terra rispetto al Sole, in m/s^2 e in unità g . (c) Misurazioni di carattere astronomico indicano che il sistema solare si muove su un'orbita pressoché circolare attorno al centro della Via Lattea (la nostra galassia) con un raggio di $2.8 \times 10^{20} \text{ m}$ e una velocità di modulo pari a $2.5 \times 10^5 \text{ m/s}$. Determinare l'accelerazione centripeta del sistema solare rispetto al centro della galassia, in m/s^2 e in unità g . (d) Determinare i rapporti tra queste accelerazioni.

- 4.30 Nell'acceleratore del Fermilab a Batavia (Illinois), i protoni si muovono con una velocità prossima a quella della luce ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$) lungo una traiettoria circolare di raggio 1 km. Determinare l'accelerazione centripeta di uno di questi protoni (a) in m/s^2 e (b) in unità g .
- 4.31 (a) Dimostrare che, per un corpo che si muove di moto circolare uniforme, $a_c = 2\pi v/T$. (b) Un go-kart compie un giro di una pista circolare ogni 5.1 s con una velocità di modulo costante pari a 11 m/s . Qual è la sua accelerazione centripeta?
- 4.32 Una ruota panoramica da luna park ha un raggio di 7.5 m e compie un giro ogni 5.7 s . Quali sono il modulo e la direzione dell'accelerazione di un passeggero quando questi si trova (a) nel punto più alto, e (b) nel punto più basso?

Paragrafo 4.5 Moti relativi

- 4.33 Un automobilista A viaggia verso sud sulla corsia di destra di un'autostrada con una velocità di modulo pari a 22 m/s . Un altro automobilista B viaggia sulla corsia di sinistra nella stessa direzione con una velocità di modulo pari a 28 m/s . Quali sono (a) il modulo della velocità e (b) la velocità dell'automobilista B rispetto ad A ? Quali sono (c) il modulo della velocità e (d) la velocità dell'automobilista A rispetto a B ?
- 4.34 Un osservatore A misura velocità e accelerazione di un oggetto P , ottenendo $(3 \text{ m/s})\mathbf{i}$ e $(4 \text{ m/s}^2)\mathbf{i}$, rispettivamente. L'osservatore B si muove con una velocità costante rispetto ad A : $\mathbf{v}_{BA} = (2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (-1 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Secondo B , quali sono (a) la velocità e (b) l'accelerazione di P ?
- 4.35 Un treno viaggia verso est con una velocità di 3.4 m/s . Servendosi di una bussola per orientarsi, un uomo che si trova su un vagone scoperto del treno cammina verso nordest con una velocità di modulo pari a 1.2 m/s rispetto al vagone. Qual è la velocità dell'uomo rispetto alla Terra?
- 4.36 La bussola di un aeroplano indica che esso è diretto verso ovest e il suo indicatore di velocità nell'aria segnala che la sua velocità rispetto all'aria ha modulo 175 m/s . Rispetto al suolo, la velocità del vento è di 42 m/s verso nord. Scelto un sistema di coordinate, si determini la velocità dell'aereo rispetto al suolo.
- 4.37 La velocità di crociera di un traghetto rispetto all'acqua è di 7.8 m/s . La nave attraversa un fiume alla volta di una destinazione che si trova sull'altra sponda, esattamente a nord del punto di partenza. La distanza tra punto di partenza e destinazione è di 1.8 km . La corrente del fiume ha la velocità di 2.3 m/s verso est. Si orienti $+i$ verso est e $+j$ verso nord. (a) Si determini la velocità del traghetto rispetto all'acqua in modo tale che esso raggiunga la destinazione navigando in linea retta. (b) Quanto tempo impiega il traghetto per fare la traversata? (c) Si ripeta il calcolo con una velocità della corrente di 4.6 m/s verso est.

PROBLEMI

(N.B.: Salvo avviso contrario, si trascuri la resistenza dell'aria nei problemi relativi al moto dei proiettili.)

- 4.1 Le coordinate di un corpo sono date da $x = R \cos \omega t$ e $y = R \sin \omega t$, ove R e ω sono costanti. (a) Dimostrare che le componenti della velocità sono $v_x = -R\omega \sin \omega t$ e $v_y = R\omega \cos \omega t$. (b) Dimostrare che le componenti dell'accelerazione sono $a_x = -R\omega^2 \cos \omega t$ e $a_y = -R\omega^2 \sin \omega t$. (c) Dimostrare che $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$. (d) Costruire un grafico della traiettoria del corpo in un sistema di coordinate xy , per il caso in cui $R = 45.0$ m e $\omega = 46.75$ mrad/s. Riportare un punto ogni 8.4 s tra $t = 0.0$ s e $t = 134.4$ s e tracciare la curva. (e) Calcolare \mathbf{v} e \mathbf{a} per $t = 16.8$ s e rappresentare nel grafico i vettori con l'origine in corrispondenza della posizione del corpo in tale istante. (f) Di che tipo di moto si tratta?
- 4.2 Dimostrare che, per un corpo che si muove con accelerazione costante, (a) $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$ e (b) $v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$: la dimostrazione può essere ottenuta eliminando t tra le Equazioni (4.10) e (4.12). (c) Combinando i risultati delle parti (a) e (b) dimostrare che $v^2 = v_0^2 + 2[a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0)]$. (d) Dimostrare che, per il moto di un proiettile, $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$. (e) Il proiettile viene lanciato dal punto di coordinate (2.4 m, 1.5 m) con una velocità iniziale di modulo pari a 28 m/s. Utilizzando il risultato ottenuto nella parte (d) trovare il modulo della velocità del proiettile nella posizione (37.6 m, 25.4 m).
- 4.3 (a) Dimostrare che, per un proiettile lanciato dall'origine, l'angolo di proiezione θ_0 è dato da $\theta_0 = \tan^{-1}(4h_m/R)$. (b) Qual è l'angolo di proiezione di un proiettile lanciato dall'origine, se l'altezza massima è di 6.2 m e la gittata è di 32 m? (c) Qual è l'angolo di proiezione di un proiettile la cui altezza massima è pari alla gittata? (d) Qual è l'altezza massima per un proiettile la cui gittata è R_m ?
- 4.4 Si dimostri che la gittata di un proiettile il cui angolo di proiezione sia $45^\circ - \Delta\theta$ è uguale a quella di un proiettile il cui angolo di proiezione sia $45^\circ + \Delta\theta$, purché v_0 non cambi. Si dimostri cioè che R è simmetrica rispetto a $\theta_0 = 45^\circ$. (*Suggerimento:* si usino le derivate di R rispetto a θ_0 .)
- 4.5 Una sciatrice salta dal trampolino con una velocità di 34 m/s lungo l'orizzontale (Figura 4.25). Il terreno è a una distanza verticale di 4.2 m al disotto del punto di lancio e il pendio forma un angolo di 25° con l'orizzontale. Trascurando la resistenza dell'aria, si determini la distanza tra il punto di lancio e il punto in cui la saltatrice tocca terra. (una saltatrice esperta dispone il proprio corpo in modo da ricevere dall'aria una «spinta ascensionale» che ne prolunga il volo.)
- 4.6 Un aeroplano compie una picchiata verticale a una velocità di 174 m/s al di sopra di un terreno piano. Supponiamo che l'aereo esca dalla picchiata lungo una traiettoria circolare e che la massima accelerazione che esso può tollerare sia di 8.0 g. Si determini l'altezza minima alla quale l'aereo deve cominciare a uscire dalla picchiata per evitare di sfracellarsi al suolo. Si consideri

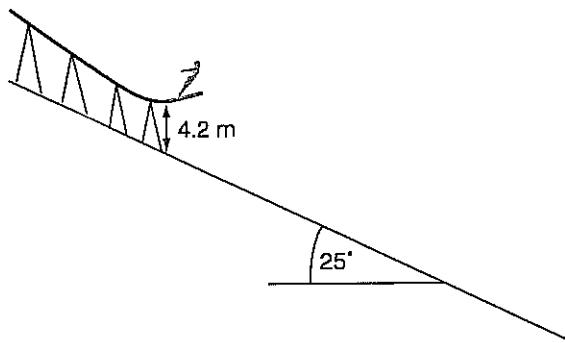


Figura 4.25 Problema 4.5.

- 4.7 Si dimostri che per un proiettile l'angolo compreso tra la velocità e l'asse x è dato, in funzione del tempo, da

$$\theta(t) = \tan^{-1} \frac{v_{y0} - gt}{v_{x0}}$$

- 4.8 Nell'Esempio 4.7 abbiamo mostrato che il modulo dell'accelerazione centripeta può essere scritto nella forma $a_c = 4\pi^2 R/T^2$, ove T è il periodo (il tempo necessario per compiere un giro). L'accelerazione centripeta di un satellite della Terra è dovuta all'attrazione gravitazionale della Terra. Un'espressione di tale accelerazione è $a_c = gR_t^2/R^2$, ove R è il raggio dell'orbita e R_t è il raggio della Terra ($R_t = 6.37 \times 10^6$ m). (a) Dimostrare che la relazione tra il raggio dell'orbita di un satellite e il suo periodo è

$$R^3 = \frac{gR_t^2}{4\pi^2} T^2 = (1.0 \times 10^{13} \text{ m}^3/\text{s}^2) T^2$$

- (b) Un'orbita geostazionaria è un'orbita sopra l'equatore con un periodo di 24 h.³ In tale situazione un satellite si mantiene esattamente al di sopra di un punto della superficie terrestre. Dimostrare che l'altezza di un'orbita geostazionaria al di sopra di un punto della superficie della Terra all'equatore è $h = 5.6 R_t$.

- 4.9 (a) Si utilizzi il triangolo dei vettori velocità di Figura 4.13a per dimostrare che il modulo dell'accelerazione media di un corpo in moto circolare uniforme può essere scritto

$$|\bar{\mathbf{a}}| = \frac{v^2}{R} \frac{2[\sin(\Delta\theta/2)]}{\Delta\theta}$$

- ove $\Delta\theta$ è l'angolo compreso tra \mathbf{v}_i e \mathbf{v}_f espresso in radianti. Si usi l'espressione ottenuta nella parte (a) per determinare $|\bar{\mathbf{a}}|$ quando $\Delta\theta$ è pari a (b) $\pi/2$; (c) $\pi/4$; (d) $\pi/10$; (e) $\pi/1000$. (f) Che valore ha

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta}$$

- 4.10 Un podista deve andare da A a B nella Figura 4.26. A causa del diverso tipo di terreno, il modulo della sua velocità è differente dalle due parti dell'asse x . Sia v_1 il modulo della sua velocità sopra l'asse x , e v_2 quello sotto l'asse x . Inoltre, i due segmenti di retta che formano il

³ Più esattamente, il periodo di un'orbita geostazionaria è di 23^h

percorso siano caratterizzati dagli angoli θ_1 e θ_2 indicati in figura. Dimostrare che la durata della corsa è minima quando la relazione tra gli angoli è $v_2 \sin \theta_1 = v_1 \sin \theta_2$. (Suggerimento: scrivere un'espressione del tempo necessario per percorrere ciascuno dei segmenti rettilinei, sommare questi tempi, e uguagliare a zero la derivata rispetto a x di tale somma. Seguire il percorso così determinato rende minimo il tempo perché il corridore percorre un tratto più lungo nella regione in cui la sua velocità è maggiore e un tratto più breve nella regione in cui la sua velocità è minore.)

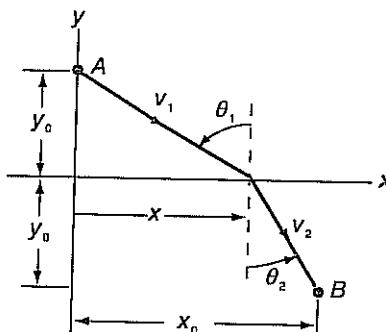


Figura 4.26 Problema 4.10.

- 4.11 Un battitore di baseball colpisce la palla in un punto che si trova 1 m sopra la base, in modo che $v_0 = 33 \text{ m/s}$ e $\theta_0 = 32^\circ$. La direzione orizzontale della traiettoria della palla è esattamente quella in cui si trova un giocatore che dista 118 m dalla base. 0.50 s dopo che la palla è stata colpita, quest'ultimo giocatore comincia a correre verso la base con accelerazione costante. Quale deve essere il modulo della sua accelerazione, se deve afferrare la palla quando questa viene a trovarsi a 1 m da terra?

- 4.12 (a) Supponiamo di definire $|\Delta r| = |\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i|$ e $\Delta r = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$. Si dimostri che queste grandezze sono diverse scrivendole in termini delle coordinate. Si disegni un grafico di un corpo che compie un moto circolare uniforme. Si consideri il corpo in due punti della sua traiettoria e si rappresentino $|\Delta r|$ e Δr . (b) Supponiamo di definire $|\Delta v| = |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i|$ e $\Delta v = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$. Si dimostri che queste grandezze sono diverse scrivendole in termini delle componenti della velocità. Si disegni un grafico di un corpo che compie un moto circolare uniforme. Si consideri il corpo in due punti della sua traiettoria e si rappresentino $|\Delta v|$ e Δv .

- 4.13 Una ragazza ancora la sua barca nel mezzo di un fiume (Figura 4.27). La corrente del fiume è di 0.85 m/s verso est. (a) Determinare il tempo necessario alla ragazza per raggiungere a nuoto un punto 50 m a est della barca e

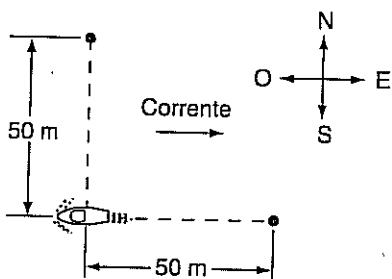


Figura 4.27 Problema 4.13.

tornare indietro. La velocità con cui la ragazza nuota è di

1.43 m/s rispetto all'acqua. (b) Determinare il tempo necessario alla ragazza per raggiungere a nuoto un punto 50 m a nord della barca e tornare indietro. (c) Quale dei due percorsi ha richiesto un tempo più lungo, e di quanto?

- 4.14 Un ragazzo sta in piedi su un vagone scoperto che si muove con una velocità di 8.2 m/s rispetto al terreno. Il ragazzo lancia un sasso verticalmente verso l'alto (dal suo punto di vista) con una velocità di modulo 12.5 m/s . (a) Qual è la velocità iniziale del sasso secondo una donna che è in piedi per terra? Il ragazzo riprende il sasso quando questo ritorna alla stessa altezza dalla quale lo aveva lanciato. Qual è la gittata del sasso (b) secondo il ragazzo e (c) secondo la donna? Qual è la durata del volo del sasso (d) secondo il ragazzo ed (e) secondo la donna? Si trascuri la resistenza dell'aria.

- 4.15 Quando un corpo cade nell'aria (o in un altro fluido), il modulo della sua velocità tende asintoticamente a un valore limite v_f a causa dell'attrito. Supponiamo che un corpo che cade verticalmente abbia una componente d'accelerazione data da

$$a_y = -g + bv^2$$

ove $b = 0.002 \text{ m}^{-1}$. Determinare v_f . (Suggerimento: al tendere della velocità del corpo alla velocità limite, la sua accelerazione tende a zero.)

- 4.16 *Il puntamento in artiglieria.* (a) Sparando un colpo corto rispetto al bersaglio e un colpo lungo, un artigliere può «azzerare» in modo che il terzo colpo vada sul bersaglio. Supponiamo che un colpo d'artiglieria cada a una distanza ΔR_1 prima del bersaglio quando la canna del cannone forma un angolo θ_{01} con l'orizzonte, e che un altro colpo cada a una distanza ΔR_2 oltre il bersaglio quando l'angolo è θ_{02} . Dimostrare che l'angolo θ_0 che fa sì che il colpo successivo colpisca il bersaglio è

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{\Delta R_1 \sin 2\theta_{02} + \Delta R_2 \sin 2\theta_{01}}{\Delta R_2 + \Delta R_1}$$

- (b) Con la canna a un angolo di 15.20° un colpo d'artiglieria risulta corto di 130 m rispetto al bersaglio, mentre con un angolo di 15.85° un secondo colpo risulta lungo di 160 m. Qual è l'angolo che farà sì che il terzo colpo arrivi sul bersaglio?

- 4.17 Quando le gocce di pioggia arrivano in prossimità della superficie della Terra, per gli effetti combinati della gravità e della resistenza dell'aria esse raggiungono una velocità costante detta *velocità limite*. Supponiamo che una pioggia costante cada verticalmente rispetto alla Terra (in assenza di vento). Un automobilista che viaggia con una velocità di modulo 10 m/s misura l'angolo che la pioggia forma con la verticale e trova un valore di 50° . (a) Qual è la velocità limite delle gocce rispetto alla Terra? (b) Qual è la velocità limite delle gocce rispetto all'automobile in movimento?

- 4.18 I pianeti girano attorno al Sole su orbite pressoché circolari e tutte le orbite planetarie giacciono quasi nello stesso piano. Il raggio dell'orbita della Terra è $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$, mentre il raggio e il periodo del moto orbitale di Venere sono rispettivamente $1.1 \times 10^{11} \text{ m}$ e 0.61 anni . Qual è il modulo dell'accelerazione di Venere rispetto

alla Terra quando si trovano (a) dalla stessa parte del Sole e (b) da parti opposte del Sole?

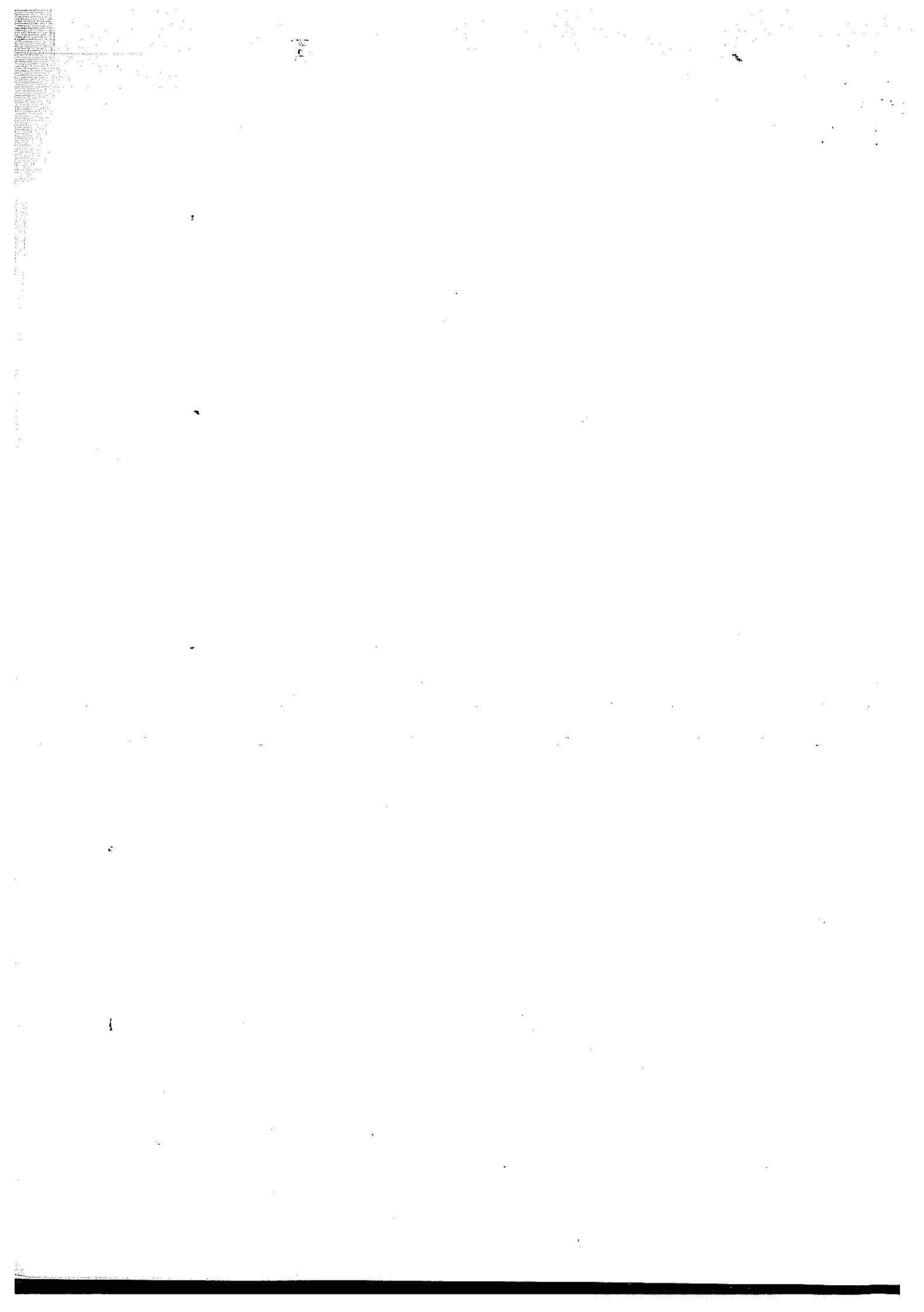
- 4.19 *La cicloide.* Se una ruota rotola con una velocità di modulo costante senza strisciare su una superficie piana, le coordinate di una particella sul margine della ruota in funzione del tempo t sono

$$x = vt - R \sin \frac{vt}{R} \quad y = R - R \cos \frac{vt}{R}$$

ove R è il raggio della ruota e v è il modulo della velocità del centro della ruota. Il sistema di coordinate è solidale con la superficie, con il semiasse $+x$ disposto lungo la

superficie nella direzione del moto e il semiasse $+y$ orientato verticalmente verso l'alto. (a) Calcolare x e y negli istanti $t = 0, T/4, T/2, \dots, 3T/2$, ove $T = 2\pi R/v$, e tracciare un grafico della traiettoria della particella.

Questa traiettoria è chiamata *cicloide* e sarà nuovamente discussa nel Paragrafo 12.9. (b) Determinare v_x e v_y come funzioni del tempo e rappresentare nel grafico v agli istanti $t = 0, T/2, T$ e $3T/2$. (c) Determinare a_x e a_y come funzioni del tempo e rappresentare nel grafico a agli istanti $t = 0, T/2, T$ e $3T/2$. (d) Utilizzando a_x e a_y ottenute in (c), mostrare che $a = v^2/R$.



LE LEGGI DEL MOTO DI NEWTON OVVERO I TRE PRINCIPI DELLA DINAMICA

5.1 INTRODUZIONE

Alla base della meccanica ci sono tre principi fondamentali, noti come *leggi del moto di Newton*. Sir Isaac Newton (1642-1727) espose al mondo questi principi nel suo celebre trattato *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principi matematici della filosofia naturale), che fu pubblicato nel 1686, e a cui spesso ci si riferisce chiamandolo semplicemente i *Principia*. In questo capitolo introdurremo queste leggi, di cui faremo largo uso in gran parte del presente libro. Inoltre in questo capitolo discuteremo una forza ben nota, il peso, e indicheremo dei procedimenti per la determinazione del moto di un corpo.

Fino ad ora abbiamo descritto il moto di un punto materiale, introducendo alcune grandezze (posizione, velocità, accelerazione) utili a caratterizzare quantitativamente il moto stesso riferito a un determinato sistema di riferimento. Non ci siamo minimamente occupati dei motivi per cui un corpo si muove in un modo piuttosto che in un altro, cioè non abbiamo studiato le relazioni fra il moto e le cause che lo determinano. La dinamica, alla cui base ci sono le leggi di Newton, si occupa proprio di tale studio, cioè stabilisce le leggi generali che, date le cause del moto (le forze), consentono di prevedere il moto dei corpi, e viceversa permettono di ricavare le cause del moto (le forze responsabili di quel moto) dall'osservazione delle sue caratteristiche. Si potrebbe anche dire che, dal punto di vista logico formale, la dinamica studia le relazioni quantitative fra cause (forze) ed effetti (caratteristiche dei moti, cioè velocità e accelerazione dei corpi) nei fenomeni meccanici.

5.2 FORZA E MASSA

Le leggi del moto di Newton sono intrinsecamente legate ai concetti di forza e di massa. È utile essersi fatti un'idea di questi due concetti prima di affrontare le leggi. D'altra parte, siccome forza e massa sono definite per mezzo delle leggi di Newton, ci troviamo di fronte a un dilemma: come è possibile discutere le leggi di Newton senza prima aver chiare in mente le definizioni di forza e massa? Ma come è possibile definire la forza e la massa senza prima enunciare le leggi di Newton? La via che seguiremo sarà quella di dare anzitutto della forza e della massa una descrizione qualitativa, in termini dell'esperienza quotidiana, e di utilizzare queste nozioni intuitive nell'analisi preliminare delle leggi. Una volta formulate queste ultime, enunceremo le definizioni formali della forza e della massa.

La massa. La *massa* di un corpo è una misura della sua resistenza alle variazioni della velocità. Un carrettino da bambini in moto lungo un marciapiede orizzontale è più difficile da fermare quando è carico di mattoni che quando è vuoto: il sistema carrettino più carico ha massa maggiore nel primo caso che nel secondo. La massa è una grandezza scalare ed è additiva; ossia, se si uniscono due oggetti di massa m_1 e m_2 , la massa totale m_{12} del sistema è

$$m_{12} = m_1 + m_2$$

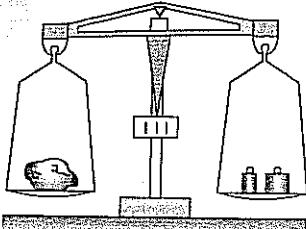


Figura 5.1
Una bilancia a bracci uguali.

In laboratorio la massa dei corpi viene spesso misurata per mezzo di una bilancia a bracci uguali tramite confronto con «pesi» campione di massa nota (Figura 5.1). Vedremo nel Paragrafo 5.6, il peso di un corpo è proporzionale alla sua massa.

Esempio 5.1

La densità di massa¹ ρ di una sostanza è il rapporto tra la massa m di una data quantità della sostanza e il volume V occupato da tale quantità: $\rho = m/V$. L'acqua ha una densità tale che un litro (L) di acqua abbia massa pari a circa un chilogrammo. Il litro è il volume di un cubo con lo spigolo 0.1 m. (a) Determinare la densità di massa dell'acqua in unità SI (kg/m^3). (b) Qual è la massa di una quantità d'acqua contenuta in un bicchiere che ha un diametro di 80 mm quando è riempito fino ad un'altezza di 100 mm?

Soluzione

(a) La densità ρ dell'acqua è

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1 \text{ kg}}{(0.1 \text{ m})^3} = 1 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$$

Un metro cubo di acqua ha una massa di 1000 kg.

(b) Il volume dell'acqua contenuta nel bicchiere è il volume V di un cilindro di raggio R e altezza h :

$$V = \pi R^2 h = \pi (40 \text{ mm})^2 (100 \text{ mm}) = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

La massa m dell'acqua è

$$m = \rho V = (1 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3)(0.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 0.5 \text{ kg}$$

È un fatto degno di nota che Newton considerasse la densità di massa un concetto intuitivo e familiare; infatti, all'inizio dei *Principia* egli definì la massa come prodotto della densità di massa per il volume.

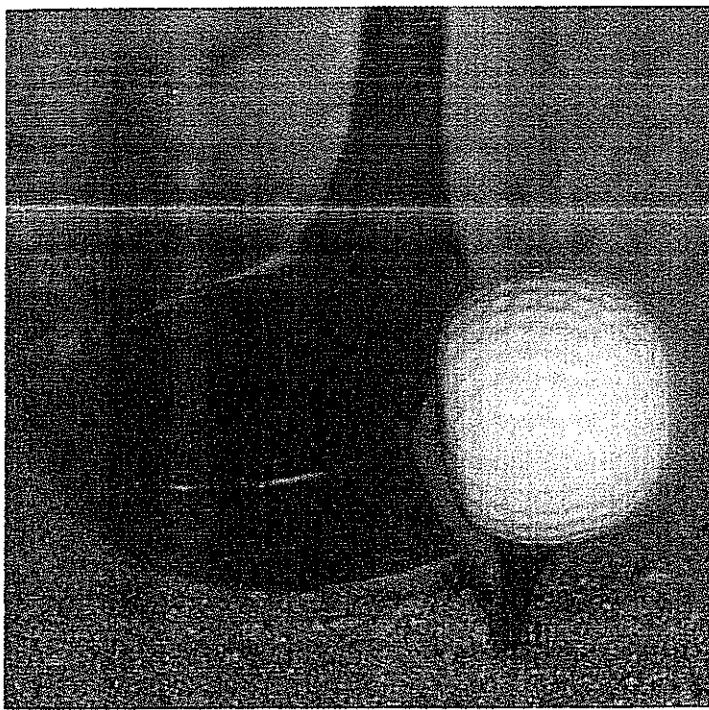
La forza. Nel corso del processo di formazione delle idee di Newton circa la meccanica, il concetto di forza ebbe una gestazione particolarmente travagliata. Dagli appunti di Newton sappiamo che una delle sue prime definizioni fu «la forza è la pressione, la spinta di un corpo su un altro». Nel linguaggio quotidiano moderno, una *forza* è una spinta o una attrazione. Se si spinge un oggetto con la mano, si esercita su di esso una forza. Una forza di questo tipo è l'effetto del contatto diretto tra la mano e il corpo, ed è un esempio di *forza di contatto*. Un'altra forza familiare è il *peso* dei corpi. Il peso di un corpo è la *forza gravitazionale* esercitata dalla Terra su quel corpo. Studieremo in modo approfondito la forza gravitazionale nel Capitolo 7. Altri tipi di forza esistono in natura, come quella elettrica e magnetica che saranno trattate nel prossimo capitolo.

In base all'esperienza quotidiana, possiamo individuare quattro proprietà delle forze:

1. Dal momento che una spinta o un'attrazione hanno tanto un'intensità che una direzione, siamo indotti a pensare che le forze siano grandezze vettoriali. Nel prossimo paragrafo, daremo fondamento a questa previsione.
2. Le forze si presentano a coppie: se un corpo *A* esercita una forza su un corpo *B*, allora anche *B* esercita una forza su *A*. Per esempio, quando una mazza da golf colpisce una palla (Figura 5.2), la mazza esercita una forza sulla palla, ma anche la palla esercita una forza sulla mazza.
3. Una forza può produrre l'accelerazione di un corpo. Se si dà un calcio a un pallone, la velocità di questo varia mentre il piede è a contatto con esso.
4. Una forza può deformare un oggetto. Come si può vedere nella Figura 5.2, la palla viene deformata dalla forza che la mazza esercita su di essa. Anche la mazza viene deformata, ma essendo più dura della palla, la sua deformazione non è altrettanto evidente.

Quattro proprietà delle forze.

¹ In genere chiamata semplicemente «densità». Nel seguito useremo questa terminologia abbreviata (N.d.T.)

**Figura 5.2**

Fotografia ad alta velocità di una palla da golf nel momento in cui viene colpita da una mazza. La palla viene momentaneamente deformata e accelerata. (Dottor Harold Edgerton/M.I.T., Cambridge, Mass.)

La proprietà 4, ossia la capacità di una forza di produrre la deformazione di un corpo, viene spesso utilizzata per la misura delle forze. È questo principio che sta alla base del funzionamento del dinamometro. Tale strumento è costituito da una molla, di solito alloggiata in un contenitore, e da una lancetta che indica di quanto la molla è allungata o compressa. Il modulo della forza applicata alla molla è proporzionale all'entità dell'allungamento (o della contrazione), e la direzione della forza è quella dell'asse della molla. Il dinamometro può essere tarato in chilogrammi-forza (kg_f), in libbre (lb) o in newton (N): quest'ultima è l'unità SI della forza. Le intensità di alcune forze significative sono riportate nella Tabella 5.1.

L'unità SI della forza è il newton (N).

Tabella 5.1 Alcune forze rappresentative

Esercitata da	Esercitata su	Tipo	Intensità approssimativa, N
Galassia di Andromeda	Via Lattea	Gravitazionale	7×10^{28}
Sole	Terra	Gravitazionale	3.5×10^{22}
Razzi di Saturn V	Capsula Apollo	Di contatto	3.3×10^7
Terra	Una persona	Gravitazionale	600
Nucleo dell'atomo d'idrogeno (protone)	Elettrone dell'atomo	Elettrica	8×10^{-8}
Nucleo dell'atomo d'idrogeno (protone)	Elettrone dell'atomo	Gravitazionale	4×10^{-47}

Infine, si noti che la massa di un corpo è una proprietà intrinseca del corpo. Viceversa, una forza esercitata su un corpo è il risultato di un'interazione tra quel corpo e qualche altro corpo. L'*ambiente* di un corpo è costituito da altri corpi che esercitano forze su di esso. Per esempio, se teniamo in mano un libro, gli elementi importanti dell'ambiente del libro sono la nostra mano, che esercita sul libro una forza diretta verso l'alto, e la Terra, che esercita sul libro una forza diretta verso il basso (il peso del libro).

Ambiente di un corpo.

■ Esempio 5.2

Nel sistema britannico di unità, la forza si misura in libbre, e $1.00 \text{ lb} = 4.45 \text{ N}$. Nel sistema detto *tecnico*, essa si misura in chilogrammi-forza (o chilogrammi-peso), e $1.00 \text{ kg}_f = 9.8 \text{ N}$. Il fattore di conversione tra chilogrammi-forza e newton è riportato in soluzione. Per la definizione del chilogrammo-forza, vedi Paragrafo 5.6. (a) Qual è il peso in newton di un sacchetto di zucchero da 5.0 lb? E quello di un mattone da 3.0 kg? (b) Se una mela pesa 1.1 N qual è il suo peso in libbre e in chilogrammi-forza?

Soluzione

(a) Dividendo l'equazione $1.00 \text{ lb} = 4.45 \text{ N}$ per 1.00 lb vediamo che il numero 1 può essere scritto come $1 = 4.45 \text{ N}/1.00 \text{ lb} = 4.45 \text{ N/lb}$. Moltiplicando il peso del sacchetto di zucchero per questo fattore di conversione, otteniamo

$$5.0 \text{ lb} = (5.0 \text{ lb})(4.45 \text{ N/lb}) = 22 \text{ N}$$

Analogamente, l'equazione $1.00 \text{ kg}_f = 9.8 \text{ N}$ porta al fattore di conversione $1 = 9.8 \text{ N/kg}_f$, e qui

$$3.0 \text{ kg}_f = (3.0 \text{ kg}_f)(9.8 \text{ N/kg}_f) = 29.4 \text{ N}$$

(b) I fattori di conversione visti sopra possono essere scritti anche come $1 = 1.00 \text{ lb}/4.45 \text{ N} = 0.225 \text{ lb/N}$ e $1 = 1.00 \text{ kg}_f/9.8 \text{ N} = 0.102 \text{ kg}_f/\text{N}$; quindi il peso della mela è

$$1.1 \text{ N} = (1.1 \text{ N})(0.225 \text{ lb/N}) = 0.25 \text{ lb}$$

$$1.1 \text{ N} = (1.1 \text{ N})(0.102 \text{ kg}_f/\text{N}) = 0.112 \text{ kg}_f$$

Dal momento che una mela svolge un ruolo di primo piano in una famosa leggenda che riguarda Newton, è interessante che una mela non troppo grossa pesi circa 1 N.

5.3 LA PRIMA LEGGE DI NEWTON E IL PRIMO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

Com'era d'uso per un'opera dotta al tempo di Newton, i *Principia* furono scritti in latino. La traduzione italiana della prima legge di Newton afferma²:

Prima legge di Newton.

Legge I. Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.

Questa legge viene spesso chiamata *principio di inerzia*, in quanto «inerzia» significa resistenza al cambiamento, e afferma che un corpo tende naturalmente a mantenere velocità che a un dato istante si trova ad avere (eventualmente anche la velocità nulla).

Se un corpo si trova in uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, la sua accelerazione è zero. Quindi la prima legge può essere formulata nel modo seguente: *Se un corpo non viene esercitata alcuna forza, l'accelerazione del corpo è nulla*.

Questa legge, che fu ottenuta in forma simile anche da Galileo Galilei (1564-1642), fu ricavata dai risultati di un grande numero di esperimenti che, ovviamente, furono effettuati sulla superficie terrestre. Quindi sia Newton sia Galilei intendevano che il moto, la quiete e l'accelerazione fossero osservati da un sistema di riferimento ancorato alla Terra: non fu detto esplicitamente, ma era naturalmente sottinteso. Va qui sottolineato che l'intenzione di entrambi questi grandi geni era di capire quale fosse la relazione tra forze e moto, e per ottenere una tale comprensione essi introdussero un procedimento logico-scientifico del tutto nuovo che ora è una delle basi di tutte le ricerche scientifiche. Tale procedimento si basa sulla seguente logica: se si vuole comprendere l'effetto di una grandezza su un dato fenomeno, è necessario osservare lo stesso fenomeno in assenza di quella grandezza. In questo caso, per capire l'effetto delle forze sui corpi essi studiarono il comportamento dei corpi non soggetti a forze nette e trovarono non solo una legge della natura, la legge di inerzia, ma anche, come vedremo, la chiave logica per studiare le cause del moto e il legame tra forze e caratteristiche del moto.

Per sottoporre a controllo la prima legge di Newton, dovremmo collocare un corpo in un ambiente nel quale su di esso non agisca alcuna forza, e osservare se la sua accelerazione è zero. Un metodo più pratico è quello di avvalersi delle proprietà vettoriali delle forze. Dal momento che la forza è una grandezza vettoriale, due o più forze possono comporsi dando luogo a una *forza risultante* nulla. La forza risultante esercitata su un corpo è la somma vettoriale delle singole forze che agiscono su di esso. Solitamente per indicare una sommatoria si usa la lettera greca Σ (*sigma*), cosicché rappresenteremo la forza risultante con ΣF :

$$\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

La forza risultante ΣF è la somma vettoriale delle singole forze.

²Trad. it. di A. Pala, UTET, Torino 1965.

dove F_1 , F_2 , eccetera, sono le singole forze che agiscono sul corpo. Una forza risultante nulla è equivalente all'assenza di forze. Tenendo conto di ciò nella formulazione della prima legge di Newton, tale legge diventa

Se la forza risultante che agisce su un corpo è nulla ($\Sigma F = 0$), l'accelerazione del corpo è nulla ($a = 0$).

A prima vista, il principio di inerzia sembra in contrasto con l'esperienza ordinaria: siamo pronti a convenire con Newton quando ci dice che un corpo in quiete tende a rimanere in quiete. Ma un corpo che si muove con velocità costante tende davvero a mantenere tale velocità? Supponiamo di spingere un carrello per la spesa (ossia di esercitare una forza su di esso) lungo il corridoio di un supermercato. Se lasciamo andare il carrello (smettiamo di esercitare la forza), esso rallenta (cioè accelera) fino ad arrestarsi. Ciò sembra in disaccordo con la prima legge di Newton. Tuttavia, ci si può convincere del fatto che questa esperienza del carrello non contraddice la prima legge di Newton riconoscendo la presenza di una *forza d'attrito* e facendo una distinzione netta tra la *forza risultante che agisce sul carrello* e la *forza esercitata da noi su di esso*. Quando spingiamo il carrello a velocità costante, la forza che esercitiamo non è nulla, ma la forza risultante è nulla perché la forza d'attrito che agisce sul carrello è uguale e opposta alla forza esercitata da noi. Nel prossimo capitolo tratteremo le forze d'attrito, e analizzeremo in modo particolareggiate le situazioni di questo tipo. Quando lasciamo andare il carrello, la forza risultante che agisce su di esso non è più nulla perché la forza d'attrito continua ad agire finché esso non si è arrestato. Questa esperienza, dunque, non è in contrasto con la prima legge di Newton, ma è conforme ad essa.

Uno scettico potrebbe sostenere che la forza d'attrito è stata inventata appositamente per fare in modo che queste osservazioni si accordassero con la prima legge di Newton. Per renderci conto che non è così, possiamo effettivamente eliminare la forza d'attrito compiendo degli esperimenti su una rotaia a cuscino d'aria (Figura 5.3). Il carrello su una rotaia di questo tipo si muove su uno strato d'aria, cosicché la forza d'attrito durante il moto si riduce alla sola resistenza dell'aria, ed è quindi praticamente impercettibile: una volta che il carrello viene posto in moto, si sposta lungo la rotaia con una velocità sostanzialmente costante.

Un'applicazione familiare della prima legge di Newton si ha nella pesata di un oggetto. La Figura 5.4a mostra un pesce appeso a una bilancia a molla³: per rappresentare le forze che agiscono sul pesce si sono usati dei vettori. Per indicare una particolare forza apponiamo accanto al simbolo F un indice, che si riferisce al corpo che esercita la forza. Il peso del pesce F_p è la forza gravitazionale (diretta verso il basso) esercitata su di esso dalla terra, e F_b è la forza esercitata dalla bilancia (diretta verso l'alto).

La prima legge di Newton
espressa in termini moderni.

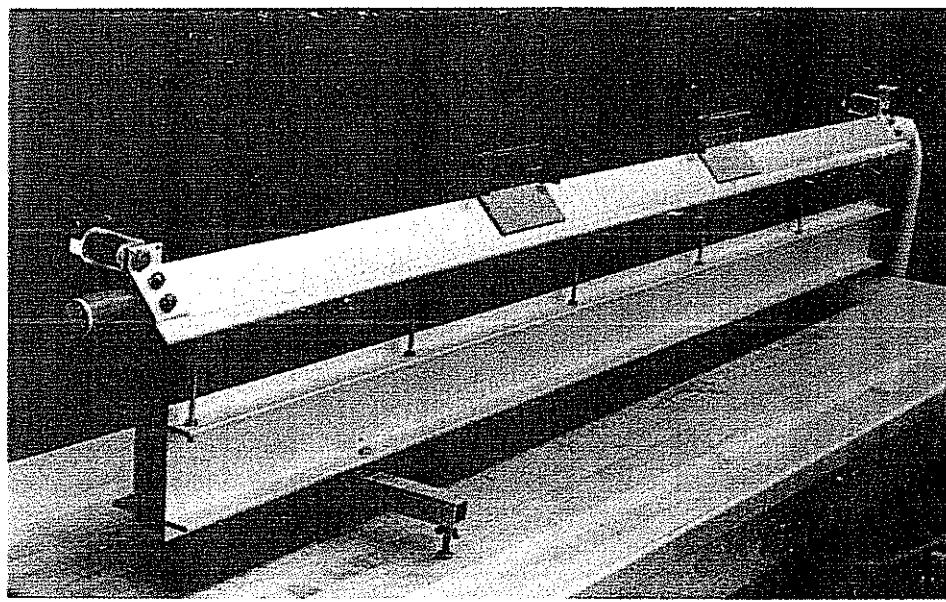


Figura 5.3

Una rotaia a cuscino d'aria.
L'aria viene immessa nella rotaia triangolare cava e fuoriesce da dei forellini. Il carrello è così sospeso su un cuscino d'aria, di modo che le forze d'attrito agenti su di esso quando si muove lungo la rotaia sono trascurabili. (Dave Riban)

³ Equivalente a un dinamometro.

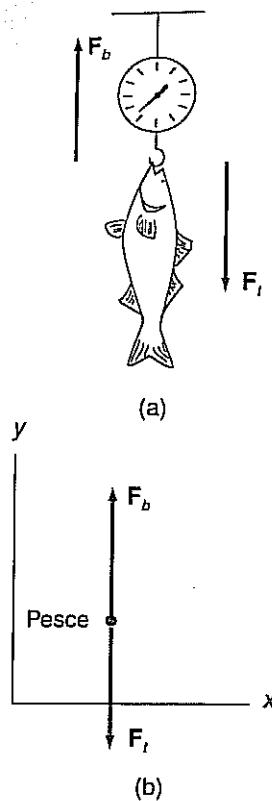


Figura 5.4

(a) Un pesce sospeso a una bilancia a molla. L'indicazione della bilancia fornisce l'intensità F_b della forza esercitata verso l'alto sul pesce. (b) Diagramma di corpo libero relativo al pesce. Questo non subisce accelerazioni, quindi, per la prima legge di Newton, la forza risultante che agisce su di esso è nulla. Pertanto la bilancia indica il modulo del peso del pesce: $F_b = F_t$.

La forza è una grandezza vettoriale.

Princípio di sovrapposizione.

La Figura 5.4b è un *diagramma di corpo libero* relativo al pesce. Un diagramma di corpo libero è una rappresentazione che permette di trovare la forza risultante che agisce su un corpo. In tale diagramma il pesce viene rappresentato come un punto, e su di esso vengono poste le origini dei vettori-forza. Il pesce viene rappresentato semplicemente come un punto in quanto si ammette che le sue dimensioni non abbiano importanza, il che significa che esso viene trattato come un punto materiale. (Le situazioni in cui questa semplificazione non è lecita saranno discusse nei Capitoli 11-12). Utilizzando il sistema di coordinate indicato, si trova che la forza risultante che agisce sul pesce è

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_t = (F_b \mathbf{j}) + (-F_t \mathbf{j}) = (F_b - F_t) \mathbf{j}$$

Dal momento che il pesce non subisce accelerazioni, la prima legge di Newton stabilisce che la forza risultante che agisce su di esso sia nulla. Pertanto $F_b = F_t$, il che significa che la bilancia misura il peso del pesce. (A rigor di termini, il peso di un corpo caratterizzato da un modulo e da una direzione, in quanto il peso è una forza. Ma si sa come il peso è sempre diretto verso il basso, il termine «peso» viene spesso usato con una certa inesattezza per indicare il modulo del peso.)

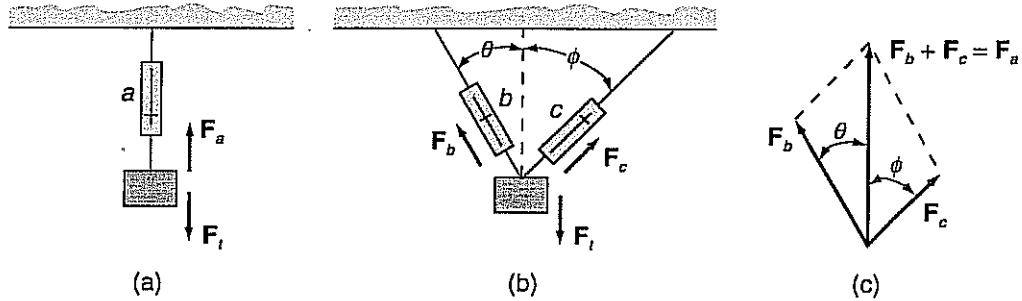
Possiamo servirci della prima legge di Newton per verificare sperimentalmente che la forza è un vettore. Supponiamo di appendere un blocco a un dinamometro e di misurare la forza F_a esercitata dal dinamometro sul blocco (Figura 5.5a). Per la prima legge di Newton, F_a è uguale e opposta al peso del blocco. Dopotudiché appendiamo il blocco a due dinamometri che formano gli angoli θ e φ con la verticale, e misuriamo le forze F_b e F_c (Figura 5.5b). Per la prima legge di Newton, F_b e F_c si compongono dando una forza che è uguale e opposta al peso del blocco. Quindi l'effetto delle forze combinate F_b e F_c è uguale a quello della sola forza F_a . Un diagramma vettoriale mostra che la somma vettoriale $F_b + F_c$ è uguale a F_a (Figura 5.5c). Vale a dire che l'effetto delle due forze che agiscono simultaneamente è identico a quello della loro somma vettoriale. La possibilità di sommare le forze come vettori è dovuta al *princípio di sovrapposizione*.

La nostra prossima scoperta potrà sconcertare: *la prima legge di Newton non è valida in tutti i sistemi di riferimento*. Applichiamo tale legge a un corpo, diciamo: corpo *A*, servendoci di misure fatte in differenti sistemi di riferimento. Supponiamo per semplicità, che il corpo *A* sia talmente lontano dagli altri corpi che ogni singola forza esercitata su di esso sia effettivamente uguale a zero; di conseguenza $\Sigma \mathbf{F} = 0$. Ora misuriamo l'accelerazione del corpo *A* rispetto al sistema di riferimento 1 e verifichiamo che essa è nulla: $a_{A1} = 0$. La prima legge di Newton afferma che se $\Sigma \mathbf{F} = 0$ allora $\mathbf{a} = 0$, e quindi concludiamo che la prima legge è valida nel riferimento 1. Supponiamo che il sistema di riferimento 2 *acceleri* rispetto al riferimento 1. Ciò significa che il corpo *A* deve accelerare rispetto al riferimento 2: $a_{A2} \neq 0$. Se $\Sigma \mathbf{F} = 0$, la prima legge di Newton *non* è valida nel riferimento 2, come in qualunque riferimento che acceleri relativamente al riferimento 1. Supponiamo d'altra parte che il riferimento 3 si muova con *velocità costante* rispetto al riferimento 1. Ciò significa che l'accelerazione del corpo *A* rispetto al riferimento 3 è nulla, $a_{A3} = 0$, e dunque la prima legge vale nel riferimento 3. In effetti la prima legge è valida in qualsiasi riferimento che non sia in moto accelerato rispetto al riferimento 1.

Dato che la prima legge di Newton non è valida in taluni sistemi di riferimento, ci potrebbe chiedere se essa sia di qualche utilità. In realtà è proprio questa sua caratteristica a indicarci il modo di utilizzarla. Dato che sulla Terra il principio d'inerzia sembra essere valido, si può pensare che esista almeno un sistema in cui sia valido. D'altri

Figura 5.5

Le forze si sommano come vettori. (a) Un blocco appeso a un dinamometro *a*. (b) Il medesimo blocco appeso ai dinamometri *b* e *c*. (c) L'effetto delle forze F_b e F_c che agiscono insieme è uguale a quello di un'unica forza che ne sia la somma vettoriale: $\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c$.



parte, visto che, cambiando sistema, il principio può non essere più valido, è evidente che occorre studiare più accuratamente anche quello che succede sulla Terra. Se si fanno esperimenti accurati, con mezzi moderni, si trova che il principio d'inerzia non è esattamente valido se il corpo viene osservato dalla superficie terrestre; in particolare, anche se la risultante di tutte le forze è nulla, il corpo possiede una piccola accelerazione (dell'ordine del centesimo di ms^{-2}).

Nella cinematica (Capitolo 4) abbiamo visto tuttavia che, cambiando sistema di riferimento, le accelerazioni, misurate da diversi osservatori, cambiano secondo leggi ben precise (vedi l'espressione (4.31)), quindi possiamo pensare di trovare almeno un sistema di riferimento nel quale il principio sia esattamente valido. Tale ricerca del sistema nel quale il principio d'inerzia è valido non è puramente teorico-matematica, anzi parte proprio da considerazioni sperimentali. Cioè si va a studiare se *in natura* esiste qualche sistema di riferimento nel quale un corpo non soggetto a forze abbia accelerazione nulla. Questa ricerca ha dato risultati tali per cui è possibile affermare che *si può sempre trovare sperimentalmente un sistema di riferimento nel quale un osservatore constata la validità del principio di inerzia*.

È importante notare che la constatazione dell'osservatore dipende dalla sensibilità degli strumenti che usa, dagli errori e dalle incertezze delle misure, e quindi, come per tutti i principi e le leggi della fisica, il principio di inerzia e il primo principio della dinamica, che formuleremo fra poco, sono validi entro le incertezze sperimentali.

A questo punto, avendo studiato sperimentalmente il problema, possiamo definire un tipo particolare di sistema di riferimento, chiamato sistema di riferimento inerziale. *Un sistema di riferimento inerziale è un sistema di riferimento nel quale la prima legge di Newton risulta valida*. Sulla base di quanto detto sopra, ci rendiamo conto che qualunque riferimento che si muova con velocità costante rispetto a un sistema di riferimento inerziale è a sua volta un sistema di riferimento inerziale, e che qualunque riferimento che acceleri rispetto a un riferimento inerziale non è un riferimento inerziale.

Possiamo ora formulare il primo principio della dinamica nel seguente modo: *esistono infiniti sistemi di riferimento, detti sistemi inerziali, ciascuno in moto rettilineo e uniforme rispetto agli altri, nei quali un corpo non soggetto a forze si muove a velocità costante*. In sostanza il primo principio stabilisce sperimentalmente l'esistenza di particolari sistemi nei quali i corpi non soggetti a forze non possono avere accelerazioni. Ne consegue che nei sistemi inerziali, affinché su un corpo si manifesti un'accelerazione, occorre applicare a essi forze diverse da zero. Si può allora affermare che in tali sistemi la relazione tra forze e caratteristiche del moto consiste in un legame tra forze e accelerazioni. Non si dice ancora che tipo di relazione c'è, ma si è trovato che nei sistemi inerziali la relazione esiste. Saranno gli esperimenti a portarci a scoprire qual è il legame funzionale tra le forze applicate ai corpi e le accelerazioni che questi subiscono se osservati da sistemi inerziali.

Un sistema di riferimento che viene normalmente usato per il moto di un corpo sulla superficie della terra o in prossimità di essa è un riferimento i cui assi sono fissi rispetto all'orizzontale e alla verticale in un punto vicino della superficie della terra. Chiameremo un sistema di riferimento di questo tipo *riferimento terrestre* (Figura 5.6). Un riferimento terrestre è un sistema di riferimento inerziale? Gli esperimenti dimostrano che *non* lo è. Come è noto, la terra compie una rotazione intorno al proprio asse ogni giorno e una rivoluzione intorno al sole ogni anno. Se immaginiamo di guardare la terra da un sistema di riferimento fisso rispetto alle stelle, in tale riferimento un riferimento terrestre si muove di moto circolare attorno all'asse della terra, mentre il centro della terra gira attorno al sole. L'accelerazione centripeta rispetto all'asse è massima per un punto della superficie terrestre all'equatore, ove $a_c = 0.034 \text{ m/s}^2$, e l'accelerazione del centro della Terra rispetto al Sole ha un modulo di 0.006 m/s^2 . (Si veda l'Esercizio 4.29.) Queste accelerazioni sono troppo piccole per avere un ruolo significativo nella maggior parte delle applicazioni terrestri delle leggi del moto.

In generale si ammette che un sistema di riferimento inerziale sia un riferimento i cui assi sono fissi relativamente alla materia lontana dell'universo (per la maggior parte degli scopi, fissi rispetto allo sfondo delle stelle lontane). Nei limiti delle attuali tecniche di misura, questa ipotesi risulta compatibile con la prima legge di Newton, e in armonia con l'immagine che la scienza contemporanea si fa dell'universo. Dal mo-

Definizione di sistema di riferimento inerziale.

Riferimento terrestre.

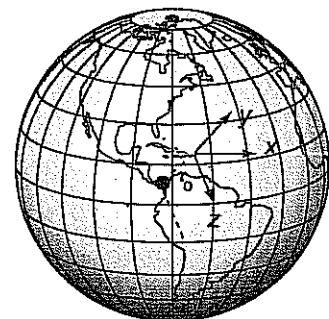


Figura 5.6

Un riferimento terrestre. Gli assi di un simile riferimento sono fissi rispetto all'orizzontale e alla verticale in un punto della superficie della Terra.

mento che un riferimento terrestre ha un'accelerazione molto piccola rispetto a un riferimento, è spesso lecito servirsi di un riferimento terrestre come di un sistema di riferimento inerziale.

5.4 LA SECONDA LEGGE DI NEWTON E IL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

Dato che una delle conseguenze del primo principio consiste nel fatto che nei sistemi inerziali le forze sono responsabili delle accelerazioni dei corpi, furono eseguiti numerosissimi esperimenti per capire quale fosse la relazione funzionale tra forza applicata e accelerazione impressa a un corpo. In base ai risultati ottenuti Newton formulò così la seconda legge:

Seconda legge di Newton.

Legge II. Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza motrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.

Facendo uso della terminologia moderna, la seconda legge di Newton afferma: *l'accelerazione di un corpo è proporzionale alla forza risultante esercitata sul corpo*. Sotto forma di equazione, ciò può essere scritto come

$$\Sigma F = ma$$

(5.1)

ove m è la massa del corpo. La massa del corpo è la costante di proporzionalità tra la forza risultante esercitata sul corpo e l'accelerazione di quest'ultimo. Per una forza risultante data, un corpo di massa maggiore subirà un'accelerazione minore. Quindi la massa di un corpo è quella proprietà del corpo che fa sì che esso resista a qualunque variazione della sua velocità. Siccome inerzia significa resistenza al cambiamento, la massa viene spesso detta *massa inerziale*.

Da un confronto tra la prima e la seconda legge di Newton si sarebbe indotti a considerare la prima legge niente più che un caso particolare della seconda. Poiché $\Sigma F = ma$, ne consegue che $a = 0$ quando $\Sigma F = 0$. Tuttavia ci siamo serviti della prima legge per definire il tipo di sistema di riferimento rispetto al quale deve essere misurata l'accelerazione che compare nella seconda legge di Newton, cioè per definire un sistema di riferimento inerziale. Secondo questa interpretazione, la prima legge è un asserto relativo alla natura, indipendente dalla seconda legge. La prima legge afferma che esistono sistemi di riferimento inerziali, e fornisce un procedimento per determinare se un riferimento sia inerziale o meno.

Newton formulò la seconda legge basandosi su risultati sperimentali che erano stati ottenuti in un riferimento terrestre, avevano durata temporale relativamente breve, coinvolgevano spazi relativamente piccoli e nei quali l'attrito era stato ridotto al minimo possibile. La sua grandissima intuizione fu di aver compreso la validità generale della legge al di là delle limitazioni sperimentali esistenti, e quindi di aver innalzato il rango di una relazione, ricavata sulla Terra e in particolari condizioni, a livello di principio generale. In pratica, si può esprimere questa legge della natura, chiamata il *secondo principio della dinamica*, così: *se in un sistema di riferimento inerziale un corpo (considerato puntiforme) si muove di moto accelerato, esiste, indipendentemente dal fatto che la si possa misurare, almeno una forza responsabile di tale accelerazione e la relazione che lega forze e accelerazione è $F = ma$ dove F è la risultante delle forze agenti sul corpo*.

Definizione dinamica della forza.

Il secondo principio della dinamica.

Vogliamo far notare che la frase “indipendentemente dal fatto che la si possa misurare” è di grande importanza; infatti, benché per esempio non si possa misurare direttamente la forza con cui il Sole attrae un pianeta, il valore di tale forza sarà sempre uguale alla massa del pianeta per la sua accelerazione, misurata in un sistema inerziale. In questo senso viene spesso affermato che la legge di Newton è una *definizione dinamica delle forze*. Si può anche dire che una delle proprietà delle forze è quella di produrre *l'accelerazione di un corpo*. *Una singola forza che agisca da sola su un corpo ha la medesima direzione dell'accelerazione, e il modulo della forza è pro-*

proporzionale al modulo dell'accelerazione. Inoltre, questa legge stabilisce una relazione tra l'unità di misura della forza da una parte, e le unità della massa e dell'accelerazione dall'altra. L'unità SI della forza, il newton, è definita tramite la seconda legge di Newton:

$$1\text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \text{ (esattamente)}$$

Definizione del newton (N).

Se un corpo di massa pari a un chilogrammo ha un'accelerazione di un metro al secondo quadrato rispetto a un sistema di riferimento inerziale, allora la forza risultante esercitata sul corpo è di un newton.

Il secondo principio della dinamica costituisce la legge fondamentale per studiare il moto di un corpo, permettendoci di ricavare e prevedere tutte le caratteristiche e le particolarità del moto stesso. Infatti, conoscendo le forze agenti su un corpo, dalla (5.1) si ricava l'accelerazione e da questa, conoscendo le condizioni iniziali del corpo (posizione e velocità a un dato istante, chiamato istante iniziale), si possono trovare velocità e posizione del corpo in ogni istante. Il problema si riduce a un problema matematico, quello della soluzione di equazioni differenziali.

Esempio 5.3

Il *Titanic* era l'oggetto mobile di massa più elevata che fosse mai stato costruito dall'uomo, avendo una massa di $6.0 \times 10^7 \text{ kg}$. Quale sarebbe stata l'intensità della forza risultante necessaria per imporre al *Titanic* un'accelerazione di modulo pari a 0.1 m/s^2 ?

Soluzione

La seconda legge di Newton in forma scalare è $|\Sigma F| = ma$. Perché il *Titanic* subisse un'accelerazione di modulo 0.1 m/s^2 , l'intensità della forza risultante avrebbe dovuto essere

$$|\Sigma F| = (6.0 \times 10^7 \text{ kg})(0.1 \text{ m/s}^2) = 6 \times 10^6 \text{ N} = 6 \text{ MN}$$



5.5 LA TERZA LEGGE DI NEWTON O IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE

Abbiamo visto che per applicare una forza a un corpo occorre *interagire* con il corpo stesso, cioè è necessaria la presenza di almeno un altro corpo (la mazza da golf sulla pallina, il piede del calciatore sul pallone, il Sole sui pianeti ecc.). Pur essendo questo fatto del tutto generale, non ce ne siamo per nulla preoccupati nell'enunciazione del secondo principio della dinamica, che esamina il moto di un corpo in relazione alle forze che gli sono applicate, senza tener in alcun conto come sono state applicate tali forze e quale sia la loro origine. Newton si rese conto che tale visione era decisamente parziale e si pose la questione di capire anche cosa succede ai corpi che sono necessari per applicare forze ad altri corpi (cioè, ad esempio, alla mazza da golf, al piede del calciatore, al Sole ecc.). Questa intuizione di Newton lo portò a studiare l'intero processo dinamico che porta all'applicazione delle forze ai corpi, e dai risultati sperimentali di tale studio ricavò la sua terza legge o *Principio di azione e reazione*.

La traduzione italiana della terza legge di Newton afferma:

Legge III. A ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia, le mutue azioni di due corpi sono sempre uguali fra loro e dirette verso parti opposte.

Terza legge di Newton.

La prima e la seconda legge sono enunciati che riguardano un singolo corpo, mentre la terza legge è un enunciato relativo a due corpi. Per discutere la terza legge dobbiamo attribuire due indici al simbolo della forza \mathbf{F} : il primo per denotare l'oggetto che esercita la forza e il secondo per denotare l'oggetto sul quale la forza agisce. Supponiamo che i corpi a e b esercitino delle forze l'uno sull'altro (Figura 5.7); \mathbf{F}_{ab} è la forza esercitata da a su b , e \mathbf{F}_{ba} è la forza esercitata da b su a . La terza legge di Newton stabilisce che queste due forze sono uguali e opposte, ossia

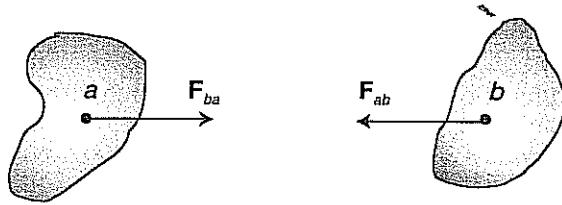
$$\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$$

(5.2)

La terza legge di Newton sotto forma di equazione.

Figura 5.7

La terza legge di Newton. I corpi *a* e *b* esercitano delle forze l'uno sull'altro. Per la terza legge di Newton, queste forze sono uguali e opposte: $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$. In questa figura le forze sono rappresentate come forze attrattive: \mathbf{F}_{ab} è diretta verso *a* e \mathbf{F}_{ba} è diretta verso *b*.



Le forze si presentano a coppie: una forza singola non può esistere.

Va sottolineato che le due forze non solo hanno la stessa direzione, ma *stanno su stessa retta* (che spesso è chiamata *retta di azione*). Questa constatazione, che è ovviamente vera per corpi puntiformi, diviene, come vedremo studiando il moto dei sistemi, di straordinaria importanza per corpi dotati di dimensioni non trascurabili.

Quando due corpi esercitano delle forze l'uno sull'altro, si dice che tra i due corpi sussiste un'*interazione*. La terza legge di Newton fornisce la relazione tra le due forze che sono il risultato di un'*interazione*. Le due forze \mathbf{F}_{ab} e \mathbf{F}_{ba} sono spesso chiamate *coppia azione-reazione*. Una delle forze viene detta azione e l'altra reazione: quale delle due debba essere chiamata azione e quale reazione è arbitrario. La terza legge di Newton mette in evidenza una simmetria fondamentale che caratterizza le forze che manifestano in natura.

Esempio 5.4

Supponiamo che un libro di fisica e un libro di storia siano appoggiati su un banco, con il libro di storia sopra quello di fisica (Figura 5.8). Il libro di storia pesa 14 N e quello di fisica 18 N. Si identifichino ciascuna delle forze che agiscono sui due libri con una notazione a due indici e si determini il valore di ciascuna di queste forze.

Soluzione

Nella Figura 5.8 sono riportati i diagrammi di corpo libero per i libri. Dal momento che il peso del libro di storia è la forza esercitata dalla Terra sul libro di storia, lo indichiamo con \mathbf{F}_{ts} :

$$\mathbf{F}_{ts} = -(14 \text{ N})\mathbf{j}$$

Oltre che con la Terra, il libro di storia interagisce soltanto con il libro di fisica. Dato che l'accelerazione del libro di storia è nulla, la forza risultante che agisce su di esso è nulla per la seconda legge di Newton:

$$\mathbf{F}_{fs} + \mathbf{F}_{ts} = 0$$

ove \mathbf{F}_{fs} è la forza esercitata dal libro di fisica su quello di storia. Quindi $\mathbf{F}_{fs} = -\mathbf{F}_{ts} = -[-(14 \text{ N})]$ ossia

$$\mathbf{F}_{fs} = (14 \text{ N})\mathbf{j}$$

Dunque il libro di fisica esercita sul libro di storia una forza diretta verso l'alto di intensità pari a 14 N.

Sul libro di fisica si esercitano tre forze: \mathbf{F}_{tf} dovuta alla Terra, \mathbf{F}_{sf} dovuta al libro di storia, e \mathbf{F}_{bf} dovuta alla superficie del banco. Poiché il libro di fisica pesa 18 N,

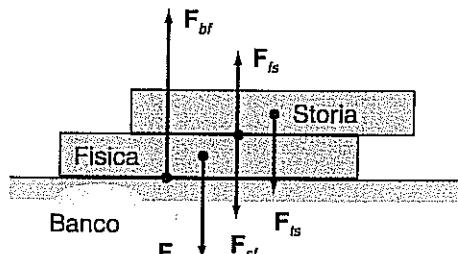
$$\mathbf{F}_{tf} = -(18 \text{ N})\mathbf{j}$$

Per la terza legge di Newton, $\mathbf{F}_{sf} = -\mathbf{F}_{fs}$, cosicché

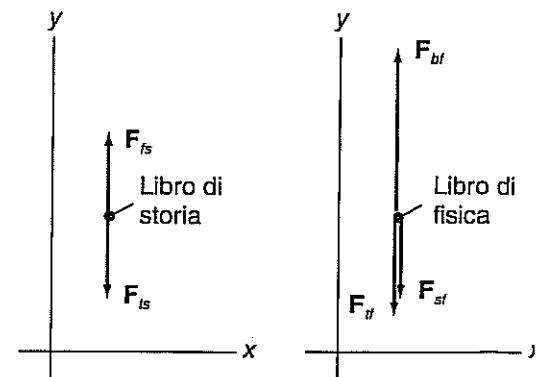
$$\mathbf{F}_{sf} = -(14 \text{ N})\mathbf{j}$$

Figura 5.8

Esempio 5.4: (a) un libro di storia e uno di fisica appoggiati su un banco. (b) Diagramma di corpo libero per il libro di storia. (c) Diagramma di corpo libero per il libro di fisica.



(a)



(c)

La seconda legge di Newton applicata al libro di fisica fornisce $\Sigma F = 0$, ossia $F_{bf} + F_{ff} + F_{sf} = 0$, ovvero $F_{bf} = -F_{ff} - F_{sf}$, cosicché

$$F_{bf} = -[-(18 \text{ N})\mathbf{j}] - [-(14 \text{ N})\mathbf{j}] = (32 \text{ N})\mathbf{j}$$

Il banco esercita una forza rivolta verso l'alto di 32 N sul libro di fisica.

Per giungere alla soluzione abbiamo applicato due volte la seconda legge di Newton e una volta la terza legge di Newton.

A questo punto è necessaria un'avvertenza. Nel caso particolare in cui due forze sono applicate a un corpo che ha accelerazione nulla, la seconda legge di Newton sembra ingannevolmente simile alla terza legge di Newton. Per esempio, la seconda legge di Newton applicata al libro di storia dell'Esempio 5.4 diventa $F_{fs} + F_{ts} = 0$, ossia $F_{fs} = -F_{ts}$; le forze sono uguali e opposte. La cosa importante da rilevare a proposito di queste due forze è che esse sono applicate entrambe allo stesso corpo, il libro di storia. Ciò è messo in evidenza dal fatto che il secondo indice dei loro simboli è il medesimo: s che sta per il libro di storia. Viceversa, la terza legge di Newton applicata all'interazione tra il libro di fisica e quello di storia si scrive $F_{sf} = -F_{fs}$; anche queste forze sono uguali e opposte, ma la cosa importante che non deve sfuggire è che esse sono applicate a corpi *differenti*, l'una al libro di fisica e l'altra al libro di storia. Tale circostanza ha un corrispettivo nell'inversione degli indici dei rispettivi simboli. La seconda legge di Newton si applica al singolo corpo, mentre la terza legge si applica all'interazione tra due corpi. Si noti che le due forze previste dalla terza legge di Newton non compaiono mai nel medesimo diagramma di corpo libero, perché questo rappresenta le forze che agiscono su un unico corpo, e la coppia azione-reazione della terza legge agisce sempre su corpi differenti.

Ora combineremo la seconda e la terza legge di Newton per ricavare una definizione (operativa) della massa di un corpo. Supponiamo di avere due corpi, a e b , che esercitano l'uno sull'altro le forze F_{ab} e F_{ba} . Possono esserci altre forze che agiscono su questi due corpi, oltre a F_{ab} e F_{ba} , ma noi facciamo in modo che la somma vettoriale di queste altre forze sia nulla, cosicché la forza risultante sul corpo a sia F_{ba} e la forza risultante sul corpo b sia F_{ab} . La seconda legge di Newton applicata a ciascuno dei due corpi fornisce

$$F_{ba} = m_a \mathbf{a}_a \quad \text{e} \quad F_{ab} = m_b \mathbf{a}_b$$

Sostituendo nella terza legge di Newton, $F_{ba} = -F_{ab}$, si ha

$$m_a \mathbf{a}_a = -m_b \mathbf{a}_b$$

Ossia, passando ai moduli delle accelerazioni,

$$m_a a_a = m_b a_b$$

Ora supponiamo che il corpo b sia il chilogrammo campione (o una sua copia), e che il corpo a sia quello di cui vogliamo determinare la massa m . Allora $m_b = 1 \text{ kg}$ (esattamente), $m_a = m$, e

$$m = 1 \text{ kg } a_c/a$$

Definizione della massa.

dove a_c e a sono rispettivamente il modulo dell'accelerazione del chilogrammo campione e quello del corpo di massa m .

Esempio 5.5

I carrelli A e B , entrambi dotati di un respingente a molla (Figura 5.9a), vengono schiacciati l'uno contro l'altro in modo che i loro respingenti risultino compressi. Quando i carrelli vengono liberati, le molle li spingono da parti opposte in modo che $a_A = 0.87 \text{ m/s}^2$ e $a_B = 1.42 \text{ m/s}^2$. Sapendo che la massa del carrello B è 1.0 kg , determinare la massa del carrello A . Le masse delle ruote di entrambi i carrelli sono molto minori di quelle delle carrozzerie, e i supporti delle ruote sono ben lubrificati.

Soluzione

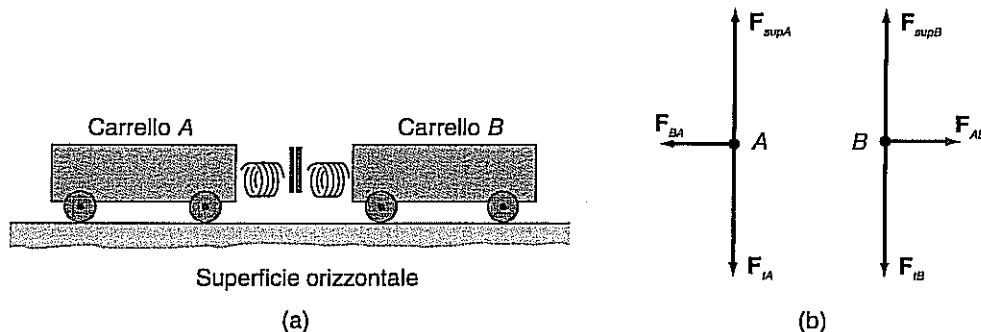
Dal momento che le masse delle ruote dei due carrelli sono molto minori di quelle delle carrozzerie, gli effetti dovuti alla rotazione delle ruote possono essere trascurati e ciascun carrello può essere trattato come una particella (si veda il Capitolo 13). Inoltre, siccome i supporti delle ruote sono ben lu-

brificati, le forze d'attrito che tendono a rallentare i carrelli sono trascurabili, e quindi le forze esercitate sui due carrelli dalla superficie orizzontale hanno componente orizzontale nulla. Ciò significa che ciascuna di queste forze è diretta verticalmente verso l'alto, come mostrano i diagrammi di corpo libero della Figura 5.9b. La componente verticale dell'accelerazione di entrambi i carrelli è nulla, e sicché la forza esercitata dalla superficie verso l'alto su ciascun carrello è uguale e opposta al peso del carrello stesso. Pertanto la forza risultante che agisce su ciascun carrello è la forza esercitata dall'altro carrello, e, per la terza legge di Newton, queste forze sono uguali e opposte. Questa situazione è una buona approssimazione di quella che abbiamo descritto sopra nel definire la massa di un corpo. La massa del carrello *A* è

$$m_A = m_B \frac{a_B}{a_A} = 1.0 \text{ kg} \frac{1.42 \text{ m/s}^2}{0.87 \text{ m/s}^2} = 1.6 \text{ kg}$$

Figura 5.9

Esempio 5.5: (a) i carrelli *A* e *B*, dotati entrambi di un respingente a molla, vengono schiacciati l'uno contro l'altro e poi lasciati andare. (b) Diagrammi di corpo libero per i due carrelli immediatamente dopo che sono stati lasciati andare.



5.6 LA FORZA PESO

Il peso \mathbf{F}_t di un corpo è la forza gravitazionale esercitata dalla terra sul corpo. Possiamo ricavare un'espressione di questa forza applicando la seconda legge di Newton a un corpo in caduta libera. Per un corpo in caduta libera, l'attrito dovuto alla resistenza dell'aria è trascurabile, e quindi l'unica forza significativa che agisce su un corpo è la forza gravitazionale esercitata dalla terra. La situazione può essere realizzata sperimentalmente facendo cadere un corpo in un recipiente nel quale sia stato fatto il vuoto. Per un corpo in queste condizioni, la forza risultante è

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_t$$

Dal Capitolo 3 sappiamo che l'accelerazione di qualunque corpo in caduta libera è $a = g$, il cui modulo è $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Inserendo questi risultati nella seconda legge di Newton, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, si ottiene

Peso di un corpo di massa m .

$$\boxed{\mathbf{F}_t = mg} \quad (5.3)$$

Il peso di un corpo è proporzionale alla sua massa. Per esempio, la massa di un adulto di corporatura media è di 65 kg, e quindi $F_t = (65 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 640 \text{ N}$.

L'Equazione (5.3) è un esempio di *legge della forza*. In realtà si tratta di un caso particolare di una legge della forza più generale che introdurremo nel Capitolo 7. Tale formulazione particolare è valida soltanto per oggetti che si trovano sulla superficie della Terra o in prossimità di essa. Dal momento che la forza è data dal prodotto della massa m del corpo per un'accelerazione g , l'Equazione (5.3) assomiglia alla seconda legge di Newton. Ma, nonostante l'apparenza, l'Equazione (5.3) *non* è la seconda legge di Newton. Si tratta di un'equazione relativa a una delle forze — che possono essere parecchie — che agiscono su un corpo. Spesso essa fornisce uno dei termini che compaiono nella somma $\Sigma \mathbf{F}$ delle forze agenti su un corpo quando si fa uso della seconda legge di Newton. La distinzione tra una legge della forza e la seconda legge di Newton diventerà più chiara via via che introdurremo nuove leggi delle forze.

Siamo abituati a considerare il peso di un corpo come una proprietà intrinseca del corpo, cioè come una proprietà di quel corpo soltanto. Per esempio, si parla di una zucchia da 20 libbre (cioè da 90 N, in unità SI). Tuttavia, il peso di un corpo è una forza, e

una forza dipende dal corpo che la esercita oltre che dal corpo sul quale essa agisce. Nel caso particolare del peso, la forza è esercitata dalla Terra. Pertanto in linea di principio è sbagliato trattare il peso di un corpo come una sua proprietà intrinseca.

Viceversa, la massa è una proprietà intrinseca dei corpi; è del tutto corretto parlare di una zucca da 9 kg. Da un punto di vista pratico, possiamo trattare il peso di un corpo come una sua proprietà intrinseca perché $F_t = mg$, e g è uguale per qualunque corpo. Ma g varia leggermente al variare della posizione sulla terra e quindi il peso di un corpo varia nello stesso modo di g . Come vedremo più avanti, la variazione è piccola, inferiore all'1 per cento sulla superficie della Terra. Una zucca di 9.00 kg pesa $(9.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 88.2 \text{ N}$ in Florida, e $(9.00 \text{ kg})(9.82 \text{ m/s}^2) = 88.4 \text{ N}$ in Alaska. Perciò, se riferiamo le nostre misure a una regione limitata della superficie della Terra o in prossimità di questa, oppure se non è richiesta un'elevata precisione, possiamo trattare il peso di un corpo come una proprietà di quel corpo soltanto.

Ora siamo in grado di fare qualche precisazione sull'unità k_{gf} (chilogrammo-forza o chilogrammo peso) che abbiamo introdotto nell'Esempio 5.2. Essa *non* è un'unità SI, ed è definita come peso della massa campione di 1 kg, e quindi $1 \text{ k}_{\text{gf}} = 1 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ N}$. Ma, per quanto si è detto circa le variazioni di g sulla superficie della terra, il k_{gf} non sarebbe univocamente definito se non si precisasse a quale luogo la definizione fa riferimento. Perciò il k_{gf} è definito come peso di 1 kg a 45° di latitudine e sul livello del mare.

È istruttivo riconsiderare l'esempio appena discusso facendo uso di misure effettuate relativamente a un riferimento solidale con l'ascensore. In questo riferimento l'accelerazione della persona è nulla, qualunque sia l'accelerazione dell'ascensore rispetto a un riferimento terrestre (supposto inerziale). Mentre l'ascensore accelera rispetto a un riferimento terrestre, la forza risultante che agisce sulla persona non è nulla. Quindi nel riferimento dell'ascensore $\Sigma F \neq 0$, e $a = 0$. La prima legge di Newton non è dunque valida nel riferimento dell'ascensore mentre l'ascensore accelera rispetto a un riferimento terrestre. In accordo con quanto abbiamo detto nel Paragrafo 5.3, il riferimento dell'ascensore non è un riferimento inerziale.

Detto incidentalmente, quando un corpo viene posto su una bilancia, l'indicazione della bilancia viene spesso chiamata *peso apparente* del corpo. Se il corpo (e la bilancia) sono in quiete o si muovono con velocità costante rispetto a un riferimento inerziale, il peso apparente coincide con il peso. Se il corpo (e la bilancia) accelerano rispetto a un riferimento inerziale, il peso apparente non è uguale al peso.

Peso apparente.

Esempio 5.6

Nell'ascensore che accelera. Si consideri una persona in piedi su una bilancia a molla in un ascensore (Figura 5.10a). Prima che l'ascensore cominci a muoversi la bilancia segna 651 N, e, quando l'ascensore accelera verso l'alto, la bilancia segna 733 N. (Questo valore più alto segnato dalla bilancia corrisponde alla sensazione di essere schiacciati in giù che si prova quando l'ascensore accelera verso l'alto.) Si determinino (a) la massa della persona, (b) la forza risultante che agisce sulla persona quando l'ascensore accelera verso l'alto, e (c) l'accelerazione della persona (e dell'ascensore).

Soluzione

(a) Prima che l'ascensore cominci a muoversi, l'accelerazione della persona rispetto a un riferimento terrestre è nulla. Ammettiamo che un riferimento terrestre sia un riferimento inerziale, e quindi $a = 0$ nella seconda legge di Newton. Pertanto $\Sigma F = 0$. Di conseguenza, l'indicazione della bilancia nell'istante considerato fornisce il peso della persona: $F_t = 651 \text{ N}$. In base all'Equazione (5.3),

$$m = \frac{F_t}{g} = \frac{651 \text{ N}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 66 \text{ kg}$$

(b) Quando l'ascensore accelera verso l'alto, la forza F_b esercitata dalla bilancia è maggiore del peso della persona ($F_b = 733 \text{ N}$). Dal diagramma di corpo libero della Figura 5.10b, la forza risultante che agisce sulla persona è

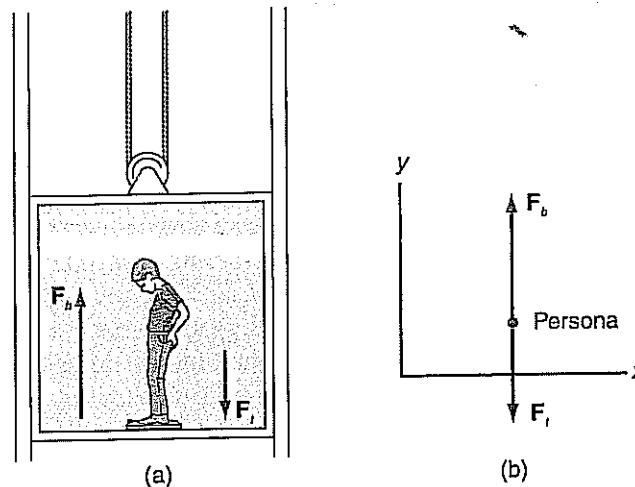
$$\Sigma F = F_b \mathbf{j} - F_t \mathbf{j} = (733 \text{ N})\mathbf{j} - (651 \text{ N})\mathbf{j} = (82 \text{ N})\mathbf{j}$$

(c) Ricavando l'accelerazione dalla seconda legge di Newton, si ottiene

$$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{m} = \frac{(82 \text{ N})\mathbf{j}}{66 \text{ kg}} = (1.2 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$$

Figura 5.10

Esempio 5.6: (a) una persona in piedi su una bilancia a molla in un ascensore. (b) Diagramma di corpo libero per la persona quando l'ascensore accelera verso l'alto.



Constatiamo che è possibile determinare un'accelerazione senza misurare distanze percorse e intervalli di tempo. Si misura invece la variazione di lunghezza di una molla e si utilizza la seconda legge di Newton. Quando la si usa in questo modo, una bilancia diventa un *accelerometro*, cioè uno strumento per la misura delle accelerazioni.

5.7 RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI MECCANICA

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto alcuni esempi di problemi di meccanica. Ora daremo alcune indicazioni per la soluzione di questi problemi e poi illustreremo i procedimenti suggeriti con altri esempi. La seconda legge di Newton, $\Sigma F = ma$, costituisce il principio fondamentale che permette di risolvere i problemi. Dal momento che la seconda legge è una relazione vettoriale, possiamo tradurla in termini di componenti:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z \quad (5.4)$$

Ciascuna componente fornisce un'equazione che può essere utilizzata in un problema.

Queste equazioni sono equazioni differenziali che contengono le derivate rispetto al tempo delle coordinate del punto materiale:

$$\sum F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \sum F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad \sum F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Il problema generale è quello di trovare le coordinate, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, del punto in funzione del tempo avendo come dato di partenza la conoscenza delle forze applicate e quelle che abbiamo chiamato le condizioni iniziali, cioè la posizione e la velocità in un istante fissato (generalmente per $t = 0$) (vedi Appendice C).

I procedimenti per la soluzione di un problema possono essere suddivisi in tre parti:

1. Disegnare uno schizzo del sistema e identificare il corpo (o i corpi) cui si vuole applicare la seconda legge. Tracciare nello schizzo i vettori che rappresentano le forze agenti sul corpo. Introdurre un simbolo per ogni grandezza usando una notazione che aiuti a ricordare di che grandezza si tratta. Per esempio, se è data la massa di un blocco, scrivere $m_b = 2.3 \text{ kg}$; se è dato un angolo, scrivere $\theta = 25^\circ$. Queste sono le *grandezze note*. Scrivere anche un simbolo per ogni *grandezza incognita* che si deve trovare. Se il problema richiede l'accelerazione di un corpo, scrivere $a = ?$, in modo che la grandezza incognita sia ben individuata fin dall'inizio.
2. Disegnare un diagramma di corpo libero (o più di uno) comprendente gli assi coordinati. Questi dovrebbero essere orientati in modo da rendere più semplici i calcoli successivi. Di solito ciò viene ottenuto disponendo gli assi nella direzione del maggior numero possibile di forze, oppure disponendo un asse nella direzione dell'accelerazione, se tale direzione è nota. Questo passo richiede un'attenta valutazione, e non ci sono un modo giusto o un modo sbagliato di farlo; semplicemente, ci sono uno o due modi semplici e molti modi difficili. La capacità di valutazione si acquista con la pratica.

I. Usando il diagramma di corpo libero, scrivere le componenti della seconda legge di Newton in termini delle grandezze note e incognite. Risolvere tali equazioni esprimendo ciascuna grandezza incognita in termini delle grandezze note. Infine, sostituire i valori numerici delle grandezze note (accompagnati dalle relative unità di misura) e calcolare le varie grandezze incognite.

Esempio 5.7

Tensione di una corda. Un secchio di massa $m = 8.4 \text{ kg}$ è appeso a due corde leggere, a e b , come appare nella Figura 5.11a. Per corda «leggera» si intende una corda la cui massa sia sufficientemente piccola perché il suo peso sia molto minore della forza che essa esercita. In questa approssimazione, si può considerare la corda non incurvata. Quando una corda (o un filo o un cavo) sono legati a un corpo, l'intensità della forza esercitata dalla corda viene chiamata *tensione* della corda. Determinare la tensione delle corde a e b .

Soluzione

Nella Figura 5.11b è riportato il diagramma di corpo libero relativo al secchio. Le forze esercitate dalle corde sul secchio sono rappresentate da F_a e F_b , e gli angoli che esse formano con l'orizzontale sono indicati con θ e ϕ . Dal momento che il secchio rimane in quiete, la sua accelerazione è nulla. Quindi la seconda legge di Newton fornisce $\Sigma F_x = 0$, ossia

$$-F_a \cos \theta + F_b \cos \phi = 0 \quad (\text{A})$$

e $\Sigma F_y = 0$, ossia

$$F_a \sin \theta + F_b \sin \phi - mg = 0 \quad (\text{B})$$

ove F_a e F_b sono le tensioni delle corde, e si è fatto uso della relazione $F_t = mg$. Le Equazioni (A) e (B) costituiscono un sistema di due equazioni in due incognite; le incognite sono F_a e F_b .

Se si risolve l'Equazione (A) rispetto a F_b ,

$$F_b = \frac{F_a \cos \theta}{\cos \phi} \quad (\text{C})$$

e si sostituisce questo valore di F_b nell'Equazione (B), si ottiene

$$F_a \sin \theta + \frac{F_a \cos \theta \sin \phi}{\cos \phi} - mg = 0$$

Ora si ha un'equazione che contiene una sola incognita. Risolvendo rispetto a F_a si ha

$$F_a = \frac{mg}{\sin \theta + \cos \theta \tan \phi} \quad (\text{D})$$

Per ottenere un'espressione analoga per F_b , si sostituisce nell'Equazione (C) il valore di F_a fornito dall'Equazione (D), il che porta a

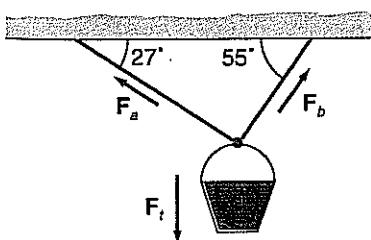
$$F_b = \frac{mg}{\sin \theta + \cos \phi \tan \theta} \quad (\text{E})$$

(Data l'Equazione (D), sarebbe stato possibile prevedere la forma dell'Equazione (E) in base a considerazioni di simmetria?) Inserendo i valori numerici delle grandezze date, si perviene a

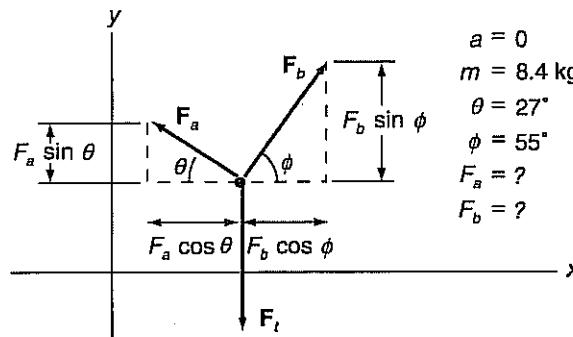
$$F_a = \frac{(8.4 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{\sin 27^\circ + \cos 27^\circ \tan 55^\circ} = 48 \text{ N}$$

e

$$F_b = \frac{(8.4)(9.8 \text{ m/s}^2)}{\sin 55^\circ + \cos 55^\circ \tan 27^\circ} = 74 \text{ N}$$



(a)



(b)

Figura 5.11

Esempio 5.7: (a) un secchio appeso a due corde. (b) Diagramma di corpo libero relativo al secchio.

■ Esempio 5.8

Un carrello con le ruote piccole e i supporti ben lubrificati è inizialmente in quiete e, all'istante $t = 0$, viene lasciato libero su un piano inclinato, come mostra la Figura 5.12a. La massa del carrello è $m = 1.3 \text{ kg}$. (a) Determinare l'intensità della forza esercitata dalla superficie del piano inclinato sul carrello. (b) Determinare il modulo dell'accelerazione del carrello. Per $t = 1.5 \text{ s}$, determinare (c) modulo della velocità del carrello e (d) la distanza percorsa.

Soluzione

Trascuriamo l'effetto della rotazione delle ruote e trattiamo il carrello come una particella. Dal momento che i supporti delle ruote sono ben lubrificati, trascuriamo inoltre gli attriti che tendono a rallentare il carrello; in altre parole, ammettiamo che la forza esercitata dalla superficie sul carrello abbia componente parallela alla superficie nulla. Pertanto questa forza è normale alla superficie, e viene denotata con F_N nel diagramma di corpo libero relativo al carrello (Figura 5.12b). Disponiamo l'asse y perpendicolarmente alla superficie perché non c'è alcun moto in tale direzione. Quindi $a_y = 0$ e la componente y della seconda legge fornisce $\Sigma F_y = 0$, ossia

$$F_N - mg \cos \theta = 0 \quad (1)$$

ove si è sfruttata la relazione $F_t = mg$. La componente x della seconda legge, $\Sigma F_x = ma_x$, fornisce

$$mg \sin \theta = ma \quad (2)$$

ove $a = |a_x| = a_x$ è il modulo dell'accelerazione.

(a) Dall'Equazione (A) si ha

$$F_N = mg \cos \theta = (1.3 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \cos 32^\circ = 11 \text{ N}$$

(b) Risolvendo l'Equazione (B) rispetto ad a , si ottiene

$$a = g \sin \theta = (9.8 \text{ m/s}^2) \sin 32^\circ = 5.2 \text{ m/s}^2$$

(c) Siccome l'accelerazione è costante e il carrello è partito dalla quiete, la sua velocità per $t = 1.5 \text{ s}$ è

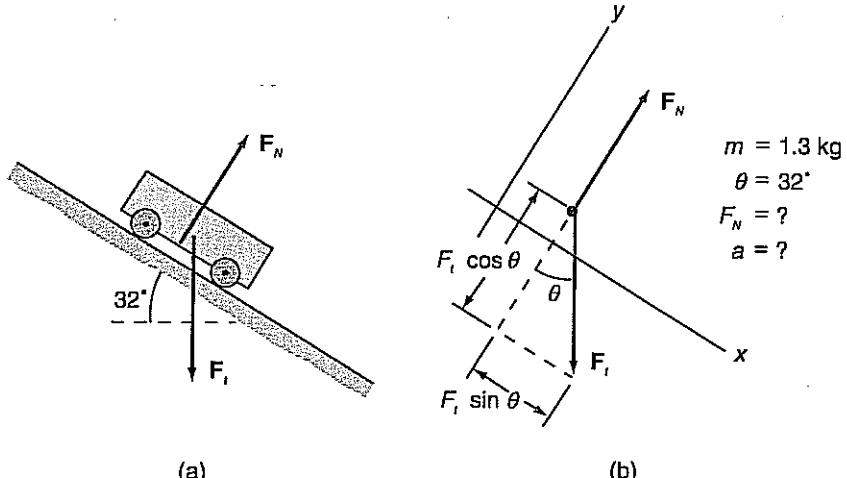
$$v = at = (5.2 \text{ m/s}^2)(1.5 \text{ s}) = 7.8 \text{ m/s}$$

(d) La distanza percorsa dopo 1.5 s è

$$d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(5.2 \text{ m/s}^2)(1.5 \text{ s})^2 = 5.8 \text{ m}$$

Figura 5.12

Esempio 5.8: (a) un carrello su un piano inclinato. (b) Diagramma di corpo libero relativo al carrello.



■ Esempio 5.9

A un carrello (di massa $m_C = 1.8 \text{ kg}$) con le ruote piccole e i supporti ben lubrificati è attaccato un blocco (di massa $m_B = 0.50 \text{ kg}$) tramite un filo che passa su una puleggia, come mostra la Figura 5.13a. Si ammetta che la puleggia ruoti liberamente e che la sua massa sia sufficientemente piccola perché l'effetto della sua rotazione sia trascurabile; in tal modo, l'unico effetto della puleggia è di cambiare la direzione del filo. Di conseguenza, la tensione è la stessa in tutta la lunghezza del filo, e le intensità delle forze esercitate dal filo sul carrello e sul blocco sono entrambe uguali alla tensione. Si determinino (a) il modulo dell'accelerazione del carrello (e del blocco) e (b) la tensione del filo.

Soluzione

Nelle Figure 5.13b e c sono riportati i diagrammi di corpo libero per il carrello e per il blocco. Dal momento che carrello e blocco sono collegati dal filo, le loro accelerazioni hanno il medesimo modu-

lo a. I sistemi di coordinate sono orientati in modo che l'accelerazione di ciascun corpo sia nella direzione $+x$ del rispettivo sistema. La componente x della seconda legge applicata al carrello fornisce

$$F_T = m_c a \quad (\text{A})$$

ove F_T è la tensione del filo. Per il blocco, la componente x della seconda legge è

$$m_B g - F_T = m_B a \quad (\text{B})$$

Le equazioni (A) e (B) costituiscono un sistema di due equazioni in due incognite; le incognite sono a e F_T .

(a) Se si sommano membro a membro l'Equazione (A) e l'Equazione (B), F_T viene eliminata e si ottiene

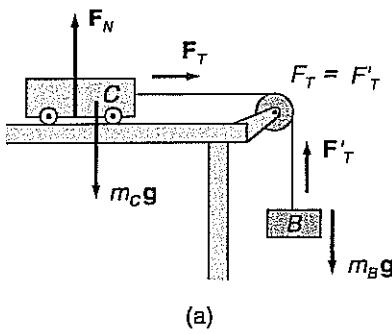
$$m_B g = m_B a + m_C a$$

Risolvendo rispetto ad a si ricava

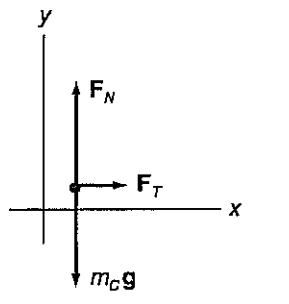
$$a = \frac{m_B}{m_C + m_B} g = \frac{0.50 \text{ kg}}{1.8 \text{ kg} + 0.50 \text{ kg}} 9.8 \text{ m/s}^2 = 2.1 \text{ m/s}^2$$

(b) Sostituendo nell'Equazione (A) l'espressione di a appena trovata, si perviene a

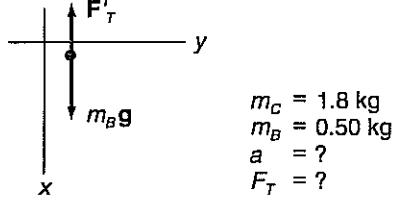
$$F_T = \frac{m_C m_B}{m_C + m_B} g = \frac{(1.8 \text{ kg})(0.50 \text{ kg})}{1.8 \text{ kg} + 0.50 \text{ kg}} 9.8 \text{ m/s}^2 = 3.8 \text{ N}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.13

Esempio 5.9: (a) un carrello trascinato lungo una superficie orizzontale da un filo cui è appeso un blocco che cade. (b) Diagramma di corpo libero relativo al carrello. (c) Diagramma di corpo libero relativo al blocco.

RIEPILOGO

Paragrafo 5.2 Forza e massa

La massa è una grandezza scalare. La massa di un corpo è proporzionale al suo peso. La forza è una spinta o una (at)trazione. È una grandezza vettoriale che può essere misurata con un dinamometro.

Paragrafo 5.3 La prima legge di Newton

La prima legge di Newton afferma che, se per un corpo $\Sigma F = 0$, allora $a = 0$. La prima legge di Newton viene usata per definire un sistema di riferimento inerziale.

Paragrafo 5.4 La seconda legge di Newton

Il moto di un corpo è determinato dalla seconda legge di Newton

$$\Sigma F = ma \quad (5.1)$$

Paragrafo 5.5 La terza legge di Newton

La terza legge di Newton afferma che quando due corpi esercitano delle forze l'uno sull'altro, queste forze sono uguali e opposte:

$$F_{ab} = -F_{ba} \quad (5.2)$$

Se un corpo interagisce con il chilogrammo campione, e la forza totale agente sul corpo e sul chilogrammo campione è data soltanto dalla loro forza di interazione, allora la massa m del corpo è definita come

$$m = 1 \text{ kg} \frac{a_c}{a}$$

ove a_c e a sono le accelerazioni del chilogrammo campione e del

Paragrafo 5.6 La forza peso

Il peso F_t di un corpo è la forza gravitazionale che la Terra esercita su di esso. Per un corpo sulla superficie della Terra o in prossimità di essa,

$$F_t = mg \quad (5.3)$$

QUESITI

5.1 Come corollario delle leggi del moto, Newton affermò:

Corollario I. Un corpo spinto da due forze simultaneamente, descriverà la diagonale di un parallelogramma nello stesso tempo nel quale descriverebbe separatamente i lati.

In termini moderni, quale proprietà delle forze stava descrivendo Newton? Spiega.

5.2 Misurando continuamente la velocità di un corpo, è possibile dire se la forza risultante che agisce sul corpo è nulla? Spiega.

5.3 È possibile che un corpo segua una traiettoria curva quando la forza risultante che agisce su di esso è nulla? Spiega.

5.4 Supponi di viaggiare in un'automobile a velocità costante, quando il guidatore improvvisamente schiaccia il freno cosicché vieni «spinto» in avanti. Questa «spinta» è stata esercitata su di te da qualche altro corpo? Se sì, identifica il corpo. Se nessun corpo ha esercitato la spinta, come spieghi la tua accelerazione rispetto all'automobile?

5.5 Supponi di trovarsi su una giostra che ruota con regolarità e di appoggiare sul pavimento un pattino in modo che sia allineato con l'estremità posteriore rivolta verso il centro della giostra e l'estremità anteriore in direzione opposta a quella del centro. Quando lasci andare il pattino in quiete (rispetto a te), esso accelera in avanti, in direzione radiale verso l'esterno della giostra. C'è una forza che agisce sul pattino ed è diretta radialmente verso l'esterno? Se sì, identifica il corpo che esercita tale forza. Se no, spiega perché il pattino accelera.

5.6 Un blocco di ghiaccio scende giù per uno scivolo curvo, come mostra la Figura 5.14, e arriva su un pavimento orizzontale. Quando il blocco esce dallo scivolo, continua per la sua traiettoria curva oppure comincia a muoversi in linea retta? Spiega.

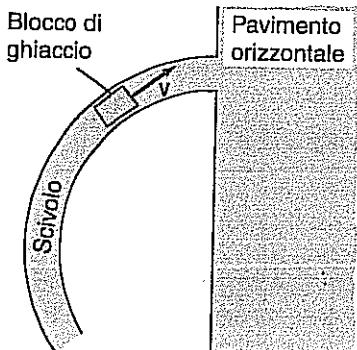


Figura 5.14 Quesito 5.6.

Supponiamo di far cadere gli oggetti a e b da una finestra del secondo piano. Entrambi gli oggetti vengono lasciati andare da fermi nello stesso istante, ed è $m_a > m_b$.

Paragrafo 5.7 Risoluzione dei problemi di meccanica

I passi da compiere per risolvere un problema di meccanica sono (i) fare uno schizzo, (ii) disegnare un diagramma di corpo libero, e (iii) applicare la seconda legge di Newton.

Ammettiamo che in ogni istante del tempo di caduta la forza dovuta alla resistenza dell'aria che si esercita sull'oggetto a sia uguale a quella che agisce sull'oggetto b . Quale dei due oggetti arriva prima a terra? Spiega.

5.8 Quale corpo esercita la forza che mantiene l'ago di una bussola orientato nella direzione nord-sud?

5.9 Quando il guidatore di un'automobile schiaccia il freno, quale oggetto esercita la forza che fa rallentare la vettura? E se la cosa accadesse quando la strada è coperta di ghiaccio?

5.10 L'accelerazione che compare nella seconda legge di Newton deve essere misurata relativamente a un sistema di riferimento di un tipo particolare? Se sì, quale tipo di sistema di riferimento si deve usare? C'è un numero limitato di questi sistemi di riferimento?

5.11 Nel sistema britannico di unità, la massa si misura in sl (slugs), la lunghezza in ft (piedi), e la forza in lb (libbre), cosicché $1 \text{ lb} = (1 \text{ sl})(1 \text{ ft/s}^2)$. Qual è la tua massa in sl?

5.12 Un tuo amico ti dice che la terza legge di Newton non può essere vera perché predice che un oggetto non può essere mosso. L'amico dice: «Supponiamo che io spinga un carrello. Per la terza legge, la forza esercitata su di me dal carrello è uguale e opposta alla forza che io esercito sul carrello. Di conseguenza, la forza risultante è nulla e la terza legge predice che il carrello non può essere spostato.» Spiega che cosa c'è di sbagliato in questo ragionamento.

5.13 Due corde, a e b , possono reggere la stessa tensione massima prima di spezzarsi. Ma una forza minore di questa tensione massima fa allungare la corda a molto più della corda b . Se entrambe le corde hanno un'estremità legata a un supporto rigido, e all'altra estremità viene dato un rapido strattone, quale corda è più probabile che si spezzi? Spiega.

5.14 Perché in un diagramma di corpo libero è spesso conveniente orientare gli assi orizzontalmente e verticalmente? Perché nell'Esempio 5.8 era preferibile orientare gli assi parallelamente e perpendicolarmenete alla superficie?

5.15 Supponi che un tuo amico sostenga che la prima legge di Newton non è necessaria per definire un sistema di riferimento inerziale. L'amico afferma che un sistema di riferimento inerziale è semplicemente un riferimento che è o in quiete o in moto con velocità costante. Spiega perché questa definizione è inadeguata.

5.16 Supponiamo di stare in piedi su una giostra in rotazione e di tenere un sasso appeso all'estremità di una corda. La corda penderà verticalmente verso il basso? La forza risultante che agisce sul sasso è nulla? Il nostro sistema di riferimento è inerziale?

- 5.17** Supponiamo di lasciar cadere una biglia in un vaso di miele. Mentre la biglia affonda, il modulo della sua velocità è praticamente costante. Qual è la forza risultante che agisce sulla biglia mentre affonda? Quali sono il modulo e la direzione della forza esercitata dal miele sulla biglia?

- 5.18** Se la corda *b* nella Figura 5.15 viene tirata verso il basso con una forza che aumenta gradualmente, alla fine si spezza la corda *a*. Ma se la corda *b* riceve un rapido strattone verso il basso, è più probabile che si spezzi la corda *b*. Spiega.

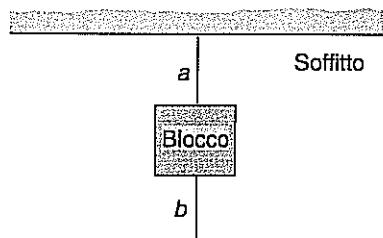


Figura 5.15 Quesito 5.18.

- 5.19** I vettori forza rappresentati nella Figura 5.16 hanno tutti lo stesso modulo. Quali combinazioni (se ve ne sono) di queste forze, se esercitate su un corpo, darebbero luogo a una forza risultante nulla?

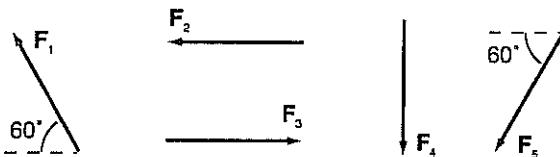


Figura 5.16 Quesito 5.19.

- 5.20** Le corde e le bilance a molla rappresentate nella Figura 5.17 hanno pesi trascurabili, ciascun blocco pesa 25 N, e le pulegge sono sostanzialmente prive di attrito. Qual è la tensione di ciascuna delle corde? Che cosa segna ciascuna delle bilance a molla?
- 5.21** Una fune è ben tesa tra due alberi, e un mattone viene appeso con una breve corda nel punto medio della fune. È possibile tendere la fune tanto da farla stare diritta?
- 5.22** Un cavallo tira un carretto verso la città (in direzione nord) esercitando una forza orizzontale di modulo F . Quali sono l'intensità e la direzione della forza esercitata dal carretto sul cavallo?
- 5.23** C'è una relazione tra la direzione della forza risultante che agisce su un corpo e la direzione della velocità del corpo? Se sì, qual è questa relazione?

ESERCIZI

Paragrafo 5.2 Forza e massa

- 5.1** L'unità di massa nel sistema britannico è lo slug (sl), e $1.000 \text{ sl} = 14.59 \text{ kg}$. Qual è la massa in sl di una persona di 72 kg?
- 5.2** La densità dell'acqua è di circa 1000 kg/m^3 . (a) La tonnellata (t) è un'unità di massa, per definizione pari a 1000 kg. Qual è la densità dell'acqua in t/m^3 ? (b) Qual è la densità dell'acqua in g/cm^3 ?

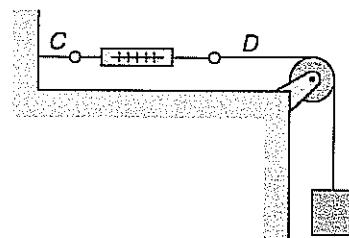
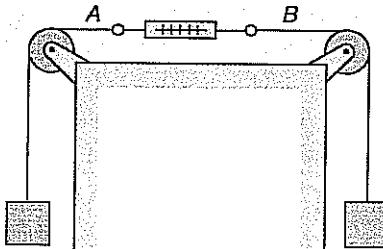


Figura 5.17 Quesito 5.20.

- 5.24** Quali sono l'intensità e la direzione della forza gravitazionale che esercita sulla Terra?
- 5.25** Supponi di stare in piedi su una bilancia a molla in un ascensore. In quale delle seguenti situazioni il tuo peso apparente è massimo e in quale è minimo? L'ascensore (a) sale con velocità di modulo costante, (b) scende con velocità di modulo costante, (c) sale con velocità di modulo crescente, (d) sale con velocità di modulo decrescente.
- 5.26** Se fossimo su un altro pianeta, considereremmo il peso di un corpo come la forza gravitazionale esercitata da quel pianeta sul corpo. Pensai che il tuo peso sarebbe diverso su un altro pianeta? Pensai che la tua massa sarebbe diversa su un altro pianeta?
- 5.27** Scrivere le dimensioni della massa [M] in termini della forza [F], della lunghezza [L] e del tempo [T].
- 5.28** Si completi la seguente tabella:
- | Simbolo | Grandezza | Tipo | Unità SI |
|------------|----------------------|---------|----------|
| ΣF | | Vettore | |
| F_{ab} | | | N |
| F_T | Tensione di una fune | | |
| F_t | | Vettore | |
| m | | | |

- 5.3** Il ton è un'unità di forza, per definizione pari a 2000 lb. (a) Convertire in N una forza di 1.6 ton. (b) Convertire in ton una forza di 5.6 MN.
- 5.4** La dina (dyn) è l'unità di misura della forza nel sistema di unità cgs (centimetro-grammo-secondo), ed è per definizione pari a $1 \times 10^{-5} \text{ N}$. (a) Convertire in dyn una forza di 34 mN. (b) Convertire in N una forza di 630 dyn. (c) Calcolare il proprio peso in dyn.

Paragrafo 5.3 La prima legge di Newton

- 5.5** Su un corpo agiscono due forze, $F_1 = -(2.4 \text{ N})\mathbf{i} + (6.1 \text{ N})\mathbf{j}$ e $F_2 = (8.5 \text{ N})\mathbf{i} - (9.7 \text{ N})\mathbf{j}$. (a) Qual è il modulo di ciascuna di queste forze? (b) Qual è l'angolo compreso tra ciascuna di queste forze e l'asse x ? (c) Tracciare un diagramma di corpo libero in cui siano rappresentate queste forze. (d) Determinare l'intensità e la direzione della forza risultante che agisce sul corpo.
- 5.6** Due forze, F_1 e F_2 , agiscono su un corpo. Se $F_1 = -(6.1 \text{ N})\mathbf{i} + (5.6 \text{ N})\mathbf{j} - (4.7 \text{ N})\mathbf{k}$ e la forza risultante che agisce sul corpo è $\Sigma F = -(4.1 \text{ N})\mathbf{i} - (2.4 \text{ N})\mathbf{j} + (1.1 \text{ N})\mathbf{k}$, determinare F_2 .
- 5.7** Facendo scivolare una grande cassa sul pavimento, due persone esercitano su di essa le forze orizzontali F_A e F_B . La forza F_A è diretta verso nord e ha modulo 130 N, mentre F_B è diretta 32° a est del punto cardinale nord e ha modulo 180 N. Quali sono l'intensità e la direzione della forza che da sola ha il medesimo effetto dell'insieme di queste due forze?
- 5.8** Nel diagramma di corpo libero di Figura 5.18, $F_1 = 22 \text{ N}$, $F_2 = 18 \text{ N}$ e $F_3 = 16 \text{ N}$. (a) Determinare le componenti di ciascuna di queste forze. (b) Determinare le componenti ΣF_x e ΣF_y della forza risultante. (c) Determinare la forza risultante ΣF in termini dei versori degli assi coordinati. (d) Determinare il modulo e la direzione della forza risultante.

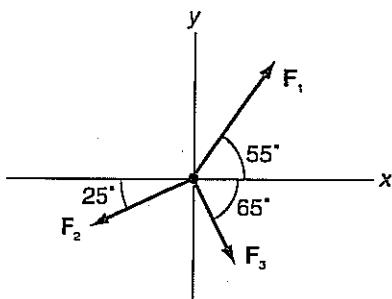


Figura 5.18 Esercizio 5.8.

- 5.9** Poco dopo essere saltato giù da un aeroplano, un paracadutista acrobatico, il cui peso è di 720 N, raggiunge una velocità che rimane sostanzialmente costante. In questa situazione, sul paracadutista si esercitano due forze significative. (a) Da che cosa viene esercitata ciascuna di queste due forze? (b) Quali sono il modulo e la direzione di ciascuna delle due?
- 5.10** Una scatola viene trascinata tramite un dinamometro su un pavimento orizzontale, a velocità costante. Sulla scatola agiscono tre forze significative: quella esercitata dal dinamometro, che è orizzontale e ha l'intensità di 15 N; il peso della scatola, che è di 25 N; e la forza esercitata dal pavimento. Determinare intensità e direzione di quest'ultima forza.

Paragrafo 5.4 La seconda legge di Newton

- 5.11** Un'automobile della massa di 830 kg parte da ferma e raggiunge una velocità di 22 m/s dopo 10 s. Ammettendo che la sua accelerazione sia costante, determinare il modulo della forza risultante che agisce sull'automobile.

- 5.12** Un tubo a raggi catodici (come quello di un televisore) contiene un elemento, chiamato cannone elettronico, che emette un fascio di elettroni. Supponiamo che in un cannone elettronico un elettrone venga accelerato dalla quiete a una velocità di $2 \times 10^7 \text{ m/s}$ su una distanza di 10 mm. Si calcoli il modulo della forza risultante che agisce su un elettrone in questo cannone elettronico. (*Suggerimento:* si usi l'Equazione (3.12) per determinare l'accelerazione dell'elettrone. La massa dell'elettrone è pari a $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.)
- 5.13** Il nucleo dell'atomo è molto piccolo, il suo diametro essendo di circa 10^{-14} m . Supponiamo che in una reazione nucleare un neutrone con una velocità di $1 \times 10^7 \text{ m/s}$ collida con un nucleo e si arresti all'interno di questo. (a) Si calcoli il modulo della forza risultante che agisce sul neutrone durante la reazione. (*Suggerimento:* si usi l'Equazione (3.12) per ricavare l'accelerazione del neutrone. La massa del neutrone è pari a $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.) (b) Si calcoli l'intervallo di tempo durante il quale si verifica la reazione.
- 5.14** Durante il servizio, una palla da tennis accelera dalla quiete (quasi) a una velocità di modulo pari a circa 50 m/s. La massa di una palla da tennis è all'incirca di 0.06 kg. Si calcoli il modulo della forza esercitata dalla racchetta sulla palla, nell'ipotesi che l'accelerazione sia costante su una distanza di 1 m. (*Suggerimento:* si usi l'Equazione (3.12) per determinare l'accelerazione della palla.)
- 5.15** Si stimi la forza esercitata sul pallone ($m = 0.3 \text{ kg}$) da un calciatore che batte un rigore.
- 5.16** Facciamo l'ipotesi (infondata) che l'unica forza agente sulla Via Lattea (la galassia in cui ci troviamo) sia la forza gravitazionale esercitata dalla galassia di Andromeda. Sapendo che la massa della Via Lattea è di $7 \times 10^{41} \text{ kg}$, determinare il modulo della sua accelerazione. (Si veda la Tabella 5.1.) In quale sistema di riferimento risulterebbe misurata questa accelerazione?
- 5.17** Una mazza da baseball colpisce una palla da 0.15 kg in modo tale da invertire la sua velocità da 48 m/s in direzione orizzontale verso est a 81 m/s in direzione orizzontale verso ovest, in un intervallo di tempo di 0.01 s. Calcolare la forza esercitata dalla mazza sulla palla, nell'ipotesi che la forza sia costante e trascurando tutte le altre forze che agiscono sulla palla.
- 5.18** Si calcoli la forza esercitata su un proiettile dai gas in espansione nella canna di un fucile durante uno sparo. La canna è lunga 0.5 m; il proiettile, che ha una massa di 2 g, fuoriesce dalla canna con una velocità di 400 m/s. Si ammetta che la forza sia costante durante lo sparo e si trascurino tutte le altre forze che agiscono sul proiettile.

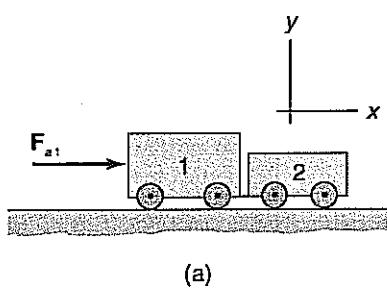
Paragrafo 5.5 La terza legge di Newton

- 5.19** Facendo uso della Tabella 5.1, si determinino le intensità (a) della forza gravitazionale esercitata dalla Via Lattea sulla galassia di Andromeda e (b) della forza gravitazionale esercitata dalla Terra sul Sole.
- 5.20** Un autocarro la cui massa è 2200 kg si scontra con un'automobile sportiva che ha massa pari a 550 kg, e durante l'urto la forza totale agente su ciascun veicolo coincide sostanzialmente con la forza esercitata dall'altro. Se il modulo dell'accelerazione dell'autocarro è di 10 m/s^2 , qual è il modulo dell'accelerazione dell'automobile sportiva?

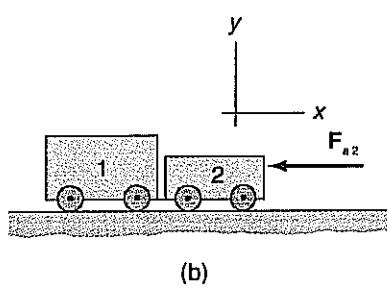
- 5.21** I carrelli 1 e 2, entrambi di massa pari a 1.0 kg, sono dotati di respingenti a molla analoghi a quelli dei carrelli della Figura 5.9 (Esempio 5.5). Al carrello 1 è attaccato un blocco di massa incognita m , e i carrelli vengono spinti uno contro l'altro, comprimendo i loro respingenti a molla, e quindi lasciati andare. I moduli delle accelerazioni dei carrelli sono $a_1 = 0.51 \text{ m/s}^2$ e $a_2 = 1.14 \text{ m/s}^2$. I carrelli hanno ruote piccole e supporti ben lubrificati. Determinare m . Esplicitare ogni ipotesi fatta.

- 5.22** Un libro di chimica il cui peso è di 13 N viene posto sopra il libro di storia della Figura 5.8 (Esempio 5.4), di modo che si ha una pila di tre libri e non più di due. Identificare tutte le forze che agiscono su ciascun libro con un'appropriata notazione a due indici e determinare il modulo e la direzione di ognuna di queste forze. Quante volte occorre applicare la terza legge di Newton e quante volte la seconda legge, per ricavare queste forze?

- 5.23** a) Due carrelli, 1 e 2, vengono spinti da una forza applicata dall'esterno, F_{a1} , che si esercita sul carrello 1, come mostra la Figura 5.19a. Si trattino entrambi i carrelli come particelle e si trascurino gli attriti che tendono a rallentarli. Sapendo che $F_{a1} = 12 \text{ N}$, $m_1 = 4.0 \text{ kg}$ e $m_2 = 2.0 \text{ kg}$, si determinino intensità e direzione di ciascuna delle forze di interazione F_{12} e F_{21} . (b) Ora supponiamo che venga eliminata la forza F_{a1} e che sul carrello 2 agisca una forza applicata dall'esterno F_{a2} , come mostra la Figura 5.19b, ove $F_{a2} = 12 \text{ N}$. Si determinino l'intensità e la direzione delle forze di interazione in quest'ultimo caso. (c) Si spieghi perché il modulo delle forze di interazione è diverso nei due casi.



(a)



(b)

Figura 5.19 Esercizio 5.23.

Paragrafo 5.6 La forza peso

- 5.24** Se fossimo su un altro pianeta, come per esempio Marte, definiremmo il peso di un corpo come forza gravitazionale esercitata da quel pianeta sul corpo. Su Marte l'accelerazione di un corpo in caduta libera è di 3.8 m/s^2 . Qual è il peso di una persona di 68 kg su Marte?

- 5.25** Un astronauta che si trova sulla superficie del pianeta Illocorb sta su una bilancia a molla che segna 950 N. Se

la massa dell'astronauta è di 71 kg, qual è l'accelerazione di un corpo in caduta libera su Illocorb?

- 5.26** Una persona la cui massa è di 58 kg è in piedi su una bilancia a molla in un ascensore. Quali sono il modulo e la direzione dell'accelerazione dell'ascensore in un istante in cui la bilancia segna (a) 570 N; (b) 420 N; (c) 710 N?
- 5.27** (a) Determinare il peso di un elettrone. (La massa dell'elettrone è pari a $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.) (b) Confrontare la risposta con la forza risultante che agisce sull'elettrone nel cannone elettronico del tubo a raggi catodici descritto nell'Esercizio 5.12.
- 5.28** (a) Determinare il peso di un neutrone. (La massa del neutrone è pari a $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.) (b) Confrontare la risposta con la forza risultante che agisce su un neutrone quando viene assorbito da un nucleo secondo la reazione descritta nell'Esercizio 5.13.

- 5.29** Una persona di massa pari a 77 kg è in piedi su una bilancia a molla in un ascensore. Qual è il peso apparente della persona mentre l'ascensore (a) accelera verso l'alto con un'accelerazione di 2.8 m/s^2 , (b) accelera verso il basso con un'accelerazione di 3.1 m/s^2 , (c) sale con una velocità costante di 4.4 m/s ?

Paragrafo 5.7 Risoluzione dei problemi di meccanica

- 5.30** Uno sciatore di massa pari a 52 kg scende lungo un pendio rettilineo che forma un angolo di 24° con l'orizzontale. (a) Trascurando gli attriti, determinare il modulo dell'accelerazione dello sciatore. (b) Qual è il modulo della velocità dello sciatore 1.0 s dopo che è partito da fermo? (c) Che distanza ha percorso lo sciatore in 1.0 s?
- 5.31** Una fune è legata alla parte superiore di una scatola di massa 24 kg ferma sul pavimento. La tensione massima che la fune può sopportare senza spezzarsi è di 310 N. Qual è il tempo minimo in cui la scatola può essere sollevata verticalmente di 4.6 m tirando la fune?
- 5.32** Determinare la tensione del cavo di trazione di un ascensore di massa 1500 kg, quando l'ascensore accelera (a) verso l'alto con un'accelerazione di 2.1 m/s^2 e (b) verso il basso con un'accelerazione di 2.1 m/s^2 . Trascurare le forze diverse dalla tensione del cavo e dal peso dell'ascensore.
- 5.33** Una slitta di massa pari a 32 kg viene trascinata su una superficie orizzontale ghiacciata da una fune, come mostra la Figura 5.20. La tensione costante della fune è di 140 N e le forze d'attrito sono trascurabili. (a) Disegnare il diagramma di corpo libero relativo alla slitta. (b) Quali sono l'intensità e la direzione della forza esercitata dalla superficie sulla slitta? (c) Qual è il modulo dell'accelerazione della slitta? (d) Se parte da fermo, che distanza percorre la slitta in 1.3 s?

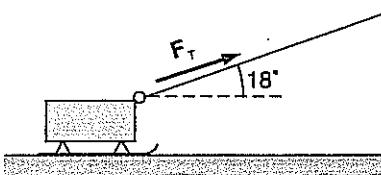


Figura 5.20 Esercizio 5.33.

- 5.34** Un'automobile di massa pari a 1430 kg accelera nella stessa direzione della sua velocità lungo una strada orizzontale diritta, e $a = 1.95 \text{ m/s}^2$. (a) Qual è l'intensità della forza risultante che agisce sull'automobile? (b) Supponendo che la resistenza dell'aria eserciti sull'automobile una forza di 513 N diretta in verso opposto alla velocità, determinare le componenti orizzontale e verticale della forza esercitata dalla strada sull'automobile.
- 5.35** Il carrello rappresentato nella Figura 5.21 ha una massa di 2.4 kg e rimane in quiete. Gli assi del carrello sono ben lubrificati, cosicché la forza esercitata su di esso dalla superficie ha una componente parallela alla superficie stessa trascurabile. (a) Determinare l'intensità della forza esercitata dalla superficie. (b) Determinare la tensione della corda.

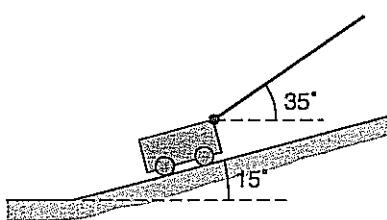


Figura 5.21 Esercizio 5.35.

- 5.36** La massa del blocco sospeso rappresentato nella Figura 5.22 è di 45 kg. Determinare la tensione di ciascuna delle corde.

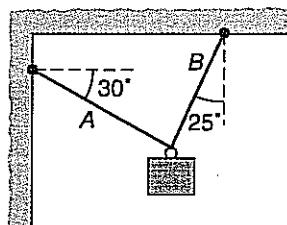


Figura 5.22 Esercizio 5.36.

- 5.37** La sfera *A* è appesa a un filo leggero e la sfera *B* è attaccata a una bacchetta sottile (Figura 5.23). Su ciascuna sfera viene localizzata una carica elettrica che fa sì che esse si attraggano. Quindi, la forza esercitata da *B* su *A* è diretta verso *B*. La sfera *B* viene tenuta vicina ad *A*, in modo che le due sfere siano disposte come in figura. Si osserva che *A* rimane ferma. La massa della sfera *A* è di 0.62 g. Determinare (a) l'intensità della forza

elettrica che le sfere esercitano l'una sull'altra e (b) la tensione del filo.

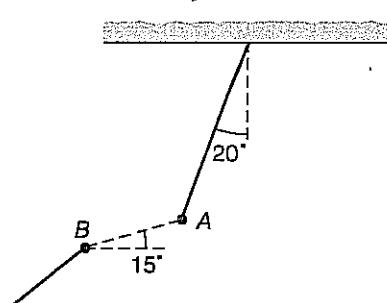


Figura 5.23 Esercizio 5.37.

- 5.38** Il sistema carrello-blocco rappresentato nella Figura 5.1 (Esempio 5.9) viene lasciato libero mentre è in quiete e il blocco *B* è 1.2 m sopra il pavimento. Quanto tempo occorrerà perché il blocco tocchi terra?
- 5.39** Un uccello di massa $m = 26 \text{ g}$ si posa nel mezzo di una corda tesa (Figura 5.24). (a) Si dimostri che la tensione della corda è data da $F_T = mg/(2 \sin \theta)$. Si determini la tensione quando (b) $\theta = 5^\circ$ e (c) $\theta = 0.5^\circ$. Si ammetta che le due metà della corda siano rettilinee.



Figura 5.24 Esercizio 5.39

- 5.40** Una ragazza spinge una slitta di massa pari a 31 kg con velocità costante lungo una salita rettilinea innevata, esercitando una forza orizzontale sulla slitta, come mostra la Figura 5.25. Si trascuri la forza d'attrito esercitata dalla superficie sulla slitta, ammettendo che la forza esercitata dalla superficie sulla slitta non abbia una componente parallela alla superficie medesima. Si determini l'intensità delle forze esercitate (a) dalla ragazza e (b) dalla superficie.

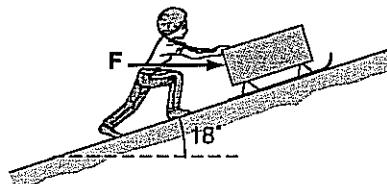


Figura 5.25 Esercizio 5.40.

PROBLEMI

- 5.1** Quando la Luna è allo zenit mentre il Sole tramonta, la forza F_{L} che la Terra esercita sulla Luna è praticamente perpendicolare alla forza F_{SL} che il Sole esercita sulla Luna, come mostra la Figura 5.26. Sapendo che $F_{\text{L}} = 1.98 \times 10^{20} \text{ N}$, $F_{\text{SL}} = 4.36 \times 10^{20} \text{ N}$, che tutte le altre forze agenti sulla Luna sono trascurabili, e che la massa della Luna è di $7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$, determinare il modulo dell'accelerazione della Luna. Questa accelerazione della Luna è relativa alla Terra? Se no, rispetto a quale sistema di riferimento è misurata?

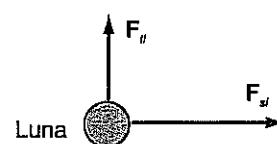


Figura 5.26 Problema 5.1.

- 5.2** Nel sistema carrello-blocco di Figura 5.27, il carrello ha massa m_C e il blocco ha massa m_B . Trovare espressioni (a) del modulo a dell'accelerazione del carrello, (b) della

tensione F_T della corda, (c) della forza F_N esercitata dalla superficie sul carrello. Esplicitare le ipotesi che è necessario fare per risolvere il problema. (d) Calcolare a , F_T e F_N quando $\theta = 30^\circ$, $m_C = 4.0 \text{ kg}$ e $m_B = 2.5 \text{ kg}$. (e) Rifare la parte (d) con $m_B = 2.0 \text{ kg}$. (f) Rifare la parte (d) con $m_B = 1.5 \text{ kg}$.

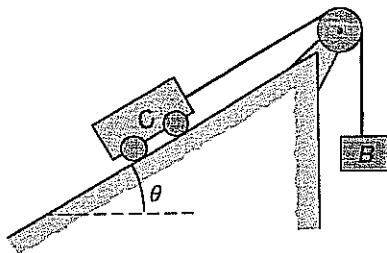


Figura 5.27 Problema 5.2.

- 5.3 **La mongolfiera.** La forza che tiene su un velivolo più leggero dell'aria, come un pallone ad aria calda o un dirigibile, viene detta *spinta di Archimede* F_A . Questa forza è esprimibile mediante il peso dell'aria spostata da parte del velivolo. Supponiamo che un pallone aerostatico di massa M abbia un'accelerazione diretta verso il basso di modulo a . (a) Dimostrare che la massa m della zavorra che occorre gettare fuori bordo per far sì che il pallone acceleri verso l'alto con intensità a è $m = 2Ma/(g + a)$. Quali ipotesi si debbono fare per risolvere il problema? (b) Calcolare m per il caso in cui $M = 400 \text{ kg}$ e $a = 0.2 \text{ m/s}^2$.

- 5.4 Una scimmia di massa pari a 12 kg si arrampica su una corda leggera, come mostra la Figura 5.28. La corda passa su una carrucola ed è attaccata a un casco di banana di massa 16 kg. La massa e l'attrito della puleggia sono trascurabili, cosicché l'unico effetto della puleggia è di invertire la direzione della corda. Qual è la massima accelerazione che la scimmia può avere senza sollevare le banane?

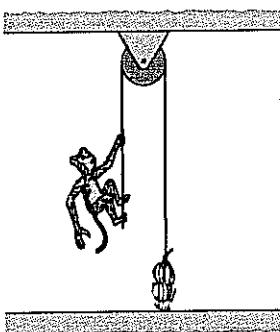


Figura 5.28 Problema 5.4.

- 5.5 **La macchina di Atwood.** La macchina di Atwood rappresentata nella Figura 5.29 può essere usata per misurare g . Se i due blocchi hanno quasi la stessa massa, l'accelerazione del sistema è piccola e g può essere determinata senza bisogno di misurare intervalli di tempo brevi. Si ammetta che la massa e l'attrito della puleggia siano trascurabili (cosicché l'unico effetto della puleggia è di invertire la direzione del filo leggero). (a) Dimostrare che g può essere ricavata dall'espressione

$$g = \frac{a(m_2 + m_1)}{m_2 - m_1}$$

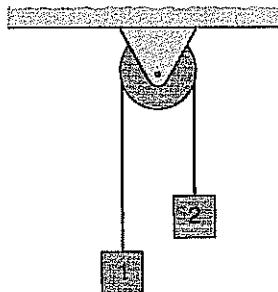


Figura 5.29 Problema 5.5: la macchina di Atwood.

In questa espressione, a è il modulo dell'accelerazione dei blocchi, e si è supposto che la massa m_2 del blocco 2 fosse maggiore della massa m_1 del blocco 1. (b) Supponiamo di essere inviati sul pianeta Norc a misurare il modulo g dell'accelerazione di gravità alla sua superficie. Usando la macchina di Atwood con $m_2 = 4.85 \text{ kg}$ e $m_1 = 4.65 \text{ kg}$, lasciamo cadere i blocchi da fermi e constatiamo che essi percorrono una distanza di 0.50 m in 2.5 s. Qual è il valore di g su Norc?

- 5.6 Un ragazzo di massa m mette un piede in un cappio all'estremità di una corda leggera che passa su una puleggia, e si solleva con una velocità costante tirando l'altro capo della corda (Figura 5.30). Trascurando la massa e l'attrito della puleggia e la massa della corda, determinare la forza esercitata su quest'ultima (a) dalle mani del ragazzo e (b) dal piede del ragazzo.

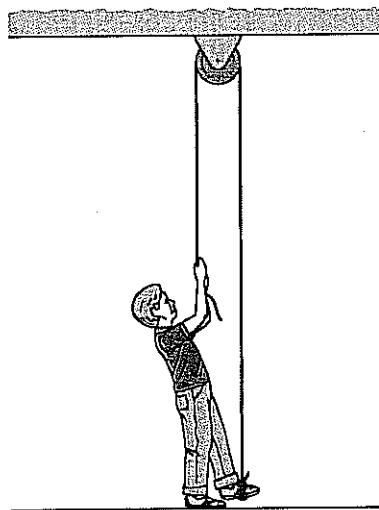


Figura 5.30 Problema 5.6.

- 5.7 Tre carrelli connessi tra loro da dei fili vengono tirati lungo una rotaia a cuscinello d'aria da una forza F diretta orizzontalmente e tale che il modulo dell'accelerazione del sistema è 2.0 m/s^2 (Figura 5.31). Trascurando l'attrito, si determini la tensione di ciascun filo. Le masse dei carrelli sono $m_a = 2.0 \text{ kg}$, $m_b = 1.0 \text{ kg}$ e $m_c = 2.0 \text{ kg}$.

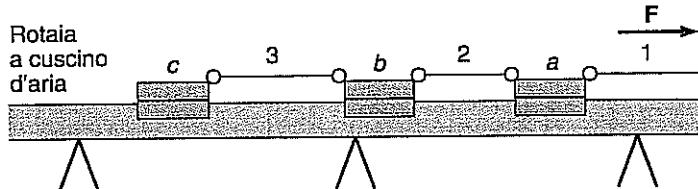


Figura 5.31 Problema 5.7.

- 5.8** Si trovi un'espressione dell'accelerazione del blocco *B* di Figura 5.32 in funzione di m_C , m_B e g . Si ammetta che le ruote del carrello siano piccole e abbiano supporti ben lubrificati. Si trascurino la massa e l'attrito delle pulegge, nonché la massa della corda.

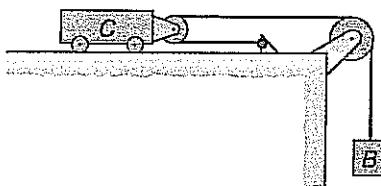


Figura 5.32 Problema 5.8.

- 5.9** Il blocco a forma di cuneo rappresentato nella Figura 5.33 ha un'accelerazione verso destra tale che il carrello non rotola né su né giù lungo la sua faccia inclinata. Le ruote del carrello sono piccole e i loro supporti sono ben lubrificati. (a) Dimostrare che $a = g \tan \theta$. (b) Che cosa accade se $a > g \tan \theta$?

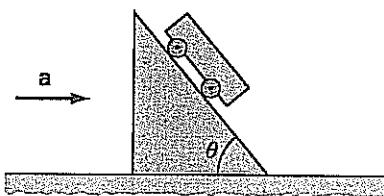


Figura 5.33 Problema 5.9.

- 5.10** In un incontro di football americano un attaccante di massa pari a 130 kg blocca un difensore di seconda linea di massa pari a 110 kg. L'accelerazione di entrambi i giocatori è di 0.11 m/s^2 in direzione orizzontale verso nord, ossia nella direzione in cui spinge l'attaccante. La componente orizzontale della forza esercitata dall'attaccante sul terreno è 1335 N. Determinare intensità e direzione delle seguenti forze: (a) quella esercitata dall'attaccante sul difensore, (b) quella esercitata dal difensore sull'attaccante, (c) quella esercitata dal difensore sul terreno, (d) quella esercitata dal terreno sul difensore.

- 5.11** Su un lago gelato, una ragazza di massa pari a 54 kg con i pattini da ghiaccio tira con una forza costante una corona leggera che è legata a una slitta di massa 41 kg. Inizialmente la slitta si trova a 22 m dalla ragazza, ed entrambe sono in quiete. Trascurando l'attrito, si calcoli la distanza percorsa dalla ragazza quando viene a contatto con la slitta.

- 5.12** (a) Dimostrare che la tensione della corda nella macchina di Atwood (Figura 5.29) è data da

$$F_T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

- (b) Per il caso in cui $m_2 > m_1$, dimostrare che $m_1 g < F_T < m_2 g$.

APPLICAZIONI DELLE LEGGI DEL MOTO DI NEWTON

6.1 INTRODUZIONE

La seconda legge di Newton è l'equazione del moto. Se abbiamo modo di determinare le forze che agiscono su un corpo, allora, date la posizione iniziale e la velocità iniziale del corpo, possiamo applicare la seconda legge e determinare il suo moto successivo. In alcuni casi questo procedimento viene rovesciato: cioè, in base alle misurazioni del moto di un corpo, si determinano le forze ad esso applicate. In questo capitolo useremo proprio questo metodo per indagare la natura delle forze di contatto. Studieremo inoltre la dinamica del moto circolare uniforme. Infine discuteremo come il moto venga descritto da un osservatore in un sistema di riferimento non inerziale.

6.2 FORZE DI CONTATTO: LA FORZA NORMALE E LA FORZA D'ATTRITO

Le forze di contatto, di cui chiunque ha esperienza quotidiana, hanno tra l'altro, come effetto ovvio, di impedire ai corpi di compenetrarsi. L'interazione fondamentale responsabile di queste forze è la forza elettromagnetica agente tra gli atomi e le molecole, la quale opera al livello dei loro costituenti, elettroni e nuclei. A questo livello microscopico, le forze di contatto coinvolgono molte particelle e sono assai complesse e non del tutto comprese. Fortunatamente il comportamento macroscopico di queste forze è molto più semplice, e noi considereremo le forze di contatto soltanto a quest'ultimo livello.

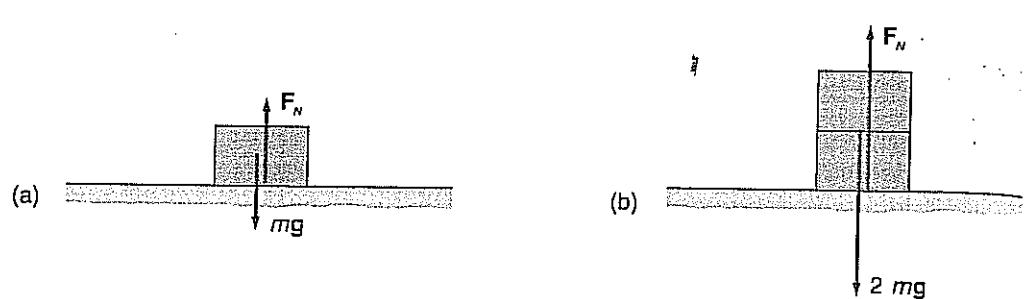
C'è un modo particolarmente conveniente di descrivere le forze di contatto che agiscono tra le superfici piane di due corpi solidi. Il metodo comporta la scomposizione di una forza di contatto in due forze, una parallela e l'altra perpendicolare alla superficie di contatto, che vengono poi trattate come forze distinte. La forza parallela alla superficie viene chiamata *forza d'attrito*, e la forza perpendicolare alla superficie viene detta *forza normale*.

La forza normale. Supponiamo che un blocco di massa m sia in quiete su una superficie orizzontale, mentre su di esso si esercitano soltanto il suo peso e la forza di contatto dovuta alla superficie, come mostra la Figura 6.1a. La forza esercitata dalla superficie sostiene il blocco mantenendolo in quiete. Dal momento che l'accelerazione del blocco è nulla, la forza risultante che agisce su di esso è nulla, il che significa che la forza di contatto è uguale e opposta al peso del blocco. Questa forza di contatto è detta *forza normale* F_N , perché è diretta perpendicolarmente, o normalmente, alla superficie¹. Nel caso illustrato nella Figura 6.1a, $F_N = mg$. Supponiamo ora di mettere un altro blocco di massa m sopra il primo, formando così un blocco composto di massa $2m$ (Figura 6.1b). Il peso è così raddoppiato, e per sorreggere il blocco composto, anche la forza normale raddoppia: $F_N = 2mg$. Ciò significa che la forza normale si modifica in modo da impedire al blocco di accelerare perpendicolarmente alla superficie.

¹ Essa è detta anche *forza vincolare*, perché la superficie che la esercita agisce come un vincolo, limi-

Figura 6.1

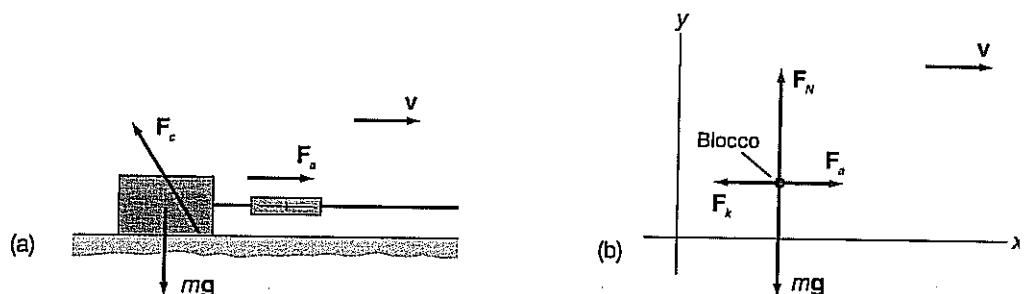
- (a) Un blocco di massa m in quiete su una superficie. La forza normale F_N viene esercitata dalla superficie sul blocco: $F_N = mg$.
 (b) Quando sopra al primo blocco ne viene appoggiato un secondo, anch'esso di massa m , la forza normale raddoppia: $F_N = 2mg$.



La forza di attrito cinetico². La Figura 6.2a mostra un blocco di massa m che viene tirato con velocità costante da un dinamometro su una superficie orizzontale. Sui blocchi agiscono tre forze: F_a , la forza applicata dal dinamometro; $F_t = mg$, il peso del blocco; e F_c , la forza di contatto esercitata dalla superficie. Nel diagramma di corpo libero relativo al blocco (Figura 6.2b), la forza di contatto è rappresentata da due forze: F_k , la forza d'attrito (parallela alla superficie e opposta alla velocità), e F_N , la forza normale (perpendicolare alla superficie). Più precisamente, con F_k si è indicata l'**attrito cinetico** o dinamico («cinetico», in inglese *kinetic*, è un termine derivato dalla parola greca che significa «movimento», e il pedice k si riferisce al moto relativo dei due solidi). Dal momento che l'accelerazione del blocco è nulla, la seconda legge di Newton applicata ad esso fornisce $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$. Pertanto, $F_k = F_a$ e $F_N = mg$, cosicché l'indicazione del dinamometro dà il valore di F_k , e F_N è pari al peso del blocco.

Figura 6.2

- (a) Un blocco di massa m viene tirato con velocità costante verso destra. (b) Diagramma di corpo libero per il blocco. La forza di contatto viene rappresentata sotto forma di due forze, quella normale F_N , perpendicolare alla superficie, e quella di attrito cinetico F_k , parallela alla superficie e opposta a v .



Per studiare la relazione tra la forza normale e l'attrito cinetico, fissiamo un altro blocco di massa m sopra il primo e determiniamo le forze che agiscono sul blocco composto di massa $2m$. La forza normale esercitata dalla superficie ora ha intensità doppia rispetto a prima, $F_N = 2mg$. Da una lettura del dinamometro risulta che la forza che è necessario applicare per far scivolare il blocco a velocità costante raddoppia anch'essa e altrettanto fa F_k , dato che $F_k = F_a$. Esperimenti analoghi a questo mostrano che, con buona approssimazione, F_k è proporzionale a F_N , ossia

$$F_k = \mu_k F_N \quad (6.1)$$

dove la costante di proporzionalità μ_k è un numero adimensionale che viene chiamato *coefficiente di attrito cinetico*. Si noti che l'Equazione (6.1) mette in relazione soltanto i moduli di F_k e F_N . Queste forze hanno direzioni perpendicolari, e F_k è opposta a v .

Ulteriori esperimenti dimostrano che

1. F_k dipende dalla natura e dalle condizioni delle due superfici, e μ_k solitamente cade nell'intervallo tra 0.1 circa e 1.5 circa. (Si veda la Tabella 6.1).
2. F_k (o μ_k) è pressoché indipendente dalla velocità per basse velocità relative delle due superfici, manifestando solo un lieve decremento al crescere di tale velocità. Noi ci serviremo dell'approssimazione per cui F_k è indipendente dalla velocità.
3. F_k (o μ_k) è pressoché indipendente dall'area di contatto in un'ampia gamma di aree.

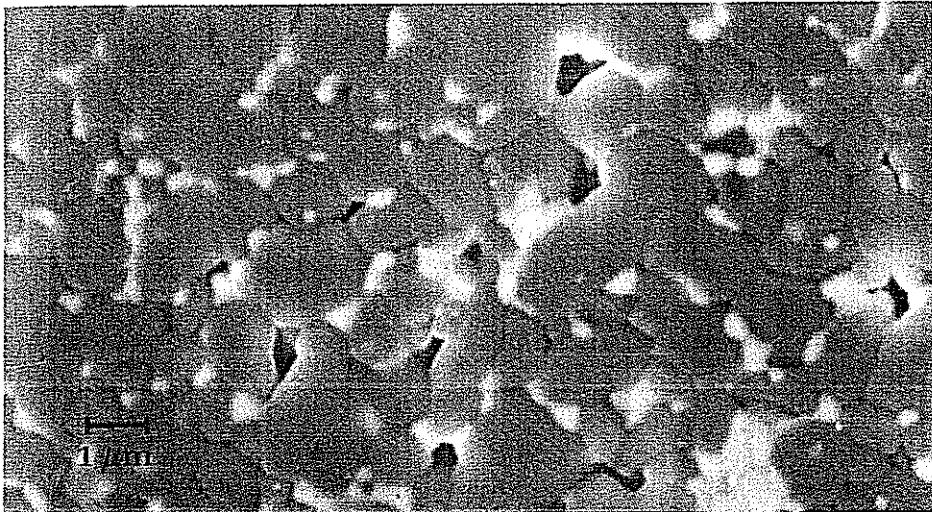
² In alcuni testi chiamata «forza di attrito dinamico» (N.d.T.)

Tabella 6.1 Alcuni valori rappresentativi dei coefficienti d'attrito

Superfici	μ_k	μ_x
Rame su acciaio	0.36	0.53
Rame su ghisa	0.29	1.05
Gomma su cemento	0.8	0.9
Legno su cuoio	0.4	0.5
Acciaio su ghiaccio	0.06	0.10

Il fatto che μ_k sia pressoché indipendente dall'area di contatto può essere verificato facendo scivolare un blocco che abbia facce di area differente (Figura 6.3). Le superfici delle varie facce devono essere fatte del medesimo tipo di materiale e devono essere nella medesima condizione. Quando si misura la forza che è necessario applicare per far scivolare il blocco a una data velocità sulle varie facce, risulta che è quasi la stessa. Dal momento che F_N è uguale in ciascuno dei casi, se ne conclude che μ_k è approssimativamente indipendente dall'area.

Osservando la superficie di un corpo in grande dettaglio si può intuire che la nostra descrizione delle forze d'attrito è solo qualitativa. La Figura 6.4 è una fotografia, ottenuta grazie al microscopio elettronico a scansione, di una superficie altamente levigata.



La forza di attrito statico. Una forza d'attrito può sussistere anche tra due corpi che non sono in moto relativo. In tal caso si parla di *attrito statico* F_s . Nella Figura 6.5, da (a) a (d), la forza esercitata dal dinamometro sul blocco viene aumentata gradualmente, ma il blocco rimane fermo. Dal momento che l'accelerazione è nulla in tutti i casi, la forza F_a applicata dal dinamometro è uguale e opposta alla forza d'attrito statico F_s esercitata dalla superficie. L'attrito statico massimo $F_{s,\max}$ si ha quando il blocco sta per cominciare a scivolare. Gli esperimenti dimostrano che, con buona approssimazione, $F_{s,\max}$ è proporzionale a F_N , ossia

$$F_{s,\max} = \mu_s F_N \quad (6.2)$$

dove la costante di proporzionalità μ_s è detta *coefficiente di attrito statico*. Dunque, fino a un certo limite, l'attrito statico varia in modo da impedire a una superficie di scorrere sull'altra:

$$F_s \leq \mu_s F_N \quad (6.3)$$

Analogamente a μ_k , il coefficiente μ_s dipende dalle condizioni e dalla natura delle due superfici, ed è pressoché indipendente dall'area di contatto. La Tabella 6.1 elenca i valori di μ_k e di μ_s per alcune coppie rappresentative di superfici. Di norma, per una data coppia di superfici, μ_s è nettamente maggiore di μ_k .

Un modo per ridurre gli attriti quando si trasporta un carico è quello di servirsi di un veicolo dotato di ruote. Normalmente è molto più facile spostare qualcosa con un veicolo che senza ruote, perché nel primo le superfici che attraggono sono nei sommovimenti

**Figura 6.3**

Un blocco su una superficie orizzontale. Se si fa scivolare il blocco, l'attrito risulta quasi indipendente dal fatto che esso scivoli su una faccia di area grande o su una di area piccola. Ciò dimostra che, a parità di F_N , F_k è pressoché costante.

Figura 6.4

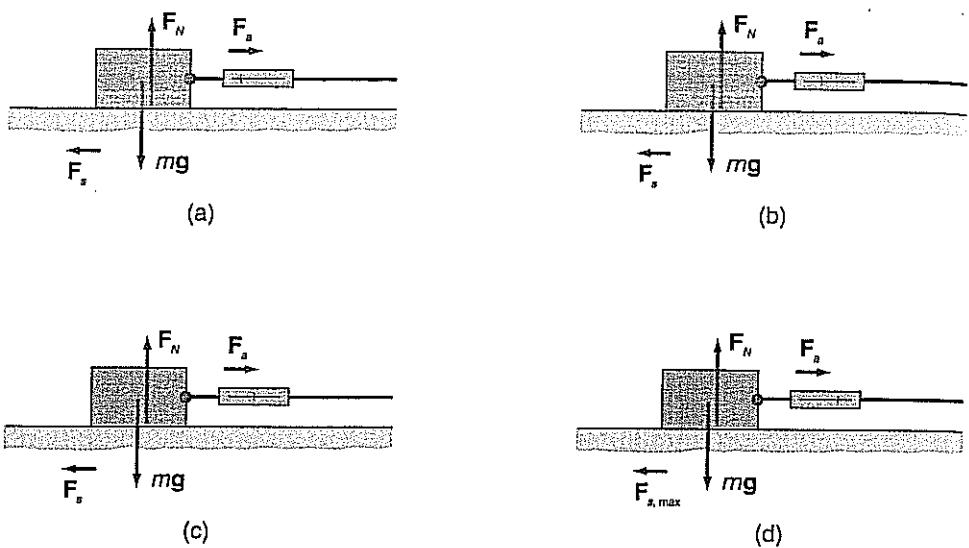
Fotografia al microscopio elettronico a scansione di una superficie metallica altamente levigata. Il segmento in basso a sinistra corrisponde a una distanza di $1 \mu\text{m}$.

delle ruote e possono essere lubrificate. Gli attriti che tendono a rallentare un veicolo dotato di ruote possono essere trattati come attriti cinetici, introducendo un coefficiente di *attrito volvente*.

Figura 6.5

Nelle figure da (a) a (c) la forza applicata aumenta gradualmente, e di conseguenza aumenta anche l'attrito statico F_s .

(d) Immediatamente prima che inizi lo scivolamento,
 $F_s = F_{s,\max} = \mu_s F_N$.



Esempio 6.1

Un dinamometro viene usato per esercitare una forza orizzontale su un blocco, come nelle Figure 6.2 e 6.5. Il blocco inizialmente è in quiete. I coefficienti d'attrito sono $\mu_s = 0.80$ e $\mu_k = 0.60$, e la massa del blocco è $m = 0.51 \text{ kg}$.

Rappresentare nel medesimo grafico F_s e F_k in funzione di F_a , quando F_a aumenta da 0.0 a 7.0 N con incrementi di 1.0 N. Tracciare una linea passante per i punti ottenuti sia per F_s in funzione di F_a , che per F_k in funzione di F_a . Determinare approssimativamente l'accelerazione del blocco per ciascun valore di F_a .

Soluzione

La superficie è orizzontale e quindi $F_N = mg = (0.51 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 5.0 \text{ N}$. Perciò $F_{s,\max} = \mu_s F_N = (0.80)(5.0 \text{ N}) = 4.0 \text{ N}$. Per qualunque valore di F_a fino a questo limite, $F_s = F_a$, come risulta dal grafico di Figura 6.6, e in tutto questo intervallo tanto la velocità che l'accelerazione del blocco sono nulle.

Per valori di F_a maggiori di 4.0 N, il blocco scivola sulla superficie ed $F_k = \mu_k F_N = (0.60)(5.0 \text{ N}) = 3.0 \text{ N}$. Dal momento che $F_a > F_k$, c'è una forza risultante orizzontale di modulo $F_a - F_k$. Nel caso in cui $F_a = 5.0 \text{ N}$, il modulo dell'accelerazione è

$$a = \frac{F_a - F_k}{m} = \frac{5.0 \text{ N} - 3.0 \text{ N}}{0.51 \text{ kg}} \approx 4 \text{ m/s}^2$$

Analogamente, quando $F_a = 6.0 \text{ N}$,

$$a = \frac{6.0 \text{ N} - 3.0 \text{ N}}{0.51 \text{ kg}} \approx 6 \text{ m/s}^2$$

e quando $F_a = 7.0 \text{ N}$

$$a = \frac{7.0 \text{ N} - 3.0 \text{ N}}{0.51 \text{ kg}} \approx 8 \text{ m/s}^2$$

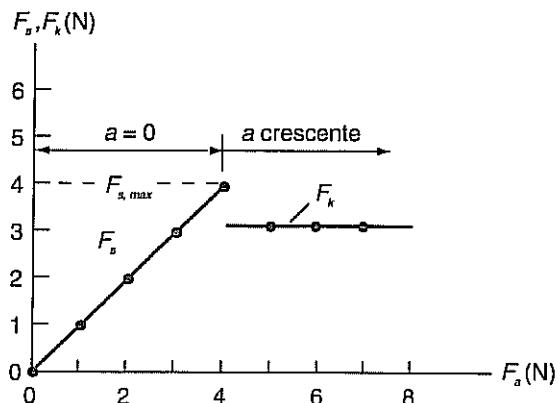


Figura 6.6

Esempio 6.1: grafico di F_s e F_k in funzione di F_a per un blocco di massa 0.51 kg su una superficie orizzontale ove $\mu_s = 0.80$ e $\mu_k = 0.60$.

Esempio 6.2

Una ragazza spinge una slitta su una strada orizzontale coperta di neve. Quando il modulo della velocità della slitta è $v = 2.5 \text{ m/s}$ (Figura 6.7a), la ragazza la lascia andare e la slitta scivola per un tratto $d = 6.4 \text{ m}$ prima di fermarsi. Determinare μ_k .

Soluzione

La Figura 6.7b rappresenta il diagramma di corpo libero per la slitta, dopo che la ragazza l'ha lasciata. Dal momento che la slitta non ha accelerazione verticale, $\Sigma F_y = 0$ e quindi $F_N = mg$, ove m è la massa della slitta, mentre $\Sigma F_x = -F_k$. Facendo uso dell'Equazione (6.1), si trova $F_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$, e la componente x della seconda legge di Newton, $\Sigma F_x = ma_x$, fornisce $-\mu_k mg = ma_x$.

Ossia,

$$a_x = -\mu_k g \quad (\text{A})$$

Poiché a_x è costante, ma incognita, ci serviamo dell'Equazione (3.12) per trovare un'altra espressione di a_x :

$$v_x^2 - v_{x0}^2 = 2a_x(x - x_0)$$

Se indichiamo con x_0 la coordinata in corrispondenza della quale la ragazza ha lasciato andare la slitta e con x la coordinata in corrispondenza della quale la slitta si è fermata, allora $x - x_0 = d$, $v_{x0} = v$, e $v_x = 0$, cosicché $-v^2 = 2a_x d$, ossia

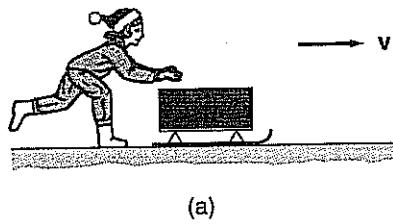
$$a_x = \frac{-v^2}{2d} \quad (\text{B})$$

Dalle Equazioni (A) e (B) si ha

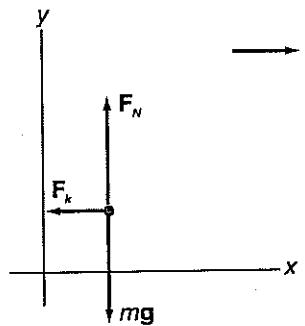
$$-\mu_k g = \frac{-v^2}{2d}$$

Risolvendo rispetto a μ_k , si ottiene

$$\mu_k = \frac{v^2}{2gd} = \frac{(2.5 \text{ m/s})^2}{2(9.8 \text{ m/s}^2)(6.4 \text{ m})} = 0.050$$



(a)



(b)

Figura 6.7

Esempio 6.2: (a) una ragazza lascia andare una slitta che si muove con velocità di modulo v . (b) Diagramma di corpo libero per la slitta dopo che è stata lasciata andare.

Esempio 6.3

Angolo critico per l'inizio dello scivolamento. Un comodo metodo per la misura del coefficiente di attrito statico tra un blocco e una superficie piana consiste nel porre il blocco sulla superficie e inclinare gradualmente quest'ultima. L'angolo compreso tra la superficie e l'orizzontale immediatamente prima che il blocco cominci a scivolare prende il nome di *angolo critico* θ_s per l'attrito statico. Si determini μ_s come funzione di θ_s .

Soluzione

Si consideri il blocco in quiete sulla superficie quando questa è inclinata di un angolo θ , con $\theta < \theta_s$ (Figura 6.8). Dal momento che il blocco rimane fermo, le componenti della seconda legge di Newton sono $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, ossia

$$F_s - mg \sin \theta = 0 \quad \text{e} \quad F_N - mg \cos \theta = 0$$

Si noti che in questo caso la forza normale non è uguale e opposta al peso perché il peso non è perpendicolare alla superficie. Risolvendo rispetto a F_s e a F_N , si ha

$$F_s = mg \sin \theta \quad (\text{A})$$

$$F_N = mg \cos \theta \quad (\text{B})$$

Con il crescere dell'angolo θ , aumenta la componente del peso lungo il piano, $mg \sin \theta$, e aumenta anche F_s , mantenendo fermo il blocco. La componente del peso perpendicolare alla superficie, $mg \cos \theta$, decresce al crescere di θ . Quando $\theta = \theta_s$, l'attrito statico raggiunge il valore massimo,

$F_s = F_{s,\max} = \mu_s F_N$, cosicché le Equazioni (A) e (B) diventano

$$\mu_s F_N = mg \sin \theta_s$$

$$F_N = mg \cos \theta_s$$

Dividendo l'Equazione (C) per l'Equazione (D) F_N e mg si semplificano e si ottiene

$$\mu_s = \tan \theta_s$$

Supponiamo che per un dato blocco e una data superficie sia $\theta_s = 38^\circ$. Allora

$$m_s = \tan 38^\circ = 0.78$$

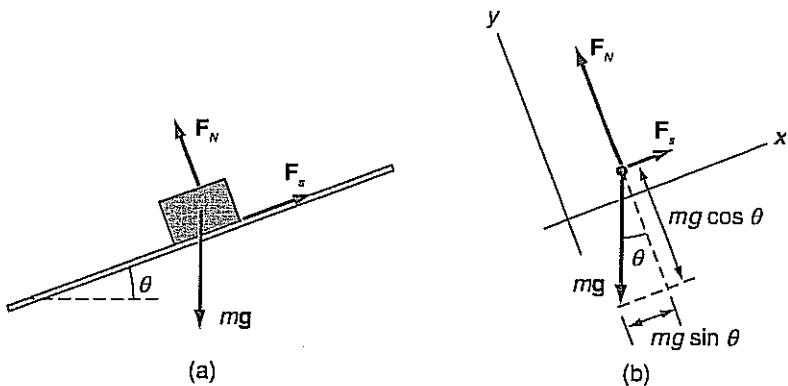
In modo analogo si può dimostrare che

$$\mu_k = \tan \theta_k$$

dove θ_k è l'angolo formato dalla superficie con l'orizzontale quando il blocco scivola con velocità costante (si veda l'Esercizio 6.10).

Figura 6.8

Esempio 6.3: (a) un blocco su una superficie piana inclinata di un angolo θ . (b) Diagramma di corpo libero relativo al blocco.



Esempio 6.4

Un uomo trascina una cassa su un pavimento orizzontale con velocità costante, tirando una fune asciutta alla cassa, come mostra la Figura 6.9a. La massa della cassa è di 45 kg, l'angolo θ tra la fune e l'orizzontale è di 33° e il coefficiente di attrito cinetico tra la cassa e il pavimento è 0.6. Determinare la tensione F_T della fune.

Soluzione

Il diagramma di corpo libero relativo alla cassa è riportato nella Figura 6.9b. Dal momento che la velocità della cassa è costante, le componenti della seconda legge di Newton sono $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$. Quindi osservando il diagramma di corpo libero si ha

$$F_T \cos \theta - \mu_k F_N = 0 \quad (I)$$

e

$$F_T \sin \theta + F_N - mg = 0 \quad (II)$$

Risolvendo l'Equazione A per F_N

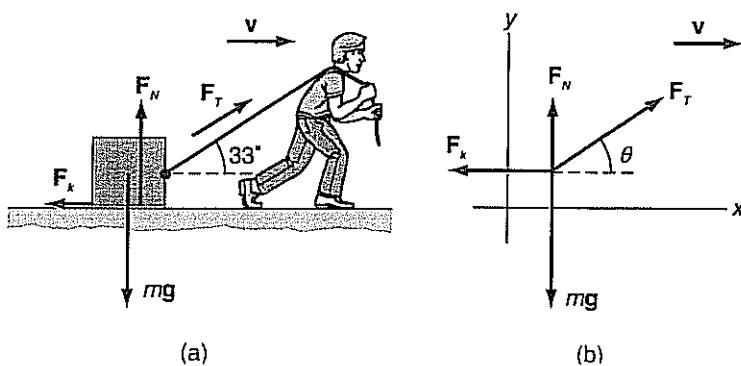
$$F_N = (F_T \cos \theta) / \mu_k$$

Sostituendo questo risultato nell'Equazione B e risolvendo per F_T si ha

$$F_T = \frac{\mu_k mg}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta} = \frac{(0.63)(45 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{\cos 33^\circ + 0.63 \sin 33^\circ} = 240 \text{ N}$$

Figura 6.9

Esempio 6.4: (a) un uomo trascina una cassa sul pavimento. (b) Diagramma di corpo libero relativo alla cassa.



Forze d'attrito dovute ai fluidi. Quando un corpo solido, come un sasso, si muove in un fluido, come l'aria o l'acqua, il fluido esercita sul corpo una forza d'attrito. L'andamento di questa forza dipende da molti fattori, tra i quali la forma del corpo, la velocità di quest'ultimo rispetto al fluido, e la natura del fluido stesso. La proprietà di un fluido che è responsabile di questa forza prende il nome di *viscosità*, e la forza è detta *forza viscosa* o *resistenza viscosa*, o ancora *forza frenante*.

Siccome vogliamo chiarire alcune delle caratteristiche del moto in un fluido senza affrontare una descrizione troppo complicata, adotteremo una forma particolarmente semplice per la forza viscosa F_v :

$$F_v = -bv$$

dove b è una costante di proporzionalità. In altre parole ammettiamo che F_v sia diretta in verso opposto alla velocità del corpo e abbia un'intensità che cresce linearmente con il modulo della velocità. Questa espressione è approssimativamente valida quando v non è elevata.

Supponiamo ora di lasciar cadere un corpo inizialmente fermo, per esempio una biglia di massa m , in un fluido come l'olio (Figura 6.10). Per avere a che fare con grandezze prevalentemente positive, orientiamo la direzione $+y$ verso il basso (invece che verso l'alto), di modo che

$$\Sigma F_y = mg - bv$$

(Per semplicità, abbiamo trascurato una forza che è importante nei liquidi, la *spinta di Archimede*. Dal momento che tale forza è costante, essa non altera le caratteristiche qualitative del moto che stiamo descrivendo. Si veda comunque il Paragrafo 15.5.) Mentre la biglia cade, il suo peso agisce come una forza costante diretta verso il basso e il fluido esercita una forza variabile diretta verso l'alto. Per la seconda legge di Newton, $\Sigma F_y = ma_y = ma$, e quindi

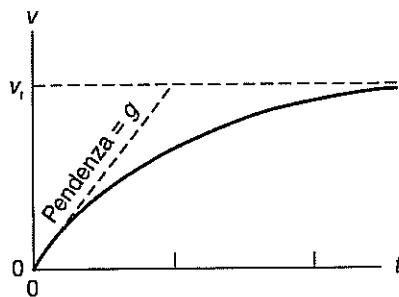
$$a = \frac{mg - bv}{m}$$

Poiché $a = dv/dt$,

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m} v$$

Questa equazione, che contiene v e la sua derivata dv/dt , è un'*equazione differenziale*. Nei capitoli successivi incontreremo equazioni differenziali simili a questa e ci occuperemo di risolverle. Qui ci limitiamo a descriverne la soluzione.

La Figura 6.11 è un grafico del modulo v della velocità della biglia in funzione del tempo t durante la caduta. Va tenuto presente che la pendenza di questo grafico in un istante qualsiasi fornisce il modulo a dell'accelerazione. Nell'istante in cui la biglia



(a)



(b)

Figura 6.10

(a) Una biglia cade nell'olio.
(b) Diagramma di corpo libero relativo alla biglia.

viene lasciata cadere ($v = 0$ per $t = 0$), $a = g - (b/m)(0) = g$, come indica la pendenza della linea tratteggiata. Al crescere di v , F_v aumenta, facendo diminuire la forza risultante. Di conseguenza, anche a diminuisce, tendendo a zero quando t diventa grande. Al tendere a zero di a , v tende a un valore asintotico detto *velocità limite* v_l . Quando v si approssima a v_l , F_v si approssima a mg , e quindi

$$bv_l = mg$$

ossia,

$$v_l = \frac{mg}{b}$$

Figura 6.11

Grafico di v in funzione di t per la biglia. La pendenza del grafico fornisce a . Per $t = 0$, $v = 0$ e $a = g$. Al crescere di t , v tende a v_l e a tende a zero.

Supponiamo, per esempio, che il fattore b per una biglia di massa $m = 0.015 \text{ kg}$ che cade nell'olio sia $b = 8 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. Allora

$$v_l = \frac{(0.015 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{8 \text{ N} \cdot \text{s/m}} = 0.02 \text{ m/s}$$

Esempio 6.5

Durante la caduta di un corpo sulla superficie terrestre, l'aria agisce con una forza d'attrito di tipo viscoso. Il modulo di tale forza di resistenza dell'aria può scriversi approssimativamente come

$$F_v = \frac{1}{2} \rho_A A C_D v^2.$$

Dove v è la velocità del corpo, ρ_A è la densità dell'aria, C_D è il coefficiente di attrito che dipende dalla forma e dalla struttura del corpo che cade (è un numero compreso fra 0 e 1) e A è l'area di proiezione del corpo, cioè l'area della superficie del corpo vista dal suolo rispetto alla verticale. La direzione della forza viscosa è quella della velocità e il verso è opposto a quello della velocità del corpo. (a) Determinare la velocità limite v_l di un corpo che cade verticalmente in presenza dell'aria (b) calcolare il rapporto fra le velocità limite di due chicchi di grandine di forma sferica di raggio r_1 e r_2 e discuterne il risultato.

Soluzione

(a) La velocità limite è la velocità massima che il corpo raggiunge. Dall'istante in cui la raggiunge, la velocità rimane costante, quindi, a partire da quell'istante, per il secondo principio della dinamica, il risultante delle forze applicate al corpo deve essere nullo. Il corpo, partendo da fermo, sotto l'azione dell'attrazione terrestre, cioè della sua forza peso mg , si muove lungo la direzione verticale e aumenta la sua velocità fino ad arrivare a un valore tale per cui $F_v - mg = 0$. Da quell'istante in poi la sua velocità non può più cambiare. Allora, da quell'istante, $F_v = mg$, cioè

$$\frac{1}{2} \rho_A A C_D v_l^2 = mg \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_A A C_D}}$$

(b) I chicchi di grandine sono delle sferette di ghiaccio di raggio r e la loro massa si può scrivere come il prodotto di volume $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ per densità (ρ), cioè $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. L'area di proiezione è l'area del cerchio massimo della sferetta, cioè $A = \pi r^2$. Allora,

$$v_l = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_A A C_D}} = \sqrt{\frac{2\rho \frac{4}{3}\pi r^3 g}{\rho_A \pi r^2 C_D}} = \sqrt{\frac{8\rho g}{3\rho_A C_D}} \sqrt{r} = K\sqrt{r}$$

e quindi il rapporto delle velocità limite per i due chicchi è dato da

$$\frac{v_{l2}}{v_{l1}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$$

Si può vedere come, a parità di forma, i corpi di dimensione maggiore abbiano velocità limite maggiore. Per esempio, alcune velocità limite sono: per una goccia di pioggia, 23 km/h; per un proiettile, 168 km/h; per una persona, 233 km/h; per una bomba da 500 kg, 240 km/h.

6.3 DINAMICA DEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

I moti circolari, o approssimativamente circolari, sono comuni in natura e nei congegni meccanici. Per esempio, i pianeti si muovono lungo traiettorie quasi circolari attorno al sole, e gli ingranaggi, le pulegge e le ruote comportano moti circolari.

Si rammenti quanto detto nel Capitolo 4 a proposito del fatto che un corpo che si muove su una circonferenza ha un'accelerazione anche se il modulo della sua velocità è costante. Abbiamo visto che, in generale, l'accelerazione di un punto materiale si può scomporre in una parte tangente alla traiettoria, che misura le variazioni del modulo della velocità, e in una parte perpendicolare alla tangente, che misura le variazioni della direzione della velocità, e la (4.24) ne dà l'espressione generale. Quindi durante

te direzione. Se il modulo v della velocità del corpo è costante, il moto viene detto moto circolare *uniforme*. In tale moto il vettore accelerazione è diretto verso il centro della circonferenza, e il suo modulo è $a_c = v^2/R$, ove R è il raggio della circonferenza. Questa accelerazione diretta verso il centro della circonferenza è chiamata *accelerazione centripeta*.

Alla luce della seconda legge di Newton, vediamo che su un corpo in moto circolare uniforme deve agire una forza risultante diretta verso il centro della circonferenza. Siccome $\Sigma F = ma$ e a è rivolta verso il centro della circonferenza e ha intensità v^2/R , ΣF deve anch'essa essere diretta verso il centro; inoltre

$$|\Sigma F| = \frac{mv^2}{R}$$

Forza centripeta.

Questa forza risultante diretta verso il centro della circonferenza viene chiamata *forza centripeta*. Si noti che il termine «forza centripeta» non si riferisce a un tipo di interazione, analogo a una forza gravitazionale o a una forza elettrica. Questo termine indica semplicemente che la forza risultante è diretta verso il centro della traiettoria circolare, a prescindere da quale sia la natura della forza stessa.

Esempio 6.6

Un'automobile viaggia con una velocità di modulo costante v su una strada orizzontale e percorre una curva circolare di raggio R , come mostrano le Figure 6.12a e b. (a) Il coefficiente di attrito statico tra i pneumatici e la superficie della strada è μ_s . Trovare un'espressione per la massima velocità v_m che l'automobile può avere senza cominciare a slittare. (b) Determinare v_m per il caso in cui $\mu_s = 1.2$ e $R = 150$ m.

Soluzione

(a) La Figura 6.12c mostra il diagramma di corpo libero per l'automobile. Dal momento che l'accelerazione verticale è nulla, la forza normale e la forza gravitazionale sono uguali e opposte: $F_N = mg$. La forza risultante è orizzontale: $\Sigma F = F_s$. È l'attrito statico F_s (piuttosto che l'attrito cinetico F_k) a fornire la forza centripeta, perché il battistrada dello pneumatico dell'automobile non slitta sulla strada. In base alla seconda legge di Newton, $|\Sigma F| = F_s = ma = mv^2/R$, e si ha

$$F_s = \frac{mv^2}{R}$$

Quindi F_s cresce con v , ma non può superare $F_{s,\max}$. La velocità massima v_m corrisponde a $F_s = F_{s,\max}$:

$$\frac{mv_m^2}{R} = F_{s,\max} = \mu_s F_N = \mu_s mg$$

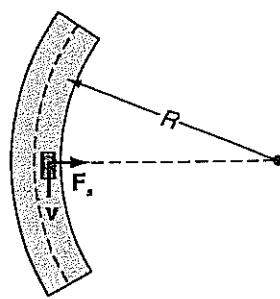
Risolvendo rispetto a v_m , si ottiene

$$v_m = \sqrt{\mu_s g R}$$

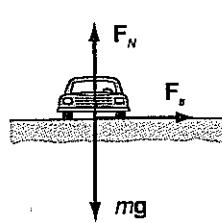
Se l'automobile dovesse superare questa velocità, comincerebbe a slittare e non si muoverebbe più su una traiettoria circolare. Si noti che v_m è indipendente dalla massa dell'automobile, ma dipende dal coefficiente di attrito e dal raggio della curva.

(b) Quando $\mu_s = 1.2$ e $R = 150$ m,

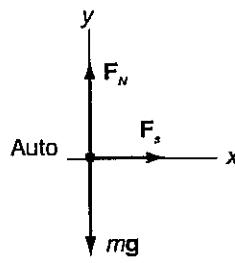
$$v_m = \sqrt{(1.2)(9.8 \text{ m/s}^2)(150 \text{ m})} = 42 \text{ m/s}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 6.12

Esempio 6.6: un'automobile percorre una curva. (a) Vista dall'alto. (b) Vista di fronte. (c) Diagramma di corpo libero per l'automobile.

Esempio 6.7

Soprelevazione di una curva in un autodromo. Nel progettare la pista di un autodromo, ma anche un'autostrada, occorre calcolare per ogni curva l'appropriato angolo di soprelevazione, in modo tale che la componente orizzontale della forza normale esercitata dall'asfalto fornisca la forza centripeta necessaria perché un'automobile percorra la curva alla velocità di progetto v_p . Per un'automobile che viaggia a questa velocità non sarà necessario che sia un attrito a fornire la forza centripeta, e l'automobile non tenderà a slittare fuori strada qualora il coefficiente d'attrito sia ridotto dalle gomme lisce o dall'acqua sull'asfalto. (a) Determinare l'angolo di soprelevazione per una curva d'autodromo di raggio R in modo tale che un'automobile che percorre la curva con velocità di modulo v_p non si soggetti ad alcuna forza d'attrito perpendicolare alla propria velocità. (b) Determinare l'angolo di soprelevazione per una curva di raggio pari a 280 m progettata per una velocità di 35 m/s.

Soluzione

(a) La Figura 6.13a rappresenta schematicamente il sistema, ove θ_s è l'angolo di soprelevazione della superficie della pista rispetto all'orizzontale. La Figura 6.13b è il diagramma di corpo libero per un'automobile che viaggia alla velocità v_p . Dal momento che non c'è alcuna forza d'attrito, è la componente orizzontale di F_N a fornire la forza centripeta agente sull'automobile: la componente orizzontale della seconda legge ha allora la forma

$$F_N \sin \theta_s = \frac{mv_p^2}{R}$$

Poiché non c'è accelerazione verticale, la componente verticale di F_N è uguale al peso dell'automobile

$$F_N \cos \theta_s = mg$$

Abbiamo due equazioni in due incognite, F_N e θ_s . L'incognita che non interessa, F_N , può essere eliminata dividendo membro a membro le due equazioni

$$\frac{F_N \sin \theta_s}{F_N \cos \theta_s} = \frac{mv_p^2/R}{mg} \quad \text{ossia} \quad \tan \theta_s = \frac{v_p^2}{Rg}$$

Risolvendo rispetto a θ_s si ha

$$\theta_s = \tan^{-1} \frac{v_p^2}{Rg}$$

Questa espressione è conforme alle nostre attese; essa prevede infatti che θ_s debba essere tanto maggiore quanto maggiore è il valore di v_p , e tanto minore quanto maggiore è il raggio di curvatura R della curva.

(b) Per una curva con $R = 280$ m progettata per $v_p = 35$ m/s,

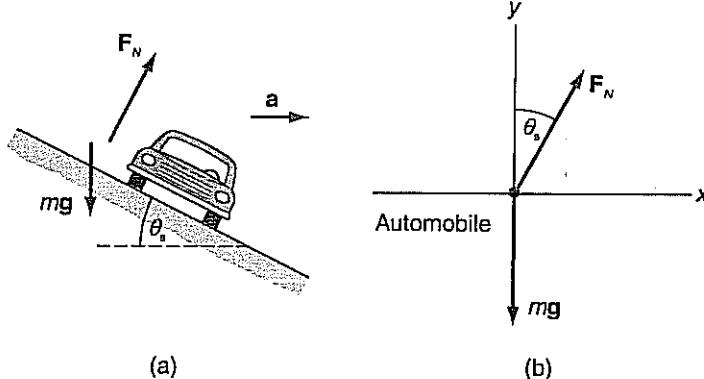
$$\theta_s = \tan^{-1} \frac{(35 \text{ m/s})^2}{(280 \text{ m})(9.8 \text{ m/s}^2)} = 24^\circ$$

Figura 6.13

Esempio 6.7: soprelevazione di una curva in un autodromo.

(a) Un'automobile percorre la curva alla velocità di progetto v_p .

(b) Diagramma di corpo libero per l'automobile.



Esempio 6.8

Il pendolo conico. Come si è visto, un pendolo è formato da un corpo pesante, quale un sasso di massa m , sospeso a un filo di lunghezza L . Il corpo è chiamato peso del pendolo. Se il peso viene fatto ruotare lungo una circonferenza orizzontale di raggio R , come nella Figura 6.14a, il sistema viene chiamato *pendolo conico* perché il filo descrive una superficie conica. Il tempo necessario perché il peso compia una rivoluzione completa è detto *periodo* T . Newton si servì di un pendolo conico per misurare g : in precedenza egli aveva accettato un valore di g determinato da Galileo, ma scoprì

va che il valore di Galileo non fosse molto preciso. Seguendo le orme di Newton, si determini un'espressione di g in funzione di T , di L e dell'angolo θ che il filo forma con la verticale.

Soluzione

Il periodo T è correlato con il modulo costante v della velocità del peso. Dal momento che quest'ultimo percorre un tratto $2\pi R$ durante un periodo, $v = 2\pi R/T$. Una relazione tra v e g può essere trovata applicando la seconda legge di Newton. Nella Figura 6.14b è riportato il diagramma di corpo libero per il peso. L'accelerazione verticale è nulla, e quindi la seconda legge fornisce $\sum F_y = 0$, ossia

$$F_T \cos \theta = mg \quad (\text{A})$$

dove F_T è la tensione del filo. Siccome il peso percorre una traiettoria circolare orizzontale, l'accelerazione orizzontale è v^2/R . La forza centripeta è la componente orizzontale della tensione del filo, cosicché la componente orizzontale della seconda legge dà

$$F_T \sin \theta = \frac{mv^2}{R} \quad (\text{B})$$

Dividendo l'Equazione (B) per l'Equazione (A), si trova

$$\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

Sostituendo $v = 2\pi R/T$ e $R = L \sin \theta$, e risolvendo poi rispetto a g , si ottiene

$$g = \frac{4\pi^2 L \cos \theta}{T^2}$$

Newton si servì di un pendolo con $L = 81$ pollici mantenendo $\theta = 45^\circ$, e misurò il periodo. Pervenne così a un valore di g con un errore non superiore al 4 per cento. Il lettore dovrebbe provare a ripetere quest'esperimento, determinando la precisione dei propri risultati. Ne ricaverà probabilmente un grande rispetto per l'abilità sperimentale di Newton.

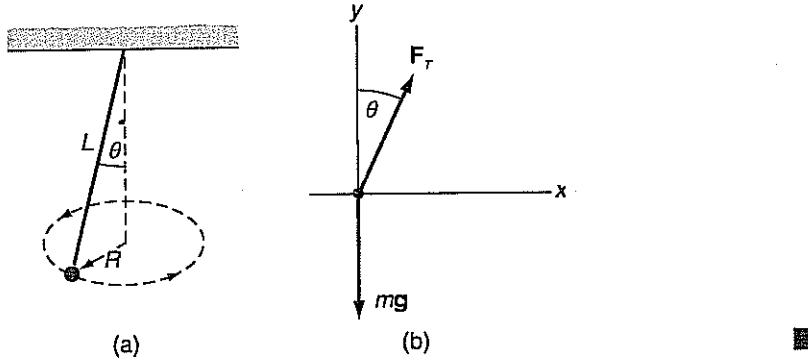


Figura 6.14

Esempio 6.8: (a) un pendolo conico. (b) Diagramma di corpo libero relativo al peso del pendolo.

Esempio 6.9

Peso apparente. Nel Capitolo 5 abbiamo definito il peso di un corpo come la forza gravitazionale F_g esercitata su di esso dalla Terra, e abbiamo definito il peso apparente come la forza F_b misurata da un dinamometro o una bilancia a molla. Dal momento che la Terra ruota su se stessa, il peso apparente determinato da un dinamometro in quiete rispetto alla superficie della Terra non è, in generale, uguale al peso. Questo effetto della rotazione della Terra non è presente ai poli, che si trovano sull'asse di rotazione, ed è massimo all'equatore. Determinare la relazione tra il peso $F_g = mg$ e il peso apparente F_b all'equatore.

Soluzione

La Figura 6.15a rappresenta schematicamente una persona che, all'equatore, tiene un pesce appeso a un dinamometro. Il punto di vista è quello di chi si trovasse al di sopra del polo nord e guardasse lungo l'asse di rotazione della Terra. Rispetto a un riferimento con gli assi solidali con le stelle (un sistema di riferimento inerziale), il pesce è in moto circolare uniforme con velocità di modulo $v = 2\pi R_t/T_t$, ove R_t è il raggio della Terra (6.37×10^6 m = 6.37 Mm) e T_t è il periodo di rotazione della Terra (8.616×10^4 s ≈ 24 h). L'accelerazione centripeta del pesce è $v^2/R_t = 4\pi^2 R_t/T_t^2$. In base al diagramma di corpo libero relativo al pesce (Figura 6.15b), il modulo della forza risultante è $mg - F_b$, e quindi la seconda legge di Newton diventa

$$mg - F_b = \frac{m4\pi^2 R_t}{T_t^2} \quad (\text{A})$$

Risolvendo rispetto a F_b , si ottiene

$$F_b = mg \left(1 - \frac{4\pi^2 R_t}{g T_t^2} \right)$$

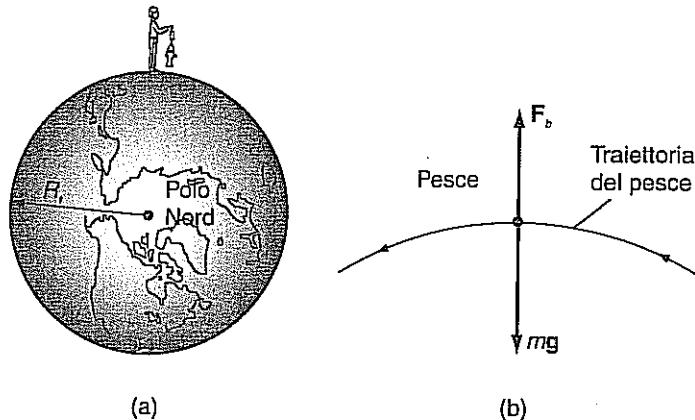
Sostituendo i valori numerici di R_t , T_t e g , si ha

$$F_b = mg(1 - 0.0035) = (0.9965)mg$$

L'effetto della rotazione della Terra sul peso apparente di un corpo, anche all'equatore dove è massimo, è comunque piccolo.

Figura 6.15

Esempio 6.9: (a) una persona tiene un pesce appeso a un dinamometro all'equatore. (b) Diagramma di corpo libero per il pesce. La differenza tra le intensità delle due forze è stata esagerata a scopo illustrativo.



Esempio 6.10

Un'idea per progettare una stazione spaziale abitata da uomini è quella di costruirla di forma cilindrica e di farla ruotare attorno al suo asse. In tale modo è possibile simulare la forza di gravità per i abitanti che stiano sulla superficie interna del cilindro. Spiegare come ciò sia possibile e, supponendo che la stazione cilindrica abbia un raggio $R = 3$ km, trovare a quale velocità dovrebbe ruotare per simulare l'accelerazione di gravità terrestre g . Si noti che, negli USA, la NASA ha avviato un progetto simile con un cilindro di diametro 6.2 km e di lunghezza 32 km; inoltre, nel film "2001 Odissea nello spazio" la stazione spaziale si basa sullo stesso principio.

Soluzione

Gli abitanti, stando sulla superficie interna del cilindro, percorrono delle circonferenze di raggio R . Se si osserva il fenomeno da un sistema di riferimento inerziale, per far accadere ciò occorre una forza centripeta F_C e, se la stazione ruota con velocità angolare ω , tale forza, per il secondo principio della dinamica, deve essere uguale a $m\omega^2 R$ (massa per accelerazione centripeta). Questa forza centripeta è ovviamente generata dal pavimento su cui stanno, che costringe gli abitanti a percorrere la circonferenza. Allora si ha $F_C = mR\omega^2$. Se ci mettiamo nel sistema di riferimento degli abitanti della stazione, una persona ferma sarà soggetta a una forza nulla e quindi sarà soggetta a una forza diretta verso il pavimento che contrasterà esattamente l'azione del vincolo. L'abitante quindi sentirà una sorta di gravità artificiale pari a $mR\omega^2$. Se si vuole che tale gravità sia uguale a quella terrestre, dovrà essere $F_C = mg$ e quindi $mg = mR\omega^2$, da cui si ha $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \cong 0.06 \text{ s}^{-1}$, cioè 0.06 radianti al secondo, cioè circa 0.57 giri/minuto. Si osservi che il peso apparente $mR\omega^2$ varia se ci si avvicina all'asse di rotazione, cioè se diminuisce R . Questo fatto potrebbe essere utilizzato nelle stazioni spaziali per avere locali a gravità zero per particolari esigenze ed applicazioni, per esempio di tipo sanitario e terapeutico.

6.4 IL MOTO IN SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI

Un ragazzo si trova su una giostra in movimento. La piattaforma della giostra è orizzontale e liscia. Quando il ragazzo appoggia sulla piattaforma un pattino a rotelle con le ruote disposte lungo una retta passante per il centro della giostra, il pattino comincia a muoversi verso l'esterno della giostra. Il pattino cioè accelera rispetto al ragazzo. Il fenomeno è familiare a chiunque si sia trovato su un'automobile in curva.

Perché sembra che il pattino violi la seconda legge di Newton, accelerando in una direzione in cui non c'è una forza risultante?

La risposta è che la giostra non è un sistema di riferimento inerziale, e la seconda legge di Newton non è valida per misure compiute rispetto a sistemi di riferimento non inerziali. Nella seconda legge di Newton, $\Sigma F = ma$, l'accelerazione deve essere misurata rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

Il ragazzo insiste a usare la seconda legge di Newton, anche se questa non è valida nel suo sistema di riferimento. Se gli chiediamo perché il pattino acceleri verso l'esterno della giostra, ci risponde che c'è una forza diretta verso l'esterno della giostra, cioè *centrifuga*. Centrifuga significa «orientata in una direzione *che si allontana dal centro*».

Per far stare fermo il pattino rispetto alla giostra, il ragazzo esercita su di esso una forza diretta verso il centro della giostra; egli afferma che il pattino non accelera: la forza orizzontale che egli esercita è uguale e opposta alla forza centrifuga, e la forza risultante che agisce sul pattino è nulla.

Una ragazza ferma sul terreno guarda il ragazzo e il pattino che girano sulla giostra. Per lei, il pattino sta accelerando: ha infatti un'accelerazione centripeta diretta verso il centro della giostra. La ragazza afferma che il ragazzo sta esercitando sul pattino una forza centripeta che lo fa muovere su una traiettoria circolare. La ragazza non nomina neppure una forza centrifuga.

La forza centrifuga di cui parla il ragazzo è un esempio di forza apparente. Egli ha introdotto questa forza apparente per far sì che la seconda legge di Newton sembrasse valida nel suo sistema di riferimento. Una *forza apparente* è una forza chiamata in causa da un osservatore che si trova in un sistema di riferimento non inerziale per far sembrare valida la seconda legge di Newton nel proprio riferimento. Le forze apparenti, come la forza centrifuga, sono a volte chiamate *pseudo-forze* o forze *inerziali*. Si rammenti che, per la terza legge di Newton, le forze si presentano sempre a coppie; una coppia di forze viene chiamata *coppia azione-reazione*. Un'indicazione del fatto che una forza possa essere apparente si ha quando non si riesce a identificare la forza di reazione. Una forza apparente non è il risultato di un'interazione tra due corpi. Di conseguenza non esiste l'altro termine della coppia azione-reazione.

Nell'Esempio 6.8, abbiamo applicato la seconda legge di Newton a un pesce appeso a una bilancia a molla per determinare l'effetto della rotazione della Terra sul peso apparente di un corpo all'equatore. Facciamo nostro il punto di vista del ragazzo e finiamo che la seconda legge di Newton sia valida nel riferimento rotante della Terra. Usando un riferimento terrestre come sistema di riferimento nel diagramma di corpo libero relativo al pesce (Figura 6.16), vediamo che la componente y della seconda legge di Newton fornisce

$$mg - F_b - F_{app} = 0$$

dove F_{app} è la forza apparente centrifuga che introduciamo per far sembrare valida la seconda legge di Newton nel nostro riferimento terrestre. Un confronto con l'Equazione (A) dell'Esempio 6.9 mostra che

$$F_{app} = \frac{m4\pi^2 R_t}{T_t^2} = 0.0035mg$$

Facendo uso di questa forza apparente, possiamo fingere che il nostro riferimento terrestre all'equatore sia un sistema di riferimento inerziale. Il fatto che questa forza apparente risulti una frazione così piccola del peso di un corpo significa che in molti casi essa può essere trascurata, e un riferimento terrestre può essere considerato un riferimento inerziale.

La forza centrifuga non è che un esempio di forza apparente. Un altro esempio è la forza di Coriolis. Nel caso in cui un corpo *si muova* relativamente a un sistema di riferimento che a sua volta è in rotazione rispetto a un riferimento inerziale, si introduce una forza apparente chiamata *forza di Coriolis*. La forza di Coriolis dipende dal modulo della velocità del corpo rispetto al riferimento non inerziale, e la direzione di questa forza apparente è perpendicolare alla velocità del corpo. La forza di Coriolis dovuta alla rotazione della Terra ha un effetto rilevante sulle correnti d'aria terrestri (i venti), sulle correnti oceaniche e sulle configurazioni meteorologiche. Una discussione approfondita della forza di Coriolis esula dagli scopi di questo corso.

Forza centrifuga.

Forza apparente.



Figura 6.16
Diagramma di corpo libero per il pesce dell'Esempio 6.9 in un riferimento terrestre. L'intensità F_{app} della forza apparente è stata esagerata a scopo illustrativo.

Come detto, le forze inerziali compaiono solo quando si osserva il moto da un sistema di riferimento non inerziale. Per capire in maniera semplice il motivo di questa apparenza di forze al cambiare dell'osservatore, facciamo una considerazione molto semplice. Supponiamo di avere due osservatori, uno in un sistema di riferimento inerziale A e l'altro in un sistema non inerziale B , cioè accelerato con accelerazione \mathbf{a}_{BA} rispetto ad A , e supponiamo di avere un punto materiale P , di massa m , che si muove con accelerazione \mathbf{a}_{PA} rispetto al sistema inerziale A . Nella cinematica dei moti relativi (Paragrafo 4.6) abbiamo visto quali sono le relazioni fra le caratteristiche del moto servate da sistemi diversi; in particolare, la (4.31) ci dà il legame fra le accelerazioni: ci indica che l'accelerazione misurata dall'osservatore B , \mathbf{a}_{PB} , si può scrivere in funzione delle altre accelerazioni come

$$\mathbf{a}_{PB} = \mathbf{a}_{PA} - \mathbf{a}_{BA} - \mathbf{a}_C$$

Moltiplicando ambo i membri per la massa del corpo si ha $m\mathbf{a}_{PB} = m\mathbf{a}_{PA} - m\mathbf{a}_{BA} - m\mathbf{a}_C$ e, poiché il sistema A è inerziale, per il secondo principio della dinamica si ha $m\mathbf{a}_{PA} = \Sigma \mathbf{F}$; quindi si ottiene

$$m\mathbf{a}_{PB} = \Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{BA} - m\mathbf{a}_C \quad (6)$$

cioè, nel sistema non inerziale B , la massa di un corpo moltiplicata per la sua accelerazione non risulta essere uguale alla somma delle forze applicate al corpo, e quindi il secondo principio della dinamica non vale. Se, però, alla risultante delle forze applicate al corpo si somma (con gli opportuni versi vettoriali) il termine $(-m\mathbf{a}_{BA} - m\mathbf{a}_C)$ e lo si considera come una forza (forza apparente o di inerzia), si può affermare che un sistema non inerziale qualunque, vale il secondo principio della dinamica purc oltre alle forze dovute a interazioni con altri corpi, si considerino anche le forze apparenti, date da $(-m\mathbf{a}_{BA} - m\mathbf{a}_C)$.

Per capire meglio possiamo considerare l'Esempio 6.10, in cui si considera una sfera che ruota rispetto a un sistema inerziale (sistema A). Se si considera come osservatore un abitante della stazione (sistema B), allora dalla (6.4), sapendo che $\mathbf{a}_C = 0$, si ha che $m\mathbf{a}_{PB} = \Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{BA}$; questo significa che un oggetto di massa che non sia soggetto a forze dovute ad altri corpi, cioè con $\Sigma \mathbf{F} = 0$, possiede un'accelerazione rispetto alla stazione spaziale (B) $\mathbf{a}_{PB} = -\mathbf{a}_{BA}$, cioè uguale ma di verso opposto all'accelerazione centripeta. Quindi, se l'accelerazione centripeta ($\omega^2 R$), a una data distanza R , è numericamente uguale a g , sorge quella che si chiama la gravità terrestre artificiale, cioè tutti i corpi che stanno alla stessa distanza dall'asse di rotazione possiedono la stessa accelerazione. Avvicinandosi all'asse di rotazione l'accelerazione cala fino ad azzerarsi sull'asse.

RIEPILOGO

Paragrafo 6.2 Forze di contatto:

la forza normale e la forza d'attrito

Una forza di contatto esercitata da un corpo solido su un altro viene scomposta in una forza normale e in una forza d'attrito. L'attrito cinetico agente su un corpo che scivola su una superficie è

$$F_k = \mu_s F_N \quad (6.1)$$

Fino a un certo valore massimo $F_{k,\max} = \mu_s F_N$, l'attrito statico agente su un corpo in quiete su una superficie si adegua in modo da impedire al corpo di scivolare, e quindi

$$F_s \leq \mu_s F_N \quad (6.3)$$

Quando un corpo solido cade in un fluido, quest'ultimo esercita sul corpo una forza frenante o resistenza viscosa tale che l'accelerazione del corpo tende a zero e la sua velocità tende a un valore massimo detto velocità limite v_f .

Paragrafo 6.3 Dinamica del moto circolare uniforme

Perché un corpo compia un moto circolare uniforme, occorre che su di esso si eserciti una forza risultante di modulo costante e retta verso il centro della circonferenza. Tale forza è chiamata forza centripeta

$$|\Sigma \mathbf{F}| = mv^2/R$$

Paragrafo 6.4 Il moto in sistemi di riferimento

non inerziali

Spesso un osservatore che si trova in un riferimento non inerziale chiama in causa una forza apparente per poter usare la seconda legge di Newton misurando l'accelerazione rispetto al riferimento non inerziale. Quando questa forza apparente viene introdotta nella seconda legge di Newton, questa sembra essere valida nel riferimento non inerziale. Forze apparenti che ci consentono di trattare un riferimento terrestre come un riferimento inerziale sono la forza centrifuga e la forza di Coriolis.

QUESITI

- 6.1** Perché è utile decomporre una forza di contatto in una forza normale e una forza d'attrito? Si indichino almeno due ragioni.
- 6.2** Supponiamo di voler mantenere aperta una porta che ha una molla di chiusura molto forte. Un mattone appoggiato sul pavimento davanti alla porta non le impedisce di chiudersi: la porta semplicemente sposta il mattone. Invece un pezzo di legno a forma di cuneo, benché il suo peso sia molto inferiore a quello del mattone, può tenere aperta la porta se viene infilato tra il margine inferiore di questa e il pavimento. Spiega.
- 6.3** Ti viene chiesto di far scivolare una cassa su un pavimento orizzontale. Il peso della cassa è di qualche newton maggiore del tuo, e il coefficiente di attrito tra la cassa e il pavimento è leggermente maggiore di quello tra le tue scarpe e il pavimento. Puoi far scivolare la cassa esercitando su di essa una forza orizzontale? Se no, come dovresti orientare la forza che eserciti per riuscire a muovere la cassa?
- 6.4** Supponi di tentare di misurare il coefficiente di attrito statico tra la superficie dell'acqua e un blocco di legno che le galleggia sopra. A che risultato pensi che perverresti?
- 6.5** Consideriamo una nave giocattolo in moto sulla superficie dell'acqua in una vasca da bagno. Supponiamo di cercare di misurare il coefficiente di attrito cinetico tra la nave e l'acqua, ripetendo l'analisi svolta nell'Esempio 6.2 per il caso della slitta che scivolava lungo la strada coperta di neve. Pensi che il valore di μ_k così ottenuto sarebbe indipendente dal modulo della velocità iniziale della nave? Se no, credi che questo concetto di coefficiente di attrito sia utile?
- 6.6** Una cassa è posta al centro del piano di carico di un autocarro, e, quando questo accelera, accelera anch'essa. Che tipo di forza si esercita sulla cassa? Se l'accelerazione dell'autocarro supera un certo valore massimo, la cassa scivola. Questa accelerazione massima dipende dalla massa della cassa? Spiega.
- 6.7** Un marciapiede coperto di ghiaccio che si sta sciogliendo è assai più scivoloso di un marciapiede coperto di ghiaccio molto freddo che non si sta sciogliendo. Spiega perché.
- 6.8** Ti sarà capitato di vedere qualcuno che toglieva con uno strappo la tovaglia da un tavolo lasciando quasi nelle posizioni iniziali i piatti che erano appoggiati sulla tovaglia. Perché il trucco riesca la tovaglia dovrebbe essere fatta di tela spessa o di seta sottile? E i piatti dovrebbero avere massa grande o piccola? È meglio tirare la tovaglia con una forza grande o con una forza moderata e costante?
- 6.9** Coloro che praticano lo sci di fondo applicano sui propri sci una sciolina speciale che consente loro di spingere con uno sci mentre l'altro scivola avanti senza difficoltà. Che cosa si può dire del rapporto μ_s/μ_k per le superfici della sciolina e della neve?
- 6.10** Perché, se si vuole che un'automobile si fermi nel minimo spazio possibile, è meglio *non* schiacciare il freno tanto forte da far slittare i pneumatici sull'asfalto?

- 6.11** Una livella da carpentiere posta sul cruscotto di un'automobile ha la bolla al centro quando l'automobile è ferma su una superficie orizzontale. Ciò indica che il cruscotto è parallelo alla superficie. Si immagini di osservare la bolla mentre l'automobile svolta a destra su una strada progettata con la soprelevazione opportuna per veicoli che viaggiano a velocità v_p . La bolla sarà al centro, a destra del centro, o a sinistra del centro quando il modulo v della velocità dell'automobile è (a) $v = v_p$; (b) $v > v_p$; (c) $v < v_p$?
- 6.12** Un furgoncino viaggia a velocità costante lungo una strada orizzontale. Dentro il furgone un pattino a rotelle, che è allineato con la lunghezza del veicolo, è fermo sul pianale e un pallone pieno di elio è fermo contro il tetto. Si descrivano i moti del pattino e del pallone quando il conducente schiaccia il freno.
- 6.13** Data una medesima velocità iniziale, è possibile che un'automobile più pesante si arresti in meno spazio di una più leggera? Spiega.
- 6.14** Quando un ingegnere decide l'angolo di soprelevazione con cui andrebbe costruita una curva sull'autostrada, deve tener conto della massa delle automobili? Spiega.
- 6.15** Perché un'automobile per gare di accelerazione viene progettata in modo che la maggior parte della sua massa sia sopra le ruote motrici, che sono quelle posteriori?
- 6.16** Si spieghi perché il pilota fa inclinare (o sbandare) l'aereo quando compie una virata.
- 6.17** L'indicatore di virata e sbandamento è uno strumento di cui si servono i piloti degli aeroplani. Di questo strumento fa parte una pallina libera di rotolare in un tubo di vetro (Figura 6.17). Il tubo di vetro è circolare ed è disposto in un piano verticale perpendicolare alla lunghezza dell'aereo. La pallina sta ferma nel punto più basso del tubo quando l'aereo è fermo su una pista orizzontale, e questa posizione è segnata sul tubo e chiamata posizione centrale. Quando l'aeroplano vira, il corretto angolo di sbandamento viene mantenuto controllando che la pallina sia nella posizione centrale. Supponiamo che l'aereo stia virando a destra e che la pallina sia a sinistra del centro: l'angolo di sbandamento dovrebbe essere aumentato o diminuito? Spiega.



Figura 6.17 Quesito 6.17: l'indicatore di virata e sbandamento che si trova sul cruscotto di un aeroplano contiene una sfera libera di rotolare in un tubo di vetro circolare.

- 6.18** Quando un jet di linea accelera rapidamente durante il decollo, i passeggeri vengono «spinti» indietro contro gli schienali. Si tratta di una forza apparente? Se sì, qual è il sistema di riferimento non inerziale? Se no, si identifichi il corpo che esercita la forza.
- 6.19** Abbiamo definito il peso di un corpo come la forza gravitazionale esercitata su di esso dalla Terra. Supponiamo che si decida di cambiare la definizione in modo da includervi la forza centrifuga dovuta alla

rotazione della Terra; ossia, che si definisca il peso di un corpo come somma della forza gravitazionale e della forza centrifuga. Il peso di un corpo è ancora proporzionale alla sua massa? Spiega.

- 6.20** Un filo a piombo è appeso a un treppiede per rilevamenti topografici. Il filo è allineato lungo la direzione della forza gravitazionale che agisce sul piombino (a) all'equatore, (b) ai poli, (c) alla latitudine di 45° ? Se il filo non è allineato con la forza a qualcuna di queste latitudini, si descriva la relazione tra la sua direzione e quella della forza.
- 6.21** Il pianeta Allopic gira intorno alla sua stella con lo stesso periodo e lo stesso raggio orbitale del moto della Terra intorno al Sole. Il raggio di Allopic è doppio di quello della Terra, e un giorno su Allopic dura 48 ore terrestri. Un sistema di coordinate in quiete sull'equatore di Allopic è più simile a un riferimento inerziale di quanto sia un sistema di coordinate in quiete sull'equatore terrestre? Giustifica la tua risposta.
- 6.22** Mentre esploravi il pianeta Atatap, sei stato catturato e rinchiuso in una prigione sotterranea. Dalla tua cella non puoi vedere il cielo, ma disponi di una bilancia a molla che misura il peso apparente con grande precisione. Per far passare il tempo, ogni giorno metti un sasso sulla bilancia e registri ciò che essa segna. Un giorno scopri che il valore indicato dallo strumento è minore che in precedenza. (a) Una delle guardie ti dice che Atatap ha cambiato velocità di rotazione. Se ciò è vero, il pianeta sta ruotando più velocemente o più lentamente? (b) Un'altra guardia ti dice che Atatap non ha cambiato velocità di rotazione, ma che per qualche ragione la forza gravitazionale si è indebolita. Sei in grado di dire quale guardia ha ragione? Se potessi fare la tua misura di peso apparente a una diversa latitudine, potresti dire quale guardia ha ragione? Spiega.
- 6.23** Nell'Esempio 6.6 abbiamo affermato che la forza centripeta che agisce su un'automobile che percorre una curva su una strada orizzontale è fornita dall'attrito statico F_s . Si noti che F_k non può essere una forza centripeta in quanto ha direzione opposta alla velocità relativa delle superfici, e, nel moto circolare uniforme, la

velocità è tangente alla circonferenza e perpendicolare a essa. Se i pneumatici dovessero slittare sulla strada, l'automobile non si muoverebbe più lungo una circonferenza perché F_k non può avere una componente perpendicolare alla velocità. Quale sarebbe la traiettoria dell'automobile se i pneumatici cominciassero a slittare?

- 6.24** Qual è l'accelerazione limite di un corpo che cade in un fluido?
- 6.25** Un uomo viaggia in un carro merci che si muove in modo così regolare che egli non avverte alcuna vibrazione. Il vagone non ha finestre e quindi l'uomo non può vedere fuori. Risvegliandosi dopo un sonno, egli si accorge che il filo a piombo appeso al tetto del vagone non è perpendicolare al pavimento (Figura 6.18), benché quest'ultimo fosse risultato orizzontale quando si erano fatte delle misure a treno fermo su un binario orizzontale. L'uomo dovrebbe concludere che il treno (a) è su un pendio, per cui il pavimento non è orizzontale, oppure (b) sta accelerando su un terreno piano, e quindi il pavimento è orizzontale? Si può essere sicuri di una di queste due conclusioni? Di entrambe? Spiega.

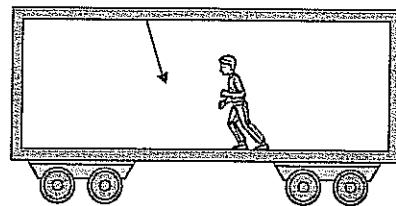


Figura 6.18 Quesito 6.25: un uomo e un filo a piombo in un carro merci. Il vagone è su un pendio che sale verso sinistra, oppure sta accelerando verso sinistra?

6.26 Si completi la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
F_N		Scalare	
F_k	Attrito cinetico		
μ_k			Nessuna
F_{cen}			

ESERCIZI

Paragrafo 6.2 Forze di contatto: la forza normale e la forza d'attrito

- 6.1** Una cassa di massa pari a 37 kg è in quiete su un pavimento orizzontale. Una fune viene attaccata alla faccia superiore della cassa ed esercita su di essa una forza diretta verticalmente verso l'alto. Qual è la forza normale esercitata dal pavimento sulla cassa quando la tensione della fune è (a) 52 N; (b) 170 N; (c) 360 N?
- 6.2** Un'automobile di massa pari a 940 kg è parcheggiata su un pendio tale che la superficie della strada forma un angolo di 16° con l'orizzontale. Determinare la forza normale e l'attrito statico esercitati sull'automobile.
- 6.3** Un divano di massa pari a 41 kg deve essere spostato da una parte all'altra di una stanza tra le gambe del divano

e il pavimento $\mu_s = 0.46$ e $\mu_k = 0.39$. (a) Qual è la minima forza orizzontale in grado di mettere in movimento il divano? (b) Qual è la forza necessaria per far scivolare il divano con velocità costante?

- 6.4** A una scatola della massa di 3.9 kg è attaccata una corda che esercita sulla scatola una trazione diretta verso l'alto a un angolo di 32° rispetto all'orizzontale. La tensione della corda è pari a 21 N, ma la scatola rimane ferma sulla superficie orizzontale su cui è appoggiata. Determinare le intensità (a) della forza normale, (b) della forza di attrito statico, (c) della forza di contatto esercitate sulla scatola dalla superficie.
- 6.5** Perché un blocco della massa di 2.6 kg comincia a scivolare su una superficie orizzontale quando una forza

- orizzontale di 28 N. (a) Che valore ha μ_s tra il blocco e la superficie? (b) Se una forza orizzontale di 19 N fa scivolare il blocco con velocità costante, che valore ha μ_k tra il blocco e la superficie?
- 6.6 Perché un blocco cominci a scivolare in discesa lungo un piano inclinato, questo deve formare con l'orizzontale un angolo di almeno 26° . Che valore ha μ_s tra il blocco e il piano?
- 6.7 Il limite di velocità su una certa strada è di 25 m/s. Per fermarsi a un semaforo rosso, il conducente di un'automobile ha schiacciato bruscamente il freno e la vettura è slittata per 57 m prima di arrestarsi. Il coefficiente μ_k tra i pneumatici e la strada vale 0.80. L'automobilista stava infrangendo il limite di velocità?
- 6.8 Si costruisca un grafico della distanza minima di arresto d di un'automobile in funzione della velocità v nell'istante in cui viene schiacciato il freno. Si assuma per il coefficiente μ_s tra pneumatici e asfalto il valore 0.90, e si faccia variare v da zero a 35 m/s con incrementi di 5 m/s. Qual è l'aumento percentuale della distanza d'arresto per un aumento di v del 20 per cento, da 25 a 30 m/s?
- 6.9 Se il coefficiente μ_k tra una superficie per il gioco della piastra e un disco vale 0.12, fin dove slitterà il disco quando viene lanciato con una velocità iniziale di 5.2 m/s?
- 6.10 (a) Un blocco scivola con velocità costante lungo un piano che forma un angolo θ_k con l'orizzontale. Dimostrare che il coefficiente di attrito cinetico tra il blocco e l'asse è dato da
- $$\mu_k = \tan \theta_k$$
- (b) Che valore ha μ_k tra un piano inclinato e un blocco quando $\theta_k = 29^\circ$?
- 6.11 (a) Dimostrare che l'espressione dell'intensità della forza normale esercitata dal pavimento nell'Esempio 6.4 (Figura 6.9) è
- $$F_N = \frac{mg \cos \theta}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}$$
- (b) Dimostrare che l'intensità F_c della forza di contatto esercitata dal pavimento è
- $$F_c = \frac{mg \cos \theta}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta} \sqrt{1 + \mu_k^2}$$
- (c) Usando i dati dell'Esempio 6.4 ($m = 45 \text{ kg}$, $\theta = 33^\circ$ e $\mu_k = 0.63$), calcolare F_N e F_c .
- 6.12 Il coefficiente μ_s tra le scarpe di uno scattista e la pista è 0.92. Qual è la massima accelerazione dello scattista?
- 6.13 Sapendo che μ_s tra l'asfalto e i pneumatici di un'automobile vale 0.85, determinare l'accelerazione massima dell'automobile su una strada orizzontale. Si ammetta che sulle ruote motrici graviti metà del peso dell'automobile.
- 6.14 Un blocco di massa pari a 3.4 kg scivola in discesa lungo un piano inclinato, come mostra la Figura 6.19. Il coefficiente μ_k tra il blocco e il piano inclinato vale 0.37. Determinare le intensità (a) della forza normale agente sul blocco, (b) della forza d'attrito agente sul blocco, (c) dell'accelerazione del blocco.

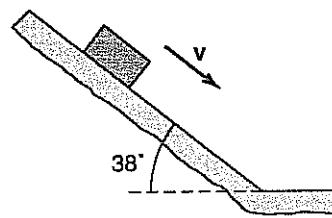


Figura 6.19 Esercizio 6.14.

- 6.15 Un ragazzo tira una slitta in salita lungo un pendio coperto di neve, come mostra la Figura 6.20. La massa della slitta è $m = 26 \text{ kg}$; μ_s e μ_k tra i pattini della slitta e la neve valgono rispettivamente 0.096 e 0.072. Si determini il modulo della forza esercitata dal ragazzo (a) per mettere in movimento la slitta e (b) per far scivolare la slitta a velocità costante.

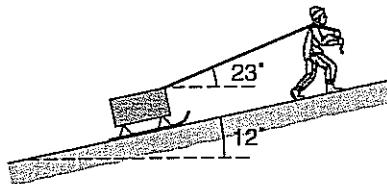
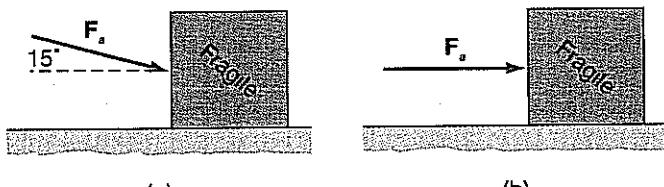


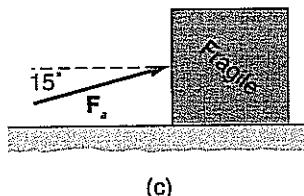
Figura 6.20 Esercizio 6.15.

- 6.16 La forza applicata alla cassa rappresentata nelle Figure 6.21a, b, c ha in ciascun caso la medesima intensità $F_a = 380 \text{ N}$. La massa della cassa è $m = 43 \text{ kg}$ e $\mu_k = 0.47$. Si determini il modulo dell'accelerazione della cassa in ognuno dei casi. Si spieghi perché l'accelerazione è diversa nei vari casi anche se F_a è sempre uguale.



(a)

(b)



(c)

Figura 6.21 Esercizio 6.16.

- 6.17 Con riferimento alla Figura 6.22, qual è l'intensità della minima forza che, applicata al blocco, gli impedirà di scivolare giù lungo la parete verticale? La massa del blocco è $m = 6.4 \text{ kg}$ e μ_s tra il blocco e la parete vale 0.76.

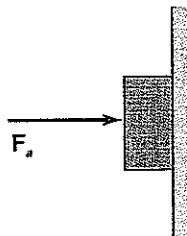


Figura 6.22 Esercizio 6.17.

- 6.18** Un carro scende a velocità costante per una discesa diritta che forma un angolo di 3.1° con l'orizzontale. Qual è il coefficiente di attrito volvente μ_v tra il carro e la superficie della discesa?
- 6.19** Il coefficiente di attrito volvente μ_v tra un carrello e un piano è 0.062. Qual è l'accelerazione del carrello quando viene posto sul piano, e questo è inclinato di un angolo di 5.0° rispetto all'orizzontale?
- 6.20** Una biglia di massa $m = 0.012 \text{ kg}$ cade in uno sciroppo trasparente e la sua velocità limite risulta di 0.072 m/s . Si ammetta che la resistenza viscosa sia della forma $F_v = -bv$ e si trascuri la spinta di Archimede (come abbiamo fatto nel testo). (a) Si determini b . (b) Si determini il modulo della forza risultante che agisce sulla biglia quando la velocità di questa è 0.050 m/s .
- 6.21** La forza viscosa che agisce su un sasso di massa 0.081 kg che cade nell'olio è data dall'espressione $F_v = -(13 \text{ N} \cdot \text{s/m})v$. Qual è la velocità limite v_l del sasso? Si trascuri la spinta di Archimede, come si è fatto nel testo.

Paragrafo 6.3 Dinamica del moto circolare uniforme

- 6.22** Qual è la massima velocità con cui un'automobile può percorrere una curva di raggio 130 m su una strada orizzontale? Il coefficiente μ_s tra i pneumatici e l'asfalto è 0.91.
- 6.23** Stai progettando un tratto di autostrada in cui questa deve compiere una curva di raggio $R = 310 \text{ m}$. Se si prevede che le automobili debbano viaggiarvi a una velocità di 25 m/s , con quale angolo di soprelevazione devi progettare la curva?
- 6.24** Avendo usato un pendolo conico per determinare g , Newton specificò il valore ottenuto dicendo che un corpo che cade a partire dalla quiete percorre 200 pollici in 1 s. In base a questa asserzione, si determini il valore di g ottenuto da Newton. Si determini l'errore percentuale di tale valore di g .
- 6.25** Se un aereo si inclina correttamente durante una virata in volo orizzontale con velocità di modulo costante, la forza F_a esercitata dall'aria sull'aereo è diretta perpendicolarmente a un piano che contiene le ali e la fusoliera del velivolo (Figura 6.23). Si disegni il diagramma di corpo libero per un aereo in queste condizioni. (*Suggerimento:* si noti l'analogia con il pendolo conico dell'Esempio 6.8). Un aereo che vola a una velocità $v = 75 \text{ m/s}$ compie una virata con l'inclinazione appropriata, e l'angolo di sbandamento è di 28° . Qual è il raggio di curvatura della virata?

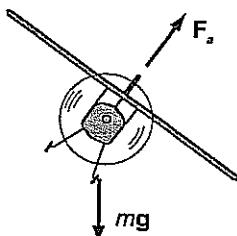


Figura 6.23 Esercizio 6.25.

- 6.26** Qual è il periodo di un pendolo conico con $L = 1.00 \text{ m}$ se l'angolo che il filo forma con la verticale è $\theta = 30^\circ$?

- 6.27** Un'automobile di massa pari a 875 kg effettua una svolta con un raggio di curvatura $R = 15 \text{ m}$. Il modulo della velocità dell'automobile è $v = 7.5 \text{ m/s}$ e la strada è orizzontale. Si determinino le intensità (a) dell'accelerazione del veicolo, (b) dell'attrito che agisce sull'automobile, (c) della forza normale che agisce sull'automobile, (d) della forza di contatto che agisce sull'automobile. (e) Si determini l'angolo compreso tra la forza di contatto e la verticale.
- 6.28** Dimostrare che due pendoli conici 1 e 2, con lunghezze diverse L_1 e L_2 , hanno il medesimo periodo T se la distanza verticale tra il punto di sospensione e il piano dell'orbita circolare descritta dal peso è la stessa per entrambi.
- 6.29** Il periodo del piatto di un giradischi (quando è regolato su $33\frac{1}{3}$ giri al minuto) è $T = 1.8 \text{ s}$. Una monetina viene posta su un disco, e il piatto viene messo in moto. Se la monetina si trova a una distanza dal perno di 0.092 m o minore, resta sul disco e si muove di moto circolare. Ma se la monetina viene posta a una distanza maggiore di 0.092 m , scivola via. Qual è il valore di μ_s tra la monetina e il disco?
- 6.30** Un ciclista percorre una curva con un raggio di curvatura di 65 m . La strada è soprelevata con un angolo di 14° , e il modulo della velocità della bicicletta è di 18 m/s . La massa totale della bicicletta e del ciclista è di 92 kg . Calcolare le intensità (a) della forza normale, (b) della forza d'attrito, (c) della forza di contatto.
- 6.31** È possibile far girare un secchio contenente acqua in un cerchio verticale in modo che l'acqua non ne esca quando il secchio è capovolto nel punto più alto del cerchio. Perché questo trucco riesca, il modulo della velocità del secchio deve essere maggiore di un certo valore minimo. (a) Si determini un'espressione per la velocità minima v_m del secchio nel punto più alto della traiettoria in funzione del raggio R del cerchio. (b) Si calcoli v_m quando $R = 1.0 \text{ m}$.
- 6.32** Un'automobile raggiunge la cima di un colle percorrendo una strada. La strada è diritta, ma, a causa del colle, descrive un arco di circonferenza verticale di raggio R . (a) Trovare un'espressione per la velocità massima v_m che l'automobile può avere se i suoi pneumatici devono rimanere a contatto con il fondo stradale alla sommità del colle. (b) Calcolare v_m quando $R = 140 \text{ m}$.
- 6.33** Una ragazza la cui massa è di 62 kg si trova su una ruota panoramica che gira con velocità costante. Nel punto più alto della traiettoria circolare, il suo peso apparente è di 210 N . La distanza tra l'asse della ruota e i sedili è di 7.1 m . (a) Qual è il peso apparente della ragazza nel punto più basso della sua traiettoria circolare? (b) Qual è il modulo della sua velocità? (c) Qual è il periodo del moto?
- 6.34** Il pianeta Oilga, che ruota attorno alla stella Accuz, ha un raggio di 7.46 Mm e un periodo di rotazione di $1.21 \times 10^4 \text{ s}$. Esplorando Oilga, si misura il peso di una copia del chilogrammo campione, e si trova che è di 8.4 N a uno dei poli di Oilga. (a) Che valore ha g su Oilga? (b) Qual è il peso apparente della copia del chilogrammo all'equatore di Oilga? (c) È una buona approssimazione quella che si compie se si considera inerziale un sistema di riferimento con gli assi fissi rispetto all'orizzontale e alla verticale all'equatore di Oilga? Si trascurino gli effetti del moto orbitale di Oilga attorno ad Accuz.

- 6.35 Mentre esplori il pianeta Olovac, che ruota attorno alla stella Atorac, misuri con un dinamometro il peso apparente F_b di una copia del chilogrammo campione. A un polo $F_b = 12.8 \text{ N}$ e all'equatore $F_b = 10.1 \text{ N}$. Il periodo di rotazione di Olovac attorno al proprio asse è di $8.7 \times 10^3 \text{ s}$. Determina (a) g su Olovac e (b) il raggio di Olovac.

Paragrafo 6.4 Il moto in sistemi di riferimento non inerziali

- 6.36 Determinare il modulo della forza apparente che agisce sulla copia del chilogrammo campione quando questa si

trova (a) all'equatore di Oilga (vedi Esercizio 6.34) e (b) all'equatore di Olovac (vedi Esercizio 6.35).

- 6.37 La giostra di cui abbiamo parlato nel Paragrafo 6.4 ha un periodo di 8.2 s e il ragazzo si trova a 3.8 m dal centro. Il pattino a rotelle cui sta impedendo di rotolare in direzione radiale verso l'esterno ha una massa di 0.69 kg. (a) Quali sono il modulo e la direzione della forza apparente che agisce sul pattino? (b) Se il ragazzo avesse in mano un filo a piombo, quale sarebbe l'angolo tra il filo e la verticale?

PROBLEMI

- 6.1 Due blocchi, 1 e 2, scivolano verso il basso su un piano inclinato, come mostra la Figura 6.24. I due blocchi hanno la medesima massa m , ma i coefficienti di attrito cinetico tra i blocchi e la superficie del piano sono diversi, con $\mu_2 > \mu_1$. Il sistema accelera lungo la discesa e il filo che collega i blocchi rimane teso. (a) Dimostrare che la tensione del filo è

$$F_T = \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) mg \cos \theta$$

- (b) Dimostrare che il modulo a dell'accelerazione del sistema è

$$a = g \left[\sin \theta - \frac{1}{2} (\mu_2 + \mu_1) \cos \theta \right]$$

- (c) Dimostrare che il sistema scivola lungo il piano con velocità costante quando $\theta = \theta_k$, ove

$$\theta_k = \tan^{-1} \left[\frac{1}{2} (\mu_2 + \mu_1) \right]$$

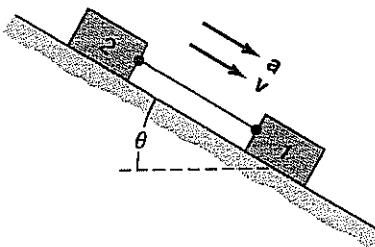


Figura 6.24 Problema 6.1.

- 6.2 Un autocarro senza sponde trasporta una cassa, come mostra la Figura 6.25. La cassa non è assicurata al pianale, ma il coefficiente μ_s tra la cassa e il pianale è 0.70. Quando l'autocarro riparte da un semaforo rosso su una strada orizzontale, qual è la massima accelerazione che può avere senza che la cassa scivoli all'indietro rispetto al pianale?



Figura 6.25 Problema 6.2.

rallentare il carro e gli effetti rotazionali delle ruote, si determini un'espressione del valore minimo di F_a sufficiente a impedire che il blocco scivoli.

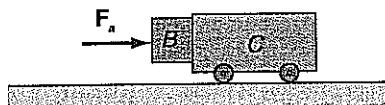


Figura 6.26 Problema 6.3.

- 6.4 **Il rotore.** Il rotore è un'attrazione da parco dei divertimenti che consiste in un ambiente cilindrico che ruota su un asse verticale (Figura 6.27). I passeggeri entrano e si mettono con la schiena contro la parete, dopo di che il cilindro comincia a girare. La velocità di rotazione aumenta gradualmente e, quando essa raggiunge un certo valore minimo, il pavimento viene abbassato e i passeggeri hanno la sensazione di essere esposti al rischio di cadere in una buca sottostante. (a) Si determini un'espressione della velocità minima v_m che i passeggeri devono avere nel loro moto circolare per non scivolare lungo la parete, esprimendo v_m in funzione del coefficiente μ_s tra i passeggeri e la parete e del raggio R del cilindro. (b) Si determini un'espressione del periodo massimo del moto che corrisponde alla velocità v_m .

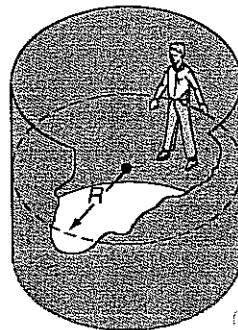


Figura 6.27 Problema 6.4.

- 6.5 Una cassa viene trascinata su una superficie orizzontale a velocità costante da una forza F_x applicata in modo da formare un angolo v con l'orizzontale, come mostra la Figura 6.28. Il coefficiente d'attrito cinetico tra la cassa e la superficie è μ_k . (a) Si dimostri che l'intensità F_a è minima quando l'angolo $\theta = \theta_m$, dove

$$\theta_m = \tan^{-1} \mu_k$$

(Suggerimento: si trovi un'espressione di F_a in funzione

- 6.3 Nella Figura 6.26, il blocco B ha massa m , il carro C ha massa M , e il coefficiente di attrito statico tra il blocco e il carro è μ_s . Trascurando gli attriti che tendono a

di θ e ne calcoli la derivata per determinare θ_m .)

(b) Si dimostri che il valore minimo di F_a è

$$F_{a,\min} = \frac{\mu_k mg}{\sqrt{1 + \mu_k^2}}$$

(Suggerimento: si determinino $\cos\theta_m$ e $\sin\theta_m$ costruendo un triangolo rettangolo di cateti lunghi 1 e μ_k , in modo che sia $\tan\theta_m = \mu_k$.) (c) Qual è la forza minima che si deve applicare per far scivolare a velocità costante una cassa da 51 kg su un pavimento orizzontale, se

$\mu_k = 0.70$? (d) Che angolo deve formare con l'orizzontale la forza della parte (c)? (e) Si confronti la risposta data alla parte (c) con il modulo della forza orizzontale che fa scivolare la cassa a velocità costante.

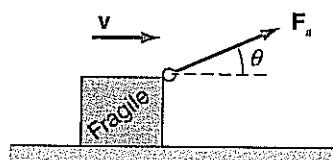


Figura 6.28 Problema 6.5.

- 6.6 Nella Figura 6.29, la massa del blocco B è m e la massa del carrello C è M . Dimostrare che la massima forza $F_{a,\max}$ che si può applicare senza che il blocco scivoli ha intensità

$$F_{a,\max} = \mu_s mg \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

Si trascurino le forze d'attrito che tendono a rallentare il carrello e gli effetti rotazionali delle ruote del carrello.

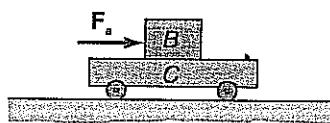


Figura 6.29 Problema 6.6.

- 6.7 Una cassa viene posta al centro del pianale di un camion e non viene legata. Il coefficiente μ_s tra il pianale e la cassa è 0.75. Se il camion viaggia lungo una strada orizzontale con una velocità $v = 22$ m/s, qual è la distanza d'arresto minima perché la cassa non scivoli?

- 6.8 Consideriamo l'effetto della rotazione della Terra sul peso apparente di un corpo. Per semplicità, trascureremo l'effetto del moto orbitale della Terra attorno al Sole, e ammetteremo che la Terra abbia simmetria sferica (si veda il Capitolo 7). La Figura 6.30a rappresenta una persona che tiene un pesce appeso a un dinamometro a una latitudine λ . (a) Facendo uso di un riferimento con gli assi fissi relativamente alle stelle (ossia di un sistema di riferimento inerziale), si dimostri che l'accelerazione centripeta del pesce è

$$a_c = \frac{4\pi^2 R_t \cos\lambda}{T_t^2}$$

dove T_t è il periodo di rotazione della Terra attorno al proprio asse ($T_t = 8.616 \times 10^4$ s) e R_t è il raggio della Terra ($R_t = 6.37$ Mm). (b) Nel diagramma di corpo libero relativo al pesce (Figura 6.30b), l'asse x è parallelo al piano equatoriale ed è diretto verso l'asse terrestre. Si noti che la forza F_b non è uguale e opposta al peso mg a causa dell'accelerazione centripeta. Si dimostri che

$$F_b \cos\theta = mg(1 - \alpha) \cos\lambda$$

e

$$F_b \sin\theta = mg \sin\lambda$$

dove per brevità si è posto $\alpha = 4\pi^2 R_t / g T_t^2$. (c) Si utili la risposta data alla parte (b) per mostrare che

$$F_b = mg[1 - (2\alpha - \alpha^2) \cos^2\lambda]^{1/2}$$

(Suggerimento: si elimini θ elevando al quadrato le due equazioni date sopra, sommandole e sfruttando l'identità $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$). (d) Si dimostri che

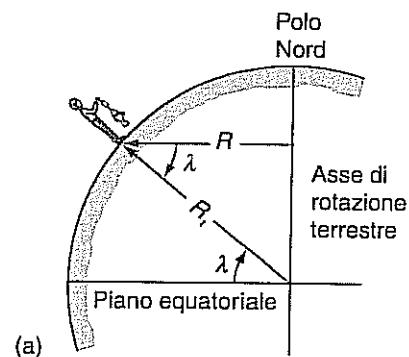
$$\tan\theta = \frac{\tan\lambda}{1 - \alpha}$$

(e) Utilizzando i dati numerici, si mostri che $\alpha = 3.5 \times 10^{-3}$.

(f) Si dimostri che, essendo $\alpha \ll 1$,

$$F_b \approx mg(1 - \alpha \cos^2\lambda)$$

(g) Si calcolino F_b e θ per $\lambda = 45^\circ$.



(a)

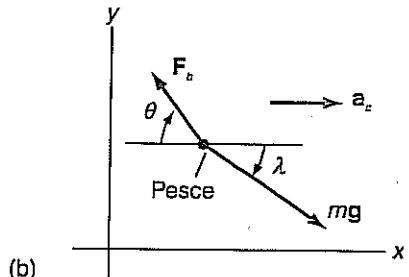


Figura 6.30 Problema 6.8: il peso apparente di un corpo misurato sul superficie della Terra. (a) Un pesce sospeso a un dinamometro alla latitudine λ . (b) Diagramma di corpo libero per il pesce. A causa dell'accelerazione centripeta della Terra, la forza F_b esercitata dal dinamometro non ha né modulo uguale né direzione opposta al peso mg .

- 6.9 Nella Figura 6.31, $m_A = m_B = 5.0$ kg, e μ_k tra il blocco A e la superficie è 0.40. Il blocco A sta scivolando in salita lungo il piano inclinato. Si determinino (a) il modulo dell'accelerazione del sistema e (b) la tensione del filo. Si trascurino l'attrito e gli effetti rotazionali della puleggia.

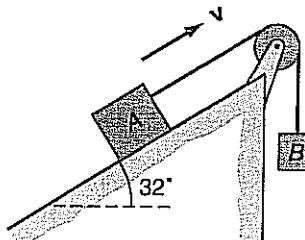


Figura 6.31 Problema 6.9.

- 6.10 Nella Figura 6.32, μ_k ha il medesimo valore 0.25 tra ciascuno dei blocchi e la superficie. Il sistema sta scivolando come indica la figura; $m_A = 7.0 \text{ kg}$ e $m_B = 9.0 \text{ kg}$. Si determinino (a) l'accelerazione del sistema e (b) la tensione del filo. Si trascurino l'attrito e gli effetti rotazionali della puleggia.

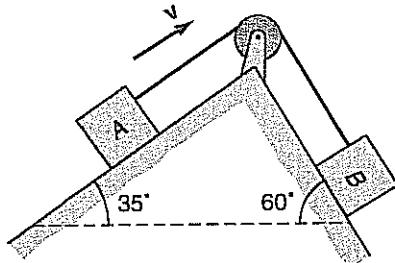
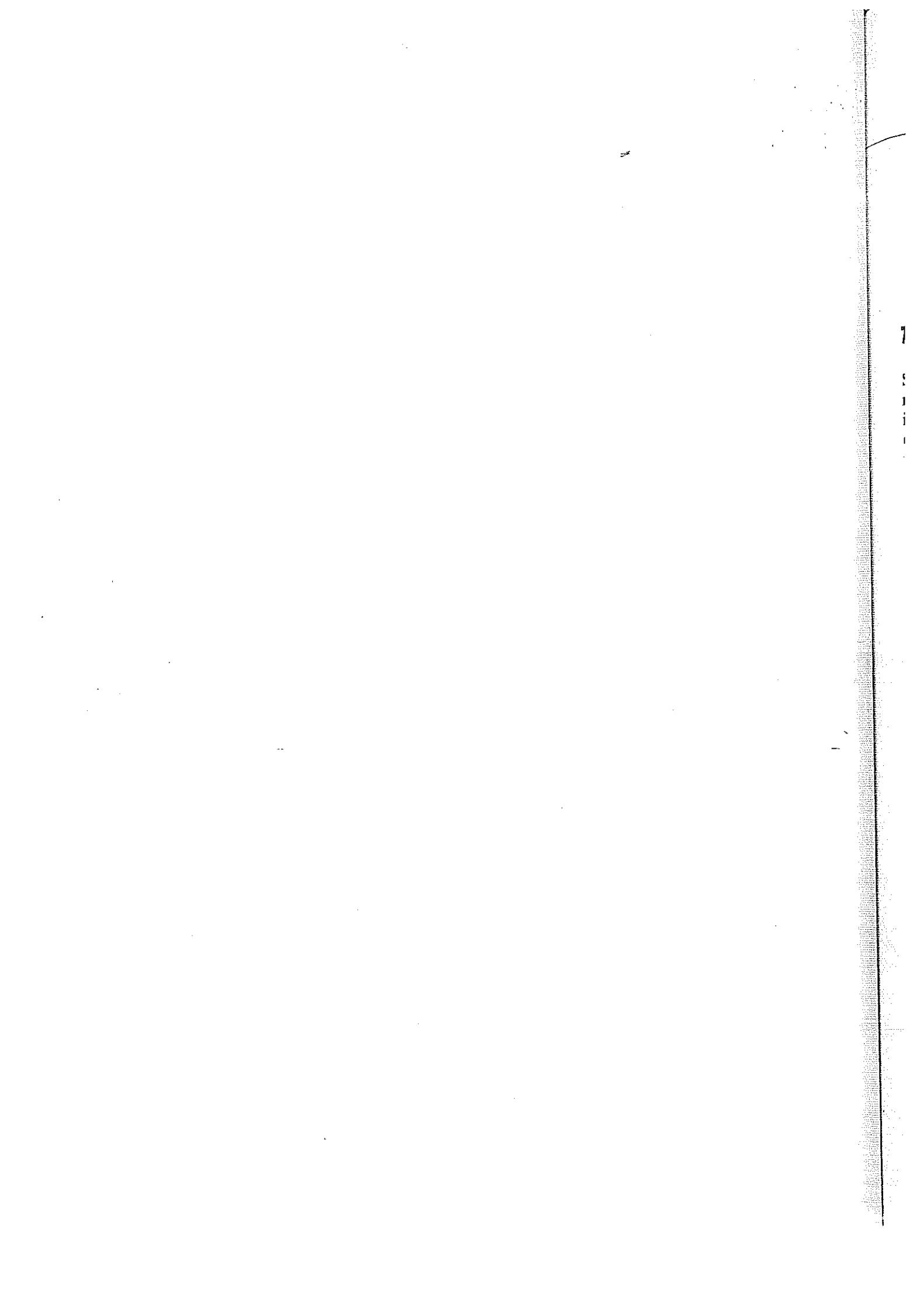


Figura 6.32 Problema 6.10.

- 6.11 Si consideri un aeroplano che sale, raggiunge un'altitudine massima e poi ridiscende sempre percorrendo un arco di circonferenza verticale di raggio R con velocità di modulo v costante. Il modulo della velocità dell'aereo è esattamente tale da far sì che alla quota massima il pilota sia «privo di peso». (A dispetto del termine, il pilota è privo di peso quando l'unica forza che agisce su di lui è il suo peso.) Si dimostri che l'intensità F_b della forza esercitata dall'aereo sul pilota (dovuta essenzialmente al contatto con il sedile) è $F_b = 2mg \sin \frac{1}{2}\theta$, ove m è la massa del pilota e θ è l'angolo compreso tra la velocità dell'aereo e l'orizzontale.



LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE DI NEWTON

INTRODUZIONE

Secondo la tradizione, la teoria della gravitazione cominciò a prendere forma nella notte di Isaac Newton il giorno in cui vide una mela cadere dall'albero a Woolsthorpe nel Inghilterra, nel 1666. Newton si rese conto della connessione tra l'accelerazione dei corpi che cadono sulla Terra e quella dei corpi celesti nelle loro orbite. Per esempio, a mela cade da un albero e la Luna gira attorno alla Terra (Figura 7.1): entrambi questi fenomeni apparentemente privi di correlazione sono causati dalla forza di attrazione gravitazionale della Terra, e in entrambi i casi la forza è definita dalla medesima espressione matematica, la legge di gravitazione universale di Newton. «Perché la mela cade?» e «perché la Luna gira attorno alla Terra?» non sono due enigmi distinti, ma sono due distinte esemplificazioni del medesimo enigma, la forza gravitazionale.

La forza di gravità è universale. Non soltanto ci tiene saldamente attaccati alla superficie della Terra, ma tiene anche i pianeti nelle loro orbite intorno al Sole. Tiene insieme il Sole e altre stelle in un sistemastellare ruotante che chiamiamo Via Lattea. Tiene insieme galassie come la Via Lattea in ammassi di galassie. La forza gravitazionale è attrattiva: se si inciampa sul bordo di un marciapiede, si cade giù e non su. In virtù di questa forza, nell'universo ogni corpo attrae ogni altro corpo.

7.2 LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Ora ricaveremo la legge di gravitazione universale servendoci di un po' di intuizione e di qualche informazione sperimentale circa il sistema solare. Dal momento che il sistema solare può essere descritto tramite un semplice modello, risulta essere l'ideale per lo studio della forza di gravità. Inoltre, siccome i nove pianeti si trovano a distanze molto diverse dal Sole, essi forniscono un campione significativo della dipendenza della forza di gravità dalla distanza.

In modello del sistema solare. Il nostro modello del sistema solare si basa su quattro ipotesi semplificative principali.

1. Il Sole e i pianeti sono considerati punti materiali, nonostante le loro grandi dimensioni, perché le loro distanze sono molto maggiori delle loro dimensioni (Figura 7.2).
2. Il sistema di riferimento in cui il Sole è in quiete è considerato un riferimento inerziale. Tra breve applicheremo la seconda legge di Newton, $\Sigma F = ma$, ai pianeti: l'accelerazione che compare in tale legge deve essere misurata rispetto a un sistema di riferimento inerziale (Paragrafo 5.4). Grazie a questa ipotesi del modello, potremo servirci dell'accelerazione del pianeta misurata rispetto al Sole.
3. Ciascun pianeta ruota attorno al Sole lungo un'orbita circolare anche se come vedremo (Paragrafo 7.7), le orbite planetarie sono ellittiche. L'accelerazione rispetto al Sole di un pianeta che percorre un'orbita circolare di raggio R attorno al Sole è semplicemente l'accelerazione centripeta, $a_c = v^2/R$.
4. L'unica forza significativa che agisce sui pianeti è la forza gravitazionale dovuta al Sole. L'orbita di ciascun pianeta è con un elevato grado di precisione indipendente

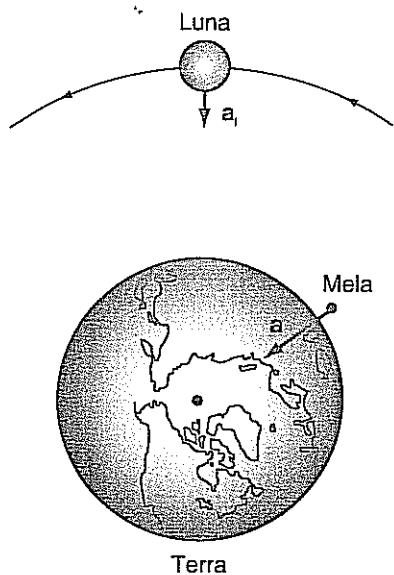


Figura 7.1 La Luna e la mela accelerano entrambe verso il centro della Terra a causa dell'attrazione gravitazionale di quest'ultima.

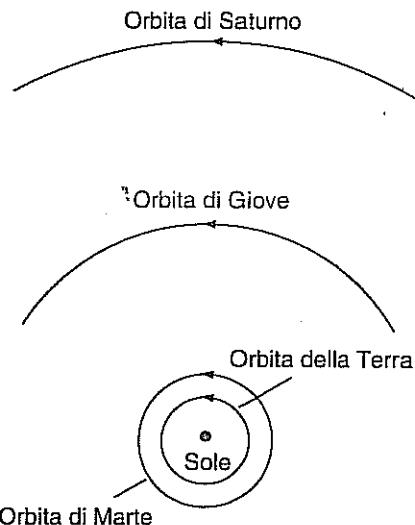


Figura 7.2 Le orbite di alcuni pianeti rappresentate in scala. Su questa scala il raggio del Sole è meno di un decimo dello spessore di questa pagina.

dalle posizioni degli altri pianeti. Pertanto ammetteremo che l'unica forza agente su un pianeta sia la forza gravitazionale esercitata dal Sole, e prenderemo questa come forza risultante.

La dipendenza dalla distanza. Ora utilizzeremo questo modello per determinare la dipendenza della forza di gravità dalla distanza. Le colonne (1) e (2) della Tabella 7.1 forniscono i periodi T e i raggi R delle orbite dei pianeti attorno al Sole. Servendoci di questi dati, possiamo trovare l'accelerazione di ciascun pianeta.

Dal momento che il modulo della velocità di un corpo che percorre una circonferenza di raggio R con periodo T è $v = 2\pi R/T$, l'accelerazione centripeta del corpo è

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi R/T)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Inserendo in questa formula i valori di T e R relativi a ciascun pianeta si ottengono le accelerazioni riportate nella colonna (3). A titolo di esempio, l'accelerazione della Terra rispetto al Sole è

$$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11} \text{ m})}{(3.156 \times 10^7 \text{ s})} = 5.929 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Tabella 7.1 Dati relativi al sistema solare

Corpo	(1) Periodo T , 10^7 s	(2) Raggio orbitale medio R , 10^{11} m	(3) Accelerazione orbitale media $a_c = 4\pi^2 R/T^2$, 10^{-3} m/s ²	(4) Accelerazione x raggio orbitale al quadrato $a_c R^2 = 4\pi^2 R^3/T^2$, 10^{20} m ³ /s ²	(5) Massa 10^{24} kg
Sole					1 990 000
Mercurio	0.760	0.579	39.6	1.33	0.335
Venere	1.94	1.08	11.3	1.32	4.89
Terra	3.156	1.496	5.929	1.327	5.97
Marte	5.94	2.28	2.55	1.33	0.646
Giove	37.4	7.78	0.219	1.33	1900
Saturno	93.5	14.3	0.0646	1.32	569
Urano	264	28.7	0.0163	1.34	87.3
Nettuno	522	45.0	0.00652	1.32	103
Plutone	782	59.1	0.00382	1.33	5.4

La colonna (4) della Tabella 7.1 contiene dati molto importanti per la nostra indagine: il prodotto $a_c R^2$ (ossia $4\pi^2 R^3 / T^2$) è praticamente identico per ognuno dei pianeti. Ciascuno dei valori differisce meno dell'1 per cento dal valore medio. Nei limiti delle nostre approssimazioni, possiamo affermare che il prodotto $a_c R^2$ ha il medesimo valore per tutti i pianeti. Ossia:

$$a_c R^2 = k_s$$

dove k_s (l'indice s si riferisce al Sole) è una costante che è uguale per ogni pianeta ($k_s = 1.33 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$). Risolvendo rispetto ad a_c si ottiene

$$a_c = \frac{k_s}{R^2}$$

Se indichiamo con F_{sp} l'intensità della forza esercitata dal Sole su un pianeta e con m_p la massa del pianeta, la seconda legge di Newton fornisce $F_{sp} = m_p a_c$, ossia

$$F_{sp} = m_p \left(\frac{k_s}{R^2} \right) = \frac{k_s m_p}{R^2} \quad (7.1)$$

Quindi la forza di gravità all'aumentare della distanza R decresce come $1/R^2$. Una forza che presenta questo tipo di dipendenza dalla distanza obbedisce a quella che viene chiamata *legge dell'inverso del quadrato*.

La forza di gravità obbedisce alla legge dell'inverso dei quadrati.

La dipendenza dalla massa. Nei *Principia* Newton si servì della terza legge del moto per arrivare alla dipendenza della forza di gravità dalla massa, come chiarisce il passo seguente:

«Poiché inoltre l'azione della forza centripeta sul corpo attratto è proporzionale, a pari distanza, alla materia contenuta in questo corpo, è ragionevole che essa sia proporzionale anche alla materia contenuta nel corpo che attrae. L'azione è infatti reciproca, e fa sì che i due corpi con un reciproco sforzo (per la terza legge del moto) si avvicinino vicendevolmente; tale azione deve perciò essere simile a sé stessa in entrambi. Un corpo può essere considerato come quello che attrae mentre l'altro è attratto: ma si tratta di una distinzione più matematica che naturale. L'attrazione in verità è esercitata da ognuno dei due corpi sull'altro, e pertanto è della medesima specie in entrambi».¹

Seguiamo il ragionamento di Newton punto per punto. In base all'Equazione (7.1) la forza gravitazionale esercitata dal Sole su un pianeta è proporzionale alla massa del pianeta. Inoltre, in virtù della terza legge di Newton, se il Sole esercita una forza F_{sp} su un pianeta, questo esercita una forza F_{ps} sul Sole, e i moduli delle due forze sono uguali: $F_{sp} = F_{ps}$. Se un'unica espressione matematica (o legge) rappresenta entrambe queste forze, m_s deve entrare in tale espressione nello stesso modo di m_p . Ossia, siccome $F_{sp} \propto m_p$, è ragionevole attendersi che $F_{ps} \propto m_s$. Pertanto poniamo $k_s = Gm_s$, ove G è una costante di proporzionalità indipendente da entrambe le masse, e l'Equazione (7.1) diventa

$$F_{sp} = \frac{Gm_s m_p}{R^2}$$

L'espressione di F_{ps} si trova scambiando p e s :

$$F_{ps} = \frac{Gm_p m_s}{R^2}$$

Dal momento che queste espressioni comportano $F_{ps} = F_{sp}$, esse sono in accordo con la terza legge di Newton, e la massa di ciascun corpo entra in modo simmetrico in entrambe.

¹ Citato in Bernard Cohen, *Newton e la scoperta della gravità*, in «Le Scienze», maggio 1981.

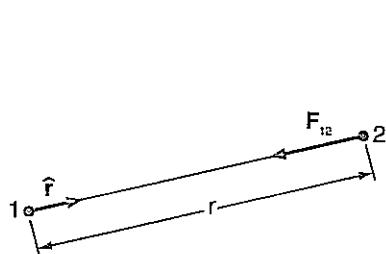


Figura 7.3

La legge di gravitazione universale di Newton. La forza gravitazionale F_{12} esercitata dal punto materiale 1 sul punto materiale 2 è diretta verso il punto materiale 1.

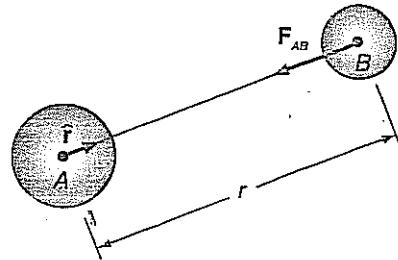


Figura 7.4

La forza gravitazionale F_{AB} esercitata dal corpo A, dotato di simmetria sferica, sul corpo B, dotato anch'esso di simmetria sferica. Ciascuno dei corpi interagisce dal punto di vista gravitazionale come se tutta la sua massa fosse concentrata in una particella posta nel proprio centro.

La legge della forza gravitazionale per i corpi puntiformi. Per generalizzare risultati ottenuti, indichiamo con F_{12} la forza gravitazionale esercitata dalla particella sulla particella 2. Essendo la forza attrattiva, è diretta da 2 verso 1. Solitamente per indicare questa direzione ci si serve del versore \hat{r} , che è diretto da 1 verso 2, come mostra la Figura 7.3. Quindi si ha

La legge gravitazionale universale di Newton.

$$F_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r} \quad (7.2)$$

dove m_1 e m_2 sono le masse delle particelle e r è la loro distanza. Il segno meno indica che la direzione della forza è opposta a \hat{r} . Questa è la legge di gravitazione universale di Newton. Il simbolo G rappresenta una costante universale, e colloquialmente viene chiamato « G grande». La « G » maiuscola viene usata per evitare qualsiasi confusione con il modulo dell'accelerazione di gravità in prossimità della superficie della Terra, rappresentato da g , e detto talvolta « g piccola».

L'intensità della forza esercitata dalla particella 1 sulla particella 2 è uguale all'intensità della forza esercitata dalla particella 2 sulla particella 1: $F_{12} = F_{21} = Gm_1m_2/r^2$. Per questo spesso si parla della forza agente *tra* le particelle 1 e 2. Tale formulazione comune, ma è fuorviante in quanto implica che non vi sia distinzione tra la forza esercitata da 1 su 2 e la forza esercitata da 2 su 1. Ciò è vero solamente per quanto riguarda l'intensità delle forze, per la terza legge di Newton. Quando ci si esprime in questo modo si dovrebbe tenere presente che si sta parlando di due differenti forze che agiscono su due particelle distinte, e che hanno direzione opposta.

Forza agente tra corpi estesi. L'Equazione (7.2) si applica a corpi che si trovino a distanza sufficientemente grande per poter essere considerati puntiformi. Ma come si fa a determinare la forza gravitazionale che agisce tra corpi che non sono piccoli rispetto alla loro distanza? Per esempio, come si calcola la forza gravitazionale che si esercita tra la Terra e una sedia che si trova in prossimità della sua superficie? Per rispondere a questa domanda, Newton si servì del calcolo integrale che aveva appena creato. La risposta consiste nell'immaginare che i due corpi siano costituiti di un gran numero di particelle così piccole da poter essere considerate puntiformi. Poi, facendo uso del calcolo integrale, si sommano vettorialmente le forze dovute a ciascuna particella: la somma (o integrale) fornisce la forza gravitazionale totale.

Non ci occuperemo per ora di illustrare questo procedimento ma la conclusione per corpi con una distribuzione di massa a simmetria sferica, come una palla da biliardo o una pallina da ping pong, è particolarmente semplice. Si considerino due corpi dotati di simmetria sferica, A e B, come nella Figura 7.4: la forza gravitazionale che agisce tra A e B è la stessa che agirebbe se A e B fossero punti materiali posti nel centro dei due corpi e in essi fosse concentrata tutta la massa di questi ultimi. Se si vuole calcolare la forza gravitazionale che agisce tra due corpi dotati di simmetria sferica, come una palla da biliardo e la Terra, oppure come una palla da biliardo e un pallone da pallacanestro,

Dal punto di vista gravitazionale, un corpo dotato di simmetria sferica si comporta come un punto materiale, cioè come se tutta la sua massa fosse localizzata nel suo centro.

nestro, si usa l'Equazione (7.2) prendendo come r la distanza tra i due centri e come \hat{r} la direzione della congiungente dei due centri². I due corpi devono però essere l'uno fuori dall'altro: se la palla da biliardo è dentro il pallone da pallacanestro, l'Equazione (7.2) non è valida.

Questa conclusione relativa ai corpi dotati di simmetria sferica è conseguenza di due caratteristiche della forza di gravità: (i) la forza è diretta lungo la congiungente delle particelle e (ii) la forza varia come l'inverso del quadrato della distanza. La forza elettrica che agisce tra due particelle cariche ha queste stesse proprietà. Torneremo su questo problema della forza agente tra corpi dotati di simmetria sferica quando discuteremo delle forze elettriche nel secondo volume.

Consideriamo ora la forza gravitazionale che agisce su una sedia in prossimità della superficie della Terra. Una sedia non ha affatto una forma sferica: di che legge possiamo servirci per descrivere la forza in questo caso? Ancora una volta dell'Equazione (7.2). La sedia non ha infatti simmetria sferica, ma la Terra sì: nel descrivere l'interazione, la Terra può essere trattata come una particella con la massa m_t concentrata nel proprio centro. La distanza tra la sedia e il centro della Terra è $R_t = 6.37 \times 10^6$ m, e quindi la distanza r tra la sedia e la «Terra considerata come particella» è grande rispetto alle dimensioni della sedia (≈ 1 m). Ciò significa che anche la sedia può essere trattata come una particella. Pertanto la forza gravitazionale \mathbf{F}_t esercitata dalla Terra su un corpo di massa m posto sulla sua superficie è

$$\mathbf{F}_t = -\left(\frac{Gmm_t}{R_t^2}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

Peso di un corpo in prossimità della superficie della Terra.

dove m_t è la massa della Terra, R_t è il raggio della Terra, e \mathbf{r} è un versore diretto radialmente a partire dal centro della Terra. Questa forza è il peso del corpo, che in precedenza avevamo espresso come

$$\mathbf{F}_t = mg$$

Confrontando queste equazioni relative al peso di un corpo si ottiene un'espressione del modulo g dell'accelerazione dovuta alla gravità. Dal momento che $Gmm_t/R_t^2 = mg$, si ha

$$g = \frac{Gm_t}{R_t^2} \quad (7.3)$$

La legge di gravitazione universale di Newton chiarisce perché tutti i corpi in caduta libera in prossimità della superficie della Terra hanno la medesima accelerazione. Tale accelerazione dipende dalle proprietà della Terra (m_t e R_t) ed è indipendente da qualsiasi proprietà del corpo che cade.

7.3 LA COSTANTE DI GRAVITAZIONE G

Una misura precisa della costante di gravitazione G fu per molti anni al di fuori della portata degli scienziati. La costante non può essere determinata a partire dai raggi e dai periodi delle orbite planetarie se prima non si conosce la massa del Sole. Possiamo renderci conto di ciò applicando la seconda legge di Newton, $\Sigma F = ma$, a un pianeta: $Gm_s m_p / R^2 = m_p a_c$. Risolvendo rispetto a G si ha

$$G = \frac{a_c R^2}{m_s}$$

Come abbiamo visto, in base ai raggi e ai periodi delle orbite dei pianeti si ha $a_c R^2 \approx 1.33 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$ per ogni pianeta (Tabella 7.1). Tuttavia, se non conosciamo la massa del Sole, non possiamo determinare G .

² Il verso di \hat{r} dovrà essere fissato di volta in volta ad arbitrio. Se si vuole esprimere, per esempio, la forza gravitazionale tra la Terra e una palla, sarà naturale orientare \hat{r} dal centro della Terra verso la superficie della Terra.

Un altro modo con cui si potrebbe cercare di determinare G è basandosi sui valori misurati di g e R_t . Risolvendo l'Equazione (7.3) rispetto a G , si ottiene

$$G = \frac{gR_t^2}{m_t}$$

Tuttavia, se non si conosce la massa della Terra, di nuovo non è possibile determinare G .

Questo problema della determinazione del valore di G può essere risolto misurando l'intensità F_{12} della forza agente tra due corpi di forma sferica di masse note m_1 e m_2 che siano posti a una distanza pure nota r . Risolvendo l'Equazione (7.2) rispetto a G , si ha

$$G = \frac{F_{12}r^2}{m_1m_2} \quad (7.4)$$

I valori ottenuti dalle misure possono allora essere inseriti nell'Equazione (7.4). Tuttavia una misura precisa di G è molto difficile da realizzare: la difficoltà sta nel fatto che, se m_1 e m_2 sono di dimensioni ordinarie, vale a dire di qualche chilogrammo, allora F_{12} è estremamente piccola.

Fu soltanto nel 1798, 71 anni dopo la morte di Newton, che Henry Cavendish (1731-1810) riuscì a effettuare la prima misura ragionevolmente precisa di G grazie a uno strumento noto oggi come bilancia di torsione di Cavendish (Figura 7.5). Egli si servì di quattro sfere di piombo: le sfere a e b erano di uguale massa e anche le sfere A e B erano di uguale massa, ma diverse da a e b . Le sfere a e b erano poste alle estremità di una leggera asta in modo da formare una sorta di manubrio da pesista, che era appeso a una fibra sottile. Le sfere A e B erano collocate vicino rispettivamente ad a e b , ma da parti opposte, come si vede nella figura, di modo che l'attrazione gravitazionale tra a e A e tra b e B causava una torsione della fibra di entità misurabile. Uno specchio era fissato all'asta in modo da riflettere un raggio di luce su una scala graduata, la quale permetteva una misura precisa dell'orientazione di equilibrio dell'asta. Poi A e B venivano spostate nelle posizioni indicate nella figura dai cerchi tratteggiati: in questa seconda configurazione, l'attrazione gravitazionale tra le sfere faceva sì che la fibra si torcesse nel senso opposto. Si registrava allora la nuova orientazione di equilibrio dell'asta. Misurando in modo indipendente le forze che agendo su a e b producevano torsioni della fibra di entità data, si potevano calcolare le intensità delle forze gravitazionali.

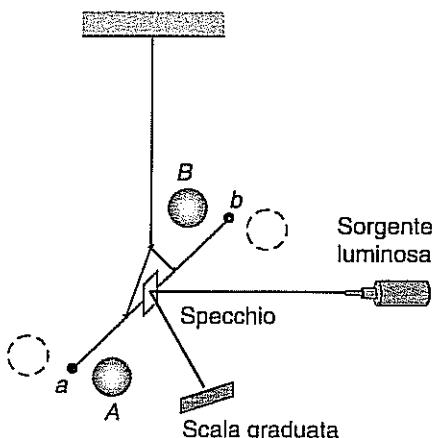
Cavendish affermò che il suo esperimento equivaleva a «pesare la Terra». In effetti, una volta che si conosca G , è possibile determinare la massa della Terra, ed è altresì possibile calcolare le masse degli altri pianeti e quella del Sole. Il valore attualmente accettato per G è

$$G = 6.670 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

Oltre che per stabilire il valore di G , la bilancia di torsione di Cavendish è stata usata anche per verificare la dipendenza dalla massa e dalla distanza prevista dalla legge di gravitazione universale di Newton.

Figura 7.5

Rappresentazione schematica di una bilancia di torsione di Cavendish. La bilancia può essere usata per misurare G e per ottenere una verifica sperimentale della dipendenza dalla distanza e dalla massa prevista dalla legge di gravitazione universale di Newton.



Esempio 7.1

Determinare l'intensità della forza gravitazionale che si esercita tra una palla da biliardo della massa di 0.2 kg e un pallone da pallacanestro della massa di 0.6 kg quando la distanza tra i loro centri è di 0.5 m.

Soluzione

In base alla legge di gravitazione universale di Newton, Equazione (7.2), l'intensità della forza è

$$F_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(0.2 \text{ kg})(0.6 \text{ kg})}{(0.5 \text{ m})^2} = 3 \times 10^{-11} \text{ N}$$

Si tratta di una forza di intensità molto piccola, insufficiente a produrre effetti osservabili su una qualsiasi delle due palle.

Esempio 7.2

Determinare la massa del Sole servendosi del valore di G e dei dati riportati nella Tabella 7.1.

Soluzione

Dalla Tabella 7.1 si ricava $a_c R^2 = 1.33 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$; in precedenza abbiamo rilevato che $G = a_c R^2 / m_s$. Pertanto,

$$m_s = \frac{a_c R^2}{G} = \frac{1.33 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Esempio 7.3

Determinare la massa della Terra in base al raggio della Terra ($R_t = 6.37 \times 10^6 \text{ m} = 6.37 \text{ Mm}$), al modulo dell'accelerazione di gravità alla superficie della Terra ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$), e a G .

Soluzione

Risolvendo l'Equazione (7.3), $g = Gm_t/R_t^2$, rispetto a m_t , si ha

$$m_t = \frac{gR_t^2}{G} = \frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(6.37 \text{ Mm})^2}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Esempio 7.4

Si costruisca un grafico che mostri la dipendenza dalla distanza dell'intensità della forza gravitazionale esercitata dalla Terra su un corpo di massa 1.00 kg, nell'intervallo di distanze dal centro della Terra compreso tra R_t e $4R_t$. Si determini l'intensità della forza alle distanze R_t , $2R_t$, $3R_t$, $4R_t$; si riportino i punti, e si tracci una curva passante per tali punti.

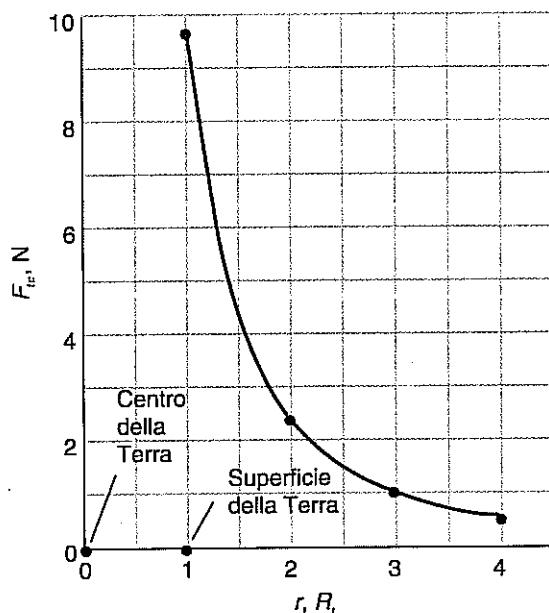


Figura 7.6

Esempio 7.4: l'intensità F_g della forza gravitazionale esercitata dalla Terra su un corpo c ($m_c = 1.00 \text{ kg}$), in funzione della distanza r dal centro della Terra.

Soluzione:

Indichiamo con il pedice t la Terra, e con il pedice c il corpo. Alla distanza R_t

$$F_{tc} = \frac{Gm_t m_c}{R_t^2}$$

Alla distanza $2R_t$,

$$F_{tc} = \frac{Gm_t m_c}{(2R_t)^2} = \frac{9.81 \text{ N}}{2^2} = \frac{9.81 \text{ N}}{4} = 2.45 \text{ N}$$

Alla distanza $3R_t$,

$$F_{tc} = \frac{Gm_t m_c}{(3R_t)^2} = \frac{9.81 \text{ N}}{3^2} = \frac{9.81 \text{ N}}{9} = 1.09 \text{ N}$$

Analogamente, alla distanza $4R_t$,

$$F_{tc} = \frac{Gm_t m_c}{(4R_t)^2} = \frac{9.81 \text{ N}}{4^2} = \frac{9.81 \text{ N}}{16} = 0.613 \text{ N}$$

Esempio 7.5

Come le altre forze, anche quelle gravitazionali si sommano vettorialmente. Si consideri un veicolo spaziale in viaggio dalla Terra alla Luna lungo la retta congiungente i centri dei due corpi celesti. Quale distanza dal centro della Terra la forza F_{ts} esercitata dalla Terra sul veicolo spaziale è uguale opposta alla forza F_{ls} esercitata dalla Luna sul veicolo spaziale? La massa della Luna $m_l = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$, e il raggio della sua orbita attorno alla Terra è $r_d = 3.84 \times 10^8 \text{ m} = 384 \text{ Mm}$

Soluzione

La Figura 7.7 rappresenta un sistema di coordinate con l'origine nel centro della Terra e l'asse x parallelo per la Luna. Dal momento che qualunque forza gravitazionale è attrattiva, il punto P in cui F_{ts} e F_{ls} sono uguali ed opposte deve trovarsi su tale asse tra la Terra e la Luna. Nella figura questo punto è rappresentato a una distanza x dal centro della Terra e a una distanza $r_d - x$ dal centro della Luna. Uguagliando le intensità delle due forze, si ha

$$\frac{Gmm_l}{x^2} = \frac{Gmm_l}{(r_d - x)^2}$$

dove m è la massa del veicolo spaziale. Riordinando si ottiene

$$\left(1 - \frac{m_l}{m_t}\right)x^2 - (2r_d)x + r_d^2 = 0$$

Questa è un'equazione di secondo grado in x , la cui soluzione (vedi Appendice D) è

$$x = \frac{r_d}{1 \pm \sqrt{m_l/m_t}}$$

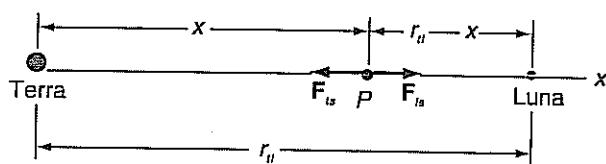
Il segno più o meno indica che sull'asse x vi sono due punti nei quali le intensità delle forze sono uguali. In corrispondenza del segno meno, $x > r_d$: questo è un punto oltre la Luna. In tale punto le due forze sono di uguale intensità ma hanno la stessa direzione. Visto che noi cerchiamo il punto in cui le forze sono di modulo uguale ma di direzione *opposta*, scartiamo la soluzione con il segno meno. In corrispondenza del segno più, $x < r_d$: questo è un punto tra la Terra e la Luna ed è quello che interessa in questo esempio. Il rapporto tra le masse della Luna e della Terra (si veda la Tabella 7.1) è

$$\frac{m_l}{m_t} = \frac{0.0735 \times 10^{24} \text{ kg}}{5.97 \times 10^{24} \text{ kg}} = 0.0123$$

cosicché

$$x = \frac{384 \text{ Mm}}{1 + \sqrt{0.0123}} = (0.900)(384 \text{ Mm}) = 346 \text{ Mm}$$

Il punto tra la Terra e la Luna in cui le due forze si annullano reciprocamente è a 9/10 della distanza Terra-Luna.

**Figura 7.7**

Esempio 7.5: determinazione della distanza x dal centro della Terra al punto P in cui le attrazioni gravitazionali della Terra (F_{ts}) e della Luna (F_{ls}) su un veicolo spaziale sono uguali e opposte.

7.4 MASSA GRAVITAZIONALE E MASSA INERZIALE

Abbiamo visto nel Capitolo 5 che la massa m di un corpo è la costante di proporzionalità tra la forza risultante ΣF esercitata sul corpo e la sua accelerazione a : $\Sigma F = ma$. Quindi la massa di un corpo è la proprietà che fa sì che il corpo resista alle variazioni della propria velocità. Per tale ragione la massa viene spesso chiamata *massa inerziale*. Supponiamo che in un supermercato un carrello per la spesa carico di generi alimentari sfuggito al controllo stia rotolando lungo un corridoio e che vogliamo fermarlo prima che vada a urtare contro una pila di scatolette: la forza necessaria per fermare il carrello dipende dalla sua massa inerziale.

In questo capitolo abbiamo visto che la massa compare anche nella legge di gravitazione universale di Newton. L'intensità F della forza gravitazionale che agisce su un corpo di massa m ad opera di un altro corpo di massa M è $F = GmM/r^2$ (ammettiamo che i due corpi possano essere trattati come punti materiali.) In questa espressione la massa di un corpo è la proprietà che fa sì che il corpo sia attratto verso un altro corpo dalla forza gravitazionale. Per tale ragione la massa che compare nella legge di gravitazione universale di Newton viene spesso chiamata *massa gravitazionale*. Supponiamo di reggere una borsa con la spesa mentre aspettiamo un amico: la forza che dobbiamo esercitare dipende dalla massa gravitazionale della borsa.

La difficoltà che si incontra nel fermare il carrello non ha nulla a che fare con la sua massa gravitazionale. La fatica che si fa per reggere la borsa con la spesa non ha nulla a che fare con la sua massa inerziale. Il termine «massa di un corpo» esprime dunque due diverse proprietà del corpo. Da una parte essa è una misura della resistenza del corpo alle variazioni della velocità (massa inerziale), e dall'altra è una misura dell'attrazione gravitazionale del corpo verso altri corpi del suo ambiente (massa gravitazionale). Ai fini di questa discussione, distinguiamo la massa inerziale dalla massa gravitazionale usando il simbolo m_I per la prima e il simbolo m_G per la seconda.

Perché queste due proprietà differenti della materia, la massa inerziale e la massa gravitazionale, sono chiamate entrambe «massa»? Perché gli esperimenti dimostrano che sono l'una proporzionale all'altra. Un esempio di esperimento di questo tipo è la misura dell'accelerazione di corpi diversi in caduta libera. Durante la caduta libera, tutte le forze agenti su un corpo sono trascurabili eccetto la forza di gravità; la forza risultante si riduce alla forza gravitazionale esercitata dalla Terra. Consideriamo una palla da golf in caduta libera in prossimità della superficie terrestre, e orientiamo l'asse y verticalmente verso l'alto. Allora $\Sigma F_y = -Gm_G m_t / R_t^2$, dove m_G è la massa gravitazionale della palla. La componente y della seconda legge di Newton fornisce

$$-\frac{Gm_G m_t}{R_t^2} = m_I a_y$$

dove m_I è la massa inerziale della palla da golf. Risolvendo rispetto ad a_y , si ha

$$a_y = -\left(\frac{Gm_t}{R_t^2}\right) \left(\frac{m_G}{m_I}\right)$$

Il fattore (Gm_t/R_t^2) è indipendente dal corpo di cui stiamo descrivendo il moto (la palla da golf), ma m_G e m_I dipendono da tale corpo. Come sappiamo, tutti i corpi in caduta libera hanno la medesima accelerazione: $a_y = -g$. Se lasciamo cadere un sasso invece di una pallina da golf, anche per il sasso $a_y = -g$. Quindi a_y è indipendente dal particolare corpo considerato. Ciò significa che il rapporto (m_G/m_I) deve essere indipendente dal corpo. In altre parole, il nostro esperimento dimostra che m_g deve essere proporzionale a m_I per qualunque corpo. Dal momento che m_I è proporzionale a m_G , possiamo scegliere le unità di misura in modo che le due masse risultino uguali. Ciò è stato fatto tacitamente quando si è ricavata G dai risultati dell'esperimento di Cavendish. Dunque $m_I = m_G$.

L'affermazione che la massa inerziale è uguale alla massa gravitazionale è un'affermazione di carattere sperimentale. La validità dell'asserto dipende dalla precisione degli esperimenti. Misurazioni recenti hanno mostrato che l'asserto è valido con un errore non superiore a tre parti su 10^{11} .

Massa inerziale.

Massa gravitazionale.

La massa esprime due differenti proprietà della materia.

Gli esperimenti dimostrano che m_I è proporzionale a m_G , e le nostre unità di misura sono scelte in modo che $m_I = m_G$.

7.5 LA VARIAZIONE DI g SULLA SUPERFICIE DELLA TERRA

La legge di gravitazione universale di Newton ci consente di comprendere perché Terra (come del resto gli altri pianeti e il Sole) è sferica. È la forza gravitazionale della Terra stessa che tende a conferirle la forma di una sfera. Ciascuna parte della Terra attratta verso ogni altra parte, e la forma che consente di riunire tutte le parti in modo che esse siano il più possibile vicine le une alle altre è quella di una sfera.

La Terra presenta un leggero schiacciamento polare.

Tuttavia, la Terra non è perfettamente sferica: la sua forma è più precisamente quella di uno sferoide leggermente schiacciato ai poli, simile a un pallone da spiaggia compresso da qualcuno che ci stia seduto sopra. Questo schiacciamento è una conseguenza della rotazione della Terra attorno al proprio asse: come un vaso che prende forma a tornio del vasaio, la terra si gonfia leggermente nella sua parte centrale (vicino all'equatore). La distanza dal centro della Terra a uno dei poli è di circa 6.36 Mm, mentre la distanza dal centro della Terra all'equatore è di circa 6.38 Mm. Una misura del schiacciamento polare della Terra è data da

$$\frac{6.38 \text{ Mm} - 6.36 \text{ Mm}}{6.37 \text{ Mm}} = 0.003$$

Pertanto la Terra è quasi sferica. Se un pallone da pallacanestro avesse il medesimo schiacciamento della Terra, il suo raggio più lungo sarebbe $\frac{1}{2}$ mm più lungo di quello più breve: probabilmente non ci sono molti palloni così simili a una sfera come la Terra.

A causa dello schiacciamento polare e di altre irregolarità della Terra, l'accelerazione di gravità g varia con la latitudine sulla superficie terrestre. Dal momento che il punto al livello del mare in prossimità dei poli è più vicino al centro della Terra di un punto analogo all'equatore, g ai poli è più grande di qualche decimo dell'uno per cento. A latitudini intermedie, g varia tra i valori che assume all'equatore e ai poli. La piùcola variazione di g produce una modesta dipendenza dell'intensità mg del peso di un corpo dalla latitudine. Come si è visto nel Capitolo 6, a causa della rotazione della Terra sul proprio asse, anche il peso apparente di un corpo dipende dalla latitudine.

Esempio 7.6

Ammettendo che la Terra abbia una simmetria sferica perfetta, con un raggio $R_t = 6.37 \text{ Mm}$ (che è la distanza dal centro della Terra al livello del mare alle medie latitudini), (a) si ricavi un'espressione per $g(h)$, dove h è l'altezza di un punto al di sopra della superficie (supposta) sferica della Terra. Usi l'espressione ottenuta nella parte (a) per calcolare g (b) al livello del mare ($h = 0$) e (c) sulla vetta del Monte Everest ($h = 8.9 \text{ km} \approx 0.01 \text{ Mm}$).

Soluzione

(a) Se la Terra ha simmetria sferica perfetta, alla sua superficie $mg = Gm_{\text{Ti}}/R_t^2$, cosicché

$$g = \frac{Gm_t}{R_t^2}$$

Un punto a distanza h dalla superficie della Terra (e al di sopra di questa) si trova a una distanza $r = R_t + h$ dal centro della Terra, e quindi

$$g(h) = \frac{Gm_t}{(R_t + h)^2}$$

(b) Al livello del mare,

$$g = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.37 \text{ Mm})^2} = 9.81 \text{ m/s}^2$$

(c) In cima al Monte Everest,

$$g = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.37 \text{ Mm} + 0.01 \text{ Mm})^2} = 9.78 \text{ m/s}^2$$

Questo risultato indica che, alle medie latitudini, l'accelerazione di gravità in vetta al Monte Everest è dello 0.3 per cento minore che al livello del mare.

7.6 IL CAMPO GRAVITAZIONALE

Spesso è comodo descrivere le forze gravitazionali facendo uso del concetto di campo gravitazionale. Il *campo gravitazionale* \mathbf{g} in un punto P è definito come rapporto tra la forza gravitazionale \mathbf{F} agente su una particella posta in P e la massa m della particella:

$$\boxed{\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}} \quad (7.5)$$

Definizione del campo gravitazionale.

Quindi il campo gravitazionale è la forza gravitazionale per unità di massa.

In precedenza abbiamo indicato con \mathbf{g} l'accelerazione dovuta alla gravità. Più precisamente \mathbf{g} è stata usata per rappresentare la grandezza $-(9.8 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$ ove il versore \mathbf{j} è diretto verso l'alto (in uscita dal centro della Terra). Ora ci rendiamo conto che questo è un particolare valore di una grandezza più generale: si tratta del valore del campo gravitazionale in un punto in prossimità della superficie della Terra.

Consideriamo il campo gravitazionale di un punto materiale. In base all'Equazione (7.2), la forza gravitazionale esercitata dal punto materiale 1 sul punto materiale 2 è $\mathbf{F}_{12} = -(Gm_2m_1/r^2)\hat{\mathbf{r}}$. Scriviamolo nella forma

$$\mathbf{F}_{12} = m_2\mathbf{g}_1 \quad (7.6)$$

dove

$$\mathbf{g}_1 = -\frac{Gm_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (7.7)$$

Campo gravitazionale di un punto materiale.

La grandezza \mathbf{g}_1 è il campo gravitazionale prodotto dal punto materiale 1 nel punto P , essendo P a una distanza r dalla particella, e essendo $\hat{\mathbf{r}}$ diretto dalla particella verso P (Figura 7.8).

Le Equazioni (7.6) e (7.7) prese assieme danno la medesima informazione dell'Equazione (7.2), e quindi non abbiamo introdotto nulla di nuovo. La comodità deriva dal fatto che abbiamo suddiviso il calcolo della forza agente sulla particella 2 in due parti: l'Equazione (7.6) afferma che la forza agente su 2 è data dal prodotto della massa di 2 per il campo gravitazionale dovuto alla particella 1; l'Equazione (7.7) indica come determinare il campo gravitazionale dovuto alla particella 1. Quindi, nel determinare la forza esercitata da 1 su 2, possiamo cominciare a calcolare il campo gravitazionale generato da 1 senza preoccuparci di 2. Poi troviamo la forza agente su 2 moltiplicando la massa di 2 per il valore del campo nella posizione di 2. Introducendo il campo gravitazionale abbiamo spezzato il problema in due parti, che possiamo risolvere una alla volta. Quando si ha a che fare con due punti materiali questo procedimento è di scarsa utilità, ma in problemi più complessi esso è assai vantaggioso.

Un corpo dotato di simmetria sferica produce nei punti esterni un effetto gravitazionale analogo a quello di un punto materiale. Quindi il campo gravitazionale di un corpo a simmetria sferica di massa m e raggio R è

$$\mathbf{g} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (r > R) \quad (7.8)$$

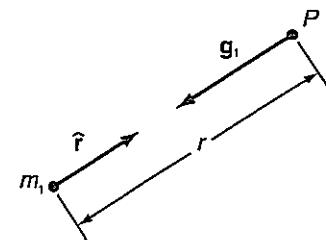


Figura 7.8

Il campo gravitazionale \mathbf{g}_1 del punto materiale 1 in un punto P . Il campo ha intensità $g_1 = Gm_1/r^2$ ed è diretto verso il punto materiale 1.

Campo gravitazionale di un corpo dotato di simmetria sferica.

dove r è la distanza dal centro del corpo al punto P in cui si calcola il campo, e $\hat{\mathbf{r}}$ è un versore diretto dal centro del corpo verso P (Figura 7.9).

Il concetto di campo gravitazionale non rappresenta soltanto un comodo expediente per il calcolo delle forze gravitazionali; esso fornisce altresì una concezione alternativa dell'interazione gravitazionale. Partendo da questo concetto, possiamo considerare lo spazio modificato dalla presenza di un corpo: il corpo *produce* un campo gravitazionale. In altre parole, noi associamo una grandezza fisica, il campo gravitazionale, ad ogni punto dello spazio (Figura 7.10). In seguito, quando studieremo l'elettricità e il magnetismo, vedremo che il concetto di campo svolge un ruolo centrale nella nostra indagine.

In base all'Equazione (7.5), $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$, le dimensioni di \mathbf{g} sono quelle di una forza divisa per una massa. In precedenza, quando abbiamo considerato \mathbf{g} come un'accelerazione, le abbiamo attribuito le dimensioni di una lunghezza divisa per un tempo al

Un campo gravitazionale può essere considerato come una alterazione dello spazio provocata da un corpo dotato di massa.

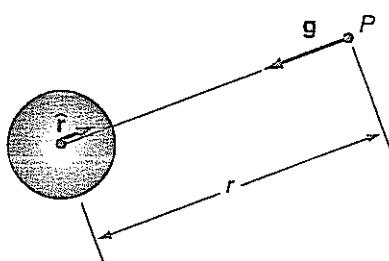


Figura 7.9 Campo gravitazionale \mathbf{g} di un corpo dotato di simmetria sferica in un punto P esterno al corpo.

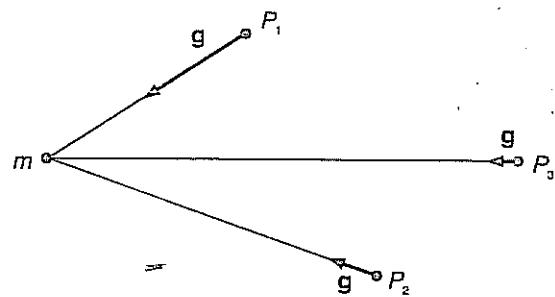


Figura 7.10 Il campo gravitazionale di un punto materiale di massa m in tre punti scelti a titolo di esempio. In ciascuno dei punti il campo è diretto verso la particella, e la sua intensità decresce con la distanza r con $1/r^2$. Il punto P_3 dista il doppio di P_1 dalla particella, e quindi il campo in P_3 ha intensità pari a un quarto di quella che ha in P_1 .

quadrato. In virtù della seconda legge di Newton, queste due dimensioni coincidono. Quando si scrivono le dimensioni di \mathbf{g} come lunghezza/(tempo)², la si tratta con un'accelerazione, ma quando si scrivono le dimensioni di \mathbf{g} come forza/massa, la si tratta come un campo gravitazionale.

Esempio 7.7

Dal momento che le forze gravitazionali si sommano come vettori, anche i campi gravitazionali sommano vettorialmente. (a) Si determini il campo gravitazionale risultante \mathbf{g} dovuto ai campi del Terra (\mathbf{g}_t) e del Sole (\mathbf{g}_s) in un punto P posto lungo la retta congiungente la Terra e il Sole. La distanza tra la Terra e P è uguale al raggio dell'orbita della Luna attorno alla Terra. Tale raggio è di 3.84×10^8 m, e gli altri dati sono riportati nella Tabella 7.1. (b) Si determini la forza esercitata sulle Luna dalla Terra e dal Sole quando la Luna si trova in P . La massa della Luna è di 7.35×10^{22} kg.

Soluzione

(a) Tra la Terra e il Sole il contributo della Terra al campo gravitazionale è opposto al contributo del Sole. Il campo della Terra è diretto verso la Terra, e il campo del Sole è diretto verso il Sole. Se si orienta il versore \mathbf{i} dalla Terra verso il Sole, il campo risultante è

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_t + \mathbf{g}_s = -\frac{Gm_t}{r_{tp}^2} \mathbf{i} + \frac{Gm_s}{r_{sp}^2} \mathbf{i}$$

ove r_{tp} è la distanza dalla Terra al punto P e r_{sp} è la distanza dal Sole a P :

$$r_{tp} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

e

$$r_{sp} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m} - 3.84 \times 10^8 \text{ m} = 1.492 \times 10^{11} \text{ m}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}) \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 (5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{(3.84 \times 10^8 \text{ m})^2} \mathbf{i} \\ &\quad + \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1.99 \times 10^{30} \text{ kg})}{(1.492 \times 10^{11} \text{ m})^2} \mathbf{i} \\ &= -(2.70 \times 10^{-3} \text{ N/kg}) \mathbf{i} + (5.96 \times 10^{-3} \text{ N/kg}) \mathbf{i} \\ &= (3.26 \times 10^{-3} \text{ N/kg}) \mathbf{i} \end{aligned}$$

Il campo risultante è diretto verso il Sole perché il contributo del Sole al campo è maggiore di quello della Terra.

(b) Servendosi del campo determinato nella parte (a), si trova che la forza \mathbf{F} agente sulla Luna è

$$\mathbf{F} = m_l \mathbf{g} = (7.35 \times 10^{22} \text{ kg})(3.26 \times 10^{-3} \text{ N/kg}) \mathbf{i} = (2.40 \times 10^{20} \text{ N}) \mathbf{i}$$

Nel punto P la forza complessiva dovuta alla Terra e al Sole è diretta verso il Sole e non verso la Terra. Se questa conclusione appare sorprendente, è possibile approfondirla risolvendo l'Esercizio 7.3 e il Problema 7.6.

Esempio 7.8

Un satellite artificiale compie un'orbita circolare attorno alla Terra a 300 km dalla superficie terrestre (si consideri la Terra sferica con raggio $R_t = 6370$ km). Calcolare il valore del campo gravitazionale g , dovuto alla Terra, esistente nel satellite e la forza di attrazione esercitata dalla Terra su di un astronauta che si trovi sul satellite e che ha massa $m_a = 70$ kg. [Comunemente si dice che *pesa* 70 kg, intendendo cioè che sulla superficie terrestre è attratto dalla Terra con una forza uguale a 686 N ($70 \times 9.8 = 686$), cioè che «*pesa*» 686 N.] Si discuta il motivo per cui spesso si sente dire che gli astronauti sui satelliti artificiali sono senza peso.

Soluzione

Il satellite, considerato come un punto materiale, si trova a $6370 + 300 = 6670$ km dal centro della Terra, quindi si tratta di calcolare il valore del campo gravitazionale a tale distanza. Si ha che il suo modulo è

$$g = \frac{Gm_t}{(R_t + r)^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6370 \text{ km} + 300 \text{ km})^2} = 8.95 \text{ m/s}^2$$

ed è diretto lungo la congiungente il centro della Terra con il satellite e senso quello verso la Terra. La forza gravitazionale che agisce sull'astronauta è data da $F = m_a g$, quindi il suo modulo sarà

$$F = m_a g = 626.5 \text{ N}$$

e la direzione e il verso sono quelli di g . Notare che la forza con cui la Terra attrae l'astronauta sul satellite è inferiore a quella con cui l'attrae sulla superficie terrestre di meno del 10% ! Cioè si potrebbe affermare che il suo «*peso*» è quasi lo stesso che sulla Terra. Allora, perché si dice che gli astronauti sono in assenza di peso e li si vede in televisione fluttuare all'interno del satellite? Il motivo generale è che, poiché la forza gravitazionale è proporzionale alla massa inerziale dei corpi e poiché il secondo principio afferma che tale forza è proporzionale all'accelerazione, l'accelerazione che i corpi possiedono a causa di tale forza risulta essere indipendente dalla massa dei corpi.

In pratica, l'accelerazione è data dal campo gravitazionale, infatti: $F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$ e $F = m_1 a$, quindi $a = -G \frac{m_2}{r^2} \hat{r}$, cioè è uguale al campo g e non dipende dal corpo che è soggetto alla forza gravitazionale. Allora, tutti i corpi soggetti allo stesso campo gravitazionale compiono lo stesso tipo di moto e, se hanno le stesse condizioni iniziali (posizione e velocità iniziali), compiono esattamente lo stesso moto. Nel caso dell'astronauta sul satellite, tutti i corpi che sono entro il satellite e il satellite stesso sono partiti dallo stesso luogo e con la stessa velocità iniziale, quindi fanno tutti lo stesso identico moto, cioè in ogni istante l'astronauta, il satellite e tutti gli oggetti che stanno al suo interno hanno la stessa velocità. La velocità relativa fra loro è nulla e quindi non si osserva alcun avvicinamento fra i corpi e nessuna «caduta» di corpi e oggetti verso il pavimento del satellite. Nessun corpo eserciterebbe una forza su una bilancia fissa rispetto al satellite: la bilancia, assieme al satellite, «cade» (cioè è attratta dalla Terra) esattamente come tutti gli altri corpi. La bilancia segnerebbe zero: ecco perché si parla di assenza di peso. ■

7.7 LE LEGGI DI KEPLERO E LA LEGGE DI GRAVITAZIONE

La vicenda della scoperta della legge di gravitazione universale è spesso considerata il paradigma del metodo scientifico moderno. I principali passi in cui tale scoperta si articolarono furono (1) l'ipotesi circa il moto dei pianeti avanzata da Niccolò Copernico (1473-1543); (2) le accurate misurazioni sperimentali delle posizioni dei pianeti e del Sole compiute da Tycho Brahe (1546-1601); (3) l'analisi dei dati e la formulazione delle leggi empiriche da parte di Giovanni Keplero (1571-1630); e (4) l'elaborazione di una teoria generale da parte di Isaac Newton.

1. Benché un modello eliocentrico (ossia con il Sole al centro) del sistema solare fosse stato proposto da Aristarco nel terzo secolo a.C., per molti secoli il mondo occidentale credette che la Terra fosse immobile e che il Sole e i pianeti le girassero attorno. Questo modello geocentrico (ossia con la Terra al centro) richiedeva complicati artifici geometrici per rendere conto del moto osservato dei pianeti. Nel suo libro *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (*Le rivoluzioni delle sfere celesti*), Copernico affermò che il modello geocentrico non era «sufficientemente ben accettato alla mente». Egli propose un sistema basato sulle seguenti ipotesi: (a) la Terra ruota sul proprio asse una volta al giorno. (b) la Terra ruota attorno al Sole (insieme

agli altri pianeti), e (c) le stelle sono molto più lontane dalla Terra di quanto non sia il Sole e i pianeti.

2. L'opera di Tycho Brahe illustra nel modo più chiaro la regola fondamentale della ricerca sperimentale: *se vuoi sapere come funziona una certa cosa, misurane accuratamente il comportamento*. Egli dedicò la seconda metà della sua vita, più di venti anni, a misurare con precisione le posizioni del Sole e dei pianeti. Le sue misure fornirono i dati che permisero a coloro che vennero dopo di lui di risolvere i misteri del moto dei corpi celesti. Nei suoi ultimi anni Brahe ebbe come assistente Giovanni Keplero.
3. Keplero era dotato di grandi capacità matematiche ed era molto abile nei calcoli. Egli si servì delle proprie doti e delle misure di Brahe per determinare le orbite dei pianeti, in particolare quelle della Terra e di Marte, e compendiò le proprie conclusioni in tre leggi:
 - Tutti i pianeti si muovono lungo orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi (Figura 7.11).
 - La congiungente un pianeta con il Sole spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali (Figura 7.12).
 - Il quadrato del periodo di un qualunque pianeta è proporzionale al cubo della distanza media del pianeta dal Sole. Con la formulazione di queste tre leggi, Keplero non soltanto introdusse una caratterizzazione precisa del sistema solare, ma inaugurò anche un nuovo modo di descrivere i fenomeni naturali. La descrizione assumeva la forma di enunciati brevi, concentrati e di vasta applicabilità, che oggi chiamiamo «leggi». Keplero promosse il principio caratteristico della scienza moderna secondo il quale la descrizione appropriata dei fenomeni naturali è la più semplice compatibile con i dati sperimentali. Egli sosteneva, in contrasto con l'opinione corrente ai suoi tempi, che una teoria soddisfacente doveva accordarsi esattamente e nei particolari con le misure ottenute a livello sperimentale. Keplero avrebbe grandemente apprezzato le ulteriori generalizzazioni compiute da Newton.
4. Introducendo le leggi del moto e la legge di gravitazione universale, Newton realizzò una teoria generale che unificava le leggi astronomiche di Keplero e l'esperienza terrestre. Una delle verifiche cui Newton sottopose le proprie leggi fu che esse prevedessero orbite ellittiche per i pianeti, in accordo con la prima legge di Keplero. Abbiamo visto nel paragrafo precedente un esempio in questo senso. Nel Paragrafo 13-6 mostreremo che la seconda legge di Keplero può essere dedotta dalle leggi di Newton. Ora dimostreremo che la terza legge di Keplero è una conseguenza della seconda legge di Newton e della legge di gravitazione universale applicate a un pianeta che si muove su un'orbita circolare. La seconda legge di Newton applicata a un pianeta fornisce $F_{sp} = m_p a_c$, ove F_{sp} è l'intensità della forza esercitata sul pianeta dal Sole, m_p è la massa del pianeta, e a_c è il modulo dell'accelerazione centripeta del pianeta attorno al Sole. Dal momento che $F_{sp} = Gm_s m_p / r^2$ e $a_c = 4\pi^2 r / T^2$, si ha

$$\frac{Gm_s m_p}{r^2} = \frac{m_p 4\pi^2 r}{T^2}$$

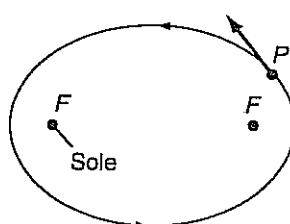


Figura 7.11 La prima legge di Keplero: le orbite dei pianeti sono ellissi con il Sole in uno dei fuochi. L'eccentricità dell'ellisse rappresentata qui è, per ragioni illustrate, molto maggiore di quella di qualunque orbita planetaria reale.

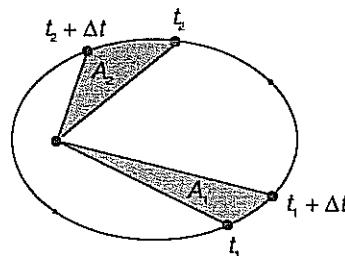


Figura 7.12 La seconda legge di Keplero. Gli intervalli di tempo Δt sono uguali nei due casi rappresentati. La seconda legge di Keplero stabilisce che $A_1 = A_2$.

Risolvendo rispetto a T^2 si ottiene

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm_s} \right) r^3$$

Il fattore tra parentesi è una costante, indipendente dal particolare pianeta considerato, e quindi il quadrato del periodo T è proporzionale al cubo della distanza r dal Sole. Questa è la terza legge di Keplero per il caso di un'orbita circolare. Le tre leggi di Keplero relative al moto dei pianeti possono essere dedotte dalla seconda e dalla terza legge di Newton in combinazione con la legge di gravitazione universale di Newton. Retrospettivamente, le leggi empiriche di Keplero rappresentano un primo passo verso la comprensione dei fenomeni naturali che è tipico del progresso scientifico. Newton lo riconobbe allorché disse: «Se sono riuscito a vedere più lontano degli altri, è perché sono salito sulle spalle dei giganti.»

RIEPILOGO

Paragrafo 7.2 La legge di gravitazione universale

La legge di gravitazione universale di Newton è la legge di una forza fondamentale di natura

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (7.2)$$

La forza gravitazionale è sempre attrattiva, e dipende dall'inverso del quadrato della distanza r .

Paragrafo 7.3 La costante di gravitazione G

La formulazione della legge di gravitazione universale di Newton fu completata con la misura di G da parte di Cavendish: $G = 6.670 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. Divenne così possibile calcolare le forze gravitazionali.

Paragrafo 7.4 Massa gravitazionale e massa inerziale

La massa esprime due differenti proprietà di un corpo, la sua resistenza alle variazioni della velocità e la sua interazione gravitazionale con gli altri corpi. Gli esperimenti dimostrano che queste

due proprietà sono proporzionali, e la nostra scelta delle relative unità di misura le rende uguali.

Paragrafo 7.5 La variazione di g sulla superficie della Terra

Siccome la Terra non ha una simmetria sferica perfetta, g varia sulla superficie del nostro pianeta.

Paragrafo 7.6 Il campo gravitazionale

La soluzione di problemi complessi relativi alle forze gravitazionali può essere facilitata se ci si serve del campo gravitazionale, $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$. Il campo gravitazionale viene concepito come una alterazione dello spazio prodotta da un corpo dotato di massa.

Paragrafo 7.7 Le leggi di Keplero e la legge di gravitazione

La scoperta della legge di gravitazione fu un'impresa cui contribuirono molti grandi uomini in un periodo durato secoli. Essa rappresenta un paradigma dell'impresa scientifica.

QUESITI

- 7.1 Si considerino le tre seguenti leggi ipotetiche per la forza gravitazionale F_{sp} esercitata dal Sole su un pianeta:
 (a) $F_{sp} = Km_s m_p^2/r^2$; (b) $F_{sp} = Km_s^2 m_p/r^2$; e
 (c) $F_{sp} = km_s m_p/r^3$, ove K è un fattore indipendente da m_s , m_p e r . Si utilizzino come dati i periodi e i raggi orbitali dei pianeti: tra queste leggi ve ne sono di dimostrabilmente incompatibili con i dati? Se sì, quali? E quali (se ve ne sono) sono compatibili con i dati?
- 7.2 Due corpi dotati di simmetria sferica, ciascuno con massa m_0 esercitano l'uno sull'altro una forza gravitazionale di intensità F_0 quando i loro centri si trovano a una distanza r_0 . Quali sono le intensità di queste forze quando essi sono a distanza (a) $2r_0$; (b) $3r_0$; (c) $4r_0$?
- 7.3 Due corpi dotati di simmetria sferica, ciascuno con massa m_0 , esercitano l'uno sull'altro una forza gravitazionale di intensità F_0 quando i loro centri si trovano a una distanza r_0 . Quali sarebbero le intensità di queste forze se ciascuno dei corpi avesse massa (a) $2m_0$; (b) $3m_0$; (c) $4m_0$?
- 7.4 Se la forza gravitazionale che agisce su un corpo dipende linearmente dalla sua massa, perché l'accelerazione di un

corpo in caduta libera è indipendente dalla sua massa?

- 7.5 Comunemente si dice che all'interno di un satellite artificiale in orbita attorno alla Terra c'è una condizione di *assenza di peso*. La forza gravitazionale esercitata dalla Terra sui corpi è forse nulla in questo ambiente? Come si può spiegare il fatto che, quando una astronauta cerca di misurare il proprio peso con una bilancia a molla, lo strumento indica un valore zero?
- 7.6 Si descriva come variano la massa di un astronauta e la forza gravitazionale che agisce su di lui durante un viaggio dalla Terra alla Luna.
- 7.7 Supponi di essere in comunicazione con un essere intelligente di un altro sistema solare. Quale concetto credi che potresti definire più chiaramente a questo essere, la massa o il peso? Spiega.
- 7.8 Se stai comprando dell'oro da un commerciante che usa un bilancia a molla per misurare la quantità del metallo, e vuoi ottenere la massima quantità d'oro in cambio del tuo denaro, preferisci che la misura sia fatta all'equatore o ai poli?

- 7.9** Il pianeta Olovac (di un altro sistema solare) ha un raggio doppio di quello della Terra, ma una densità media pari a quella della Terra. Sulla superficie di Olovac il peso di un corpo sarebbe uguale, maggiore o minore che sulla superficie della Terra? Se la risposta è maggiore o minore, di quanto?
- 7.10** Supponiamo che un satellite artificiale si muova su un'orbita circolare attorno alla Terra, e che ne misuriamo raggio orbitale e periodo. Possiamo utilizzare questa informazione insieme alle leggi di Newton per determinare la massa del satellite? Possiamo servircene per determinare la massa della Terra?
- 7.11** Nel sistema britannico di unità il piede (ft) è un'unità di lunghezza, il secondo (s) è un'unità di tempo, e lo slug (sl) è un'unità di massa. Quali sono le unità di G nel sistema britannico?
- 7.12** La nebulosa planetaria è una stella circondata da un involucro di materia che è stata espulsa dalla stessa stessa. Nell'approssimazione in cui l'involucro ha simmetria sferica, qual è la forza gravitazionale che agisce sulla stessa a causa dell'involucro? Spiega.
- 7.13** Supponiamo che un satellite artificiale si muova su un'orbita circolare attorno alla Terra a una distanza r_0 dal centro di questa. Il suo motore a razzo espelle un breve getto di gas in modo da far aumentare rapidamente il modulo della velocità del satellite (ma non tanto da fargli abbandonare l'orbita terrestre). (a) Quale sarà la traiettoria successiva del satellite? (b) La sua distanza al perigeo sarà maggiore, minore o uguale a r_0 ? (c) La sua distanza all'apogeo sarà maggiore, minore o uguale a r_0 ? (d) Il suo periodo aumenterà o diminuirà?
- 7.14** Supponendo che il motore a razzo del satellite del quesito precedente venga acceso in modo da far diminuire bruscamente il modulo della velocità del satellite (ma non tanto da far sì che esso cada sulla Terra), si risponda alle medesime domande.
- 7.15** Si considerino due satelliti artificiali B e C in orbite circolari attorno alla Terra. Il raggio dell'orbita di C è doppio del raggio dell'orbita di B : $r_C/r_B = 2$. In che rapporto stanno (a) le loro accelerazioni, (b) i loro periodi, (c) i moduli delle loro velocità?
- 7.16** Nella sua orbita ellittica attorno al Sole, con quest'ultimo in un fuoco, un pianeta giunge alla minima distanza dal Sole in un punto chiamato *perielio*; nel punto chiamato *afelio*, il pianeta si trova alla massima distanza dal Sole. In quale punto il modulo della velocità del pianeta è maggiore e in quale è minore?
- 7.17** La velocità del Sole relativamente alla Terra (misurata rispetto allo sfondo delle stelle) è massima attorno al 4 gennaio di ogni anno e minima attorno al 4 luglio. Quando la Terra si trova alla minima distanza dal Sole e quando alla massima distanza? Questo effetto tende a rendere le estati e gli inverni più inclementi o meno inclementi (a) nell'emisfero settentrionale, (b) nell'emisfero meridionale?
- 7.18** L'intensità della forza esercitata dal Sole sulla Luna è più che doppia rispetto all'intensità della forza esercitata dalla Terra sulla Luna. Sarebbe più esatto dire che la Luna gira intorno al Sole invece che intorno alla Terra? Spiega.
- 7.19** Se un satellite artificiale è in orbita attorno alla Terra, è possibile che il suo piano orbitale non passi per il centro della Terra? Su quale proprietà della forza gravitazionale si basa la tua risposta?
- 7.20** Quale pianeta cade verso il Sole per un tratto più lungo in 1 s, la Terra o Venere?
- 7.21** Una mela inizialmente in quiete viene lasciata cadere. Una formica sul terreno afferma che la mela accelera verso la Terra e la colpisce. Un verme che si trova nella mela afferma che la Terra accelera verso la mela e la colpisce. Quale affermazione consideri più appropriata da un punto di vista dinamico, e perché?
- 7.22** Un'orbita geostazionaria è un'orbita nella quale il satellite rimane fermo al di sopra di un punto della superficie della Terra. (a) Quale deve essere il periodo di un'orbita geostazionaria? (b) C'è un particolare piano in cui l'orbita deve essere contenuta? Se sì, lo si identifichi.
- 7.23** Se un corpo a una distanza h al di sopra della superficie terrestre viene lasciato andare a partire dalla quiete, cade a perpendicolo sulla superficie della Terra. Se un corpo a una distanza h al di sopra della superficie terrestre viene lanciato orizzontalmente con una velocità di modulo $v = \sqrt{Gm_t/(R_t + h)}$, si muove lungo un'orbita circolare stabile (supponendo che h sia abbastanza grande perché l'attrito dell'aria risulti trascurabile). Spiega.
- 7.24** Si completi la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
G	Campo gravitazionale	Scalare	
g			
g			m/s^2
m_t			
m_G			

ESERCIZI

Paragrafo 7.2 La legge di gravitazione universale

- 7.1** Si utilizzino i dati riportati nelle colonne (1) e (2) della Tabella 7.1 per calcolare (a) a_c e (b) $a_c R^2$ per Marte e per Nettuno.
- 7.2** Si immagini di ricavare la legge di gravitazione universale di Newton a partire dai dati riportati nella Tabella 7.2. Questa tabella fornisce i periodi e i raggi

orbitali delle quattro lune principali di Giove. (a) Si determini a_c per ciascuna di queste lune rispetto a Giove. (b) Si determini inoltre $k_G = a_c R^2$. (c) Se si ammette che Giove sia in quiete in un sistema di riferimento inerziale e che l'unica forza significativa agente su ciascuna delle lune sia la forza gravitazionale esercitata da Giove, che cosa si può dire circa la dipendenza di tale forza dalla distanza? (d) Che cosa si può dire circa la dipendenza

della forza dalla massa di ciascuna luna? (e) Che cosa si può dire circa la dipendenza della forza dalla massa di Giove?

Tabella 7.2 Le lune di Giove

Nome	Raggio orbitale, Mm	Periodo, giorni
Io	421.6	1.769
Europa	670.8	3.551
Ganimede	1070	7.155
Callisto	1882	16.689

- 7.3 (a) Determinare l'accelerazione della Luna rispetto alla Terra. Il periodo e il raggio dell'orbita della Luna attorno alla Terra sono rispettivamente $T_l = 2.36 \times 10^6$ s e $r_{tl} = 384$ Mm. (b) Determinare $a_c r_{tl}^2$. (c) Determinare $g R_t^2$, ove g è l'accelerazione di gravità alla superficie della Terra e R_t è il raggio della Terra. (d) Le risposte alle parti (b) e (c) sono uguali tra loro (nei limiti di precisione dei dati). Ammettendo che il sistema di riferimento della Terra sia inerziale e che l'unica forza significativa agente sulla Luna sia la forza gravitazionale esercitata dalla Terra, che cosa si può dire circa la dipendenza di quest'ultima forza dalla distanza dal centro della Terra? (Entrambe le ipotesi fatte, se riferite alla Luna, sono false; si veda in proposito l'Esempio 7.7. Tuttavia, poiché la distanza del sistema Terra-Luna dal Sole è molto maggiore della distanza tra la Terra e la Luna, l'errore prodotto da ciascuna di queste ipotesi compensa quasi esattamente l'errore causato dall'altra; si veda il Problema 7.6.)

Paragrafo 7.3 La costante di gravitazione G

- 7.4 Si determini l'intensità della forza gravitazionale agente tra due palle da biliardo di massa pari a 0.16 kg quando la distanza tra i loro centri è di 450 mm.
- 7.5 Si determini l'intensità della forza gravitazionale agente tra una boccia da bowling di massa pari a 5.2 kg e una palla da baseball di massa pari a 0.15 kg quando la distanza tra i loro centri è di 640 mm.
- 7.6 Si determinino le intensità delle forze gravitazionali esercitate sulla Terra ad opera (a) del Sole (F_{st}) e (b) della Luna (F_{lt}). (c) Si calcoli il rapporto F_{st}/F_{lt} . (Per i dati, si consultino la Tabella 7.1 e l'Esempio 7.5.)
- 7.7 Qual è la distanza tra il centro di una palla da baseball di massa pari a 0.145 kg e il centro di una boccia da bowling di massa pari a 5.5 kg che fa sì che la forza gravitazionale agente tra loro sia di 1.3×10^{-10} N?
- 7.8 Una palla da biliardo della massa di 0.16 kg esercita una forza di 6.2×10^{-10} N su una boccia da bowling quando la distanza tra i loro centri è di 0.37 m. Qual è la massa della boccia da bowling?
- 7.9 A quale distanza dal centro della Terra un corpo di massa 1 kg ha un peso di 1 N? Se lasciato cadere a partire dalla quiete a questa distanza, quale sarà la sua accelerazione iniziale?
- 7.10 Si utilizzino i dati della Tabella 7.2 per determinare la massa di Giove. Quali ipotesi è necessario fare circa le forze agenti sulle lune di Giove e circa il sistema di riferimento di Giove?

- 7.11 Si calcoli l'intensità della forza gravitazionale agente tra la Terra e Marte quando (a) Marte è a occidente al sorgere del Sole, (b) Marte è a est al lever del Sole, (c) Marte è alto nel cielo al sorgere del Sole. (Si veda la Tabella 7.1.)
- 7.12 (a) Facendo uso dei dati della Tabella 7.1, si determinino le intensità delle forze esercitate sul Sole da ciascuno dei pianeti. (b) Ammettendo che tutti i pianeti siano allineati di modo che le forze che essi esercitano sul Sole siano tutte nella stessa direzione, si determini l'intensità della forza totale agente sul Sole ad opera dei pianeti. (c) In base alla risposta data alla parte (b), si determini l'accelerazione massima del Sole nell'ipotesi che le uniche forze significative agenti su di esso siano dovute ai pianeti. Si confronti il risultato con le accelerazioni riportate nella Tabella 7.1.
- 7.13 Il raggio di Marte è di 3.4 Mm e l'accelerazione di un corpo in caduta libera alla sua superficie è di 3.7 m/s^2 . Si determini la massa di Marte.
- 7.14 (a) Si determinino le dimensioni di G . (b) Si calcoli il valore di G nel sistema britannico di unità. (Si veda l'Appendice C.)
- 7.15 Supponiamo di inventare un'unità di misura della massa che chiameremo cavendish (C). La massa del cavendish è definita in modo tale che $G = 1.000 (\text{UA})^3 / (\text{anni}^2 \cdot \text{C})$. La nostra unità di lunghezza è l'unità astronomica (UA), pari alla distanza Terra-Sole ($1 \text{ UA} = 1.496 \times 10^{11}$ m) e l'unità di tempo è l'anno. (a) Determinare il fattore di conversione tra C e kg. (b) Eprimere la massa del Sole in C.
- 7.16 Calcolare l'intensità della forza gravitazionale esercitata su un corpo di massa 1 kg alla superficie della Terra da parte (a) del Sole e (b) della Luna. (c) Confrontare le forze ottenute nelle parti (a) e (b) con la forza esercitata sul corpo dalla gravità della Terra.
- 7.17 Una sonda solare viene lanciata dalla Terra verso il Sole in modo che si muova lungo la congiungente dei due corpi celesti. A che distanza dal centro della Terra si troverà la sonda quando la forza esercitata su di essa dal Sole sarà uguale e opposta alla forza esercitata dalla Terra? Che percentuale è della distanza Terra-Sole?
- 7.18 Si riprenda in considerazione la sonda solare dell'esercizio precedente. Tenendo conto della forza esercitata su di essa dalla Luna, oltre che di quelle esercitate dal Sole e dalla Terra, si determini l'intensità della forza risultante quando la sonda si trova a 264 Mm dalla Terra, per diverse fasi della Luna: (a) Luna nuova, (b) Luna piena, (c) primo quarto. La massa della sonda è di 100 kg. (Suggerimento: l'angolo Luna-Terra-Sole è di 90° al primo quarto.)
- 7.19 Una sonda lunare viene lanciata dalla Terra verso la Luna in modo che si trovi sempre tra questi due corpi. La sonda manca di poco la Luna e prosegue oltre di essa sul prolungamento del segmento percorso in precedenza. A quale distanza dal centro della Terra la forza esercitata da quest'ultima sarà uguale a quella esercitata dalla Luna?
- 7.20 Risolvere l'equazione di secondo grado dell'Esempio 7.5 e dimostrare che $x = r_{tl} / (1pm\sqrt{m_l/m_t})$. [Suggerimento: $1 - u^2 = (1+u)(1-u)$.]

- 7.21** Determinare il rapporto tra le forze esercitate sulla Terra da Venere e dal Sole nel momento in cui la Terra e Venere sono alla minima distanza.
- 7.22** Phobos, un satellite di Marte, ha un periodo di 7 h e 39 min e un raggio orbitale di 9.4 Mm. In base a questi dati si determini la massa di Marte. Si esplicitino tutte le ipotesi che vengono fatte.
- 7.23** Nella Figura 7.13 tre particelle, ciascuna di massa m , occupano i vertici di un triangolo equilatero di lato a . Si determini un'espressione dell'intensità della forza che agisce su ciascuna di esse.

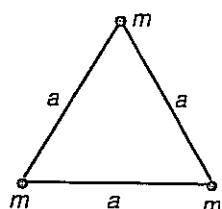


Figura 7.13 Esercizio 7.23.

- 7.24** Una galassia vicina alla Via Lattea è la galassia di Andromeda, che si trova a una distanza di 2.1×10^{22} m. La massa della Via Lattea è di 7×10^{41} kg e la massa di Andromeda è 6×10^{41} kg. (a) Trattando queste galassie come particelle, si determini l'intensità della forza esercitata da Andromeda sulla Via Lattea. (b) Supponendo che l'intensità della forza risultante che agisce sulla nostra galassia coincida con l'intensità della forza esercitata da Andromeda, qual è il modulo dell'accelerazione della nostra galassia rispetto a un sistema di riferimento inerziale?

Paragrafo 7.5 La variazione di g sulla superficie della Terra

- 7.25** Ammettendo che la Terra abbia simmetria sferica perfetta, con $R_t = 6.37$ Mm e $m_t = 5.97 \times 10^{24}$ kg, si determini g a un'altezza di 0.02 Mm al di sopra della sua superficie.
- 7.26** Siamo giunti in un altro sistema solare per esplorare il pianeta Onades. Abbiamo misurato il campo gravitazionale ai poli di Onades ed esso è risultato di 7.69 m/s^2 , mentre all'equatore è risultato di 7.52 m/s^2 . Supponendo che questa differenza sia dovuta allo schiacciamento del pianeta, si calcoli il rapporto tra la distanza centro-polo e la distanza centro-equatore.
- 7.27** Si determini la riduzione percentuale dell'accelerazione di gravità in seguito a un aumento di quota di 10 km a partire dalla superficie della Terra.

Paragrafo 7.6 Il campo gravitazionale

- 7.28** (a) Conoscendo il raggio (1.74 Mm) e la massa (7.35×10^{22} kg) della Luna, si determini il campo gravitazionale alla sua superficie. (b) Se il peso di un corpo sulla Terra è 714 N, qual è il suo peso sulla superficie della Luna?

- 7.29** (a) Conoscendo il raggio (3.4 Mm) e la massa (6.46×10^{23} kg) di Marte, si determini il modulo del campo gravitazionale alla sua superficie. (b) Un corpo sulla Terra pesa 689 N: qual è il suo peso su Marte?
- 7.30** Tre particelle, A , B e C , hanno una massa di 1.9 kg ciascuna e sono disposte ai vertici del quadrato rappresentato nella Figura 7.14. (a) Qual è il campo gravitazionale nel vertice vuoto (punto P)? Si formuli la risposta in termini dei versori i e j . (b) Qual è la forza gravitazionale che agisce su una particella di massa 2.3 kg posta nel vertice vuoto?

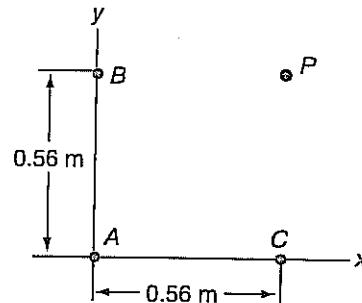


Figura 7.14 Esercizio 7.30.

- 7.31** Nella Figura 7.15 la particella A ha una massa di 1.4 kg e la particella B ha una massa di 3.1 kg. Qual è il campo gravitazionale nel punto P ?

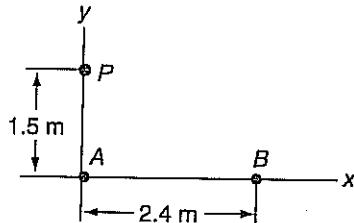


Figura 7.15 Esercizio 7.31.

- 7.32** Due pianeti, Olovac e Aguttal, ruotano attorno alla stella Atorac. Stranamente sia Olovac sia Aguttal hanno un raggio doppio di quello della Terra, Olovac ha una massa uguale a quella della Terra, e Aguttal ha una densità media pari a quella della Terra. Che valore ha g sulla superficie (a) di Olovac e (b) di Aguttal?

Paragrafo 7.7 Le leggi di Keplero e la legge di gravitazione

- 7.33** Le quattro maggiori lune di Giove hanno orbite pressoché circolari, e i loro periodi e raggi orbitali sono dati nella Tabella 7.2. Si mostri che la relazione tra questi moti orbitali è conforme alla terza legge di Keplero.
- 7.34** Si utilizzino i dati della Tabella 7.1 per mostrare che la relazione tra i moti orbitali della Terra e di Venere è conforme alla terza legge di Keplero.
- 7.35** Il raggio dell'orbita di Marte è 1.52 volte quello dell'orbita terrestre. Utilizzando questa informazione e la terza legge di Keplero si determini il periodo della rivoluzione di Marte in anni.

PROBLEMI

- 7.1 (a) Si faccia una stima di G ipotizzando che la densità media ρ_t della Terra sia approssimativamente uguale a quella delle rocce che si trovano alla sua superficie ($2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$). Si utilizzino come dati $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ e $R_t = 6,37 \text{ Mm}$. (b) Partendo dal dato $m_t = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$, si determini la densità di massa media della Terra.

- 7.2 Si consideri la risultante delle forze esercitate sulla Luna dalla Terra e dal Sole quando questi si trovano, rispetto alla Luna, in direzioni che formano un angolo retto, come nella Figura 7.16. (Si noti come sui due assi vengano utilizzate scale diverse.) (a) Ammettendo che queste siano le uniche forze significative che agiscono sulla Luna, si scriva un'equazione vettoriale per la forza risultante. (b) Si disegni un diagramma di corpo libero relativo alla Luna, rappresentando in esso la forza risultante e le due forze singole. (c) Si determini il modulo dell'accelerazione della Luna rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

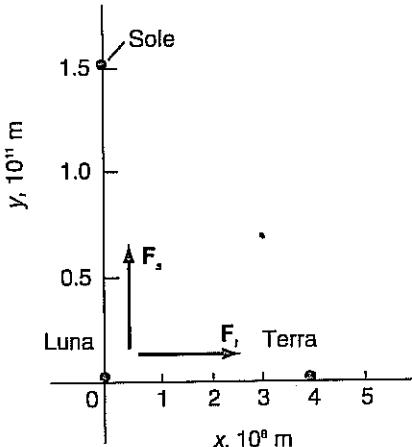


Figura 7.16 Problema 7.2.

- 7.3 Nel corso di un'esplorazione del pianeta Norc in un altro sistema solare, stabiliamo che il raggio di Norc è di $9.54 \times 10^6 \text{ m}$ e che il periodo di un satellite artificiale immesso in un'orbita circolare di raggio $1.476 \times 10^7 \text{ m}$ è di $8.09 \times 10^3 \text{ s}$. Determinare (a) la massa di Norc, (b) la densità media di Norc, (c) l'intensità del campo gravitazionale sulla superficie di Norc. (d) Se il periodo della rotazione di Norc sul proprio asse è di $1.04 \times 10^4 \text{ s}$, quale sarà, all'equatore di Norc, l'indicazione di un dinamometro (tarato sulla Terra) cui sia appeso un corpo di massa 1.0 kg ?
- 7.4 Si consideri il campo gravitazionale prodotto da due particelle, la particella B , di massa m_B , posta nell'origine delle coordinate, e la particella C , di massa m_C , posta nel punto x_C dell'asse x (Figura 7.17). Si scrivano delle equazioni che diano il campo gravitazionale in tre regioni lungo l'asse x : (a) la regione 1, $x < 0$; (b) la regione 2, $0 < x < x_C$; (c) la regione 3, $x > x_C$. In ciascuno dei casi si esprima il campo in termini del versore \mathbf{i} .
- 7.5 (a) Con riferimento alla situazione descritta nel problema precedente, si ricavi un'equazione che dia la posizione in cui il campo si annulla. (b) Si determini tale posizione nel caso in cui $m_B = 2 \text{ kg}$, $m_C = 8 \text{ kg}$ e $x_C = 6 \text{ m}$. (c) Si

tracci un grafico del campo gravitazionale per quest'ultimo caso, nella regione $-6 \text{ m} < x < +12 \text{ m}$.

- 7.6 Se si ammette che il sistema di riferimento in cui il Sole è in quiete sia un sistema di riferimento inerziale e che le uniche forze significative agenti sulla Luna siano quelle dovute al Sole e alla Terra, applicando la seconda legge di Newton alla Luna si ha

$$\mathbf{F}_{sl} + \mathbf{F}_{tl} = m_l \mathbf{a}_{ls}$$

dove \mathbf{F}_{sl} è la forza esercitata dal Sole sulla Luna, \mathbf{F}_{tl} è la forza esercitata dalla Terra sulla Luna, m_l è la massa della Luna, e \mathbf{a}_{ls} è l'accelerazione della Luna rispetto al Sole. Sfruttando il fatto che r_{ls} (la distanza Terra-Sole) è pressoché uguale a r_{ls} (la distanza Luna-Sole), si dimostri che la relazione scritta sopra si riduce a

$$\mathbf{F}_{tl} \approx m_l \mathbf{a}_{lt}$$

ove \mathbf{a}_{lt} è l'accelerazione della Luna rispetto alla Terra. (Suggerimento: come si è visto nel Paragrafo 4.5, $\mathbf{a}_{ls} = \mathbf{a}_{lt} + \mathbf{a}_{ls}$.)

- 7.7 Supponiamo di trovarci all'equatore e di osservare un satellite artificiale che si muove su un'orbita circolare contenuta nel piano equatoriale. Il satellite passa sopra di noi andando da est a ovest, e noi misuriamo un intervallo di tempo di $1.055 \times 10^4 \text{ s}$ tra due avvistamenti consecutivi del satellite al nostro zenith. (a) Qual è il periodo del satellite? (b) Qual è il raggio della sua orbita? (c) Qual è il modulo della velocità del satellite? (d) Qual è l'accelerazione del satellite? (Suggerimento: occorre tener conto della rotazione della Terra.)

- 7.8 Supponendo che la Terra abbia simmetria sferica perfetta, dimostrare che g all'altezza h al di sopra della superficie può essere scritta come

$$g \approx \left(\frac{G m_t}{R_t^2} \right) \left(1 - \frac{2h}{R_t} \right)$$

- 7.9 Le misure indicano che il sistema solare si muove con una velocità di $2.5 \times 10^5 \text{ m/s}$ su un'orbita quasi circolare di raggio $2.8 \times 10^{20} \text{ m}$ attorno al centro della Via Lattea. (a) Si determini il periodo del moto. (b) Si determini l'accelerazione del sistema solare rispetto al centro della galassia. (c) Si faccia una stima della massa di quella parte della galassia che si trova all'interno dell'orbita del nostro sistema solare. Si esplicitino tutte le ipotesi fatte. (d) Gli astronomi stimano che la massa della galassia sia di $7 \times 10^{41} \text{ kg}$. Ammettendo che il Sole sia una stella tipica, si calcoli il numero approssimativo delle stelle che formano la galassia.

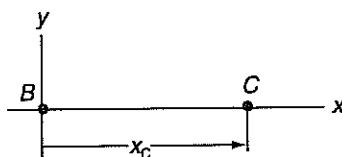
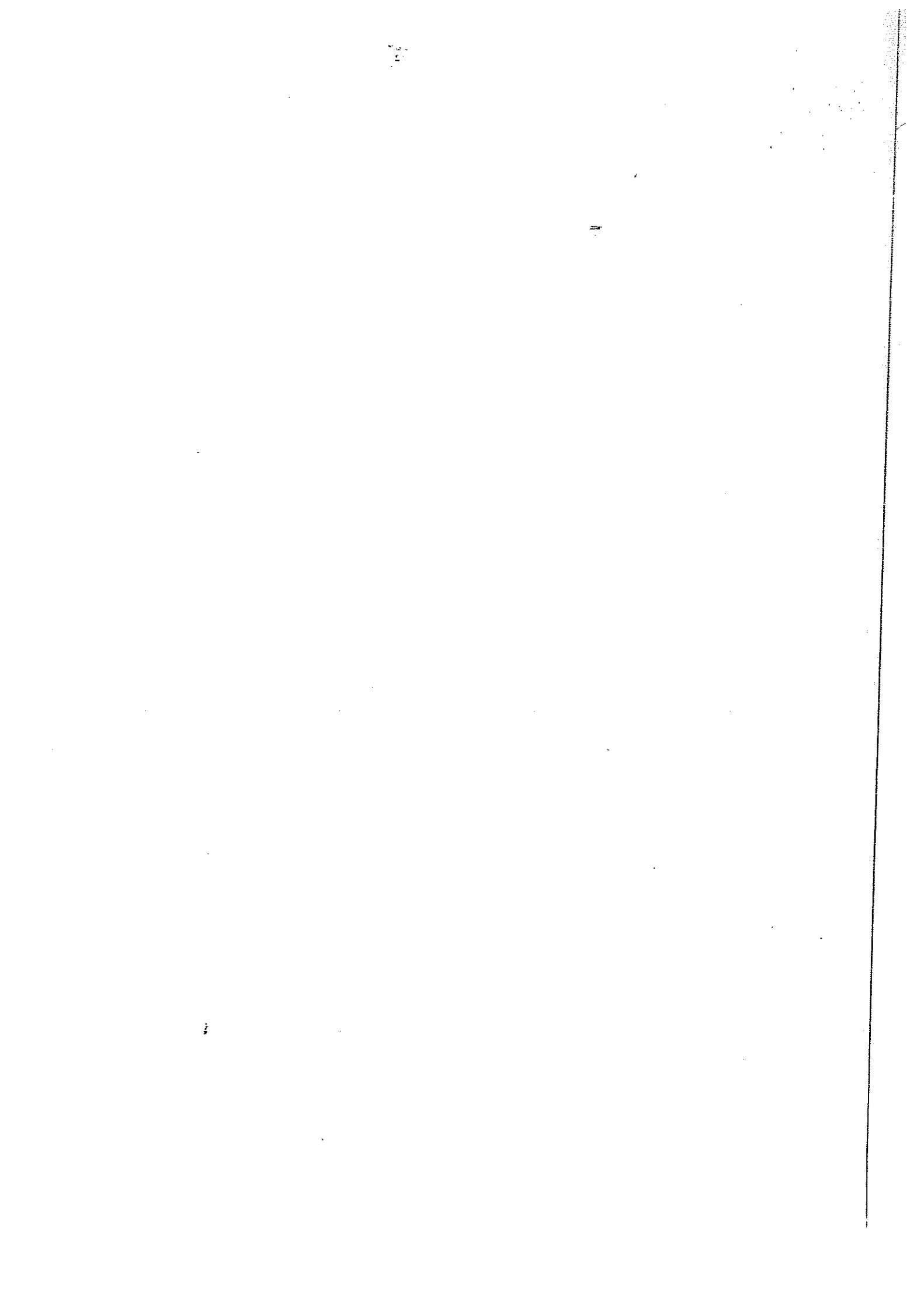


Figura 7.17 Problema 7.4.



LAVORO ED ENERGIA

8.1 INTRODUZIONE

Nei capitoli precedenti abbiamo elaborato un semplice metodo per la determinazione del moto di un punto materiale. Per esempio, possiamo determinare come varia nel tempo la posizione di un pianeta come Venere: la legge di gravitazione fornisce la forza che agisce sul pianeta, e la seconda legge di Newton mette in relazione la forza risultante con l'accelerazione; date la posizione iniziale e la velocità iniziale di Venere, possiamo calcolarne il moto. Tale procedimento può essere applicato alla determinazione del moto di ogni particella di un complicato sistema di molte particelle. Ossia, è possibile determinare la posizione di ogni particella in qualsiasi istante. Spesso però non interessa una descrizione così particolareggiata, e si desidera invece una descrizione che indichi come un sistema evolve in un senso più ampio.

In questo e nel prossimo capitolo introdurremo i concetti di lavoro e di energia, che rischiuderanno un punto di vista nuovo e utile sul moto dei corpi. Dopo aver definito il lavoro, enunceremo il teorema lavoro-energia, che costituisce l'argomento centrale di questo capitolo. Nel capitolo seguente discuteremo una delle leggi fondamentali di natura, la legge di conservazione dell'energia.

8.2 LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA COSTANTE

Introdurremo il concetto di lavoro cominciando a considerare una forza costante che agisce su un corpo che si muove in linea retta. Il caso più generale di una forza variabile, e di una traiettoria che può essere curva, verrà analizzato nel Paragrafo 8.4.

Supponiamo di trascinare una cassa in linea retta su un pavimento in modo che essa subisca uno spostamento $\Delta r = \ell$, come mostra la Figura 8.1. F rappresenta la forza che applichiamo alla cassa. Benché vi siano altre forze che agiscono sulla cassa, noi ci occupiamo per il momento soltanto della forza F . Ammettiamo che il modulo della forza sia costante e che la sua direzione formi un angolo invariabile θ con la retta dello spostamento. Il lavoro W compiuto da una forza costante F su un corpo mentre questo subisce uno spostamento $\Delta r = \ell$ è definito dalla

$$W = F\ell \cos \theta \quad (8.1) \quad \text{Definizione del lavoro.}$$

ove F e ℓ sono i moduli dei vettori F e ℓ . L'unità SI del lavoro è il newton per metro ($N \cdot m$), cui si dà il nome di "joule". Tale unità, il cui simbolo è J, prende il nome da James Prescott Joule (1818-1889), i cui esperimenti contribuirono a chiarire la relazione tra lavoro e calore.

Perché venga compiuto del lavoro una forza F deve agire su un corpo, e questo deve muoversi. Il lavoro compiuto sulla cassa di cui si è detto è in accordo con il concet-

L'unità SI del lavoro è il joule (J).

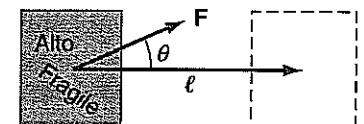


Figura 8.1
Una forza costante agisce su una cassa che subisce uno spostamento. Il lavoro compiuto dalla forza è $W = F\ell \cos \theta$.

Non viene compiuto lavoro se il corpo non si muove.

Il lavoro dipende dall'angolo θ compreso tra F e ℓ .

to di lavoro del linguaggio comune: siamo noi a fornire lo sforzo muscolare (la forza F) necessario per muovere la cassa (lo spostamento ℓ). D'altra parte, se un corpo non si muove, $W = 0$ perché nell'Equazione (8.1) $\ell = 0$. Supponiamo di spingere con una grande forza un muro, che però non si muove. In questo caso, secondo la nostra definizione, il lavoro compiuto sul muro è zero, anche se ci si può sentire stanchi dopo aver spinto energicamente questo corpo immobile.

È essenziale comprendere che il lavoro dipende dalle direzioni relative della forza dello spostamento. Tale dipendenza è contenuta nel fattore $\cos \theta$ che compare nell'Equazione (8.1). Per esempio, il lavoro compiuto da una forza parallela allo spostamento ($\theta = 0^\circ$) è semplicemente il prodotto $F\ell$, dal momento che $\cos 0^\circ = \cos 0^\circ = 1$. Se spingiamo in direzione orizzontale un libro con una forza costante di intensità 20 N e lo spostiamo di 0,5 m sul piano di un tavolo, come nella Figura 8.2a, il lavoro compiuto sul libro dalla forza che lo spinge è $W = (20 \text{ N})(0.5 \text{ m}) \cos 0^\circ = 10 \text{ J}$.

Supponiamo invece che una forza agente su un corpo sia perpendicolare allo spostamento di questo. In tal caso il fattore $\cos 90^\circ = 0$, e il lavoro compiuto dalla forza su questo corpo è zero: *il lavoro compiuto da una forza la cui direzione sia perpendicolare allo spostamento è nullo*. Quando si porta un libro da una parte all'altra di una stanza, la forza con cui lo si sostiene equilibrando il peso è verticale, mentre lo spostamento è orizzontale e dunque perpendicolare alla forza, come mostra la Figura 8.2b. La forza che sostiene il libro non compie lavoro su di esso.

Se l'angolo compreso tra i vettori forza e spostamento è maggiore di 90° , $\cos \theta$ è negativo e il lavoro compiuto dalla forza è negativo. Se si abbassa delicatamente un libro del peso di 30 N (Figura 8.2c), la forza che si esercita su di esso è rivolta verso l'alto in direzione opposta allo spostamento del libro, diciamo di 0,5 m, verso il basso. In questo caso, il lavoro che si compie è $(30 \text{ N})(0.5 \text{ m}) \cos 180^\circ = -15 \text{ J}$. Si compie lavoro negativo sul libro perché la forza che si esercita ha direzione opposta a quella del moto del libro.

Vediamo quindi che il lavoro compiuto da una forza può essere positivo, nullo o negativo, a seconda dell'angolo formato dalla forza e dallo spostamento. Anche se il lavoro compiuto da una forza che esercitiamo su un corpo è nullo o negativo, l'affaticamento muscolare che si prova può essere praticamente lo stesso come quando sul corpo si compie un lavoro positivo. Pertanto la fatica muscolare non è un buon indice del segno né dell'entità del lavoro che si compie su un corpo.

Finora abbiamo preso in considerazione il lavoro compiuto da un'unica forza che agisce su un corpo. Se è presente più di una forza, possiamo calcolare il lavoro compiuto separatamente da ciascuna forza mentre il corpo subisce uno spostamento. Il secondo degli esempi che seguono illustra appunto un calcolo di questo tipo.

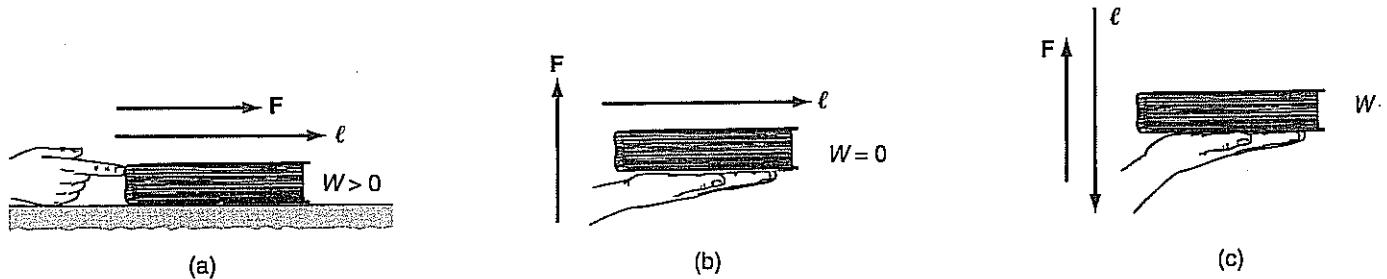


Figura 8.2 (a) Una forza compie un lavoro positivo su un libro. (b) Sul libro non viene compiuto alcun lavoro perché F e ℓ sono perpendicolari. (c) La forza compie un lavoro negativo sul libro perché F e ℓ sono opposti.

Esempio 8.1

Una fune esercita una forza costante di intensità pari a 17 N su una scatola che scivola per 2,0 m in linea retta sul pavimento. Qual è il lavoro compiuto dalla forza se la fune forma con lo spostamento un angolo di (a) 25° , (b) 90° e (c) 120° ?

Soluzione

(a) Applicando l'Equazione (8.1), si ha

$$W = (17 \text{ N})(2.0 \text{ m}) \cos 25^\circ = 31 \text{ J}$$

La fune compie un lavoro positivo sulla scatola perché $\cos 25^\circ > 0$.

(b) Siccome $\theta = 90^\circ$, i due vettori sono perpendicolari e

$$W = (17 \text{ N})(2.0 \text{ m}) \cos 90^\circ = 0$$

(c) L'Equazione (8.1) dà in questo caso

$$W = (17 \text{ N})(2.0 \text{ m}) \cos 120^\circ = -17 \text{ J}$$

La fune compie un lavoro negativo perché l'angolo compreso tra \mathbf{F} e ℓ è maggiore di 90° . ■

Esempio 8.2

Una cassa della massa di 48 kg viene tirata per 8.0 m su per un piano inclinato di 30.0° da una corda con tensione costante $F_c = 540 \text{ N}$, come mostra la Figura 8.3. Il coefficiente di attrito cinetico è $\mu_k = 0.40$. Si determini il lavoro compiuto da ognuna delle forze che agiscono sulla cassa.

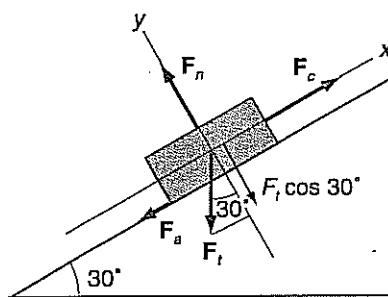


Figura 8.3
Esempio 8.2.

Soluzione

Servendoci dei metodi appresi nei Capitoli 5 e 6, scomponiamo le forze lungo gli assi coordinati, come risulta dalla Figura 8.3. La forza esercitata dalla fune ha modulo $F_c = 540 \text{ N}$, mentre il modulo del peso è $F_t = mg = 470 \text{ N}$. Dal momento che non ci sono moti perpendicolari al piano inclinato, la forza normale deve equilibrare la componente del peso perpendicolare al piano, $F_n = F_t \cos 30^\circ = 410 \text{ N}$. L'intensità della forza d'attrito è allora $F_a = \mu_k F_n = 160 \text{ N}$.

Ora calcoliamo il lavoro compiuto da ciascuna delle forze che agiscono sulla cassa mentre questa si muove lungo il piano inclinato. Per la forza esercitata dalla corda,

$$W_c = (540 \text{ N})(8.0 \text{ m}) \cos 0^\circ = 4.3 \text{ kJ}$$

Il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale, cioè dal peso, è

$$W_t = 470 \text{ N}(8.0 \text{ m}) \cos 120^\circ = -1.9 \text{ kJ}$$

La forza normale non compie lavoro dato che la sua direzione è perpendicolare allo spostamento: $W_n = 0 \text{ J}$. Infine, il lavoro compiuto dalla forza d'attrito è

$$W_a = (160 \text{ N})(8.0 \text{ m}) \cos 180^\circ = -1.3 \text{ kJ} \quad ■$$

8.3 IL PRODOTTO SCALARE

La definizione del lavoro è espressa nell'Equazione (8.1) come prodotto del modulo F della forza per il modulo ℓ , dello spostamento, per il coseno dell'angolo formato dalle loro direzioni: $W = F\ell \cos \theta$. Un modo elegante e utile per scrivere questa espressione è quello che fa ricorso al *prodotto scalare* di due vettori. L'uso di questo prodotto rende più snella la nostra notazione e semplifica il calcolo del lavoro.

Nel Capitolo 2 abbiamo rivolto l'attenzione alla somma e alla sottrazione dei vettori. Qui prendiamo in considerazione uno dei modi in cui si possono moltiplicare due vettori. Il prodotto scalare di due vettori qualsiasi \mathbf{A} e \mathbf{B} è indicato con un punto ed è definito come

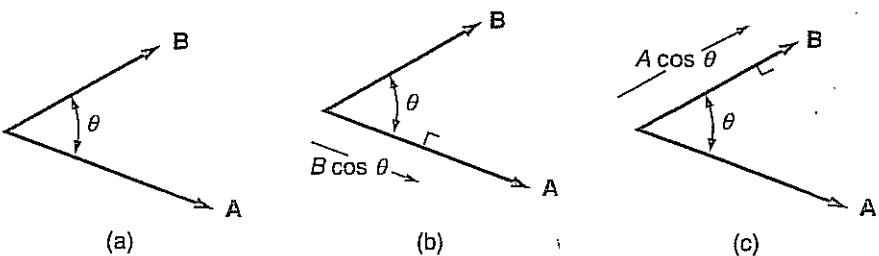
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (8.2)$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori, come nella Figura 8.4a. Il secondo membro dell'Equazione (8.2) è il prodotto di tre scalari, i moduli A e B e il coseno. Pertanto il prodotto scalare di due vettori, come dice il suo nome, è una grandezza scalare: ciascuno dei vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} ha una direzione, ma il prodotto scalare non ne ha.

Prodotto scalare di due vettori.

Figura 8.4

(a) Il prodotto scalare di due vettori è uno scalare, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$. (b) $B \cos \theta$ è la proiezione del vettore \mathbf{B} sul vettore \mathbf{A} . (c) $A \cos \theta$ è la proiezione del vettore \mathbf{A} sul vettore \mathbf{B} .



Per una forza \mathbf{F} e uno spostamento ℓ il prodotto scalare è $\mathbf{F} \cdot \ell = F\ell \cos \theta$, e tale prodotto rappresenta il lavoro compiuto dalla forza. Quindi il lavoro compiuto da una forza \mathbf{F} costante su un corpo che si muove in linea retta con uno spostamento ℓ è il prodotto scalare di questi due vettori:

Il lavoro come prodotto scalare.

$$W = \mathbf{F} \cdot \ell \quad (8.3)$$

Il prodotto scalare di due vettori può essere interpretato geometricamente in termini della proiezione di uno dei vettori sull'altro vettore. Scrivendo l'Equazione (8.2) nella forma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A(B \cos \theta)$ e servendosi della Figura 8.4b, si vede che $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ è il prodotto del modulo di \mathbf{A} per la componente di \mathbf{B} nella direzione di \mathbf{A} . In alternativa, si può scrivere $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = B(A \cos \theta)$ e utilizzare la Figura 8.4c. L'uguaglianza delle due espressioni manifesta il carattere commutativo del prodotto scalare di due vettori; il risultato è indipendente dall'ordine con cui i vettori compaiono nel prodotto:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Il prodotto scalare gode anche della proprietà distributiva:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

Un'altra proprietà del prodotto scalare è $\mathbf{A} \cdot (s\mathbf{B}) = s(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, ove s è uno scalare (L'Esercizio 8.10 propone una dimostrazione grafica di questi due ultimi risultati.)

Dal momento che spesso i vettori sono definiti dalle loro componenti, esprimiamo il prodotto scalare di due vettori in termini delle componenti di questi. Supponiamo che i vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} siano scritti come $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$. Allora

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$

Eseguendo le moltiplicazioni in quest'ultima espressione, si ottiene una somma di nove prodotti:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + A_x B_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + A_x B_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + A_y B_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + A_y B_z \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + A_z B_y \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + A_z B_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dal momento che \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} sono versori mutuamente perpendicolari, si possono facilmente calcolare tutti questi prodotti ricorrendo all'Equazione (8.2), che definisce il prodotto scalare di due vettori qualsiasi. Per esempio, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$; risultati analoghi si ottengono negli altri casi. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

Dei nove prodotti presenti nell'equazione data sopra per $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, soltanto tre sono diversi da zero. Quindi il prodotto scalare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ può essere espresso in termini delle componenti dei vettori come

Il prodotto scalare espresso

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (8.4)$$

Vi sono dunque due modi equivalenti per calcolare il prodotto scalare. Se si conoscono o si possono determinare i moduli di entrambi i vettori e l'angolo che questi formano, si può calcolare il prodotto scalare servendosi dell'Equazione (8.2). In alternativa, se si conoscono le componenti di ciascun vettore, è più semplice usare l'Equazione (8.4).

Come caso particolare dell'Equazione (8.4), supponiamo che sia $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Utilizzando prima l'Equazione (8.2) e poi l'Equazione (8.4), si ottiene

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (A)(A) \cos 0^\circ = A^2$$

e

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z$$

Combinando queste equazioni si ha

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

Abbiamo ricavato per mezzo del prodotto scalare un risultato familiare: il quadrato del modulo di un vettore è uguale alla somma dei quadrati delle sue componenti. Si tratta della forma tridimensionale del teorema di Pitagora.

Esempio 8.3

Un corpo si muove in linea retta con uno spostamento dato da $\ell = (3.0 \text{ m})\mathbf{i} + (4.0 \text{ m})\mathbf{j}$. Si determini il lavoro compiuto sul corpo dalla forza costante $\mathbf{F} = (8.0 \text{ N})\mathbf{i} + (-8.0 \text{ N})\mathbf{j}$. I due vettori sono rappresentati nella Figura 8.5.

Soluzione

Dal momento che sono date le componenti dei vettori (si noti che $F_z = 0$ e $\Delta z = 0$), usiamo l'Equazione (8.4) per risolvere l'Equazione (8.3) che dà il lavoro:

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} \cdot \ell = F_x \Delta x + F_y \Delta y \\ &= (8.0 \text{ N})(3.0 \text{ m}) + (-8.0 \text{ N})(4.0 \text{ m}) = -8.0 \text{ J} \end{aligned}$$

Il prodotto scalare può essere calcolato anche determinando il modulo di ciascun vettore e l'angolo compreso tra essi. Tenendo presente che

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 11 \text{ N}$$

$$\ell = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 5.0 \text{ m}$$

e che

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = 53^\circ - (-45^\circ) = 98^\circ$$

si ha

$$W = F\ell \cos \theta = (11 \text{ N})(5.0 \text{ m}) \cos 98^\circ = -8.0 \text{ J}$$

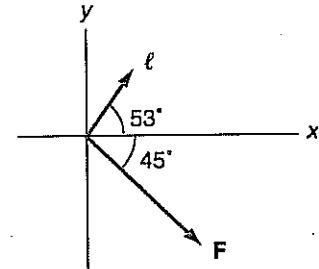


Figura 8.5 Esempio 8.3.

Esempio 8.4

Si determini il lavoro compiuto dalla forza costante $\mathbf{F} = (2 \text{ N})\mathbf{i} + (3 \text{ N})\mathbf{j} - (5 \text{ N})\mathbf{k}$ mentre spinge un corpo il cui spostamento è $\ell = (9 \text{ m})\mathbf{i} + (4 \text{ m})\mathbf{j} + (6 \text{ m})\mathbf{k}$.

Soluzione

Per trovare il lavoro, calcoliamo il prodotto scalare per mezzo delle componenti:

$$W = \mathbf{F} \cdot \ell = (2 \text{ N})(9 \text{ m}) + (3 \text{ N})(4 \text{ m}) + (-5 \text{ N})(6 \text{ m}) = 0$$

Dato che il lavoro è nullo, concludiamo che la forza e lo spostamento sono perpendicolari.

8.4 LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA VARIABILE

Fin qui abbiamo considerato il lavoro compiuto da forze costanti. Ma molte delle forze con cui abbiamo a che fare non sono costanti. Per esempio, la forza esercitata su un corpo da una molla dipende dall'entità dell'allungamento o della compressione della molla stessa. Consideriamo una forza variabile che agisce su un corpo il quale si muove lungo una linea retta, diciamo l'asse x , e ammettiamo che la componente della forza $F(x)$ dipenda soltanto dalla coordinata x . Nella Figura 8.6a è rappresentato un pos-

sibile grafico di $F_x(x)$ in funzione di x . Quanto lavoro viene compiuto da una forza di questo tipo mentre il corpo si sposta da x_i a x_f ? Il lavoro compiuto dalla forza variabile durante l'intero spostamento da x_i a x_f può essere approssimato suddividendo quest'ultimo in un gran numero di piccoli spostamenti e sommando i lavori compiuti ciascuno di questi. Si ammette che ciascun sottointervallo sia abbastanza piccolo perché la forza vari in misura trascurabile mentre x cambia di Δx . Il lavoro ΔW compiuto dalla forza in corrispondenza dello spostamento $\Delta \ell = \Delta x$ può essere approssimato valutando la componente della forza $F_x(x)$ nel punto medio \bar{x} del sottointervallo e scrivendo

$$\Delta W \approx \mathbf{F} \cdot \Delta \ell = [F_x(\bar{x})\mathbf{i}] \cdot (\Delta x) = F_x(\bar{x})\Delta x$$

poiché $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$. In base alla Figura 8.6a questo valore di ΔW è pari all'area della regione rettangolare ombreggiata di altezza $F_x(\bar{x})$ e di base Δx .

Sommando i contributi di ciascuno spostamento incrementale Δx per l'intero spostamento da x_i a x_f , si perviene a un'approssimazione del lavoro compiuto:

$$W \approx \sum F_x(\bar{x})\Delta x$$

Supponiamo che N sia il numero dei sottointervalli in cui abbiamo suddiviso l'intervallo $x_f - x_i$; allora $N\Delta x = x_f - x_i$. Se facciamo aumentare N , rendiamo più piccoli Δx e l'approssimazione del lavoro diventerà più precisa perché la forza $F_x(x)$ varia ancor meno su un sottointervallo più piccolo.

Immaginiamo una successione di valori di N crescenti e di Δx sempre più piccoli cosicché al limite per $N \rightarrow \infty$ e $\Delta x \rightarrow 0$, il risultato diventa esatto. Il procedimento di passaggio al limite ci consente di esprimere il lavoro come un integrale. Siccome

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum F_x(\bar{x})\Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$

otteniamo per il lavoro compiuto dalla forza variabile mentre il corpo si sposta da x_i a x_f

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$

(8.5)

Lavoro compiuto da una forza variabile in una dimensione.

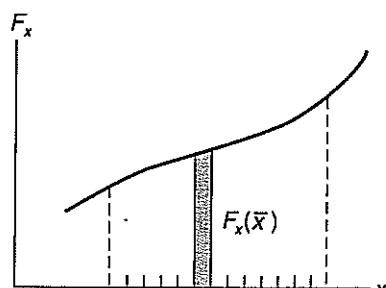
Il lavoro è pari all'area che sta sotto il grafico di $F_x(x)$.

L'integrale del lavoro è ottenuto dal passaggio al limite eseguito sulla somma dei lavori compiuti per i singoli piccoli passi, $\Delta W = F_x(\bar{x})\Delta x$. Dal momento che $F_x(\bar{x})\Delta x$ è l'area della regione rettangolare rappresentata nella Figura 8.6a, possiamo dare un'interpretazione grafica dell'integrale. Nell'intervallo tra x_i e x_f , l'integrale che fornisce il lavoro è uguale all'area che sta sotto il grafico di $F_x(x)$, ossia all'area delimitata dalla curva e dall'asse x , come mostra la Figura 8.6b. In tale figura il senso dello spostamento è verso destra e la curva giace sopra l'asse. L'area in questo caso è positiva. Se la curva giacesse sotto l'asse (cioè se la forza avesse direzione opposta allo spostamento), il lavoro (ossia l'area) sarebbe negativo. L'Appendice C contiene un breve compendio dei risultati del calcolo integrale.

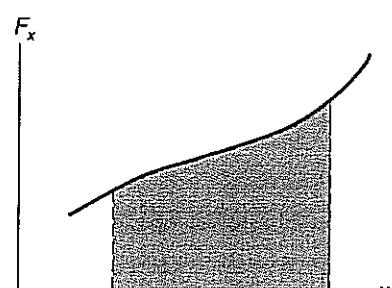
Come semplice esempio dell'uso dell'Equazione (8.5) per il calcolo del lavoro compiuto da una forza, consideriamo una forza costante di intensità F che agisca nella direzione del moto di un corpo; ad esempio, la forza esercitata da una fune che trascina

Figura 8.6

- (a) L'area del rettangolo è approssimativamente uguale al lavoro compiuto in corrispondenza del piccolo spostamento, $\Delta W = F_x(\bar{x})\Delta x$.
- (b) Il lavoro compiuto durante lo spostamento da x_i a x_f è pari all'area delimitata dalla curva e dall'asse x .



(a)



(b)

una cassa su un pavimento. Mentre la cassa si muove da x_i a x_f , la forza è diretta nella direzione x positiva e quindi la componente x della forza è $F_x(x) = F$. Sostituendo nell'Equazione (8.5), si ha

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} F dx = F \int_{x_i}^{x_f} dx = F(x_f - x_i)$$

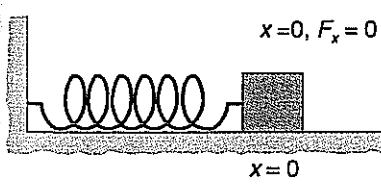
Questo lavoro relativo a una forza costante è identico a quello ottenuto per mezzo dell'Equazione (8.1) con $\ell = x_f - x_i$ e $\theta = 0$. Si noti che $W = F(x_f - x_i)$ corrisponde all'area del rettangolo ombreggiato nella Figura 8.7.

Ora consideriamo una forza che invece varia con x . Una molla è assicurata per un'estremità a un supporto fisso. All'altra estremità è attaccato un blocco che può scivolare su una superficie orizzontale. Nella Figura 8.8a la molla non è né tesa né compressa, ma si trova a riposo. Indichiamo con x la posizione del blocco a partire da questa posizione di equilibrio; quindi x rappresenta anche l'allungamento della molla, come mostra la Figura 8.8b. Per molte molle, l'intensità della forza è proporzionale all'allungamento x , in accordo con la *legge di Hooke*:

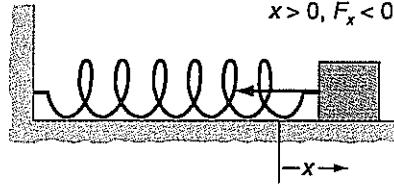
$$F_x(x) = -kx$$

Qui F_x è la componente x della forza esercitata dalla molla sul blocco e k è la cosiddetta *costante della molla*.¹ Quanto più rigida è la molla, tanto maggiori sono la costante e la forza esercitata dalla molla su un corpo attaccato ad essa. L'unità SI in cui si esprime la costante della molla è il N/m.

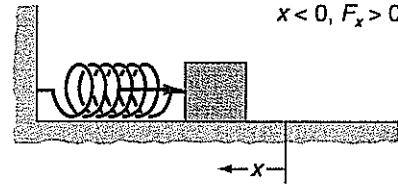
La molla non esercita alcuna forza sul blocco quando $x = 0$ come nella Figura 8.8a, poiché $F_x = -k(0) = 0$. Questa è la posizione di equilibrio per il blocco, se su di esso non agiscono altre forze orizzontali. Se la molla viene allungata, cosicché x è positiva come nella Figura 8.8b, allora F_x è negativa e la forza della molla tende a riportare, o a richiamare, il blocco nella posizione di equilibrio. Analogamente, se la molla viene compressa, come nella Figura 8.8c, allora x è negativa e F_x è positiva. Di nuovo, la forza della molla tende a riportare il blocco in $x = 0$. Dal momento che la molla esercita sul blocco una forza che ha direzione opposta allo spostamento del blocco, tale forza è spesso chiamata *forza di richiamo*. Questo comportamento di una molla che ubbidisce alla legge di Hooke è rappresentato graficamente nella Figura 8.8d. Per la maggior parte delle molle la dipendenza lineare di F_x da x sussiste per spostamenti dalla posizione di equilibrio che siano piccoli rispetto alla lunghezza della molla. Spostamenti grandi possono anche causare la deformazione permanente della molla.



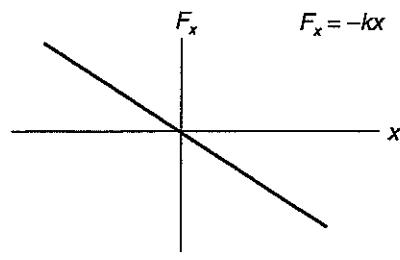
(a)



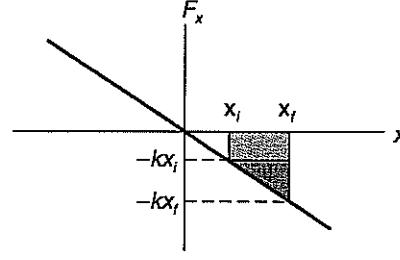
(b)



(c)



(d)



(e)

¹ Al contemporaneo di Newton, Robert Hooke (1635-1703) viene attribuita la prima dimostrazione sperimentale del fatto che la forza esercitata da una molla è proporzionale allo spostamento.

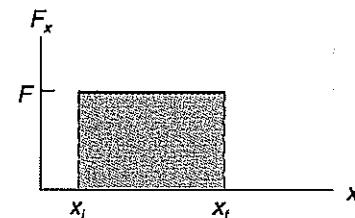


Figura 8.7

Una forza costante compie lavoro su un corpo. Il lavoro compiuto è pari all'area del rettangolo, $W = F(x_f - x_i)$.

Figura 8.8

(a), (b), (c) Una molla esercita sul blocco una forza di richiamo. (d) La forza di richiamo è proporzionale allo spostamento, ma ha direzione opposta, $F_x(x) = -kx$. (e) L'area che rappresenta il lavoro compiuto dalla molla è data dalla somma dell'area del rettangolo e di quella del triangolo.

Determiniamo ora il lavoro compiuto dalla molla sul blocco mentre questo si sposta x_i a x_f . Sostituendo nell'integrale dell'Equazione (8.5), si ha

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx$$

dove $-k$ è stata portata fuori dal segno di integrale perché è costante. Siccome $\int x dx = \frac{1}{2}x^2$, si ottiene

$$W = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) \quad (8.6)$$

Si noti che il segno negativo compare perché la forza della molla è opposta allo spostamento del blocco.

Il lavoro compiuto dalla molla può essere determinato anche graficamente. Dalla legge di Hooke si desume che la componente della forza è negativa se x è positiva. Ciò risulta in modo esplicito nella Figura 8.8e. Il lavoro, pari all'area delimitata dalla curva negativo per uno spostamento verso destra poiché la curva giace sotto l'asse. L'area può essere calcolata senza difficoltà in base alla figura, come somma dell'area del rettangolo, $-[kx_i \cdot (x_f - x_i)]$, e dell'area del triangolo, $-\left\{\frac{1}{2}[k(x_f - x_i)](x_f - x_i)\right\}$:

$$W = -\left\{kx_i \cdot (x_f - x_i) + \frac{1}{2}[k(x_f - x_i)](x_f - x_i)\right\} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

che coincide con l'Equazione (8.6).

Esempio 8.5

Un blocco è attaccato a una molla la cui costante è $k = 2200 \text{ N/m}$ e scivola su una superficie orizzontale. Calcolare il lavoro compiuto dalla molla sul blocco quando questo si muove (a) dalla posizione di equilibrio $x_i = 0$ e (b) da $x_i = 0.15 \text{ m}$ a $x_f = 0.30 \text{ m}$.

Soluzione

In base all'Equazione (8.6) il lavoro compiuto dalla molla è dato da $-\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$. Sostituendo valori numerici, si ottiene

$$(a) W = -\frac{1}{2}(2200 \text{ N/m})[(0.15 \text{ m})^2 - (0)^2] = -25 \text{ J}$$

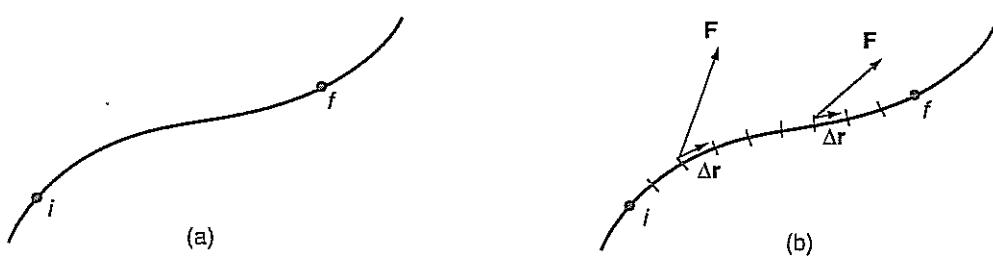
$$(b) W = -\frac{1}{2}(2200 \text{ N/m})[(0.30 \text{ m})^2 - (0.15 \text{ m})^2] = -74 \text{ J}$$

È da notare che il blocco percorre distanze uguali nelle parti (a) e (b), ma il lavoro compiuto da molla è differente perché la forza dipende da x .

L'espressione generale del lavoro. Oltre a considerare il caso in cui la forza varia mentre il corpo si muove lungo una linea retta, occorre considerare anche il caso in cui il moto avviene lungo una linea curva invece che retta. Nella Figura 8.9a è rappresentata una traiettoria curva regolare: benché la figura sia contenuta nel piano della pagina, potrebbe rappresentare anche una traiettoria curva generica che il corpo percorre in tre dimensioni. Per calcolare il lavoro compiuto da una forza che può variare in intensità e in direzione, immaginiamo nuovamente di suddividere la traiettoria in un certo numero di segmenti. Un dato segmento può essere approssimato da un piccolo spostamento Δr come mostra la Figura 8.9b.

Figura 8.9

- (a) Un corpo può muoversi lungo una traiettoria qualsiasi da un punto iniziale i a un punto finale f .
- (b) La traiettoria viene suddivisa in piccoli segmenti. Il lavoro compiuto dalla forza in corrispondenza di un piccolo spostamento è $\Delta W = F \cdot \Delta r$. Si tenga presente che la forza può variare lungo la traiettoria.



Supponiamo che ciascuno spostamento sia così piccolo che lungo di esso il vettore forza possa essere considerato costante, e la traiettoria rettilinea. Per ciascun segmento della curva, l'elemento di lavoro compiuto dalla forza è $\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$. Sommiamo questi contributi relativi a tutti i segmenti che formano la traiettoria dal punto i al punto f ; la somma fornisce un'approssimazione del lavoro, $W \approx \sum \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$.

A questo punto si ricorre allo stesso tipo di passaggio al limite di cui ci siamo serviti nel paragrafo precedente. Consideriamo il limite a cui tendono queste somme quando il numero dei segmenti tende a infinito e la lunghezza di ciascuno spostamento tende a zero. Il limite di tale successione di somme è per definizione l'integrale di linea $\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e porta all'espressione generale del lavoro compiuto da una forza su un corpo che si muove lungo una traiettoria che va da i a f :

$$W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (8.7)$$

Il significato di questo integrale di linea è che il lavoro compiuto durante uno spostamento infinitesimale $d\mathbf{r}$ è $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$; il lavoro W viene ottenuto integrando lungo la traiettoria tra un punto iniziale i e un punto finale f . Nell'Esercizio 8.19 sarà richiesto di dimostrare che le espressioni del lavoro ottenute in precedenza, Equazione (8.1) ed Equazione (8.5), sono casi particolari dell'espressione generale (8.7).

Il calcolo dell'integrale di linea dell'Equazione (8.7) non è sempre cosa facile. Se sono note le componenti della forza, allora

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

e l'Equazione (8.7) può essere espressa come

$$W = \int_i^f (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (8.8)$$

Ciascuna componente della forza può dipendere dalle coordinate (x, y, z) , che variano mentre viene percorsa la traiettoria.

Un esempio semplice ma importante è quello della determinazione del lavoro compiuto dal peso \mathbf{F}_t di un corpo che si muove lungo una traiettoria arbitraria dal punto (x_i, y_i, z_i) al punto (x_f, y_f, z_f) . Entrambi i punti sono in prossimità della superficie della Terra, e l'asse y è orientato verticalmente verso l'alto. In vista di questo calcolo, nella Figura 8.10 sono rappresentati la traiettoria e il peso che agisce sul corpo mentre questo subisce uno spostamento $d\mathbf{r}$. Sul corpo agiscono anche altre forze, ma noi consideriamo solamente il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale. Se sul corpo sono applicate molte forze, per il calcolo del lavoro si possono calcolare i lavori di ogni singola forza e poi sommarli; infatti è un fatto sperimentale che il lavoro fatto dalla risultante di tutte le forze sia uguale alla somma dei lavori di ogni singola forza. Tale constatazione, nel passato, veniva chiamata *Principio dell'indipendenza delle azioni simultanee*.

Utilizziamo l'Equazione (8.8), rilevando che la forza gravitazionale ha soltanto la componente y , $F_{ty} = -mg$ e $F_{tx} = F_{tz} = 0$; pertanto $\mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r} = (0)dx + F_{ty}dy + (0)dz = (-mg)dy$. Poiché la forza ha una sola componente ed è costante, l'integra-

Uso delle componenti per esprimere l'integrale di linea del lavoro.

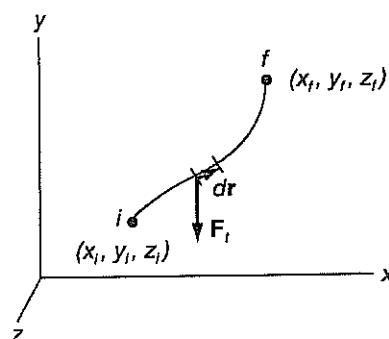


Figura 8.10

Un corpo si muove da i a f lungo una traiettoria arbitraria. Il lavoro compiuto dal peso per uno spostamento infinitesimo è $\mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r}$.

le dell'Equazione (8.8) si riduce a un integrale in una dimensione:

$$W = \int_i^f \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r} = \int_{y_i}^{y_f} F_{ty} dy = \int_{y_i}^{y_f} (-mg) dy = -mg \int_{y_i}^{y_f} dy = -mg(y_f - y_i)$$

Dal momento che la forza gravitazionale è diretta verso il basso, essa compie un lavoro negativo su un corpo che sale a una quota più elevata ($y_f > y_i$) e un lavoro positivo su un corpo che scende a una quota inferiore ($y_f < y_i$).

Nel calcolo appena eseguito non abbiamo specificato in alcun modo la traiettoria. Il risultato ottenuto vale per qualunque percorso che collega i due estremi i e f . In altri parole, *il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale è indipendente dal particolare percorso che ha per estremi i e f*. Nel prossimo capitolo vedremo come questa proprietà del lavoro compiuto dalla forza gravitazionale sia connessa all'energia potenziale gravitazionale. Per il momento ci limitiamo a rilevare che il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale mentre un corpo in prossimità della superficie della Terra si sposta da i a f è indipendente dal percorso seguito ed è dato da

$$W = -mg(y_f - y_i) \quad (8.5)$$

Il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale è indipendente dalla traiettoria.

D'ora in poi ci serviremo dell'Equazione (8.9) per calcolare il lavoro compiuto dal peso di un corpo in prossimità della superficie della Terra.

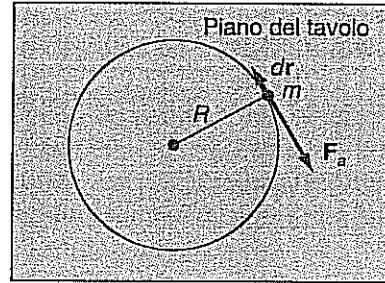
Nella determinazione del lavoro compiuto dalla forza gravitazionale costante è risultato conveniente servirsi dell'Equazione (8.8) perché la forza aveva soltanto la componente y e l'integrale che ne derivava era semplice. In altri casi, come nell'esempio che segue, può essere più semplice usare per il calcolo del lavoro direttamente l'Equazione (8.7). Non c'è un metodo sicuro per stabilire se usare l'Equazione (8.7) oppure l'Equazione (8.8) in un particolare problema. Se, servendosi di una delle due forme, il calcolo risulta estremamente complesso, è opportuno provare a fare uso dell'altra. Naturalmente non c'è alcuna garanzia che l'una o l'altra delle equazioni debba risultare di semplice applicazione.

Esempio 8.6

Un disco da hockey di massa 0.40 kg si muove lungo una traiettoria circolare di raggio 0.50 m sul piano di un tavolo orizzontale, come mostra la Figura 8.11. Il coefficiente di attrito cinetico $\mu_k = 0.24$. Determinare il lavoro compiuto dalla forza d'attrito mentre il disco effettua un quarto di rivoluzione.

Figura 8.11

Esempio 8.6: un disco da hockey si muove in senso antiorario lungo una circonferenza sul piano di un tavolo orizzontale. La forza d'attrito agisce in direzione tangente alla circonferenza e in verso opposto alla velocità.



Soluzione

La forza normale esercitata dal piano del tavolo sul disco equilibra il peso di quest'ultimo, $F_n = mg$. L'intensità della forza d'attrito è costante ed è data da $F_a = \mu_k F_n = \mu_k mg$. La direzione di tale forza cambia continuamente, essendo sempre opposta alla velocità del disco. Per uno spostamento infinitesimo dr tangente alla traiettoria circolare, si ha

$$\mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{r} = F_a dr \cos 180^\circ = -\mu_k mg dr$$

ove dr è il modulo dello spostamento. Per calcolare il lavoro ci serviamo dell'Equazione (8.7):

$$W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_i^f (-\mu_k mg) dr = -\mu_k mg \int_i^f dr$$

L'integrale

$$\int_i^f dr = \frac{1}{4} (2\pi R) = \frac{1}{2} \pi R$$

rappresenta la distanza percorsa lungo l'arco di circonferenza corrispondente a un quarto di rivoluzione. Quindi

$$\begin{aligned} W &= -\mu_k mg \frac{1}{2} \pi R = -(0.24)(0.40 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \frac{1}{2} \pi (0.50 \text{ m}) \\ &= -0.74 \text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito è negativo perché questa forza, in ogni spostamento incrementale, è diretta in verso opposto allo spostamento. ■

8.5 IL TEOREMA LAVORO-ENERGIA E L'ENERGIA CINETICA

A che cosa serve il concetto di lavoro? Qual è il suo significato nell'ambito della meccanica? In questo paragrafo dedurremo un teorema che connette il lavoro con l'energia cinetica, o energia di moto. Questo teorema fornisce un metodo assai potente per mettere in relazione velocità e posizione di un oggetto, comunque complicato sia il moto.

Abbiamo parlato qui di energia e la parola "energia" viene usata molto spesso nel linguaggio comune; noi sappiamo però che, per poter discutere di una grandezza o di un concetto, occorre definirli. Una definizione corrente, di tipo qualitativo, è la seguente: l'energia è la capacità di produrre lavoro. Tale definizione nasce proprio dalla vita quotidiana, basti pensare al significato di frasi tipo: "quanta energia ha quella persona, non sta mai ferma, lavora sempre!" Lasciando invariato il concetto, possiamo procedere verso una definizione operativa affermando che *l'energia di un sistema è una misura della sua capacità di compiere lavoro*. Si tratta quindi ora di misurare, calcolare, determinare il legame che c'è fra il lavoro compiuto dalle forze e qualche grandezza fisica che i sistemi possiedono. *Se la variazione di una grandezza posseduta da un sistema produce lavoro, allora si dirà che tale grandezza è una energia*.

Definizione di energia.

Dalla definizione di lavoro compiuto da una forza su un corpo si può subito cogliere il fatto che certamente esiste un legame fra tale lavoro e il moto del corpo: una forza produce moto, determinato dal secondo principio della dinamica, e compie lavoro durante questo moto.

Cominciamo prendendo in considerazione il caso particolare di un corpo che si muove lungo una linea retta, che sceglieremo come asse x , sotto l'azione di una forza risultante costante. Per la seconda legge di Newton, la componente dell'accelerazione $a_x = \sum F_x/m$ è anch'essa costante. Mentre il corpo si sposta da x_i a x_f , la sua velocità varia da v_i a v_f . Nel Capitolo 3 abbiamo visto che $v_f^2 - v_i^2 = 2a_x(x_f - x_i)$, ossia

$$a_x(x_f - x_i) = \frac{1}{2} v_f^2 - \frac{1}{2} v_i^2$$

Consideriamo ora il lavoro W_{tot} compiuto dalla forza *risultante* che agisce sul corpo. Dal momento che il moto avviene lungo l'asse x e la forza risultante è costante, il lavoro totale è $W_{\text{tot}} = (\sum F_x)(x_f - x_i)$. Utilizzando la seconda legge di Newton, $ma_x = \sum F_x$, si ottiene

$$W_{\text{tot}} = (\sum F_x)(x_f - x_i) = (ma_x)(x_f - x_i) = m \left(\frac{1}{2} v_f^2 - \frac{1}{2} v_i^2 \right)$$

ossia

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

(8.10) Il teorema lavoro-energia.

Questo risultato è chiamato *teorema lavoro-energia*.

Il primo membro dell'Equazione (8.10) è il lavoro compiuto dalla forza risultante, o lavoro totale. Possiamo pensare di calcolare questo lavoro totale sommando tutte le forze che agiscono su un corpo in modo da ottenere la forza risultante, e poi determinando il lavoro compiuto da tale forza risultante; in alternativa, possiamo determinare il lavoro compiuto singolarmente da ciascun forza e sommare questi contributi in modo da ottenere il lavoro totale.

Definizione di energia cinetica.

Il secondo membro dell'Equazione (8.10) è la variazione della grandezza $\frac{1}{2}mv^2$ tra il punto iniziale e quello finale della traiettoria. Abbiamo trovato che, mettendo in relazione il lavoro fatto dalla forza risultante agente su una particella con il moto che la stessa forza induce sulla stessa particella, il lavoro compiuto è uguale alla variazione di una nuova grandezza che il corpo possiede e che è legata al suo moto. Tale grandezza è pertanto una energia. *Definiamo la grandezza $\frac{1}{2}mv^2$ come energia cinetica K di un corpo di massa m dotato di velocità v:*

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8.11)$$

L'energia cinetica è l'energia di moto. In base all'Equazione (8.11), un corpo in quiete ha energia cinetica nulla; un corpo in moto ha energia cinetica positiva. L'energia cinetica non può essere negativa dal momento che la sua espressione contiene il quadrato del modulo della velocità. In virtù dell'Equazione (8.10), l'energia cinetica ha le stesse dimensioni del lavoro, e l'unità SI dell'energia è quindi, come per il lavoro, il joule.

Tradotto in parole, il teorema lavoro-energia esprime la connessione tra il lavoro e l'energia cinetica: *il lavoro compiuto dalla forza risultante che agisce su un corpo è pari alla variazione dell'energia cinetica di quel corpo*, ossia

$$W_{\text{tot}} = \Delta K = K_f - K_i$$

L'energia cinetica aumenta se la forza risultante che agisce su un corpo compie un lavoro positivo, diminuisce se la forza risultante compie un lavoro negativo. Se il lavoro totale è nullo, l'energia cinetica non varia.

Dal momento che il lavoro totale è pari alla variazione dell'energia cinetica, spesso è conveniente considerare il lavoro totale come misura dell'energia cinetica trasferita a un corpo. Per esempio, quando si lancia una palla, il lavoro totale compiuto su di essa (essenzialmente dovuto alla forza esercitata dalla nostra mano) è positivo e la palla acquista energia cinetica. Quando invece si afferra una palla al volo, il lavoro totale compiuto su di essa è negativo, e la palla perde energia cinetica; la mano acquista energia dalla palla.

Non è sorprendente che il lavoro compiuto dalla forza risultante su un corpo sia correlato con la variazione dell'energia cinetica; quest'ultima dipende dalla velocità, grandezza che descrive il moto del corpo. Ed è la forza risultante che, in fin dei conti, determina il moto tramite la seconda legge di Newton. Al trascorrere del tempo, la traiettoria viene percorsa e il lavoro viene compiuto dalla forza risultante. Anche la velocità cambia per effetto della forza risultante, e così pure varia l'energia cinetica del corpo. Il teorema lavoro-energia sancisce l'uguaglianza tra la variazione dell'energia cinetica e il lavoro totale compiuto sul corpo.

Gli esempi proposti alla fine di questo paragrafo ne illustrano la grande efficacia nella soluzione dei problemi. Grazie ad esso siamo in grado di analizzare situazioni che altrimenti richiederebbero calcoli assai laboriosi. Va però rilevato che la descrizione del moto che si ottiene da questo teorema è una descrizione parziale, che in sostanza mette in relazione i valori della velocità con le posizioni lungo la traiettoria. In questa impostazione non compare alcun riferimento esplicito al tempo; cioè, non è possibile determinare la dipendenza temporale della velocità e della posizione servendosi soltanto del teorema lavoro-energia. Ma, pur nella sua parzialità, questa descrizione può contribuire alla nostra comprensione del moto di un sistema sia da un punto di vista quantitativo che da un punto di vista qualitativo.

Deduzione del teorema lavoro-energia nel caso generale. Abbiamo ricavato l'Equazione (8.10), ossia il teorema lavoro-energia, nel caso particolare di un moto in una dimensione con accelerazione costante. Ma questo risultato è valido in generale in qualunque sistema di riferimento inerziale, come ora vedremo. Dato che l'accelerazione di un punto materiale è determinata dalla forza risultante che agisce su di esso, partiamo dalla seconda legge di Newton,

Calcoliamo il prodotto scalare di ciascuno dei membri di questa equazione per il medesimo spostamento infinitesimo dr lungo la traiettoria seguita dal corpo. Al primo membro si ha $(\Sigma F) \cdot dr$, ossia il lavoro compiuto dalla forza risultante in corrispondenza dello spostamento infinitesimo. A questo punto integriamo entrambi i membri lungo la traiettoria tra un punto iniziale in cui la velocità è \mathbf{v}_i , e un punto finale in cui la velocità è \mathbf{v}_f :

$$\int_i^f (\Sigma F) \cdot dr = \int_i^f m a \cdot dr \quad (8.12)$$

Il primo membro di questa equazione è il lavoro W_{tot} compiuto dalla forza risultante.

Dimostriamo ora che l'integrale a secondo membro è la variazione dell'energia cinetica. Esprimendo il prodotto scalare $a \cdot dr$ in termini delle componenti, si ha $a \cdot dr = a_x dx + a_y dy + a_z dz$. Consideriamo per il momento il primo termine, $a_x dx$, e sia dt il tempo infinitesimo in cui x varia di dx ; allora, siccome $v_x = dx/dt$, possiamo scrivere $dx = v_x dt$. La componente dell'accelerazione è la derivata della componente della velocità, $a_x = dv_x/dt$, e queste sostituzioni portano a

$$a_x dx = \frac{dv_x}{dt} v_x dt = v_x \left(\frac{dv_x}{dt} \right) dt$$

Il secondo membro, che contiene il prodotto della componente della velocità v_x e della sua derivata dv_x/dt , può essere scritto come derivata di $\frac{1}{2} v_x^2$. Infatti,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_x^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot 2v_x \left(\frac{dv_x}{dt} \right) = v_x \left(\frac{dv_x}{dt} \right)$$

Quindi

$$a_x dx = v_x \left(\frac{dv_x}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v_x^2) dt$$

Moltiplicando per la massa m , si ha

$$ma_x dx = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v_x^2) dt$$

I termini in y e in z di $ma \cdot dr = m(a_x dx + a_y dy + a_z dz)$ nell'Equazione (8.12) possono essere trasformati nel medesimo modo. Sommando i tre contributi, si ha

$$\begin{aligned} ma \cdot dr &= \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt} (v_x^2) + \frac{d}{dt} (v_y^2) + \frac{d}{dt} (v_z^2) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] dt = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2) dt \end{aligned}$$

dove $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Allora l'Equazione (8.12) diventa

$$\int_i^f (\Sigma F) \cdot dr = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2) dt = \frac{1}{2} m \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} (v^2) dt$$

L'integrale all'ultimo membro non è altro che la grandezza v^2 , calcolata per $t = t_f$ e per $t = t_i$; cioè,

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} (v^2) dt = v_f^2 - v_i^2$$

In tal modo si perviene nuovamente al teorema lavoro-energia, Equazione (8.10):

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

Di nuovo il teorema dell'energia cinetica.

Ora che abbiamo dimostrato in modo generale il teorema lavoro-energia, possiamo applicarlo per ottenere qualche informazione sul moto di un corpo. Per esempio, se conosciamo il modulo della velocità iniziale di un corpo e siamo in grado di calcolare il lavoro totale compiuto mentre il corpo si muove dal punto i al punto f , possiamo determinare il modulo della velocità nel punto f . Viceversa, se conosciamo il modulo della velocità di un corpo in due punti distinti del suo moto, possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza risultante. Questi procedimenti sono illustrati dagli esempi che seguono.

Esempio 8.7

Per avere un'idea quantitativa delle energie che sono in gioco in alcuni fenomeni naturali, calcolare l'energia cinetica di:

- la Terra ($M_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg) che orbita attorno al Sole. Si supponga che la Terra percorra un'orbita circolare di raggio 150×10^6 km compiendo un giro completo in 365 giorni.
- Un'auto ($M_a = 1500$ kg) che viaggia a 100 km/h.
- Un atleta ($M_{atl} = 80$ kg) che corre i 100 metri piani a 10 m/s.
- Un proiettile di fucile ($M_p = 10$ g) sparato a 1000 m/s.
- Una molecola di azoto ($M_A = 4.6 \times 10^{-26}$ kg) che, a causa dell'agitazione termica, si muove con una velocità di 500 m/s.

Soluzione

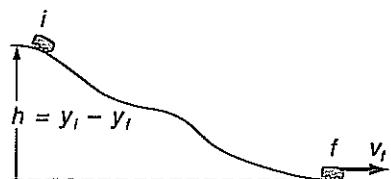
- Calcoliamo la velocità della Terra: nelle nostre ipotesi, compie un moto circolare e uniforme su una circonferenza di raggio $R = 1.5 \times 10^{11}$ m con periodo $T = 365 \times 24 \times 3600 = 3.1 \times 10^7$ s; quindi il modulo della velocità della Terra è $v = \frac{2 \times \pi \times 1.5 \times 10^{11}}{3.1 \times 10^7} = 2.99 \times 10^4$ m/s. Allora l'energia cinetica della Terra è $E_T = \frac{1}{2} M_T v^2 = 2.67 \times 10^{33}$ J.
- 100 km/h sono 27.8 m/s, quindi $E_a = \frac{1}{2} M_a v^2 = 0.5 \times 1500 \times 27.8^2 = 5.8 \times 10^5$ J
- $E_{atl} = \frac{1}{2} M_{atl} v^2 = 0.5 \times 80 \times 10^2 = 4 \times 10^3$ J
- $E_p = \frac{1}{2} M_p v^2 = 0.5 \times 0.01 \times 1000^2 = 5 \times 10^3$ J
- $E_A = \frac{1}{2} M_A v^2 = 0.5 \times 4.6 \times 10^{-26} \times 500^2 = 5.8 \times 10^{-21}$ J

Esempio 8.8

Un vagoncino delle montagne russe parte da fermo nel punto più alto del percorso e scende lungo un binario curvo, come mostra la Figura 8.12. Determinare il modulo della sua velocità quando arriva nel punto più basso, ammettendo che il lavoro compiuto dagli attriti sia trascurabile.

Figura 8.12

Esempio 8.8: un vagoncino delle montagne russe scende lungo un binario privo di attrito.



Soluzione

Dal momento che trascuriamo gli attriti, consideriamo l'azione sul vagoncino di due sole forze: una è la forza gravitazionale esercitata dalla Terra; l'altra è la forza normale esercitata dal binario che costringe il vagoncino a muoversi lungo il binario stesso. Il valore della forza normale non può essere determinato in modo semplice perché il binario non è rettilineo. Tuttavia la forza normale in questo caso non compie alcun lavoro: infatti ogni spostamento infinitesimo dr del vagoncino è tangente alla superficie delle rotaie, e quindi la forza normale F_n è perpendicolare allo spostamento $F_n \cdot dr = F_n dr \cos 90^\circ$. In questo caso soltanto il peso del vagoncino compie lavoro. Invece di calcolare in modo esplicito tale lavoro, ci rifacciamo all'Equazione (8.9) e alla discussione con cui l'abbiamo introdotta. Il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale, $W_g = -mg(y_f - y_i)$, è indipendente dal percorso seguito, ma dipende soltanto dalla differenza di altezza $y_f - y_i$ tra il punto iniziale e quello finale. Il lavoro totale è semplicemente il lavoro compiuto dal peso del vagoncino $W_{tot} = -mg(y_f - y_i)$. Dal momento che quest'ultimo è partito da fermo, $v_i = 0$ e il teorema lavoro-energia fornisce

$$-mg(y_f - y_i) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}m(0)^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Poiché in base alla figura l'altezza da cui scende il vagoncino è $h = y_f - y_i$, possiamo risolvere rispetto a v_f^2 :

$$v_f^2 = -2g(y_f - y_i) = 2gh$$

e

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Si noti che il modulo della velocità finale nel punto più basso è indipendente dalla forma del binario. In effetti, il modulo della velocità sarebbe stato lo stesso se non vi fosse stato alcun binario e il vagoncino fosse stato lasciato cadere verticalmente da fermo da un'altezza h .

Il tempo necessario per arrivare nel punto più basso e la direzione della velocità, però, dipendono dalla forma del binario.

Esempio 8.9

Il guidatore di un'automobile di massa pari a 1200 kg viaggia alla velocità di 18 m/s lungo un viale pianeggiante e all'improvviso frena. Le ruote si bloccano e l'automobile slitta, fermandosi dopo aver percorso 25 m.

- (a) Qual è il lavoro compiuto sull'automobile dalla forza d'attrito esercitata dalla superficie della strada?
 (b) Si determini l'intensità di tale attrito, nell'ipotesi che esso sia costante.

Soluzione

In base al teorema lavoro-energia, possiamo determinare immediatamente il lavoro totale:

$$\begin{aligned} W_{tot} &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m(0)^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \\ &= -\frac{1}{2}(1200 \text{ kg})(18 \text{ m/s})^2 = -190 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Le tre forze coinvolte sono il peso, la forza normale e l'attrito. Di esse, soltanto l'attrito compie lavoro in questo caso. (Il lettore si accerti di aver compreso perché le altre due forze non compiono lavoro!)

(a) Il lavoro totale è compiuto dall'attrito, e

$$W_a = W_{tot} = -190 \text{ kJ}$$

(b) Per una forza d'attrito costante e uno spostamento lungo un percorso rettilineo, il lavoro è

$$W_a = \mathbf{F}_a \cdot \Delta \mathbf{r} = F_a(25 \text{ m}) \cos 180^\circ = F_a(25 \text{ m})(-1)$$

Allora,

$$F_a = -\frac{W_a}{25 \text{ m}} = -\frac{-190 \text{ kJ}}{25 \text{ m}} = 7.8 \text{ kN}$$

Esempio 8.10

Uno slittino parte da fermo dalla cima di un pendio ghiacciato, come mostra la Figura 8.13. Il tratto di percorso da f a q è circolare con raggio R . Si trascurino tutti gli attriti. (a) Si determini il modulo della velocità della slitta in f , il punto più basso del percorso. (b) Che intensità ha la forza normale esercitata dal ghiaccio sulla slitta in questo punto? (c) Qual è il modulo della velocità e qual è l'intensità della forza normale nel punto q ?

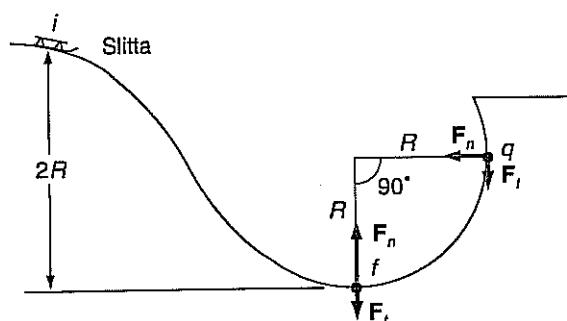


Figura 8.13

Esempio 8.10: una slitta scivola su una superficie ghiacciata priva di attrito.

Soluzione

Cominciamo a considerare il lavoro compiuto dalla forza esercitata sullo slittino dalla superficie priva d'attrito del ghiaccio. Tale lavoro è nullo perché la forza normale \mathbf{F}_n è perpendicolare a ogni spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ dello slittino, spostamento che è tangente al percorso: $\mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r} = 0$. L'unica altra forza è il peso della slitta, il cui lavoro è dato dall'Equazione (8.9) ed è indipendente dal percorso.

(a) Per il moto da i a f , $W_{\text{tot}} = W_g = -mg(y_f - y_i)$ e la differenza $y_f - y_i = -2R$. Il teorema lavoro-energia dà

$$-mg(-2R) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}m(0)^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Risolvendo rispetto a v_f , si ottiene

$$v_f = \sqrt{4gR}$$

(b) Dalla figura si può vedere che la forza risultante che agisce sulla slitta nella posizione f ha intensità $F_n - F_t = F_n - mg$ ed è diretta verso il centro della circonferenza. Questa forza risultante la forza centripeta, e, per la seconda legge di Newton, il suo modulo deve essere mv_f^2/R . (Si rammenti la discussione del moto circolare fatta nel Capitolo 6.) Si ha allora $F_n - mg = mv_f^2/R$, ossia

$$F_n = mg + \frac{mv_f^2}{R}$$

Dalla parte (a), $v_f^2 = 4gR$ e quindi $mv_f^2/R = 4mg$. Ai piedi del pendio, la forza normale esercitata sulla slitta è

$$F_n = mg + 4mg = 5mg$$

ossia cinque volte il peso della slitta!

(c) Quando lo slittino va da i a q , il lavoro compiuto dalla forza risultante è di nuovo dovuto soltanto alla forza gravitazionale ed è $-mg(y_q - y_i) = mgR$. Applicando il teorema lavoro-energia come scriveva si ha $mgR = \frac{1}{2}mv_q^2$ e quindi $v_q = \sqrt{2gR}$. Quando lo slittino passa per il punto q , la forza normale fornisce da sola la forza centripeta poiché il peso in questo punto è diretto tangenzialmente $F_n = mv_q^2/R$. Siccome $v_q = \sqrt{2gR}$ e $v_q^2 = 2gR$, si ha

$$F_n = \frac{mv_q^2}{R} = \frac{m(2gR)}{R} = 2mg$$

■

8.6 LA POTENZA

La parola «potenza» è un altro di quei termini di uso comune che in fisica hanno un significato molto più preciso che nel linguaggio quotidiano. Ci capita spesso di sentire espressioni come «un personaggio potente» o «un potente veleno»; ma l'accezione fisica del termine è alquanto diversa. La potenza mette in relazione il lavoro con l'intervallo di tempo nel quale esso viene compiuto. *La potenza esprime con che rapidità il lavoro viene compiuto.* In una macchina, il lavoro viene spesso compiuto a un ritmo costante, cosicché risulta utile caratterizzare la macchina tramite la sua potenza.

Supponiamo di effettuare un lavoro di 200 J su una scatola, facendola scivolare su pavimento. Se lo spostamento si verifica in un intervallo di tempo $\Delta t = 5$ s, viene fatto in media ogni secondo un lavoro di $200 \text{ J}/5 \text{ s} = 40 \text{ J/s}$. Definiamo la *potenza media* \bar{P} in un intervallo di tempo Δt durante il quale viene compiuto un lavoro ΔW , come

Potenza media.

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (8.13)$$

L'unità SI della potenza è il watt (W): $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$. Il watt prende nome da James Watt (1736-1819), il quale apportò importanti miglioramenti alla macchina a vapore. Watt introdusse l'idea dell'*horsepower* (cavallo-vapore, hp) come unità di potenza per specificare la velocità con la quale queste macchine compivano lavoro. Il cavalo-vapore è definito dalla relazione $1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$. Nel semplice esempio visto sopra, la potenza media è $40 \text{ W} = 0.05 \text{ hp}$.

Invece di parlare di potenza media, spesso si parla di potenza, definita come limite a cui tende il rapporto $\Delta W/\Delta t$ quando Δt tende a zero:

Definizione della potenza.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

(8.14)

La *potenza P* è quindi definita istante per istante.

È possibile ottenere un'espressione alternativa della potenza in termini della forza che compie il lavoro e della velocità del corpo. Supponiamo che in un breve intervallo

di tempo Δt una forza \mathbf{F} agisca su un corpo che subisce uno spostamento $\Delta \mathbf{r}$. Siccome $\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$, la potenza media è data da

$$\bar{P} = \frac{\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Passiamo al limite per Δt che tende a zero, osservando che $\Delta \mathbf{r}/\Delta t \rightarrow \mathbf{v}$, la velocità del corpo. Ciò porta a esprimere la potenza come prodotto scalare della forza per la velocità:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (8.15)$$

La maggior parte degli apparecchi elettrici porta l'indicazione della cosiddetta potenza nominale, la quale esprime la rapidità di conversione dell'energia elettrica in condizioni di funzionamento normali. In base a tale indicazione è possibile determinare il consumo di energia elettrica durante un dato intervallo di tempo; l'energia usata, ΔE , è il prodotto della potenza per l'intervallo di tempo: $\Delta E = P \Delta t$. A questo punto si può introdurre un'utile unità di misura dell'energia. Supponiamo che la potenza sia espressa in chilowatt (kW) e l'intervallo di tempo in ore (h). Il prodotto $P \Delta t$ ha le dimensioni di un lavoro o di un'energia, e risulta espresso nell'unità chilowatt-ora, abbreviata in kW·h. Si tratta dell'unità di energia comunemente utilizzata dai fornitori di elettricità.

La potenza espressa in termini della forza e della velocità.

L'unità di misura dell'energia kW·h.

Esempio 8.11

Un ciclista pedala per 3 ore erogando una potenza costante di 250 W per tutto il percorso. Sapendo che i muscoli di un uomo hanno un'efficienza del 20%, cioè che il 20% dell'energia prodotta dal corpo umano va in energia meccanica, trovare qual è l'energia consumata dal ciclista su tutto il percorso. Sapendo, poi, che una bistecca media fornisce 3000 kJ (circa 700 kcal), determinare quante bistecche avrebbe dovuto mangiare il ciclista per avere l'energia necessaria a compiere il percorso.

Soluzione

Il lavoro fatto su tutto il percorso è $W_{tot} = Pt = 250 \times 3 \times 3600 = 2.7 \times 10^6$ J. Questa è l'energia meccanica prodotta; quindi, poiché solo il 20% dell'energia consumata dal ciclista va in energia meccanica, si ha che l'energia consumata E è

$$E = \frac{W_{tot}}{0.2} = 2.7 \times 10^6 \times \frac{1}{0.2} = 1.35 \times 10^7$$

Allora il numero n di bistecche necessarie per fornire tale energia è $n = \frac{E}{3 \times 10^6} = 4.5$.

Esempio 8.12

Il cavo di un ascensore solleva la cabina a pieno carico con una velocità costante di 0.75 m/s. La potenza erogata dal cavo è di 23 kW. Qual è la tensione del cavo?

Soluzione

La forza \mathbf{F}_c esercitata dal cavo sull'ascensore è parallela alla velocità \mathbf{v} . Quindi il prodotto scalare dell'Equazione (8.15) si riduce al prodotto dei moduli:

$$P = \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v} = F_c v \cos 0^\circ = F_c v$$

Risolvendo rispetto a F_c , si ottiene

$$F_c = \frac{P}{v} = \frac{23 \text{ kW}}{0.75 \text{ m/s}} = 31 \text{ kN}$$

Esempio 8.13

Un motore elettrico della potenza di 1.0 hp (1 hp = 746 W) aziona con continuità una pompa. Quanto lavoro viene compiuto dal motore in un giorno, e con quale spesa? Si assuma che il costo dell'energia elettrica sia di 0.1 € al kW·h.

Soluzione

Dal momento che 1 hp = 0.746 kW, il lavoro compiuto in un intervallo di tempo di 24 ore è

$$\Delta W = (0.746 \text{ kW})(24 \text{ h}) = 18 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

Il costo di un giorno di funzionamento è

$$(18 \text{ kW} \cdot \text{h}) (\text{€ } 0.1 \text{ kW}^{-1}\text{h}^{-1}) = \text{€ } 1.8$$

RIEPILOGO

Paragrafi 8.2 e 8.4

Lavoro compiuto da una forza costante e da una forza variabile

Il lavoro compiuto su un corpo da una forza che agisce su di esso mentre il corpo si muove lungo la sua traiettoria è definito in generale come l'integrale di linea

$$W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (8.7)$$

Nel caso semplice di una forza costante e di uno spostamento Δr lungo una traiettoria rettilinea, il lavoro è dato da $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$. Per una forza variabile in una dimensione,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx \quad (8.5)$$

Il lavoro effettuato dal peso di un corpo in prossimità della superficie della Terra è

$$W_g = -mg(y_f - y_i) \quad (8.9)$$

e risulta indipendente dal percorso che congiunge i punti iniziale e finale. Una molla tesa o compressa esercita una forza di richiamo data dalla legge di Hooke, $F_x = -kx$. Il lavoro compiuto dalla molla è

$$W = -\frac{1}{2} k(x_f^2 - x_i^2) \quad (8.6)$$

QUESITI

- 8.1 Un corpo scivola su una superficie fissa. Il lavoro compiuto dall'attrito cinetico su quel corpo può essere positivo? Può essere negativo? Può essere nullo? La risposta dipende dal sistema di riferimento adottato? Spiega.
- 8.2 L'attrito statico che agisce su un corpo può compiere lavoro? Se sì, in quali circostanze? Se no, perché?
- 8.3 La forza normale esercitata da una superficie su un corpo può compiere lavoro su quel corpo? Se sì, in quali circostanze?
- 8.4 Supponiamo che una cassa venga spinta da un'estremità all'altra del pavimento di un magazzino con velocità costante in modulo. Che relazione c'è tra il lavoro compiuto sulla cassa dall'attrito nel caso di un percorso rettilineo, e il lavoro compiuto nel caso di un percorso curvo?
- 8.5 Se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, deve necessariamente essere $A = 0$ oppure $B = 0$? Spiega.
- 8.6 Supponiamo che $-AB < \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} < 0$. Che cosa si può concludere circa le direzioni di \mathbf{A} e di \mathbf{B} ?
- 8.7 Può una forza compiere lavoro su un corpo se è sempre perpendicolare alla velocità del corpo? Spiega.
- 8.8 Può una forza compiere lavoro su un corpo se è sempre perpendicolare all'accelerazione del corpo? (È possibile che una forza sia perpendicolare all'accelerazione?) Spiega.
- 8.9 Supponiamo che il modulo della velocità di una palla da

Paragrafo 8.3

Il prodotto scalare

Il prodotto scalare di due vettori è definito come una grandezza scalare:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (8.2)$$

ove θ è l'angolo compreso tra le direzioni di \mathbf{A} e di \mathbf{B} . Il prodotto scalare può essere espresso in termini delle componenti dei vettori come

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (8.4)$$

Paragrafo 8.5

Il teorema lavoro-energia e l'energia cinetica

L'energia cinetica, o energia di movimento, di un corpo di massa m con velocità di modulo v è $K = \frac{1}{2}mv^2$. Il teorema lavoro-energia stabilisce l'uguaglianza tra il lavoro compiuto dalla forza risultante che agisce su un corpo e la variazione della sua energia cinetica,

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (8.10)$$

Paragrafo 8.6

La potenza

La potenza esprime con che rapidità il lavoro viene compiuto da una forza: $P = dW/dt$. La potenza di una forza che compie lavoro su un corpo avente velocità v è $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$.

mazza. Di quale fattore varia l'energia cinetica della palla?

8.10 È possibile che un corpo abbia un'energia cinetica negativa? Spiega.

8.11 Un satellite artificiale si muove su un'orbita circolare intorno al centro della Terra. La forza gravitazionale della Terra fornisce la forza centripeta che deve agire sul satellite. Quanto lavoro compie la forza gravitazionale sul satellite?

8.12 Un satellite artificiale si muove su un'orbita ellittica intorno alla Terra. La forza gravitazionale esercitata dalla Terra sul satellite è diretta verso il centro della Terra. L'energia cinetica del satellite varia? Spiega.

8.13 Il teorema lavoro-energia è compatibile con la prima legge di Newton? Ci si deve attendere che esso sia valido in un sistema di riferimento non inerziale? Spiega.

8.14 Per andare dal primo al secondo piano di un grande magazzino si può prendere sia la scala mobile che un ascensore. Si confrontino i valori del lavoro compiuto su una persona dalla forza gravitazionale nei due casi.

8.15 Nel sistema britannico di unità, le lunghezze sono misurate in piedi (ft) e le forze sono misurate in libbre (lb). Qual è l'unità del lavoro in questo sistema? Qual è l'unità dell'energia cinetica in questo sistema?

8.16 Se un corpo A esercita una forza su un corpo B , il corpo B esercita una forza uguale e contraria sul corpo A (terza legge di Newton). Come è possibile che su un corpo venga compiuto un lavoro diverso da zero se

- 8.17 Quanto lavoro viene compiuto dalla molla sul blocco della Figura 8-8, se quest'ultimo torna al suo punto di partenza? Spiega.
- 8.18 Il cavallo-vapore (*horsepower*) (1 hp = 746 W) è un'unità di potenza definita in base a una stima dell'entità di lavoro che un cavallo può compiere nell'unità di tempo. In realtà un cavallo non può erogare costantemente questa potenza; un uomo, d'altra parte, può erogarne pressappoco il 5 per cento per un'ora circa. Si potrebbe definire il *manpower* ponendolo pari a 37 W. Tale termine è invece usato con un significato completamente diverso e indica il numero di persone che lavorano in una ditta o impresa.

ESERCIZI

Paragrafo 8.2 Lavoro compiuto da una forza costante

- 8.1 Supponiamo di sollevare un libro di massa 4 kg dal pavimento a uno scaffale posto a un'altezza di 2 m.
(a) Quale forza si deve applicare per muovere il libro a velocità costante? (b) Che lavoro compie questa forza?
- 8.2 (a) Che forza si deve applicare a un libro di massa 4 kg per spostarlo lentamente e con velocità costante da uno scaffale a un altro adiacente, a 3 m di distanza ma al medesimo livello? (b) Quanto lavoro viene effettuato da questa forza?
- 8.3 Dimostrare che il joule è equivalente al $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.
- 8.4 Una slitta con massa di 16 kg viene trascinata da un fune sulla neve bagnata per una distanza orizzontale di 3.2 m, come mostra la Figura 8.14. La tensione della fune mantiene il valore costante di 5.8 N, e la fune forma un angolo di 37° con l'orizzontale. Determinare il lavoro compiuto dalla fune sulla slitta.

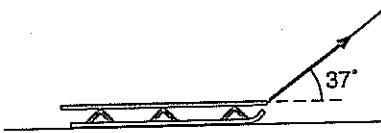


Figura 8.14 Esercizio 8.4.

- 8.5 Supponiamo che la slitta dell'esercizio precedente si muova con velocità costante. Determinare (a) il lavoro compiuto sulla slitta dalla forza d'attrito e (b) il coefficiente di attrito cinetico all'interfaccia neve-slitta.
- 8.6 Un aereo da traino usa un cavo di massa trascurabile per tirare un aliante lungo una traiettoria rettilinea alla velocità costante di 280 km/h. Se la tensione del cavo è di 1400 N, quanto lavoro viene compiuto da questo sull'aliante in un volo di 24 minuti?

Paragrafo 8.3 Il prodotto scalare

- 8.7 Si dimostri la diseguaglianza $-AB \leq \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \leq AB$, dove \mathbf{A} e \mathbf{B} sono due vettori qualsiasi.
- 8.8 Un corpo percorre 4.2 m in linea retta mentre su di esso agisce una forza costante di intensità 9.8 N. Il lavoro effettuato sul corpo da questa forza è -31 J. Qual è l'angolo compreso tra il vettore forza e il vettore spostamento?
- 8.9 Un corpo che si muove in linea retta compie uno spostamento $(2 \text{ m})\mathbf{i} + (3 \text{ m})\mathbf{j} - (5 \text{ m})\mathbf{k}$ mentre su di

- 8.19 Si completi la seguente tabella

8.20

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
W			
K			
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$			m
W_{tot}	Lavoro compiuto dalla forza risultante		
P		Scalare	
ℓ			m

esso agisce una forza costante

$(7 \text{ N})\mathbf{i} - (7 \text{ N})\mathbf{j} - (2 \text{ N})\mathbf{k}$. Calcolare (a) il lavoro compiuto da questa forza e (b) l'angolo compreso tra il vettore forza e il vettore spostamento.

- 8.10 Basandosi sull'interpretazione del prodotto scalare come proiezione, (a) verificare graficamente o geometricamente la proprietà distributiva, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$.
(b) Dimostrare che, se s è uno scalare, $\mathbf{A} \cdot (s\mathbf{B}) = s(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.
- 8.11 Due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} sono disposti in modo che la punta del primo coincida con la coda del secondo, come mostra la Figura 8.15, mentre θ è l'angolo formato dalle loro direzioni. Posto $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, si esegua il prodotto $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$, e si dimostri una forma del teorema del coseno:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

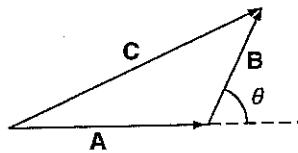


Figura 8.15 Esercizio 8.11.

- 8.12 **Coseni direttori.** Un vettore in tre dimensioni è espresso in termini delle sue componenti, $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$.
(a) Determinare la proiezione di \mathbf{F} su ciascuno degli assi coordinati mostrando che $\mathbf{i} \cdot \mathbf{F} = F_x$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{F} = F_y$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{F} = F_z$. (b) Questi prodotti scalari possono essere espressi anche in termini degli angoli che \mathbf{F} forma con gli assi coordinati x , y e z , angoli che chiamiamo α , β e γ rispettivamente. Vale a dire che $\mathbf{i} \cdot \mathbf{F} = F \cos \alpha$ ecc. Dimostrare l'identità: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Le grandezze $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$ sono dette *coseni direttori* della retta cui appartiene il vettore \mathbf{F} e servono appunto a individuarne la direzione.

Paragrafo 8.4 Lavoro compiuto da una forza variabile

- 8.13 Un blocco è attaccato a una molla di costante elastica $k = 2100 \text{ N/m}$ e si muove dalla posizione di equilibrio fino a $x = 0.14 \text{ m}$. (a) Quanto lavoro viene fatto dalla forza elastica della molla? (b) Determinare la intensità minima e massima della forza esercitata dalla molla sul blocco durante questo moto.

- 8.14** La molla di sospensione di un'automobile viene compressa di 15 mm in seguito all'applicazione di una forza di intensità pari a 450 N. (a) Qual è la compressione se viene applicata una forza di intensità 2250 N? (b) Determinare la costante della molla. (c) Quanto lavoro viene compiuto dalla molla se essa viene compressa di 15 mm a partire dalla sua lunghezza di riposo? (d) Qual è l'ulteriore lavoro effettuato dalla molla quando viene compressa di altri 60 mm? (e) Su quale corpo compie lavoro la molla?
- 8.15** Disponiamo l'asse y verticalmente in modo che il peso di un corpo abbia soltanto una componente y , $F_y = -mg$. Un corpo si sposta lungo l'asse y da y_i a y_f . Dimostrare che il lavoro compiuto dal peso è $W_g = -mg(y_f - y_i)$. Confrontare con l'Equazione (8.9).
- 8.16** Un punto materiale che si muove lungo l'asse x è soggetto a una forza data da $F_x(x) = F_0(e^{x/a} - 1)$, ove F_0 e a sono costanti. (a) Determinare un'espressione del lavoro compiuto da questa forza mentre il punto materiale si sposta dall'origine al punto x_1 . (b) Posto $F_0 = 2.5 \text{ N}$ e $a = 0.20 \text{ m}$, si calcoli il lavoro effettuato se $x_1 = 0.50 \text{ m}$.
- 8.17** Supponiamo che su un corpo in moto lungo l'asse z agisca una forza data da $F_z(z) = -C/z^2$, ove C è una costante. Si ricavi l'espressione del lavoro compiuto da questa forza mentre il corpo si sposta da z_i a z_f , nell'ipotesi che tanto z_i quanto z_f siano positivi.
- 8.18** La Figura 8.16 rappresenta il grafico di una forza la cui intensità dipende dalla coordinata x . Si determini dal grafico il lavoro compiuto da tale forza su un punto materiale che si muove da 0 a 2.0 m.

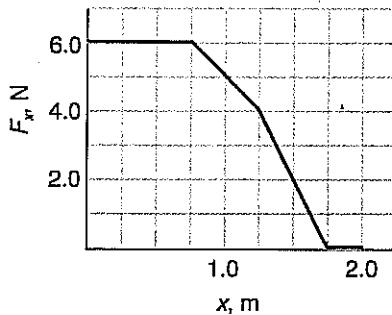


Figura 8.16 Esercizio 8.18.

- 8.19** Usando l'Equazione (8.7) si verifichi che: (a) se la forza \mathbf{F} è costante, l'integrale di linea fornisce le Equazioni (8.3) e (8.1); (b) se il moto è lungo l'asse x , si ottiene l'Equazione (8.5).
- 8.20** Una palla di massa 1.5 kg attaccata a un filo di massa trascurabile viene fatta ruotare lungo una circonferenza orizzontale di raggio 0.75 m. (a) Quanto lavoro compie la forza gravitazionale della Terra sulla palla mentre questa percorre un mezzo giro? (b) Quanto lavoro compie la tensione del filo?
- 8.21** Una palla di massa 1.5 kg attaccata a un filo di massa trascurabile viene fatta ruotare lungo una circonferenza verticale di raggio 0.75 m. (a) Calcolare il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale della Terra mentre la palla passa dal punto più alto al punto più basso della circonferenza. (b) Quanto lavoro compie la tensione del filo?

Paragrafo 8.5 Il teorema lavoro-energia e l'energia cinetica

- 8.22** Verificare, servendosi della definizione $K = \frac{1}{2}mv^2$, che l'unità SI dell'energia cinetica è il joule.
- 8.23** Qual è l'energia cinetica (a) di un'automobile di massa 1100 kg che viaggia a 45 km/h, (b) di un'utilitaria di massa 550 kg che viaggia a 90 km/h?
- 8.24** Una cassa di massa 95 kg, cui viene impressa una velocità iniziale di 3.5 m/s, scivola sul pavimento di un magazzino e si arresta dopo aver percorso 2.3 m. (a) Si determini il lavoro compiuto dalla forza d'attrito. Si ammetta che tale forza sia costante e si determinino (b) la sua intensità e (c) il coefficiente di attrito cinetico.
- 8.25** Una carabina a molla viene caricata con una biglia di massa 0.015 kg, come mostra la Figura 8.17. La molla ha una costante elastica $k = 120 \text{ N/m}$ e viene compressa di 0.12 m. Quando la molla viene liberata, la biglia viene sparata fuori dalla canna. Trascurando tutti gli attriti, si determini il modulo della velocità della biglia quando esce dalla canna.
-
- Figura 8.17 Esercizio 8.25.
- 8.26** Un paracadutista acrobatico di massa 70 kg cade verticalmente nell'aria a una velocità costante di 140 km/h. Qual è il lavoro compiuto in un intervallo di tempo di 120 s (a) dalla forza risultante, (b) dalla forza di gravità, (c) dalla resistenza dell'aria?
- 8.27** Un capo di un filo di massa trascurabile è avvolto attorno a un piolo fissato nel piano di un tavolo orizzontale, mentre l'altro capo viene legato a un disco da hockey di massa 0.50 kg. Al disco viene impressa una velocità iniziale di modulo 3.4 m/s, sicché esso si muove lungo una circonferenza orizzontale di raggio 0.75 m. Il disco si ferma dopo aver compiuto 2.5 giri. (a) Qual è il lavoro compiuto dall'attrito durante tutto il moto? (b) Si ammetta che l'intensità della forza d'attrito sia costante e si determini il coefficiente di attrito cinetico all'interfaccia. (c) Si determini la tensione del filo nell'istante in cui il disco completa il primo giro. (d) Qual è il lavoro compiuto dalla tensione del filo?
- 8.28** Un proiettile di massa 1.5 g avente una velocità di 420 m/s penetra per 0.14 m in un blocco di legno tenuto fermo. (a) Qual è il lavoro compiuto dal blocco nell'arrestare il proiettile? (b) Si stimi l'intensità della forza frenante esercitata dal blocco di legno sul proiettile.
- 8.29** Una palla di massa 0.37 kg viene lanciata verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale di 14 m/s, e raggiunge l'altezza massima di 8.4 m. (a) Qual è il lavoro compiuto dalla resistenza dell'aria sulla palla? (b) Supponendo che la resistenza dell'aria compia all'incirca il medesimo lavoro durante la discesa, si calcoli la velocità della palla quando ritorna al punto di partenza.

- 8.30 Una palla di massa 0.35 kg attaccata a un filo di massa trascurabile si trova inizialmente nella posizione I della Figura 8.18. Le viene impressa una velocità iniziale diretta verso il basso di modulo 5.0 m/s , ed essa percorre un arco di circonferenza di raggio $R = 0.80 \text{ m}$ in un piano verticale. Trascurando gli attriti, si determinino il modulo della velocità della palla e la tensione del filo nelle posizioni (a) A ; (b) B ; (c) C .

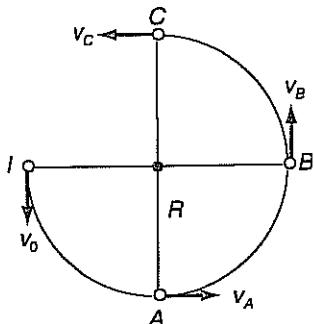


Figura 8.18 Esercizio 8.30.

- 8.31 Qual è la velocità iniziale minima che deve essere impressa alla palla dell'esercizio precedente perché essa nel suo moto faccia un giro completo? (*Suggerimento:* la velocità minima corrisponde a valore nullo della tensione del filo quando la palla raggiunge il punto più alto della circonferenza.)

- 8.32 Una cassetta portautensili con massa di 15 kg è ferma sul ripiano orizzontale di un autocarro. Il veicolo e la cassetta vengono messi in moto con un'accelerazione costante di 2.5 m/s^2 e percorrono una distanza di 18 m . (a) Si calcoli l'energia cinetica della cassetta al termine di questa fase di moto. (b) Quanto lavoro è stato fatto dall'attrito statico sulla cassetta? (c) Qual è il valore minimo che deve avere il coefficiente di attrito statico relativo alle due superfici interessate?

- 8.33 Supponiamo che l'autocarro dell'esercizio precedente abbia un pianale più liscio. Quando l'autocarro si mette in moto da fermo con un'accelerazione di 2.5 m/s^2 , la cassetta portautensili scivola con un coefficiente di attrito cinetico pari a 0.20 . Essa parte dalla quiete nella parte anteriore del pianale e scivola finché non urta contro la sponda posteriore del pianale lungo 2.0 m . Qual è il lavoro compiuto dalla forza d'attrito sulla cassetta durante questa fase del moto? Si usi un sistema di riferimento inerziale in quiete rispetto alla strada.

(*Avvertenza:* rispetto a questo sistema di riferimento, lo spostamento della cassetta non è 2.0 m .)

Paragrafo 8.6 La potenza

- 8.34 Verificare che $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \text{ MJ}$.
- 8.35 Un tronco viene trascinato sul terreno pianeggiante di una foresta alla velocità costante di 2.3 m/s da un cavo orizzontale attaccato a un argano. Se la potenza fornita dal cavo è di 940 W , qual è la tensione del cavo?
- 8.36 Un motore elettrico compie lavoro su un grande compressore erogando una potenza di 1.5 kW . (a) Quanto lavoro viene compiuto in 1 mese se il motore rimane ininterrottamente in funzione? (b) Se la compagnia elettrica fa pagare $0.1 \text{ Euro kW} \cdot \text{h}$, qual è il costo d'esercizio del motore per 1 mese?
- 8.37 Si ammetta che la resistenza viscosa esercitata dall'acqua su una chiatte sia proporzionale alla velocità della chiatte rispetto all'acqua. Un rimorchiatore fornisce alla chiatte 230 hp quando le due imbarcazioni si muovono alla velocità costante di 0.25 m/s . (a) Che potenza è necessaria per far muovere la chiatte alla velocità di 0.75 m/s ? (b) Che forza esercita il rimorchiatore sulla chiatte alla velocità più bassa? (c) E alla velocità più elevata?
- 8.38 Un cavallo tira una chiatte lungo un canale, come mostra la Figura 8.19. Supponiamo che il cavallo compia lavoro sulla chiatte fornendo una potenza di 0.3 hp ($1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$) quando la chiatte ha una velocità costante di modulo 0.7 m/s parallela alla sponda del canale. (a) Qual è la tensione del cavo da traino (teso) che forma un angolo di 34° con la direzione della velocità? (b) Come fa la chiatte a muoversi parallelamente alla sponda?

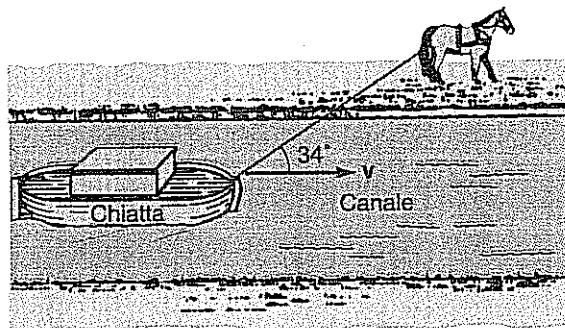


Figura 8.19 Esercizio 8.38: un cavallo tira una chiatte lungo un canale.

PROBLEMI

- 8.1 Un blocco di massa 15 kg viene lanciato su per un piano inclinato di 30° , con una velocità iniziale di modulo 4.6 m/s ai piedi del piano inclinato. Il coefficiente di attrito cinetico relativo alla coppia di superfici è 0.34 . Determinare il lavoro compiuto sul blocco, mentre esso scivola fino a fermarsi, (a) dalla forza risultante, (b) dal peso del blocco, (c) dalla forza normale, (d) dall'attrito. (e) Fino a che punto del piano inclinato arriva il blocco prima di arrestarsi momentaneamente?
- 8.2 Supponiamo che il blocco del problema precedente scivoli all'indietro giù per il piano inclinato. (a) Determinare il lavoro totale compiuto sul blocco

mentre esso raggiunge il punto più basso del piano inclinato. (b) Qual è il modulo della sua velocità quando giunge in tale punto?

- 8.3 Una palla di massa m è sospesa verticalmente a un filo di massa trascurabile e di lunghezza L . Come mostra la Figura 8.20, le viene applicata una forza orizzontale costante, la cui intensità F_a è pari al peso della palla. Si esprima in termini di L e di g il modulo della velocità della palla quando raggiunge l'altezza corrispondente a $\theta = 90^\circ$. Si noti che la distanza percorsa dalla palla lungo l'arco di circonferenza è $s = L\theta$, e quindi $ds = Ld\theta$. Si trascurino tutti gli attriti.

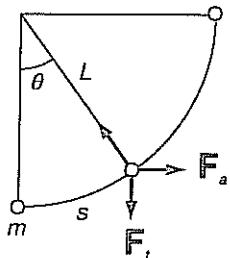


Figura 8.20 Problema 8.3.

- 8.4** Un punto materiale si muove nel piano xy mentre su di esso agisce una forza le cui componenti sono funzioni delle coordinate della particella, $F_x = (8.0 \text{ N/m})^2 xy$, $F_y = (6.0 \text{ N/m}^2)y^2$. (a) Si calcoli il lavoro compiuto da questa forza mentre il punto materiale si sposta dall'origine al punto $(2.0 \text{ m}, 2.0 \text{ m})$ lungo la traiettoria $y = x$. (b) Si ripeta il calcolo riferendolo alla traiettoria $y = (0.50 \text{ m}^{-1})x^2$. Il lavoro compiuto da questa forza è indipendente dalla traiettoria?
- 8.5** Supponiamo che una persona di massa 60.0 kg si trovi in un ascensore. L'ascensore accelera verso l'alto partendo dalla quiete, e la sua accelerazione è di 1.0 m/s^2 per 2.0 s ; dopodiché l'ascensore sale per 10 s alla velocità raggiunta, e infine decelera con accelerazione -1.0 m/s^2 per 2.0 s . (a) Qual è il lavoro compiuto durante l'intero percorso dalla forza normale esercitata sul passeggero dal pavimento dell'ascensore? (b) E il lavoro effettuato dal peso del passeggero? (c) Qual è la potenza media fornita dalla forza normale durante l'intero intervallo di 14 s ? (d) Qual è la potenza istantanea fornita dalla forza normale per $t = 7.0 \text{ s}$? (e) E per $t = 13.0 \text{ s}$?

- 8.6** Uno dei capi di un filo di massa trascurabile è attaccato a un disco da hockey di massa 1.2 kg che può scivolare con attrito trascurabile su un piano inclinato di 37° . L'altro capo del filo è fissato a un punto del piano inclinato, e il disco si muove lungo una traiettoria circolare di raggio 0.75 m , come mostra la Figura 8.21. Nella posizione più bassa, la tensione del filo è di 110 N . Determinare (a) il modulo della velocità del disco nel punto più basso, (b) il modulo della velocità del disco nel punto più alto della circonferenza, (c) la tensione del filo in questa posizione più elevata.

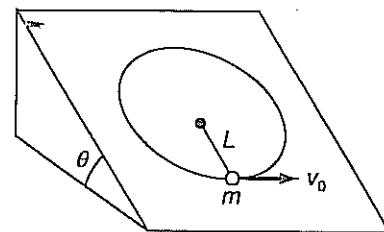


Figura 8.21 Problema 8.6.

- 8.7** Supponiamo che il disco da hockey del problema precedente abbia una velocità di modulo v_0 nella posizione più bassa. (a) Determinare il valore minimo di v_0 che consente al disco di completare il suo percorso circolare. (*Suggerimento:* nella posizione più elevata la tensione del filo sarà nulla.) (b) Determinare per queste condizioni la tensione del filo nella posizione più bassa. (c) Descrivere il moto qualitativamente nell'ipotesi che il disco abbia la velocità minima v_0 nella posizione più bassa, ma che gli attriti, benché piccoli, non siano trascurabili.

LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

9.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo incontreremo la prima delle grandi leggi di conservazione, la *legge di conservazione dell'energia*. Quando si dice che una grandezza «si conserva» si intende che il valore di quella grandezza non varia con il tempo: il suo valore in un certo istante iniziale è uguale al suo valore in un istante finale, e in tutti gli istanti intermedi. Se in un sistema l'energia si conserva, la quantità totale di energia rimane costante, benché parte di essa possa cambiare forma o tipo. La conservazione dell'energia è analoga alla conservazione di una quantità fissa di beni finanziari: la forma o il tipo di questi può cambiare, per esempio da denaro in un conto corrente bancario a denaro contante, ma il valore totale rimane invariato.

Una grandezza che si conserva è costante nel tempo.

9.2 SISTEMI CONSERVATIVI UNIDIMENSIONALI

I principali concetti relativi alla conservazione dell'energia possono essere esaminati in riferimento al caso di un punto materiale che si muove in linea retta. Nel presente paragrafo concentreremo la nostra attenzione appunto su questo caso, mentre i risultati ottenuti saranno generalizzati nei Paragrafi 9.4 e 9.5.

Nel capitolo precedente abbiamo definito il lavoro compiuto da una forza su un corpo puntiforme e abbiamo visto che, nei casi della forza gravitazionale sulla superficie terrestre e della forza elastica, tale lavoro dipende solamente dalla posizione iniziale e dalla posizione finale del punto materiale. Poiché il lavoro è dato da un integrale di linea, è naturale pensare che, in generale, esso dipenda dalla particolare traiettoria che il punto ha effettuato. Del resto è esperienza comune la constatazione che cambiando tragitto per andare da un luogo a un altro si compia un lavoro differente. Possiamo allora dire che esistono in natura due tipi di forze: quelle per cui il lavoro da esse compiuto su una particella dipende dalla traiettoria della particella stessa e quelle per cui il lavoro è indipendente dalla traiettoria e dipende solo dalle posizioni iniziale e finale della particella.

Allora, per prima cosa, classifichiamo le forze che compiono lavoro su un corpo suddividendole in forze *conservative* e forze *non conservative*. Supponiamo che un corpo compia un tragitto di andata e ritorno, cosicché il suo punto di arrivo coincide con il punto di partenza. *Una forza è conservativa se il lavoro totale che compie su un corpo è nullo per qualunque percorso di andata e ritorno.* La forza gravitazionale è un esempio di forza conservativa. Quando un corpo si muove verso l'alto, come la palla della Figura 9.1a, la forza di gravità compie un lavoro negativo (lo spostamento ha verso opposto alla forza). Quando la palla ricade verso il basso fino al punto di partenza, come nella Figura 9.1b, la forza di gravità compie un lavoro positivo. Il lavoro positivo e quello negativo sono uguali e contrari, e il lavoro compiuto durante il percorso di andata e ritorno è nullo. Questa conclusione può essere ricavata anche dall'Equazione (8.9), $W = -mg(y_f - y_i)$: infatti $W = 0$ per un percorso di andata e ritorno perché $y_f = y_i$. In una dimensione, una forza è conservativa se dipende soltanto dalla coordinata che individua la posizione del corpo. Un esempio di forza di questo tipo è la forza elastica di una molla, $F_x(x) = -kx$, per la quale, in base all'Equazione

Definizione di forza conservativa.

La forza di gravità è conservativa.

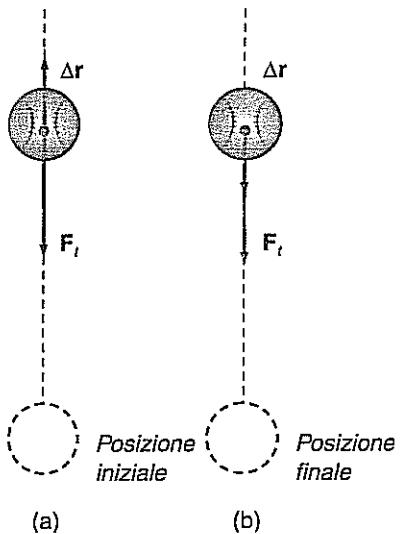


Figura 9.1
La forza gravitazionale della Terra compie (a) un lavoro negativo su una palla che sale e (b) un lavoro positivo su una palla che scende.

a forza d'attrito non è conservativa.

In sistema conservativo è un sistema nel quale soltanto forze conservative compiono lavoro.

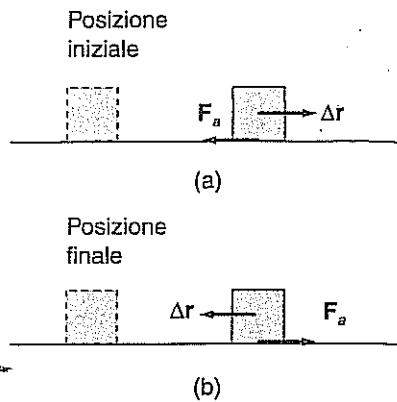


Figura 9.2 La forza d'attrito compie un lavoro negativo in entrambe le parti di un percorso di andata e ritorno. Il lavoro per l'intero percorso di andata e ritorno non è nullo.

(8.6), $W = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$. Per un movimento di andata e ritorno, $x_f = x_i$, e quindi $W = 0$. Il contributo positivo al lavoro e quello negativo si elidono per un movimento di andata e ritorno, e questa elisione si verifica perché la forza della molla dipende solamente da dove il corpo si trova (lungo l'asse x) e non dalla direzione del moto.

Al contrario, il lavoro effettuato dalla forza d'attrito cinetico dipende solitamente dal percorso. Se un corpo scivola su una superficie in quiete, la direzione della forza d'attrito è sempre opposta alla velocità del corpo, come mostra la Figura 9.2. L'attrito compie lavoro negativo sul corpo durante tutto il suo moto, e il lavoro non può essere nullo per un percorso di andata e ritorno. Se una forza compie un lavoro diverso da zero su un corpo mentre questo effettua un movimento di andata e ritorno, la forza è *non conservativa*. L'attrito cinetico è una forza non conservativa.

Le forze che compiono lavoro su un corpo sono esercitate da altre parti di un *sistema* che è costituito dal corpo stesso e da ciò con cui il corpo interagisce. Per esempio, se una cassa da imballaggio scivola giù per un piano inclinato, il sistema è costituito dalla cassa, dal piano inclinato e dalla Terra (per via della sua gravità). Se su un corpo compiono lavoro soltanto forze conservative, il sistema viene detto *sistema conservativo*.

Per un sistema conservativo esiste una semplice relazione tra il lavoro compiuto dalle forze conservative e la conservazione dell'energia. Per chiarire in modo semplice questa connessione, consideriamo una palla che si muove in su o in giù lungo la verticale in caduta libera. Trascuriamo la resistenza dell'aria, cosicché soltanto la forza gravitazionale, che è conservativa, compie lavoro sulla palla: $W_{\text{tot}} = -mg(y_f - y_i)$ per l'Equazione (8.9). Questo lavoro è pari alla variazione dell'energia cinetica della palla, per il teorema lavoro-energia, $K_f - K_i = W_{\text{tot}}$. Si ottiene

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -mg(y_f - y_i)$$

I pedici i (per iniziale) e f (per finale) si riferiscono a due qualsiasi punti toccati durante il moto. Riunendo i termini che si riferiscono al punto finale in un membro dell'equazione e i termini che si riferiscono al punto iniziale nell'altro membro, si ha

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i \quad (9.1)$$

Questa uguaglianza esprime la conservazione, o invarianza, della grandezza $\frac{1}{2}mv^2 + mgy$. Il valore di questa grandezza all'istante t_f è uguale al suo valore in un altro istante t_i . Conosciamo già l'energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv^2$, che dipende dal modulo della velocità della palla. Il termine $U = mgy$ è definito come *energia potenziale gravitazionale*, grandezza che dipende dalla posizione della palla. Una definizione

formale di energia potenziale sarà data più avanti. Entrambe queste energie variano durante il moto della palla; ma la loro somma, $\frac{1}{2}mv^2 + mgy$, rimane costante dall'inizio alla fine di questo moto. Si definisce *energia meccanica* E la somma dell'energia cinetica K e dell'energia potenziale U :

$$E = K + U$$

nell'esempio discusso sopra, l'energia meccanica non varia durante il moto; cioè, *l'energia meccanica si conserva*. Una diminuzione dell'energia cinetica della palla,ando essa sale, è accompagnata da un aumento di pari entità dell'energia potenziale. Energia potenziale viene a volte considerata «energia immagazzinata», nel senso che la «potenzialità» di essere convertita in energia cinetica. Quando la palla ricade, l'energia cinetica aumenta nella medesima misura in cui diminuisce l'energia potenziale. Indi l'energia cinetica e l'energia potenziale durante il moto si trasformano l'una nell'altra in modo che l'energia meccanica rimanga costante. L'espressione della conservazione dell'energia meccanica, Equazione (9.1), può essere scritta semplicemente come

$$F_f = E_i \quad (9.2)$$

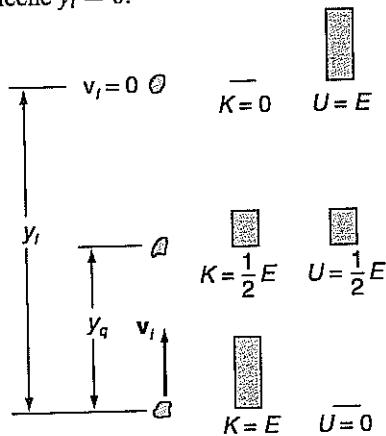
ve $E_f = K_f + U_f$ ed $E_i = K_i + U_i$. Dal momento che l'energia cinetica dipende dal modulo della velocità e l'energia potenziale dipende dalla posizione, l'Equazione 2) può essere utilizzata per mettere in relazione il modulo della velocità di un corpo con la sua posizione. Essa ci fornisce una descrizione parziale del moto del corpo, mettendoci in grado di determinare la rapidità con cui il corpo si muove quando si trova in una particolare posizione, senza far esplicito riferimento al tempo. Tuttavia l'Equazione (9.2) non ci può indicare né la direzione del moto né l'istante in cui il corpo si trova in una certa posizione.

Esempio 9.1

Una pietra di massa 2.0 kg viene lanciata verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale di moto $v_i = 8.0 \text{ m/s}$, come mostra la Figura 9.3. Gli effetti della resistenza dell'aria sono trascurabili, e indi il sistema è costituito dalla pietra e dalla gravità terrestre. (a) Si calcoli l'energia meccanica del sistema. (b) Fino a che altezza sale la pietra e qual è la sua energia potenziale in tale posizione? (c) Qual è il modulo della velocità della pietra quando essa raggiunge un'altezza pari alla metà di quella massima? (d) Si descrivano le variazioni dell'energia cinetica e di quella potenziale durante questo moto.

Soluzione

dato che soltanto la forza gravitazionale, che è conservativa, compie un lavoro apprezzabile, l'energia meccanica si conserva. Per comodità, misuriamo le posizioni lungo la verticale a partire dalla posizione iniziale della pietra, cosicché $y_i = 0$.



a) Nel punto di inizio del moto, $v_i = 8.0 \text{ m/s}$ e $y_i = 0$. Le energie cinetica e potenziale iniziali sono

$$K_i = \frac{1}{2} (2.0 \text{ kg}) (8.0 \text{ m/s})^2 = 64 \text{ J}$$

$$U_i = mg y_i = mg(0) = 0$$

La somma dell'energia cinetica e di quella potenziale si conserva.

Definizione dell'energia meccanica.

Una diminuzione dell'energia potenziale è compensata da un pari aumento dell'energia cinetica, e viceversa.

Figura 9.3

Esempio 9.1: una pietra viene lanciata verso l'alto. Mentre sale, l'energia cinetica si converte in energia potenziale.

L'energia meccanica del sistema nel punto iniziale, e durante tutto il moto, è

$$E = E_i = 64 \text{ J} + 0 = 64 \text{ J}$$

(b) Indichiamo con y_f l'altezza massima raggiunta dalla pietra. In questa posizione il modulo della velocità $v_f = 0$, e quindi l'energia cinetica $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = 0$. Ma l'energia meccanica $E = K_f + U_f$, si conserva e perciò deve avere ancora il valore 64 J. Pertanto all'altezza massima l'energia potenziale $U_f = 64 \text{ J}$, e

$$y_f = \frac{U_f}{mg} = \frac{64 \text{ J}}{(2.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)} = 3.3 \text{ m}$$

(c) Indichiamo con $y_q = \frac{1}{2}y_f$ la coordinata y a metà dell'altezza massima. Qui l'energia meccanica è in parte energia cinetica e in parte energia potenziale. L'energia meccanica è sempre 64 J; si ha dunque $\frac{1}{2}mv_q^2 + mg y_q = 64 \text{ J}$. Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2.0 \text{ kg})v_q^2 &= 64 \text{ J} - (2.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \frac{1}{2}(3.3 \text{ m}) \\ v_q^2 &= 32 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad \text{e} \quad v_q = \pm 5.7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Vi sono due velocità possibili per la pietra dal momento che essa occupa la posizione y_q una volta mentre sale ($v_q = \pm 5.7 \text{ m/s}$) e una volta mentre ricade ($v_q = -5.7 \text{ m/s}$). (d) Durante tutto il moto di caduta libera, l'energia meccanica si conserva. All'inizio, quando $y_i = 0$, l'energia meccanica è interamente cinetica. Via via che la pietra sale, l'energia cinetica diminuisce mentre l'energia potenziale aumenta. A metà altezza, nel punto y_q , l'energia cinetica e quella potenziale diventano uguali. Ne punto più alto, l'energia meccanica è interamente potenziale, dato che in tale posizione $v_f = 0$. La ripartizione dell'energia meccanica (che è costante) in cinetica e potenziale in diversi punti della traiettoria è indicata nella Figura 9.3 dalle barre contrassegnate con i simboli K e U .

Energia potenziale e conservazione dell'energia meccanica. Nell'esempio della caduta libera, la variazione dell'energia potenziale gravitazionale era espressa come opposto del lavoro compiuto dalla forza gravitazionale conservativa.

Abbiamo visto come, con l'introduzione di questa energia potenziale, una variazione dell'energia cinetica fosse controbilanciata da una variazione di segno opposto dell'energia potenziale, di modo che l'energia meccanica rimaneva costante.

Possiamo procedere in modo analogo introducendo un'energia potenziale per ogni forza conservativa in una dimensione. $F_x(x)$ rappresenti una forza di questo tipo che agisce su un corpo: in base all'Equazione (8.5), il lavoro compiuto da questa forza è

$$\int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx$$

Definiamo la variazione dell'energia potenziale $U_f - U_i$ dovuta a una forza conservativa come l'opposto del lavoro compiuto dalla forza:

$$U_f - U_i = - \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx \tag{9.3}$$

Variazione dell'energia potenziale in una dimensione.

Il segno meno viene introdotto in modo che un aumento dell'energia potenziale corrisponda a una diminuzione dell'energia cinetica. Per esempio, la forza gravitazionale compie un lavoro negativo su un corpo quando questo sale, e ciò corrisponde a un aumento dell'energia potenziale e a una diminuzione dell'energia cinetica.

Per qualunque sistema conservativo, la conservazione dell'energia meccanica si ottiene combinando la definizione della variazione dell'energia potenziale con il teorema lavoro-energia. Se a compiere lavoro è soltanto una forza conservativa, $W_{\text{tot}} = W = -(U_f - U_i)$ e

$$K_f - K_i = W_{\text{tot}} = -(U_f - U_i)$$

Riordinando i termini si ha $K_f + U_f = K_i + U_i$, ossia ponendo $E = K + U$,

$$E_f = E_i$$

(9.4)

Conservazione dell'energia meccanica.

L'energia meccanica di un sistema conservativo si conserva.

L'energia potenziale gravitazionale. Quando un corpo di massa m si muove da un punto di coordinata verticale y_i a un punto di coordinata verticale y_f , la variazione dell'energia potenziale gravitazionale è

$$U_f - U_i = mgy_f - mgy_i$$

Si tratta dell'opposto del lavoro compiuto sul corpo dalla forza di gravità (il suo peso).

È importante osservare che soltanto le variazioni o differenze di energia potenziale sono significative.

L'energia potenziale può essere posta uguale a zero in un punto a nostra scelta, detto *punto di riferimento*. Per esempio, solitamente si sceglie il punto o livello di riferimento dell'energia potenziale gravitazionale in corrispondenza di $y = 0$; vale a dire che $U = 0$ per $y = 0$. Una volta scelto il punto di riferimento, ove $U = 0$, possiamo prendere come valore dell'energia potenziale in un punto qualsiasi la differenza tra l'energia potenziale in quel punto e quella del punto di riferimento. Ponendo il livello di riferimento in $y = 0$, l'energia potenziale gravitazionale di un corpo in un punto di coordinata verticale y è

$$U = mgy$$

(9.5)

Energia potenziale gravitazionale.

Benché il valore dell'energia potenziale dipenda dalla scelta dell'origine ($y = 0$), le variazioni dell'energia potenziale non ne dipendono, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 9.2

Calcolare l'energia potenziale gravitazionale di un libro di massa 2.1 kg sul pavimento e su una mensola posta a un'altezza di 2.0 m sopra il pavimento, e determinare la differenza di energia potenziale del libro tra il pavimento e la mensola. Eseguire i calcoli due volte: (a) con l'origine sul pavimento e (b) con l'origine all'altezza della mensola.

Soluzione

Sia y_i la coordinata verticale del libro quando si trova sul pavimento e y_f la sua coordinata quando è sulla mensola.

(a) Se l'origine è sul pavimento, $y_i = 0$ e $y_f = 2.0$ m. Usando l'Equazione (9.5), si ottiene

$$U_i = mgy_i = 0$$

e

$$U_f = mgy_f = (2.1 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m}) = 41 \text{ J}$$

La differenza di energia potenziale è

$$U_f - U_i = 41 \text{ J} - 0 = 41 \text{ J}$$

(b) Con l'origine al livello della mensola, la coordinata del livello del pavimento è $y_i = -2.0$ m, e la mensola è in $y_f = 0$. I valori dell'energia potenziale in queste due posizioni sono diversi da quelli calcolati nella parte (a) perché l'origine delle coordinate è differente. Al livello del pavimento, l'energia potenziale del libro è

$$U_i = mgy_i = (2.1 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(-2.0 \text{ m}) = -41 \text{ J}$$

Sulla mensola l'energia potenziale del libro è $U_f = mgy_f = 0$. La differenza o variazione dell'energia potenziale è

$$U_f - U_i = 0 - (-41 \text{ J}) = 41 \text{ J}$$

uguale a quella ottenuta nella parte (a). ■

L'energia potenziale elastica. La legge di Hooke per una molla ideale, $F_x(x) = -kx$, fornisce un altro esempio di forza conservativa in una dimensione. L'energia potenziale associata a questa forza è chiamata *energia potenziale elastica*.

della molla. La Figura 9.4a mostra una tipica disposizione di una molla con un'estremità attaccata a un supporto rigido e l'altra a un blocco mobile. L'origine delle coordinate è scelta in modo che sia $x = 0$ quando la molla è rilassata, cioè né tesa né compressa. Nella Figura 9.4b, la coordinata x fornisce la misura di quanto la molla è tesa o compressa.

Il lavoro compiuto dalla molla è stato calcolato nel Capitolo 8 ed è dato dall'Equazione (8.6), $W = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$. In base all'Equazione (9.3), $U_f - U_i = -W$, e quindi si ha

$$U_f - U_i = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \quad (9.6)$$

Ponendo lo zero dell'energia potenziale in $x = 0$, si identifica U_f con $\frac{1}{2}kx_f^2$ e U_i con $\frac{1}{2}kx_i^2$. L'energia potenziale elastica della molla, quando è tesa o compressa di un tratto x , è data da

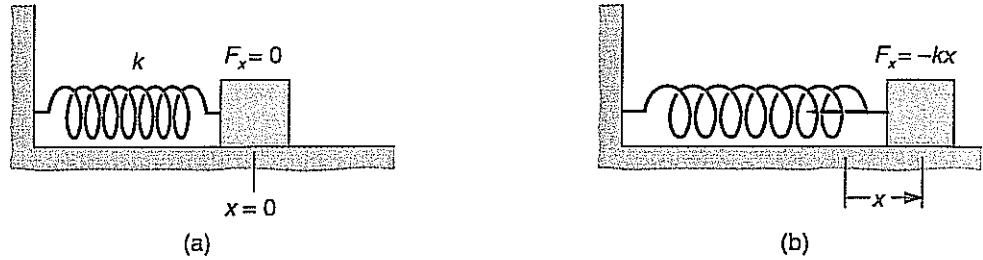
$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (9.7)$$

L'energia potenziale elastica di una molla è non negativa.

Questa energia potenziale non è mai negativa poiché è proporzionale al quadrato di x . Anche se la molla viene compressa, il che rende x negativo, l'energia potenziale è sempre positiva. L'energia potenziale elastica è nulla soltanto se $x = 0$, cioè quando la molla è rilassata.

Figura 9.4

Esempio 9.3: un blocco è attaccato a una molla. (a) La molla è rilassata. (b) La molla esercita una forza di richiamo.



Esempio 9.3

Un blocco di massa 2.5 kg è assicurato all'estremità libera di una molla di costante elastica $k = 1100 \text{ N/m}$, come mostra la Figura 9.4. Il blocco viene tirato da $x = 0$ a $x = 0.15 \text{ m}$ e viene lasciato andare da fermo in un certo istante iniziale. Esso scivola sulla superficie d'appoggio con attrito trascurabile. (a) Calcolare l'energia potenziale iniziale del sistema. (b) Determinare un'espressione del modulo della velocità del blocco in funzione della sua coordinata. (c) Qual è il modulo della velocità del blocco quando raggiunge la posizione d'equilibrio? (d) Di quanto viene compressa la molla quando il blocco si arresta momentaneamente a sinistra della posizione di equilibrio?

Soluzione

(a) L'energia potenziale iniziale è

$$U_i = \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}(1100 \text{ N/m})(0.15 \text{ m})^2 = 12 \text{ J}$$

Il blocco viene lasciato andare mentre è fermo in questa posizione, e quindi $k_i = 0$, e l'energia meccanica è $E = 12 \text{ J}$.

(b) Dal momento che gli effetti dell'attrito sono trascurabili, a compiere lavoro è soltanto la forza conservativa della molla, e l'energia meccanica si conserva. Applicando l'Equazione (9.4), si ha

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}kx_i^2$$

Semplificando, si ottiene $v_f^2 = (k/m)(x_i^2 - x_f^2)$, ossia

$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m}(x_i^2 - x_f^2)}$$

dove i valori di k , m , e x_i sono noti.

(c) Quando il blocco passa per la posizione di equilibrio, $x_f = 0$, e il modulo della velocità del blocco è

$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m}x_i} = \sqrt{\frac{1100 \text{ N/m}}{2.5 \text{ kg}}} 0.15 \text{ m} = 3.1 \text{ m/s}$$

d) Ora indichiamo con il pedice f il punto di massima compressione della molla, che corrisponde a $x_f = 0$. Allora si ha $x_i^2 - x_f^2 = 0$, ossia $x_f = \pm x_i$. Va scelto il segno negativo perché in questo istante la molla è compressa: $v_f = -0.15 \text{ m}$.

9.3 ANALISI GRAFICA DEI SISTEMI CONSERVATIVI

Per un sistema conservativo unidimensionale è utile illustrare graficamente la ripartizione dell'energia meccanica, che si mantiene costante, tra energia cinetica ed energia potenziale, che variano singolarmente durante il moto. Come semplice esempio riprendiamo in considerazione un sistema ormai familiare, un blocco attaccato a una molla (Figura 9.5a). Supponiamo che il blocco scivoli con attrito trascurabile su una superficie orizzontale; la sua posizione è determinata dalla coordinata x , con $x = 0$ che corrisponde alla posizione di equilibrio. L'energia potenziale elastica della molla è data dall'Equazione (9.7): $U = \frac{1}{2} kx^2$. L'energia meccanica di questo sistema si conserva perché l'unica forza che compie lavoro è quella della molla, che è una forza conservativa.

La Figura 9.5b mostra la dipendenza dell'energia potenziale da x . La curva è una parabola poiché l'energia potenziale è proporzionale al quadrato di x . Dal grafico possiamo ricavare il valore dell'energia potenziale U_1 corrispondente al valore x_1 della coordinata. Si noti che questa funzione energia potenziale è positiva sia per trazione che per compressione della molla.

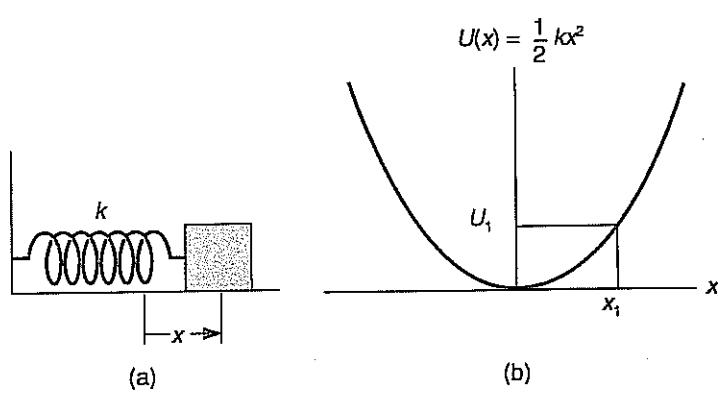


Figura 9.5
 (a) Un blocco è attaccato a una molla. La coordinata del blocco, x , misura l'allungamento o la compressione della molla.
 (b) L'energia potenziale elastica di una molla: $U = \frac{1}{2} kx^2$.

Supponiamo di mettere in movimento il sistema tirando il blocco per un tratto x_m e lasciandolo andare da fermo. Nel moto che ne segue, l'energia meccanica si conserva. Il valore di tale energia meccanica può essere espresso in termini della situazione iniziale: dal momento che all'istante iniziale l'energia cinetica è nulla, l'energia meccanica coincide con l'energia potenziale, $E = U_m = \frac{1}{2} kx_m^2$. Nel seguito del moto, tale energia meccanica è ripartita in energia cinetica ed energia potenziale, $E = K + U$.

Per esempio, supponiamo che il blocco sia nella posizione x_1 della Figura 9.5b, in moto verso destra o verso sinistra. Parte dell'energia meccanica è energia potenziale U_1 , e il resto è energia cinetica K_1 , con $E = K_1 + U_1$. Questa ripartizione viene mostrata in modo esplicito nella Figura 9.6. La lunghezza del segmento che corrisponde all'ordinata della curva nel punto x_1 rappresenta l'energia potenziale U_1 ; la lunghezza del segmento che dalla curva sale fino a E rappresenta l'energia cinetica K_1 . Questa costruzione grafica corrisponde alla relazione $E = K_1 + U_1$.

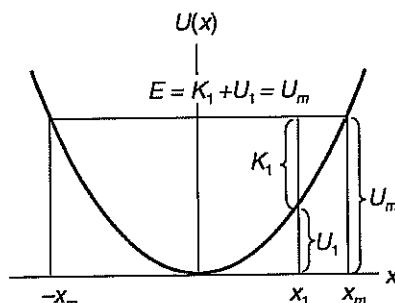


Figura 9.6
 L'energia meccanica che si conserva è in parte energia cinetica e in parte energia potenziale: $E = K + U$.

Possiamo seguire il moto del blocco servendoci della costruzione grafica delineata la Figura 9.6. Valutiamo l'energia meccanica, partendo dalla configurazione iniziale del sistema. Segniamo sull'asse verticale questo valore dell'energia e tracciamo un punto così individuato una retta orizzontale, la cui ordinata rappresenta il valore dell'energia meccanica. Tale retta interseca la curva dell'energia potenziale in corrispondenza delle ascisse $\pm x_m$. Per qualunque valore di x compreso tra $\pm x_m$, i valori dell'energia cinetica e dell'energia potenziale sono rappresentati dalle lunghezze dei segmenti verticali che stanno, rispettivamente, sopra e sotto la curva dell'energia potenziale, precisamente come nel punto x_1 . Quindi, allorché il blocco passa per la posizione d'equilibrio in $x = 0$, l'energia potenziale è nulla e l'energia cinetica $K = E$: l'energia meccanica in tale punto è tutta cinetica. Di conseguenza, la velocità del blocco è massima in tale posizione. In entrambi i punti x_m e $-x_m$, l'energia meccanica è tutta potenziale, e l'energia cinetica è (istantaneamente) nulla mentre la velocità cambia direzione. Questi punti sono chiamati *punti di inversione* del moto. Un punto di inversione è individuato graficamente dall'intersezione della curva dell'energia potenziale con la retta orizzontale che corrisponde al valore dell'energia meccanica del sistema.

Possiamo usare la curva dell'energia potenziale anche per ricavarne informazioni sulla forza conservativa che agisce sul corpo. L'Equazione (9.3) definisce la variazione dell'energia potenziale tra due punti come l'opposto dell'integrale della forza conservativa. Dal momento che l'integrazione è l'operazione inversa della derivazione deve avere, per ragioni puramente matematiche, $F_x(x) = -dU/dx$. Da un punto di vista più propriamente fisico, possiamo prendere in considerazione l'opposto del lavoro compiuto dalla forza conservativa $F_x(x)$ in seguito a uno spostamento infinitesimo. La corrispondente variazione infinitesima dell'energia potenziale è $dU = -F_x(x)dx$, ossia

$$F_x(x) = -\frac{dU}{dx} \quad (9)$$

La forza conservativa unidimensionale è l'opposto della derivata della funzione energia potenziale. Per verificare quest'affermazione, si considerino due esempi per i quali si conosce già il valore della forza. Per una molla ideale, $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ e $F_x(x) = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)/dx = -kx$. Per l'energia potenziale gravitazionale $U(y) = mgy$ e $F_y(y) = -d(mgy)/dy = -mg$.

Si rammenti l'interpretazione grafica della derivata di una funzione vista nel Capitolo 3, interpretazione che ora applichiamo al grafico della funzione energia potenziale. In un punto x_1 la derivata di $U(x)$, dU/dx , è pari alla pendenza della retta tangente al grafico in quel punto. La forza è allora l'opposto della pendenza della retta tangente. Questa interpretazione è illustrata nella Figura 9.7 per il sistema molla-blocco che abbiamo studiato. In x_1 la pendenza della tangente è positiva e $F_x(x_1)$ è negativa; ossia la forza ha verso opposto allo spostamento del blocco. In x_2 la pendenza è negativa e $F_x(x_2)$ è positiva. Anche in questo caso, la forza ha verso opposto allo spostamento. Nell'origine, ovviamente, la pendenza della tangente è nulla, in accordo con il fatto che la forza in tale punto è nulla.

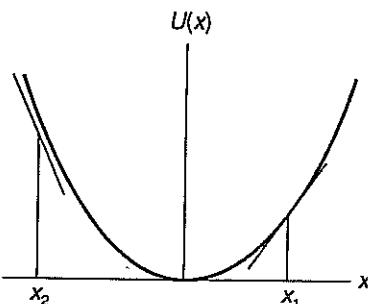


Figura 9.7 La componente della forza è l'opposto della pendenza della tangente alla curva: $F_x(x) = -dU/dx$.

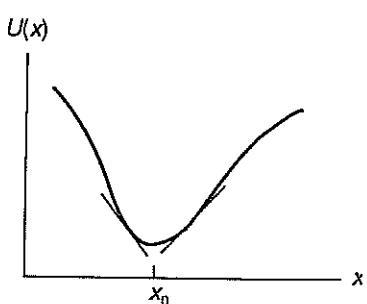


Figura 9.8 La forza è nulla in x_0 , punto d'equilibrio stabile.

Equilibrio e stabilità. Una posizione di equilibrio per un corpo è un punto in cui la forza risultante che agisce sul corpo è nulla. Ci serviamo dell'analisi grafica dei sistemi conservativi unidimensionali per illustrare due tipi di equilibrio, che vengono distinti in relazione al concetto di *stabilità*.

La Figura 9.8 rappresenta il grafico di un'ipotetica funzione energia potenziale. Il punto x_0 è un punto di *equilibrio stabile*. Si tratta di un punto di equilibrio perché in esso F_x , pari all'opposto della pendenza della retta tangente alla curva, è nulla. Supponiamo che il corpo, inizialmente in quiete nel punto x_0 , subisca un piccolo spostamento verso destra. La forza può essere valutata in base alla pendenza della tangente in tale nuova posizione: la sua direzione è verso sinistra, ed essa tende a riportare il corpo nella posizione d'equilibrio. A una conclusione analoga si perviene se si sposta il corpo di un breve tratto a sinistra della posizione di equilibrio: la direzione della forza è verso destra, e di nuovo essa tende a riportare il corpo nel punto di equilibrio. Un punto viene detto di *equilibrio stabile* se, per qualunque piccolo spostamento del corpo da tale punto, la forza tende a riportare il corpo nella posizione di equilibrio. Dalla Figura 9.8 dovrebbe risultare chiaro che, per un sistema conservativo unidimensionale, un minimo della funzione energia potenziale corrisponde a un punto di equilibrio stabile.

Anche il punto x_1 della Figura 9.9 è un punto di equilibrio; in esso infatti la forza che agisce sul corpo è nulla. Tuttavia, se il corpo viene spostato leggermente dall'una o dall'altra parte di tale punto, la forza che agisce sul corpo tende ad allontanarlo ulteriormente dalla posizione di equilibrio. Questo è un punto di equilibrio *instabile*. Un punto viene detto di *equilibrio instabile* se, per qualunque piccolo spostamento del corpo da tale punto, la forza tende ad allontanare il corpo dalla posizione di equilibrio. Per un sistema conservativo unidimensionale, un massimo della funzione energia potenziale è un punto di equilibrio instabile.

Abbiamo distinto due tipi di equilibrio nel caso dei sistemi conservativi in una dimensione. Ma questa distinzione può essere estesa a classi più generali di sistemi. Per esempio, un vagoncino delle montagne russe nel punto più alto del suo percorso è in una posizione di equilibrio instabile rispetto al moto lungo il binario. Un altro esempio è quello di una biglia che può rotolare all'interno di una scodella a fondo arrotondato. Il punto più basso di tale superficie è un punto di equilibrio stabile per la biglia: infatti, se spostata leggermente da tale posizione, la biglia tende a ritornarvi.

Equilibrio stabile.

Equilibrio instabile.

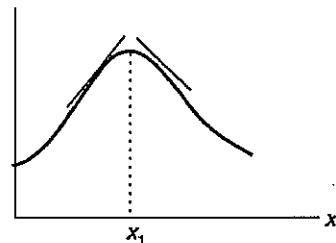
 $U(x)$ 

Figura 9.9

La forza è nulla in x_1 , punto di equilibrio instabile.

9.4 FORZE CONSERVATIVE ED ENERGIA POTENZIALE IN TRE DIMENSIONI

Finora la nostra discussione delle forze conservative, dell'energia potenziale e della conservazione dell'energia meccanica si è limitata al caso dei sistemi unidimensionali. Ora dobbiamo estendere questi concetti ai sistemi in due e in tre dimensioni. In questo paragrafo generalizziamo le definizioni di forza conservativa e di energia potenziale.

Forza conservativa. Abbiamo classificato le forze in una dimensione in rapporto al lavoro compiuto per un percorso di andata e ritorno. Nel caso di una forza conservativa, il lavoro è nullo per qualunque percorso di andata e ritorno; una forza che non soddisfa questa condizione è una forza non conservativa. In una dimensione, un percorso di andata e ritorno non è che un moto avanti e indietro lungo una retta. In due o tre dimensioni, un percorso di andata e ritorno può essere qualunque *cammino chiuso*, cioè qualunque traiettoria che si chiuda su se stessa, come mostra la Figura 9.10. Estendiamo la definizione di forza conservativa in modo che includa percorsi di questo tipo. Il lavoro compiuto da una forza conservativa è nullo per qualunque percorso chiuso. Il lavoro positivo compiuto da una forza conservativa in una parte di un percorso chiuso è compensato esattamente dal lavoro negativo compiuto in un'altra parte della traiettoria, e questa elisione si verifica per qualunque percorso chiuso.

La definizione di forza conservativa può essere espressa sotto forma di un integrale: si rammenti che, come abbiamo visto nel Capitolo 8, il lavoro compiuto da una forza \mathbf{F} in corrispondenza di uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ è $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. L'integrale $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

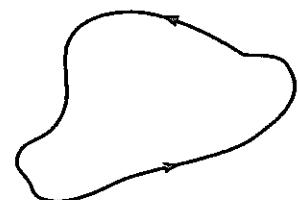


Figura 9.10

Una curva che si chiude su se stessa costituisce un cammino chiuso.

Definizione di forza conservativa.

Per una forza conservativa,
 $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

che fornisce il lavoro compiuto lungo un certo cammino rappresenta la somma contributi dovuti ai singoli spostamenti infinitesimi lungo quel cammino. Per indicare un cammino chiuso, poniamo un cerchio sul segno di integrale: \oint . Quindi il lavoro compiuto da una forza \mathbf{F} lungo un cammino chiuso è indicato con $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Per una forza conservativa tale lavoro è nullo per qualunque percorso chiuso, ossia

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{per ogni percorso chiuso} \quad (9)$$

Un integrale di questo tipo fatto su percorso chiuso è chiamato *circuitazione* di \mathbf{F} .

Invece di fare riferimento a un cammino chiuso, possiamo prendere in considerazione il lavoro compiuto da una forza conservativa lungo percorsi alternativi che congiungono due estremi, diciamo i e f , come mostra la Figura 9.11a. Dal momento che il lavoro compiuto da una forza conservativa lungo un percorso chiuso è nullo, il lavoro compiuto lungo un cammino che va da i a f deve essere esattamente uguale e contrario al lavoro compiuto lungo il percorso di ritorno da f a i . Nella Figura 9.11b, il verso del percorso di ritorno è stato invertito in modo che entrambi i cammini vadano da i a f . Invertire il verso di percorrenza di un cammino è equivalente a sostituire $d\mathbf{r}$ con $-d\mathbf{r}$ e quindi a cambiare il segno dell'integrale. In altri termini,

$$\int_f^i \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Quindi una forza conservativa compie il medesimo lavoro lungo due qualsiasi percorsi che congiungono i punti i e f . Pertanto, *il lavoro compiuto da una forza conservativa è indipendente dal percorso che congiunge gli estremi*. Questa è un'utile definizione alternativa di forza conservativa.

Abbiamo visto nel Capitolo 8 che il lavoro compiuto dalla forza di gravità è indipendente dal percorso. Quindi questa forza è conservativa secondo la nostra definizione generalizzata. Il lavoro compiuto da una forza d'attrito invece dipende in genere dal percorso, e perciò tale forza è non conservativa.

Esempio 9.4

Si confronti il lavoro compiuto dalla forza di attrito cinetico su una cassa di massa 50 kg che viene spinta orizzontalmente (a) quando il percorso è una semicirconferenza di diametro 4 m e (b) quando il percorso è questo stesso diametro. Si assuma $\mu_k = 0.3$.

Soluzione

Dal momento che la cassa viene spinta orizzontalmente, la forza normale deve equilibrare il peso $F_n = mg$. L'intensità dell'attrito è allora $F_a = \mu_k mg$. Per entrambi i percorsi, la forza F_a è opposta allo spostamento infinitesimale di modulo ds lungo il percorso stesso, e $dW = -F_a ds$ è il lavoro mentare compiuto. Integrando si ottiene $W = -F_a s = -\mu_k mgs$, ove s è la lunghezza totale del percorso.

(a) Per il percorso lungo la semicirconferenza, la lunghezza è $s = \frac{1}{2}\pi(4 \text{ m})$ e il lavoro è

$$W = -\mu_k mgs = -(0.3)(50 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)\left(\frac{1}{2}\pi\right)(4 \text{ m}) = -900 \text{ J}$$

(b) Per il percorso rettilineo lungo il diametro, la lunghezza è $s = 4 \text{ m}$, e il lavoro compiuto è $W = -600 \text{ J}$. Il lavoro compiuto dall'attrito è diverso lungo questi due percorsi, e ciò dimostra che l'attrito cinetico è una forza non conservativa.

Energia potenziale. Il lavoro compiuto da una forza conservativa, $X = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, è indipendente dal cammino che congiunge gli estremi. Dal momento che il lavoro dipende dai due estremi, non può che dipendere dai due estremi. Questo tipo di dipendenza dagli estremi può essere messo in luce nel caso della forza (conservativa) di gravità \mathbf{F}_t , che agisce su un corpo, dove $F_t = mg$. Servendoci dell'Equazione (8.9), siamo

$$\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mg(y_f - y_i) = -(mgy_f - mgy_i)$$

Cioè, il lavoro compiuto dalla forza conservativa può essere scritto come differenza tra i valori assunti da una grandezza, $-mgy$ in questo caso, negli estremi. L'equazione scritta sopra è la definizione dell'opposto della variazione dell'energia gravitazionale.

Nello stesso modo si definisce l'energia potenziale per qualunque forza conservativa. La variazione dell'energia potenziale è il lavoro compiuto dalla forza conservativa cambiato di segno. Si tratta della medesima definizione data nell'Equazione (9.3) per un sistema unidimensionale, salvo per il fatto che l'integrale del lavoro compiuto dalla forza conservativa può essere calcolato lungo qualunque cammino che congiunga i punti i e f . Quindi la variazione dell'energia potenziale, $U_f - U_i$, per una forza conservativa \mathbf{F} è data da

$$U_f - U_i = - \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.10)$$

Allora si può affermare che, se una forza è conservativa, esiste una funzione $U(x, y, z)$, chiamata *energia potenziale*, tale che il suo valore in un punto i meno il suo valore nel punto f dà il lavoro compiuto dalla forza qualunque sia la traiettoria seguita dal punto materiale per passare da i a f .

Il lavoro infinitesimo compiuto da una forza in corrispondenza di uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ è, come abbiamo visto, $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$; se la forza \mathbf{F} è conservativa, tale lavoro sarà uguale alla variazione infinitesima dell'energia potenziale, cioè al differenziale della funzione energia potenziale:

$$-dU(x, y, z) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.11)$$

Il differenziale della funzione $U(x, y, z)$ è dato da (vedi Appendice A)

$$dU(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

e il lavoro infinitesimo si può scrivere, sviluppando il prodotto scalare,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

quindi si ha $\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$.

Ne consegue che, per una forza conservativa, le componenti cartesiane della forza sono legate alle derivate parziali dell'energia potenziale:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (9.12)$$

Ricordando la definizione di gradiente di un campo scalare (vedi Paragrafo 2.7), queste tre relazioni scalari si possono scrivere mediante un'unica relazione vettoriale:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}U \quad (9.13)$$

che esprime sinteticamente il legame funzionale fra una qualunque forza conservativa e la propria energia potenziale. Si noti che l'equazione (9.8) non è altro che la (9.13) nel caso unidimensionale.

Spesso è difficile o non comodo verificare la validità della (9.9), cioè che il lavoro compiuto su qualunque percorso chiuso è nullo; per questo è utile avvalersi di una proprietà dei campi vettoriali che abbiamo illustrato nel Paragrafo 2.7. Abbiamo visto che, dato un campo vettoriale, è possibile scriverlo come il gradiente di un campo scalare se e solo se il suo rotore è nullo. Allora, se abbiamo un campo di forze \mathbf{F} , dove per campo di forze si intende una forza definita in una data regione di spazio, tale cam-

Definizione generale della variazione dell'energia potenziale.

po sarà uguale al gradiente di un campo scalare $-U$, cioè varrà la (9.13), se e solo se $\text{rot } \mathbf{F} = 0$. Ricordiamo che il rotore di \mathbf{F} è il vettore

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

il quale risulta nullo se sono nulle le sue tre componenti cartesiane riportate qui sopra.

Sotto alcune condizioni matematiche che sono sempre verificate nei casi che ci interessano (l'insieme di definizione della \mathbf{F} semplicemente connesso¹ e le coppie di derivate seconde miste delle componenti di \mathbf{F} uguali), possiamo affermare che, dato un campo di forze \mathbf{F} , se $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, allora esiste una funzione scalare $U(x, y, z)$ tale che $\mathbf{F} = -\text{grad } U$; in questo caso la forza \mathbf{F} è conservativa e U è la sua energia potenziale.

Si noti che l'energia potenziale è definita a meno di una costante. Infatti le grandezze che si misurano sono il lavoro compiuto da una forza e/o la forza stessa e, come si vede dalle (9.10) e (9.12), se si somma a U una costante si ottengono lo stesso lavoro e la stessa forza. In pratica sono solo le variazioni di energia potenziale che sono misurabili e che, quindi, hanno significato.

In definitiva, per capire se un campo di forze è conservativo, si può operare in due modi del tutto equivalenti: o si fa il rotore della forza o si calcola la circuitazione della stessa per ogni possibile percorso chiuso del campo. Quindi

$$\text{se } \text{rot } \mathbf{F} = 0$$

oppure

$$\text{se } \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

il campo della forza \mathbf{F} è conservativo e si può calcolare la sua energia potenziale o risolvendo le equazioni differenziali (9.12) o calcolando differenze di energia potenziale tramite la (9.10).

Le espressioni delle energie potenziali che abbiamo utilizzato fino ad ora restano invariate. Per un corpo di massa m in prossimità della superficie della Terra, l'energia potenziale gravitazionale è $U = mgy$. Per una molla tesa o compressa in linea retta, l'energia potenziale elastica è $U = \frac{1}{2}kx^2$, ove x è l'allungamento o la compressione della molla.

9.5 LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Possiamo ricavare la conservazione dell'energia meccanica per un corpo che si muove in due o in tre dimensioni esattamente come abbiamo fatto per il moto in una dimensione. In base al teorema lavoro-energia, la variazione dell'energia cinetica di un corpo è pari al lavoro compiuto sul corpo dalla forza risultante: $K_f - K_i = W_{\text{tot}}$. Supponiamo che sul corpo compiano lavoro soltanto forze conservative: il lavoro effettuato da una forza conservativa è indipendente dal percorso ed è pari all'opposto della variazione dell'energia potenziale. Combinando queste conclusioni, abbiamo $K_f - K_i = W_{\text{tot}} = -(U_f - U_i)$. Riordinando quest'ultima espressione otteniamo $K_f + U_f = K_i + U_i$, ossia

$$E_f = E_i \quad (9.14)$$

dove $E = K + U$ è l'energia meccanica del sistema. L'energia meccanica si conserva perché le uniche forze che compiono lavoro sono conservative, e il lavoro totale effettuato può essere scritto come opposto della variazione dell'energia potenziale. Se a

Se a compiere lavoro sono soltanto forze conservative, l'energia meccanica si conserva.

¹ In termini semplici possiamo definire un insieme semplicemente connesso come quell'insieme per cui una qualunque linea chiusa, i cui punti appartengano tutti all'insieme, può essere contratta in un solo punto senza mai uscire dall'insieme. In maniera ancora più semplice e con il linguaggio di tutti i giorni si può dire che è senza "buchi".

compiere lavoro sono soltanto forze conservative, l'energia meccanica del sistema si conserva.

Naturalmente ciò avviene se si osservano i fenomeni da un sistema di riferimento inerziale. Si ricordi, infatti, che il teorema lavoro-energia è stato dimostrato partendo dal secondo principio della dinamica, che è valido nei sistemi inerziali.

L'Equazione (9.14) esprime la conservazione dell'energia meccanica di un sistema in una, due o tre dimensioni. Essa connette il modulo della velocità di un corpo con la sua posizione. Nel corso del moto, tanto l'energia cinetica che l'energia potenziale possono variare, ma la loro somma, $E = K + U$, non cambia mai. Spesso su un corpo viene esercitata una forza normale da parte di una superficie immobile sulla quale il corpo scivola. Tuttavia questa forza normale non compie lavoro perché la forza normale F_n è perpendicolare a qualunque spostamento infinitesimo dr del corpo, e $F_n \cdot dr = 0$. Benché in questo caso la forza normale non sia nulla, è nullo il lavoro compiuto da tale forza. È il *lavoro* compiuto dalla forza, e non la forza stessa, ad essere importante ai fini della conservazione dell'energia meccanica.

Esempio 9.5

Un blocco di massa 2.1 kg viene spinto contro una molla leggera (di massa trascurabile) di costante elastica $k = 2400 \text{ N/m}$, cosicché questa viene compressa di 0.15 m. La molla lancia il blocco su per un piano inclinato di 25° , come mostra la Figura 9.12. Il blocco si arresta momentaneamente nel punto f . Gli attriti sono trascurabili. Si ammetta che il blocco perda contatto con la molla quando questa è rilassata. (a) A quale distanza dal punto i lungo il piano inclinato si trova il punto f ? (b) Quando il blocco ridiscende scivolando lungo il piano inclinato, qual è il modulo della sua velocità a metà strada tra f e i ?

Soluzione

Sul blocco agiscono tre forze: di queste, la forza della molla e il peso sono conservative. La forza normale non compie lavoro, dal momento che è perpendicolare allo spostamento del blocco. Poiché soltanto forze conservative compiono lavoro, l'energia meccanica si conserva. Vi sono due contributi all'energia potenziale, l'energia potenziale elastica della molla e l'energia potenziale gravitazionale. Misuriamo la coordinata verticale y a partire dalla posizione iniziale i , cosicché $y_i = 0$. Il valore iniziale dell'energia potenziale elastica è $\frac{1}{2}(2400 \text{ N/m})(0.15 \text{ m})^2 = 27 \text{ J}$.

(a) Il blocco viene lasciato andare da fermo nel punto i e si arresta in f ; l'energia cinetica è zero in entrambe le posizioni. Sia y_f la coordinata verticale del punto f ; ivi l'energia potenziale gravitazionale è mgy_f . L'energia potenziale elastica è zero nel punto f , perché la molla è rilassata e non c'è contatto tra molla e blocco. La conservazione dell'energia meccanica fornisce $mgy_f = 27 \text{ J} + mgy_i = 27 \text{ J}$. Sostituendo i valori numerici, otteniamo $y_f = 1.3$ per la coordinata verticale del punto f . La distanza s misurata lungo il piano inclinato è connessa a y_f dalla relazione $y_f = s \sin \theta$, ossia

$$s = \frac{1.3 \text{ m}}{\sin 25^\circ} = 3.1 \text{ m}$$

(b) Quando il blocco ridiscendendo arriva a metà strada, la molla rimane rilassata, e i 27 J di energia meccanica sono ripartiti tra energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale. Contrassegnando con l'indice h questo punto, si ha

$$\frac{1}{2}mv_h^2 + mgy_h = 27 \text{ J}$$

con $y_h = \frac{1}{2}y_f = \frac{1}{2}(1.3 \text{ m})$. Risolvendo rispetto a v_h , si ha $v_h = 3.6 \text{ m/s}$.

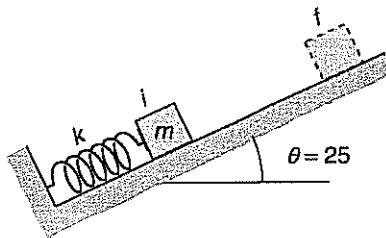


Figura 9.12

Esempio 9.5: una molla lancia un blocco su per un piano inclinato con attrito trascurabile.

Esempio 9.6

Un cubetto di ghiaccio di massa m scivola con attrito trascurabile su un «cerchio della morte» come quello della Figura 9.13. Il cubetto parte da fermo nel punto di ordinata $y_i = 4R$ al di sopra del punto

più basso dello scivolo. (a) Qual è il modulo della sua velocità nel punto f , che è il più alto dell'anello circolare? (b) Qual è la forza normale che viene esercitata sul ghiaccio in tale punto?

Soluzione

In qualunque spostamento infinitesimo del cubetto di ghiaccio lungo lo scivolo, la forza normale non compie lavoro in quanto è perpendicolare allo spostamento. Essendo gli attriti trascurabili, il lavoro compiuto soltanto dal peso del cubetto di ghiaccio, e tale forza è conservativa. Quindi nel moto considerato l'energia meccanica si conserva.

(a) Nel punto i la velocità v_i è nulla e $y_i = 4R$. Nel punto f la velocità è da determinare e $y_f = 2R$. Applicando l'Equazione (9.14), uguagliamo l'energia meccanica nei punti i e f :

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

ossia,

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mg(2R) = 0 + mg(4R)$$

L'energia cinetica nel punto f è allora

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = 2mgR$$

e il modulo della velocità è $v_f = \sqrt{4gR}$.

(b) Nel punto f tanto la forza normale esercitata dallo scivolo che il peso del cubetto sono diretti verso il basso. Insieme essi forniscono la forza centripeta, di intensità mv^2/R , necessaria perché venga percorsa una traiettoria circolare. In base alla seconda legge di Newton, $\Sigma F = ma$:

$$F_n + mg = \frac{mv^2}{R}$$

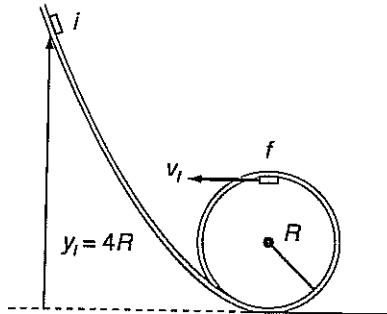
Dalla parte (a) abbiamo

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = 2mgR$$

ossia $mv_f^2 = 4mgR$ e $mv_f^2/R = 4mg$. In questo punto la forza centripeta è pari a 4 volte il peso. Sostituendo questo valore e ricavando la forza normale si ha $F_n = 4mg - mg = 3mg$. Alla luce delle risposte ottenute, si può concludere che quanto più basso è il punto di partenza i , tanto minori sono i moduli della velocità nel punto f e la forza normale esercitata dallo scivolo. Un problema interessante che si pone a questo punto è: qual è l'altezza minima dalla quale il cubetto può essere lasciato andare in modo che rimanga a contatto dello scivolo nel punto f ? Si veda in proposito il Problema 9.6.

Figura 9.13

Esempio 9.6: un cerchio della morte.



9.6 FORZE NON CONSERVATIVE E LAVORO INTERNO

In ciascuno degli esempi discussi nell'ultimo paragrafo, abbiamo avuto cura di rilevare che a compiere lavoro erano soltanto forze conservative. Se una forza non conservativa, come per esempio un attrito, compie lavoro su un corpo, l'energia meccanica non si conserva: in questo caso l'energia meccanica può variare durante il moto del corpo.

Forze non conservative. Per comprendere come l'energia meccanica possa variare, partiamo dal teorema lavoro-energia, $K_f - K_i = W_{\text{tot}}$, che è valido per tutte le forze, sia non conservative che conservative. Dividiamo il lavoro totale compiuto da tutte le forze che agiscono sul corpo in due contributi, $W_{\text{tot}} = W_{\text{con}} + W_{\text{non}}$. Il primo contributo è il lavoro compiuto dalle forze conservative, il quale è pari alla variazione dell'energia potenziale cambiata di segno: $W_{\text{con}} = -(U_f - U_i)$. Il secondo contributo è il lavoro compiuto dalle forze non conservative, W_{non} . Tale lavoro non può essere

Il lavoro compiuto da una forza non conservativa dipende dal percorso.

espresso in generale perché il suo valore dipende dai particolari del moto del corpo. Per calcolare W_{non} , occorre conoscere sia la traiettoria che il modo in cui varia la forza lungo di essa.

Suddividendo W_{tot} nella parte conservativa e in quella non conservativa, possiamo scrivere

$$K_f - K_i = W_{\text{tot}} = W_{\text{con}} + W_{\text{non}} = -(U_f - U_i) + W_{\text{non}}$$

Riordiniamo l'equazione in modo da portare il termine $K_f + U_f$ al primo membro e il termine $K_i + U_i$ al secondo membro:

$$K_f + U_f = K_i + U_i + W_{\text{non}}$$

Dal momento che $E_f = K_f + U_f$ è l'energia meccanica nel punto f ed $E_i = K_i + U_i$ è l'energia meccanica nel punto i ,

$$E_f = E_i + W_{\text{non}} \quad (9.15)$$

Questa è una forma modificata del teorema lavoro-energia. Da tale equazione si desume che la variazione dell'energia meccanica, $E_f - E_i$, è pari al lavoro compiuto dalle forze non conservative lungo il percorso da i a f . Si può prendere in considerazione come caso particolare quello in cui $W_{\text{non}} = 0$ (le forze non conservative non compiono lavoro): allora $E_f = E_i$, e si riottiene la conservazione dell'energia meccanica.

Il teorema lavoro-energia modificato fornisce una descrizione del moto del corpo se, in un caso specifico, si è in grado di valutare il lavoro compiuto dalle forze non conservative. Mettendo in relazione la variazione dell'energia cinetica e quella dell'energia potenziale, il teorema connette i valori della velocità e della posizione del corpo. In alternativa, se si conosce il modulo della velocità del corpo in due posizioni i e f , si può calcolare il lavoro compiuto dalle forze non conservative. Quest'ultima possibilità è illustrata dall'esempio seguente.

Il teorema dell'energia cinetica modificato.

Esempio 9.7

Una bambina della massa di 17 kg parte da ferma dal punto più elevato di uno scivolo alto 2.0 m, come mostra la Figura 9.14. Il modulo della sua velocità in fondo allo scivolo è di 4.2 m/s. Quanto lavoro è stato effettuato dalle forze d'attrito?

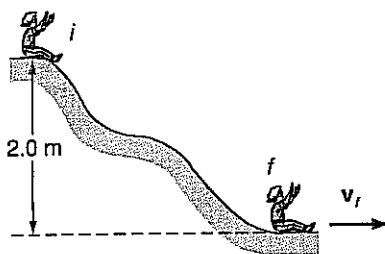


Figura 9.14
Esempio 9.7: una bambina su uno scivolo.

Soluzione

Le forze che agiscono sulla bambina sono il suo peso, che è conservativo; una forza normale esercitata dalla superficie dello scivolo, forza che non compie lavoro; e le forze d'attrito non conservative dovute alla superficie dello scivolo nonché alla resistenza dell'aria. Applichiamo l'Equazione (9.15), ponendo $y_f = 0$ e $v_f = 4.2 \text{ m/s}$ e quindi $y_i = 2.0 \text{ m}$ e $v_i = 0$. Siccome $U_f = 0$ e $K_i = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} W_{\text{non}} &= E_f - E_i = K_f - U_i = \\ &= \frac{1}{2} (17 \text{ kg}) (4.2 \text{ m/s})^2 - (17 \text{ kg}) (9.8 \text{ m/s}^2) (2.0 \text{ m}) \\ &= -180 \text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro negativo compiuto dall'attrito corrisponde alla diminuzione dell'energia meccanica del sistema.

Lavoro interno. Nell'applicare i metodi basati sul lavoro e l'energia, abbiamo concentrato la nostra attenzione sul caso di un singolo corpo inerte sul quale agiscono delle forze esterne. Nella situazione illustrata dalla Figura 9.12, per esempio, l'oggetto descritto è il blocco: le forze esterne sono esercitate dalla Terra, dalla molla e dalla super-

ficie del piano inclinato. A parte il fatto di cambiare posizione e velocità, il blocco rimane immutato; esso viene cioè trattato come punto materiale.

Ma è possibile prendere in considerazione anche corpi più complicati, che subiscono mutamenti nella loro costituzione, nella composizione o nella forma. Supponiamo che un atleta si arrampichi con le mani su una fune verticale fissa con una velocità costante. L'energia potenziale gravitazionale dell'atleta, $U = mgy$, aumenta. Dal momento che l'energia cinetica è costante, l'energia meccanica, $E = K + U$, aumenta anch'essa. Eppure la fune non compie lavoro sull'atleta: benché la fune eserciti una forza sulla mano, la mano *non si muove* mentre tiene la fune.

Il lavoro interno è compiuto dalle forze interne.

Da che cosa dipende l'aumento dell'energia meccanica dell'atleta? Che cosa fornisce il lavoro? In questo caso sono i muscoli dell'atleta che, contraendosi, compiono il lavoro; cioè, le braccia compiono lavoro sollevando il resto del corpo. Forze come queste sono interne al corpo o al sistema invece che esterne. Il lavoro compiuto da forze interne esercitate da una parte di un sistema su un'altra parte viene detto *lavoro interno*. Quando si studiano le variazioni dell'energia meccanica di un sistema, si deve tener conto del lavoro interno compiuto da eventuali forze interne.

9.7 LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Avendo preso in considerazione un certo numero di esempi nei quali l'energia meccanica si conserva, possiamo esserci abituati a pensare all'energia come a un grandezza che si conserva in generale. Se l'energia meccanica di un sistema non si conserva perché delle forze non conservative compiono lavoro, tendiamo a motivare la sua variazione. Per esempio, se l'energia meccanica aumenta, cerchiamo la fonte di tale incremento; se l'energia meccanica diminuisce, cerchiamo questa energia sotto un'altra forma o in un altro luogo.

Supponiamo che una cassa riceva una spinta che la faccia scivolare su un pavimento orizzontale con una velocità iniziale di modulo v_i . L'energia meccanica iniziale è $E_i = K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$. A causa dell'attrito la cassa rallenta e si ferma; la sua energia meccanica si è ridotta a zero. Tale perdita di energia meccanica può essere interpretata in termini del lavoro compiuto dalla forza d'attrito non conservativa, $E_f - E_i = W_{\text{non}}$ per l'Equazione (9.15). Possiamo interpretare la diminuzione di energia meccanica della cassa come un processo di conversione dell'energia, nel quale l'energia meccanica viene convertita in qualche altra forma di energia. Secondo questa interpretazione, la quantità totale di energia rimane invariata; soltanto la sua forma cambia. Che nome dare a questo nuovo tipo di energia? In base alle nostre esperienze quotidiane delle forze d'attrito, ci attendiamo che l'energia trasformata sia associata con dei mutamenti della cassa e del pavimento: in particolare, le misure dimostrano che la temperatura di queste superfici ha subito un incremento. Questa energia viene chiamata *energia interna* del sistema formato dalla cassa e dal pavimento. L'aumento dell'energia interna è uguale alla diminuzione dell'energia meccanica. In questo modo l'energia totale del sistema risulta conservata. L'energia interna di un sistema e la sua relazione con la temperatura e il «calore» saranno discusse in modo più approfondito nel Capitolo 17. Per il momento possiamo pensare all'energia interna di un sistema come all'energia cinetica e potenziale delle molecole di quel sistema.

L'energia interna di un sistema: energia cinetica e potenziale delle molecole.

L'energia interna, che è energia a livello molecolare, ha un carattere differente dall'energia cinetica e potenziale di un corpo come una palla. È facile convertire l'energia potenziale di una palla in energia cinetica: basta lasciarla cadere. È facile anche convertire l'energia meccanica in energia interna del sistema palla-pavimento. Dopo alcuni rimbalzi la palla si ferma: la sua energia meccanica iniziale si è convertita in energia interna della palla e del pavimento. Ma il processo inverso, la conversione dell'energia interna in energia meccanica non è semplice. Non ci aspettiamo certo che una palla inizialmente ferma sul pavimento riduca spontaneamente la propria energia interna e si sollevi dal pavimento. La conversione appena descritta dell'energia meccanica in energia interna è associata con il lavoro compiuto da forze non conservative come l'attrito.

Questi processi hanno un carattere unidirezionale, a senso unico, e sono spesso chiamati *processi dissipativi*, poiché in essi l'energia meccanica viene dissipata nell'energia interna del sistema.

Generalizziamo le idee che abbiamo introdotto. Si consideri un *sistema chiuso*, o *isolato*, cioè un sistema sul quale nessun corpo esterno compie lavoro. Tra il sistema e il suo ambiente non si verifica alcuno scambio di energia. Identifichiamo i vari tipi di energia presenti nel sistema: c'è l'energia cinetica di ciascuna componente macroscopica in moto del sistema; ci può essere energia potenziale dovuta alle proprietà elastiche di qualche molla e alle forze gravitazionali; abbiamo già visto che è necessario tener conto dell'energia interna delle varie parti del sistema; altri contributi identificabili all'energia totale possono essere quelli dell'energia acustica, dell'energia elettrica, dell'energia chimica, dell'energia nucleare, e così via: in breve, andrebbero considerate tutte le forme di energia suscettibili di variare nel tempo. Sommiamo tutti questi contributi calcolati a un certo istante, e chiamiamo tale somma *energia totale* del sistema. La legge di conservazione dell'energia afferma che l'*energia totale di un sistema isolato si conserva*. I vari contributi all'energia totale possono cambiare con il tempo, in seguito a trasformazioni di un tipo di energia nell'altro, ma la loro somma non varia.

Non abbiamo dimostrato la legge di conservazione dell'energia. Si tratta di una legge nello stesso senso in cui la seconda legge di Newton è una legge di natura: la accettiamo cioè come vera o come valida a condizione che non ne venga osservata alcuna violazione. In questo senso costituisce un principio fisico: il principio di conservazione dell'energia. Per quanto ne sappiamo, non si è mai verificata alcuna violazione. In effetti, la nostra fiducia in questa legge è così forte che, quando vengono osservate delle apparenti violazioni, ci mettiamo alla ricerca di una qualche forma di energia precedentemente sconosciuta da far entrare nel bilancio. Fu in questo modo che venne proposta l'ipotesi dell'esistenza del neutrino, una particella subatomica.

La legge di conservazione dell'energia.

Esempio 9.8

Una palla di stucco di massa pari a 2.5 kg viene lasciata cadere da un'altezza di 2.0 m al di sopra di un pavimento fisso. Colpendo il pavimento, lo stucco vi si attacca. Illustrare le trasformazioni dell'energia che si verificano durante il moto.

Soluzione

Prendiamo come sistema isolato l'insieme costituito dallo stucco, dal pavimento, dalla Terra e dalla sua atmosfera. Dal momento che lo stucco viene lasciato cadere a partire dalla quiete, $K_i = 0$ e $U_i = mgy_i \cdot y_i$ è misurata a partire dal livello del pavimento, e

$$E_i = U_i = (2.5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m}) = 49 \text{ J}$$

Una volta fermo ($v_f = 0$) sul pavimento ($y_f = 0$), lo stucco ha energia meccanica nulla. Dobbiamo rendere conto dei 49 J di energia meccanica che sono stati trasformati in altre forme di energia del sistema. Una piccola frazione dell'energia è acustica; possiamo udire il rumore dello stucco che colpisce il pavimento. A causa degli effetti dissipativi della resistenza dell'aria e della deformazione dello stucco, la maggior parte dei 49 J si ritrova sotto forma di incremento dell'energia interna, rivelato da aumenti di temperatura di parti del sistema.

9.8 IL MOTO DEI SATELLITI E LA VELOCITÀ DI FUGA

Per calcolare l'energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa m vicino alla superficie della Terra, dove il peso è approssimativamente costante, ci siamo serviti della relazione $U = mgy$. Ma per un corpo come un satellite artificiale o una sonda interplanetaria, che non è vicino alla superficie terrestre, si deve usare un'espressione più generale per l'energia potenziale gravitazionale.

La legge di gravitazione universale di Newton determina la forza attrattiva esercitata da un punto materiale su un altro punto materiale. Nel caso di due corpi estesi, se essi sono dotati di simmetria sferica e non si intersecano, la forza ha la medesima espressione, come mostra la Figura 9.15 per due corpi di massa m e M . Per l'Equazione (7.2), l'intensità della forza è

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

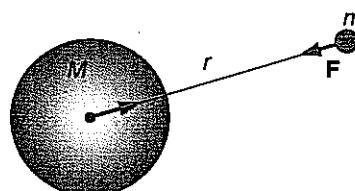
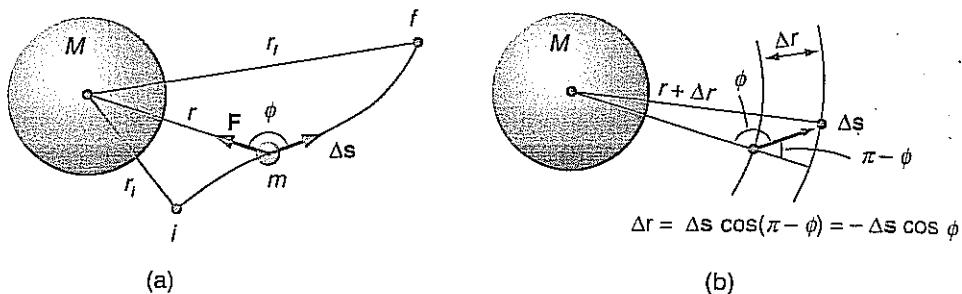


Figura 9.15

Le forze gravitazionali che si esercitano tra due corpi a simmetria sferica.

Figura 9.16

(a) Un corpo di massa m si muove lungo una traiettoria arbitraria che congiunge i punti i e f . (b) La variazione della distanza di separazione r è $\Delta r = |\Delta s| \cos(180^\circ - \phi) = -|\Delta s| \cos \phi$.



dove r è la distanza tra i due centri. Per determinare l'energia potenziale gravitazionale, dobbiamo calcolare il lavoro compiuto da questa forza su uno dei corpi quando esso si muove rispetto all'altro.

Cominciamo a constatare che la forza gravitazionale è conservativa, ossia che il lavoro compiuto da questa forza è indipendente dalla traiettoria. La Figura 9.16a rappresenta un piccolo spostamento Δs (esagerato per chiarezza), e la forza agente sul corpo di massa m , forza che è diretta lungo la retta passante per i due corpi. La Figura 9.16b mostra che lo spostamento Δs fa variare la distanza tra i due corpi da r a $r + \Delta r$, dove

$$\Delta r = |\Delta s| \cos(\pi - \phi) = -|\Delta s| \cos \phi$$

Il lavoro compiuto da \mathbf{F} in corrispondenza di questo spostamento è $\mathbf{F} \cdot \Delta s = F|\Delta s| \cos \phi = -F\Delta r$. Quindi tale lavoro dipende soltanto dalla distanza r tra i centri (distanza di separazione) e dalla variazione Δr di questa, ma non dallo spostamento in direzione perpendicolare alla retta che congiunge i due corpi. È questa caratteristica che rende il lavoro indipendente dalla traiettoria (si veda il Problema 9.5). Per una traiettoria generica il lavoro compiuto è dato dall'integrale

$$W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{r_i}^{r_f} G \frac{Mm}{r^2} dr = -GMm \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{r^2} dr = GMm \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

La variazione dell'energia potenziale gravitazionale di questo sistema è l'opposto del lavoro compiuto dalla forza gravitazionale, $U_f - U_i = -W$, per l'Equazione (9.10). Se la distanza di due corpi varia da r_i a r_f , la differenza di energia potenziale è

$$U_f - U_i = -GMm \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \quad (9.16)$$

Dal momento che la distanza r dei due corpi può essere arbitrariamente grande, si adotta la convenzione di attribuire all'energia potenziale il valore zero quando r è infinita. Fatta questa scelta, l'energia potenziale gravitazionale dei due corpi posti a una distanza r è

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (9.17)$$

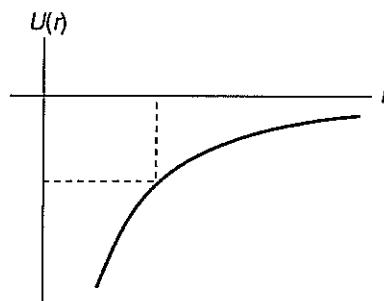
L'Equazione (9.17), che è rappresentata graficamente nella Figura 9.17, comporta che, al tendere all'infinito della distanza r , l'energia potenziale $U(r)$ tenda a zero. Dal momento che si è scelto di far corrispondere lo zero dell'energia potenziale a una distanza infinita tra i due corpi, l'energia potenziale a distanze finite è minore di zero, ossia negativa. L'energia potenziale $U(r)$ aumenta all'aumentare della distanza r .

La differenza di energia potenziale gravitazionale.

L'energia potenziale gravitazionale per due corpi posti a una distanza r .

Figura 9.17

L'energia potenziale gravitazionale $U = -GMm/r$ è negativa, e tende a zero quando la distanza tende all'infinito. Al crescere di r , U aumenta.



Si veda l'Esercizio 9.40 per quanto riguarda la connessione tra le Equazioni (9.16) e (9.17) e il caso particolare di un corpo prossimo alla superficie della Terra, per il quale l'energia potenziale è mgy .

Consideriamo ora un satellite artificiale di massa m in orbita intorno alla Terra. Ammettiamo che il satellite possa essere trattato come un punto materiale e che la Terra abbia simmetria sferica e massa m_t . L'energia potenziale gravitazionale è data dall'Equazione (9.17) con $M = m_t$, $U(r) = -Gm_t m / r$. Se l'orbita è ellittica, r e $U(r)$ varieranno; poiché l'energia meccanica si conserva (sul satellite agisce soltanto la forza di gravità), $K + U = E$, ossia

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{Gm_t m}{r}\right) = E$$

All'aumentare di r , l'energia potenziale aumenta e l'energia cinetica diminuisce. Il satellite si muove più lentamente quando è più lontano dalla Terra, e più rapidamente quando è più vicino ad essa.

Nel caso particolare di un'orbita circolare, l'energia potenziale e l'energia cinetica rimangono entrambe costanti. In tal caso siamo in grado di determinare i valori dell'energia cinetica e dell'energia meccanica: la forza centripeta è fornita dalla forza gravitazionale, e la seconda legge di Newton, $ma = \Sigma F$, dà

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm_t m}{r^2}$$

Moltiplicando i due membri di questa equazione per $\frac{1}{2}r$ otteniamo

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\frac{1}{2}Gm_t m}{r}$$

L'energia cinetica del satellite è pari alla metà del valore assoluto dell'energia potenziale, $K = \frac{1}{2}(-U)$.

L'energia meccanica è $E = K + U = \frac{1}{2}Gm_t m / r + (-Gm_t m / r)$, ossia

$$E = -\frac{\frac{1}{2}Gm_t m}{r} \quad (9.18)$$

L'energia di un satellite in un'orbita circolare.

Il segno negativo è una conseguenza della convenzione per cui si fa corrispondere lo zero dell'energia potenziale a una distanza infinita tra i due corpi. L'energia meccanica di un satellite in orbita è minore di zero.

Facciamo il confronto con un corpo libero, cioè non soggetto all'attrazione terrestre, con $r \rightarrow \infty$. Poiché per il corpo libero $U \rightarrow 0$ e $K \geq 0$, l'energia meccanica $E = K + U \geq 0$. Pertanto un satellite in orbita ha meno energia che se fosse libero, ed è quindi *legato* alla Terra. Il valore assoluto della sua energia meccanica viene chiamato *energia di legame* del satellite. Si tratta dell'energia che bisognerebbe fornire al satellite per liberarlo dall'influsso gravitazionale della Terra. Per un'orbita circolare, l'energia di legame è $|E| = \frac{1}{2}Gm_t m / r$.

Supponiamo di fornire a un corpo energia sufficiente per sfuggire alla Terra. C'è una velocità minima, o *velocità di fuga*, che il corpo deve avere, e tale velocità dipende dalla sua posizione iniziale. Possiamo determinare la velocità di fuga servendoci della conservazione dell'energia meccanica, $E_f = E_i$.

Per sfuggire, il corpo deve poter arrivare con velocità nulla ($K_f = 0$) a distanza infinita dalla Terra ($U_f = 0$). Vale a dire che la sua energia meccanica $E_f = K_f + U_f$ deve essere zero. Il corpo inizialmente a distanza r_i ($U_i = -Gm_t m / r_i$) dalla Terra pos-

siede la velocità di fuga v_i ($K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$) corrispondente alla sua posizione iniziale se

L'energia di legame di un satellite.

Velocità di fuga dalla Terra.

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + (-Gm_t m/r_i) = 0. \text{ Quindi}$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2Gm_t}{r_i}} \quad (9.19)$$

è la velocità di fuga dalla posizione r_i . Si noti che la velocità di fuga dipende dalla massa della Terra ma non dalla massa del corpo che si allontana.

Esempio 9.9

Un satellite artificiale di massa 150 kg si muove in un'orbita circolare di raggio 7.3 Mm intorno alla Terra. Calcolare (a) l'energia potenziale, l'energia cinetica e l'energia meccanica e (b) la velocità orbitale. (c) Qual è la velocità di fuga da questa altezza?

Soluzione

(a) L'energia potenziale, $U = -Gm_t m/r$ è

$$U = -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{kg}^{-2})(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(150 \text{ kg})}{7.3 \text{ Mm}} \\ = -8.2 \times 10^9 \text{ J} = -8.2 \text{ GJ}$$

L'energia cinetica è pari alla metà del valore assoluto dell'energia potenziale, $K = \frac{1}{2}(-U) = 4.1 \text{ GJ}$. L'energia meccanica è

$$E = K + U = 4.1 \text{ GJ} + (-8.2 \text{ GJ}) = -4.1 \text{ GJ}$$

(b) Dall'energia cinetica possiamo ricavare la velocità orbitale:

$$v = \sqrt{2k/m} = 7.4 \text{ km/s}$$

(c) La velocità di fuga si ottiene dall'Equazione (9.19):

$$v_i = \sqrt{\frac{2Gm_t}{r_i}} = 10 \text{ km/s}$$

Esempio 9.10

Si consideri una forza che, in un sistema di riferimento inerziale, è sempre diretta verso un punto fisso O . Forze di questo tipo sono chiamate forze centrali. Supponiamo che una forza di questo tipo sia anche a simmetria sferica, cioè tale per cui la sua intensità dipenda solo dalla distanza r dal punto fisso. Forze di questo tipo, centrali e a simmetria sferica, sono di particolare importanza: la forza gravitazionale e la forza elettrostatica appartengono a tale categoria. Per poter scrivere in forma semplice l'espressione matematica di una forza centrale e a simmetria sferica, consideriamo un sistema di riferimento con origine nel punto fisso O . La posizione di un qualunque altro punto nello spazio sarà determinata dal vettore di posizione \mathbf{r} . Allora, per essere centrale, la forza dovrà avere la direzione di \mathbf{r} (cioè essere esprimibile come una funzione scalare per il versore $\frac{\mathbf{r}}{r}$) e, per essere a simmetria sferica, dovrà avere un modulo che è funzione solo della distanza r , cioè del modulo di \mathbf{r} , ($f(r)$). Possiamo, quindi, esprimere una forza centrale e a simmetria sferica in modo generale come

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Si dimostri che tutte le forze centrali e a simmetria sferica sono conservative.

Soluzione

Chiamando $\hat{\mathbf{u}}_r$ il versore $\frac{\mathbf{r}}{r}$, l'espressione precedente si può scrivere $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{u}}_r$. Allora il lavoro compiuto da una forza siffatta per far passare un punto materiale da un punto A a un punto B è dato da $L_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B f(r)\hat{\mathbf{u}}_r \cdot d\mathbf{r}$. Poiché $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r$, si ha $d\mathbf{r} = dr\hat{\mathbf{u}}_r + r d(\hat{\mathbf{u}}_r)$, dove $d(\hat{\mathbf{u}}_r)$ è un vettore perpendicolare a $(\hat{\mathbf{u}}_r)$, quindi il prodotto scalare fra $d(\hat{\mathbf{u}}_r)$ e $d\mathbf{r}$ è sempre nullo e allora $\hat{\mathbf{u}}_r \cdot d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{u}}_r \cdot dr\hat{\mathbf{u}}_r = dr$. Dalla Figura 9.16 si vede chiaramente che solo la variazione della distanza r contribuisce al lavoro e quindi $d(\hat{\mathbf{u}}_r)$ deve essere perpendicolare a $\hat{\mathbf{u}}_r$; questo fatto è generale, cioè la derivata di un versore (e quindi anche il suo differenziale) è un vettore con direzione perpendicolare al versore stesso. Risulta quindi $L_{AB} = \int_A^B f(r)dr$. Con l'unica condizione che la funzione $f(r)$ sia integrabile (ammetta primitiva), cosa che nella fisica che noi trattiamo succede sempre, si ha che tale integrale è uguale a una funzione di r calcolata in B meno la stessa funzione calcolata in A , cioè

non dipende dal percorso ma solo da A e da B . Questa è la condizione che permette di affermare che la forza è conservativa. In particolare, se chiamiamo $-U$ la funzione primitiva di $f(r)$, si può scrivere che tale lavoro è uguale a $L_{AB} = U_A - U_B$; tale funzione U è pertanto proprio l'energia potenziale. Quindi tutte le forze centrali e a simmetria sferica sono conservative e le variazioni delle loro energie potenziali si possono calcolare come

$$U_A - U_B = \int_A^B f(r) dr$$

Per esempio, per la forza gravitazionale, dall'espressione precedente si ottiene la (9-19) e quindi l'energia potenziale gravitazionale. ■

Esempio 9.11

Un razzo di massa m (supponiamo, per semplicità, che rimanga costante durante il moto) si allontana dalla Terra (di massa M_T e raggio R_T), secondo la direzione radiale, mantenendo un'accelerazione costante, anch'essa radiale. Sia v il modulo della sua velocità alla partenza dalla superficie terrestre e sia il doppio a una distanza dalla superficie uguale al raggio terrestre. Trovare il lavoro compiuto dal motore del razzo durante il tragitto.

Soluzione

Sul razzo agisce la forza gravitazionale, che è conservativa, e agisce il motore compiendo un lavoro per farlo passare a una posizione con un'energia potenziale maggiore. Applicando la conservazione dell'energia si avrà che l'energia meccanica posseduta dal razzo all'istante della partenza e quella che ha a R_T dalla superficie differiranno dell'energia fornita dal motore, cioè dal lavoro compiuto dallo stesso.

All'istante iniziale si ha

$$U_i = -\frac{GM_T m}{R_T} \quad \text{e} \quad K_i = \frac{1}{2} mv^2$$

e all'istante finale si ha

$$U_f = -\frac{GM_T m}{R_T + R_T} \quad \text{e} \quad K_f = \frac{1}{2} m(2v)^2.$$

Quindi dalla conservazione dell'energia si ha $U_i + K_i + L_{motore} = U_f + K_f$, da cui ne discende che

$$L_{motore} = -\frac{GM_T m}{2R_T} + 2mv^2 + \frac{GM_T m}{R_T} - \frac{1}{2} mv^2 = \frac{GM_T m}{2R_T} + \frac{3}{2} mv^2. \quad \blacksquare$$

RIEPILOGO

Paragrafo 9.2 Sistemi conservativi unidimensionali

Una forza è conservativa se il lavoro che compie è nullo per un percorso di andata e ritorno. In un sistema conservativo unidimensionale, il lavoro è compiuto soltanto da forze conservative, e l'energia meccanica, $E = K + U$, si conserva. L'energia potenziale è un'energia di posizione. Due tipi di energia potenziale sono l'energia potenziale gravitazionale,

$$U = mgy \quad (9.5)$$

e l'energia potenziale elastica di una molla tesa o compressa,

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (9.7)$$

Paragrafo 9.3 Analisi grafica dei sistemi conservativi

Il moto di un corpo può essere analizzato su un grafico della funzione energia potenziale. Su tale grafico possono essere individuati i punti di inversione del moto e i punti di equilibrio.

Paragrafo 9.4 Forze conservative ed energia potenziale in tre dimensioni

In generale, una forza è conservativa se il lavoro che essa compie è indipendente dal percorso che congiunge gli estremi i ed f del moto. La variazione dell'energia potenziale è l'opposto del lavoro compiuto dalla forza conservativa.

Un altro modo per capire se una forza è conservativa è farne il rotore, e se $\nabla F = 0$ allora la forza F è conservativa e la sua

energia potenziale U è tale che $\nabla U = -F$.

Paragrafo 9.5 La conservazione dell'energia meccanica
Se a compiere lavoro sono soltanto forze conservative, l'energia meccanica del sistema si conserva. La conservazione dell'energia meccanica può essere usata per determinare alcune caratteristiche del moto del sistema.

Paragrafi 9.6 Forze non conservative e lavoro interno; 9.7 La legge di conservazione dell'energia

Il lavoro compiuto da forze non conservative e da forze interne a un sistema può far variare l'energia meccanica. L'energia totale di un sistema è la somma dei vari tipi di energia, fra i quali l'energia cinetica, quella potenziale e quella interna. Le trasformazioni dell'energia obbediscono alla legge di conservazione dell'energia: in un sistema isolato l'energia totale si conserva.

Paragrafo 9.8 Il moto dei satelliti e la velocità di fuga
L'energia potenziale gravitazionale per due oggetti dotati di simmetria sferica separati da una distanza r è data da

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (9.17)$$

dove M e m sono le masse. Un satellite artificiale è legato alla Terra e la sua energia meccanica è negativa. Un corpo per poter sfuggire all'attrazione della Terra deve avere una velocità minima, che è chiamata velocità di fuga.

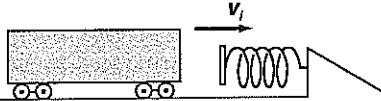
QUESITI

- 9.1** C'è qualche cosa che viene conservato da una forza conservativa? Spiega.
- 9.2** La forza d'attrito statico è conservativa o non conservativa? Spiega.
- 9.3** In quali circostanze una forza normale esercitata da una superficie su un corpo può compiere lavoro? Questo lavoro dipende dal percorso? Spiega.
- 9.4** Considera un'automobile che viaggia con velocità costante sulla superficie piana di una strada. Quali trasformazioni dell'energia si verificano?
- 9.5** Quando un'automobile si mette in movimento, da dove viene la sua energia cinetica?
- 9.6** Una paracadutista si lancia da un aereo a una quota di 3000 m e apre immediatamente il paracadute. Che cosa accade della sua energia potenziale mentre scende con una velocità relativamente bassa?
- 9.7** Se 1.0 kg di acqua subisce una variazione di temperatura di 1.0 °C, la sua energia interna varia di circa 4.2 kJ. A che cambiamento di quota corrisponderebbe una uguale variazione dell'energia potenziale gravitazionale?
- 9.8** Saresti capace di accendere un fuoco strofinando l'uno contro l'altro due bastoncini (che non siano fiammiferi)? Illustra le trasformazioni dell'energia che intervengono nel tentativo.
- 9.9** Perché nella definizione dell'energia potenziale data nell'Equazione (9.3) compare un segno negativo? Supponendo che invece essa fosse positiva, quali importanti conseguenze ne deriverebbero?
- 9.10** Come è possibile che l'energia potenziale gravitazionale (a) sia positiva (mgy) per un corpo al di sopra della superficie terrestre ma vicino ad essa e (b) sia invece negativa ($-Gm_1m_2/r$) per un corpo in qualsiasi posizione al di sopra della superficie della Terra?
- 9.11** Per un corpo vicino alla superficie terrestre, la componente y della forza è sempre negativa, $F_y = -mg$, mentre l'energia potenziale può essere sia positiva che negativa, $U = mgy$. Quali sono le corrispondenti affermazioni che possono essere fatte per un corpo collegato a una molla che obbedisce alla legge di Hooke?
- 9.12** L'energia meccanica si conserva se a compiere lavoro sono soltanto forze conservative. Supponiamo che nessuna forza compia lavoro: l'energia meccanica si conserva? Spiega.
- 9.13** Spesso si dice che l'energia potenziale è energia immagazzinata, come nel caso dell'energia potenziale gravitazionale dell'acqua trattenuta da una diga. L'energia cinetica può essere considerata energia immagazzinata? Spiega.
- 9.14** L'energia potenziale gravitazionale e l'energia cinetica possono trasformarsi l'una nell'altra. Anche l'energia potenziale elastica di una molla e l'energia cinetica possono trasformarsi l'una nell'altra. È possibile che l'energia potenziale elastica si converta direttamente in energia potenziale gravitazionale? Spiega.
- 9.15** Valuta la variazione della tua energia potenziale gravitazionale nel salire dal primo al secondo piano di grande magazzino (a) con la scala mobile, (b) con l'ascensore, (c) facendo le scale a tutta velocità.
- 9.16** Individua in ciascuno dei casi proposti nel quesito precedente le trasformazioni energetiche che portano all'aumento dell'energia potenziale gravitazionale.
- 9.17** Stabilisci un'analogia tra le trasformazioni dell'energia le operazioni finanziarie in cui intervengono monete, banconote, assegni, prestiti e altre forme di proprietà e passività.
- 9.18** Considera un satellite che può muoversi su diverse orb circolari di differente raggio. Perché il modulo della velocità del satellite aumenti, la sua energia meccanica deve aumentare o diminuire? Spiega.
- 9.19** Quale distanza dalla Terra deve raggiungere un corpo per essere *completamente* libero dalla sua attrazione gravitazionale? Che cosa intendi per *completamente* libero? Le tue risposte dipendono dalla posizione del corpo rispetto ad altri oggetti del sistema solare? Spiega.
- 9.20** Considera due satelliti di massa m in due orbite circolari di raggi r_1 e r_2 , con $r_1 < r_2$. Quale dei due ha la maggiore (a) energia cinetica, (b) energia potenziale, (c) energia meccanica, (d) energia di legame?
- 9.21** L'espressione dell'energia potenziale gravitazionale da dall'Equazione (9.14) si basa sull'ipotesi che entrambi i corpi abbiano simmetria sferica. Ammettiamo che la Terra abbia simmetria sferica. Solitamente i satelliti hanno simmetria sferica? E la Luna? Spiega perché la forma di un satellite artificiale non è importante quando si considera l'energia potenziale.
- 9.22** Si completi la seguente tabella:

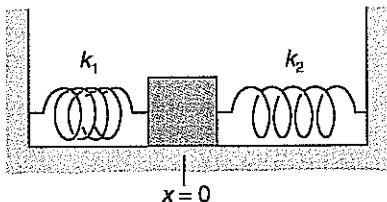
Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
U			J
$U_f - U_i$			
E			
$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$			
mgy	Energia potenziale gravitazionale		
$-GMm/r$		Scalare	
$\frac{1}{2}kx^2$			

ESERCIZI

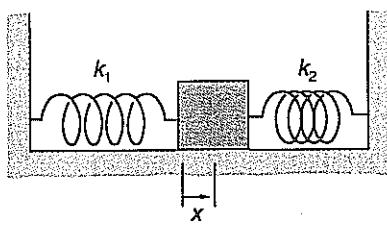
Paragrafo 9.2 Sistemi conservativi unidimensionali

- 9.1 Un sasso di massa 0.55 kg viene lanciato verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale di modulo $v_i = 14 \text{ m/s}$. La resistenza dell'aria è trascurabile. (a) Calcolare l'energia meccanica del sistema. (b) Qual è l'energia potenziale quando il sasso raggiunge il punto più alto della sua traiettoria? (c) Qual è l'altezza di questo punto?
- 9.2 Un ciottolo di massa 0.22 kg viene lanciato verso il basso con una velocità iniziale di 12 m/s da un ponte alto 15 m sopra la superficie dell'acqua. Gli effetti della resistenza dell'aria sono trascurabili. (a) Determinare l'energia meccanica del sistema. (b) Qual è il modulo della velocità con cui il ciottolo tocca l'acqua?
- 9.3 Un blocco di massa 0.75 kg è attaccato a una molla di costante elastica $k = 2100 \text{ N/m}$, come nella Figura 9.4, e viene messo in moto con un'energia meccanica di 47 J. Trascurando gli attriti, determinare (a) lo spostamento massimo del blocco dalla sua posizione di equilibrio, (b) la velocità massima del blocco, (c) lo spostamento del blocco quando la sua velocità è di 5.6 m/s.
- 9.4 Verificare che le grandezze mgy e $\frac{1}{2}kx^2$ hanno le dimensioni dell'energia.
- 9.5 Un vagone ferroviario con massa di 12 000 kg si muove alla velocità di 4.3 m/s con attrito trascurabile su un binario orizzontale, come mostra la Figura 9.18. Alla fine del binario il vagone urta contro un respingente a molla e lo comprime di 0.23 m, arrestandosi momentaneamente. Ammettendo che soltanto la forza conservativa della molla compia lavoro sul vagone, determinare la costante elastica della molla.
- 
- Figura 9.18 Esercizio 9.5.
- 9.6 Supponiamo che la forza esercitata su un corpo in un sistema unidimensionale sia data da $F_x(x) = -\alpha x^3$, dove α è una costante espressa in unità N/m^3 . Determinare l'espressione dell'energia potenziale corrispondente a questa forza conservativa, ponendo $U = 0$ per $x = 0$.
- 9.7 Un montacarichi e uno scatolone di massa 75 kg posto sul suo piano di carico si mettono in moto verso l'alto partendo da fermi con accelerazione costante, $a_y = 2.4 \text{ m/s}^2$. Raggiunto il piano superiore, 3.8 m più in alto, il montacarichi e lo scatolone cominciano a cadere liberamente a causa di una rottura del cavo del montacarichi. (a) Qual è il lavoro compiuto dalla forza normale esercitata sullo scatolone dal piano di carico mentre essi accelerano verso l'alto? (b) Questa forza normale è conservativa? Spiega. (c) Con quale velocità lo scatolone ripassa dal punto di partenza mentre ricade?
- 9.8 Si consideri il dispositivo rappresentato nella Figura 9.19a supponendo che entrambe le molle siano rilassate quando il blocco si trova in $x = 0$. Nella Figura 9.19b il blocco è spostato, di modo che x è l'entità

dell'allungamento di una molla e della compressione dell'altra. Si supponga trascurabile l'attrito e si determinino le espressioni (a) della componente $F_x(x)$ della forza che agisce sul blocco e (b) dell'energia potenziale del sistema.



(a)



(b)

Figura 9.19 Esercizio 9.8.

- 9.9 La massa del blocco dell'esercizio precedente è di 5.0 kg e le molle hanno costanti elastiche $k_1 = 1200 \text{ N/m}$ e $k_2 = 1800 \text{ N/m}$. Il blocco viene tirato verso destra e lasciato andare da fermo in $x = 0.20$. (a) Si determini l'energia cinetica massima del blocco. Si determini inoltre il modulo della velocità del blocco in (b) $x = 0.0 \text{ m}$ e in (c) $x = -0.10 \text{ m}$.
- 9.10 Il blocco dell'Esempio 9.3 viene messo in moto in modo che la sua massima velocità sia v_m . (a) Dimostrare che quando il blocco si trova nel punto x , il modulo della sua velocità è
- $$v = \sqrt{v_m^2 - \frac{k}{m}x^2}$$
- Posto $k = 1100 \text{ N/m}$, $m = 2.5 \text{ kg}$ e $v_m = 3.0 \text{ m/s}$, determinare (b) la massima distanza x_m del blocco dalla posizione di equilibrio, (c) il modulo della velocità in $x = \frac{1}{2}x_m$, (d) la posizione del blocco quando $v = \frac{1}{2}v_m$.
- Paragrafo 9.3 Analisi grafica dei sistemi conservativi**
- 9.11 La funzione energia potenziale gravitazionale $U(y) = mgy$ è rappresentata graficamente nella Figura 9.20 per un corpo di massa 10.2 kg in prossimità della superficie della Terra; $y = 0$ corrisponde al livello del suolo. Supponiamo che l'energia meccanica del sistema sia di 0.20 kJ. In base al grafico determinare (a) l'altezza massima del corpo, (b) l'energia cinetica massima e il punto in cui il corpo possiede tale energia cinetica massima, (c) la posizione del corpo quando la sua energia cinetica è pari all'energia potenziale, (d) la forza agente sul corpo in questo istante.

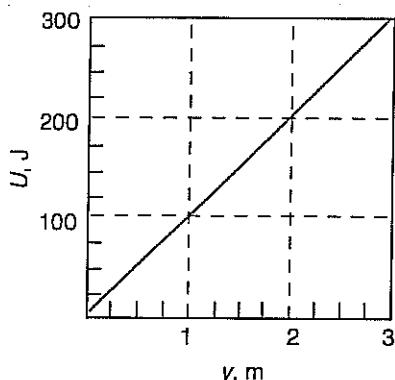


Figura 9.20 Esercizio 9.11.

- 9.12 In un modello unidimensionale di un atomo che vibra all'interno di una molecola, la funzione energia potenziale è data da

$$U = \frac{1}{4} \alpha x^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

con $\alpha = 16 \times 10^{20}$ N/m³ e $k = 4.0$ N/m.

- (a) Costruire un grafico di questa funzione per -0.10 nm $\leq x \leq 0.10$ nm (1 nm = 10^{-9} m). Supponiamo che un atomo di massa 2.3×10^{-26} kg abbia questa energia potenziale e si muova con uno spostamento massimo di 0.08 nm dall'origine. Utilizzando il grafico, determinare (b) il modulo della velocità dell'atomo per $x = 0$, (c) il modulo della velocità dell'atomo per $x = 0.05$ nm, (d) la forza che agisce sull'atomo per $x = -0.05$ nm.

- 9.13 Con riferimento alla funzione energia potenziale dell'esercizio precedente, supponiamo che l'atomo sia istantaneamente in quiete in $x_i = -0.02$ nm. (a) Determinare in base al grafico l'energia cinetica massima dell'atomo. (b) Il punto iniziale è uno dei punti di inversione del moto; individuare l'altro punto di inversione. (c) In che senso il moto per $E < 0$ (in questo esercizio) è fondamentalmente diverso dal moto per $E > 0$ (nell'Esercizio 9.12)?

- 9.14 Un semplice modello della molecola d'idrogeno utilizza un'energia potenziale unidimensionale $U(x) = U_0(e^{-2x/a} - 2e^{-x/a})$, dove $U_0 = 7.5 \times 10^{-19}$ J e $a = 7.0 \times 10^{-11}$ m. (a) Costruire un grafico di $U(x)$ in funzione di x per $-1.5 \leq x/a \leq 3$. In base al grafico, determinare i punti di inversione del moto se (b) $E = -2.5 \times 10^{-19}$ J e (c) $E = +2.5 \times 10^{-19}$ J.

Paragrafo 9.4 Forze conservative ed energia potenziale in tre dimensioni

- 9.15 Stima il lavoro compiuto su di te dalla forza gravitazionale se (a) sali per una scala a pioli da terra fino a un tetto alto 3 m, e (b) salti dal tetto a terra e ritorni ai piedi della scala. (c) Quanto lavoro compie su di te la forza gravitazionale in tutto il percorso?

- 9.16 Si consideri una forza costante $\mathbf{F} = (3 \text{ N})\mathbf{i} + (4 \text{ N})\mathbf{j}$ che agisce su un corpo che si muove nel piano xy . Si dimostri che il lavoro compiuto da questa forza mentre il corpo si sposta dal punto (x_i, y_i) al punto (x_f, y_f) è indipendente dalla traiettoria. Si osservi che $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy$ e si calcoli l'integrale senza specificare la traiettoria.

- 9.17 La forza dell'esercizio precedente è conservativa. (Perché?) (a) Si determini l'espressione della differenza di energia potenziale tra i punti (x_i, y_i) e (x_f, y_f) . (b) Si scelga l'origine $(0, 0)$ come punto di riferimento in cui $U = 0$. Qual è la funzione energia potenziale $U(x, y)$? Si calcoli l'energia potenziale nei punti (c) $(8 \text{ m}, 6 \text{ m})$ e (d) $(-8 \text{ m}, 6 \text{ m})$.

Paragrafo 9.5 La conservazione dell'energia meccanica

- 9.18 Si dimostri che, se si trascura la resistenza dell'aria, il modulo della velocità di un proiettile quando raggiunge un'altezza y dipende dal modulo della velocità iniziale v_i , ma è indipendente dall'angolo di proiezione. Si veda la Figura 9.21.

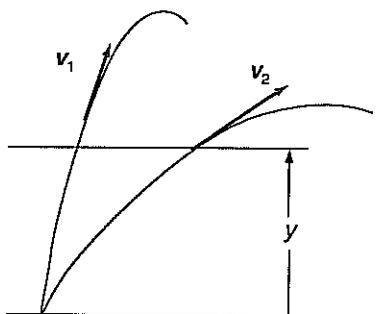


Figura 9.21 Esercizio 9.18: proiettili identici vengono sparati con la stessa velocità iniziale ma ad angoli differenti.

- 9.19 Una palla di massa 0.25 kg viene lanciata in modo che si sposti orizzontalmente di 37 m in 2.0 s e raggiunga un'altezza massima di 18 m. La resistenza dell'aria è trascurabile, e quindi la componente orizzontale della velocità è costante. Si determinino (a) l'energia meccanica della palla, (b) il modulo della velocità iniziale della palla, (c) l'energia potenziale massima della palla.

- 9.20 Un proiettile di massa m viene sparato con velocità iniziale v_i in una direzione che forma un angolo θ_i con l'orizzontale, come mostra la Figura 9.22. Si trascurino gli effetti della resistenza dell'aria e ci si serva della conservazione dell'energia meccanica per determinare (a) la massima altezza raggiunta e (b) il modulo della velocità del proiettile quando torna al livello del suolo. Si rammenti che la componente x della velocità non cambia durante questo moto.

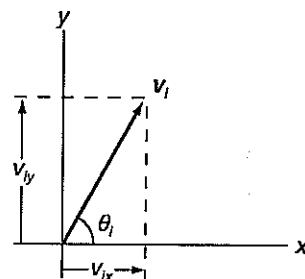


Figura 9.22 Esercizio 9.20.

- 9.21 Un pendolo semplice può essere realizzato attaccando una sferetta a una estremità di un filo di massa trascurabile; l'altra estremità del filo viene tenuta fissa, e la sferetta è libera di oscillare in un piano verticale. Supponiamo che la sferetta venga lasciata andare con velocità nulla dalla posizione mostrata nella Figura 9.23.

- con $\ell = 450 \text{ mm}$ e $\theta = 30.0^\circ$. Si determinino (a) il modulo della velocità della sferetta e (b) la tensione del filo quando la sferetta passa per la posizione più bassa.

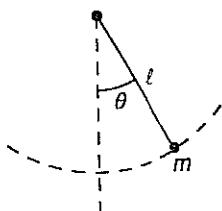


Figura 9.23 Esercizio 9.21.

- 9.22 Una pallina di massa m è attaccata a un filo di massa trascurabile e si muove lungo una circonferenza verticale di raggio r . Nel punto O le viene impressa una velocità iniziale di modulo v_0 , come mostra la Figura 9.24. Si determinino in funzione di m , g , v_0 e r il modulo della velocità della pallina e la tensione del filo (a) nel punto A e (b) nel punto B .

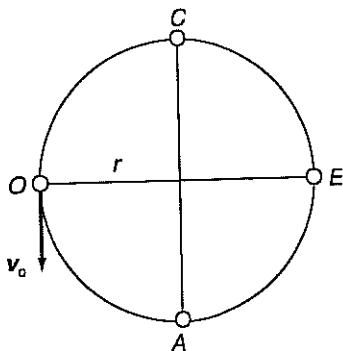


Figura 9.24 Esercizio 9.22.

- 9.23 Qual è la velocità minima che deve essere impressa nel punto O alla pallina dell'esercizio precedente perché il filo non si allenti prima che la pallina raggiunga il punto C ? Si veda la Figura 9.24.

- 9.24 Una molla di piccola massa e di costante elastica $k = 1600 \text{ N/m}$ viene compressa di 15 mm. Su di essa viene appoggiata una biglia di massa 75 g, come mostra la Figura 9.25. Quando la molla viene liberata, la biglia viene scagliata verso l'alto. Si ammetta che la biglia si stacchi dalla molla quando questa ha la sua lunghezza naturale e che gli attriti siano trascurabili. (a) Qual è l'altezza massima raggiunta dalla biglia? (b) Con quale velocità la biglia si stacca dalla molla?

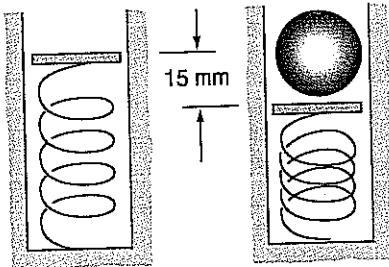


Figura 9.25 Esercizio 9.24.

- 9.25 Un cannone a molla simile a quello dell'esercizio precedente viene usato per sparare una biglia di massa 75 g in direzione orizzontale dal ripiano di un bancone posto a un'altezza di 1.2 m sopra il pavimento, come mostra la Figura 9.26. Se la molla viene compressa di 25 mm, la biglia colpisce il pavimento a 4.2 m dalla base

del bancone (tale distanza è misurata lungo il pavimento). Si trascurino gli attriti. (a) Si determini l'energia meccanica della biglia durante il moto. (b) Si determini la costante elastica della molla. (c) Quale sarà la distanza orizzontale percorsa dalla biglia se la molla viene compressa di 37 mm?

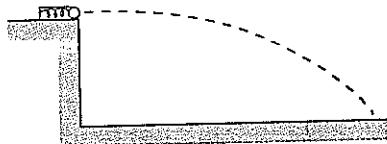


Figura 9.26 Esercizio 9.25.

- 9.26 Un bambino sta seduto in cima a un serbatoio cilindrico di raggio R , come mostra la Figura 9.27. La superficie è molto liscia e il bambino comincia a scivolare con attrito trascurabile. Si determini il valore dell'angolo in corrispondenza del quale il bambino si stacca dalla superficie cilindrica.

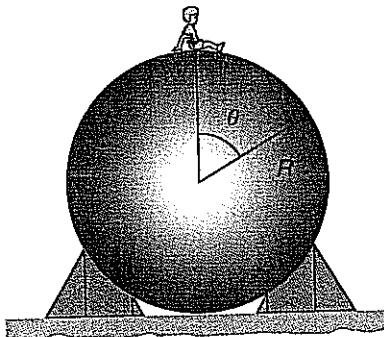


Figura 9.27 Esercizio 9.26.

Paragrafo 9.6 Forze non conservative e lavoro interno

- 9.27 Consideriamo la cassa dell'Esempio 9.4 e supponiamo che essa sia spinta orizzontalmente in modo da percorrere una circonferenza completa di 4.5 m di raggio.
(a) Calcolare il lavoro compiuto dall'attrito cinetico lungo questo percorso. (b) Spiegare in che senso questo calcolo dimostra che la forza d'attrito non è conservativa.

- 9.28 Una palla di gomma di massa 0.25 kg viene lasciata cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza di 1.5 m sopra il pavimento. Dopo essere rimbalzata sul pavimento, la palla risale fino a un'altezza di 0.8 m. Si calcolino (a) il lavoro compiuto dal pavimento sulla palla e (b) il modulo della velocità della palla immediatamente prima e immediatamente dopo il contatto con il pavimento.

- 9.29 Supponi di percorrere una rampa di scale con velocità costante facendo variare la tua coordinata verticale di 10 m. (a) Valuta la variazione della tua energia meccanica. (b) Spiega perché la forza normale esercitata dai gradini sulle tue scarpe non compie lavoro. (c) Come spieghi la variazione della tua energia meccanica? Quali forze compiono lavoro?

Paragrafo 9.7 La legge di conservazione dell'energia

- 9.30 (a) Si stimi la velocità di rincorsa di un saltatore con l'asta che supera la quota di 4 m. (b) Si descrivano le trasformazioni dell'energia che si verificano e si spieghi perché è necessaria l'asta.

- 9.31** Un'automobile scende a motore spento lungo un declivio con la pendenza del 5 per cento alla velocità di 36 km/h. (a) Si calcoli l'intensità della forza frenante totale dovuta alla resistenza dell'aria e ad altre forme di attrito. (b) Si calcoli la potenza minima erogata dal motore quando l'automobile sale per il medesimo pendio con la velocità costante di 36 km/h.
- 9.32** Supponiamo che nell'Esempio 9.3 gli effetti dell'attrito non siano trascurabili. Il blocco viene lasciato andare con velocità iniziale nulla in $x_i = 0.15$ m e, dopo alcuni secondi, si ferma e rimane in $x_f = -0.02$ m. (Come può rimanere in quiete in quella posizione?) (a) Si descrivano le trasformazioni dell'energia che hanno luogo durante questo moto. (b) Si determini la variazione dell'energia interna del sistema formato dalla molla, dal blocco e dalla superficie di appoggio. Si esplicitino tutte le ipotesi che si fanno nel corso del calcolo.
- 9.33** Una palla di massa 0.33 kg viene lanciata verso l'alto con una velocità iniziale di modulo $v_i = 23$ m/s. Raggiunta un'altezza $y_f = 14$ m, la sua velocità è $v_f = 13$ m/s. Si consideri isolato il sistema formato dal proiettile, dall'atmosfera e dalla Terra. (a) Si analizzino quantitativamente le trasformazioni dell'energia durante questo moto, determinando le variazioni dell'energia cinetica, potenziale e interna. (b) Che cosa si può dire della velocità del proiettile quando ripassa in discesa dall'altezza di 14 m?

Paragrafo 9.8. Il moto dei satelliti e la velocità di fuga

- 9.34** Verificare che $U = -GMm/r$ ha le dimensioni dell'energia.
- 9.35** Calcolare le energie (a) potenziale, (b) cinetica e (c) meccanica di un laboratorio spaziale della massa di 30 Mg in un'orbita circolare di raggio 70 Mm intorno alla Terra. (d) C'è qualcuna di queste energie che aumenterebbe se il raggio dell'orbita fosse minore? Quale?
- 9.36** Un satellite per telecomunicazioni della massa di 125 kg

viene in un primo tempo «parcheggiato» in un'orbita terrestre circolare di raggio 7000 km. In seguito esso viene trasferito in un'orbita geostazionaria con un periodo di 24 h, in modo che, mentre la Terra ruota sul proprio asse, il satellite si trovi sempre sopra il medesimo punto dell'equatore. (a) Determinare il raggio dell'orbita geostazionaria. (b) Quanta energia si deve fornire perché il satellite passi dall'orbita di parcheggio all'orbita geostazionaria?

- 9.37** Il pianeta Mercurio ha una massa di 3.3×10^{23} kg e si muove su un'orbita approssimativamente circolare di raggio 5.8×10^{10} m intorno al Sole, la cui massa è di 2.0×10^{30} kg. (a) Determinare l'energia meccanica del sistema Mercurio-Sole. (b) Quanta energia si dovrebbe fornire per trasferire Mercurio su un'orbita circolare di raggio 15×10^{10} m, come quella della Terra intorno al Sole?
- 9.38** La massa della Terra è 81 volte maggiore di quella della Luna. Il raggio della Terra è 3.7 volte maggiore di quel della Luna. Si confrontino le velocità di fuga dalle superfici di questi due corpi. Questo confronto contribuisce a spiegare perché la Luna non ha atmosfera.
- 9.39** Un satellite artificiale si muove su un'orbita ellittica intorno alla Terra. La distanza del satellite dal centro della Terra varia da un minimo di 7.2 Mm al perigeo, dove la sua velocità è di 8.0 km/s, a un massimo di 9.9 Mm all'apogeo. Determinare il modulo della velocità di satellite quando esso si trova (a) all'apogeo e (b) a una distanza di 8.4 Mm dal centro della Terra.
- 9.40** Per un corpo in prossimità della superficie terrestre, la variazione dell'energia potenziale gravitazionale è data da $U_f - U_i = mg(y_f - y_i)$. In alternativa ci si può servire dell'Equazione (9.16) ponendo $r_i = R + y_i$ e $r_f = R + y_f$, dove R è il raggio della Terra. Dimostrare che dall'Equazione (9.16) si può ottenere (con una approssimazione) $U_f - U_i = mg(y_f - y_i)$.
[Suggerimento: si rammenti che $g = Gm/R^2$ e che $(1+z)^{-1} \approx 1-z$ per $|z| \ll 1$.]

PROBLEMI

- 9.1** Un blocco di massa 0.73 kg comincia a scivolare dal punto più alto di un piano inclinato, come mostra la Figura 9.28. In fondo al piano inclinato c'è una molla di piccola massa e di costante elastica $k = 1200$ N/m. Gli attriti sono trascurabili. (a) Di quanto è compressa la molla quando il blocco si ferma? (b) Qual è la velocità del blocco quando raggiunge la molla?

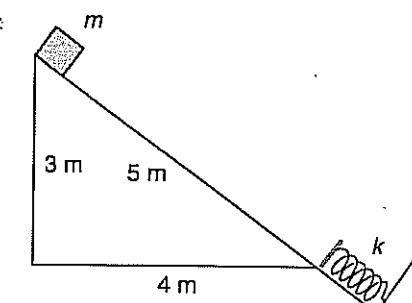


Figura 9.28 Problema 9.1.

- 9.2** Nella situazione proposta dal problema precedente si tenga conto dell'attrito cinetico. Posto $\mu_k = 0.10$ si determinino (a) la velocità del blocco quando raggiunge la molla e (b) la compressione massima della molla.
- 9.3** Una molla di piccola massa è sospesa verticalmente come mostra la Figura 9.29a. Ad essa viene appeso un blocco di massa m , che viene posto in moto verticale. Indichiamo con y la posizione del blocco rappresentata nella Figura 9.29b, di modo che $y = 0$ corrisponda alla posizione in cui la molla è rilassata. (a) Si esprima la funzione energia potenziale come somma dei contributi elastico e gravitazionale. (b) Si determini la forza risultante che agisce sul blocco in funzione della coordinata y . (c) Per quale valore di y , che chiamiamo y_1 , la forza risultante è nulla? (d) Si dimostri che la funzione energia potenziale trovata nella parte (a) può essere scritta come $\frac{1}{2}k(y - y_1)^2 + \text{un termine costante}$. (e) Spostando l'origine nel punto di equilibrio,

$y - y_1 \rightarrow y$; si dimostri che, se si sposta lo zero dell'energia potenziale in questo punto di equilibrio, l'energia potenziale di un blocco appeso a una molla verticale può essere espressa come $U = \frac{1}{2}ky^2$.

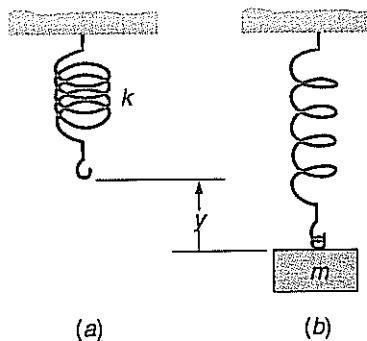


Figura 9.29 Problema 9.3.

- 9.4 L'energia potenziale di interazione tra atomi neutri viene a volte approssimata con la seguente funzione energia potenziale:

$$U(x) = V_0 \left[\left(\frac{a}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x} \right)^6 \right]$$

ove x è la distanza tra i centri degli atomi e V_0 e a sono costanti. (a) Posto $a = 0.30 \text{ nm}$ e $V_0 = 3.2 \times 10^{-21} \text{ J}$, si costruisca un grafico di questa funzione per $0.24 \text{ nm} \leq x \leq 0.36 \text{ nm}$. (b) In base al grafico si determini la distanza di equilibrio corrispondente a $F_x = 0$. (c) Si controlli questo valore usando la relazione $F_x(x) = -dU/dx$. (d) Supponendo che uno dei punti di inversione del moto sia in $x = 0.28 \text{ nm}$, si individui l'altro punto di inversione. (e) Si determini l'energia meccanica del moto tra questi due punti di inversione.

- 9.5 Se la forza che agisce su un corpo è sempre diretta lungo la retta congiungente il corpo con un punto dato, che assumiamo come origine in un riferimento tridimensionale, e se l'intensità della forza dipende soltanto dalla distanza del corpo dall'origine, la forza viene detta *centrale*. Dopo aver riesaminato la discussione che ci ha portato all'Equazione (9.13), si dimostri che ogni forza centrale è conservativa.
- 9.6 Nell'Esempio 9.6 un cubetto di ghiaccio scivola senza attrito su un «cerchio della morte». Determinare la minima altezza rispetto al punto più basso dello scivolo circolare dalla quale il cubetto può essere lasciato cadere senza che perda contatto con lo scivolo nel punto più alto.

- 9.7 Due blocchi sono collegati da un filo di massa trascurabile che passa su una piccola puleggia, come mostra la Figura 9.30. Essi vengono lasciati andare da fermi, e gli attriti possono essere trascurati. (a) Dimostrare che la somma dei lavori compiuti dalla tensione del filo sui due blocchi è nulla. (b) Servendosi di metodi basati sull'energia, determinare la velocità comune dei due blocchi quando m_1 è caduto di un tratto h . Esprimere la risposta in termini di m_1 , m_2 , g e h .

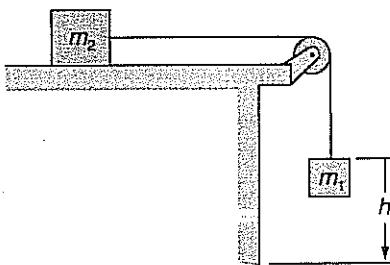
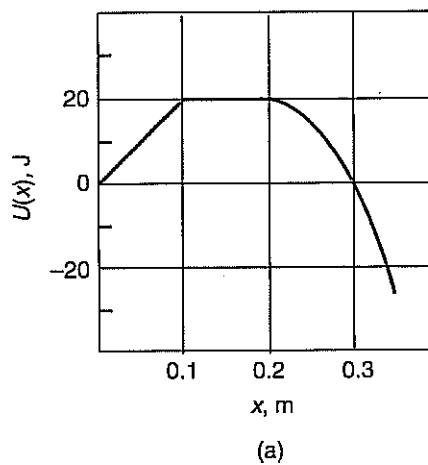
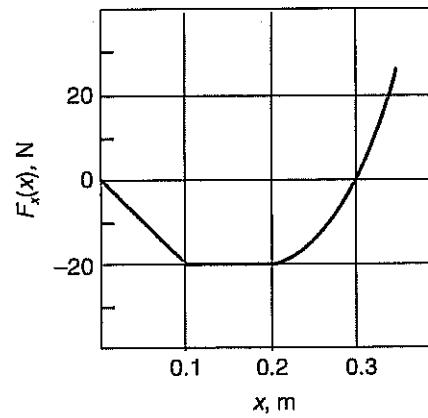


Figura 9.30 Problema 9.7.

- 9.8 Si riprenda in esame il problema precedente, ma tenendo conto dell'attrito; μ_k rappresenti il coefficiente di attrito cinetico. Si determini la velocità dopo che m_1 è caduto di un tratto h .
- 9.9 Si costruiscano i grafici (a) della componente della forza $F_x(x)$ a partire dal grafico dell'energia potenziale di Figura 9.31a, e (b) della funzione energia potenziale $U(x)$ a partire dal grafico della componente della forza di Figura 9.31b. Si assuma $U(0) = 0$.



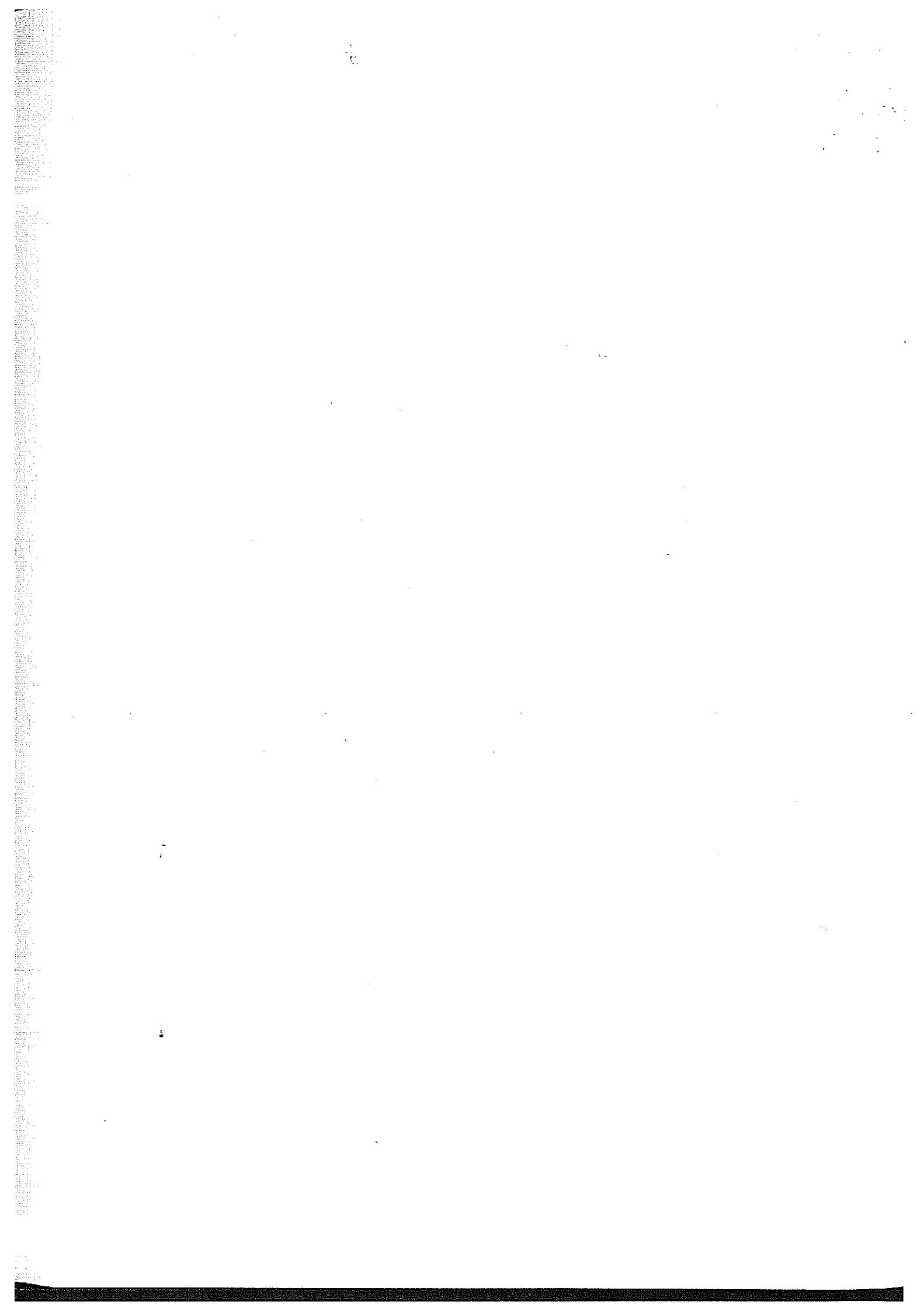
(a)



(b)

Figura 9.31 Problema 9.9.

- 9.10 Supponiamo che il blocco dell'Esercizio 9.8 sia in equilibrio in $x = 0$, ma che nessuna delle due molle sia rilassata; una di esse è tesa di un tratto a_1 , mentre l'altra è tesa di un tratto a_2 quando $x = 0$. (a) Imponendo che la forza risultante che agisce sul blocco sia nulla in $x = 0$, si dimostri che $k_1 a_1 = k_2 a_2$. Si determinino le espressioni (b) dell'energia potenziale elastica $U(x)$ del sistema e (c) della componente $F_x(x)$.



LA QUANTITÀ DI MOTO E IL MOTO DEI SISTEMI

10.1 INTRODUZIONE

Lo sviluppo della meccanica, nel diciassettesimo secolo, vide due concetti imporsi in modo particolare: la «quantità di moto» di un corpo (pari al prodotto della massa del corpo per la sua velocità vettoriale) e la «vis viva» (forza viva) di un corpo, che oggi chiamiamo energia cinetica. Le grandezze quantità di moto ed energia hanno un'enorme importanza concettuale in quanto vanno a toccare problemi fondamentali quali l'essenza delle forze e delle interazioni e la struttura stessa dell'universo. Oltre a ciò, esse sono di notevole utilità in vari contesti pratici: il concetto di energia è particolarmente utile, come abbiamo visto, nella soluzione dei problemi in cui compaiono forze conservative; vedremo invece che il concetto di quantità di moto è particolarmente utile nei problemi relativi agli urti.

10.2 IL CENTRO DI MASSA

In questo capitolo non tratteremo più i corpi come se fossero punti materiali privi di estensione. Finora questa si è rivelata una buona approssimazione, ma vi sono molte situazioni in cui è necessario tener conto del carattere esteso dei corpi. Inoltre siamo interessati a descrivere dei *sistemi* di corpi che interagiscono l'uno con l'altro, come accade nel caso del sistema solare, degli atomi che formano una molecola, o del sistema costituito da due automobili che si urtano.

Nello studio del moto di un corpo esteso o di un sistema di punti materiali è spesso utile concentrare l'attenzione su un unico punto rappresentativo. Il punto che meglio si presta allo scopo è una sorta di posizione media della massa del sistema, cui si dà il nome di *centro di massa*. Un oggetto sta in equilibrio su un perno se il suo centro di massa viene collocato proprio sopra il perno. La posizione \mathbf{r}_{cm} del centro di massa di un sistema di particelle è definita in termini quantitativi come

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} \quad (10.1)$$

Definizione del centro di massa.

ove \mathbf{r}_i e m_i sono la posizione e la massa della i -esima particella del sistema, e la somma è estesa a tutte le particelle del sistema (Figura 10.1). Dal momento che $\sum m_i$ è la massa totale M del sistema, si ha $\mathbf{r}_{cm} = (\sum m_i \mathbf{r}_i)/M$. La posizione del centro di massa di un sistema di punti materiali è la media pesata delle posizioni di tutti i singoli punti con peso dato dalla massa di ognuno, cioè il peso di ogni vettore di posizione è dato dalla massa che sta in quella posizione. Espressa in termini delle componenti, questa definizione diventa

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad (10.2)$$

dove x_{cm} , y_{cm} e z_{cm} sono le coordinate del centro di massa, e x_i , y_i e z_i sono le coordinate dell' i -esimo punto materiale.

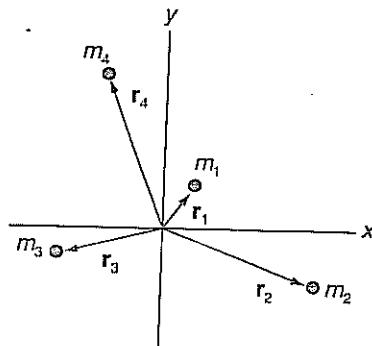


Figura 10.1

Ciascun punto materiale è individuato dal relativo vettore posizione.

Centro di massa di un corpo esteso.

Spesso il sistema non sarà costituito di punti materiali discreti per i quali si possa tuare una somma, ma sarà un corpo continuo. Benché sia chiaro che, a livello : scopico, i corpi possono essere costituiti di punti discreti, un corpo esteso, cor esempio questo libro, può essere trattato come continuo quando viene consider una scala confrontabile con le sue dimensioni. In tal caso la somma dell'Equa(10.1) è sostituita da un integrale: $\mathbf{r}_{cm} = \int \mathbf{r} dm / \int dm$, ossia

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm$$

dove $M = \int dm$ è la massa totale del sistema.

Integrare significa effettuare un passaggio al limite in cui il numero di addendi una somma diventa infinito, mentre ciascun addendo diventa infinitesimo.

In questo caso si sommano i vettori \mathbf{r} relativi a tutti gli elementi di massa infiniti dm che formano il corpo. Di solito è conveniente scindere questa equazione , riale nelle sue componenti per eseguire l'effettiva integrazione. In tal modo le eccezionate del centro di massa di un corpo continuo sono

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x dm \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm \quad z_{cm} = \frac{1}{M} \int z dm \quad (1)$$

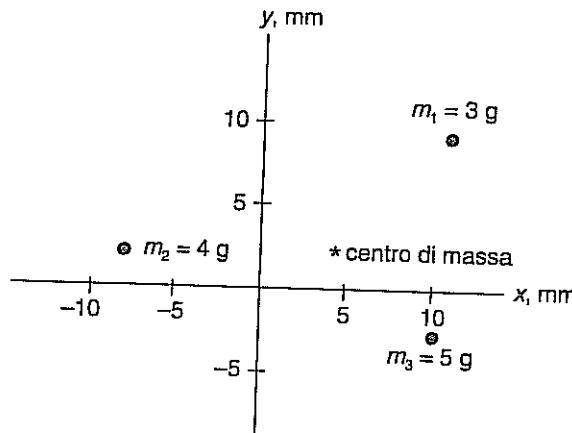
Per calcolare gli integrali delle Equazioni (10.4) è necessario esprimere l'incremento della massa dm in termini delle coordinate del corpo. La massa dm di un elemento di volume dV è ρdV dove ρ è la densità (massa per unità di volume) del corpo. Alle Equazioni (10.4) diventano

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \rho dV \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \int y \rho dV \quad z_{cm} = \frac{1}{M} \int z \rho dV \quad (1)$$

Esempio 10.1

Trovare le coordinate del centro di massa del sistema formato dai tre punti materiali che giacciono nel piano della Figura 10.2.

Figura 10.2
Esempio 10.1.



Soluzione

Inserendo nelle Equazioni (10.2) le coordinate ricavabili dalla Figura 10.2, si trova approssimativamente

$$x_{cm} = \frac{(3 g)(11 mm) + (4 g)(-8 mm) + (5 g)(10 mm)}{12 g} = 4 \text{ mm}$$

$$y_{cm} = \frac{(3 g)(9 mm) + (4 g)(2 mm) + (5 g)(-3 mm)}{12 g} = 2 \text{ mm}$$

$$z_{cm} = 0$$

Esempio 10.2

Trovare il centro di massa di una bacchetta lunga e sottile di densità uniforme.

Soluzione

Sia ℓ la lunghezza della bacchetta, A l'area della sua sezione trasversale, ed M la sua massa. Per esprimere dm in funzione della posizione x lungo la bacchetta, dividiamo quest'ultima in un gran numero di «fette» sottili, come mostra la Figura 10.3. Ciascuna fetta è abbastanza sottile perché si possa considerare la coordinata x sostanzialmente invariata in tutta la fetta. Dal momento che la bacchetta ha distribuzione di massa uniforme, e il suo volume è ℓA , la sua densità è $\rho = M/\ell A$. L'elemento di volume è $dV = A dx$. Quindi

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^\ell x \left(\frac{M}{\ell A} \right) A dx$$

ove i limiti di integrazione sono le estremità della bacchetta, di coordinate $x = 0$ e $x = \ell$:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \frac{M}{\ell} \int_0^\ell x dx = \frac{1}{\ell} \frac{x^2}{2} \Big|_0^\ell = \frac{\ell}{2}$$

Come si poteva prevedere basandosi sulla simmetria, il centro di massa è nel punto medio della bacchetta.

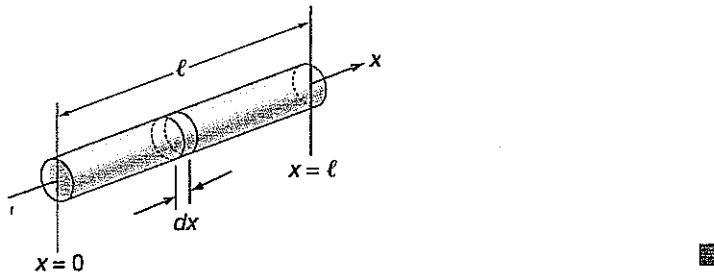


Figura 10.3
Esempio 10.2.

10.3 IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA

Si consideri il moto di una chiave inglese lanciata verso l'alto, così come appare nella fotografia stroboscopica della Figura 10.4. Se si cerca di seguire il moto di un'estremità della chiave inglese, si constata che la traiettoria è una combinazione complicata di un moto circolare e di uno parabolico. L'aspetto complicato della traiettoria non costituisce una sorpresa poiché una particella all'estremità della chiave è soggetta non soltanto alla forza di gravità, ma anche alle forze esercitate su di essa dal resto della chiave. Invece la traiettoria del centro di massa, che è contrassegnato con una crocetta, è una semplice parabola. Ora dimostreremo che il moto del centro di massa dipende esclusivamente dalle forze esercitate da agenti esterni al sistema.

La posizione del centro di massa di un sistema è data dall'Equazione (10.1), che scriviamo nella forma $\mathbf{r}_{cm} = (\sum m_i \mathbf{r}_i)/M$. La velocità vettoriale e l'accelerazione del centro di massa si ottengono derivando \mathbf{r}_{cm} rispetto al tempo, con M e m_i costanti:

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

ossia

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{v}_i \quad (10.6)$$

Analogamente,

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}$$

ossia

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{a}_i \quad (10.7)$$

Figura 10.4

Fotografia stroboscopica di una chiave inglese lanciata in avanti e verso l'alto. Mentre il moto dei diversi punti della chiave è piuttosto complesso, quello del centro di massa, che è indicato dalla crocetta, avviene semplicemente lungo una parabola. La parabola coincide con la traiettoria che seguirebbe un punto materiale che fosse soggetto alle stesse forze e avesse la medesima velocità iniziale.

(Danny Overcash)

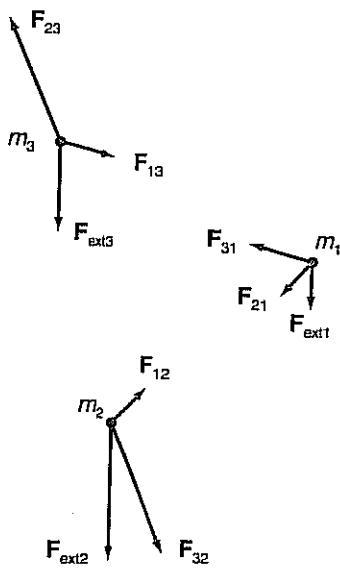
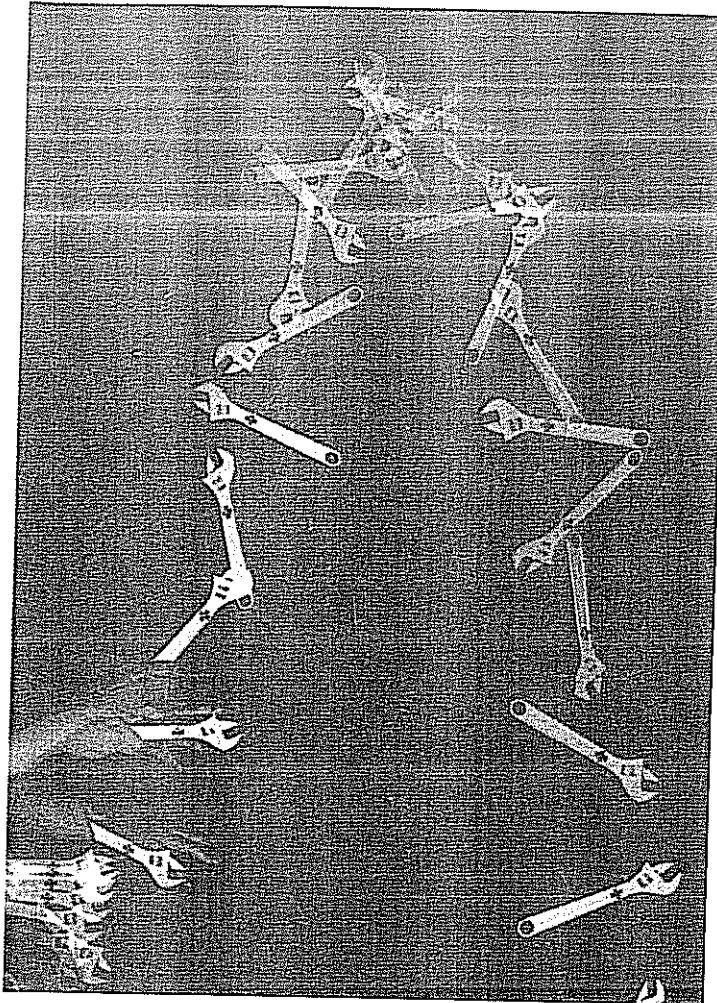


Figura 10.5

Un sistema formato da tre punti materiali. Ciascuno di questi esercita una forza sulle altre due, come indicato nella figura. \mathbf{F}_{21} , per esempio, è la forza che il punto 2 esercita sul punto 1. Vi sono anche forze prodotte da corpi esterni al sistema, come $\mathbf{F}_{\text{ext}i}$, che si esercita sul punto 1.

Per dimostrare che l'accelerazione del centro di massa dipende soltanto dalle forze esercitate da agenti esterni al sistema, dobbiamo anzitutto tracciare una distinzione tra forze interne e forze esterne. Le *forze interne* sono forze esercitate sulle particelle del sistema da altre particelle interne al sistema, mentre le *forze esterne* sono forze esercitate su particelle interne al sistema da agenti esterni al sistema. Per rendere esplicita questa distinzione, indichiamo con \mathbf{F}_{ij} la forza esercitata dal punto i sul punto j , e sia i che j sono interne al sistema; indichiamo poi con $\mathbf{F}_{\text{ext}j}$ la forza esercitata sul punto j da corpi esterni al sistema.

L'accelerazione del centro di massa è definita dall'Equazione (10.7). Per determinarne il valore per un dato sistema, cominciamo a calcolare le accelerazioni dei singoli punti materiali servendoci della seconda legge di Newton, e poi sommiamo queste accelerazioni. Consideriamo il sistema a tre punti materiali rappresentato nella Figura 10.5. L'accelerazione del centro di massa è data da $M\mathbf{a}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3$. L'accelerazione di ciascuno dei punti è data dalla seconda legge di Newton:

$$m_1\mathbf{a}_1 = \sum \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{\text{ext}1}$$

$$m_2\mathbf{a}_2 = \sum \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{\text{ext}2}$$

$$m_3\mathbf{a}_3 = \sum \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{\text{ext}3}$$

Quindi

$$M\mathbf{a}_{\text{cm}} = (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{\text{ext}1}) + (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{\text{ext}2}) + (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{\text{ext}3})$$

Ma la terza legge di Newton stabilisce che $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, e quindi le forze interne si compaiono nella somma si elidono a due a due. Per esempio, $\mathbf{F}_{31} = -\mathbf{F}_{13}$. Pertanto, la somma di tutte le forze agenti sulle particelle è pari alla somma delle sole forze esterne. Posto $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}1} + \mathbf{F}_{\text{ext}2} + \mathbf{F}_{\text{ext}3}$, si ha

$$M\mathbf{a}_{\text{cm}} = \mathbf{F}_{\text{ext}1} + \mathbf{F}_{\text{ext}2} + \mathbf{F}_{\text{ext}3} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$$

L'accelerazione del centro di massa è determinata dalle sole forze esterne. Alla medesima conclusione si perviene per qualunque numero di punti. Il prodotto della massa del sistema per l'accelerazione del centro di massa è pari alla somma delle accelerazioni dei singoli punti materiali moltiplicati per le rispettive masse:

$$M\mathbf{a}_{cm} = \sum m_i \mathbf{a}_i$$

Quando le accelerazioni delle particelle sono espresse in termini delle forze che agiscono su di esse (tramite la seconda legge di Newton), le forze interne che compaiono nella sommatoria si elidono a due a due (per la terza legge di Newton), e l'accelerazione del centro di massa risulta determinata dalle sole forze esterne:

$$M\mathbf{a}_{cm} = \sum_i \left(\mathbf{F}_{ext,i} + \sum_j \mathbf{F}_{ij} \right) = \sum_i \mathbf{F}_{ext,i}$$

Non è importante sapere su quale punto si esercita la forza esterna, e quindi è lecito omettere l'indice i e scrivere

$$\Sigma \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm} \quad (10.8)$$

Ora possiamo renderci conto della ragione per cui la crocetta, che nella Figura 10.4 indica il centro di massa della chiave inglese, descrive una semplice traiettoria parabolica. Il centro di massa si muove come se tutta la massa della chiave vi fosse concentrata e ivi fossero applicate le sole forze esterne (in questo caso gravitazionali).

Per giungere a questo risultato abbiamo fatto uso del secondo principio della dinamica e della terza legge di Newton; tuttavia il fatto che la somma di tutte le forze interne a un sistema sia nulla deriva solo dalla terza legge (azione e reazione). Allora, in maniera del tutto generale, considerando un sistema di corpi comunque costituito, affermiamo che per la terza legge di Newton si ha sempre e comunque *che la risultante di tutte le forze interne è sempre e comunque nulla*.

Benché non influenzino l'accelerazione del centro di massa, le forze interne possono ugualmente compiere lavoro. Per questo non c'è un teorema generale lavoro-energia che metta in relazione il lavoro totale compiuto dalle forze esterne con l'energia cinetica del sistema: anche se l'energia si conserva, la variazione dell'energia cinetica del sistema non può essere semplicemente collegata al lavoro compiuto dalle sole forze esterne. Per esempio, se un pattinatore a rotelle dà una spinta a una parete in modo da allontanarsi da essa, la forza esercitata dalla parete non compie lavoro perché il suo punto di applicazione non si muove. L'accelerazione del centro di massa del pattinatore è data dal rapporto tra la forza che il muro esercita su di esso e la sua massa totale, ma a compiere lavoro sono soltanto le forze interne (esercitate dai tuoi muscoli sulle tue ossa).

Esempio 10.3

Un veicolo spaziale è così lontano da qualunque altro corpo che su di esso non si esercita alcuna forza esterna apprezzabile. (a) Qual è la traiettoria del suo centro di massa? (b) Dal veicolo spaziale viene poi fatta uscire un'antenna necessaria per le comunicazioni con la Terra. Qual è la traiettoria del centro di massa durante questa operazione?

Soluzione

- (a) Dal momento che sul veicolo spaziale non agiscono forze esterne, il suo centro di massa ha accelerazione nulla, e quindi si muove in linea retta con velocità di modulo costante.
- (b) Le forze che fanno uscire l'antenna sono interne al veicolo spaziale; di nuovo non ci sono forze esterne, e quindi il centro di massa della nave spaziale continua a muoversi con velocità costante lungo la medesima linea retta. I centri di massa dei due sottosistemi costituiti (i) dall'antenna e (ii) dal resto della nave spaziale accelerano entrambi brevemente mentre l'antenna fuoriesce. Il centro di massa dell'intero veicolo spaziale non accelera perché tutte le forze sono interne a tale sistema.

Esempio 10.4

Un pattinatore di massa 80 kg e una pattinatrice di massa 45 kg si tengono per mano mentre sono fermi sul ghiaccio. Una forza esterna $\mathbf{F}_a = (100 \text{ N})\mathbf{i}$ viene applicata alla pattinatrice. Ammettiamo che il ghiaccio non eserciti alcuna forza orizzontale sui due pattinatori, cosicché \mathbf{F}_a è l'unica forza esterna orizzontale. (a) Qual è l'accelerazione del centro di massa della coppia? (b) I pattinatori si stacca-

Il moto del centro di massa è determinato dalle forze esterne.

La seconda legge di Newton per il moto del centro di massa di un sistema.

no l'uno dall'altro, ma \mathbf{F}_a continua ad essere applicata alla pattinatrice. Qual è ora l'accelerazione del centro di massa della coppia?

Soluzione

(a) Il moto della coppia di pattinatori è complesso, essendo costituito da una traslazione del centro di massa e da moti rispetto al centro di massa. L'accelerazione del centro di massa è però semplice:

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = M \mathbf{a}_{cm}$$

$$\mathbf{a}_{cm} = \left(\frac{100 \text{ N}}{125 \text{ kg}} \right) \mathbf{i} = (0.8 \text{ m/s}^2) \mathbf{i}$$

Sarebbe difficile (ma non impossibile) determinare l'accelerazione di un singolo pattinatore.

(b) Le forze che i pattinatori esercitano l'uno sull'altra sono interne al sistema costituito da loro stessi. Siccome le forze interne non influenzano il moto del centro di massa, l'accelerazione di quest'ultimo è, come in precedenza, $(0.8 \text{ m/s}^2) \mathbf{i}$.

10.4 LA QUANTITÀ DI MOTO

Se durante una partita di calcio un attaccante di massa 75 kg e un terzino di massa 90 kg si scontrano a mezz'aria, che cosa determina il moto dei due giocatori dopo l'urto? È la loro massa che conta? O è la loro velocità? Quale delle due è più importante? Come si può stabilire la direzione in cui si muoveranno dopo l'urto? L'analisi di problemi come questo conduce al concetto di quantità di moto.

Quantità di moto di un corpo. La quantità di moto \mathbf{p} di un corpo di massa m e velocità \mathbf{v} è definita da

Quantità di moto di un corpo.

$$\boxed{\mathbf{p} = mv} \quad (10.9)$$

La quantità di moto è un vettore perché nel prodotto mv , m è uno scalare e \mathbf{v} è un vettore. La direzione della quantità di moto è la direzione della velocità del corpo, e il modulo della quantità di moto è $p = mv$. La quantità di moto ha le dimensioni di massa per lunghezza diviso tempo, e la relativa unità SI è il $\text{kg} \times \text{m/s}$. La quantità di moto di una palla di massa 0.75 kg che ha una velocità di 15 m/s nella direzione x è $\mathbf{p} = mv = (0.75 \text{ kg})(15 \text{ m/s})\mathbf{i} = (11 \text{ kg} \times \text{m/s})\mathbf{i}$.

Newton in origine formulò la sua seconda legge in termini che nella nostra notazione diventano

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (10.10)$$

L'Equazione (10.10) è equivalente alla forma della seconda legge di cui ci siamo serviti nel Capitolo 5, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

dove si è supposto che la massa sia costante.

Quantità di moto di un sistema di corpi. La quantità di moto totale \mathbf{P} di un sistema di corpi è definita da

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad (10.11)$$

dove la somma è estesa a tutti i corpi che fanno parte del sistema.

La quantità di moto di un sistema al quale sono applicate delle forze può variare. La rapidità di variazione della quantità di moto è data da

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(\sum \mathbf{p}_i)}{dt} = \frac{d(\sum m_i \mathbf{v}_i)}{dt}$$

Ma $\sum m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_{cm}$, ossia $\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{cm}$. Perciò

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = M \mathbf{a}_{cm}$$

Nel Paragrafo 10.3 abbiamo visto che il moto del centro di massa è influenzato soltanto dalle forze esterne: $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = M \mathbf{a}_{cm}$.

Esempio 10.5

Un camion K di massa 15 Mg (15 000 kg) trasporta tronchi verso nord alla velocità di 110 km/h lungo il Viale dei Pini, mentre un camion M da 32 Mg trasporta maiali verso est alla velocità di 73 km/h lungo Via della Costituzione. Quali sono il modulo e la direzione della quantità di moto del sistema formato dai due veicoli?

Soluzione

Ciascuno dei camion può essere considerato un punto materiale, dal momento che tutta la sua massa ha la medesima velocità. Allora, scegliendo l'est come direzione del semiasse positivo delle x e il nord come direzione del semiasse positivo delle y , come nella Figura 10.6,

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{P}_M + \mathbf{P}_K \\ &= (32 \text{ Mg})(73 \text{ km/h})\mathbf{i} + (15 \text{ Mg})(110 \text{ km/h})\mathbf{j} \\ &= (6.5 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\mathbf{i} + (4.6 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\mathbf{j}\end{aligned}$$

ossia

$$P = 7.9 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

con una direzione inclinata di 35° sopra l'asse x (35° a nord del punto cardinale est).

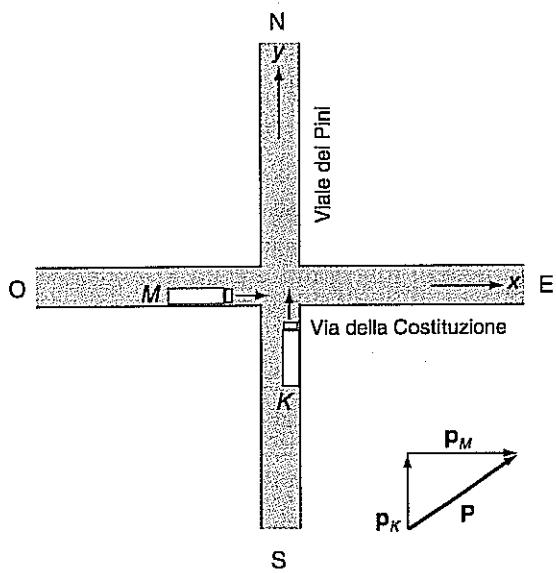


Figura 10.6
Esempio 10.5.

Quindi possiamo concludere che *la variazione della quantità di moto \mathbf{P} di un sistema è determinata soltanto dalle forze esterne*:

$$\Sigma \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (10.12)$$

Sia le forze interne che quelle esterne possono far variare le quantità di moto dei singoli corpi del sistema, ma la terza legge di Newton implica che la variazione della quantità di moto totale \mathbf{P} dovuta alle forze interne sia sempre nulla. La variazione della quantità di moto totale del sistema dipende soltanto dalle forze esterne. Non è possibile sollevarsi tirando su i lacci delle scarpe!

10.5 LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

La prima legge di Newton stabilisce che, se la forza risultante che agisce su un punto materiale è nulla, il punto materiale si muove in linea retta con velocità costante (in un sistema di riferimento inerziale). Se \mathbf{v} è costante nel tempo, anche $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ è costante

Conservazione della quantità di moto di un sistema.

nel tempo. In altre parole, quando la forza risultante che agisce su un punto materiale nulla, la quantità di moto del punto materiale si conserva.

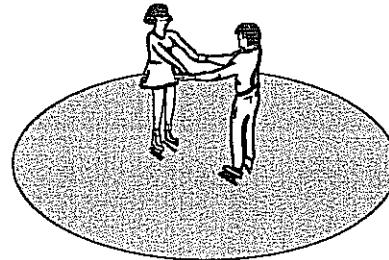
La seconda legge di Newton per un sistema di punti materiali, esposta dall'Equazione (10.12), stabilisce che, se $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$, allora $d\mathbf{P}/dt = 0$ e la quantità di moto totale del sistema non varia nel tempo. Si noti che, per ottenere l'equazione (10.12), si è utilizzata anche la terza legge di Newton in base alla quale si è constatato che la somma delle forze interne è identicamente nulla. Questa conclusione prende nome di legge di conservazione della quantità di moto: *quando la risultante delle forze esterne agenti su un sistema è nulla, la quantità di moto totale del sistema si conserva*. In altri termini, la quantità di moto di un sistema isolato non varia nel tempo. Si ricordi inoltre che la terza legge di Newton afferma che le due forze di azione-reazione, oltre ad avere somma nulla, stanno anche sulla stessa retta. Mentre la somma nulla porta alla conservazione della quantità di moto totale di un sistema, vedremo avanti come il fatto che stiano sulla stessa retta porta a un'altra importantissima legge di conservazione. L'insieme di queste due nuove leggi di conservazione porterà a una formulazione generale di quello che viene chiamato il terzo principio della dinamica, che altro non è che l'estensione della terza legge di Newton (che spesso viene ripetuta come il *terzo principio della dinamica* secondo Newton). Supponiamo che la forza esterna risultante che agisce su un sistema sia nulla; sia \mathbf{P}_i la quantità di moto iniziale del sistema e \mathbf{P}_f la quantità di moto del sistema in un qualsiasi istante successivo. La conservazione della quantità di moto si esprime allora nella forma

$$\boxed{\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f} \quad \text{o} \quad \boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0}$$

Esempio 10.6

Due pattinatori si muovono orizzontalmente sul ghiaccio senza attrito apprezzabile, dirigendosi l'uno verso l'altro, come nella Figura 10.7. Uno di essi ha una massa di 50 kg e il modulo della sua velocità è di 3.0 m/s; l'altro ha una massa di 75 kg mentre il modulo della sua velocità è di 2.5 m/s. Essi danno reciprocamente una spinta e tornano indietro lungo le traiettorie iniziali. Se il pattinatore di massa 75 kg si allontana con una velocità di modulo 4.0 m/s, qual è la componente della velocità con cui si allontana l'altro pattinatore?

Figura 10.7
Esempio 10.6.



Soluzione

La quantità di moto del sistema costituito dai due pattinatori deve essere uguale prima del contatto e dopo di esso, perché le uniche forze esterne significative che agiscono sui pattinatori sono quelle esercitate dalla Terra e le forze normali, e queste hanno somma zero. Le forze d'attrito orizzontali esercitate dal ghiaccio sono trascurabili. Se consideriamo il sistema costituito soltanto dai due pattinatori, le forze esterne hanno risultante nulla. Quindi la quantità di moto iniziale e la quantità di moto finale del sistema sono uguali:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$$

Dal momento che tutte le velocità giacciono nella medesima direzione orizzontale, possiamo ragionare sulle sole componenti in tale direzione:

$$(50 \text{ kg})(3.0 \text{ m/s}) + (75 \text{ kg})(-2.5 \text{ m/s}) = (50 \text{ kg})v_{xf} + (75 \text{ kg})(4.0 \text{ m/s})$$

$$v_{xf} = \frac{-340 \text{ kg m/s}}{50 \text{ kg}} = -6.8 \text{ m/s}$$

Esempio 10.7

Un cannone di massa $M = 1200 \text{ kg}$ spara un proiettile di massa $m = 64 \text{ kg}$ con una velocità di uscita, misurata rispetto al cannone, $v = 62 \text{ m/s}$. Subito dopo lo sparo, qual è la velocità V del cannone e la velocità del proiettile rispetto al terreno? Quant'è l'energia liberata dalle polveri da sparo? Si considerino sia il cannone sia il proiettile come due punti materiali.

Soluzione

Non essendoci forze esterne efficaci durante lo sparo, la quantità di moto totale del sistema cannone-proiettile prima dello sparo deve essere uguale a quella subito dopo. Poiché prima dello sparo vale zero (cannone e proiettile sono fermi), imponendo che $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$ e ricordando che la velocità del proiettile rispetto al terreno è data da $v_{\text{terreno}} = V + v$ si ha

$$0 = MV + m(V + 62)$$

da cui si ottiene $0 = 1200V + 64(V + 62)$ e quindi $V = -3.14 \text{ m/s}$ e $v_{\text{terreno}} = 58.9 \text{ m/s}$.

Poiché l'energia si conserva, tutta l'energia che hanno il cannone e il proiettile dopo lo sparo, e che prima dello sparo era nulla, sarà dovuta al lavoro fatto dalle polveri da sparo. Quindi si può scrivere che l'energia liberata dalle polveri è uguale alla somma delle energie cinetiche del cannone e del proiettile: $E_{\text{polveri}} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(v_{\text{terreno}})^2 \cong 1.2 \cdot 10^5 \text{ J}$.

Si osservino analogie e differenze tra questa legge e la legge di conservazione dell'energia meccanica. In entrambi i casi c'è una condizione relativa alle forze, ma, mentre per la conservazione dell'energia *tutte* le forze che compiono lavoro devono essere conservative, per la conservazione della quantità di moto non ci deve essere *una forza esterna risultante diversa da zero*. Un'ulteriore differenza dipende dal fatto che la quantità di moto è un vettore: quando \mathbf{P} si conserva, rimane invariata sia in modulo che in direzione, mentre l'energia è uno scalare e quindi se ne conserva l'entità.

Il fatto che \mathbf{P} sia un vettore e che $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$ sia una equazione vettoriale porta al fatto che, se in una direzione fissata la somma delle forze esterne è nulla, in tale direzione la quantità di moto totale rimane costante. Ciò è una conseguenza del fatto che l'equazione precedente si può scrivere per componenti, cioè

$$\left(\sum F_{\text{ext}} \right)_x = \frac{dP_x}{dt} \quad \left(\sum F_{\text{ext}} \right)_y = \frac{dP_y}{dt} \quad \left(\sum F_{\text{ext}} \right)_z = \frac{dP_z}{dt}$$

e queste tre equazioni sono *indipendenti*. Come esempio, si può considerare un oggetto che cade verticalmente sulla Terra: se durante la caduta l'oggetto, a causa di forze interne, si rompe in due parti, poiché l'unica forza esterna è verticale (la forza peso), lungo la direzione orizzontale la quantità di moto del sistema rimane costante, cioè il valore della proiezione della quantità di moto lungo la direzione orizzontale rimane lo stesso prima e dopo la rottura.

La quantità di moto delle singole particelle può variare anche se la quantità di moto totale del sistema si conserva. Le forze interne al sistema, infatti, possono far variare le quantità di moto delle singole particelle, ma non la quantità di moto totale del sistema.

La legge di conservazione della quantità di moto è particolarmente utile quando si tratta di mettere in relazione lo stato iniziale di un sistema isolato con il suo stato finale. La struttura interna del sistema può cambiare, ma la sua quantità di moto totale rimane costante.

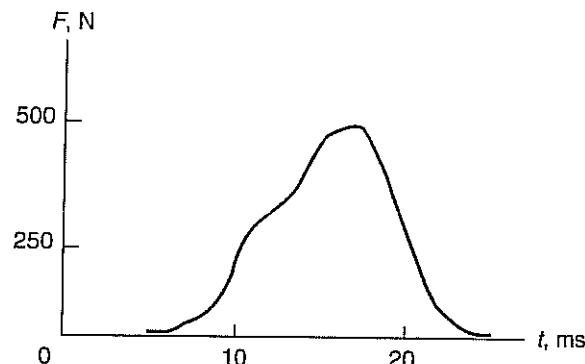
La quantità di moto si conserva quando $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$.

10.6 L'IMPULSO

Supponiamo che una palla da tennis sia colpita da una racchetta. La forza esercitata dalla racchetta sulla palla, \mathbf{F}_{rp} , cambia la quantità di moto della palla. Durante l'intervallo di tempo nel quale la racchetta è a contatto con la palla, la forza che la racchetta esercita sulla palla è molto grande rispetto ad ogni altra forza che agisce sulla palla. La Figura 10.8 mostra quale potrebbe essere l'andamento temporale della forza esercitata dalla racchetta durante un simile evento. È da notare che la forza viene esercitata soltanto per 10 millisecondi circa.

Figura 10.8

Il grafico mostra come potrebbe variare nel tempo la forza impulsiva esercitata su una palla da tennis.



Forze che vengono esercitate per un tempo limitato sono chiamate *forze impulsive*. Spesso l'intensità di una forza impulsiva è così grande che il suo effetto è apprezzabile anche se la sua durata è breve. Durante il brève intervallo di tempo in cui una forza impulsiva viene esercitata su un corpo, gli effetti delle altre forze possono spesso essere trascurati, perché queste altre forze non sono abbastanza intense da avere un effetto significativo in un tempo così breve. In casi del genere, basta considerare la sola forza impulsiva durante il tempo in cui essa agisce.

Quando soltanto una forza \mathbf{F} è significativa, si può scrivere la seconda legge di Newton nella forma

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{ossia} \quad d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt$$

Integrando questa equazione, si ha

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt$$

Il secondo membro di questa equazione è chiamato *impulso* di una forza e viene denotato con il simbolo \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt$$

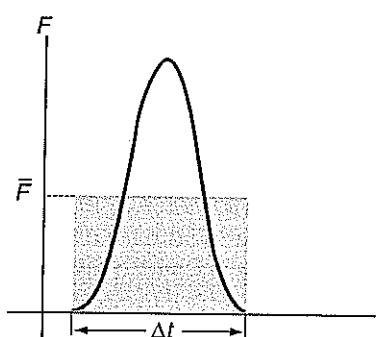
L'impulso della forza risultante è connesso alla variazione della quantità di moto di un corpo dalla

$$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p} \quad (10.13)$$

L'impulso ha le medesime dimensioni della quantità di moto. L'unità SI dell'impulso è il N · s.

Talvolta si conosce la variazione della quantità di moto di un corpo su cui ha agito una forza impulsiva, ma non si sa quale sia stato l'andamento della forza in funzione del tempo. Per caratterizzare una simile forza impulsiva la si confronta con la forza media costante $\bar{\mathbf{F}}$ che fornirebbe il medesimo impulso (e quindi produrrebbe la medesima variazione della quantità di moto) se agisse per lo stesso tempo della forza impulsiva. La Figura 10.9 illustra ciò graficamente. La relazione tra \mathbf{J} e $\bar{\mathbf{F}}$ è

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt = \bar{\mathbf{F}} \Delta t$$

**Figura 10.9**

La forza media esercitata in un evento è definita come quella forza costante che, se agisse per il medesimo intervallo di tempo della forza effettiva, produrrebbe il medesimo impulso. Nel grafico, l'area delimitata dalla curva della forza effettiva è uguale all'area del rettangolo avente per lati \bar{F} e l'intervallo di tempo Δt .

10.7 URTI

Il concetto di conservazione della quantità di moto è particolarmente utile quando si studiano gli urti. Un *urto* è un'interazione tra due o più corpi che ha luogo in una regione limitata del tempo e dello spazio (Figura 10.10). Uno o più corpi entrano in una regione e interagiscono; l'interazione si verifica rapidamente e in una regione spaziale limitata, dopodiché uno o più corpi lasciano tale regione. Le forze che agiscono tra i corpi durante l'urto possono essere grandi, ma non ci interessa analizzarle in modo particolareggiato. Noi ci chiediamo solamente che cosa entra nell'urto e che cosa ne esce. Ammettiamo che, durante il limitato intervallo di tempo in cui ha luogo l'urto, le forze esterne al sistema (formato dai corpi in interazione) forniscano un impulso trascurabile e quindi abbiano un effetto trascurabile sulla quantità di moto del sistema¹. Dal momento che l'influenza delle forze esterne è trascurabile, la quantità di moto del sistema si conserva, cioè la quantità di moto totale del sistema prima dell'urto è uguale alla quantità di moto totale del sistema dopo l'urto.

Uno degli obiettivi che ci proponiamo nello studio degli urti è di riuscire a mettere in relazione le velocità iniziali dei corpi con le loro velocità finali. Negli urti a livello atomico, per esempio, le velocità delle particelle uscenti vengono spesso utilizzate per studiare l'interazione tra le particelle entranti. Consideriamo un urto in cui entrano due particelle e da cui escono sempre due particelle. Se conosciamo le velocità iniziali e vogliamo trovare quelle finali, la conservazione della quantità di moto ci fornisce una equazione vettoriale che mette in relazione appunto velocità iniziali e finali. Ma vi sono sei incognite (dobbiamo determinare le tre componenti della velocità di ciascuna particella uscente), e la conservazione della quantità di moto fornisce soltanto le tre equazioni che si ottengono dalle tre componenti dell'equazione vettoriale. Se le incognite sono più numerose delle equazioni, il problema è in generale irresolubile. Anche se l'urto avviene in una dimensione, come nel caso di un urto su una rotaia ferroviaria, la conservazione della quantità di moto fornisce una sola equazione, mentre le incognite sono le componenti delle due velocità finali.

Possiamo fare appello ad altre informazioni. L'energia si conserva sempre, ma siccome può assumere molte forme, anche diverse dall'energia meccanica, ciò può non essere di grande utilità. Tuttavia, ci sono degli urti in cui si conserva l'energia cinetica presa a sé: urti di questo genere sono chiamati urti *elastici*. Viceversa, gli urti in cui l'energia cinetica non si conserva sono detti *anelastici*. A livello atomico gli urti sono spesso elastici, ma a livello macroscopico è sempre presente una certa anelasticità. Molti urti macroscopici, però, trasformano in altre forme di energia così poca energia cinetica che possono essere considerati elastici nei limiti di precisione delle misure. Per esempio, gli urti tra palle d'acciaio a basse velocità trasformano così poca energia cinetica che, nella maggior parte dei casi, possiamo trattarli come elastici.

Esempio 10.8

Stimare la forza media che si esercita su un chiodo quando lo si conficca con il martello in una tavola di legno.

Soluzione

Il martello esercita sul chiodo una forza impulsiva perché è in contatto con esso per un tempo molto breve, ma l'effetto sul chiodo è considerevole. Occorrerà stimare la variazione della quantità di moto della testa del martello, nonché il tempo durante il quale tale variazione si verifica. Da ciò sarà possibile calcolare la forza media agente sul martello (e, per la terza legge di Newton, la forza media che il martello esercita sul chiodo). Cominciamo a stimare l'intervallo di tempo durante il quale martello e chiodo sono a contatto.

Un secondo è all'incirca il tempo necessario per dire «cinquecento», e la testa del martello non rimane a contatto con il chiodo nemmeno per un decimo di tale tempo. Pertanto, prenderemo $\Delta t \approx 0.01$ s. La massa della testa del martello è di circa 0.3 kg. Il modulo della velocità del martello prima che colpisca il chiodo può essere stimato a partire dall'accelerazione che si imprime al martel-

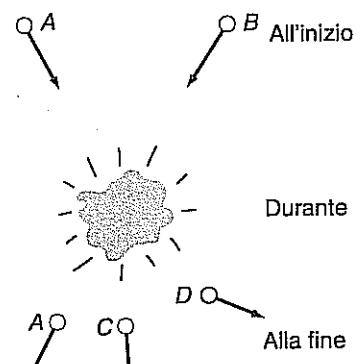


Figura 10.10

In un urto i punti materiali interagiscono solo per un intervallo di tempo limitato e in una regione spaziale limitata. Durante tale intervallo possono esercitarsi molte forze anche complicate, ma spesso si è interessati soltanto al risultato dell'urto. In questo caso si analizzano solamente lo stato iniziale e quello finale.

¹ Questa condizione non è verificata se le forze esterne sono forze vincolari (per esempio, se una palla urta una porta, i cardini possono esercitare forze impulsive molto grandi). Si suppone quindi in questo

lo, presumibilmente 4 volte maggiore dell'accelerazione di gravità, ossia pari a 40 m/s^2 , nonché dal tempo necessario per calare il martello, circa $\frac{1}{2} \text{ s}$. Ciò dà $v = at \approx 20 \text{ m/s}$. Il modulo della velocità del martello dopo l'urto dipende in una certa misura dal martello, dal chiodo, dalla tavola, ecc. Supponiamo che il martello rimbalzi con una velocità dimezzata rispetto a quella che aveva prima dell'urto. Scegliendo la direzione del moto del martello immediatamente prima che colpisca il chiodo come direzione y positiva, l'impulso fornito al martello è

$$\begin{aligned} J_y &= P_{fy} - P_{iy} \\ &= (0.3 \text{ kg})(-10 \text{ m/s}) - (0.3 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) \\ &= -9 \text{ kg} \times \text{m/s} = -9 \text{ N} \times \text{s} \end{aligned}$$

Abbiamo stimato che ciò si verifichi in 0.01 s . La componente della forza media agente sul martello è allora $\bar{F}_y = J_y/\Delta t$, ossia -900 N . Questa forza viene esercitata dal chiodo sul martello. Una forza uguale e opposta viene esercitata dal martello sul chiodo. Si tratta di una forza piuttosto grande, maggiore di quella che si potrebbe esercitare con una spinta continua. Come mostra la Figura 10.9, il valore massimo della forza effettiva potrebbe essere circa doppio della forza media, e forse di diverse migliaia di N.

Urti elastici in una dimensione. Consideriamo un urto elastico unidimensionale nel quale un corpo di massa m_1 , la cui velocità iniziale ha la sola componente v_{1i} lungo l'asse x , urta un corpo di massa m_2 , la cui velocità iniziale ha la sola componente v_{2i} sempre lungo l'asse x , come mostra la Figura 10.11. (Per brevità, omettiamo l'indice x nei simboli che rappresentano le componenti della velocità.) Dopo l'urto, le componenti della velocità lungo l'asse x sono rispettivamente v_{1f} e v_{2f} . La conservazione della quantità di moto fornisce

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (10.14)$$

e la conservazione dell'energia cinetica fornisce

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (10.15)$$

Lo stato finale in un urto elastico unidimensionale è determinato dallo stato iniziale.

Se sono assegnate le masse e le componenti delle velocità iniziali, si possono determinare le componenti delle velocità finali, e quindi lo stato finale del sistema.

Prima di prendere in esame alcuni casi particolari, deduciamo una relazione utile. Cominciamo a riscrivere le Equazioni (10.14) e (10.15):

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (10.16)$$

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \quad (10.17)$$

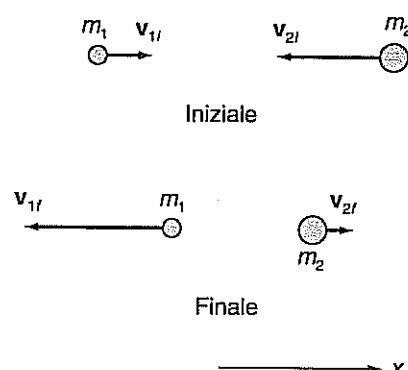
Dividendo l'Equazione (10.17) per l'Equazione (10.16) si ottiene

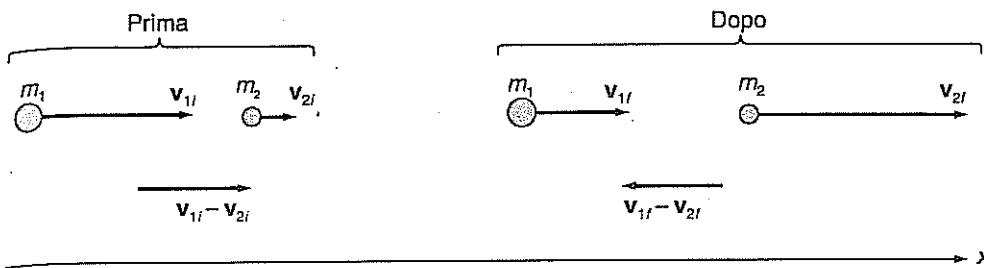
$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

che riscriviamo come

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad (10.18)$$

Figura 10.11
In un urto elastico unidimensionale, le componenti delle velocità finali v_{1f} e v_{2f} sono determinate dalle componenti delle velocità iniziali v_{1i} e v_{2i} .





Questa relazione mostra che la componente della velocità relativa dei corpi cambia segno in seguito a un urto elastico unidimensionale, ma il modulo della velocità relativa rimane lo stesso. (Si veda la Figura 10.12.)

Ora si consideri un urto elastico unidimensionale in cui il corpo 2 sia inizialmente in quiete, $v_{2i} = 0$. Occorrono due equazioni per poter ricavare le due componenti delle velocità finali. La conservazione della quantità di moto fornisce

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Come seconda relazione potremmo utilizzare sia la conservazione dell'energia cinetica che l'Equazione (10.18). È più semplice ricavare v_{2f} dall'Equazione (10.18), ottenendo $v_{2f} = v_{1i} + v_{1f}$, e sostituire questo valore nell'equazione che esprime la conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 (v_{1i} + v_{1f})$$

Risolvendo rispetto alle componenti delle velocità finali, si ottiene

$$v_{1f} = v_{1i} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (10.19)$$

$$v_{2f} = v_{1i} \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) \quad (10.20)$$

Le componenti delle velocità finali in un urto unidimensionale con un corpo inizialmente in quiete.

Quindi se, per esempio, una boccia da bowling (1) colpisce frontalmente un birillo (2) in quiete, il birillo schizza via con una velocità il cui modulo è uguale al rapporto $2m_1/(m_1 + m_2)$ moltiplicato per il modulo v_{1i} della velocità iniziale della boccia.

Prendiamo ora in esame alcuni casi particolari di urto elastico unidimensionale.

1. Masse uguali. (a) Se il corpo 2 è inizialmente in quiete, ponendo $m_1 = m_2$ nelle Equazioni (10.19) e (10.20) si ha $v_{1f} = 0$ e $v_{2f} = v_{1i}$. Se una palla in moto ne urta una identica in quiete, la palla inizialmente in quiete si allontana con la medesima velocità che aveva l'altra, e quest'ultima si ferma bruscamente. Come mostra la Figura 10.13, le palle si sono scambiate le velocità! (Non si è tenuto conto di eventuali moti rotatori delle palle.) (b) Se il corpo 2 non è inizialmente in quiete, si può utilizzare direttamente la conservazione della quantità di moto, Equazione (10.14), dividendo entrambi i membri per il valore comune delle due masse:

$$v_{1i} + v_{2i} = v_{1f} + v_{2f}$$

Sommmando e sottraendo quest'equazione all'Equazione (10.18) si ottiene

$$v_{1i} = v_{2f} \quad \text{e} \quad v_{2i} = v_{1f}$$

In altre parole, se le masse dei corpi sono uguali, essi, in un urto elastico unidimensionale (ossia frontale), si scambiano le velocità.

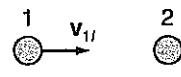
2. Il corpo 2 è inizialmente in quiete e $m_1 \gg m_2$. Dalle Equazioni (10.19) e (10.20), con una approssimazione, si ottiene:

$$v_{1f} \approx v_{1i} \left(\frac{m_1}{m_1} \right) = v_{1i}$$

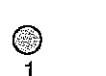
$$v_{2f} \approx v_{1i} \left(\frac{2m_1}{m_1} \right) = 2v_{1i}$$

Figura 10.12

In un urto elastico unidimensionale, la componente della velocità relativa $v_1 - v_2$ cambia segno ma mantiene il medesimo valore assoluto.



Prima



Dopo

Figura 10.13

In un urto elastico unidimensionale tra due particelle della medesima massa, una delle quali è inizialmente in quiete, la particella in moto si arresta e la particella in quiete acquista la velocità dell'altra.

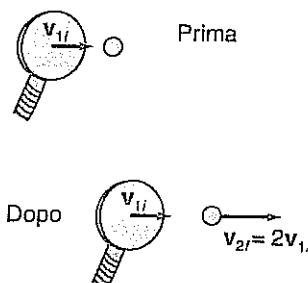


Figura 10.14

Una pallina da ping-pong colpita da una racchetta molto più pesante si allontana con una velocità doppia di quella della racchetta.

Le componenti delle velocità finali in un urto elastico unidimensionale.

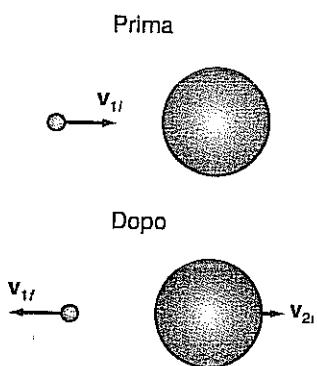


Figura 10.15

Una pallina da ping-pong scagliata contro una boccia da bowling inverte la propria velocità, mentre la boccia rimane praticamente ferma.

La velocità del corpo di grande massa rimane praticamente invariata, mentre il corpo di piccola massa si allontana con una velocità doppia di quella dell'altro. Supponiamo che una pallina da ping-pong inizialmente in quiete venga colpita da una racchetta di massa molto maggiore. La pallina si allontana dalla racchetta con una velocità doppia di quella iniziale della racchetta stessa, mentre quest'ultima prosegue con velocità sostanzialmente uguale a quella che aveva prima di colpire pallina. Si veda la Figura 10.14.

3. Il corpo 2 è inizialmente in quiete e $m_1 \ll m_2$. Di nuovo dalle Equazioni (10.19) (10.20), con un'analogia approssimazione, si ottiene:

$$v_{1f} \approx v_{1i} \left(\frac{-m_2}{m_2} \right) = v_{1i}$$

$$v_{2f} \approx v_{1i} \left(\frac{2m_1}{m_2} \right) \approx 0$$

dove $v_{2f} \approx 0$ perché $m_1/m_2 \approx 0$. Il corpo di grande massa rimane praticamente fermo, mentre il corpo di piccola massa rimbalza all'indietro con velocità il cui modulo è sostanzialmente uguale a quello della velocità iniziale. Se si scaglia una pallina da ping-pong contro una boccia da bowling, quest'ultima rimane quasi ferma, mentre la pallina da ping-pong rimbalza all'indietro con velocità di modulo pressoché invariato (Figura 10.15).

Se entrambi i corpi hanno componente della velocità iniziale diversa da zero, si deve risolvere il sistema formato dalle Equazioni (10.14) e (10.15) rispetto alle due componenti delle velocità finali incognite, v_{2f} e v_{1f} . Il procedimento algebrico è semplice ma tedioso, e formerà l'oggetto del Problema 10.2. Il risultato è

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (10.21)$$

$$v_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_{2i} + \frac{2m_1}{m_2 + m_1} v_{1i} \quad (10.22)$$

Urti anelastici in una dimensione. Se un urto non è elastico, il calcolo delle velocità finali a partire dalle velocità iniziali di solito non è semplice. La quantità di energia perduta dipende da quanto anelastico è l'urto. Un particolare urto anelastico, in cui i corpi dopo la collisione restano uniti, viene detto *completamente anelastico*.

Se un urto unidimensionale è completamente anelastico, c'è una sola velocità finale v_f , che può essere determinata in base alla conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Si noti che, mentre la quantità di moto si conserva in tutti gli urti (perché trascuriamo le forze esterne)², l'energia cinetica *non* si conserva in un urto anelastico.

Esempio 10.9

Si sa che, in un reattore nucleare, un neutrone liberato in un evento di fissione deve essere rallentato perché abbia una ragionevole probabilità di provocare la fissione di un altro nucleo. I neutroni vengono rallentati dagli urti con i nuclei di un materiale detto *moderatore*. Questo processo è analogo a quello in cui la palla da biliardo colpita dalla stecca viene rallentata dagli urti con le palle che si trovano sul piano del biliardo. In alcuni reattori viene usato come moderatore l'idrogeno presente nell'acqua, mentre in altri viene usato il carbonio. Ammettiamo che questi urti siano elastici, e che il bersaglio sia inizialmente in quiete. Di quale frazione si riduce l'energia cinetica del neutrone in un urto centrale con ciascuno di questi nuclei? Le masse del neutrone, del nucleo dell'idrogeno e di quello del carbonio stanno tra loro circa come 1 : 1 : 12.

² Si ricordi la nota precedente (N.d.T.)

Soluzione

Il nucleo bersaglio è sostanzialmente in quiete. Usando l'indice n per il neutrone e b per il nucleo bersaglio, dall'Equazione (10.19) si ottiene

$$\begin{aligned} v_{nf} &= \frac{m_n - m_b}{m_n + m_b} v_{ni} \\ K_{nf} &= \frac{1}{2} m_n v_{nf}^2 = \frac{1}{2} m_n \left(\frac{m_n - m_b}{m_n + m_b} \right)^2 \\ v_{ni}^2 &= \left(\frac{m_n - m_b}{m_n + m_b} \right)^2 K_{ni} \end{aligned}$$

Quindi un urto elastico centrale con un nucleo di idrogeno arresta il neutrone, poiché $m_b \approx m_n$. In un'analogia collisione con un nucleo di carbonio, $K_{nf} \approx (11/13)^2 K_{ni}$, e l'energia cinetica del neutrone si riduce soltanto della frazione $1 - (11/13)^2 = 0.28$.

Esempio 10.10.

La velocità con cui un proiettile esce dalla bocca di un fucile viene chiamata velocità iniziale. Il pendolo balistico è un dispositivo per la misura di tale velocità. La Figura 10.16 illustra il funzionamento del dispositivo. Supponiamo che un proiettile di massa 13.6 g venga sparato in un blocco di legno di massa 5.42 kg, il quale costituisce il peso di un pendolo di lunghezza $L = 372$ mm. Il proiettile esercita sul blocco una forza impulsiva, e il blocco con il proiettile al proprio interno oscilla in avanti percorrendo un arco di 26.7° . Qual è la velocità iniziale del proiettile?

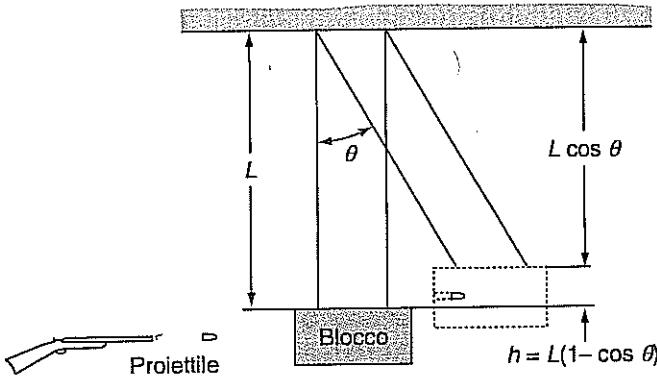


Figura 10.16
Esempio 10.10.

Soluzione

Consideriamo il sistema costituito dal blocco e dal proiettile. Nella prima parte del processo, il proiettile e il blocco di legno si urtano in modo completamente anelastico, dal momento che il proiettile rimane conficcato nel blocco. L'urto è anche impulsivo, avendo luogo in un intervallo di tempo così breve che il blocco non si sposta in misura apprezzabile durante l'urto, e le forze esterne hanno effetti trascurabili durante l'urto. Essendo l'urto anelastico, l'energia cinetica non si conserva: dunque, durante l'urto la quantità di moto si conserva ma l'energia cinetica no.

Nella seconda parte del processo, il blocco (con il proiettile al proprio interno) oscilla in avanti in seguito all'urto, mentre la forza gravitazionale esterna lo rallenta gradualmente. Durante questo periodo di tempo l'energia meccanica si conserva (è soltanto la forza gravitazionale a compiere lavoro), ma la quantità di moto no. La gravità e la corda di sostegno forniscono le forze esterne che agiscono sul sistema durante il tempo relativamente lungo dell'oscillazione in avanti.

Analizziamo separatamente le due parti del processo, cominciando dall'urto. Siano m_1 la massa del proiettile, v_{1i} la componente della sua velocità iniziale, m_2 la massa del blocco e v_f la componente della velocità finale. Per l'urto anelastico,

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(13.6 \text{ g}) v_{1i} + 0}{5.43 \text{ kg}} = (2.50 \times 10^{-3}) v_{1i} = v_{1i} \end{aligned}$$

Passiamo ora all'oscillazione in avanti. Stabiliamo una relazione tra v_f e l'altezza massima h raggiunta dal blocco e dal proiettile, applicando la conservazione dell'energia meccanica all'oscillazione:

$$\begin{aligned} K_f + U_f &= K_i + U_i \\ 0 + (m_1 + m_2)gh &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 + 0 \\ v_f^2 &= 2gh \end{aligned}$$

Si noti che v_f è contemporaneamente la velocità finale dell'urto e la velocità iniziale dell'oscillazione in avanti. L'altezza raggiunta dal blocco è mostrata dalla Figura 10.16:

$$h = L - L \cos 26.7^\circ = 372 \text{ mm} (1 - \cos 26.7^\circ) = 39.7 \text{ mm}$$

Quindi

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80 \text{ m/s})(0.0397 \text{ m})} = 0.882 \text{ m/s}$$

e

$$v_{1i} = \frac{0.882 \text{ m/s}}{2.50 \times 10^{-3}} = 352 \text{ m/s}$$

Sicché la velocità del proiettile immediatamente prima che urti il blocco è di 352 m/s.

La conservazione della quantità di moto e quella dell'energia non determinano completamente il risultato di un urto in due o in tre dimensioni.

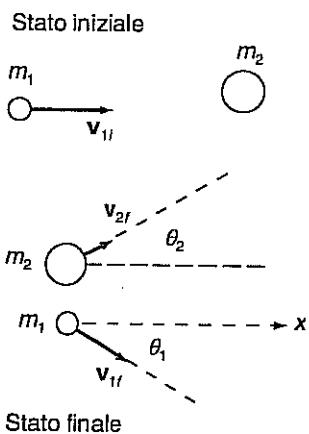


Figura 10.17

I simboli utilizzati per un urto in due dimensioni. La particella 1, con velocità iniziale v_{1i} , colpisce la particella 2, che inizialmente è in quiete. Dopo l'urto le particelle hanno velocità v_{1f} e v_{2f} .

Urti in due e in tre dimensioni. Consideriamo un urto tra due particelle che si muovono in due dimensioni. Anche ammesso di sapere che l'urto è elastico, la conservazione della quantità di moto e la conservazione dell'energia forniscono soltanto due equazioni, una per la conservazione di ciascuna componente della quantità di moto e una per la conservazione dell'energia. Ma ognuna delle velocità finali ha due componenti, e quindi vi sono quattro incognite. Per esempio, consideriamo l'urto in due dimensioni rappresentato schematicamente nella Figura 10.17. Prima dell'urto, la particella 1 si muove nella direzione x con velocità di modulo v_{1i} e la particella 2 è in quiete. Dopo l'urto, la particella 1 si muove sotto l'asse x , nella direzione individuata dall'angolo θ_1 , con una velocità di modulo v_{1f} , e la particella 2 si muove sopra l'asse x , nella direzione individuata dall'angolo θ_2 , con una velocità di modulo v_{2f} . La conservazione della quantità di moto fornisce due equazioni, una per la direzione x :

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2$$

e una per la direzione y :

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta_1 - m_2 v_{2f} \sin \theta_2$$

Se inoltre l'urto è elastico, la conservazione dell'energia fornisce un'altra equazione:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Conoscendo lo stato iniziale del sistema (m_1 , m_2 e v_{1i}) avremmo bisogno di quattro equazioni per calcolare lo stato finale (v_{1f} , v_{2f} , θ_1 e θ_2). A meno che non disponi di altre informazioni, lo stato finale non può essere determinato. Ciò è una conseguenza del fatto che il risultato di un urto elastico in due o in tre dimensioni non è determinato soltanto dalle leggi di conservazione.

Come si possono ottenere le ulteriori informazioni necessarie per determinare lo stato finale di un urto di questo tipo? Nello studio sperimentale degli urti bidimensionali spesso si misura la direzione nella quale si allontana una delle due particelle: tale informazione aggiuntiva determina completamente gli stati finali di entrambe le particelle. Gli esperimenti sugli urti sono importanti perché la distribuzione di questi stati fornisce informazioni sulle forze che agiscono tra le particelle.

Esempio 10.11

Consideriamo l'urto tra due palle da biliardo illustrato nella Figura 10.18. La fotografia è stata scattata con una lampada stroboscopica che produceva 30 lampi al secondo. La distanza tra le immagini contigue della palla proveniente da sinistra è 0.108 m. (a) Qual è il rapporto tra le masse delle palle? (b) L'energia cinetica si conserva nell'urto? Si determinino le velocità effettuando delle misure sulla fotografia.

Soluzione

(a) Il modulo della velocità della palla proveniente da sinistra è $0.108 \text{ m}/(1/30 \text{ s}) = 3.24 \text{ m/s}$. Le distanze tra le successive immagini di questa palla dopo l'urto e tra le successive immagini della palla bersaglio sono rispettivamente 0.442 e 0.860 volte quella della palla incidente. Quindi le velocità finali hanno modulo 1.43 m/s per la palla incidente e 2.79 m/s per la palla bersaglio. La traiettoria uscita superiore e quella inferiore formano angoli di 53° e 26° con la traiettoria di ingresso. Per facilità ammettiamo che l'asse x giaccia lungo la direzione della velocità della palla incidente.

somma delle componenti y della quantità di moto è nulla prima dell'urto, e quindi anche dopo. Le componenti y delle velocità di uscita sono

$$v_{y1} = (1.43 \text{ m/s}) \sin 59^\circ = 1.23 \text{ m/s}$$

$$v_{y2} = (2.79 \text{ m/s}) \sin (-26^\circ) = -1.22 \text{ m/s}$$

Nei limiti di errore delle nostre misure queste due componenti hanno il medesimo valore numerico, e quindi, perché la componente y della quantità di moto sia nulla, le masse delle due palle devono essere uguali.

(b) Prima dell'urto l'energia cinetica era

$$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}m(3.24 \text{ m/s})^2 = \frac{1}{2}m(10.5 \text{ m}^2/\text{s}^2)$$

e dopo l'urto l'energia cinetica è

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 &= \frac{1}{2}m(1.43 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}m(2.79 \text{ m/s})^2 \\ &= \frac{1}{2}m(9.83 \text{ m}^2/\text{s}^2) \end{aligned}$$

Vediamo così che l'energia cinetica non sembra essersi conservata. Se si osserva con attenzione la fotografia, si può constatare però che le palle dopo l'urto ruotano su se stesse: ciò assorbe energia in un modo che sarà descritto nel Capitolo 12. Inoltre è possibile che sulle palle siano state esercitate forze impulsive da parte del tavolo sul quale esse rotolano.

È da notare che in base alle nostre misure siamo riusciti a scoprire alcune cose relativamente ai corpi che prendono parte all'urto: le loro masse sono uguali e inoltre essi possono assorbire energia al proprio interno. Misure di questo tipo effettuate sugli urti tra particelle elementari sono tra le nostre principali fonti di informazione circa la natura del mondo submicroscopico.

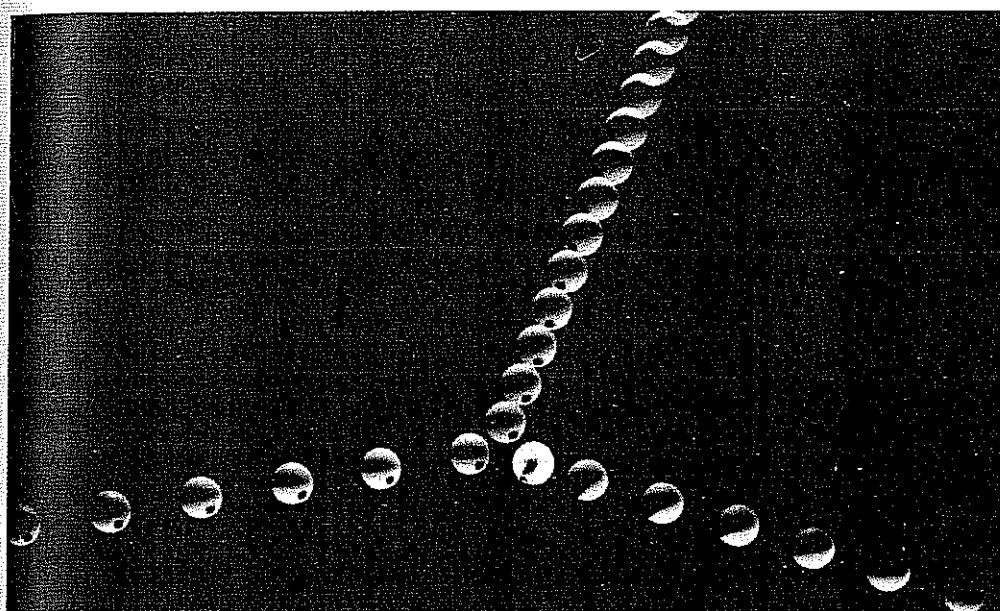


Figura 10.18 Esempio 10.11. (Bernice Abbott/Photo Researchers).

Esempio 10.12

Si abbia una palla di massa m che urta una parete fissa con velocità v e con un angolo ϑ rispetto alla direzione perpendicolare alla superficie della parete. La palla rimbalza uscendo dall'urto con lo stesso angolo e lo stesso modulo della velocità. Se Δt è il tempo di collisione con la parete, calcolare qual è la forza media esercitata su quest'ultima. A parità di tempo di collisione, qual è la condizione per cui la forza media è massima? Se l'urto fosse completamente anelastico, cioè la palla si incollasse alla parete, la forza media esercitata sarebbe minore o maggiore?

Soluzione

Lungo la direzione perpendicolare alla parete, che chiameremo asse x , la componente della quantità di moto è $mv \cos \vartheta$ prima dell'urto e $-mv \cos \vartheta$. Quindi la variazione della quantità di moto, cioè l'impulso, è

$$\Delta p = \Delta p_x = mv \cos \vartheta - (-mv \cos \vartheta) = 2mv \cos \vartheta.$$

Allora la forza media esercitata sulla parete è

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv \cos \vartheta}{\Delta t}$$

Tale forza è massima quando $\cos \vartheta$ è uguale a 1, cioè quando la palla colpisce la parete perpendicularly a essa. Se la palla si incolla alla parete, la sua quantità di moto dopo l'urto è nulla e quindi l'impulso è dato da $\Delta p = \Delta p_x = mv \cos \vartheta$ e la forza media esercitata sulla parete è $\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv \cos \vartheta}{\Delta t}$, cioè la metà del valore che ha se la palla rimbalza elasticamente.

10.8 IL MOTO DEI RAZZI

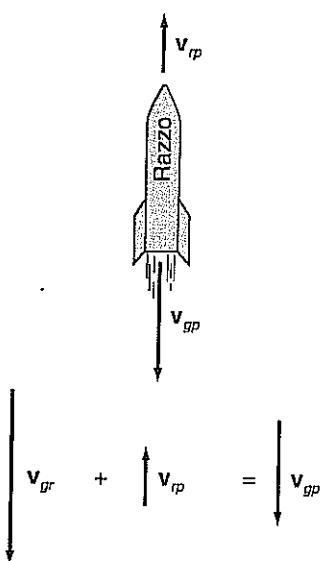


Figura 10.19

I simboli utilizzati nel problema del razzo. Il razzo ha velocità v_{rp} rispetto alla piattaforma di lancio, che è un sistema di riferimento inerziale. I gas di scarico hanno velocità v_{gp} rispetto a questo sistema di riferimento. La velocità dei gas di scarico rispetto al razzo, v_{gr} , sommata alla velocità del razzo rispetto alla piattaforma di lancio, v_{rp} , fornisce la velocità dei gas di scarico rispetto alla piattaforma di lancio, v_{gp} , come si è visto nel Paragrafo 4.6.

Il problema del moto di un razzo è alquanto diverso dai problemi che abbiamo preso in considerazione finora per il fatto che, quando accelera, il razzo espelle della massa all'indietro. Quindi il razzo non ha massa costante. Cominciamo a considerare le variazioni delle quantità di moto che si verificano nel sistema costituito dal razzo e dai gas di scarico.

In un certo istante iniziale, sia v_{rp} la velocità del razzo rispetto a un osservatore posto sulla piattaforma di lancio, sia m la massa del razzo, sia ΔM la massa del carburante espulso all'indietro in un breve intervallo di tempo Δt , e sia v_{gr} la velocità dei gas di scarico rispetto al razzo (Figura 10.19). La quantità di moto iniziale del sistema rispetto all'osservatore posto a terra è

$$P_i = mv_{rp}$$

Dopo l'intervallo di tempo Δt la massa del razzo è $m - \Delta M$, la velocità del razzo è $v_{rp} + \Delta v_{rp}$, la massa dei gas di scarico è ΔM , e la velocità dei gas di scarico rispetto a un sistema di riferimento inerziale (la piattaforma di lancio) è v_{gp} . Quindi al tempo $t + \Delta t$ la quantità di moto del sistema è

$$P_f = (m - \Delta M)(v_{rp} + \Delta v_{rp}) + (\Delta M)v_{gp}$$

La velocità dei gas di scarico rispetto alla piattaforma di lancio è connessa alla velocità nota dei gas rispetto al razzo, v_{gr} , da

$$v_{gp} = v_{gr} + v_{rp}$$

Si noti che questa è un'equazione vettoriale, e siccome v_{gr} ha di solito direzione opposta a v_{rp} , $|v_{gp}|$ è di norma minore di $|v_{gr}|$ (Figura 10.19). Combinando le ultime due equazioni si ha

$$P_f = (m - \Delta M)(v_{rp} + \Delta v_{rp})(\Delta M)(v_{gr} + v_{rp})$$

ossia

$$P_f = mv_{rp} + (m - \Delta M)\Delta v_{rp} + (\Delta M)v_{gr}$$

Per la seconda legge di Newton, $\Sigma F_{ext} = dP/dt \approx (P_f - P_i)/\Delta t$, cosicché

$$\Sigma F_{ext} = \frac{m\Delta v_{rp} - (\Delta M)(\Delta v_{rp}) + (\Delta M)v_{gr}}{\Delta t}$$

Ora consideriamo il limite di questa espressione quando Δt tende a zero. Il termine $(\Delta M)(\Delta v_{rp})/\Delta t$ tende a zero perché contiene il prodotto di due infinitesimi nel denominatore. Dal momento che ΔM è la massa espulsa dal razzo ed m è la massa del razzo, $\Delta M = -dm$ e il limite di $\Delta M/\Delta t$ per Δt che tende a zero è $-dm/dt$. Quindi

$$\Sigma F_{ext} = m \frac{dv_{rp}}{dt} - v_{gr} \frac{dm}{dt}$$

ossia

$$m \frac{dv_{rp}}{dt} = \Sigma F_{ext} + v_{gr} \frac{dm}{dt} \quad (10.2)$$

L'equazione del razzo.

Il modulo di $v_{gr} dm/dt$ è chiamato *spinta* del razzo, e ha le dimensioni di una forza.

La seconda legge di Newton per un sistema, $\Sigma F_{ext} = dP/dt$, è stata dedotta ammettendo che la massa del sistema fosse costante. Finora abbiamo considerato il sistema costituito dal razzo e dai gas di scarico. Ma non ci interessano i gas di scarico dopo che sono stati espulsi dal razzo. Per concentrare la nostra attenzione sul razzo, cambiamo continuamente ciò che consideriamo come sistema, eliminandone il carburante via via che viene espulso sotto forma di gas di scarico. In questo sistema che cambia continuamente, v_{rp} è la velocità del razzo all'istante t , e m è la massa del razzo all'istante t .

Per semplicità, ora ammettiamo che il razzo si trovi nello spazio interstellare, dove ΣF_{ext} è zero, e che il motore del razzo mantenga costante la spinta. Possiamo allora riscrivere l'Equazione (10.23) come

$$dv_{rp} = v_{gr} \frac{dm}{m}$$

e integrarla

$$\int dv_{rp} = v_{gr} \int \frac{dm}{m}$$

da cui, eseguendo l'integrazione,

$$(v_{rp})_f - (v_{rp})_i = v_{gr} \left(\ln \frac{m_f}{m_i} \right) \quad (10.24)$$

L'Equazione (10.24) fornisce la variazione della velocità del razzo e mostra che, quanto maggiore è la velocità di scarico v_{gr} , tanto più efficiente è la propulsione del razzo.

Esempio 10.13

Un limite superiore pratico per v_{gr} , se si usano combustibili chimici, è di circa 2.5 km/s. Se, nello spazio esterno, un razzo a propellente chimico di questo tipo, partendo da fermo in un sistema di riferimento inerziale, brucia quattro quinti della propria massa, qual è la sua velocità finale?

Soluzione

Prendiamo la componente dell'Equazione (10.24) nella direzione del moto del razzo, e supponiamo che i gas di scarico siano espulsi nella direzione opposta a quella del moto del razzo. Sia $v_i = 0$ la componente della velocità iniziale del razzo, sia v_f la componente della velocità finale del razzo, e sia $-V = -v_{gr}$ la componente della velocità dei gas di scarico rispetto al razzo. Allora

$$v_f = -V \left(\ln \frac{m/5}{m} \right) = V \ln 5$$

$$v_f = (2.5 \text{ km/s}) \ln 5 = 4 \text{ km/s}$$

Considerando il logaritmo che compare nell'Equazione (10.24), ci si rende conto che è difficile raggiungere velocità elevate con un solo razzo. Per esempio, se si vuole che v_f sia pari a $10V$,

$$\ln \frac{m_i}{m_f} = \frac{v_f - v_i}{V} = \frac{10V}{V} = 10$$

$$m_i = m_f e^{10} = 2.2 \times 10^4 m_f$$

e il carico utile risulta inferiore allo 0.1 per cento della massa iniziale del razzo (carico utile + combustibile). Questa difficoltà può essere superata costruendo razzi a più stadi, come si vedrà nel Problema 10.8.

RIEPILOGO

In questo capitolo ci sono due punti essenziali:

1. Il centro di massa di un sistema di punti materiali si muove come se fosse un punto materiale con la massa dell'intero sistema e su di esso agissero le forze esterne al sistema.
2. La quantità di moto totale di un sistema di punti materiali si conserva se la risultante delle forze esterne applicate è zero.

Paragrafo 10.2 Il centro di massa

La posizione del centro di massa di un sistema di punti materiali è definita da

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (10.1)$$

Per un sistema continuo si ha $M\mathbf{r}_{cm} = \int \rho \mathbf{r} dV$.

Paragrafo 10.3 Il moto del centro di massa

La velocità e l'accelerazione del centro di massa di un sistema sono

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{M}$$

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{\sum m_i \mathbf{a}_i}{M}$$

Dalla seconda e dalla terza legge di Newton si ottiene

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M \mathbf{a}_{cm}$$

Paragrafo 10.4 La quantità di moto

La quantità di moto di una particella è definita da

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}$$

La seconda legge di Newton può essere scritta nella forma

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

La quantità di moto totale \mathbf{P} di un sistema di particelle è correlata alle forze esterne applicate al sistema dalla

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (10.12)$$

Paragrafo 10.5 La conservazione della quantità di moto

Quando la risultante delle forze esterne è zero, la quantità di moto si conserva.

Paragrafo 10.6 L'impulso

L'impulso di una forza è definito da

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt$$

Quando a un corpo è applicata un'unica forza impulsiva, la variazione della quantità di moto del corpo è

$$\Delta \mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \quad (10.13)$$

Paragrafo 10.7 Urti

Gli urti in cui si conserva l'energia cinetica sono detti elastici, gli urti in cui l'energia cinetica non si conserva sono detti anelastici. In due e in tre dimensioni, la conservazione della quantità di moto e quella dell'energia cinetica non bastano a determinare i risultati di un urto elastico tra due corpi; per determinare gli stati finali dei corpi che si urtano è necessario procurarsi altri dati.

Paragrafo 10.8 Il moto dei razzi

L'equazione di moto di un razzo è

$$m \frac{d\mathbf{v}_{rp}}{dt} = \sum \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{v}_{gr} \frac{dm}{dt} \quad (10.2)$$

QUESITI

- 10.1** Qual è la massima quantità di moto che tu abbia mai avuto? In quale sistema di riferimento?
- 10.2** C'è qualche connessione tra la prima legge di Newton e la legge di conservazione della quantità di moto per un unico corpo? Spiega.
- 10.3** Deve esserci una particella nel centro di massa di un sistema di corpi? Spiega.
- 10.4** Disegna un corpo continuo che non abbia alcuna massa nel proprio centro di massa.
- 10.5** Individua il centro di massa dei seguenti corpi: un pallone da basket, un hula hoop, una ciambella, questo libro, un ferro di cavallo.
- 10.6** Dov'è il centro di massa di una sfera omogenea? Quello di un cubo? Quello di un tetraedro regolare? E quello di un qualunque poliedro regolare?
- 10.7** Che cosa puoi dire, senza fare calcoli, del centro di massa di un emisfero omogeneo? Di quello di un semicilindro con base a forma di D? E di quello di un triangolo isoscele?
- 10.8** Un camionista che trasporta polli al mercato viene fermato a una pesa per un controllo. Egli dà dei colpi sul fianco del camion per spaventare i polli, in modo che questi si alzino in volo e rendano il camion più leggero. Funzionerà la sua idea? Fa qualche differenza che il camion sia aperto o chiuso? Spiega.
- 10.9** È possibile che si conservi l'energia cinetica ma non la quantità di moto? Spiega. È possibile che si conservi la quantità di moto ma non l'energia cinetica? Spiega.
- 10.10** L'energia potenziale si conserva in un urto elastico? Si conserva durante tutto l'urto, oppure è semplicemente uguale alla fine e all'inizio?
- 10.11** È necessario che le forze che compiono lavoro durante un urto elastico siano conservative? È sufficiente che siano conservative perché l'urto sia elastico?
- 10.12** Perché per conficcare i pali nel terreno, invece di spingerli lentamente, si usano i battipalo?
- 10.13** Come funzionano le chiavi ad aria compressa che i meccanici usano per staccare le ruote dalle automobili? Perché fanno un rumore crepitante?
- 10.14** La maggior parte delle tracce di pneumatico che si vedono sul luogo di un incidente automobilistico viene lasciata dalle gomme dei veicoli in seguito allo scontro. Come si può stabilire, misurando la direzione e la lunghezza di queste tracce dopo lo scontro, se l'una o l'altra delle automobili coinvolte stava superando il limite di velocità prima dell'urto?
- 10.15** Sei fermo al centro di un lago ghiacciato liscio e privo di attrito. Come puoi uscire? Rammenta che, in assenza di una forza esterna orizzontale non equilibrata, la quantità di moto si conserva.
- 10.16** Un uomo corpulento si sposta camminando da un'estremità all'altra di una leggera canoa. Guardando dalla riva si vede che l'uomo quasi non si muove, mentre la canoa si sposta approssimativamente della propria lunghezza. Perché?
- 10.17** Si faccia una stima approssimativa di quanto tempo occorra per fermare una petroliera d'alto mare. Che cosa fornisce la forza esterna necessaria per fermarla?

- 10.18 Perché i paraurti ad assorbimento di energia riducono il tasso di mortalità negli incidenti automobilistici?
- 10.19 Si è sostenuto che un'abile saltatrice di salto in alto può superare l'asticella anche se il suo centro di massa passa sotto l'asticella. Mostra con un diagramma che ciò è possibile.
- 10.20 Una clessidra con una valvola che dà inizio alla caduta della sabbia viene pesata su una bilancia molto sensibile. Si confrontino le quantità di moto della sabbia prima che la valvola venga aperta, quando la sabbia scende con flusso costante dalla parte superiore a quella inferiore, e quando tutta la sabbia è scesa. Che cosa segna la bilancia in questi tre momenti? La bilancia dà indicazioni differenti quando la quantità di moto della sabbia cambia?
- 10.21 Un urto frontale completamente anelastico tra due automobili identiche dotate di velocità uguali e opposte sarebbe più o meno dannoso di un urto completamente anelastico tra una delle automobili e un muro fisso? Spiega.
- 10.22 Si escogiti un metodo per determinare sperimentalmente la posizione del centro di massa di un corpo esteso senza conoscere la massa di nessuna parte del corpo.

ESERCIZI

Paragrafo 10.2 Il centro di massa

- 10.1 Trovare le coordinate del centro di massa del sistema di punti materiali di Figura 10.20.

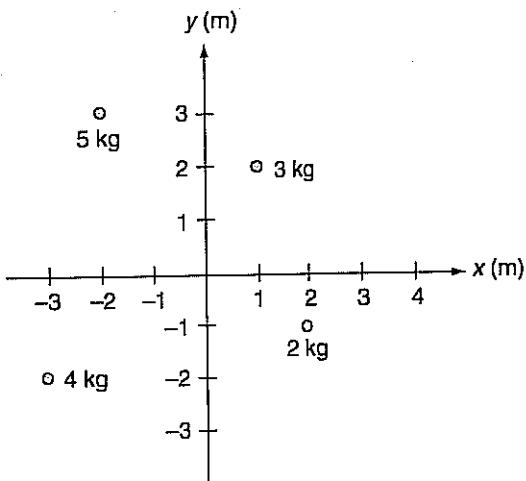


Figura 10.20 Esercizio 10.1.

- 10.2 Dov'è il centro di massa della molecola d'acqua rappresentata nella Figura 10.21? Le masse dell'idrogeno e dell'ossigeno stanno tra loro come 1 : 16.

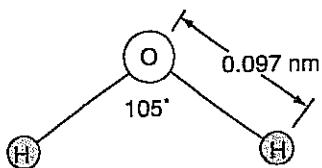


Figura 10.21 Esercizio 10.2: rappresentazione schematica di una molecola d'acqua.

- 10.23 Se si raddoppia la spinta di un razzo raddoppiando la quantità dei gas espulsi per unità di tempo, raddoppia anche la velocità finale del razzo?
- 10.24 Raddoppiando la velocità con cui il gas viene espulso da un razzo, raddoppia anche la velocità finale del razzo?
- 10.25 Un carrello in moto lungo un rotaia urta un altro carrello che inizialmente è in quiete. Il carrello fermo ha un respingente a molla compresso che viene liberato al momento dell'urto. Perché un urto di questo tipo può essere chiamato superelastico?
- 10.26 Si completi la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
P			
p			kg · m/s
J		Vettore	
v_{rp}	Velocità del razzo rispetto alla piattaforma di lancio		
v_{gr}			

- 10.3 Trovare le coordinate del centro di massa dei punti materiali di Figura 10.22. Ciascun punto ha una massa di 0.041 kg, e il lato di ciascun quadrato del reticolo corrisponde a 0.010 m.

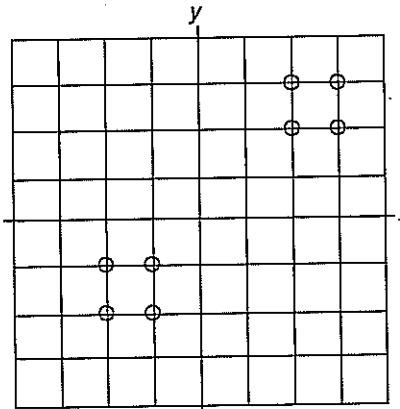


Figura 10.22 Esercizio 10.3.

- 10.4 Un hula hoop di densità uniforme e di raggio R viene diviso in due semicerchi identici. Trovare il centro di massa di uno dei semicerchi.
- 10.5 Trovare il centro di massa di una semisfera di densità uniforme.
- 10.6 Trovare il centro di massa di un cono circolare retto omogeneo il cui diametro di base è di 0.430 m e la cui altezza è di 0.526 m.

Paragrafo 10.3 Il moto del centro di massa

- 10.7 Una ragazza di massa 42 kg cammina su una trave omogenea fissa di massa 21 kg; la sua velocità è di 0.75

m/s. Qual è la velocità del centro di massa del sistema formato dalla ragazza e dalla trave?

- 10.8** In un satellite artificiale di massa 125 kg ci sono due astronauti, Tony e Ben. Tony ha una massa di 48 kg e Ben una massa di 52 kg. Se il satellite ha una velocità di (32 m/s) \hat{j} , Ben ha una velocità di (30 m/s) \hat{i} , e Tony ha una velocità di (2 m/s) \hat{i} rispetto al satellite, qual è la velocità del centro di massa del sistema costituito dal satellite e dagli astronauti?
- 10.9** Un blocco di massa 1.0 kg scende scivolando lungo un piano inclinato di massa 3.2 kg, come mostra la Figura 10.23. Se il piano inclinato è fisso e il blocco scivola senza attrito, qual è l'accelerazione del centro di massa del sistema formato dal blocco e dal piano inclinato?

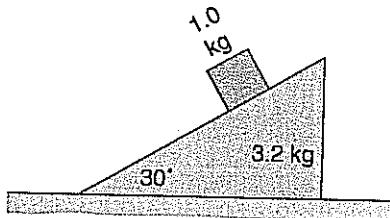


Figura 10.23 Esercizio 10.9.

- 10.10** Un uomo di massa 85 kg si trova a poppa di una chiatte lunga 12 m, che è libera di muoversi nell'acqua (Figura 10.24). La massa della chiatte è di 200 kg, e il suo centro di massa è a 6 m da ciascuna delle estremità. (a) Dov'è il centro di massa del sistema formato dalla chiatte e dall'uomo? (b) Di quanto si sposta il centro di massa del sistema se l'uomo raggiunge la prua della chiatte? (c) Di quanto si è spostato l'uomo rispetto alla riva? (d) Di quanto si è mossa la chiatte rispetto alla riva?

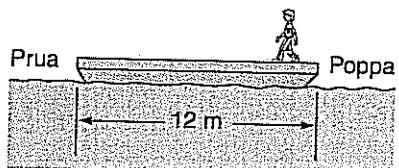


Figura 10.24 Esercizio 10.10.

- 10.11** Si consideri la macchina di Atwood rappresentata nella Figura 10.25, trascurando ogni attrito. (a) Quali sono le forze esterne che agiscono sul sistema delimitato dalle linee tratteggiate? (b) Se la corda ha massa trascurabile, dov'è il centro di massa del sistema? (c) Trascurando gli effetti ritardanti della puleggia, qual è l'accelerazione del centro di massa del sistema?

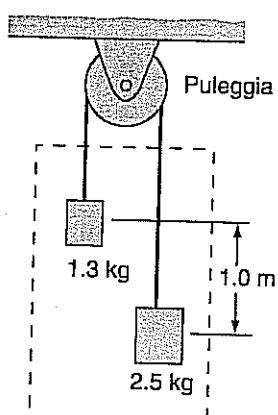


Figura 10.25 Esercizio 10.11.

- 10.12** Un mortaretto per fuochi d'artificio di massa 1.56 kg viene lanciato verticalmente verso l'alto con una vel. iniziale di 31 m/s, ed esplode nel punto più alto della traiettoria, spezzandosi in tre pezzi di diversi colori. I pezzi cominciano a muoversi orizzontalmente. Un pezzo di massa 0.78 kg tocca terra 212 m a nord del punto di lancio, mentre un pezzo di massa 0.26 kg tocca terra 68 m a est del punto di lancio. Se gli attriti e il vento sono trascurabili, dove tocca terra il terzo pezzo?

Paragrafo 10.4 La quantità di moto

- 10.13** Quali sono il modulo e la direzione della quantità di moto della Terra (rispetto al Sole)?
- 10.14** Qual è il modulo della quantità di moto di un'automobile di massa 1.25 Mg che viaggia alla velocità di 55 migl/ora?

- 10.15** Un camion di massa 4 Mg che viaggia verso nord alla velocità di 24 m/s fa una curva a destra di 90° mantenendo costante il modulo della propria velocità. Quanto cambia, in modulo e direzione, la sua quantità di moto?

- 10.16** Un pallone da basket di massa 1.35 kg rimbalza sul tabellone del canestro. Inizialmente si muoveva alla velocità di 12 m/s in direzione orizzontale perpendicolarmente al tabellone. Rimbalza all'indietro con velocità di modulo immutato. Di quanto è cambiata la sua quantità di moto?

Paragrafo 10.5 La conservazione della quantità di moto

- 10.17** Due carrelli, inizialmente in quiete, sono liberi di muoversi nella direzione x . Il carrello A ha una massa 4.52 kg e il carrello B una massa di 2.37 kg. Essi sono legati l'uno all'altro in modo da comprimere una molla leggera interposta tra loro, come mostra la Figura 10.26. Quando la corda che li tiene insieme viene spezzata bruciandola, il carrello A si allontana con una velocità 2.11 m/s. (a) Con quale velocità si allontana il carrello B ? (b) Quanta energia era immagazzinata nella molla prima che la corda venisse bruciata?

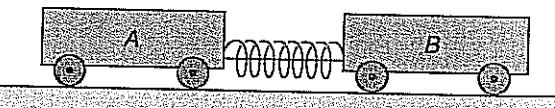


Figura 10.26 Esercizio 10.17.

- 10.18** Nello spazio un astronauta di massa 62 kg dà una spinta a un altro astronauta di massa 94 kg. Se inizialmente essi erano fermi, e l'astronauta di massa 94 kg si allontana con una velocità di (1.7 m/s) \hat{j} rispetto a un sistema di riferimento inerziale, qual è la velocità del medesimo astronauta rispetto al suo compagno?

- 10.19** Una ragazza di massa 45 kg si tuffa da una barca di massa 1000 kg, allontanandosi da essa con una velocità orizzontale di 5.2 m/s. Ammettendo che la barca fosse inizialmente in quiete e libera di muoversi nell'acqua, con quale velocità essa si mette in movimento?

- 10.20** Un ragazzo e una ragazza si tuffano da un gommone con velocità di uguale modulo. Il ragazzo ha una massa di 71 kg e si tuffa verso est; la ragazza ha una massa di 52 kg e si tuffa verso sud. In quale direzione si allontana il gommone?

- 10.21 Due dischi di masse m_1 ed m_2 sono fermi su un tavolo a cuscino d'aria privo di attrito. Essi sono collegati da un leggero elastico teso e a un certo momento vengono lasciati liberi. Qual è il rapporto tra i moduli delle loro velocità dopo che sono stati lasciati andare?

- 10.22 Due ragazzi sui pattini da ghiaccio si lanciano una palla avanti e indietro, in modo che la velocità della palla rispetto a chi la lancia sia di 3 m/s. Entrambi i ragazzi hanno una massa di 47 kg, e la palla ha una massa di 0.25 kg. Se i ragazzi all'inizio sono fermi, dopo quanti lanci della palla si allontaneranno l'uno dall'altro con una velocità di modulo 1.0 m/s? (Un modello di questo tipo, basato sullo scambio di una particella, sembra funzionare bene nella descrizione delle forze a livello microscopico, ma in quel caso la forza può essere sia attrattiva che repulsiva.)

Paragrafo 10.6 L'impulso

- 10.23 Un battipalo è costituito da un blocco di massa 413 kg che viene sollevato di 1.4 m e poi lasciato cadere sul palo da conficcare nel terreno. Supponiamo che il blocco impieghi 24 ms ad arrestarsi quando colpisce il palo. Qual è la forza media esercitata sul palo dal battipalo?
- 10.24 La forza che una mazza da baseball esercita su una palla di massa 0.20 kg è rappresentata in funzione del tempo nella Figura 10.27. Se la palla viene lanciata verso la mazza con una velocità di 25 m/s e si allontana nella direzione opposta, qual è la sua velocità rispetto al terreno dopo l'urto?

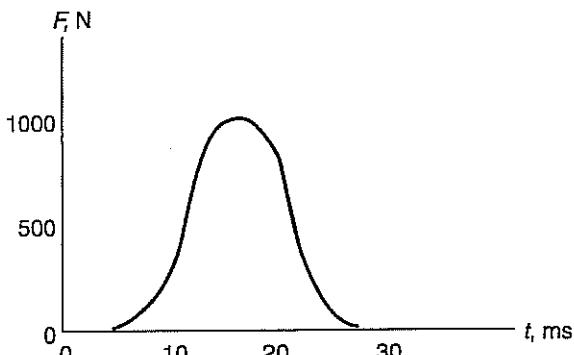


Figura 10.27 Esercizio 10.24.

- 10.25 Una mitragliatrice spara proiettili da 40 g a una velocità di 500 m/s. Il mitraffiere, che tiene l'arma con le mani, può esercitare su di essa una forza massima di intensità 200 N. Determinare il numero massimo di proiettili che egli può sparare al minuto.

- 10.26 Una palla di massa 100 g colpisce un muro e rimbalza, come mostra la Figura 10.28. (a) Qual è la variazione della quantità di moto della palla, ammettendo che il modulo della velocità sia uguale prima e dopo l'urto? (b) Se l'urto ha luogo in 30 ms, qual è la forza media esercitata dal muro sulla palla? (c) E quella esercitata dalla palla sul muro?

Paragrafo 10.7 Urti

- 10.27 Un carro merci di massa 14.2 Mg, che si muove su un binario diritto e piano alla velocità di 1.8 m/s, urta un pianale fermo di massa 23.5 Mg e si aggancia ad esso. Qual è la velocità dei due vagoni dopo l'urto? Di quanto varia l'energia cinetica del sistema in questo urto?

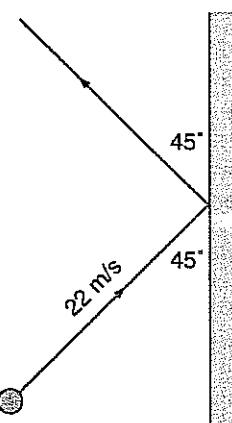


Figura 10.28 Esercizio 10.26.

- 10.28 Un nucleo in quiete decade in una particella alfa e in un nucleo più leggero. Il nucleo originario ha una massa 59 volte maggiore di quella della particella alfa. Quale sarà la velocità di rinculo del nucleo se la velocità della particella alfa è di 5.8×10^6 m/s?
- 10.29 Due meteoriti si urtano. Molto prima dell'urto, il meteorite A, di massa 1.5×10^{12} kg, ha una velocità di 0.25 m/s nella direzione x, e il meteorite B, di massa 2.2×10^{12} kg, ha una velocità di 0.34 m/s nella direzione $-x$. Molto tempo dopo l'urto, si osserva che il meteorite A ha una velocità di 0.35 m/s nella direzione y. Che velocità ha il meteorite B dopo l'urto? Si trascurino le forze esterne dovute al Sole e ad altri corpi.
- 10.30 In una partita di football americano, un terzino di massa 100 kg, nel tentativo di realizzare una meta, si getta in avanti. Nel punto più alto della sua traiettoria si trova 1.2 m al di sopra del terreno e a 1.1 m dalla linea di meta, e ha una velocità di 4.2 m/s. In quel punto, una seconda linea difensiva di massa 110 kg, che è al culmine della propria traiettoria e si muove con una velocità di 2.3 m/s nella direzione opposta, si scontra con il terzino e lo afferra saldamente. Il terzino riesce a superare la linea di meta e a ricadere a fondo campo?
- 10.31 L'astronauta A vuole spostarsi dal lato destro della sua nave spaziale al lato sinistro. Dà una spinta alla parete e comincia a fluttuare. L'astronauta B, che galleggia liberamente fuori della nave spaziale, guarda dentro e vede A che si sposta con una velocità di 1.00 m/s. A ha una massa di 51 kg, B una massa di 80 kg, e la nave spaziale una massa di 501 kg. Se quest'ultima è lunga 10 m, quanto tempo impiega A a raggiungere il lato sinistro?
- 10.32 Un corpo di massa 3.2 kg con una velocità di 15 m/s subisce un urto completamente anelastico con un corpo di massa 4.8 kg inizialmente in quiete. Trovare la velocità dei due corpi dopo l'urto.
- 10.33 Un ragazzo lancia un pallone da spiaggia di massa 3.3 kg a una ragazza di massa 48 kg che ha i pattini a rotelle ed è inizialmente in quiete. Dopo aver afferrato il pallone, la ragazza comincia a muoversi alla velocità di 0.32 m/s. Con quale velocità si muoveva il pallone quando la ragazza l'ha preso?
- 10.34 Un corpo di massa 3.2 kg dotato di una velocità di 15 m/s subisce un urto elastico centrale con un corpo di massa 4.8 kg inizialmente in quiete. Determinare le velocità dei due corpi dopo l'urto.

- 10.35** Una particella alfa (di massa 4 u, ove 1 u è approssimativamente la massa del protone) con una velocità di 3.5×10^6 m/s subisce un urto elastico centrale con un nucleo di uranio (di massa 235 u) inizialmente fermo. Qual è la velocità di rinculo del nucleo di uranio?
- 10.36** Il peso, di massa $2m$, di un pendolo di lunghezza L viene allontanato dalla verticale di un angolo di 14.5° e lasciato andare. Nel punto più basso della sua traiettoria (Figura 10.29), esso subisce un urto elastico con una palla di massa m . Se anche questa palla è il peso di un pendolo di lunghezza L , qual è l'angolo di oscillazione?

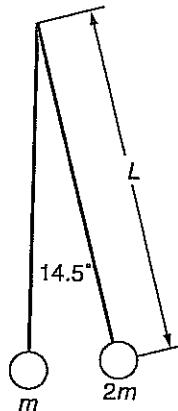


Figura 10.29 Esercizio 10.36.

- 10.37** Una pistola spara un proiettile di massa 4.5 g nel blocco di massa 1.5 kg di un pendolo balistico. Il blocco e il proiettile si sollevano di 80 mm. Qual è la velocità iniziale del proiettile?
- 10.38** Un proiettile di massa 50 g viene sparato in un blocco di legno di massa 1 kg sospeso a un filo lungo 2 m, e lo attraversa da parte a parte. Si osserva che il centro di massa del blocco si solleva a un'altezza massima di 50 mm. Determinare la velocità del proiettile quando fuoriesce dal blocco, sapendo che il modulo della sua velocità iniziale è 500 m/s, e trascurando la perdita di massa subita dal blocco per effetto della penetrazione del proiettile.
- 10.39** Due carrelli, entrambi di massa 2.2 kg, si urtano su una rotaia priva d'attrito. Prima dell'urto, A ha una velocità di 3.1 m/s verso est e B una velocità di 5.4 m/s verso ovest. L'urto è elastico. Quali sono le velocità dei due carrelli dopo l'urto?
- 10.40** Si riprenda il problema precedente, ma ammettendo che nell'urto vadano persi 9.2 J di energia cinetica.
- 10.41** Dimostrare che, in un urto centrale completamente anelastico tra due corpi A e B , con B inizialmente in quiete, il rapporto tra l'energia cinetica prima dell'urto e l'energia cinetica dopo l'urto è $(m_A + m_B)/m_A$.
- 10.42** Dimostrare che, in un urto centrale elastico tra due corpi A e B , se B è inizialmente in quiete, il rapporto tra l'energia cinetica di B dopo l'urto (K_{Bf}) e l'energia cinetica di A prima dell'urto (K_{Ai}) è

$$\frac{K_{Bf}}{K_{Ai}} = \frac{4m_A m_B}{(m_A + m_B)^2}$$

- 10.43** Un'automobile di massa 1 Mg che viaggia alla velocità di 30 km/h in direzione est lungo Corso Roma si scontra con un camion di massa 8 Mg che attraversa Corso

Roma in direzione sud alla velocità di 20 km/h. Se i due veicoli rimangono agganciati, con quale velocità si muovono dopo l'urto?

- 10.44** La Figura 10.30 mostra le posizioni ad uguali intervalli di tempo di due dischi a basso attrito che si urtano in due dimensioni su un tavolo orizzontale a cuscino d'aria. I dischi sono stati lanciati da destra. Trovare il rapporto delle masse dei dischi. L'urto è elastico?

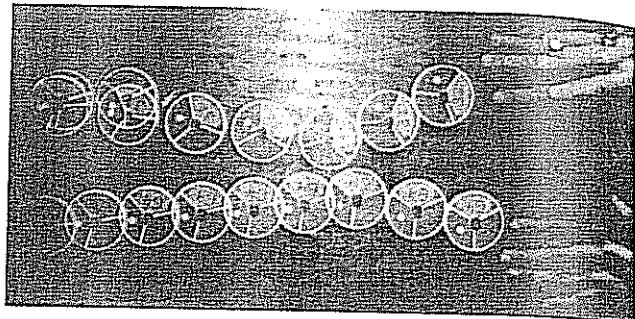


Figura 10.30 Esercizio 10.44: fotografia stroboscopica di un urto tra due dischi da hockey che si muovono su una superficie con attrito trascurabile. Ciascuna immagine del disco si forma in corrispondenza dell'emissione di un lampo da parte della sorgente stroboscopica. I lampi sono separati da intervalli uguali di 1.4 ms.

- 10.45** Dimostrare che, se due corpi urtandosi ne formano un terzo, tutte le velocità coinvolte nel problema giacciono in un unico piano.
- 10.46** Dimostrare che, in un urto elastico tra due particelle di uguale massa, una delle quali è inizialmente in quiete, le velocità delle particelle dopo l'urto sono perpendicolari tra loro. Che cosa accade se l'urto è centrale?

Paragrafo 10.8 Il moto dei razzi

- 10.47** Un'autobotte ferma dei vigili del fuoco pompa dal suo serbatoio 400 litri d'acqua al minuto in un getto orizzontale che fuoriesce con velocità di 0.05 m/s. Un litro d'acqua ha una massa di 1 kg. Di quanti $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ varia in ogni secondo la quantità di moto del sistema formato dall'autopompa e dall'acqua? Quale forza esterna deve esercitarsi sull'autopompa per mantenerla ferma?
- 10.48** Una manichetta antincendio per cui passano 450 litri d'acqua al minuto forma un gomito ad angolo retto, come mostra la Figura 10.31. Consideriamo il sistema delimitato nel disegno dalla linea tratteggiata. Un litro d'acqua ha una massa di 1 kg. Quale quantità di moto entra nel sistema ogni secondo? Quale quantità di moto ne esce ogni secondo? Quale forza deve essere applicata a questa sezione della manichetta per mantenerla ferma?
- 10.49** L'acqua entra in una turbina al ritmo di 60 kg/s e con una velocità di 18 m/s, e ne esce in una direzione perpendicolare a quella di ingresso con una velocità di 3 m/s. (a) Quale forza debbono esercitare i cuscinetti sull'albero della turbina? (b) Ammettendo che l'energia meccanica si conservi, quanta potenza viene fornita dall'acqua alla turbina?

- 10.50** Dieci tonnellate di sabbia vengono scaricate verticalmente dall'alto in un vagone ferroviario scoperto di massa 6 tonnellate, che si muove lungo un binario piano. Se il vagone si muoveva alla velocità di 3.8 m/s prima che vi venisse scaricata la sabbia, con quale

velocità si muove dopo? Si conserva la componente verticale della quantità di moto del sistema formato dalla sabbia e dal vagone?

- 10.51 Una nave spaziale di massa 10 Mg si muove nello spazio per mezzo dei suoi razzi di posizionamento. Uno di questi motori a razzo ha una velocità di scarico di 2 km/s e utilizza 10 g/s di gas. (a) Qual è la spinta del motore? (b) Per quanto tempo deve rimanere acceso per far variare la velocità della nave spaziale di 20 m/s? (c) Quanto gas viene utilizzato in questa manovra?
- 10.52 Nello spazio interstellare un razzo usa il proprio motore per accelerare dalla quiete a una velocità di 5 km/s. Il motore produce gas di scarico che si allontanano dal razzo con una velocità relativa di 2 km/s. Quale frazione della massa del razzo viene bruciata ed espulsa dal motore?

PROBLEMI

- 10.1 Un sistema di particelle è formato da due sottosistemi, A e B . Dimostrare che la posizione \mathbf{r}_{cm} del centro di massa del sistema è data da

$$M\mathbf{r}_{cm} = M_A \mathbf{r}_A + M_B \mathbf{r}_B$$

dove M è la massa dell'intero sistema, M_A ed M_B sono le masse dei sottosistemi, \mathbf{r}_A e \mathbf{r}_B individuano i centri di massa dei sottosistemi.

- 10.2 Dedurre le Equazioni (10.21) e (10.22) dalla conservazione della quantità di moto e dalla conservazione dell'energia cinetica.

- 10.3 Un blocco di massa m scivola giù per una rampa curva priva d'attrito, come mostra la Figura 10.32. La rampa, di massa M , è a sua volta appoggiata su una superficie orizzontale priva d'attrito. (a) Dimostrare che, se il blocco parte dall'altezza h sopra il piano orizzontale, quando lascia la rampa, questa ha una velocità

$$V = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}}$$

- (b) Qual è la velocità v del blocco nel medesimo istante?

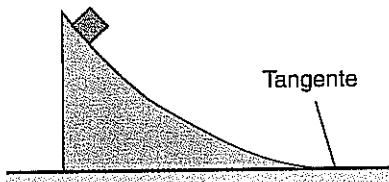


Figura 10.32 Problema 10.3.

- 10.4 Dimostrare che, se la rampa del problema precedente è piana invece che curva (Figura 10.33), quando il blocco arriva in fondo, la rampa ha una velocità

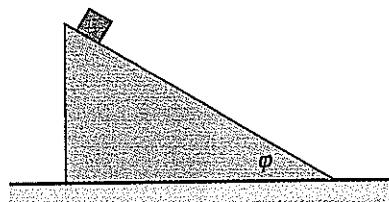


Figura 10.33 Problema 10.4.

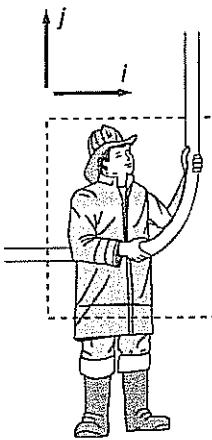


Figura 10.31 Esercizio 10.48.

$$V = \sqrt{\frac{2m^2gh \cos^2 \varphi}{(m+M)(M+m \sin^2 \varphi)}}$$

ove φ è l'angolo che la rampa forma con l'orizzontale.

- 10.5 Un carrello di massa $2m$ si muove lungo una rotaia verso un secondo carrello fermo, di massa m . Più avanti sulla rotaia, a una distanza ℓ dal secondo carrello, ce n'è un terzo, di massa $2m$. Dimostrare che, se tutti gli urti sono elastici, il secondo carrello urta il primo due volte, e che l'intervallo di tempo tra i due urti è $(12/7)(\ell/v_0)$, dove v_0 è la velocità iniziale del primo carrello.
- 10.6 Un vagone ferroviario di massa 20 Mg è fermo, con il freno inserito, su un pendio alto 10 m. Quando il freno viene tolto, scende per il pendio, urta un vagone di massa 10 Mg fermo in fondo alla discesa, e si aggancia ad esso. I due vagoni risalgono insieme il pendio successivo. (a) Se l'attrito lungo i binari è trascurabile, quale altezza raggiungono i due vagoni su tale pendio? (b) L'energia meccanica si conserva in tutto il processo?

- 10.7 Nell'Esempio 10.10 abbiamo supposto che il blocco non si sollevasse durante l'urto. Si stimi l'errore da cui è affetta la nostra risposta, ammettendo che il proiettile si arresti a metà della lunghezza del blocco, che è di 105 mm, e che esso sia decelerato in modo uniforme dal blocco stesso. Quali forze esterne significative agiscono durante questo tempo?

- 10.8 (a) Un razzo a un solo stadio ha una massa totale di 11 Mg, di cui 9.7 Mg sono combustibile. La sua velocità di scarico è di 2 km/s. Se parte da fermo in un sistema di riferimento inerziale e brucia tutto il proprio combustibile, qual è la sua velocità finale? (b) Un razzo a due stadi ha la stessa massa totale del razzo della parte (a) e contiene la stessa quantità di combustibile, ma è suddiviso in un primo stadio di massa 10 Mg, di cui 9 Mg sono combustibile, e un secondo stadio di massa 1 Mg, di cui 0.7 Mg sono combustibile. Anche i suoi motori hanno una velocità di scarico di 2 km/s. Il secondo stadio si stacca dal primo quando questo ha esaurito il combustibile, e solo allora il razzo del secondo stadio si accende. Qual è la velocità finale del secondo stadio?

- 10.9** Nel sistema di riferimento A c'è un sistema di n punti materiali di masse m_1, m_2, \dots e velocità v_1, v_2, \dots
- (a) Dimostrare che, se la quantità di moto totale si conserva nel sistema di riferimento A , allora si conserva anche nel sistema di riferimento B in moto con velocità costante rispetto ad A . (b) La grandezza fisica quantità di moto non varia nel passaggio da un sistema di riferimento a un altro?
- 10.10** Un getto d'acqua con una velocità di 35 m/s e una portata in massa di 500 kg/s incide su un cono, come mostra la Figura 10.34. Quale forza si deve applicare al cono per mantenerlo fermo? Si ammetta che il getto d'acqua si allarghi in modo uniforme a causa del cono.
- 10.11** Due corpi di masse m e M sono inizialmente in quiete a grande distanza l'uno dall'altro. Fra essi si esercita la forza di gravità. Dimostrare che, mentre si avvicinano,

il modulo v della velocità del corpo di massa m è

$$\sqrt{(2GM^2)/[(m+M)r]}.$$

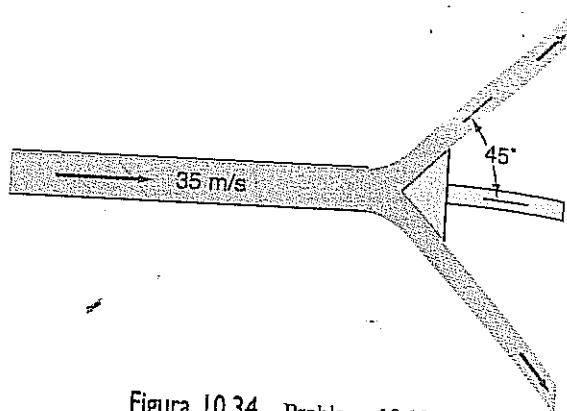


Figura 10.34 Problema 10.10.

CAPITOLO

II

EQUILIBRIO STATICO DI UN CORPO RIGIDO

II. INTRODUZIONE

Che interesse ha lo studio di un corpo rigido in equilibrio statico? Dopo tutto, il suo moto è il più banale: sta semplicemente fermo. Ma, come vedremo, l'analisi ci fornisce delle informazioni circa alcune delle forze che agiscono sul corpo, e questa conoscenza è essenziale quando si devono scegliere i materiali e i componenti di una struttura. Molti studenti di ingegneria seguono uno o più corsi di statica: tali corsi si basano sui principi che saranno introdotti in questo capitolo. Concentreremo la nostra attenzione su situazioni semplici che illustrino come questi principi vengono utilizzati nell'analisi di un problema di «statica».

II.2 I CORPI RIGIDI E IL LORO EQUILIBRIO

Se un punto materiale rimane in quiete in un sistema di riferimento inerziale, la sua accelerazione è zero, e, per la seconda legge di Newton, la forza risultante che agisce su di essa è nulla, $\Sigma F = 0$. Questa è una condizione necessaria (e sufficiente) per l'equilibrio statico di un punto materiale, come abbiamo visto nel Capitolo 5. Ma, nel mondo reale, abbiamo a che fare con corpi estesi e non con punti materiali. Che cosa intendiamo per equilibrio statico di un corpo esteso? *Un corpo esteso è in equilibrio statico se ogni suo punto è in quiete e rimane in quiete.* Naturalmente, se il corpo è in equilibrio statico in un sistema di riferimento inerziale, ogni suo punto si può muovere con la stessa velocità costante in un diverso sistema di riferimento inerziale. Per discutere l'equilibrio statico sceglieremo il sistema di riferimento nel quale il corpo è in quiete.

Alcuni corpi estesi, come l'impasto per il pane, una molla o una gomma per cancellare, sono flessibili e possono cambiare forma o dimensioni in seguito all'applicazione di forze. D'altra parte, la chiave inglese di un meccanico in condizioni ordinarie rimane rigida e indeformabile. In questo capitolo concentreremo l'attenzione sui *corpi rigidi* in equilibrio statico. *Un corpo rigido è un corpo nel quale la distanza tra due suoi qualsiasi punti rimane costante.* Se un corpo cambia forma o dimensioni, la distanza tra qualche coppia di suoi punti varia; pertanto un corpo rigido mantiene la propria forma e le proprie dimensioni quando gli vengono applicate delle forze. Tuttavia, il concetto di corpo rigido è un'idealizzazione: infatti ogni corpo subisce qualche deformazione in seguito all'applicazione di forze esterne (si veda il Capitolo 15). Ma se queste deformazioni sono trascurabili il corpo può essere considerato rigido.

Nel Capitolo 10 abbiamo visto che il moto del centro di massa è determinato dalle forze esterne, $Ma_{cm} = \Sigma F_{ext}$, dove M è la massa del corpo. Si dice che il corpo è in *equilibrio traslatorio* se l'accelerazione del centro di massa è nulla. Se $a_{cm} = 0$, allora

$$\Sigma F_{ext} = 0 \quad (11.1)$$

In condizioni di equilibrio statico ogni punto di un corpo rimane in quiete.

Un corpo rigido mantiene la propria forma e le proprie dimensioni.

In condizioni di equilibrio traslatorio, $a_{cm} = 0$.

Questa è la condizione per l'equilibrio traslatorio. Poiché l'equilibrio si ha quando non si ha moto, per capire meglio cos'è l'equilibrio traslatorio è bene definire il moto traslatorio. Si dice che un corpo rigido si muove di moto traslatorio se in qualunque intervallo di tempo Δt ogni punto del corpo subisce lo stesso spostamento; dato che la velocità è il rapporto tra lo spostamento e i intervalli di tempo in cui avviene lo sposta-

mento, questo significa che nel moto traslatorio di un corpo rigido, in ogni istante, la velocità di ogni punto del corpo è la stessa (ha stesso modulo, stessa direzione e stesso verso).

Ma anche se il centro di massa di un corpo rigido rimane in quiete, il corpo non necessariamente è in equilibrio statico. Esso potrebbe mutare il proprio orientamento spaziale *ruotando* attorno al centro di massa in quiete. Per esempio, una puleggia montata su un albero può ruotare attorno a un asse passante per il suo centro di massa. I punti della puleggia si muovono, anche se il centro di massa rimane in quiete. Un corpo che non ruota (o che ruota uniformemente intorno a un asse, come vedremo nel prossimo capitolo) è in *equilibrio rotatorio*. Un corpo rigido in equilibrio statico non trasla né ruota ed è, quindi, in equilibrio sia traslatorio che rotatorio.

Nella Figura 11.1a è rappresentata una porta girevole vista dall'alto. La porta può ruotare attorno a un asse verticale passante per il suo centro di massa. I cuscinetti posti lungo l'asse eserciteranno sul perno della porta una forza F_c (che non compare nelle figure), in modo che sia $\sum F_{ext} = 0$ e la porta sia mantenuta in equilibrio traslatorio. Supponiamo che due persone si trovino in quadranti opposti della porta, ed esercitino su di essa forze uguali e opposte, come mostra la Figura 11.1b. La risultante delle forze esterne è ancora zero, ma l'esperienza dimostra che la porta non è in equilibrio rotatorio: essa in realtà inizia a girare quando le due persone cominciano a spingere in questo modo. Nella Figura 11.1c, invece, la porta è in equilibrio statico. Qui la forza esterna risultante è nulla e, per simmetria, la porta è in equilibrio rotatorio.

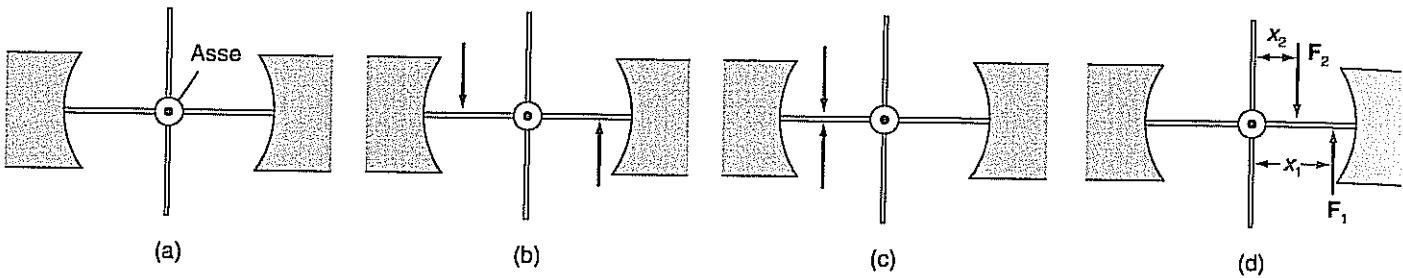


Figura 11.1 Una porta girevole vista dall'alto.

L'esperimento dimostra che anche la porta della Figura 11.1d è in equilibrio statico se i moduli delle forze F_1 e F_2 sono inversamente proporzionali alle distanze dei loro punti di applicazione dall'asse: $F_1/F_2 = x_2/x_1$. Questa conclusione può essere scritta anche come

$$x_1 F_1 - x_2 F_2 = 0 \quad (11.2)$$

Benché F_1 e F_2 non abbiano risultante nulla, la condizione $\sum F_{ext} = 0$ è ancora soddisfatta in virtù della forza esercitata dai cuscinetti. La forza F_1 tende a far ruotare la porta in senso antiorario, mentre F_2 tende a produrre una rotazione in senso orario: queste due tendenze si elidono, dando come risultato l'equilibrio statico. Tra poco vedremo come l'Equazione (11.2) non sia che un'applicazione della condizione per l'equilibrio rotatorio. Le condizioni generali per l'equilibrio statico di un corpo rigido saranno enunciate nel Paragrafo 11.4.

Esempio 11.1

Una persona esercita su una porta girevole una forza F_1 di 40 N in un punto a 0.3 m dall'asse, come mostra la Figura 11.1d. Quale forza F_2 deve essere esercitata a 0.2 m dall'asse per tenere ferma la porta?

Soluzione

Dall'Equazione (11.2) si ha $x_2 F_2 = x_1 F_1$, cosicché

$$F_2 = \frac{F_1 x_1}{x_2} = \frac{(40 \text{ N})(0.3 \text{ m})}{0.2 \text{ m}} = 60 \text{ N}$$

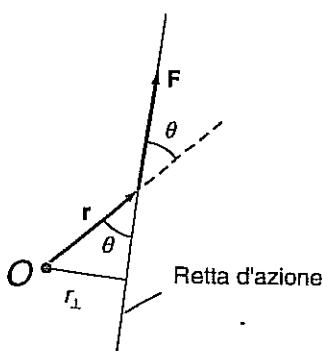


Figura 11.2

Una forza F è applicata in un punto individuato dal vettore posizione r .

11.3 MOMENTO DI UNA FORZA RISPETTO A UN ASSE

Nello studio dell'equilibrio di un corpo che, come la porta girevole, può ruotare intorno a un asse, abbiamo visto [Equazione (11.2)] l'importanza del punto di applicazione di una forza. La grandezza che tiene conto di questo aspetto è chiamata *momento della forza*. Il momento di una forza è relativo a un asse e tende a far ruotare un corpo.

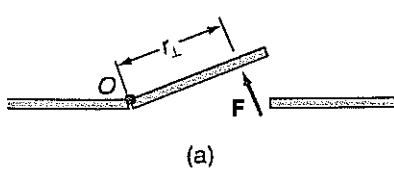
Per definire il momento di una forza, consideriamo una forza \mathbf{F} applicata in un punto di un corpo, come indica la Figura 11.2. Il punto O rappresenta l'intersezione di un asse perpendicolare con il piano che contiene i vettori \mathbf{F} e \mathbf{r} ; il vettore \mathbf{r} individua il punto di applicazione della forza a partire da questo asse. Costruiamo la *retta d'azione* di questa forza prolungando il segmento che rappresenta \mathbf{F} . La distanza dell'asse dalla retta d'azione della forza è $r_{\perp} = r \sin \theta$, dove θ è l'angolo compreso tra le direzioni di \mathbf{r} e \mathbf{F} . L'intensità del momento di questa forza rispetto all'asse O è definita da

$$\tau = r_{\perp} F = (r \sin \theta) F \quad (11.3)$$

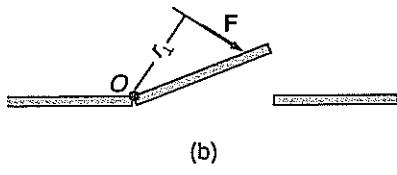
L'intensità del momento è il prodotto della forza per la distanza dell'asse dalla retta d'azione della forza. Spesso la distanza r_{\perp} viene detta *braccio* della forza e il prodotto $r_{\perp} F$ viene chiamato *momento della forza* rispetto all'asse. Dalla Figura 11.2 si può rilevare che r_{\perp} rimane uguale se la forza è applicata in qualunque altro punto della sua retta d'azione. Si può immaginare di far scorrere il vettore forza lungo la sua retta d'azione: il momento si mantiene invariato.

Le dimensioni del momento di una forza sono [forza] · [lunghezza]; l'unità SI del momento è il N · m.

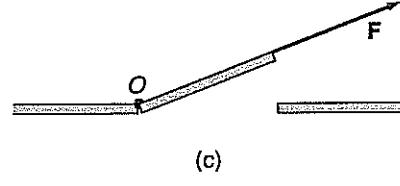
Per renderci conto di come il momento di una forza tenda a produrre una rotazione intorno a un asse, consideriamo una porta che può ruotare attorno a un asse verticale passante per i cardini. La Figura 11.3a mostra la porta vista dall'alto, con una forza orizzontale applicata perpendicolarmente al battente. Il modulo del momento è $\tau = r_{\perp} F$. L'esperienza quotidiana ci suggerisce che la porta tenderà a ruotare in senso antiorario (cioè ad aprirsi). Analogamente, nella Figura 11.3b il modulo del momento è $\tau = r_{\perp} F$, ma la porta tende a ruotare in senso orario (cioè a chiudersi). Viceversa, nella Figura 11.3c il braccio della forza $r_{\perp} = 0$, e quindi il modulo del momento è zero. L'esperienza in questo caso ci dice che la porta non tenderà né ad aprirsi né a chiudersi se applichiamo una forza nella direzione indicata. Dalla situazione illustrata nella Figura 11.3c possiamo ricavare la seguente utile conclusione: *se la retta d'azione di una forza interseca l'asse, il momento della forza rispetto a quell'asse è nullo*.



(a)



(b)



(c)

Esempio 11.2

Calcolare l'intensità del momento rispetto all'asse O per ciascuna delle forze rappresentate nella Figura 11.4. Si assuma $F_1 = F_2 = F_3 = 110 \text{ N}$ e $r_1 = 110 \text{ mm}$, $r_2 = 160 \text{ mm}$, $r_3 = 210 \text{ mm}$.

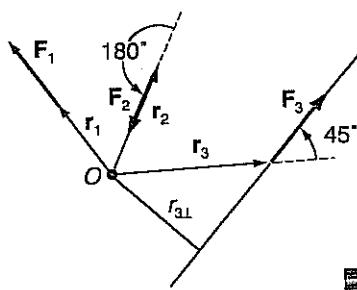
Soluzione

Come mostra la figura, la forza \mathbf{F}_1 è parallela a \mathbf{r}_1 . La retta d'azione di \mathbf{F}_1 interseca cioè l'asse. L'intensità del momento di \mathbf{F}_1 rispetto all'asse O è zero, $\tau_1 = 0$.

L'angolo formato dalla direzione di \mathbf{r}_2 e da quella di \mathbf{F}_2 è di 180° . La retta d'azione di \mathbf{F}_2 interseca anch'essa l'asse; pertanto $\tau_2 = 0$.

La retta d'azione di \mathbf{F}_3 non interseca l'asse. Dalla figura si ricava $r_{3\perp} = r_3 \sin 45^\circ = 150$. Quindi

$$\tau_3 = r_{3\perp} F_3 = (0.15 \text{ m})(110 \text{ N}) = 16 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Retta d'azione di una forza.

Intensità del momento rispetto a un asse.

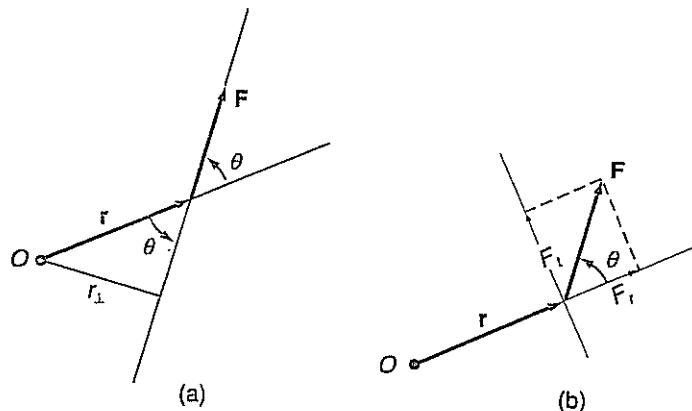
Braccio di una forza e momento di una forza rispetto all'asse.

Figura 11.3
Diverse forze applicate a una porta vista dall'alto.

Figura 11.4
Esempio 11.2: tre forze sono applicate a un corpo. Soltanto F_3 ha un momento diverso da zero rispetto all'asse O .

Figura 11.5

- (a) r_{\perp} è la distanza dell'asse dalla retta d'azione della forza.
 (b) La forza è scomposta nelle componenti parallela e perpendicolare a \mathbf{r} .



Nel calcolo dei momenti a volte conviene servirsi di una forma alternativa dell'Equazione (11.3), che si può ricavare dalla costruzione della Figura 11.5. Dalla Figura 11.5a e dall'Equazione (11.3) si ha $\tau = r_{\perp} F = (r \sin \theta) F$. Il fattore $\sin \theta$ può essere associato alla forza F invece che alla distanza r . Nella Figura 11.5b il vettore forza decomposto in una componente F_r , parallela a \mathbf{r} , e in una componente F_t , perpendicolare a \mathbf{r} . Indicando il modulo di questa componente perpendicolare a $F_{\perp} = |F_t| = F \sin \theta$, si ottiene per l'intensità del momento rispetto all'asse O ,

$$\tau = r F_{\perp} \quad (11)$$

L'intensità del momento di una forza rispetto a un asse è il prodotto del modulo del vettore \mathbf{r} , che individua il punto di applicazione della forza a partire dall'asse, per il modulo della componente della forza perpendicolare a \mathbf{r} .

Le Equazioni (11.3) e (11.4) sono espressioni equivalenti. Si tratta semplicemente di modi diversi di esprimere la grandezza $rF \sin \theta$.

$$rF \sin \theta = r_{\perp} F = r F_{\perp}$$

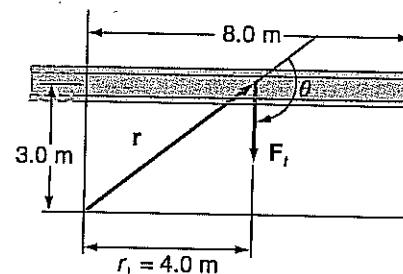
Per calcolare l'intensità del momento si può usare una qualsiasi di queste tre forme: sceglie quella che sembra più facile da applicare.

Esempio 11.3

Parte di una trave d'acciaio a doppia T sporge di 8.0 m da un muro, come mostra la Figura 11.6. Ammettendo che il peso di questa porzione omogenea agisca al centro di essa, con intensità di 2100 N, determinare l'intensità del momento rispetto all'asse O .

Figura 11.6

Esempio 11.3: il peso di una parte di una trave a sbalzo ha un momento rispetto a O .



Soluzione

In base ai dati riportati nella figura, si vede che il momento può essere calcolato nel modo più semplice per mezzo dell'Equazione (11.3):

$$\tau_i = r_{\perp} F_t = (4.0 \text{ m})(2100 \text{ N}) = 8.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

In modo un po' meno immediato si può utilizzare l'espressione $rF \sin \theta$. L'angolo θ è dato da

$$\theta = 90^\circ + \tan^{-1} \frac{3.0}{4.0} = 127^\circ$$

e

$$r = \sqrt{(3.0 \text{ m})^2 + (4.0 \text{ m})^2} = 5.0 \text{ m}$$

Allora

$$\tau_i = r F_t \sin \theta = (5.0 \text{ m})(2100 \text{ N}) \sin 127^\circ = 8.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Si può mostrare in modo analogo che anche l'Equazione (11.4) porta al medesimo risultato.

Il momento di una forza sarà definito in modo generale come grandezza vettoriale nel Paragrafo 11.6. L'Equazione (11.3) fornisce il modulo (o intensità) del momento rispetto a un asse. Dobbiamo specificare anche la sua direzione. Per ora è sufficiente scegliere l'asse z parallelo all'asse di rotazione, mentre il piano xy contiene i vettori \mathbf{r} e \mathbf{F} , come si vede nella Figura 11.7a. La direzione del momento è quella dell'asse z . In questo caso il vettore momento τ ha soltanto la componente z , τ_z , e il modulo del momento è $\tau = |\tau_z| = r_{\perp} F$. Il segno della componente τ_z è determinato dal senso (orario o antiorario se visto da un punto sull'asse z positivo) del moto di rotazione del corpo che il momento tende a produrre. Se il senso di rotazione è antiorario, τ_z è positiva; se il senso del moto è orario, τ_z è negativa. Il senso è quello della rotazione che sovrapporrebbe la direzione di \mathbf{r} a quella di \mathbf{F} . La Figura 11.7a mostra due rotazioni di questo tipo; si sceglie sempre quella che percorre il minore dei due angoli formati da \mathbf{r} e \mathbf{F} quando sono posti con l'origine in comune, come nella Figura 11.7b. In questo caso la rotazione avviene lungo l'angolo θ in senso antiorario. La componente z del momento rispetto all'asse O è positiva. Dal momento che il segno di τ_z è determinato dal senso di rotazione, spesso una τ_z positiva viene chiamata *momento antiorario* e una τ_z negativa viene chiamata *momento orario*.

Il senso di rotazione determina il segno di τ_z .

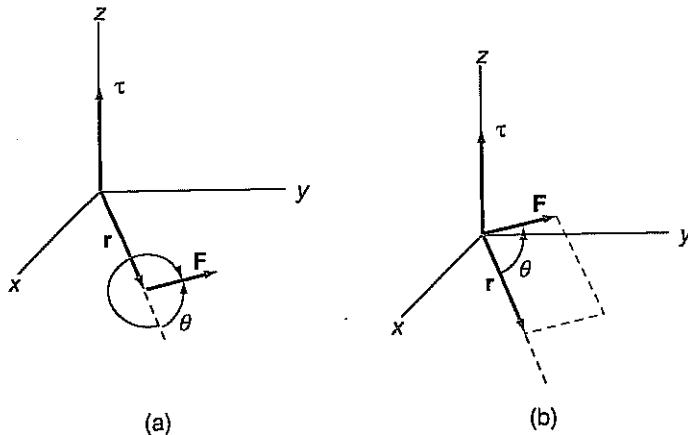


Figura 11.7

(a) I vettori \mathbf{r} e \mathbf{F} giacciono nel piano xy , e il momento giace sull'asse z . (b) Il verso è determinato dalla rotazione che porta \mathbf{r} a sovrapporsi a \mathbf{F} percorrendo l'angolo θ più piccolo.

Esempio 11.4

Per ciascuna delle forze rappresentate nella Figura 11.8, determinare il segno della componente z del momento rispetto all'asse O . L'asse z è perpendicolare al piano della pagina e uscente da questo.

Soluzione:

Il senso della rotazione che porta \mathbf{r}_1 a sovrapporsi a \mathbf{F}_1 percorrendo θ_1 è antiorario. Il segno di τ_{1z} è perciò positivo. La direzione del vettore momento τ_1 è perpendicolare alla pagina e uscente da essa. Invece è una rotazione in senso orario che porta la direzione di \mathbf{r}_2 a sovrapporsi a quella di \mathbf{F}_2 percorrendo θ_2 . La componente τ_{2z} è perciò negativa, e il vettore τ_2 ha verso entrante nella pagina. Analogamente, τ_{3z} è negativa e τ_3 è entrante nella pagina.

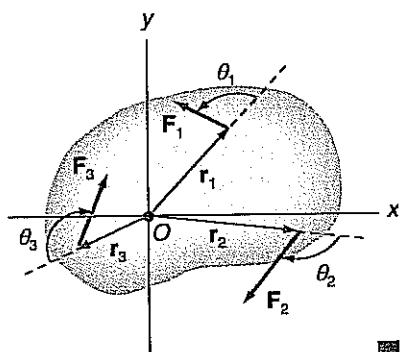


Figura 11.8 Esempio 11.4: tre forze hanno un momento rispetto all'asse O .

11.4 CONDIZIONI PER L'EQUILIBRIO STATICO

La condizione per l'equilibrio traslatorio di un corpo è data, come abbiamo visto, dall'Equazione (11.1), $\sum \mathbf{F}_{ext} = 0$. Ma perché un corpo rigido sia in equilibrio statico, è necessario che esso sia in equilibrio rotatorio oltre che traslatorio. La condizione per l'equilibrio rotatorio è formulata in termini dei momenti prodotti dalle forze esterne che agiscono sul corpo rigido. In base alla nostra precedente discussione dei momenti, dovremmo attenderci che l'equilibrio rotatorio richieda la compensazione delle tendenze a muoversi in senso orario e in senso antiorario rispetto a qualunque asse a causa dei

momenti rispetto a tale asse. Possiamo esprimere questa condizione sotto forma di un'equazione vettoriale

$$\Sigma \tau_{\text{ext}} = 0$$

(11.5)

Condizione per l'equilibrio rotatorio.

Questa condizione per l'equilibrio rotatorio di un corpo rigido rappresenta un caso particolare delle considerazioni più generali di dinamica rotatoria che dedurremo dalle leggi di Newton nel Capitolo 13.

Le Equazioni (11.1) e (11.5) insieme costituiscono le condizioni per l'equilibrio statico di un corpo rigido. *Perché un corpo rigido sia in equilibrio statico, devono essere nulle sia la risultante delle forze esterne che la risultante dei momenti esterni.*

$$\Sigma F_{\text{ext}} = 0 \quad \Sigma \tau_{\text{ext}} = 0$$

(11.6)

Condizioni per l'equilibrio statico.

Forze complanari giacciono nello stesso piano.

Condizioni per l'equilibrio statico con forze complanari.

Risoluzione di un problema di statica.

Queste condizioni sono spesso dette *prima* ($\Sigma F_{\text{ext}} = 0$) e *seconda* ($\Sigma \tau_{\text{ext}} = 0$) condizione di equilibrio di un corpo rigido.

Ciascuna di queste equazioni vettoriali ha componenti x , y , e z , per un totale di sei equazioni. Tuttavia, in molte situazioni, tutte le forze esterne giacciono in realtà in un dato piano, diciamo il piano xy . Forze con questa caratteristica sono dette *complanari*, e noi ci limiteremo a prendere in considerazione il caso delle forze complanari. Allora le forze esterne hanno soltanto le componenti x e y , e i momenti esterni hanno soltanto le componenti z . Queste componenti dei momenti corrispondono a momenti orari e antiorari rispetto a un asse perpendicolare al piano xy . Le condizioni per l'equilibrio statico diventano

$$\Sigma F_{x,\text{ext}} = 0 \quad \Sigma F_{y,\text{ext}} = 0 \quad \Sigma \tau_{z,\text{ext}} = 0$$

(11.7)

Dalle Equazioni (11.7) si possono ricavare al massimo tre incognite. Le equazioni contengono forze, distanze e angoli: soltanto tre di queste grandezze possono essere determinate risolvendo il sistema formato dalle tre equazioni. In molte situazioni semplici, le grandezze incognite saranno tre o meno. Ma vi sono anche casi in cui il numero delle incognite è maggiore di tre: in tali casi, per determinare le incognite è necessario procurarsi altre informazioni.

Per risolvere un tipico problema di statica si può seguire un utile procedimento consistente in una sequenza di passi. Questi passi sono:

1. Fare uno schizzo della situazione rappresentando il corpo rigido che è in equilibrio statico.
2. Costruire il diagramma di corpo libero tracciando i vettori rappresentativi di tutte le forze esterne che agiscono sul corpo rigido, e indicare il modulo, la direzione e il punto di applicazione di ciascuna forza. Alcune di queste grandezze saranno incognite; per esempio, potranno essere sconosciuti la direzione di una forza o il punto in cui essa è applicata.
3. Scegliere un sistema di assi coordinati lungo i quali scomporre le forze. Generalmente una scelta appropriata dell'orientamento degli assi coordinati semplifica la soluzione.
4. Fare la scelta di un asse rispetto al quale determinare i momenti. Spesso è conveniente scegliere l'asse in modo che passi per l'intersezione delle rette d'azione di due o più forze, perché in tal modo il braccio di ciascuna di queste forze è nullo.
5. Applicare le condizioni di equilibrio statico, Equazioni (11.7).
6. Risolvere queste equazioni rispetto a non più di tre incognite.

Una delle forze che agiscono su un corpo rigido in prossimità della superficie della Terra è il peso del corpo. Negli esempi che seguono si supporrà che il suo punto di applicazione sia nel centro di massa (Paragrafo 10.2) del corpo. Discuteremo questa ipotesi nel prossimo paragrafo.

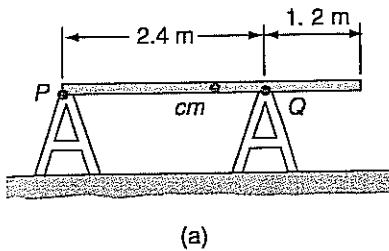
Esempio 11.5

Una tavola omogenea del peso di 48 N e lunga 3.6 m è appoggiata in posizione orizzontale su due cavalletti, come mostra la Figura 11.9a. Quali forze normali sono esercitate su di essa dai cavalletti?

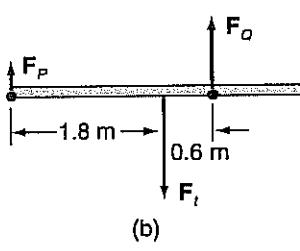
Soluzione

Dal momento che la tavola è omogenea, si ammette che il peso sia applicato nel centro di massa, a 1,8 m da ciascuna estremità. La Figura 11.9b rappresenta il diagramma di corpo libero per la tavola. I cavalletti esercitano sulla tavola forze normali verticali di intensità F_P e F_Q nei punti P e Q . Queste due forze normali sono le incognite. Siccome la tavola è in equilibrio statico, possiamo applicare le condizioni di equilibrio statico, Equazioni (11.7). Disponiamo l'asse x orizzontalmente e l'asse y verticalmente verso l'alto. Allora $\sum F_{x,\text{ext}} = 0$ è soddisfatta automaticamente perché tutte le forze agiscono lungo la verticale. Imponendo che sia $\sum F_{y,\text{ext}} = 0$, si ottiene $F_P + F_Q - F_t = 0$, ossia

$$F_P + F_Q = F_t$$



(a)



(b)

La somma delle due forze normali deve equilibrare il peso. Ora dobbiamo scegliere un asse rispetto al quale calcolare i momenti. Qualunque asse potrebbe andare bene, ma una scelta conveniente è quella dell'asse passante per il punto P perché il momento di F_P rispetto a questo asse è nullo. Il peso ha un momento orario, e F_Q un momento antiorario rispetto all'asse passante per P . Scelto l'asse perpendicolare alla pagina e uscente da essa, applicando l'equazione $\sum \tau_{x,\text{ext}} = 0$ si ha $(2.4 \text{ m})F_Q - (1.8 \text{ m})F_t = 0$, ossia

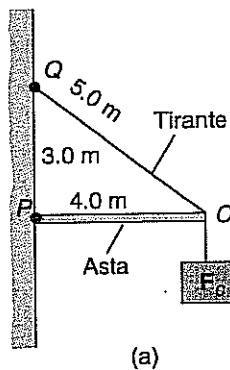
$$(2.4 \text{ m})F_Q = (1.8 \text{ m})(48 \text{ N})$$

$$F_Q = 36 \text{ N}$$

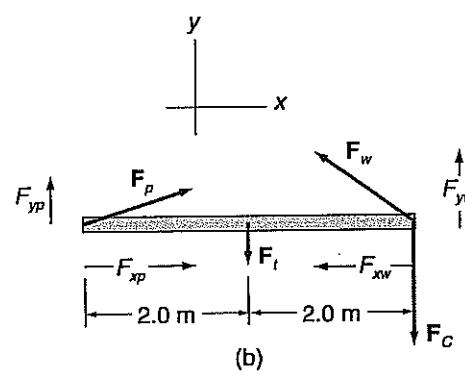
L'altra forza normale può essere determinata immediatamente poiché $F_P + F_Q = 48 \text{ N}$, e quindi $F_P = 12 \text{ N}$. Si cerchi di risolvere nuovamente questo problema con una diversa scelta dell'asse, per esempio facendolo passare per il punto Q o per il centro di massa.

Esempio 11.6

Un'asta omogenea sorregge un carico il cui peso ha intensità $F_C = 1100 \text{ N}$, come mostra la Figura 11.10a. L'asta è fissata al muro tramite un perno che esercita una forza F_p sull'asta. Il peso dell'asta è applicato nel suo punto medio e ha intensità 200 N. Determinare le componenti orizzontale e verticale di F_p e la tensione del tirante.



(a)

**Figura 11.9**

Esempio 11.5: (a) una tavola è appoggiata su due cavalletti. (b) Il diagramma di corpo libero per la tavola.

Soluzione

Prendiamo l'asta come corpo rigido in equilibrio statico e ne disegniamo il diagramma di corpo libero nella Figura 11.10b. È da notare che il carico è in equilibrio e quindi la tensione del filo verticale cui esso è attaccato deve essere anch'essa F_C . Non si conoscono né l'intensità né la direzione della forza F_p esercitata dal perno, ma ammettiamo che essa abbia componenti x e y come in figura. Se nella nostra soluzione F_{xp} e F_{yp} risulteranno positive, vorrà dire che la nostra ipotesi circa la direzione di F_p è corretta. Se una o entrambe le componenti risulteranno di valore negativo, potremo correggere di conseguenza la direzione di F_p . Le tre incognite sono F_{xp} , F_{yp} , e la tensione del tirante F_{yw} . La tensione può essere scomposta nelle componenti x e y ricorrendo alla similitudine dei triangoli. Allora $F_{yw}/F_{yw} = 3.0 \text{ m}/5.0 \text{ m}$, ossia $F_{yw} = \frac{3}{5} F_{yw}$. Analogamente $F_{xp} = -\frac{4}{5} F_{yw}$.

Figura 11.10

Esempio 11.6: (a) un'asta sorregge un carico. (b) Il diagramma di corpo libero per l'asta.

Applicando le condizioni per l'equilibrio traslatorio, si ha

$$F_{xp} - \frac{4}{5} F_w = 0$$

$$F_{yp} + \frac{3}{5} F_w - F_t - F_C = 0$$

È conveniente scegliere l'asse in modo che passi per il punto O all'estremità destra dell'asta. Le rette d'azione di F_w , F_C e F_{xp} intersecano tutte quest'asse, e quindi il momento di queste forze rispetto a O è nullo. La componente F_{yp} produce un momento orario, e F_t un momento antiorario rispetto a questo asse. Per l'equilibrio rotatorio allora, $(2.0 \text{ m})F_t - (4.0 \text{ m})F_{yp} = 0$, e quindi

$$F_{yp} = \frac{1}{2} F_t = 100 \text{ N}$$

Sostituendo questo valore nella seconda delle condizioni scritte sopra si ottiene $\frac{3}{5} F_w = F_t + F_C - 100 \text{ N}$, ossia

$$F_w = 2000 \text{ N}$$

F_{xp} si ricava dalla prima condizione scritta sopra:

$$F_{xp} = \frac{4}{5} F_w = 1600 \text{ N}$$

Qual è l'utilità pratica di questo calcolo? Dalla soluzione vediamo che la tensione del tirante è di 2000 N: si deve usare un cavo abbastanza robusto da sopportare questa tensione senza apprezzabile stiramento. Analogamente, si può constatare che sull'asta si esercitano forze che tendono a comprimerla e a piegarla. L'asta dev'essere abbastanza rigida da sopportare queste forze senza deformarsi apprezzabilmente.

Abbiamo affermato che la scelta dell'asse rispetto al quale calcolare i momenti delle forze è arbitraria. È istruttivo mettere a confronto differenti scelte dell'asse rispetto al quale valutare i momenti dell'esempio precedente, servendoci dei valori delle forze appena determinati. Supponiamo, per esempio, di calcolare i momenti rispetto a un asse passante per il punto P , che nella Figura 11.10a corrisponde al perno. La forza esercitata dal perno ha momento nullo rispetto a questo asse. Le forze F_t e F_C hanno momenti orari; il momento antiorario è prodotto dalla componente verticale $F_{yw} = \frac{3}{5} F_w = 1200 \text{ N}$. Sommando le componenti z dei momenti delle forze rispetto all'asse P , si ottiene

$$(4.0 \text{ m})(1200 \text{ N}) - (2.0 \text{ m})(200 \text{ N}) - (4.0 \text{ m})(1100 \text{ N}) = 0$$

Anche la somma delle componenti dei momenti esterni rispetto all'asse P è dunque nulla. Un calcolo analogo rispetto all'asse Q di Figura 11.10a mostra che anche la risultante dei momenti esterni rispetto a questo asse è nulla. È quanto ci si poteva attendere, dal momento che il corpo rigido è in equilibrio statico.

Un problema di statica può essere affrontato con un'impostazione alternativa, ricavando tre equazioni in tre incognite dall'applicazione della condizione $\sum \tau_{z,\text{ext}} = 0$ rispetto a tre assi opportunamente scelti. Queste equazioni non sono indipendenti dalle tre condizioni delle Equazioni (11.7), ma a volte sono di applicazione più immediata, come dimostra l'esempio seguente.

Esempio 11.7

Si riconsideri l'esempio precedente imponendo la condizione $\sum \tau_{z,\text{ext}} = 0$ rispetto agli assi passanti per O , P , e Q .

Soluzione

Rispetto all'asse O si ha, come in precedenza

$$(2.0 \text{ m})F_t - (4.0 \text{ m})F_{yp} = 0$$

$$F_{vp} = 100 \text{ N}$$

Rispetto all'asse P , si ottiene

$$(4.0 \text{ m}) \frac{3}{5} F_w - (2.0 \text{ m}) F_t - (4.0 \text{ m}) F_C = 0$$

$$\frac{3}{5} F_w = \frac{1}{2} F_t + F_C = 1200 \text{ N}$$

$$F_w = 2000 \text{ N}$$

E rispetto all'asse Q , il momento di F_w è nullo, cosicché si ha

$$(3.0 \text{ m}) F_{xp} - (2.0 \text{ m}) F_t - (4.0 \text{ m}) F_C = 0$$

$$F_{xp} = \frac{2}{3} F_t + \frac{4}{3} F_C = 1600 \text{ N}$$

■

Negli esempi considerati finora le condizioni di equilibrio statico, Equazioni (11.7), sono state sufficienti per determinare tutte le grandezze incognite. Vi sono però molte situazioni in cui queste condizioni non bastano a determinare tutte le incognite. Per esempio, vi possono essere più di tre forze incognite, mentre solo tre sono le equazioni che le mettono in relazione. Le ulteriori informazioni che si debbono avere per poter risolvere questo tipo di problemi provengono spesso da un'analisi delle proprietà meccaniche dei materiali. Non approfondiremo questa impostazione, ma gli esempi che seguono serviranno a illustrare questo genere di problemi.

Esempio 11.8

Una porta omogenea di dimensioni 0.82 m per 2.04 m, che pesa 210 N, poggia su due cardini disposti simmetricamente a 1.60 m l'uno dall'altro, come mostra la Figura 11.11a. (a) Determinare la componente orizzontale della forza esercitata da ciascun cardine sulla porta. (b) Determinare la componente verticale della forza esercitata da ciascun cardine sulla porta. Discutere le difficoltà incontrate.

Soluzione

(a) La Figura 11.11b rappresenta il diagramma di corpo libero, con le forze esercitate dai cardini superiore e inferiore scomposte nelle componenti orizzontali e verticali. Il peso della porta, che è omogenea, è applicato nel punto centrale di questa. Imponendo che le componenti x e y delle forze esterne abbiano somma nulla, si ottiene

$$F_{ys} + F_{yI} - F_t = 0$$

$$F_{xs} + F_{xI} = 0$$

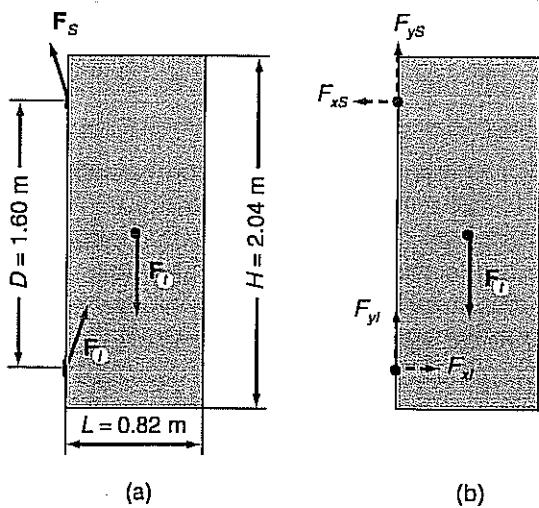


Figura 11.11

Esempio 11.8: (a) una porta poggia su due cardini. (b) Il diagramma di corpo libero per la porta.

Quindi la somma delle componenti verticali delle forze esercitate dai cardini equilibrano il peso della porta, mentre le componenti orizzontali delle forze esercitate dai cardini si equilibrano reciprocamente. Scegliamo un asse passante per la posizione del cardine superiore e perpendicolare al piano della figura. Il peso produce un momento orario rispetto a questo asse. L'unico altro momento diverso da zero è quello prodotto dalla componente F_{xI} , e si tratta di un momento antiorario rispetto all'asse scelto. Allora

$$DF_{xI} - \frac{1}{2} LF_t = 0$$

$$(1.60 \text{ m}) F_{xI} = (0.41 \text{ m})(210 \text{ N})$$

$$F_{xI} = 54 \text{ N}$$

La componente della forza esercitata dal cardine superiore equilibra F_{xI} , quindi

$$F_{xS} = -54 \text{ N}$$

(b) Abbiamo determinato due incognite, F_{xS} e F_{xI} , e disponiamo di un'unica equazione che mette in relazione le altre due componenti incognite delle forze:

$$F_{yS} + F_{yI} = 210 \text{ N}$$

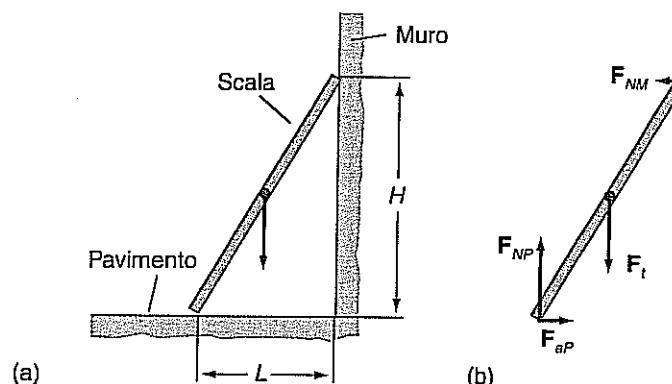
In base alle informazioni disponibili non siamo in grado di determinare come questo carico di 210 N sia distribuito tra i due cardini. Si noti che F_{yS} e F_{yI} hanno la medesima retta d'azione e pertanto esercitano lo stesso momento totale rispetto a un asse, indipendentemente da come siano distribuiti 210 N. Per determinare F_{yS} e F_{yI} sono necessarie altre informazioni, le quali dipendono dai particolari del montaggio e dell'allineamento dei cardini.

Esempio 11.9

Una scala a pioli omogenea è appoggiata contro un muro, come mostra la Figura 11.12a. Qual è il valore minimo del coefficiente di attrito statico tra scala e pavimento che impedisce alla scala di scivolare?

Figura 11.12

Esempio 11.9: (a) una scala a pioli omogenea è in equilibrio statico. (b) Il diagramma di corpo libero per la scala. La forza d'attrito esercitata dalla parete è trascurabile.



Soluzione

In questo problema vi sono quattro forze incognite. Il pavimento e il muro esercitano forze normali sulla scala. Le due superfici esercitano sulla scala anche forze di attrito statico. Ammettiamo che la superficie del muro sia molto liscia e che ivi la forza d'attrito sia trascurabile. Questa ipotesi riduce i numeri delle forze incognite a tre. La Figura 11.12b è il diagramma di corpo libero per la scala. Scegliamo l'asse in modo che passi per il punto di contatto tra scala e pavimento. Applicando le condizioni di equilibrio statico si ottiene, per le intensità di queste forze:

$$F_{aP} = F_{NM} \quad F_{NP} = F_t \quad HF_{NM} - \frac{1}{2}LF_t = 0$$

Queste equazioni possono essere risolte senza difficoltà rispetto alle forze incognite:

$$F_{NM} = \frac{L}{2H}F_t \quad F_{aP} = \frac{L}{2H}F_t \quad F_{NP} = F_t$$

Dal momento che F_{aP} è una forza d'attrito statico, dobbiamo prescrivere che il suo valore non superi il valore massimo della forza d'attrito statico, $F_{aP} \leq \mu_s F_{NP}$ per l'Equazione (6-3). Imponendo questa condizione si ottiene $(L/2H)F_t \leq \mu_s F_t$, ossia, semplificando,

$$\mu_s \geq \frac{L}{2H}$$

11.5 IL CENTRO DI GRAVITÀ

Abbiamo supposto che il punto di applicazione del peso di un corpo fosse nel centro di massa di quel corpo. Qual è la giustificazione di questa ipotesi? In che senso c'è un punto nel quale si può immaginare che sia applicato il peso totale del corpo? Che cos'è il peso totale del corpo?

Dal momento che consideriamo un corpo composto da un grande numero di infinitesime parti, il peso del corpo, \mathbf{F}_t , è semplicemente la somma dei pesi di queste parti.

Il peso di un corpo è la somma dei pesi delle sue parti.

Per un corpo di dimensioni ordinarie in prossimità della superficie terrestre, il peso di ciascuna parte è diretto verso il basso, ed è semplice sommare tutti i pesi parziali. Se m_i rappresenta la massa di uno di questi elementi, si ha

$$F_t = \sum m_i g = (\sum m_i) g = Mg \quad (11.8)$$

dove $M = \sum m_i$ è la massa totale del corpo e g è l'accelerazione dovuta alla gravità. Sommando i pesi delle singole parti del corpo si ottiene, secondo l'Equazione (11.8), il peso totale del corpo, indipendentemente dai punti di applicazione delle singole forze.

Ma il punto di applicazione di ciascuna forza è importante quando si calcolano i momenti. Il peso di ciascuna parte del corpo produrrà un momento rispetto all'asse O, come mostra la Figura 11.13. Per la forza di modulo $F_i = m_i g$, la componente del momento τ_{zi}

$$\tau_{zi} = -(x_i)(m_i g)$$

dove x_i è la coordinata x di quella parte del corpo e il segno negativo tiene conto del senso orario del momento. Se sommiamo questi contributi derivanti dalle singole parti del corpo, otteniamo la componente del momento dovuto alla forza gravitazionale totale applicata al corpo:

$$\tau_z = \sum [-(x_i)(m_i g)] \quad (11.9)$$

Da questa espressione possiamo renderci conto che il momento dovuto al peso di un corpo dipende dal modo in cui le parti del corpo sono distribuite nello spazio. È possibile trovare un punto del corpo, il *centro di gravità* o *baricentro*, nel quale si può immaginare che sia applicato il peso totale del corpo in modo da produrre il medesimo momento dato dall'Equazione (11.9). Se x_{cg} è la coordinata x di questo punto, la componente del momento dovuto al peso totale, di intensità $F_t = \sum m_i g$, è

$$\tau_z = -x_{cg} F_t = -x_{cg} \sum m_i g \quad (11.10)$$

La coordinata x del centro di gravità viene determinata uguagliando i secondi membri delle Equazioni (11.9) e (11.10):

$$x_{cg} = \frac{\sum (x_i)(m_i g)}{\sum m_i g}$$

Il centro di gravità è quel punto in cui si può considerare che sia applicato il peso di un corpo, ed è dato da

$$x_{cg} = \frac{\sum x_i m_i g}{\sum m_i g} \quad (11.11)$$

Nella maggior parte dei casi di interesse pratico, il valore di g è lo stesso per tutte le parti del corpo e può essere eliminato dal secondo membro dell'Equazione (11.11). Dopo aver semplificato il fattore comune g , si ha

$$x_{cg} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

Riconosciamo nel secondo membro la coordinata x del centro di massa del corpo. Se l'accelerazione dovuta alla gravità è la stessa per ciascuna parte del corpo, il centro di gravità coincide con il centro di massa.

Il momento totale è la somma dei momenti dovuti al peso di ciascuna parte.

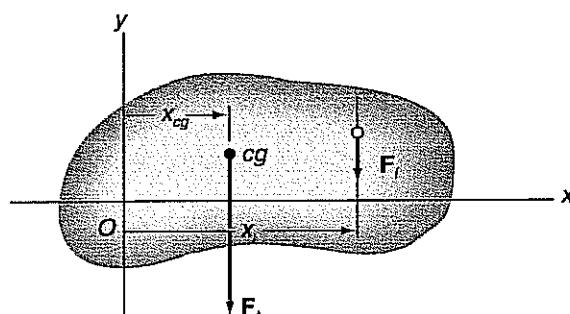
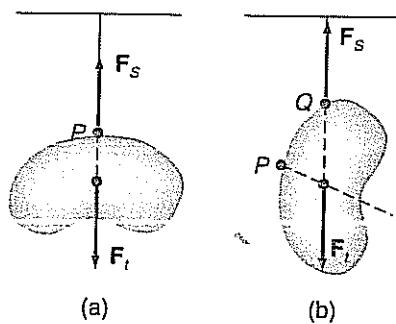


Figura 11.13

Il peso totale di un corpo è applicato nel centro di gravità. Il peso di una parte del corpo ha intensità $F_i = m_i g$.

Figura 11.14

Il centro di gravità deve trovarsi sulla verticale passante per il punto di sospensione, al di sotto di questo.



Il centro di gravità di un corpo rigido può essere determinato sperimentalmente sospendendo il corpo per due o più punti, come mostra la Figura 11.14. Se il corpo viene sospeso a un filo per il punto P , le condizioni di equilibrio statico impongono che sia $F_t = F_s$ e che le due forze abbiano la medesima retta d'azione. Il centro di gravità deve trovarsi sulla verticale passante per P , al di sotto di questo punto. Analogamente, il centro di gravità deve trovarsi sulla verticale passante per un altro punto di sospensione, Q , e quindi si trova all'intersezione di queste due rette.

11.6 IL PRODOTTO VETTORIALE E IL MOMENTO DI UNA FORZA

Si è ammesso che la direzione del momento di una forza sia quella di un asse perpendicolare al piano che contiene la forza \mathbf{F} e il vettore \mathbf{r} che individua il punto di applicazione della forza. Se questo piano è il piano xy , il vettore momento ha la direzione dell'asse z , e ci si riferisce alla componente τ_z del momento come al momento rispetto all'asse z . È preferibile considerare il momento di una forza come un vettore non riferito a un particolare sistema di coordinate. A questo scopo generalizzeremo la definizione del momento introducendo il *prodotto vettoriale* di due vettori.

Il prodotto vettoriale. Il prodotto scalare di due vettori è stato definito nel Capitolo 8. Ora consideriamo un tipo completamente diverso di prodotto di due vettori. Come suggerisce il suo nome, il prodotto vettoriale di due vettori ha come risultato un altro vettore, e tale prodotto è indicato con una croce (\times) tra i fattori. Consideriamo due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , come in Figura 11.15a, dove l'angolo θ è il minore degli angoli formati dai due vettori. *Il prodotto vettoriale $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è definito come un vettore $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$; la direzione di \mathbf{C} è data dalla regola della mano destra e il modulo C è dato da*

$$C = AB \sin \theta \quad (11.12)$$

L'espressione «regola della mano destra» indica la seguente convenzione adottata per determinare la direzione del vettore $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

Definizione di prodotto vettoriale.

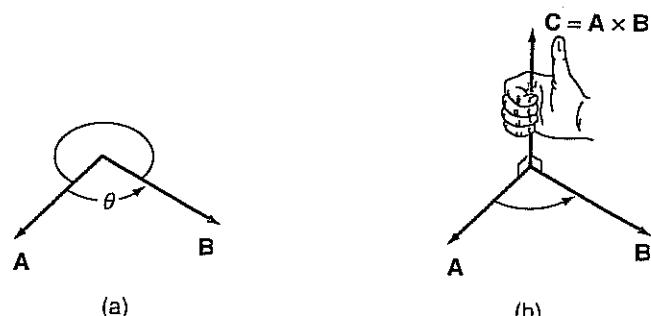
La regola della mano destra.

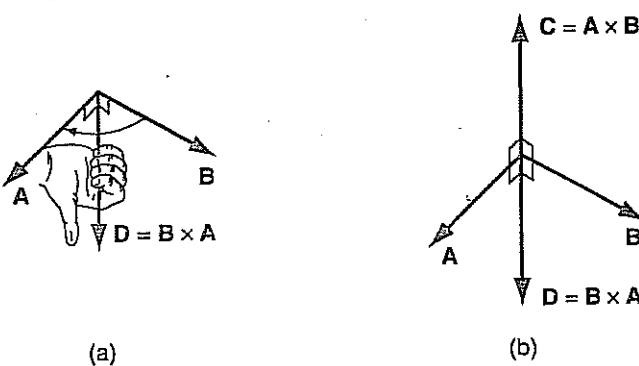
Il vettore \mathbf{C} è perpendicolare al piano che contiene i vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} . Se le quattro dita piegate della mano destra indicano il senso di rotazione che porterebbe il vettore \mathbf{A} a sovrapporsi al vettore \mathbf{B} , il pollice disteso indica la direzione di \mathbf{C} .

La rotazione che porterebbe \mathbf{A} a sovrapporsi a \mathbf{B} avviene lungo il minore degli angoli che i due vettori formano.

Figura 11.15

(a) Due vettori giacciono in un piano, e θ è il minore degli angoli che essi formano. (b) Il vettore $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è perpendicolare sia ad \mathbf{A} che a \mathbf{B} , e il suo verso è indicato dalla regola della mano destra.





La regola della mano destra è illustrata nella Figura 11.15b, dove \mathbf{C} è perpendicolare tanto ad \mathbf{A} che a \mathbf{B} . La definizione del prodotto vettoriale $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ comprende due parti, dovendo essere specificati sia il modulo che la direzione di \mathbf{C} : l'Equazione (11.12) fornisce il modulo, mentre la regola della mano destra fornisce la direzione.

Il prodotto vettoriale di due vettori è *non commutativo*: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$. Cambiamo l'ordine dei fattori nel prodotto vettoriale: consideriamo il vettore $\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$, dove \mathbf{A} e \mathbf{B} sono i medesimi vettori di prima. Il modulo è dato nuovamente dall'Equazione (11.12), $D = BA \sin \theta$. Ma, per applicare la regola della mano destra, occorre immaginare di far ruotare \mathbf{B} fino a sovrapporsi ad \mathbf{A} , come mostra la Figura 11.16a. La direzione di $\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ è opposta alla direzione di $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, come risulta dalla Figura 11.16b. I moduli di \mathbf{C} e \mathbf{D} , d'altra parte, sono uguali, $C = D = AB \sin \theta$. Quindi

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (11.13)$$

Invertendo l'ordine dei fattori si inverte la direzione del prodotto vettoriale. Pur non essendo commutativo, il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

C'è un'interessante e utile interpretazione geometrica del prodotto vettoriale di due spostamenti. Gli spostamenti \mathbf{R} e \mathbf{S} di Figura 11.17 definiscono un parallelogramma la cui area è $A = RS \sin \theta$, cioè il prodotto della base per l'altezza. In virtù dell'Equazione (11.12) questa area rappresenta il modulo del prodotto vettoriale di \mathbf{R} e \mathbf{S} : $A = |\mathbf{R} \times \mathbf{S}| = RS \sin \theta$.

Definiamo un elemento orientato di superficie come un vettore $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{S}$ il cui modulo è pari all'area del parallelogramma formato da \mathbf{R} e \mathbf{S} e la cui direzione è perpendicolare al piano di \mathbf{R} e \mathbf{S} . In questo modo si può specificare l'orientamento di un elemento di superficie.

Si può dare un'interpretazione geometrica anche del modulo del prodotto vettoriale di due vettori qualsiasi. Nell'Equazione (11.12), il fattore $\sin \theta$ può essere associato sia al modulo di \mathbf{A} sia a quello di \mathbf{B} . Per esempio, $A \sin \theta$ è la grandezza della componente, $A_{\perp} = A \sin \theta$, che è perpendicolare a \mathbf{B} , come mostra la Figura 11.18a.

Quindi il modulo $C = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = A_{\perp} B$. In modo analogo, la costruzione di Figura 11.18b mostra che $C = AB_{\perp}$. Il *modulo del prodotto vettoriale dei vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} è il prodotto del modulo di un vettore per la componente ad esso perpendicolare dell'altro vettore*. Spesso conviene servirsi di questa conclusione per calcolare il modulo del prodotto vettoriale.

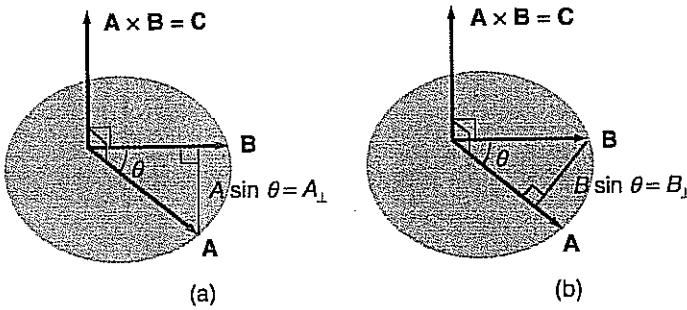


Figura 11.18 Il modulo del prodotto vettoriale può essere espresso sia (a) come $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = A_{\perp} B$ che (b) come $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB_{\perp}$.

Figura 11.16

(a) La direzione di $\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ è data dalla regola della mano destra. (b) Il prodotto vettoriale non è commutativo: $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Il prodotto vettoriale non è commutativo.

I vettori $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ hanno modulo uguale e direzione opposta.

Definizione di superficie orientata.

Il modulo $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = A_{\perp} B = AB_{\perp}$.

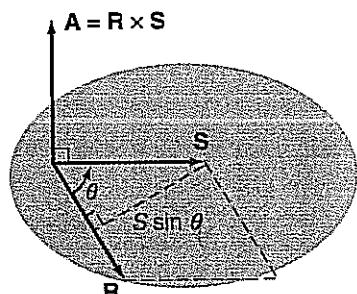


Figura 11.17

Il vettore superficie $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{S}$ è perpendicolare al piano che contiene gli spostamenti \mathbf{R} e \mathbf{S} , e il suo modulo è pari all'area del parallelogramma.

Casi particolari di prodotto vettoriale.

Vi sono alcuni casi particolari che meritano attenzione. Supponiamo che due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} siano perpendicolari. Allora, poiché $\sin 90^\circ = 1$, $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB$. All'estremo opposto possiamo considerare due vettori paralleli ($\theta = 0$) oppure opposti ($\theta = 180^\circ$): in entrambi i casi il fattore $\sin \theta = 0$ e il modulo del prodotto vettoriale $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 0$; quindi $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$, il vettore nullo. *Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli od opposti è nullo.*

Esempio 11.10

Un topografo misura due spostamenti a partire da un paletto: \mathbf{A} di modulo $A = 204.56$ m verso est e \mathbf{B} di modulo $B = 188.32$ m in una direzione 74.82° a nord del punto cardinale est. Determinare l'area del parallelogramma formato da questi spostamenti.

Soluzione

Invece di usare direttamente l'Equazione (11.12), troviamo la componente di \mathbf{A} perpendicolare a \mathbf{B} :

$$A_\perp = (204.56 \text{ m}) \sin 74.82^\circ = 197.4 \text{ m}$$

Allora la misura dell'area $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ è

$$A_\perp B = (197.4 \text{ m})(188.32 \text{ m}) = 37\,180 \text{ m}^2$$

In alternativa, si può calcolare $B_\perp = 181.7$ m, e pervenire a

$$AB_\perp = (204.56 \text{ m})(181.7 \text{ m}) = 37\,180 \text{ m}^2$$

La direzione del vettore area $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è data dalla regola della mano destra, e in questo caso è verso l'alto. Qual è la direzione di $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$?

Il prodotto vettoriale espresso in termini delle componenti. Il prodotto vettoriale di due vettori può essere espresso per mezzo delle componenti dei due vettori. A questo scopo, dobbiamo prendere in considerazione i prodotti vettoriali dei vettori unitari. Cominciamo a calcolare $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$: il risultato è zero, ossia il vettore nullo, perché i due vettori sono paralleli ($\sin \theta = 0$). Per la medesima ragione, $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$. Per calcolare $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ facciamo riferimento alla Figura 11.19, che mostra i vettori unitari in un sistema di coordinate xyz . Il modulo di ciascuno di essi è 1, e quindi anche il modulo di $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ è 1: $|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = (1)(1) \sin 90^\circ = 1$. La direzione di \mathbf{i} è data dalla regola della mano destra e, in base alla Figura 11.19, è quella dell'asse z positivo. Quindi $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ è un vettore di modulo 1 diretto lungo l'asse z ; ma questo non è altro che il versore \mathbf{k} . Abbiamo dunque $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Invertendo semplicemente l'ordine dei fattori si ha $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$.

Il sistema di coordinate rappresentato nella Figura 11.19 è detto *sistema di coordinate destrorso*. I vettori unitari \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} associati agli assi x , y , z , nell'ordine, sono connessi tra loro dalla regola della mano destra: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. In questo testo ci serviremo soltanto di sistemi di coordinate destrorsi.

In modo analogo a quanto fatto sopra, si possono calcolare i prodotti vettoriali delle altre coppie di versori: in totale si possono formare nove di questi prodotti, e il lettore dovrebbe verificare i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} \end{aligned} \quad (11.14)$$

Ora si considerino due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} espressi in termini delle loro componenti:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

Formiamo il prodotto vettoriale $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, esprimendo \mathbf{A} e \mathbf{B} appunto in termini delle loro componenti:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$

La proprietà distributiva del prodotto vettoriale ci consente di sviluppare il prodotto, ottenendo nove termini ciascuno dei quali contiene un prodotto vettoriale di due versori. Per esempio, compariranno i termini $A_x B_x \mathbf{i} \times \mathbf{i}$ e $A_z B_y \mathbf{k} \times \mathbf{i}$.

Un sistema di coordinate destrorso.

Prodotti vettoriali dei vettori unitari.

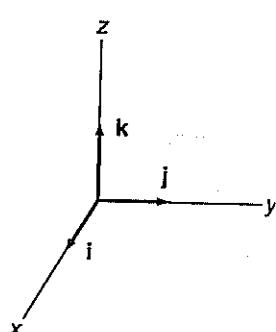


Figura 11.19

Un sistema di coordinate destrorso.

Calcoliamo i prodotti vettoriali servendoci delle Equazioni (11.14) e otteniamo

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad (11.15)$$

Un altro modo di esprimere il risultato è

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}$$

e, per confronto con l'Equazione (11.15), le componenti di \mathbf{C} sono date da

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

Esempio 11.11

Si determini il vettore che rappresenta l'area misurata dal topografo dell'Esempio 11.10 calcolando il prodotto vettoriale in termini di componenti. Si utilizzi un sistema di coordinate con \mathbf{i} diretto verso est e \mathbf{j} diretto verso nord; in tal caso \mathbf{k} risulta diretto verticalmente verso l'alto.

Soluzione

In base ai dati dell'Esempio 11.10 determiniamo le componenti degli spostamenti:

$$A_x = 204.56 \text{ m}, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0$$

e

$$B_x = (188.32 \text{ m}) \cos 74.82^\circ = 49.31 \text{ m}, \quad B_y = (188.32 \text{ m}) \sin 74.82^\circ = 181.7 \text{ m}, \quad B_z = 0.$$

Se \mathbf{C} rappresenta il vettore area, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ in virtù dell'Equazione (11.15), le componenti di \mathbf{C} sono

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y = (0)(0) - (0)(181.7 \text{ m}) = 0 \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z = (0)(49.31 \text{ m}) - (204.56 \text{ m})(0) = 0 \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x \\ &= (204.56 \text{ m})(181.7 \text{ m}) - (0)(49.31 \text{ m}) = 37180 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

L'area misurata dal topografo è rappresentata da

$$\mathbf{C} = (37180 \text{ m}^2) \mathbf{k}$$

Il momento di una forza come prodotto vettoriale. Il prodotto vettoriale può essere utilizzato per dare una definizione generale del momento come grandezza vettoriale. Supponiamo che una forza \mathbf{F} sia applicata a un corpo in un punto individuato da un vettore posizione \mathbf{r} relativamente a un'origine o a un punto di riferimento O , come mostra la Figura 11.20. *Il momento della forza \mathbf{F} rispetto al punto O è il prodotto vettoriale*

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (11.16)$$

Momento di una forza rispetto a un punto come prodotto vettoriale.

Il modulo del prodotto vettoriale è $\tau = rF \sin \theta$ e la direzione è, in accordo con la regola della mano destra, perpendicolare al piano che contiene \mathbf{r} e \mathbf{F} . Se si sceglie tale piano come piano xy , il momento ha soltanto una componente z e coincide con il momento rispetto all'asse z definito nel Paragrafo 11.3. Con una diversa scelta del sistema di coordinate, il momento τ avrebbe componenti τ_x , τ_y , τ_z . La componente τ_x è il momento rispetto all'asse x , τ_y è il momento rispetto all'asse y , e τ_z è il momento rispetto all'asse z .

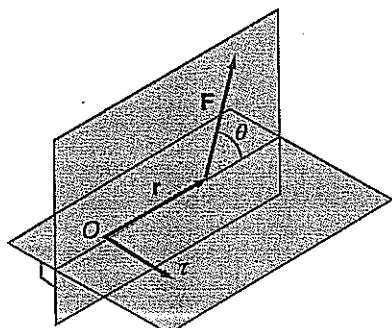


Figura 11.20

Un vettore posizione \mathbf{r} individua il punto di applicazione di una forza \mathbf{F} a partire da un punto di riferimento O . Il momento della forza rispetto a O è definito come $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Nel Paragrafo 4.5 abbiamo introdotto la grandezza velocità angolare e l'abbiamo definita come un vettore. Il prodotto vettoriale può essere utilizzato per dare una definizione generale della velocità angolare ω legandola alla velocità di un punto:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

dove \mathbf{r} è il vettore di posizione del punto che ha velocità \mathbf{v} . Vedremo nei prossimi capitoli come i momenti delle forze, che producono moti rotatori, siano legati alle velocità angolari.

Esempio 11.12

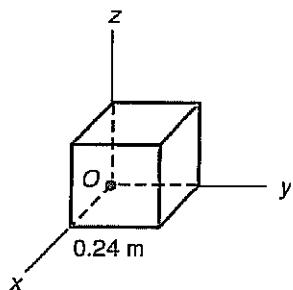


Figura 11.21

Esempio 11.12: un blocco cubico di ghiaccio ha lo spigolo di 0.24 m. L'asse z è diretto verticalmente verso l'alto e il peso è diretto verso il basso.

Soluzione

Il centro di gravità del blocco cubico è a metà di una sua qualunque diagonale, ed è individuato da

$$\mathbf{r}_{cg} = (0.12 \text{ m})\mathbf{i} + (0.12 \text{ m})\mathbf{j} + (0.12 \text{ m})\mathbf{k}$$

Il peso ha solamente una componente z (verticale) ed è

$$\mathbf{F}_t = -mg\mathbf{k} = (-120 \text{ N})\mathbf{k}$$

Servendoci dell'Equazione (11.16), formiamo il prodotto vettoriale $\tau = \mathbf{r}_{cg} \times \mathbf{F}_t$. Esprimendo il prodotto vettoriale in termini di componenti, abbiamo

$$\tau_x = y_{cg}F_{tz} - z_{cg}F_{ty} = -14 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_y = z_{cg}F_{tx} - x_{cg}F_{tz} = 14 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_z = x_{cg}F_{ty} - y_{cg}F_{tx} = 0$$

ossia

$$\tau = (-14 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (14 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$$



RIEPILOGO

Paragrafo 11.2 Equilibrio statico di un corpo rigido

Un corpo esteso è in equilibrio statico se ogni suo punto rimane in quiete. Un corpo rigido è un corpo nel quale la distanza tra due qualsiasi punti rimane costante.

Paragrafo 11.3 Momento di una forza rispetto a un asse

Se \mathbf{r} individua il punto di applicazione di una forza \mathbf{F} su un corpo, e il piano che contiene \mathbf{r} e \mathbf{F} viene preso come piano xy , il momento rispetto all'asse z è τ_z . L'intensità del momento è data da $\tau = r_{\perp}F$. La componente τ_z del momento è positiva se tende a produrre una rotazione del corpo che, vista dall'asse z positivo, appare antioraria; τ_z è negativa se tale rotazione è oraria.

Paragrafo 11.4 Condizioni per l'equilibrio statico

Perché un corpo rigido sia in equilibrio statico, debbono essere soddisfatte sia la condizione per l'equilibrio traslatorio, $\sum F_{ext} = 0$, sia la condizione per l'equilibrio rotatorio rispetto a qualsiasi punto, $\sum \tau_{ext} = 0$. Per forze complanari, queste condizioni si riducono a

$$\sum F_{x,ext} = 0 \quad \sum F_{y,ext} = 0 \quad \sum \tau_{z,ext} = 0 \quad (11.7)$$

dove le forze complanari giacciono nel piano xy . Da queste equazioni si possono ricavare al massimo tre incognite.

Paragrafo 11.5 Il centro di gravità

Il centro di gravità di un corpo esteso è il punto in cui si può considerare applicata la forza gravitazionale totale agente sul corpo. Il centro di gravità e il centro di massa coincidono per corpi di dimensioni ordinarie in prossimità della superficie terrestre.

Paragrafo 11.6 Il prodotto vettoriale e il momento di una forza

Il prodotto vettoriale di due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} è anch'esso un vettore, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Il modulo di \mathbf{C} è $C = AB \sin \theta$, dove θ è il minore degli angoli formati da \mathbf{A} e \mathbf{B} . La direzione di \mathbf{C} è data dalla regola della mano destra ed è perpendicolare sia ad \mathbf{A} che a \mathbf{B} . Il prodotto vettoriale è espresso in termini delle componenti come

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} \quad (11.15)$$

Il momento di una forza rispetto a un punto O è definito come il prodotto vettoriale

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (11.16)$$

QUESITI

- 11.1** Fornire qualche esempio di oggetti che sono corpi rigidi e di oggetti che non lo sono.
- 11.2** Si consideri un blocco di gelatina fermo in una scodella. La distanza tra due punti qualsiasi del blocco rimane costante? Che cosa accade se lo si schiaccia con un cucchiaio? La gelatina è un corpo rigido?
- 11.3** A causa del carico che sopporta, un palo d'acciaio si accorcia dello 0,1 per cento. Questo palo è un corpo rigido?
- 11.4** Spiega come e perché una bilancia a bracci *uguali* può essere usata per confrontare pesi. Può confrontare le masse?
- 11.5** Spiega come e perché una bilancia a bracci *disuguali* può essere usata per confrontare pesi.
- 11.6** Archimede affermava di essere in grado di sollevare la Terra, se gli fossero stati dati una leva e un punto d'appoggio. Spiega su quale principio si basava la sua pretesa. Si trattava di una pretesa realistica?
- 11.7** L'altalena di un parco giochi ha una lunghezza totale di 3 m e ha il fulcro nel suo punto medio. In quale punto della trave e con quale forza dovrebbe premere lo zio per fare equilibrio alla nipotina di 20 kg che si trova a un'estremità della trave?
- 11.8** Si consideri una motrice con rimorchio a 18 ruote ferma su una superficie piana. La forza normale che si esercita su ciascuna ruota è uguale per tutte le 18 ruote? Qual è la somma delle forze normali che agiscono sulle ruote?
- 11.9** A una pesa pubblica gli autocarri vengono pesati sommando l'indicazione della bilancia quando la metà anteriore dell'autocarro è su di essa con l'indicazione che si ottiene quando sulla bilancia c'è la metà posteriore. Questo procedimento fornisce una misura precisa del peso dell'autocarro? Spiega.
- 11.10** Con riferimento al quesito precedente, un autocarro dovrebbe essere fermo quando si fanno le letture della bilancia? La bilancia dovrebbe essere su un terreno piano? Spiega.
- 11.11** Supponi di appendere un corpo al soffitto usando due fili metallici. A ciascuna estremità del corpo è attaccato un filo, e i fili possono essere attaccati al soffitto con qualunque orientamento. Quale orientamento dei fili corrisponde a un minimo della tensione in entrambi?
- 11.12** Nell'Esempio 11.9, il pavimento esercita sulla scala una forza normale e una forza d'attrito. Queste due forze possono essere sommate ottenendo la forza risultante \mathbf{F}_p esercitata dal pavimento sulla scala. Questa forza è diretta lungo la scala?
- 11.13** Dall'equazione $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ si può concludere che o $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{B} = \mathbf{0}$? Spiega.
- 11.14** Supponiamo che \mathbf{R} e \mathbf{S} siano spostamenti. Se $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{S}$ è un elemento di superficie orientato, come mostra la Figura 11.17, qual è l'interpretazione di $\mathbf{S} \times \mathbf{R}$?
- 11.15** Un corpo rigido può essere in equilibrio traslatorio e in equilibrio rotatorio ma non in equilibrio statico? Spiega.
- 11.16** Deve esserci della materia nel centro di gravità di un corpo?
- 11.17** Fai un esempio di situazione nella quale il centro di gravità e il centro di massa di un corpo non coincidono.
- 11.18** L'espressione «centro di gravità della Terra» ha significato? Spiega.
- 11.19** Il momento di una forza rispetto a un asse dipende dalla scelta dell'asse. Come può la condizione $\sum \tau_{z,\text{ext}} = 0$ essere soddisfatta per *qualunque* scelta dell'asse?
- 11.20** Quali sono le unità del momento e del lavoro nel sistema britannico di unità nel quale le unità fondamentali sono la libbra (lb), il piede (ft) e il secondo (s)?
- 11.21** Si completi la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
τ_z		Componente	
τ			
$\sum \tau_{\text{ext}}$			
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	Prodotto vettoriale di due vettori		-
r_1			m

ESERCIZI

Paragrafo 11.3 Momento di un forza rispetto a un asse

- 11.1** Prima che vi vengano praticati i fori per le dita, una palla da bowling omogenea di raggio 120 mm ha un peso di 65 N, e tale peso è applicato nel suo centro. Determinare il modulo e la direzione del momento di questa forza rispetto a un asse perpendicolare al piano della Figura 11.22 e passante per il punto (a) *A*; (b) *B*; (c) *C*; (d) *O*.
- 11.2** Dimostrare che l'unità SI del momento di una forza può essere espressa come $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

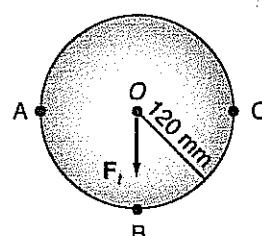


Figura 11.22 Esercizio 11.1: una palla da bowling omogenea.

- 11.3** Supponi di tenere in mano una pietra di massa 20 kg con il braccio teso orizzontalmente di lato. (a) Quale forza esercita la pietra sulla tua mano? (b) Valuta il momento di questa forza rispetto a un asse orizzontale passante per il tuo naso e perpendicolare al braccio.
- 11.4** Una forza \mathbf{F} agisce su un corpo in un punto di coordinate (x, y) , come mostra la Figura 11.23. Calcolare il suo momento rispetto all'asse z sommando le componenti del momento prodotte separatamente da F_x e F_y . Dimostrare in tal modo che $\tau_z = xF_y - yF_x$.

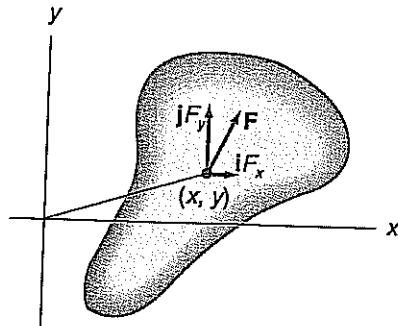


Figura 11.23 Esercizio 11.4.

Paragrafo 11.4 Condizioni per l'equilibrio statico

- 11.5** Nella Figura 11.24 un metro rigido omogeneo di massa 325 g è in equilibrio con il coltello esattamente sotto il suo punto medio. Una massa di 478 g è appesa con un filo leggero in corrispondenza della tacca degli 89.1 cm. (a) In quale punto è appesa la massa di 642 g? (b) Quale forza esercita il coltello sul metro? (c) Le risposte sarebbero diverse sulla Luna? E nello spazio interstellare?

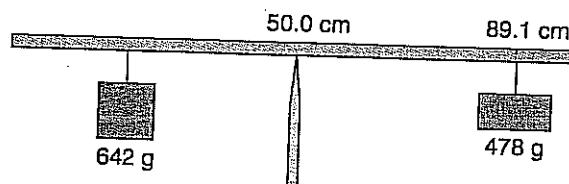


Figura 11.24 Esercizio 11.5.

- 11.6** Supponiamo che una persona del peso di 500 N si trovi sopra la tavola dell'Esempio 11.5. Determinare le forze normali che agiscono sulla tavola verso l'alto se la persona si trova (a) nel mezzo della tavola e (b) all'estremità sinistra di questa. (c) Fino a che punto la persona si può avvicinare al margine destro della tavola senza che questa si ribalti?
- 11.7** Calcolare la forza che si deve applicare alla leva della Figura 11.25 per muovere il masso del peso di 2000 N.

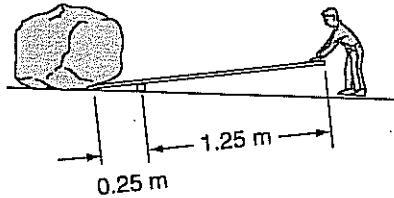


Figura 11.25 Esercizio 11.7.

- 11.8** Un carico $F_C = 900 \text{ N}$ è sorretto dall'asta rappresentata nella Figura 11.26. Un perno esercita in P una forza \mathbf{F} con componenti verticali e orizzontali. Il peso di ciascuna parte della struttura si esercita nel punto medio di quel parte. (a) Determinare le componenti della forza esercitata dal perno e il valore della tensione del cavo. (b) Qual è il carico massimo che può essere sorretto se tensione del cavo non deve superare 2500 N?

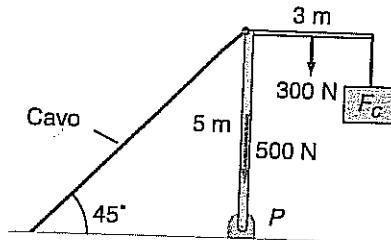


Figura 11.26 Esercizio 11.8.

- 11.9** Un'asta orizzontale lunga 8 m sorregge un carico di 20 kN, come mostra la Figura 11.27. Un perno esercita una forza sull'asta all'estremità sinistra di questa. (a) Trascurando il peso dell'asta, determinare la componente verticale e quella orizzontale della forza esercitata dal perno, nonché la tensione del cavo. (b) Qual è la direzione della forza esercitata dal perno?

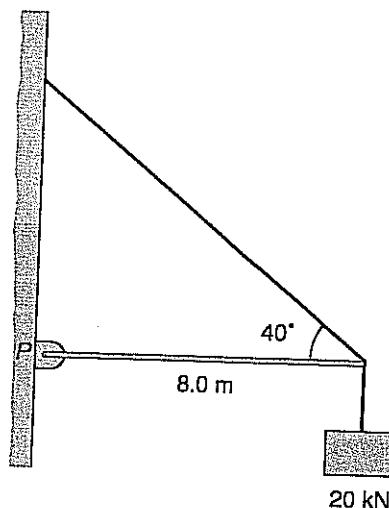


Figura 11.27 Esercizio 11.9.

- 11.10** Si ripeta l'esercizio precedente, supponendo che il peso dell'asta di intensità 4.0 kN si eserciti nel suo punto medio. Si determini nuovamente la direzione della forza esercitata dal perno, e si spieghino le differenze dal risultato precedente.
- 11.11** Un'autogru del peso di 30 kN ferma su un terreno pianeggiante sorregge un carico di 20 kN, come mostra la Figura 11.28.

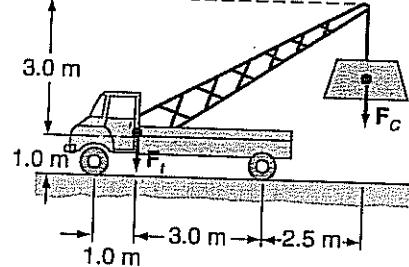


Figura 11.28 Esercizio 11.11.

- (a) Determinare le forze normali esercitate dal suolo sulle ruote anteriori e sulle ruote posteriori. (b) Qual è il carico minimo che farebbe ribaltare la gru?
- 11.12** Si ripeta l'esercizio precedente, ma orientando l'autogrù con il muso in salita su una pendenza di 20° . Si chiariscono le ipotesi fatte circa le forze d'attrito che agiscono sulle ruote.
- 11.13** Un cancello del peso di 480 N è fissato con due cardini a un palo, come mostra la Figura 11.29. Il tirante è fissato in modo che la componente orizzontale della forza esercitata dal cardine superiore sia nulla. Calcolare la componente orizzontale della forza esercitata dal cardine inferiore, la tensione del tirante, e la somma delle componenti verticali delle forze esercitate dai cardini.

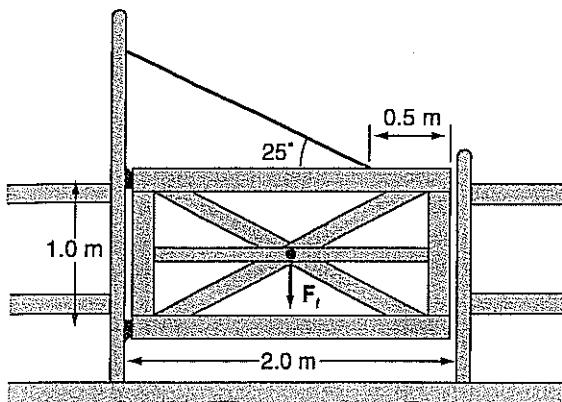


Figura 11.29 Esercizio 11.13.

- 11.14** Una scala a pioli di massa 15 kg e lunga 4.0 m è appoggiata contro una parete liscia; l'estremità inferiore della scala tocca il pavimento a 1.0 m dalla parete. Il peso della scala è applicato nel suo punto medio. Un imbianchino di massa 52 kg è in piedi sulla scala in un punto che dista 1.5 m dall'estremità superiore di questa. Determinare (a) la forza (orizzontale) esercitata dalla parete, (b) la forza normale e la forza d'attrito esercitate dal pavimento, e (c) il coefficiente d'attrito minimo che deve esserci tra scala e pavimento per impedire che la scala scivoli.

- 11.15** Un disco omogeneo di raggio R è fermo a contatto con un gradino di altezza $h = \frac{1}{2}R$, come mostra la Figura 11.30. Al centro del disco è applicata una forza orizzontale traente di intensità $F_o = F_t/3$. Esprimere in funzione di F_t (a) la forza normale esercitata dal pavimento e (b) la componente orizzontale e quella verticale della forza esercitata sul disco dallo spigolo. (c) Qual è la direzione della forza esercitata dallo spigolo?

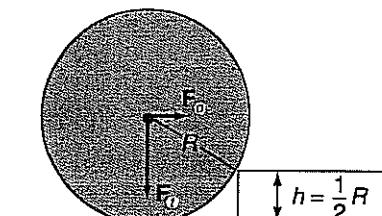


Figura 11.30 Esercizio 11.15.

- 11.16** Nella situazione descritta nell'esercizio precedente, determinare l'intensità minima che deve avere la forza

orizzontale F_o per far salire il disco sul gradino. Esprimere questa forza in funzione di F_t . (Suggerimento: che cosa accade all'intensità della forza normale nel momento in cui il disco si stacca dalla superficie del pavimento?)

- 11.17** Un'asta rigida è in equilibrio statico nella configurazione rappresentata nella Figura 11.31, mentre nel suo punto medio è applicata una forza orizzontale F_a . Il peso dell'asta può essere trascurato. Il pavimento esercita sull'asta una forza normale e una forza d'attrito. (a) Ammettendo che l'asta non scivoli, determinare, in funzione del valore di F_a , la tensione del cavo, la forza d'attrito statico e la forza normale. (b) Determinare il valore minimo di μ_s per il quale l'asta non scivola.

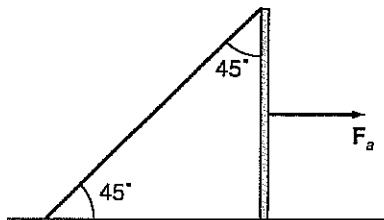


Figura 11.31 Esercizio 11.17.

- 11.18** Una passerella pedonale lunga 2.5 m poggia su due piloni posti alle sue estremità. Il centro di gravità della passerella di massa 120 kg si trova nel suo punto medio. Un uomo di massa 60 kg percorre con andatura costante la passerella. Determinare le intensità delle forze dirette verso l'alto esercitate dai piloni sulla passerella in funzione della posizione dell'uomo, mentre questi si sposta da un'estremità all'altra della passerella.

Paragrafo 11.5 Il centro di gravità

- 11.19** Individuare il centro di gravità della struttura a forma di L rovesciata rappresentata nella Figura 11.26.
- 11.20** Da una lastra metallica quadrata omogenea di lato 25.0 mm è stata tagliata via una porzione pure quadrata di lato 5.0 mm, come mostra la Figura 11.32. Individuare il centro di gravità della lastra.

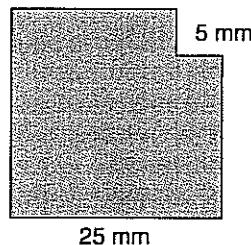


Figura 11.32 Esercizio 11.20.

- 11.21** Un blocco cubico omogeneo si trova su una superficie molto scabra, cosicché, quando la superficie viene inclinata lentamente, il blocco non scivola. In corrispondenza di quale angolo di inclinazione il blocco si ribalta?

Paragrafo 11.6 Il prodotto vettoriale e il momento di una forza

- 11.22** Rispetto a un sistema di coordinate con origine nel punto O , una forza è applicata in un punto posto sull'asse y . Il momento di questa forza rispetto al punto O giace nel piano xz . Che cosa si può concludere circa la direzione della forza?

- 11.23** Una forza $\mathbf{F} = (174 \text{ N})\mathbf{i} + (203 \text{ N})\mathbf{j} + (-166 \text{ N})\mathbf{k}$ si esercita su un corpo in un punto individuato, rispetto a un punto di riferimento O , dal vettore posizione $\mathbf{r} = (1.35 \text{ m})\mathbf{i} + (-2.22 \text{ m})\mathbf{j}$. Calcolare il momento di questa forza rispetto al punto O .
- 11.24** Si considerino tre spostamenti \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} disposti come nella Figura 11.33. Si dimostri che $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ha valore pari al volume del parallelepipedo formato da questi vettori.

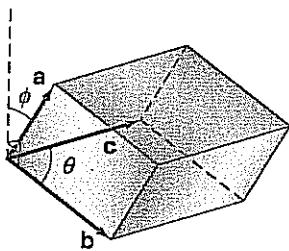


Figura 11.33 Esercizio 11.24.

- 11.25** Un vertice di un tetraedro si trova nell'origine, mentre gli altri tre vertici sono nei punti $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, e $(1, 1, 1)$, dove tutte le distanze sono in metri. Determinare il volume del tetraedro. (*Suggerimento:* vedere l'esercizio precedente.)
- 11.26** Per ogni faccia del tetraedro dell'esercizio precedente si trovi un vettore perpendicolare alla faccia e diretto verso l'esterno della regione racchiusa.

- 11.27** (a) Usando le regole valide per il calcolo di un determinante ordinario, dimostrare che $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ può essere ottenuto calcolando

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

(b) Calcolare il prodotto vettoriale nel caso in cui $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

- 11.28** (a) Dimostrare la seguente regola:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

PROBLEMI

- 11.1** Una scala omogenea del peso di 350 N e lunga 8.0 m è appoggiata a una parete liscia, con l'estremità inferiore sul pavimento a una distanza di 2.5 m dalla parete. Il coefficiente di attrito statico tra scala e pavimento è $\mu_s = 0.21$. Un imbianchino del peso di 440 N comincia a salire lentamente per la scala. Fino a che punto può salire senza che la scala cominci a scivolare?
- 11.2** La forza normale esercitata su un corpo da una superficie in realtà è la somma di un gran numero di forze normali distribuite sull'area di contatto delle due superfici. Il punto di applicazione efficace della forza normale globale è tale che il momento sia uguale a quello prodotto dalle forze normali distribuite. Una forza orizzontale di intensità $F_p = \frac{1}{3}F_t$ è applicata alla sommità del blocco cubico omogeneo rappresentato nella Figura 11.35. (a) Individuare il punto di applicazione efficace della forza normale, ammettendo che il blocco non scivoli. (b) Qual è il valore minimo del coefficiente di attrito statico?

(*Suggerimento:* esprimere i prodotti in termini di componenti.) (b) Dimostrare che, se \mathbf{A} è perpendicolare a \mathbf{B} sia a \mathbf{C} , $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$.

- 11.29** Si considerino due vettori non paralleli \mathbf{A} e \mathbf{B} e il prodotto vettoriale $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Si dimostri che, se sono due scalari qualsiasi, $a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ è perpendicolare a \mathbf{C} . Qual è l'interpretazione geometrica di questo risultato?
- 11.30** Si verifichino le Equazioni (11.14) calcolando tutti nove i prodotti vettoriali.
- 11.31** Una coppia è costituita da due forze di uguale intensità e di direzioni opposte, fra le cui rette d'azione c'è una distanza d , come mostra la Figura 11.34. Dimostrare che la somma dei momenti delle due forze rispetto a qualunque punto è la stessa, indipendentemente dal scelta del punto di riferimento, e ha modulo Fd .

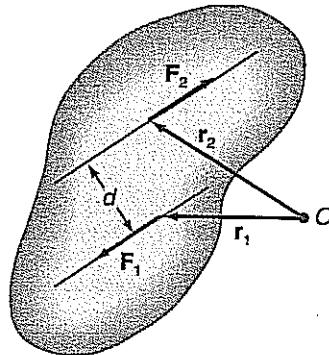


Figura 11.34 Esercizio 11.31.

- 11.32** Supponiamo che la condizione per l'equilibrio traslazionale di un corpo rigido sia soddisfatta, $\sum \mathbf{F}_{ext} = 0$. Dimostrare che la risultante dei momenti esterni $\sum \tau_{ext}$ è indipendente dal punto di riferimento rispetto al quale si misurano i momenti. Ciò prova che, se $\sum \tau_{ext} = 0$ rispetto a un punto, allora $\sum \tau_{ext} = 0$ rispetto a qualunque punto, purché $\sum \mathbf{F}_{ext} = 0$.

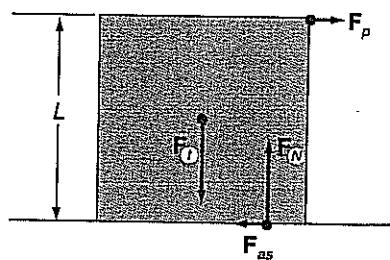


Figura 11.35 Problema 11.2.

- 11.3** Risolvere di nuovo il problema precedente, supponendo che il modulo F_p della forza orizzontale aumenti. Ammettendo che il blocco non scivoli, determinare il valore di F_p che farà ribaltare il blocco. Qual è il valore minimo del coefficiente di attrito statico in grado di impedire al blocco di scivolare?
- 11.4** Il corpo di forma irregolare rappresentato nella Figura 11.36, avente lunghezza L e peso F_t , è in equilibrio statico, con due fili di massa trascurabile.

attaccati come mostra la figura. Esprimere la coordinata x del centro di gravità del corpo e la tensione di ciascun filo in funzione di F_t , L , θ e ϕ .

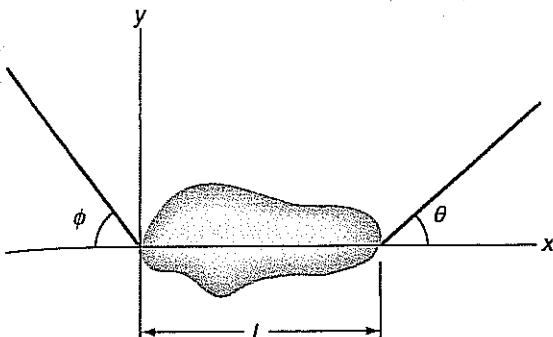


Figura 11.36 Problema 11.4.

- 11.5 Due assi omogenei sono incernierati insieme a un'estremità e formano un angolo retto, come mostra la Figura 11.37. Un'asse ha lunghezza 3.0 m e peso 120 N, e l'altra ha lunghezza 4.0 m e peso 160 N. L'insieme sta fermo a contatto con un pavimento liscio e tra le due assi, a un'altezza di 1.0 m dal suolo, è teso un leggero cavo orizzontale. Determinare (a) la forza normale esercitata dal pavimento su ciascun'asse, (b) la tensione del cavo, (c) la forza che un'asse esercita sull'altra nel vertice A incernierato.

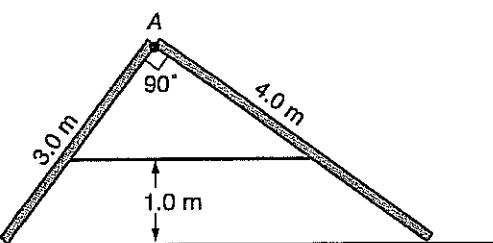


Figura 11.37 Problema 11.5.

- 11.6 La Figura 11.38 mostra un avambraccio orizzontale che sorregge una pietra del peso di 100 N. Usando il tuo braccio come modello da cui ricavare i valori numerici, stima la forza esercitata sull'avambraccio (a) dal muscolo bicipite e (b) dall'osso della parte superiore del braccio, nel gomito. (c) In che misura le tue risposte dipendono dalle stime che fai del punto in cui è attaccato il bicipite, del punto in cui si trova il baricentro dell'avambraccio e della mano, e del peso dell'avambraccio e della mano?

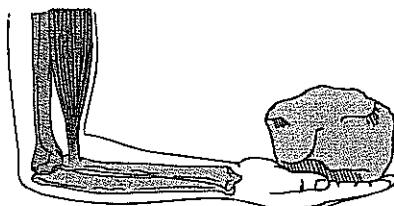


Figura 11.38 Problema 11.6.

- 11.7 La Figura 11.39 rappresenta una gru semplice che sorregge un carico di 15 kN. Il centro di gravità del braccio, che è lungo 7.5 m e pesa 2.5 kN, è a 3.0 m dalla sua estremità inferiore, che è imperniata in P . Il cavo C

può essere tirato da un argano in modo da cambiare l'angolo di elevazione del braccio. (a) Determinare la tensione del cavo C e le componenti della forza esercitata in P dal perno sul braccio per $\theta = 30^\circ$. (b) Ripetere il calcolo per $\theta = 60^\circ$ e confrontare le risposte relative a questi due angoli.

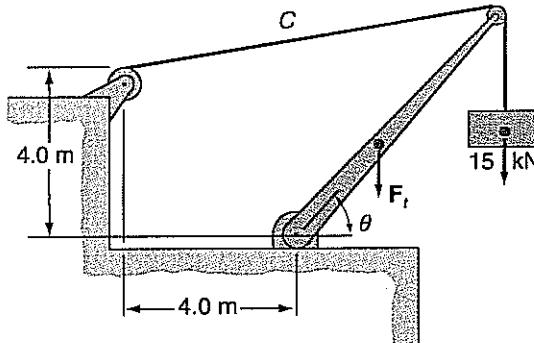


Figura 11.39 Problema 11.7.

- 11.8 *Il teorema dei seni.* Si consideri il triangolo formato dai vettori A , B , e $C = A + B$, come in Figura 11.40. Formando i prodotti vettoriali $A \times C$ e $B \times C$, si dimostri il *teorema dei seni*:

$$\frac{\sin \alpha}{A} = \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \gamma}{C}$$

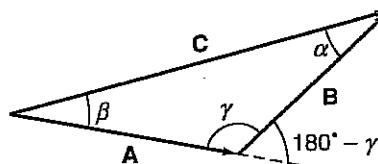


Figura 11.40 Problema 11.8.

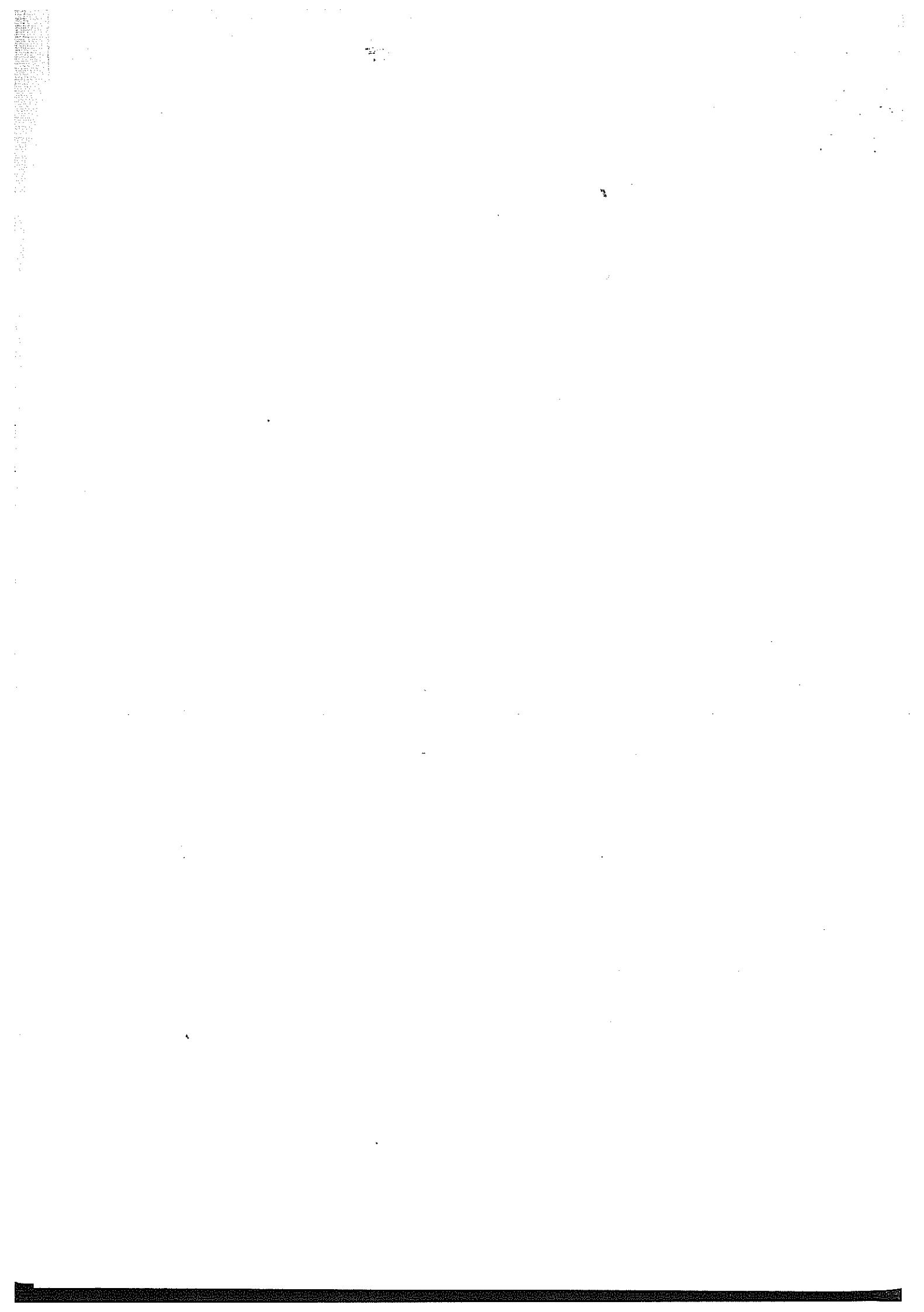
- 11.9 Si dimostri l'identità $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

- 11.10 Si considerino i tre vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} con

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{v} = \frac{-\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{w} = \mathbf{k}$$

- (a) Dimostrare che ognuno di essi è un vettore unitario.
 (b) Dimostrare che i tre vettori sono mutuamente perpendicolari. (c) Calcolare il prodotto vettoriale di ciascuna delle coppie che si possono formare con questi tre vettori. (d) Se si introduce un sistema di coordinate xyz con gli assi x , y , z disposti lungo le direzioni di \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} rispettivamente, questo sistema di coordinate è destrorso?

- 11.11 Nella Figura 7.5 è rappresentata schematicamente la bilancia di Cavendish, usata per misurare la costante gravitazionale G . Si stimi il momento della forza gravitazionale che agisce tra le coppie di sfere, rispetto all'asse rappresentato dalla fibra di sospensione. Si supponga che la distanza tra le sfere a e b sia di 15 cm, che le sfere a e b abbiano una massa di 0.25 kg e un raggio di 2 cm, e che le sfere A e B abbiano una massa di 2.0 kg e un raggio di 3.5 cm.



CINEMATICA DEL MOTO ROTATORIO

12.1 INTRODUZIONE

Durante le nostre attività quotidiane ci imbattiamo spesso in corpi che ruotano: ad esempio, una porta che gira sui cardini, una puleggia che gira sul suo asse, o un disco che gira sul piatto del giradischi. La Terra ha due moti rotatori: compie un giro sul proprio asse ogni giorno e un giro intorno al Sole ogni anno. A livello di atomi sia la rotazione assiale (o spin) che il moto orbitale svolgono ruoli importanti nel determinare le proprietà della materia. Quando discuteremo queste proprietà nei successivi capitoli, la conoscenza del moto rotatorio sarà essenziale. Al moto rotatorio dei corpi rigidi sono dedicati due capitoli: questo, che ha per oggetto principalmente la *cinematica della rotazione*, e il prossimo, che si occuperà della *dinamica della rotazione*.

12.2 TRASLAZIONE E ROTAZIONE DI UN CORPO RIGIDO

Prima di discutere il moto rotatorio, richiamiamo che cosa si intende per moto traslatorio. Un esempio di moto traslatorio è il moto della carrozzeria di un'automobile quando questa viaggia lungo una strada diritta. Un corpo rigido compie un *moto traslatorio* quando ogni punto del corpo subisce il medesimo spostamento nello stesso intervallo di tempo.

Ciò significa che la velocità di ogni punto del corpo è la stessa in ogni istante. Essa può cambiare nel tempo, ma in qualunque istante la velocità di un punto del corpo ha lo stesso valore di quella di tutti gli altri. Quindi si può descrivere il moto traslatorio di un corpo rigido mediante un solo vettore: la velocità di uno dei suoi punti (per esempio quella del suo centro di massa). Poiché un vettore viene univocamente definito da tre componenti, ne consegue che il numero di parametri necessario e sufficiente a descrivere il moto traslatorio di un corpo rigido è tre. Si noti che i parametri necessari e sufficienti a descrivere lo stato di un qualunque sistema vengono chiamati *zgradi di libertà*. Per esempio i gradi di libertà di un punto che si muove nello spazio a tre dimensioni sono tre (le coordinate che definiscono univocamente la sua posizione, cioè il suo stato). Nel caso di un corpo non puntiforme, rigido, si può dire che i suoi gradi di libertà quando compie un moto di traslazione sono tre, proprio come se fosse un punto. Infatti il moto di traslazione di tale corpo viene univocamente definito specificando il moto di uno dei suoi punti.

Ci si può chiedere, in generale, quanti sono i gradi di libertà di un corpo rigido che compie un moto qualunque. Poiché il corpo è rigido, risulta chiaro che se si danno le coordinate di tre suoi punti non complanari, la posizione del corpo è univocamente definita. Per esempio, se si considera una terna destrorsa di assi cartesiani con origine in un punto del corpo e si considerano i punti del corpo attraversati dagli assi cartesiani, è evidente che, prendendo un punto appartenente al corpo per ognuno dei tre assi, si possono identificare i tre assi cartesiani e, tramite questi, le coordinate di tutti i punti del corpo. Tale sistema di riferimento cartesiano viene chiamato il *sistema rigidamente connesso* con il corpo e serve a definire matematicamente la posizione di ogni punto del corpo rispetto agli altri suoi punti, cioè la sua forma e la sua struttura. A causa della rigidità del corpo (le mutue distanze fra i punti non possono cambiare) le coordinate

Definizione del moto traslatorio.

I gradi di libertà.

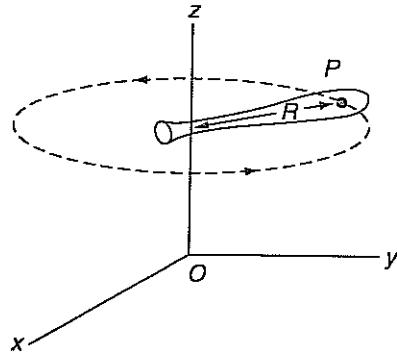
dei punti del corpo, rispetto a tale sistema, non possono cambiare. Allora è sufficiente conoscere le coordinate, rispetto a un altro sistema di riferimento non rigidamente connesso con il corpo, per esempio il riferimento terrestre, dei tre punti scelti (che saranno funzioni del tempo se il corpo si muove) per sapere cosa fa il corpo. Inoltre, anche le mutue distanze fra i tre punti scelti non possono cambiare, a causa della rigidità del corpo. Le coordinate dei tre punti scelti costituiscono nove parametri, ma la costante delle tre mutue distanze di tali punti porta a tre equazioni che legano tali nove parametri, quindi il numero di parametri indipendenti necessario e sufficiente a definire la posizione di tutti i punti di un corpo rigido è $9 - 3 = 6$; cioè un corpo rigido ha sei gradi di libertà. Ne consegue che il moto di un corpo rigido potrà essere descritto, in generale, da sei equazioni scalari (o da due vettoriali).

Un esempio di moto rotatorio, invece, è il moto di una porta che venga aperta e chiusa: la retta passante per i cardini rappresenta l'asse di rotazione. Un corpo rigido compie un *moto rotatorio* attorno a un asse quando ogni punto del corpo (eccezione fatta per quelli sull'asse di rotazione) si muove lungo una circonferenza (Figura 12.1). L'*asse di rotazione* è una retta formata dai centri delle traiettorie circolari dei vari punti. Un corpo rigido in rotazione qualunque segmento perpendicolare all'asse di rotazione che congiunga quest'ultimo con un punto qualsiasi, descrive il medesimo angolo in dato intervallo di tempo.

Definizione del moto rotatorio e dell'asse di rotazione.

Figura 12.1

In un corpo rigido in rotazione ogni punto materiale, eccetto quelli che si trovano sull'asse, percorre una circonferenza con il centro sull'asse di rotazione stesso.



Un esempio di moto traslatorio e moto rotatorio combinati è il moto della ruota di un'automobile rispetto a un sistema di coordinate solidale con la Terra. Relativamente a tale sistema di riferimento l'asse di rotazione della ruota compie un moto traslatorio nella direzione della strada. Se la strada è diritta, l'orientamento dell'asse della ruota rimane costante rispetto al sistema di riferimento.

Il caso più generale di moto di un corpo rigido comprende variazioni dell'orientamento dell'asse di rotazione oltre che traslazione di tale asse. Un esempio di questo genere si ha quando, nel rugby, la palla ovale durante un passaggio comincia «sfarfallare»: la palla ruota intorno a un asse istantaneo, ma sia l'orientamento sia la posizione dell'asse cambiano continuamente.

In generale un corpo rigido si muove combinando traslazioni e rotazioni attorno a assi che cambiano direzione durante il moto. Tali moti si descrivono tramite combinazioni di traslazioni e rotazioni che vengono chiamate *rototraslazioni*. Si dimostra, non è intuitivo, che il moto di un corpo rigido può essere sempre descritto da una traslazione più una rotazione attorno a un opportuno asse. Si abbia un corpo rigido che in un dato istante t si trova in una certa configurazione (per configurazione di un corpo intendiamo l'insieme delle posizioni di tutti i suoi punti) e si supponga che all'istante $t + \Delta t$ si trovi in un'altra configurazione. È facilmente comprensibile il fatto che possa far passare il corpo dalla prima configurazione alla seconda facendogli fare prima una traslazione e poi una rotazione attorno a un opportuno asse. Quindi tutti gli spostamenti di tutti i suoi punti, nell'intervallo di tempo Δt , saranno definiti esattamente da una traslazione più una rotazione. Ciò può essere fatto qualunque sia Δt si consideri e quindi si può pensare di descrivere il moto continuo del corpo facendo tendere a zero Δt . Ne risulta che la velocità di ogni punto del corpo rigido, all'istante generico t , potrà essere espressa come la somma di una velocità di traslazione più una velocità dovuta a una rotazione attorno a un asse opportuno. Per le traslazioni abbiamo visto che il moto è univocamente descritto da un'unica velocità: si tratta, quindi, di vedere

Moto di rototraslazione.

come si descrive una rotazione attorno a un asse, dopodiché sapremo come descrivere un moto di un qualsiasi corpo rigido.

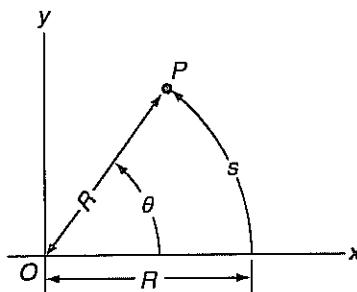
In questo capitolo ci limiteremo a discutere il moto rotatorio di un corpo rigido intorno a un asse che mantiene un orientamento fisso.

12.3 MISURA DEGLI ANGOLI

La misura degli angoli in gradi è ben nota. Tuttavia, per la descrizione del moto rotatorio è preferibile usare l'unità SI, che si chiama radiante (rad). Con riferimento alla Figura 12.2, la misura in radianti dell'angolo θ formato dall'asse x e dal segmento OP è definita come il rapporto s/R , dove s è la lunghezza dell'arco compreso tra l'asse x e il punto P e R è la distanza radiale tra O e P :

$$\theta = \frac{s}{R} \quad (12.1)$$

dove s e R sono misurate con la stessa unità di lunghezza.



Definizione della misura dell'angolo θ in radianti.

Figura 12.2
Definizione della misura degli angoli in radianti. Per misurare s e R si usa la stessa unità di lunghezza.

Per un angolo giro, s è l'intera circonferenza, cioè $s = 2\pi R$. Quindi,

$$\theta(\text{angolo giro}) = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}$$

Dal momento che $\theta(\text{angolo giro}) = 360^\circ$, si ha

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \text{ovvero} \quad \pi \text{ rad} = 180^\circ$$

Perciò $1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi \approx 57.3^\circ$. A titolo di esempio, convertiamo in radianti un angolo di 64° :

$$64^\circ = 64^\circ \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 1.1 \text{ rad}$$

In alternativa la misura di un angolo può essere espressa in giri o cicli:

$$1 \text{ ciclo} = 1 \text{ giro} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad (\text{esattamente})$$

Spesso si usano i giri quando si ha a che fare con velocità angolari. Per esempio, si parla di 45 giri/min a proposito del piatto di un giradischi. Trasformando 64° in giri o cicli, si ha

$$64^\circ = 64^\circ \frac{1 \text{ giro}}{360^\circ} = 0.18 \text{ giri}$$

Benché le misure angolari si esprimano in queste tre unità di uso comune (rad, $^\circ$, giri), l'ampiezza di un angolo è una grandezza adimensionale, essendo definita come rapporto tra due lunghezze. Comunque, quando si eseguono calcoli con le grandezze angolari, si indica accanto al valore numerico l'unità di misura angolare, come si fa con le altre grandezze.

12.4 COORDINATA, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE ANGOLARI

Le grandezze di cui ci serviamo per descrivere il moto rotatorio di un corpo rigido attorno a un asse fisso sono la coordinata angolare θ e i vettori velocità angolare ω e accelerazione angolare a . Via via che definiremo queste grandezze angolari, sarà utile chiamare le grandezze lineari corrispondenti. Come vedremo, la cinematica di un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso è analoga, dal punto di vista matematico quella di un punto materiale che si muove in linea retta (Capitolo 3). Ciò è dovuto fatto che entrambi i sistemi (corpo rigido e punto materiale), in questi casi, hanno solo grado di libertà: l'angolo di rotazione (la coordinata angolare) θ per il corpo rigido e la coordinata x per il punto materiale.

La coordinata angolare. La *coordinata angolare* di un cancello può essere misurata nel modo indicato nella Figura 12.3. Presi come asse z la retta passante per i carri e come piano xy il piano del suolo, con l'asse x nella direzione del recinto e l'asse y perpendicolare a tale direzione, la coordinata angolare θ del cancello viene misurata partire dall'asse x . Quando il cancello è chiuso, $\theta = 0$; quando il cancello è aperto, sua coordinata angolare viene misurata a partire dall'asse x in senso antiorario per guardi dalla direzione z positiva (ossia dall'alto). Pertanto, un angolo misurato in senso antiorario è positivo, mentre un angolo misurato in senso orario è negativo. La regola della mano destra fornisce il senso positivo di θ (Figura 12.4): se si immagina di afferrare l'asse z con la mano destra in modo che il pollice sia rivolto nella direzione $+z$, le altre dita si chiudono nel senso in cui θ è positiva.

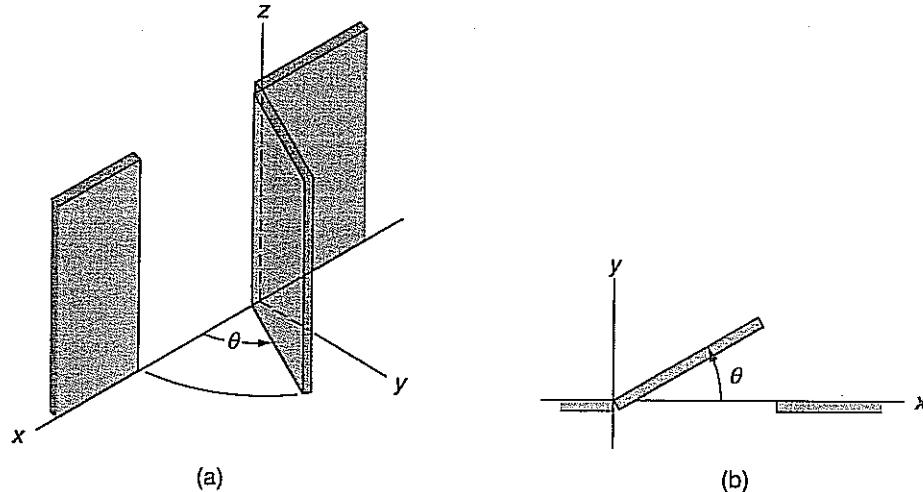
Un'importante differenza tra la coordinata angolare θ e la coordinata lineare x è fatto che θ è ciclica: vale a dire che le coordinate θ e $\theta + 2\pi$ rappresentano la medesima posizione angolare (Figura 12.5). Più in generale, se n è un qualunque intero positivo o negativo, θ e $\theta + n(2\pi)$ rappresentano la stessa posizione angolare. Di solito valori di θ vengono normalizzati in modo che cadano nell'intervallo tra 0 e 2π rad o pure tra $-\pi$ rad e π rad.

La regola della mano destra indica il senso in cui θ è positiva.

La coordinata θ è ciclica.

Figura 12.3

(a) La coordinata angolare θ di un cancello. (b) Il cancello è visto dall'alto, guardando dalla direzione $+z$ verso il piano xy . La coordinata θ è positiva per una rotazione antioraria e negativa per una rotazione oraria.



La velocità angolare. Richiamiamo qui le definizioni date nel Paragrafo 4.2. Il modulo della *velocità angolare* ω indica la rapidità di variazione della coordinata angolare:

$$\omega = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

Il vettore *velocità angolare* ω è un vettore il cui modulo è stato definito sopra e la cui direzione fornisce il senso di rotazione¹. La regola della mano destra fornisce la con-

¹ Spesso con l'espressione «velocità angolare» ci si riferisce al solo modulo del vettore, purché ciò non dia luogo a equivoci (N.d.T.).

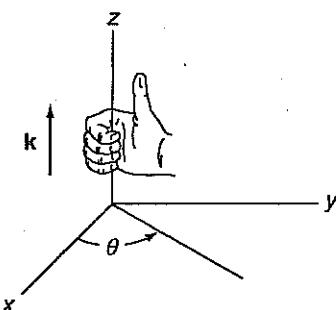


Figura 12.4 La regola della mano destra. Se si immagina di afferrare l'asse z con la mano destra in modo che il pollice sia rivolto nella direzione $+z$, le altre dita si chiudono nel senso in cui θ è positiva.

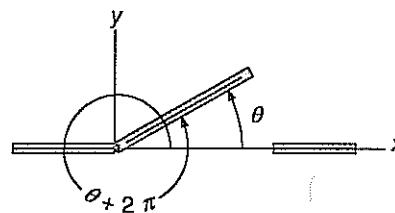


Figura 12.5 La coordinata angolare è ciclica; le coordinate θ e $\theta + n(2\pi)$ rad, dove n è un qualsiasi intero positivo o negativo, rappresentano la stessa posizione angolare.

nessione tra il senso della rotazione e la direzione di ω . Se si immagina di afferrare l'asse di rotazione con la mano destra in modo che le dita si avvolgano attorno ad esso nel senso della rotazione, il pollice è rivolto nella direzione di ω . Alternativamente, se si guarda dall'alto il cancello di Figura 12.3, ω è diretto verso $+z$ se la rotazione è antioraria, ed è rivolto verso $-z$ se la rotazione è oraria. Ciò significa che per un corpo che ruota intorno all'asse z , $\omega = \omega_z \mathbf{k}$, e ω_z è positiva per una rotazione in senso antiorario e negativa per una rotazione in senso orario. Quindi ω_z è positiva quando θ è crescente e negativa quando θ è decrescente. Pertanto,

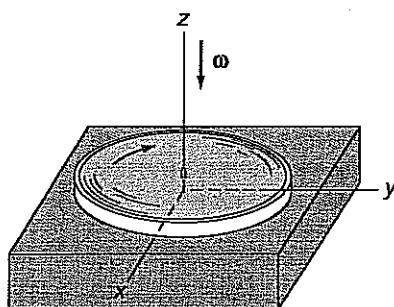
$$\omega_z = \frac{d\theta}{dt} \quad (12.2)$$

Si noti che quando un corpo ruota attorno a un asse fisso, come nel caso del cancello della Figura 12.3, nessuno dei punti di cui il corpo è costituito si muove lungo l'asse di rotazione, cioè, in base alla nostra definizione, nella direzione assegnata a ω . Il moto dei punti avviene invece in piani perpendicolari a ω . Perché assegnare a ω una direzione nella quale nessuna particella si muove? La risposta è che l'asse di rotazione fornisce una direzione spaziale che può essere associata in modo univoco al moto. Quando un punto ruota attorno all'asse di rotazione, assume diverse direzioni contenute nel piano del suo moto, e nessuna di queste direzioni può essere usata per identificare il moto. Per questo ω viene assunto perpendicolare al piano del moto, ossia parallelo all'asse di rotazione. C'è poi, per l'assegnazione della direzione positiva di ω , un'alternativa tra le due direzioni opposte parallele all'asse. Per consuetudine, la direzione positiva di ω è determinata dalla regola della mano destra.

Dal momento che la coordinata angolare θ è adimensionale, la velocità angolare ω ha le dimensioni di un $[\text{tempo}]^{-1}$, e siccome l'unità SI per θ è il radiante, l'unità SI per ω è il rad/s.

Esempio 12.1

La Figura 12.6 mostra il piatto di un giradischi che ruota alla velocità costante di 45 giri/min in senso orario per chi lo guarda da sopra. L'asse z coincide con l'asse di rotazione, con $+z$ rivolto verso l'alto. Gli assi x e y sono orizzontali e fissi rispetto al ripiano su cui si trova il giradischi. Usando questo sistema di coordinate, determinare ω_z in rad/s.



Definizione della componente del vettore velocità angolare.

Le particelle si muovono in piani perpendicolari a ω .

Figura 12.6
Esempio 12.1: il piatto di un giradischi in rotazione. L'asse z passa per il perno con $+z$ rivolto verso l'alto, e gli assi x e y sono fissi rispetto al piano del tavolo. Visto dall'alto, il piatto gira in senso orario e quindi ω_z è negativa.

Soluzione

Convertendo ω da giri/min in rad/s, si ha

$$\omega = 45 \text{ giri/min} \frac{2\pi \text{ rad/giro}}{60 \text{ s/min}} = 4.7 \text{ rad/s}$$

La regola della mano destra (Figura 12.4) consente di stabilire che il piatto sta ruotando in modo tale che ω sia diretto verso il basso. Vale a dire che, se si immagina di afferrare l'asse di rotazione con la mano destra in modo che le dita si chiudano nel senso della rotazione, il pollice risulta rivolto verso il basso. Quindi ω_z è negativa, e cioè

$$\omega_z = -4.7 \text{ rad/s}$$

Definizione della componente dell'accelerazione angolare.

Ogni particella di un corpo rigido in rotazione ha gli stessi valori di ω_z e di α_z .

L'accelerazione angolare. Immediatamente dopo che un giradischi è stato spento (o acceso), la velocità angolare del piatto cambia, e questo ha un'accelerazione angolare α . L'accelerazione angolare è un vettore la cui direzione coincide con l'asse di rotazione. Se l'asse di rotazione viene scelto come asse z , l'accelerazione angolare ha una sola componente: $\alpha = \alpha_z \mathbf{k}$. La componente dell'accelerazione angolare è definita come rapidità di variazione della componente del vettore velocità angolare:

$$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (12.3)$$

Quindi α_z è positiva quando ω_z è crescente, ed è negativa quando ω_z è decrescente. Il modulo dell'accelerazione angolare è $\alpha = |\alpha| = |\alpha_z|$. L'accelerazione angolare ha le dimensioni di un $[\text{tempo}]^{-2}$, e la sua unità SI è il rad/s².

Benché abbiano definito le grandezze cinematiche angolari (θ , ω e α) in riferimento a un corpo rigido in rotazione, queste grandezze possono essere utilizzate anche per descrivere il moto di un punto materiale che percorre una traiettoria circolare. In un corpo rigido in rotazione ogni punto del corpo (eccetto quelle che si trovano sull'asse di rotazione) descrive una circonferenza, e tutte le particelle hanno i medesimi valori di ω e α .

Si noti infine che le relazioni che sussistono tra θ , ω_z e α_z per un corpo rigido in rotazione sono analoghe a quelle che sussistono tra x , v_x e a_x per una particella che si muove in linea retta.

12.5 CINEMATICA DELLA ROTAZIONE INTORNO A UN ASSE FISSO

Abbiamo visto come il moto di un corpo rigido ruotante attorno a un asse fisso sia univocamente determinato dall'angolo di rotazione θ , cioè che un corpo rigido in rotazione attorno a un asse fisso ha un solo grado di libertà e il suo stato è definito dalla sua coordinata angolare. Come abbiamo visto, le grandezze che descrivono il moto di un corpo rigido in rotazione intorno a un asse fisso sono simili dal punto di vista matematico a quelle che descrivono un corpo in moto lungo una linea retta. Discuteremo ora due casi particolari: quello della velocità angolare costante e quello dell'accelerazione angolare costante. Le equazioni che ricaveremo in questo paragrafo sono analoghe a quelle introdotte nel Paragrafo 3.5.

Velocità angolare costante. Consideriamo un corpo che, come il piatto del giradischi della Figura 12.6, ruoti con una velocità angolare costante. Dall'Equazione (12.2) si ha

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_z$$

Integrando tra un istante iniziale zero e un istante finale t si ottiene θ in funzione di t :

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \omega_z dt' = \omega_z \int_0^t dt' = \omega_z t$$

dove il fattore ω_z è stato portato fuori dall'integrale perché è costante. Quindi

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_z t \quad (12.4)$$

Accelerazione angolare costante. Supponiamo che un corpo, come per esempio il cancello della Figura 12.3, ruoti con un'accelerazione angolare costante mentre si apre. Dall'Equazione (12.3),

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \alpha_z$$

L'angolo θ in funzione del tempo, per ω_z costante.

Esempio 12.2

(a) Scrivere l'equazione che descrive la posizione angolare del piatto della Figura 12.6 quando ruota alla velocità costante di 45 giri/min. La coordinata angolare iniziale è $\theta_0 = 1.2$ rad. (b) Determinare θ per $t = 2.4$ s.

Soluzione

(a) Dall'Esempio 12.1 si ha $\omega_z = -4.7$ rad/s. Sostituendo questo valore e $\theta_0 = 1.2$ rad nell'Equazione (12.4), si ottiene

$$\theta(t) = 1.2 \text{ rad} - (4.7 \text{ rad/s})t$$

(b) Per $t = 2.4$ s,

$$\theta = 1.2 \text{ rad} - (4.7 \text{ rad/s})(2.4 \text{ s}) = -10 \text{ rad}$$

Integrando tra un istante iniziale zero e un istante finale t si ottiene ω_z come funzione di t :

$$\omega_z - \omega_{z0} = \int_0^t \alpha_z dt' = \alpha_z \int_0^t dt' = \alpha_z t$$

dove il fattore α_z è stato portato fuori dall'integrale perché è costante. Quindi

$$\omega_z(t) = \omega_{z0} + \alpha_z t \quad (12.5)$$

Sostituendo questo valore di ω_z nell'Equazione (12.2), si ha

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_z = \omega_{z0} + \alpha_z t$$

Integrando tra un istante iniziale zero e un istante finale t si ottiene θ come funzione di t :

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t (\omega_{z0} + \alpha_z t') dt' = \omega_{z0} \int_0^t dt' + \alpha_z \int_0^t t' dt'$$

dove i fattori ω_{z0} e α_z sono stati portati fuori dagli integrali. (Perché?) L'integrazione fornisce $\theta - \theta_0 = \omega_{z0}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$, ossia

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_{z0}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad (12.6)$$

La componente ω_z della velocità angolare in funzione del tempo, per α_z costante.

Eliminando il tempo t tra le Equazioni (12.5) e (12.6) (si veda l'Esercizio 12.16), si può mostrare che

$$\omega_z^2 = \omega_{z0}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad (12.7)$$

L'angolo θ in funzione del tempo, per α_z costante.

La Tabella 12.1 contiene le equazioni che descrivono il moto rotatorio con velocità angolare costante e con accelerazione angolare costante. Nella tabella sono riportate anche le analoghe espressioni relative a un punto materiale che si muove lungo una linea retta. Questo confronto mette in luce la stretta analogia che sussiste tra i due tipi di moto.

La componente ω_z della velocità angolare in funzione di θ , per α_z costante.

Tabella 12.1 L'analogia fra traslazione e rotazione

Traslazione (in una dimensione)	Rotazione (con asse fisso)
Velocità lineare costante	Velocità angolare costante
$x = x_0 + v_x t$	$\theta = \theta_0 + \omega_z t$
Accelerazione lineare costante	Accelerazione angolare costante
$v_x = v_{x0} + a_x t$	$\omega_z = \omega_{z0} + \alpha_z t$
$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_{z0} t + \frac{1}{2} \alpha_z t^2$
$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	$\omega_z^2 = \omega_{z0}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$

Questa analogia discende dal fatto che, essendo entrambi i sistemi considerati (corpo rigido e punto materiale) univocamente descritti da un solo grado di libertà, l'equazione differenziale che regola lo sviluppo temporale dei sistemi è la stessa. Tale equazione afferma che la derivata seconda rispetto al tempo dell'unico parametro che descrive il sistema è uguale all'“accelerazione” con cui varia lo stato del sistema; si indichiamo con u tale parametro e con A il modulo dell'accelerazione con cui varia u , si ha $\frac{d^2u}{dt^2} = A$ da cui, se A è costante (accelerazione costante), si ottiene $u = u_0 + V_0 t + \frac{1}{2} At$ dove V_0 è la velocità iniziale con cui varia u . Ricordando che u è il parametro (coordinata) che descrive il sistema, le espressioni per le traslazioni e per le rotazioni si ottengono semplicemente sostituendo nell'equazione precedente l'opportuna coordinata con le relative velocità e accelerazioni (se $A = 0$ si ottengono le espressioni per velocità costanti).

Esempio 12.3

Supponiamo che, dopo che il giradischi dell'Esempio 12.1 è stato spento, il piatto rallenti fino a fermarsi in un intervallo di tempo di 1.7 s. (a) Trovare un'equazione che esprima come funzione del tempo la coordinata angolare del piatto mentre esso rallenta fino a fermarsi, ammettendo che l'accelerazione angolare sia costante. Posto $t = 0$ in corrispondenza dell'istante in cui l'apparecchio viene spento, sia $\theta_0 = 0$. (b) Di quale angolo ruota il piatto prima di arrestarsi?

Soluzione

(a) Usando l'Equazione (12.5) per trovare α_z si ha

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{z0}}{t}$$

Dal momento che il piatto si arresta in 1.7 s, $\omega_z = 0$ quando $t = 1.7$ s, mentre, dall'Esempio 12.1, $\omega_{z0} = -4.7$ rad/s. Pertanto

$$\alpha_z = \frac{0 - (-4.7 \text{ rad/s})}{1.7 \text{ s}} = 2.8 \text{ rad/s}^2$$

Sostituendo nell'Equazione (12.6) si ha

$$\theta(t) = -(4.7 \text{ rad/s})t + (1.4 \text{ rad/s}^2)t^2$$

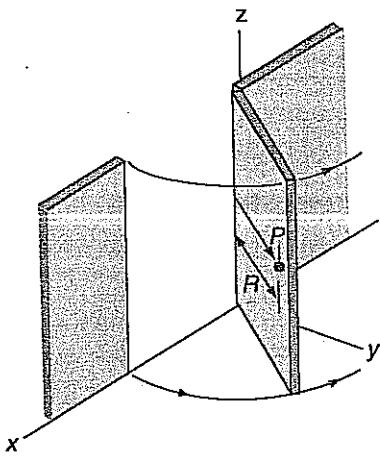
(b) Siccome $\theta_0 = 0$ e il piatto si ferma in 1.7 s, l'angolo di cui il piatto ruota prima di fermarsi è

$$\theta(1.7 \text{ s}) = -(4.7 \text{ rad/s})(1.7 \text{ s}) + (1.4 \text{ rad/s}^2)(1.7 \text{ s})^2 = -3.9 \text{ rad}$$



12.6 RELAZIONI TRA GRANDEZZE LINEARI E GRANDEZZE ANGOLARI

Consideriamo un cancello che si apre, come nella Figura 12.7. Immaginiamo che il cancello sia costituito da porzioni infinitesimi di materia che possono essere considerate particelle. Dal momento che il cancello è rigido, ciascuna particella ha la medesima velocità angolare ω e la medesima accelerazione angolare α . Quindi ω e α caratterizzano il moto di tutto il cancello.



Tuttavia, particelle a distanze diverse dall'asse di rotazione hanno differenti velocità lineari v e differenti accelerazioni lineari a . Ora stabiliremo le relazioni tra la velocità angolare e l'accelerazione angolare del cancello da una parte, e la velocità lineare e l'accelerazione lineare di una particella P del cancello, dall'altra.

Come in precedenza, ammettiamo che il suolo sia il piano xy e poniamo l'origine esattamente sotto i cardini, in modo che l'asse z sia l'asse di rotazione (Figura 12.8). La particella P si muove su una circonferenza di raggio R , e può essere localizzata rispetto all'asse x dalla *coordinata d'arco* s misurata appunto lungo l'arco. La convenzione per il segno di s è la stessa che vale per θ : vista dall'alto, s è positiva in senso antiorario e negativa in senso orario. Definiamo la *componente tangenziale della velocità* di P come

$$v_t = \frac{ds}{dt}$$

Quindi v_t è positiva quando s cresce con il tempo (rotazione antioraria) ed è negativa quando s decresce con il tempo (rotazione oraria). In base a questa definizione, v_t ha lo stesso segno algebrico di ω_z . Inoltre, poiché $s = R\theta$, si ha

$$v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

ossia,

$$v_t = R\omega_z \quad (12.8)$$

Dal momento che il punto P percorre una circonferenza, la sua velocità v ha soltanto la componente tangenziale e il modulo della velocità v è $v = |\mathbf{v}| = v_t = R|\omega_z|$, ossia

$$v = R\omega \quad (12.9)$$

In generale, ricordando come è stato definito il prodotto vettoriale (vedi Paragrafo 11.6), si può scrivere la relazione fra velocità lineare e velocità angolare come $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, dove il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha la direzione dell'asse di rotazione e \mathbf{r} è il vettore di posizione del punto che ha velocità lineare \mathbf{v} .

Per una data velocità angolare ω la velocità lineare di una particella è proporzionale alla sua distanza R dall'asse di rotazione. Supponiamo che il cancello stia girando con una velocità angolare di 0.5 rad/s. Una particella a 0.2 m dall'asse di rotazione ha una velocità lineare di $(0.2 \text{ m})(0.5 \text{ rad/s}) = 0.1 \text{ m/s}$, e una particella a 0.4 m dall'asse di rotazione ha una velocità lineare di $(0.4 \text{ m})(0.5 \text{ rad/s}) = 0.2 \text{ m/s}$.

Ora scomporremo l'accelerazione lineare \mathbf{a} in una componente tangenziale e in una componente radiale, come mostra la Figura 12.9. La componente tangenziale a_t dell'accelerazione lineare di un punto che percorre una circonferenza è definita come derivata rispetto al tempo della componente tangenziale della velocità lineare:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega_z) = R \frac{d\omega_z}{dt}$$

Figura 12.7

Un cancello si apre. Tutte le particelle del cancello hanno la stessa velocità angolare e la stessa accelerazione angolare, ma particelle a diverse distanze dall'asse di rotazione hanno differenti velocità lineari e differenti accelerazioni lineari.

Componente tangenziale della velocità.

Componente tangenziale dell'accelerazione.

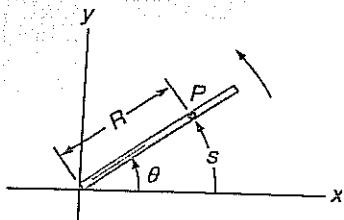


Figura 12.8 Il cancello della Figura 12.7 visto dall'alto. Una particella a distanza R dall'asse di rotazione può essere individuata dalla coordinata d'arco s . La convenzione per il segno di s è analoga a quella adottata per θ , quindi $s = R\theta$.

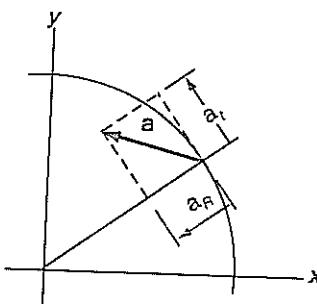


Figura 12.9 Componente tangenziale, componente radiale dell'accelerazione. La componente radiale $a_R = v^2/R$ corrisponde alla proiezione di a sul raggio. Questa proiezione è sempre rivolta verso l'interno. La componente tangenziale a_t , corrisponde alla proiezione di a sulla tangente alla circonferenza. Tale proiezione può avere un verso antiorario ($a_t > 0$) od orario ($a_t < 0$).

Poiché $a_z = d\omega_z/dt$, si ha

$$a_t = R\alpha_z \quad (1)$$

Come v_t anche a_t per il punto è proporzionale alla distanza R dall'asse di rotazione. Nel Paragrafo 4.4 abbiamo visto che un punto che si muove lungo una circonferenza con velocità di modulo costante v ha un'accelerazione di intensità v^2/R diretta verso il centro della circonferenza (lungo il raggio). Questa è l'accelerazione centrale. Nel caso che stiamo discutendo, in cui il modulo della velocità può variare, la gradianza v^2/R rappresenta una componente dell'accelerazione lineare, la componente tangenziale corrisponde alla proiezione di a sul raggio della circonferenza (Figura 12.9). Questa componente viene detta *componente radiale* a_R dell'accelerazione lineare, e cioè $a_R = v^2/R = (R\omega)^2/R$, ossia

$$a_R = R\omega^2 \quad (12)$$

Come v_t e a_t , anche a_R per un punto è proporzionale alla distanza R del punto dall'asse di rotazione.

Dal momento che a_t e a_R sono componenti di a lungo direzioni perpendicolari (Figura 12.9), il teorema di Pitagora fornisce

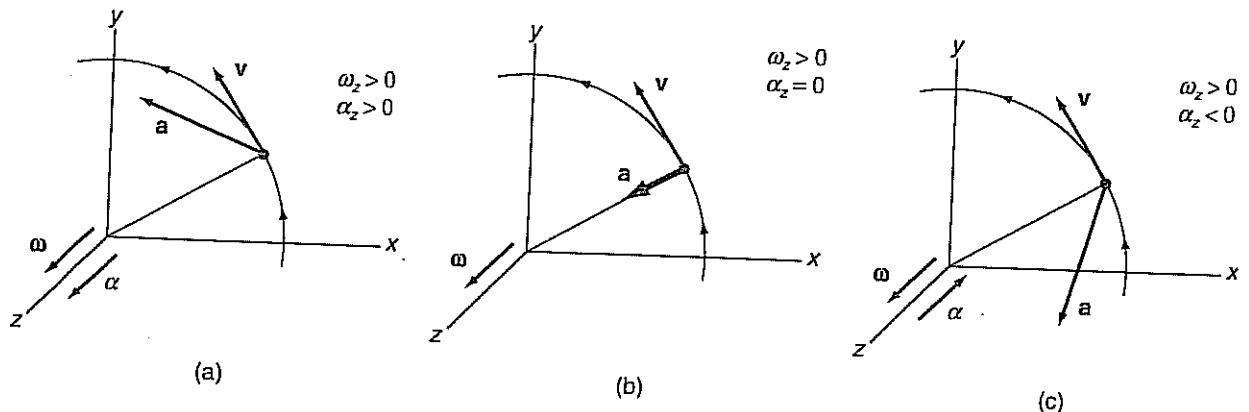
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_R^2}$$

Servendoci delle Equazioni (12.10) e (12.11), otteniamo $a_t^2 = R^2\alpha_z^2 = R^2\alpha^2$ e $a_R^2 = R^2\omega^4$, cosicché

$$a = \sqrt{R^2\alpha^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Quindi il modulo a dell'accelerazione lineare di un punto è proporzionale alla distanza R del punto dall'asse di rotazione.

La Figura 12.10 mostra la velocità lineare e l'accelerazione lineare nel caso in cui sia positiva (e così v_t). Nella Figura 12.10a, α_z è positiva (e così a_t); nella Figura 12.10b, α_z è nulla (e così a_t); e nella Figura 12.10c, α_z è negativa (e così a_t). Lasciamo al lettore di tracciare le figure corrispondenti per il caso in cui ω_z sia negativa.



Quando si usano le Equazioni (12.8), (12.9) e (12.11) occorre accertarsi che i valori di ω e di α_z che si inseriscono siano espressi nell'unità SI, rad/s, e non in °/s o in giri/s. Infatti queste equazioni si fondano sull'uguaglianza $s = R\theta$. Se per misurare s e R si usa la medesima unità, θ risulta espressa in radianti. Analogamente, quando si usa l'Equazione (12.10), il valore di α_z che si inserisce deve essere espresso nell'unità SI, rad/s².

Dal punto di vista della descrizione generale delle rotazioni attorno a un asse, il moto di un corpo rigido è descritto univocamente dal vettore velocità angolare ω : il suo modulo è la derivata rispetto al tempo della coordinata angolare θ e la sua direzione dà la direzione dell'asse di rotazione. Quindi, per un corpo rigido, le traslazioni vengono descritte da un unico vettore, la velocità di un suo punto (velocità di traslazione), e le rotazioni da un altro unico vettore, la velocità angolare. Poiché un qualunque moto di un corpo rigido si può descrivere come una rototraslazione, cioè una traslazione più una rotazione, avremo che, in maniera del tutto generale, la velocità di un punto qualsiasi di un corpo rigido potrà sempre essere scritta come la somma di una velocità di traslazione più una velocità dovuta alla rotazione.

In sostanza, la conoscenza di due vettori, velocità di traslazione e velocità angolare, permette di descrivere il moto di un qualunque corpo rigido. Questo fatto lo si comprende facilmente se si ricorda che un corpo rigido ha sei gradi di libertà e che la conoscenza di due vettori comporta la conoscenza di sei parametri (tre componenti di uno e tre componenti dell'altro).

Esempio 12.4

Un bambino gira sulla giostra di un parco giochi a una distanza di 2.1 m dall'asse verticale di rotazione. In un certo istante la giostra gira in senso orario, se vista dall'alto, con una velocità angolare di 0.42 rad/s e questa velocità angolare decresce in modo che $\alpha = 0.14 \text{ rad/s}^2$. Determinare per il bambino (a) v_t , (b) a_t , (c) A_R e (d) a . Il piano xy sia orizzontale, e l'asse z coincida con l'asse di rotazione, con $+z$ rivolto verso l'alto.

Soluzione

(a) Poiché la giostra gira in senso orario, ω_z è negativa: $\omega_z = -0.42 \text{ rad/s}$. Quindi

$$v_t = R\omega_z = (2.1 \text{ m})(-0.42 \text{ rad/s}) = -0.88 \text{ m/s}$$

(b) Per trovare a_t abbiamo bisogno di α_z . Sappiamo che $\alpha = |\alpha_z| = 0.14 \text{ rad/s}^2$, ma dobbiamo stabilire il segno di α_z . Il modulo ω della velocità angolare è decrescente, e ω_z è negativa. Quindi ω_z è crescente, perché una grandezza negativa aumenta quando il suo modulo decresce. Dal momento che α_z è positiva quando ω_z è crescente, $\alpha_z = 0.14 \text{ rad/s}^2$. In base all'Equazione (12.10),

$$a = Ra_z = (2.1 \text{ m})(0.14 \text{ rad/s}^2) = 0.29 \text{ m/s}^2$$

(c) Dall'Equazione (12.11) si ricava

$$a_R = \omega^2 R = (0.42 \text{ rad/s})^2 (2.1 \text{ m}) = 0.37 \text{ m/s}^2$$

(d) Il modulo a dell'accelerazione del bambino è

$$a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} = 2.1 \text{ m}\sqrt{(0.14 \text{ rad/s}^2)^2 + (0.42 \text{ rad/s})^4}$$



12.7 ENERGIA CINETICA DI ROTAZIONE: IL MOMENTO DI INERZIA

Quando una ruota gira, alla rotazione è associata un'energia cinetica. La ruota è formata da molte particelle di dimensioni infinitesime, e l'energia cinetica di una particella i con massa m_i e velocità v_i , è $\frac{1}{2}m_i v_i^2$. L'energia cinetica K dell'intera ruota è la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle che compongono la ruota:

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

Particelle che si trovano a distanze diverse dall'asse di rotazione hanno differenti velo-

cità lineari v_i , ma, essendo la ruota rigida, tutte le particelle hanno la medesima velocità angolare ω . (Questo fatto è indicato dall'assenza di un indice i accanto all' ω). Usando la relazione $v_i = R_i \omega$, si può scrivere l'energia cinetica della ruota come

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2$$

Tutti i termini di questa somma hanno due fattori comuni, $1/2$ e ω^2 . Possiamo portare questi fattori fuori dal segno di sommatoria:

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 (\sum m_i R_i^2)$$

La grandezza $\sum m_i R_i^2$ è chiamata *momento di inerzia* I rispetto all'asse da cui s'isolano le distanze R_i :

Definizione del momento di inerzia.

$$I = \sum m_i R_i^2$$

(12)

Il momento di inerzia ha dimensioni [massa] · [lunghezza]², e la relativa unità di misura SI è il $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Discuteremo in modo più approfondito il momento di inerzia nel prossimo paragrafo.

Espressa in termini del momento di inerzia, l'energia cinetica di un corpo in rotazione è

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

(12)

Se confrontiamo l'espressione dell'energia cinetica di rotazione con l'espressione $K = \frac{1}{2} m v^2$ valida per la traslazione, vediamo che I è l'analogo rotatorio della massa m , e ω è l'analogo rotatorio del modulo v della velocità. A titolo di esempio supponiamo che una porta, il cui momento di inerzia I rispetto ai cardini sia $I = 8.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, ruoti con una velocità angolare $\omega = 0.71 \text{ rad/s}$. L'energia cinetica di rotazione della porta è

$$K = \frac{1}{2} (8.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (0.71 \text{ rad/s})^2 = 2.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 2.1 \text{ J}$$

Esempio 12.5

Un piccolo veicolo è in grado di viaggiare a 35 km/h sfruttando una potenza di 4 kW. Calcolare l'energia che viene spesa quando il veicolo percorre 35 km. Si supponga che all'interno del veicolo ci sia un volano che ruota attorno a un asse e che ha un momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione di 18 kg m^2 (un volano simile in acciaio avrebbe una massa di 100 kg e un raggio di 60 cm). Tale volano, quindi, possiede un'energia di rotazione e si vuole che tale energia immagazzinata dal volano in rotazione sia uguale a quella necessaria al veicolo per percorrere i 35 km. Calcolare a quale frequenza f , in giri al minuto, esso dovrebbe ruotare.

Soluzione

Per percorrere 35 km a 35 km/h occorre un'ora, quindi l'energia spesa è la potenza moltiplicata per il tempo di uso del veicolo:

$$E = Pt = (4000 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 1.44 \times 10^7 \text{ J}$$

L'energia cinetica del volano è $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, quindi, se si suppone che tutta l'energia necessaria sia quella immagazzinata dal volano ruotante, cioè $K = E = 1.44 \times 10^7$, si ha

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{I}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.44 \times 10^7}{18}} = \sqrt{1.6 \times 10^6} \cong 1.3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$$

e poiché $\omega = 2\pi f$ si ha $f = 200 \text{ s}^{-1} = 12000 \text{ giri/min}$.

12.8 IL MOMENTO DI INERZIA

Prima di procedere oltre, è opportuno che ci soffermiamo ad approfondire il nuovo concetto di momento di inerzia. Possiamo renderci conto di alcune caratteristiche generali del momento di inerzia prendendo in considerazione l'insieme di otto punti materiali rappresentato nella Figura 12.11. Tutti i punti materiali hanno la medesima massa m_i , e sono tenuti fermi l'uno rispetto all'altro da aste di massa trascurabile. Cominciamo a determinare il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro della configurazione e parallelo al lato di lunghezza b , asse che nella figura è indicato come asse z :

$$I = \sum m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \dots + m_8 R_8^2$$

Tutti i punti materiali sono alla stessa distanza dall'asse di rotazione:

$$R = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Quindi

$$I = m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4ma^2$$

Ora consideriamo il momento di inerzia di questa stessa configurazione rispetto a un asse parallelo all'asse z ma passante per i punti materiali 3 e 7. La distanza di quest'asse dai punti 1 e 5 è $R_1 = R_5 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$; quella dai punti 2, 4, 6 e 8 è $R_2 = R_4 = R_6 = R_8 = a$; quella dei punti 3 e 7 è $R_3 = R_7 = 0$. Quindi

$$I = \sum m_i R_i^2 = 2m(\sqrt{2}a)^2 + 4m(a)^2 + 2m(0)^2 = 8ma^2$$

Il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il centro è $I = 4ma^2$, ma quello relativo all'asse passante per i punti materiali 3 e 7 è $I = 8ma^2$. Abbiamo stabilito che, a differenza della massa, il momento di inerzia non è una proprietà intrinseca di un sistema. Esso dipende invece dalla massa del sistema e dalla posizione dell'asse di rotazione. È da notare che I dipende fortemente dalla distribuzione della massa in direzione perpendicolare all'asse: se a raddoppia, I quadruplica. Viceversa, I è indipendente dalla distribuzione della massa in direzione parallela all'asse: nella configurazione della Figura 12.11, esso è indipendente dalla lunghezza b .

Momento di inerzia di un sistema continuo. Per determinare il momento di inerzia di un sistema continuo, come una puleggia o una ruota, immaginiamo che esso sia costituito da molte parti, ciascuna delle quali così piccola da poter essere considerata un punto materiale (Figura 12.12). La massa di ciascuna parte è $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$, ove ρ_i è la densità di massa del materiale e ΔV_i è il piccolo volume occupato dalla parte. Quindi

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2 = \sum \rho_i \Delta V_i R_i^2$$

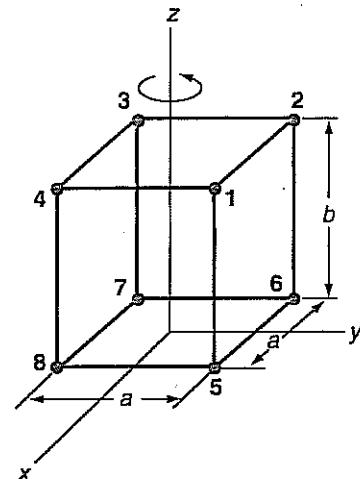
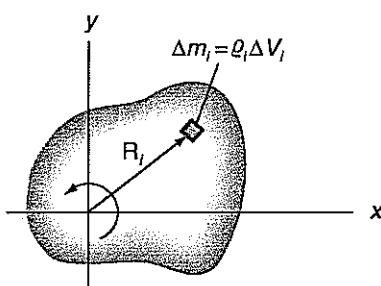


Figura 12.11

Un insieme di otto punti materiali, tutti di massa m , tenuti insieme da aste rigide di massa trascurabile. L'asse z passa per il centro della configurazione ed è parallelo agli spigoli di lunghezza b . Rispetto all'asse z , $I = 4ma^2$, mentre rispetto a un asse passante per i punti materiali 3 e 7, $I = 8ma^2$. Il momento di inerzia dipende da come la massa è distribuita rispetto all'asse di rotazione.

Figura 12.12

Momento di inerzia di un corpo continuo rispetto all'asse z . Il semiasse $+z$ è orientato in senso uscente dalla pagina.

Quando il volume ΔV_i diventa un elemento infinitesimo dV , la somma si trasforma in un integrale:

$$I = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum \varrho_i \Delta V_i R_i^2 = \int_V \varrho R^2 dV$$

Esempio 12.6

- (a) Trovare il momento di inerzia di una porta di densità uniforme ϱ , rispetto a un asse passante per i cardini. La porta ha massa M , altezza h , larghezza ℓ , e spessore b . Si ammetta che lo spessore della porta sia molto minore della sua larghezza.
 (b) Calcolare il momento di inerzia per una porta di massa 27.3 kg e larghezza 0.95 m.

Soluzione

(a) La porta è rappresentata nella Figura 12.13. Scegliamo come elemento di volume una striscia di altezza h , spessore b , e larghezza infinitesima dx . Questo elemento di volume viene così perché tutta la massa di una tale striscia è approssimativamente alla stessa distanza x da passante per i cardini. Questa approssimazione è valida perché lo spessore della porta è piccolo rispetto alla sua larghezza. Effettuando nell'Equazione (12.14) le sostituzioni $dV = hb dx$ e R^2 portando fuori dall'integrale i fattori costanti ϱ , h e b , si ha

$$I = \varrho h b \int_0^\ell x^2 dx$$

Eseguendo l'integrazione si ottiene

$$I = \frac{\varrho h b \ell^3}{3}$$

Siccome $\varrho = M/V = M/hb\ell$, si ha $\varrho h b \ell = M$. Quindi

$$I = \frac{M \ell^2}{3}$$

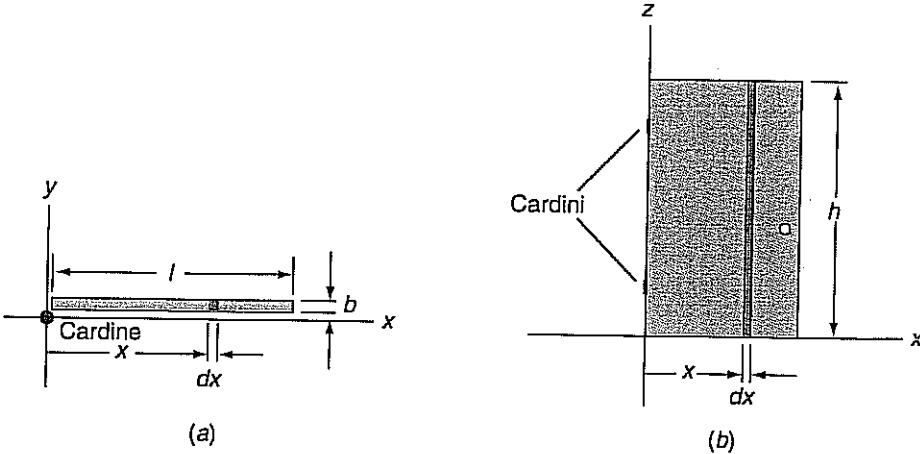
L'altezza della porta non compare nel risultato finale. Perciò questo risultato è valido per qualsiasi altezza. Anzi, esso rappresenta anche l'espressione del momento di inerzia di un bastone di lunghezza ℓ rispetto a un asse perpendicolare al bastone e passante per una sua estremità.

(b) Sostituendo $M = 27.3$ kg e $\ell = 0.95$ m, si ha

$$I = \frac{(27.3 \text{ kg})(0.95 \text{ m})^2}{3} = 8.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Figura 12.13

Esempio 12.6: (a) la porta vista dall'alto. La direzione $+z$ è uscente dalla pagina. (b) La porta vista di fronte. Dal momento che $\ell \gg b$, praticamente tutta la massa di dV è alla stessa distanza dall'asse.



Esempio 12.7

Trovare il momento di inerzia di un cilindro circolare retto cavo rispetto al suo asse di simmetria se il cilindro abbia raggio interno R_1 , raggio esterno R_2 , altezza h e densità uniforme ϱ , come mostrato in Figura 12.14.

Soluzione

Scegliamo come elemento di volume un sottile strato cilindrico di altezza h , circonferenza $2\pi R$ e spessore infinitesimo dR (Figura 12.14), $dV = h2\pi R dR$. L'elemento viene scelto in modo che

la sua massa sia sostanzialmente alla stessa distanza dall'asse di rotazione. Sostituendo questo valore di dV nell'Equazione (12.14) e portando fuori dall'integrale i fattori costanti, si ottiene

$$I = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} R^3 dR$$

I limiti di integrazione sono determinati dai valori di R tra i quali è compresa la massa. Eseguendo l'integrazione si ha

$$I = \frac{1}{2} \pi \rho h (R_2^4 - R_1^4)$$

Vogliamo esprimere questo risultato in termini della massa del cilindro, e quindi riscriviamo I come

$$I = \frac{1}{2} \pi \rho h (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

Il volume V del cilindro cavo è il prodotto della sua altezza per l'area di base:

$$V = h\pi(R_2^2 - R_1^2)$$

La sua massa M è

$$M = \rho V = \rho h\pi(R_2^2 - R_1^2)$$

Perciò,

$$I = \frac{1}{2} M(R_2^2 + R_1^2)$$

Pertanto il momento di inerzia di un sistema continuo è

$$I = \int_V \rho R^2 dV \quad (12.14)$$

dove l'integrazione è estesa al volume del sistema. Se la densità è uniforme, ρ può essere portata fuori dall'integrale:

$$I = \rho \int_V R^2 dV$$

Partendo dal risultato di quest'ultimo esempio si possono determinare i momenti di inerzia di corpi di altre due forme.

- Il momento di inerzia di un cilindro pieno di raggio R_0 che ruota intorno al suo asse di simmetria si trova ponendo il raggio interno R_1 uguale a zero e il raggio esterno R_2 uguale a R_0 . Ciò fornisce

$$I = \frac{1}{2} MR_0^2$$

Questa equazione vale anche per un disco e per un'asta a sezione circolare.

- Il momento d'inerzia di un sottile strato cilindrico di raggio R_0 che ruota intorno all'asse di simmetria si trova introducendo l'approssimazione $R_1 \approx R_0$ e $R_2 \approx R_0$. Ciò porta a

$$I = MR_0^2$$

Questa equazione è valida tanto per un hula hoop che per un tubo a parete sottile.

La Tabella 12.2 fornisce i momenti di inerzia di corpi di varie forme rispetto ad assi passanti per il centro di massa.

Il teorema degli assi paralleli o di Huygens-Steiner. Il calcolo del momento d'inerzia di un corpo rispetto a un asse che non sia asse di simmetria può risultare assai complesso. Fortunatamente esiste un teorema di facile applicazione che ci aiuta: il *teorema degli assi paralleli*. Esso fornisce una relazione tra il momento di inerzia I_p rispetto a un asse passante per un punto arbitrario P , e il momento di inerzia I_{cm} rispetto a un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa del corpo.

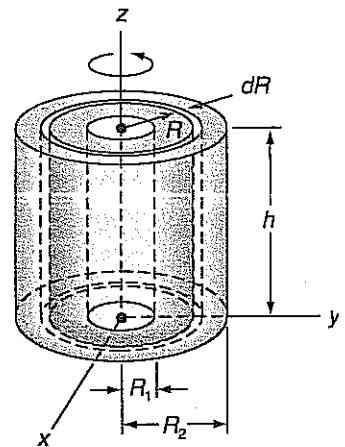


Figura 12.14

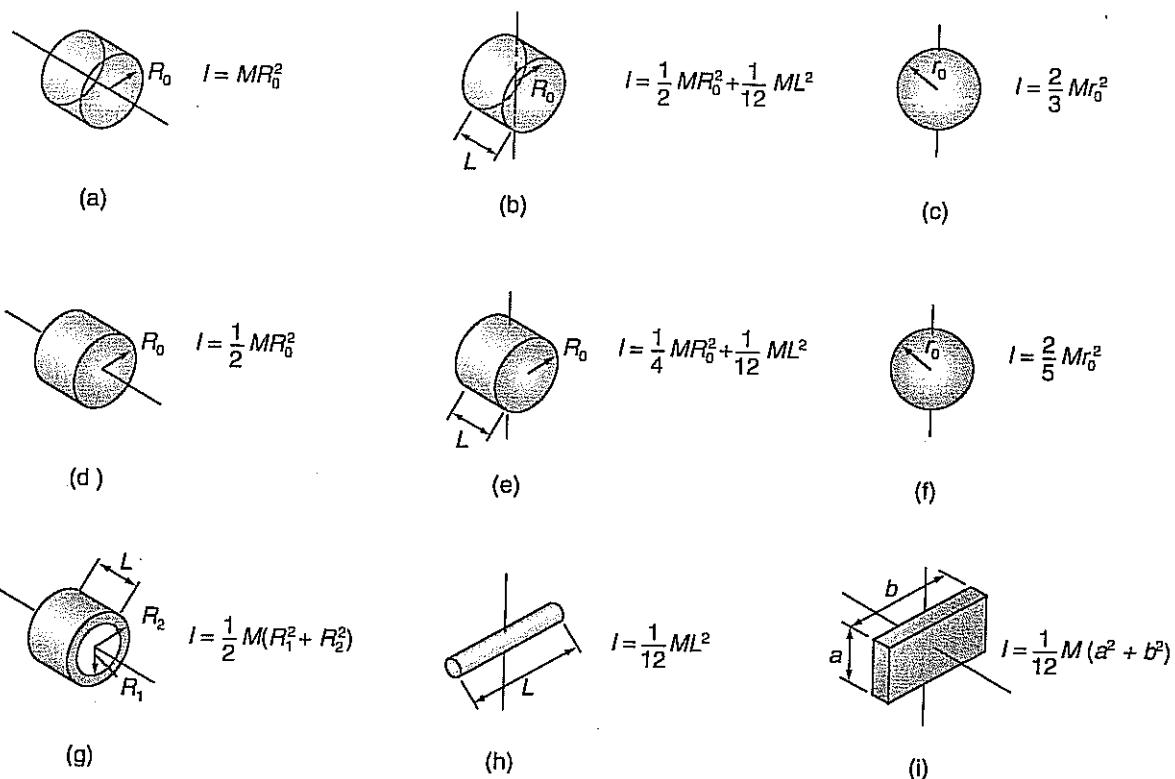
Esempio 12.7: calcolo del momento di inerzia di un cilindro cavo. La massa dell'elemento di volume $dV = 2\pi Rh dR$ è sostanzialmente tutta alla distanza R dall'asse z . La massa totale del cilindro è contenuta nella regione delimitata dai valori R_1 e R_2 della variabile di integrazione R .

Momento di inerzia di un corpo continuo.

Tabella 12.2 Momenti di inerzia rappresentativi. In tutti i casi la densità è uniforme e l'asse di rotazione passa per il centro di massa.

(a) Cilindro a parete sottile. (b) Cilindro a parete sottile. (c) Sfera cava a parete sottile. (d) Cilindro pieno. (e) Cilindro pieno. (f) Sfera piena.

(g) Cilindro cavo a parete spessa. (h) Asta lunga e sottile. (i) Piastra rettangolare.



Consideriamo il momento di inerzia del corpo di forma arbitraria rappresentato in Figura 12.15 rispetto a un asse passante per il punto P . In questa figura l'asse z passa per il centro di massa ed è parallelo all'asse di rotazione passante per P . Dal momento che l'asse z passa per il centro di massa, $x_{cm} = 0$ e $y_{cm} = 0$. La distanza tra i due assi paralleli è $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. In base all'Equazione (12.12), il momento di inerzia I_P rispetto a un asse passante per P è

$$I_P = \sum m_i R_{Pi}^2 = \sum m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

dove R_{Pi} è la distanza tra l'asse (passante per P) e la particella i . Sviluppando i quadrati dell'ultimo membro si ha

$$I_P = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum m_i x_i - 2b \sum m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum m_i$$

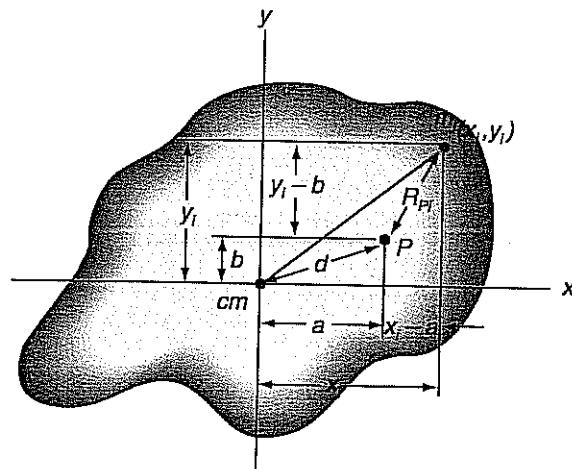


Figura 12.15 Il teorema degli assi paralleli. L'asse z passa per il centro di massa ed è parallelo all'asse di rotazione che passa per il punto P (la direzione $+z$ è uscente dalla pagina). Il momento di inerzia I_P rispetto all'asse passante per P è $I_P = I_{cm} + Md^2$, ove d è la distanza tra gli assi.

dove si sono portate fuori dalle sommatorie le grandezze che sono uguali in ogni termine delle somme stesse. Nell'equazione appena scritta, il termine $\sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$ è il momento di inerzia I_{cm} del corpo rispetto all'asse passante per il centro di massa (l'asse z) perché x_i e y_i sono misurate a partire dall'asse passante per il centro di massa:

$$I_{cm} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

Nel Paragrafo 10.2 abbiamo visto che il centro di massa è definito da $\sum m_i x_i = Mx_{cm}$ e $\sum m_i y_i = My_{cm}$. Ciò significa che la nostra scelta del sistema di coordinate fa sì che si annullino il secondo e il terzo termine: $\sum m_i x_i = Mx_{cm} = 0$ e $\sum m_i y_i = My_{cm} = 0$. Il quarto termine, $(a^2 + b^2)\sum m_i$, è pari a Md^2 perché $\sum m_i = M$ e $a^2 + b^2 = d^2$. Perciò,

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \quad (12.15)$$

che è il teorema degli assi paralleli.

Esempio 12.8

La Tabella 12.2 fornisce il momento di inerzia di un'asta sottile e omogenea rispetto a un asse passante per il centro di massa e perpendicolare all'asse longitudinale dell'asta stessa. Determinare il momento di inerzia dell'asta rispetto a un asse parallelo a quello descritto sopra e passante per un punto P posto a una sua estremità, come mostra la Figura 12.16.

Soluzione

Usando l'Equazione (12.15), si ha

$$I_P = I_{cm} + Md^2 = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

Si confronti questo risultato con la soluzione dell'Esempio 12.5.

Il teorema degli assi paralleli.

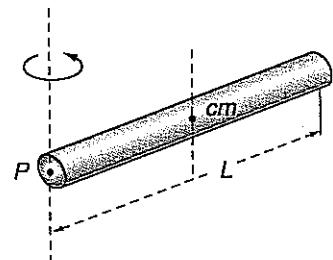


Figura 12.16

Esempio 12.8: uso del teorema degli assi paralleli per trovare il momento di inerzia di un'asta omogenea rispetto a un asse perpendicolare alla sua lunghezza e passante per una delle sue estremità (P).

12.9 ROTOLAMENTO DI UN CORPO RIGIDO

Finora abbiamo discusso soltanto di corpi che ruotano intorno a un asse fisso. Ora prendiamo in considerazione un corpo che rotola, come una ruota o una palla. Per semplicità, consideriamo un corpo di sezione circolare che rotola senza strisciare lungo una linea retta. In questo caso l'asse di rotazione ha un moto traslatorio, ma mantiene un orientamento costante.

Quando un corpo rotola senza strisciare c'è una semplice relazione tra il modulo v della velocità lineare del suo centro e quello della velocità di rotazione, w , intorno a un asse passante per il centro stesso². La Figura 12.17 mostra una ruota di raggio R che rotola, all'istante t_i e in un istante successivo t_f . Lo spazio Δx percorso dal centro della ruota in un dato intervallo di tempo Δt è uguale allo spazio Δs percorso dal punto di contatto lungo la circonferenza della ruota: $\Delta x = \Delta s$. Se v è il modulo della velocità lineare del centro della ruota e ω è il modulo della velocità angolare rispetto all'asse di rotazione, allora

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = R\omega$$

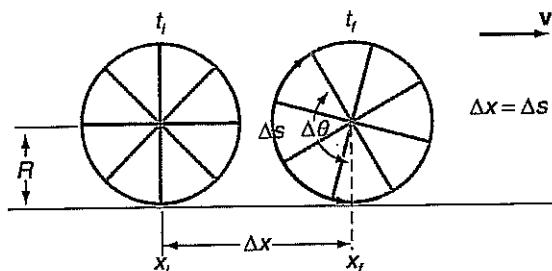


Figura 12.17

Rotolamento senza strisciamento. Nell'intervallo di tempo Δt , il centro della ruota percorre uno spazio Δx , che è uguale allo spazio Δs che il punto di contatto percorre lungo la circonferenza della ruota: $\Delta x = \Delta s$. Quindi $v = \Delta x/\Delta t = \Delta s/\Delta t = R\Delta\theta/\Delta t = R\omega$.

² In quanto segue è sottinteso che il rotolamento senza strisciamento avvenga su una superficie fissa. In tal caso il punto di contatto P ha velocità nulla. Quale sarebbe la condizione di rotolamento senza strisciamento (o rotolamento puro) su una superficie in moto? (N.d.T.)

Rotolamento senza strisciamento.

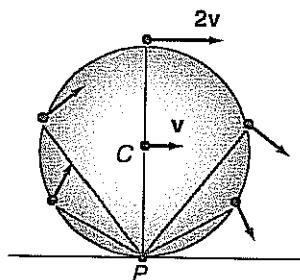


Figura 12.18

Un corpo che rotola ruota in ogni istante intorno a un asse passante per il punto di contatto P . La velocità lineare di qualunque particella è perpendicolare al segmento che ha per estremi P e la particella stessa, e il suo modulo è proporzionale alla lunghezza di tale segmento.

Energia cinetica di un corpo che rotola.

Figura 12.19

Fotografia a esposizione prolungata di due punti luminosi posti su una ruota che rotola. Un punto luminoso si trova sull'asse e l'altro sulla circonferenza. Si noti che il punto sulla circonferenza cambia direzione nell'istante in cui viene a contatto con il suolo ed è in quiete in tale istante. (Bernice Abbott/Photo Researchers)

Nel caso di rotolamento senza strisciamento si ha

$$v = R\omega \quad (1)$$

Ora determiniamo l'energia cinetica di un corpo che rotola. La Figura 12.18 mostra un corpo in tale circostanza ruota intorno a un asse che passa per il punto di contatto P tra il corpo e la superficie su cui questo rotola. Questo asse mantiene un orientamento costante parallelo alla superficie e perpendicolare alla direzione di moto. Il momento di rotazione non si verifica alcuno strisciamento, il punto di contatto P è *istantaneamente* in quiete, e l'asse di rotazione del corpo passa istantaneamente per tale punto (Figura 12.19).

Nella Figura 12.18 sono rappresentate le velocità di diversi punti del corpo: hanno direzioni perpendicolari ai segmenti che congiungono i vari punti con P e sono dunque proporzionali alle lunghezze di quei segmenti. Per esempio, la velocità del punto più alto del corpo è $2v$, cioè il doppio di quella del centro.

Si noti che la velocità angolare ω_P rispetto a un asse passante per P è uguale alla velocità angolare ω_C rispetto a un asse passante per C , perché la velocità di C rispetto a P è $\omega_P R$ e la velocità di P rispetto a C è $\omega_C R$. Quindi $\omega_P R = \omega_C R$, e di conseguenza si possono omettere gli indici: $\omega = \omega_P = \omega_C$.

L'energia cinetica del corpo è

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

dove I_P è il momento di inerzia del corpo rispetto a un asse perpendicolare alla direzione di moto, parallelo alla superficie su cui il corpo rotola, e passante per P . Se il corpo ha una distribuzione di massa simmetrica rispetto a un asse passante per C , allora C corrisponde al centro di massa, e il teorema degli assi paralleli fornisce

$$K = \frac{1}{2} (I_{cm} + M d^2) \omega^2$$

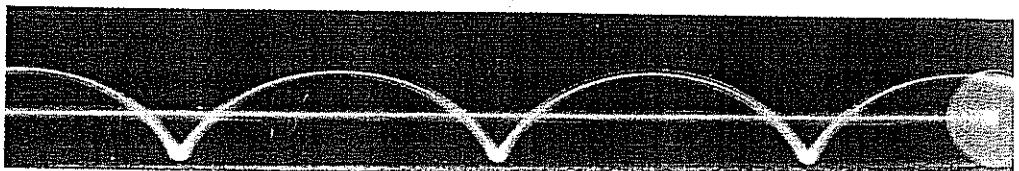
dove I_{cm} è il momento di inerzia del corpo rispetto a un asse perpendicolare alla direzione di moto, parallelo alla superficie e passante per C . La distanza d tra questi assi è il raggio R . Dal momento che il corpo rotola senza strisciare, $v = \omega R$, cioè $\omega = v/R$. Ciò porta a $K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M(R)^2(v/R)^2$, ovvero

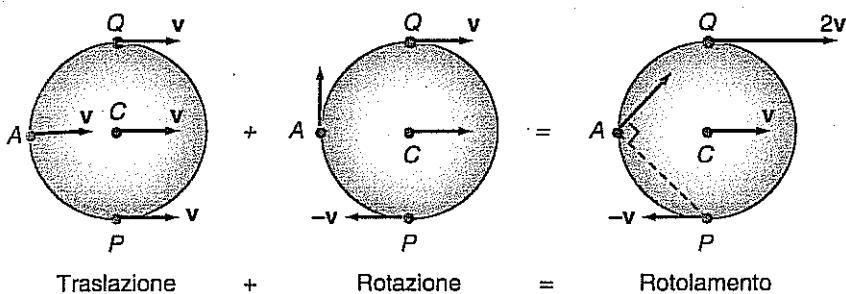
$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 \quad (12)$$

Quindi l'energia cinetica di un corpo che rotola può essere espressa come somma di due termini: uno che corrisponde alla rotazione intorno al centro di massa, e l'altro che corrisponde alla traslazione del centro di massa.

Anche la velocità di una particella di un corpo che rotola può essere considerata come risultato di una combinazione di una traslazione pura e di una rotazione pura del corpo, come chiarisce la Figura 12.20. In particolare, si noti come la velocità della particella nel punto A del corpo che rotola sia la somma vettoriale delle velocità prodotte dalla traslazione pura e dalla rotazione pura.

Come abbiamo visto nel Paragrafo 12.6 ciò deriva dal fatto che in generale i movimenti dei corpi rigidi sono descritti da rototraslazioni. Poiché la velocità dovuta alla rotazione di un punto qualunque P del corpo è data da $\omega \times r$, dove ω è il vettore velocità angolare, la cui direzione ci dà la direzione dell'asse di rotazione, e r è il vettore di posizione del punto considerato (la cui "coda" O sta sull'asse di rotazione), e la velocità di traslazione è la velocità del punto O dell'asse di rotazione (quello che costituisce





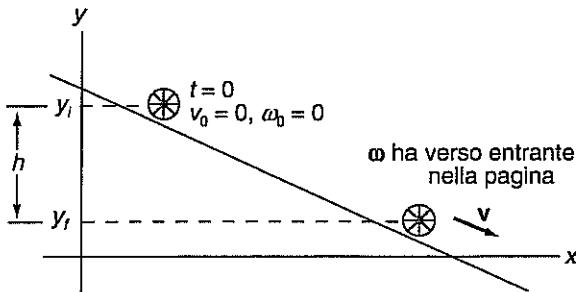
“coda” del vettore \mathbf{r}) \mathbf{v}_O , allora la velocità che possiede il punto P è data dalla somma della velocità di traslazione \mathbf{v}_O e di quella di rotazione $\omega \times \mathbf{r}$, cioè

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \omega \times \mathbf{r}$$

È il caso di rilevare che l'Equazione (12.17) è valida anche quando il corpo rotola con parziale strisciamento, benché l'abbiamo ricavata nell'ipotesi di assenza di strisciamento. In questo caso, però, $v \neq \omega R$. L'unica restrizione alla validità dell'Equazione (12.17) è che l'asse di rotazione deve mantenere un orientamento costante.

Esempio 12.9

(a) Ricavare un'equazione che dia il modulo della velocità di un corpo che, partendo dalla quiete, rotola senza strisciare giù per una discesa, come mostra la Figura 12.21. Si ammetta che le forze non conservative, come la resistenza dell'aria, siano trascurabili. (b) Servendosi della risposta della parte (a), trovare il modulo della velocità di un pallone da basket dopo che è rotolato, a partire dalla quiete, giù per una discesa. Il dislivello verticale di cui è sceso il pallone è $h = 2.3$ m.



Soluzione

(a) Dal momento che le forze non conservative sono trascurabili, possiamo servirci della conservazione dell'energia meccanica³ (Paragrafo 9.5):

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2} Mv_f^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega_f^2 + Mgy_f = \frac{1}{2} Mv_i^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega_i^2 + Mgy_i$$

Siccome il corpo parte da fermo, $v_i = 0$ e $\omega_i = 0$. Inoltre poniamo $v_f = v$, $\omega_f = \omega$, e $y_i - y_f = h$. Riordinando i termini si ha

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2$$

Questa equazione stabilisce che, mentre il corpo rotola giù per la discesa, la diminuzione dell'energia potenziale è uguale all'aumento dell'energia cinetica. Effettuando la sostituzione $\omega = v/R$ e risolvendo rispetto a v , si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_{cm}/MR^2}}$$

Sappiamo dal Paragrafo 3.6 che il modulo della velocità di una particella che cade da un'altezza h , trascurando l'attrito, è $v = \sqrt{2gh}$. Questa è anche l'espressione della velocità di un blocco che scivola

Figura 12.20

La velocità lineare di una particella di un corpo che rotola può essere considerata come una combinazione di una velocità lineare che è uguale a quella dell'asse (traslazione pura) e di una velocità lineare dovuta alla rotazione della particella intorno all'asse (rotazione pura).

Figura 12.21

Esempio 12.9: un corpo, partendo dalla quiete, rotola giù per un pendio rettilineo.

³ Perché ci sia rotolamento può essere necessaria una forza di attrito tra il corpo e la superficie su cui esso rotola. Nell'Esempio 12.9 tale forza si manifesta (vedi Problema 13.4). Come mai l'energia meccanica si conserva? (N.d.T.)

la giù per una discesa senza attrito. Pertanto, siccome parte dell'energia cinetica di un corpo la è energia cinetica di rotazione, il modulo della sua velocità dopo che è sceso per un dato sarà minore di quello di un corpo la cui energia cinetica è solo di traslazione. L'entità della zione della velocità a causa del rotolamento dipende dal rapporto I_{cm}/MR^2 : quanto maggiore il rapporto, tanto minore sarà la velocità per un dato dislivello h . Per i corpi elencati nella Tabella 12.2 che hanno simmetria sferica o cilindrica, questo rapporto è indipendente sia da M che da I_{cm} rispetto agli assi di simmetria di questi corpi è proporzionale a MR^2 . Quindi la velocità dopo di questo tipo che rotola è indipendente sia dalla sua massa che dal suo raggio, ma dipende dal modo in cui la sua massa è distribuita intorno a un asse perpendicolare alla direzione parallela alla superficie e passante per il centro di massa.

(b) Un pallone da basket può essere trattato approssimativamente come un involucro sferico (vedi Tabella 12.2). Sostituendo $I_{cm} = 2Mr_0^2/3 = 2MR^2/3$, si ha

$$v = \sqrt{\frac{6gh}{5}} = \sqrt{\frac{6(9.8 \text{ m/s}^2)(2.3 \text{ m})}{5}} = 5.2 \text{ m/s}$$

Quale sarebbe il modulo della velocità del pallone se scivolasse senza attrito lungo la discesa?

Esempio 12.10

Mostrare che se un anello e un cilindro pieno vengono lasciati rotolare senza strisciare giù da un piano inclinato, partendo entrambi da fermi e dalla stessa altezza, il cilindro arriva sempre per qualunque siano la massa e le dimensioni dei due corpi.

Soluzione

La velocità di un corpo rigido che scende rotolando senza strisciare si ricava dalla conservazione dell'energia, come nell'esempio precedente. Quindi la velocità che hanno i corpi dopo aver superato un dislivello qualunque h è

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_{cm}}{MR^2}}}$$

Poiché un anello ha $I_{cm} = MR^2$ e il cilindro pieno ha $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$, ne risulta che $v_{anello} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$, quindi il cilindro possiede una velocità di traslazione sempre maggiore di quella dell'anello e arriverà sempre prima dell'anello. Ciò è dovuto al fatto che l'energia totale inizia stessa per entrambi e durante la discesa essa si ripartisce fra energia di rotazione ed energia di traslazione; poiché l'energia di rotazione, a causa del momento d'inerzia maggiore, è maggiore per il cilindro, a causa della conservazione dell'energia, l'energia di traslazione dell'anello sarà minore; dunque l'anello avrà velocità di traslazione minore di quella del cilindro.

RIEPILOGO

Paragrafo 12.2

Traslazione e rotazione di un corpo rigido

Nel moto traslatorio tutti i punti di un corpo rigido subiscono il medesimo spostamento nel medesimo intervallo di tempo. Nel moto rotatorio tutti i punti di un corpo rigido compiono un moto circolare intorno all'asse di rotazione.

Paragrafo 12.3

Misura degli angoli

L'unità SI dell'angolo, il radiante, è definita come $\theta = s/R$, dove s e R sono misurati con la medesima unità di lunghezza.

Paragrafo 12.4

Coordinata, velocità e accelerazione angolari

Le grandezze cinematiche angolari sono la coordinata angolare θ , la componente della velocità angolare $\omega_z = d\theta/dt$, e la componente dell'accelerazione angolare $\alpha_z = d\omega_z/dt$. Per definire il senso di rotazione positivo ci si serve della regola della mano destra.

Paragrafo 12.5

Cinematica della rotazione intorno a un asse fisso

La cinematica di un corpo rigido che ruota intorno a un asse è analoga a quella di un punto che si muove in linea retta: le equazioni che descrivono il moto rotatorio con velocità angolare costante e quello con accelerazione angolare costante sono colte nella Tabella 12.1.

Paragrafo 12.6

Relazioni tra grandezze lineari e grandezze angolari

Per un punto di un corpo rigido in rotazione, la relazione tra le componenti della velocità lineare e della velocità angolare è

$$v_t = R\omega_z \quad (1)$$

Le componenti dell'accelerazione lineare sono

$$a_t = R\alpha_z \quad (12)$$

$$A_R = R\omega^2 \quad (12)$$

Paragrafo 12.7**Energia cinetica di rotazione:
il momento di inerzia**

L'energia cinetica di rotazione di un corpo rigido è

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (12.13)$$

dove il momento di inerzia è

$$I = \sum m_i R_i^2 \quad (12.12)$$

Paragrafo 12.8**Il momento di inerzia**

Il momento di inerzia di un corpo continuo è

$$I = \int_V \rho R^2 dV \quad (12.14)$$

QUESITI

- 12.1 Quando è particolarmente utile misurare gli angoli in rad? Quando invece l'unità di misura degli angoli è ininfluente?
- 12.2 Le misure angolari sono tutte adimensionali, indipendentemente dalle unità adottate?
- 12.3 Qual è la traiettoria di una particella che fa parte di un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso?
- 12.4 Come si potrebbe definire un asse fisso di rotazione di un corpo rigido in termini del moto delle particelle che formano il corpo?
- 12.5 Se un corpo rigido ha un moto puramente traslatorio (come, ad esempio, la carrozzeria di un'automobile che viaggia in linea retta su una strada piana), vi sono punti del corpo che hanno sempre la stessa velocità del centro di massa? Se sì, quali?
- 12.6 Se un corpo rigido ha soltanto un moto rotatorio intorno a un asse fisso (come, per esempio, una porta che si apre o si chiude), vi sono punti del corpo che hanno sempre la stessa velocità del centro di massa? Se sì, quali?
- 12.7 Se un corpo rigido si muove di moto sia traslatorio che rotatorio intorno a un asse con orientamento fisso (come, per esempio, una ruota che rotola), vi sono punti del corpo che hanno sempre la stessa velocità del centro di massa? Se sì, quali?
- 12.8 Se un corpo rigido si muove di moto sia traslatorio che rotatorio intorno a un asse che non è fisso (come, per esempio, un pallone ovale durante un passaggio «sfarfallante»), vi sono dei punti del corpo che hanno sempre la stessa velocità del centro di massa? Se sì, quali?
- 12.9 Supponendo di disporre di un'asta metrica e di una monetina, come si potrebbe misurare l'angolo sotto il quale dalla Terra si vede la Luna? Richiede meno aritmetica determinare l'angolo in gradi o in radianti? Quale unità di misura degli angoli sarebbe più facile usare in questo caso?
- 12.10 Se si immagina di guardare il sistema solare dalla Stella Polare, sia il moto orbitale della Terra intorno al Sole che la rotazione assiale del nostro pianeta avvengono in senso antiorario. Quando è maggiore la nostra velocità lineare rispetto al Sole, di notte o di giorno?
- 12.11 Qual è la direzione della velocità angolare di un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso? Qual è la direzione della velocità lineare di una particella che fa parte di un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso?
- 12.12 Un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso ha velocità angolare e accelerazione angolare diverse da zero. La particella *A*, che fa parte del corpo, dista dall'asse di rotazione il doppio della particella *B*. Quali sono i rapporti tra le seguenti grandezze relative ad *A* e a *B*: (a) i moduli delle velocità angolari, (b) i moduli delle velocità lineari, (c) i moduli delle accelerazioni angolari, (d) le componenti tangenziali delle accelerazioni, (e) le componenti radiali delle accelerazioni, (f) i moduli delle accelerazioni lineari?
- 12.13 Le velocità angolari delle lancette di un orologio elettrico da muro sono dirette verso la parete o in senso uscente da questa? Nel momento in cui all'orologio viene tolta l'alimentazione, le accelerazioni angolari delle lancette sono dirette verso la parete o in senso uscente da questa?
- 12.14 Consideriamo un punto all'estremità della lancetta dei secondi di un orologio elettrico da muro, nell'istante in cui la lancetta passa per le 12 subito dopo che la spina è stata inserita (cosicché il modulo della velocità angolare della lancetta sta aumentando). Poniamo l'origine delle coordinate nel centro dell'orologio, con l'asse *z* orientato lungo l'asse di rotazione con verso uscente dalla parete, l'asse *x* diretto orizzontalmente verso le 3, e l'asse *y* diretto verticalmente verso le 12 (cioè verso l'alto). Quali componenti cartesiane della velocità lineare e dell'accelerazione lineare della particella sono nulle? Qual è il segno algebrico delle componenti non nulle? Quali componenti cartesiane della velocità angolare e dell'accelerazione angolare sono nulle? Qual è il segno algebrico delle componenti non nulle?
- 12.15 Un'automobile si sta muovendo in avanti e sta rallentando. La direzione della velocità angolare delle ruote è verso la sinistra o verso la destra del guidatore? Qual è la direzione dell'accelerazione angolare delle ruote?
- 12.16 Può un corpo avere più di un momento di inerzia? Oltre alla forma e alla massa di un corpo, che cos'altro si deve conoscere per trovarne il momento di inerzia?

Il momento di inerzia di un corpo rispetto a un asse parallelo a un altro asse passante per il centro di massa è dato dal teorema degli assi paralleli:

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \quad (12.15)$$

Paragrafo 12.9 Rotolamento di un corpo rigido
L'asse di rotazione di un corpo che rotola subisce una traslazione. L'energia cinetica di un corpo che rotola può essere scritta come

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 \quad (12.17)$$

- 12.17** Una metà di una porta (Figura 12.22) è fatta di un materiale più denso rispetto all'altra metà. Per rendere minimo il momento di inerzia rispetto a un asse di rotazione passante per i cardini, questi ultimi devono essere posti sul lato più pesante o su quello più leggero? Spiega.

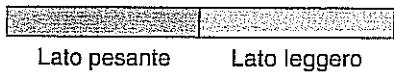


Figura 12.22 Quesito 12.17: una porta vista dall'alto.

- 12.18** Consideriamo tre aste fatte dello stesso materiale e con la stessa lunghezza e la stessa massa, ma con sezioni di forma diversa (Figura 12.23). Quale delle tre ha il massimo momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa e parallelo alla lunghezza dell'asta? Quale ha il minimo momento di inerzia rispetto a questo asse?

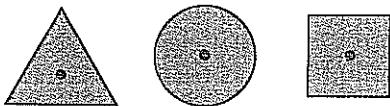


Figura 12.23 Quesito 12.18: sezioni trasversali di tre aste.

- 12.19** È possibile trovare un asse di rotazione (che chiamiamo asse *A*) rispetto al quale il momento di inerzia di un corpo sia minore del momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa e parallelo ad *A*?
- 12.20** Supponiamo di lasciar andare nello stesso istante, in modo che, partendo da fermi, rotolino giù per la stessa discesa diritta, i seguenti oggetti: un pallone da basket, una palla da biliardo, una lattina vuota senza le basi, un pallone da calcio e una boccia da bowling. Quale ci si può aspettare che arrivi per primo in fondo? E quale per

ultimo? Ve ne saranno che arrivano insieme?
Ammettiamo che l'energia meccanica si conservi.

- 12.21** Supponiamo che tu stia progettando un carrello per scendere lungo un pendio. Per rendere massima la velocità di discesa, dovresti progettare le ruote in modo che i loro momenti di inerzia rispetto agli assi di rotazione siano grandi o piccoli, oppure non ha importanza? Mantenendo fissi i momenti di inerzia delle ruote, la velocità del carrello aumenterà o diminuirà se aumenta la massa del telaio del carrello? Ammettiamo che l'energia meccanica si conservi.

- 12.22** Due barili simili *A* e *B*, con il medesimo raggio e la medesima massa, rotolano giù per la stessa discesa partendo nello stesso istante. Il barile *A* è pieno di acqua liquida, e il barile *B* è pieno di un'uguale massa di ghiaccio. (Il barile *B* è leggermente più lungo del barile *A* per compensare la densità leggermente maggiore dell'acqua liquida.) Quale dei due barili arriva per primo in fondo alla discesa? Spiega.

- 12.23** Completare la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità
θ			
ω		Vettore	
ω_z		Componente	
α_z			
v_t			m/s
a_t			
a_R			
I	Momento di inerzia		

ESERCIZI

Paragrafo 12.3 Misura degli angoli

- 12.1** Determinare l'angolo compreso tra le 12 e le 4 sul quadrante di un orologio in (a) radianti, (b) gradi e (c) giri.
- 12.2** Il diametro del Sole viene visto dalla Terra sotto un angolo di 0.53° . (a) Convertire questo angolo in radianti. (b) Sapendo che il raggio dell'orbita della Terra è di 1.5×10^{11} m, calcolare il diametro del Sole.
- 12.3** Il pomello di una porta si trova a 0.84 m dall'asse passante per i cardini. (a) Determinare lo spazio percorso dal pomello quando la porta ruota di un angolo di 35° . (b) Determinare lo spazio percorso dal pomello quando la porta ruota di un angolo di 0.61 rad.
- 12.4** Quando una monetina del diametro di 18 mm viene tenuta a una distanza di 2 m dall'occhio, copre quasi esattamente la sagoma della Luna. Qual è l'angolo sotto il quale si vede la Luna dalla Terra in (a) radianti e (b) gradi? (c) Durante un'eclissi lunare, la Terra proietta la propria ombra sulla Luna. Basandosi su osservazioni di queste eclissi, gli antichi greci stabilirono che il diametro della Luna è circa 1/4 di quello della Terra. Utilizzando questi dati, esprimere la distanza Terra-Luna in raggi terrestri.

- 12.5** Determinare lo spazio percorso in 1 giorno dal centro della Terra rispetto al Sole. Il raggio dell'orbita della Terra è 1.5×10^{11} m.

Paragrafo 12.4 Coordinata, velocità e accelerazione angolari

- 12.6** Nel seguente elenco di coordinate angolari, quali (ammesso che ve ne siano) corrispondono alla stessa posizione angolare? 48.69 rad, -27.38° , 36.20 rad, 67.54 rad.
- 12.7** Trovare la velocità angolare in rad/s del piatto di un giradischi che compie 78 giri/min.
- 12.8** Una ruota panoramica che gira con velocità angolare costante compie 1 giro ogni 7.6 s. I passeggeri sono rivolti a ovest e si muovono in avanti quando si trova nel punto più alto. Quali sono modulo e direzione della velocità angolare della ruota?
- 12.9** Supponiamo che sia $\theta(t) = -(1.4 \text{ rad/s}^3)t^3 + (6.8 \pi \text{ rad})t$. Trovare (a) $\omega_z(t)$; (b) $\omega_z(2.1 \text{ s})$; (c) $\omega(2.1 \text{ s})$; (d) $\theta(2.1 \text{ s})$.
- 12.10** Supponiamo che sia $\omega_z(t) = (2.3 \text{ rad/s}^4)t^3 - (7.5 \text{ rad/s}^3)t^2$. Trovare (a) $\alpha_z(t)$; (b) $\alpha_z(1.6 \text{ s})$; (c) $\alpha(1.6 \text{ s})$; (d) $\omega_z(1.6 \text{ s})$; (e) $\omega(1.6 \text{ s})$.

Paragrafo 12.5

Cinematica della rotazione intorno a un asse fisso

- 12.11 Scrivere un'equazione che esprima $\theta(t)$ per il piatto di un giradischi che ruota uniformemente a 33 giri/min. Usare il consueto sistema di coordinate con \mathbf{k} rivolto verso l'alto e il piano xy orizzontale, e porre $\theta_0 = 0$.
- 12.12 Un ingranaggio comincia a girare con un'accelerazione angolare costante di modulo 0.21 rad/s^2 . Qual è la sua velocità angolare dopo che ha compiuto (a) 1 giro, (b) 2 giri, (c) 4 giri?
- 12.13 Una ruota gira intorno a un asse orizzontale fisso che è allineato nella direzione est-ovest. Se la direzione di \mathbf{k} è verso ovest, la componente della velocità angolare della ruota è data da
- $$\omega_z(t) = 5.8 \text{ rad/s} - (2.2 \text{ rad/s}^2)t$$
- (a) Qual è la componente dell'accelerazione angolare?
 (b) Scrivere un'equazione per $\theta(t)$, con $\theta_0 = 0$.
 (c) Trovare l'istante t_q in cui la velocità angolare si annulla. (d) Qual è la direzione della velocità lineare di una particella che si trova nel punto più alto della ruota prima di t_q e dopo t_q ? (e) Scrivere un'equazione per ω_z^2 in funzione di θ .
- 12.14 Una ruota con asse di rotazione verticale fisso gira con accelerazione angolare costante. Per $t = 0$ la ruota gira a 17 giri/s in senso antiorario per chi guarda da sopra, e 6.2 s dopo gira a 11 giri/s in senso antiorario per chi guarda da sopra. Trovare delle equazioni per (a) $\omega_z(t)$ e (b) $\theta(t)$ usando un sistema di coordinate con l'asse z come asse di rotazione e \mathbf{k} rivolto verso l'alto. (c) Trovare un'equazione per ω_z^2 in funzione di θ . Usare unità SI.
- 12.15 La porta di una casa rivolta a nord si apre verso l'interno, e i cardini sono sul lato ovest della cornice della porta. Supponiamo che \mathbf{k} sia rivolto verso l'alto e passi per i cardini e che $\theta = 0$ corrisponda alla posizione in cui la porta è chiusa. La porta viene aperta a partire dalla quiete in modo che la sua accelerazione angolare sia costante. Nell'istante in cui l'angolo di apertura è di 0.72 rad, la velocità angolare è di 1.4 rad/s. Scrivere delle equazioni per (a) $\omega_z(t)$, (b) $\theta(t)$ e (c) ω_z^2 in funzione di θ .
- 12.16 Ricavare l'Equazione (12.7) eliminando il tempo t tra le Equazioni (12.5) e (12.6).

Paragrafo 12.6

Relazioni tra grandezze lineari e grandezze angolari

- 12.17 La punta della lancetta dei secondi di un orologio è a 93 mm dall'asse di rotazione. Qual è il modulo della velocità lineare della punta?
- 12.18 (a) Determinare il modulo della velocità angolare della Terra nel moto di rivoluzione intorno al Sole in rad/s.
 (b) Determinare il modulo della velocità lineare del centro della Terra rispetto al Sole. La distanza Terra-Sole è di $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$.
- 12.19 Un bambino gira su una giostra a 1.4 m dall'asse di rotazione. (a) Determinare i moduli delle componenti tangenziale e radiale dell'accelerazione lineare del bambino nell'istante in cui la velocità angolare della giostra ha un modulo di 0.34 rad/s e l'accelerazione angolare ha un modulo di 0.18 rad/s^2 . (b) Qual è il

modulo della velocità lineare del bambino e qual è il modulo della sua accelerazione lineare?

- 12.20 Le ruote A e C sono connesse dalla cinghia B che non slitta (Figura 12.24); $R_A = 250 \text{ mm}$ e $R_C = 410 \text{ mm}$. Trovare la velocità angolare della ruota A nell'istante in cui la velocità angolare della ruota C è 1.7 rad/s .

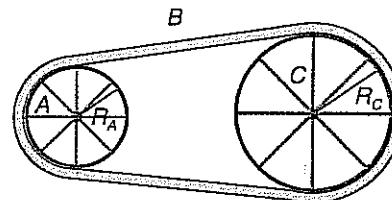


Figura 12.24 Esercizio 12.20: le ruote A e B connesse dalla cinghia B .

Paragrafo 12.7

Energia cinetica di rotazione: il momento di inerzia

- 12.21 Verificare che la grandezza $\frac{1}{2} I \omega^2$ (a) ha le dimensioni di un'energia e (b) nel SI si misura in J.
- 12.22 Il momento di inerzia di una mola rispetto al suo asse di rotazione è di $0.11 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. (a) Qual è l'energia cinetica della mola quando ruota con una velocità angolare di 28 rad/s? (b) Qual è l'energia cinetica se si raddoppia la velocità angolare, portandola a 56 rad/s?
- 12.23 Una ruota che gira su un asse fisso ha un'energia cinetica di 29 J quando la sua velocità angolare è di 13 rad/s. Qual è il momento di inerzia della ruota rispetto all'asse di rotazione?
- 12.24 Un sasso di massa $m = 0.68 \text{ kg}$ è legato a uno spago di massa trascurabile e viene fatto girare su una circonferenza orizzontale di raggio $R = 0.84 \text{ m}$ in modo che il periodo del moto sia $T = 0.39 \text{ s}$. Determinare l'energia cinetica del sasso in due modi.
 (a) Trattando il sasso come una particella di massa m e velocità lineare $v = 2\pi R/T$. (b) Trattando il sasso come un sistema rotante di momento di inerzia $I (= mR^2)$ e velocità angolare $\omega = 2\pi/T$. (c) Confrontare le due risposte.

Paragrafo 12.8

Il momento di inerzia

- 12.25 Consideriamo l'insieme di quattro punti materiali rappresentato nella Figura 12.25. I punti materiali sono contenuti nel piano xy e sono connessi da asti di massa trascurabile. Determinare il momento di inerzia rispetto (a) all'asse x (I_x), (b) all'asse y (I_y) e (c) all'asse z (I_z).

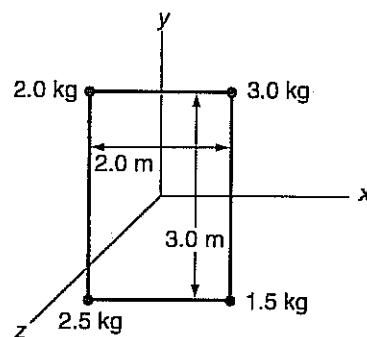


Figura 12.25 Esercizio 12.25: le particelle sono contenute nel piano xy , e il rettangolo è centrato sull'origine.

(Si osservi che $I_z = I_x + I_y$. Questa equazione è nota come *teorema della figura piana*. Come suggerisce il nome, il teorema è valido soltanto se il sistema ha spessore trascurabile, così da poter essere considerato contenuto in un piano, come il piano xy . La configurazione della Figura 12.25 soddisfa questo criterio e verifica il teorema della figura piana. Si veda il Problema 12.7.)

- 12.26** Si trovi il momento di inerzia della configurazione rappresentata nella Figura 12.11 rispetto a un asse passante (a) per i punti materiali 3 e 8 e (b) per i punti materiali 2 e 8.
- 12.27** Una porta ha un'altezza di 2.1 m, una larghezza di 1.1 m, uno spessore di 42 mm e una densità uniforme di $0.88 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Qual è il momento d'inerzia della porta rispetto a un asse passante per i suoi cardini?
- 12.28** (a) Si stimi il momento di inerzia di un uomo in piedi con le braccia lungo i fianchi rispetto a un asse verticale passante per il suo centro di massa. L'uomo è alto 1.8 m e ha una massa di 73 kg. Si tratti l'uomo come un cilindro circolare retto di densità $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.
 (b) Si stimi il momento di inerzia dell'uomo rispetto al medesimo asse, se egli tiene le braccia aperte orizzontalmente; si trattino le braccia come aste sottili.
- 12.29** Trovare il momento di inerzia rispetto all'asse z della lastra sottile di forma triangolare e di densità uniforme rappresentata nella Figura 12.26, ed esprimere in termini della massa M e delle dimensioni a e b .

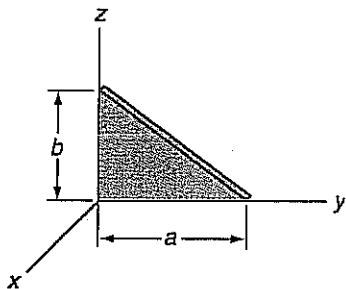


Figura 12.26 Esercizio 12.29.

- 12.30** Esprimere in termini della massa M e del raggio R il momento di inerzia rispetto all'asse z del cilindro circolare retto rappresentato nella Figura 12.27. Il cilindro è pieno e ha densità uniforme.
- 12.31** Servendosi della Tabella 12.2, trovare il momento di inerzia di una sfera piena di densità uniforme, massa M e raggio r_0 rispetto a un asse che passa a una distanza $\frac{1}{2}r_0$ dal centro. Esprimere la risposta in termini di M e di r_0 .
- 12.32** (a) Determinare la densità della Terra ($m_t = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_t = 6.4 \text{ Mm}$), ammettendo che la sua densità sia

uniforme, e confrontare la risposta con la densità media delle rocce superficiali ($\rho = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$). (b) Stimare il momento di inerzia della Terra rispetto a un asse passante per il suo centro nell'ipotesi di densità uniforme. (c) In base alla risposta data alla parte (a), la stima effettuata nella parte (b) costituisce una sopravalutazione o una sottovalutazione? Spiega.

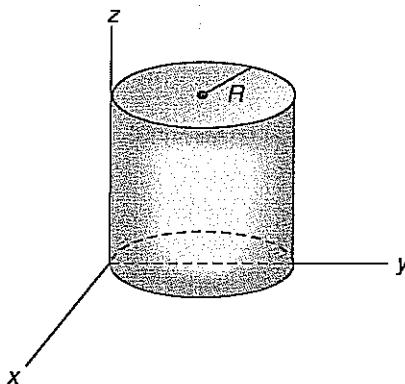


Figura 12.27 Esercizio 12.30.

Paragrafo 12.9 Rotolamento di un corpo rigido

- 12.33** Una ruota di raggio 340 mm rotola in linea retta senza scivolare. Determinare, nell'istante in cui il centro della ruota ha una velocità lineare di 1.4 m/s, (a) la velocità angolare della ruota intorno al suo centro e (b) la velocità lineare di una particella che si trova nel punto più alto della ruota.
- 12.34** (a) Qual è l'energia cinetica di una boccia da bowling di massa 8.2 kg quando essa rotola senza strisciare e la velocità lineare del suo centro è di 1.7 m/s? (b) Quale frazione dell'energia cinetica corrisponde alla rotazione intorno al centro di massa e quale frazione corrisponde alla traslazione del centro di massa?
- 12.35** Un cilindro cavo di massa 0.83 kg (raggio esterno = 96 mm, raggio interno = 75 mm) rotola senza strisciare giù per un piano inclinato che forma un angolo di 12° con l'orizzontale. Trascurando gli effetti dissipativi, determinare (a) la velocità lineare e (b) la velocità angolare del cilindro dopo che ha percorso rotolando 6.7 m a partire dalla quiete.
- 12.36** I corpi elencati sotto rotolano senza strisciare. In ciascun caso trovare il rapporto tra energia cinetica di rotazione intorno al centro ed energia cinetica totale: (a) un cilindro cavo, (b) un cilindro pieno, (c) una sfera cava, (d) una sfera piena. Le densità sono in tutti i casi uniformi.
- 12.37** Si stimi l'energia cinetica di un Frisbee subito dopo che è stato lanciato. Quale frazione dell'energia stimata è da attribuirsi alla rotazione del disco intorno al suo centro di massa?

PROBLEMI

- 12.1** Una ruota che gira intorno all'asse z con accelerazione angolare costante ha le seguenti coordinate angolari: $\theta = 0.0$ per $t = 0$; $\theta = -3.8 \text{ rad}$ per $t = 1.0 \text{ s}$; e $\theta = -5.0 \text{ rad}$ per $t = 2.0 \text{ s}$. (a) Determinare α_z e ω_{z0} .
 (b) Scrivere delle equazioni per $\omega_z(t)$ e per $\theta(t)$.
- 12.2** (a) Calcolare il modulo della velocità lineare e il modulo dell'accelerazione lineare di un albero rispetto all'asse di rotazione della Terra. La latitudine dell'albero è di 55° e il raggio della Terra è di 6.37 Mm. (b) Introdotto un sistema di coordinate con l'origine in corrispondenza

dell'albero, e gli assi i , j e k rivolti rispettivamente a est, a nord e verso l'alto, determinare le componenti cartesiane della velocità lineare e dell'accelerazione lineare.

- 12.3 Si immagini di suddividere l'energia cinetica della Terra rispetto al Sole in due parti: una da attribuirsi al moto orbitale del centro di massa della Terra, e l'altra da attribuirsi alla rotazione di questa intorno al proprio asse. Si calcolino e si confrontino queste due energie, ammettendo che la Terra abbia densità uniforme. La massa della Terra e il suo raggio sono rispettivamente 6.0×10^{24} kg e 6.4×10^6 m. Il raggio dell'orbita della Terra è di 1.5×10^{11} m.

- 12.4 Un'estremità di un'asse omogenea di lunghezza L è tenuta fissa da un cardine privo di attrito (Figura 12.28). All'asse viene data una leggera spinta in modo che, dalla posizione verticale, essa cade, girando intorno al cardine, per effetto della gravità. Nell'istante in cui l'asse passa per la posizione orizzontale, determinare (a) il modulo della sua velocità angolare, (b) il modulo della velocità lineare del suo centro, (c) la componente radiale dell'accelerazione lineare del suo centro, (d) il modulo della velocità lineare della sua estremità libera. Esprimere le risposte in termini di L e di g .

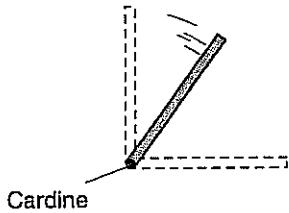


Figura 12.28 Problema 12.4.

- 12.5 *Il raggio di girazione.* Il raggio di girazione k di un corpo rispetto a un asse è definito da

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

dove I è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse ed M è la sua massa. Ciò significa che, se tutta la massa del corpo fosse concentrata a una distanza dall'asse pari al raggio di girazione, il momento di inerzia che ne risulterebbe sarebbe uguale a quello effettivo del corpo. (a) Determinare i raggi di girazione dei corpi rappresentati nella Tabella 12.2 rispetto agli assi ivi indicati. (b) Scrivere un'equazione che esprima la velocità del corpo che rotola nell'Esempio 12.8 in funzione del suo raggio di girazione invece che della sua massa e del suo momento di inerzia.

- 12.6 *Il teorema della figura piana.* Consideriamo un corpo di spessore trascurabile che, come quello della Figura 12.29, sia contenuto nel piano xy . Si dimostri che

$$I_z = I_x + I_y$$

ove I_x , I_y e I_z sono i momenti di inerzia del corpo rispetto agli assi x , y e z , rispettivamente.

- 12.7 Si esprima il momento di inerzia di un sottile disco circolare di densità uniforme rispetto a un asse passante per un diametro, in funzione della massa e del raggio del disco. Si proceda in due modi: (a) calcolando direttamente l'integrale dell'Equazione (12.14) e (b) usando il teorema della figura piana (Problema 12.6).

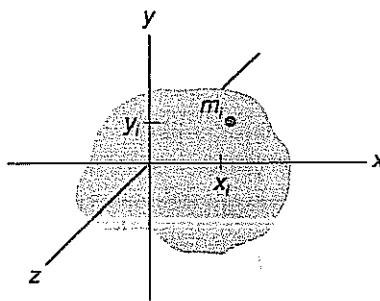


Figura 12.29 Problema 12.6.

- 12.8 Si rammenti che il momento di inerzia di una porta omogenea di altezza h , larghezza ℓ , massa M (e di spessore trascurabile) rispetto a un asse passante per i cardini è $M\ell^2/3$. Usando il teorema degli assi paralleli e il teorema della figura piana (Problema 12.6), determinare il momento di inerzia della porta rispetto a un asse passante per il suo centro e perpendicolare al battente. (Si veda la Tabella 12.2.)

- 12.9 Una sfera omogenea di raggio 26 mm e massa 0.175 kg rotola senza strisciare giù per un piano inclinato partendo da ferma. Allorché la sfera è scesa per un dislivello di 130 mm, la velocità lineare del suo centro è di 1.3 m/s. Qual è il momento di inerzia della sfera rispetto a un suo diametro?

- 12.10 Si determini, in funzione del dislivello h , la velocità lineare v di un carrello che scende lungo un pendio partendo da fermo. Il telaio del carrello ha una massa M_t , ciascuna delle quattro ruote ha una massa m , e la massa totale del carrello è $M = M_t + 4m$. Si trascurino gli attriti che tendono a ridurre l'energia meccanica del carrello. Le ruote rotolano senza strisciare e possono essere trattate come dischi omogenei. (a) Si determini la velocità lineare in funzione del rapporto m/M . (b) Si confrontino le velocità lineari quando m/M è pari a 0.05 e quando è pari a 0.15.

- 12.11 Un blocco di massa m è attaccato a un filo di massa trascurabile, che è avvolto intorno a un cilindro omogeneo di massa M e raggio R_0 (Figura 12.30). Il cilindro è libero di girare, con attrito trascurabile, intorno a un asse orizzontale fisso passante per il suo centro. Dopo che il blocco è sceso di un tratto verticale h a partire dalla quiete, trovare (a) la velocità lineare del centro del blocco e (b) la velocità angolare del cilindro rispetto al suo asse di rotazione.

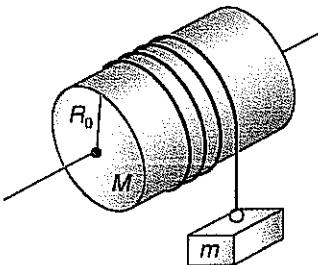


Figura 12.30 Problema 12.11.

- 12.12 Si stimi la velocità lineare del centro di uno yo-yo di massa M e raggio R_2 dopo che è caduto a partire dalla quiete di un tratto verticale h , srotolando lo spago (Figura 12.31). Lo spago ha massa e diametro trascurabili ed è avvolto intorno a un asse di raggio R_1 . Si trascuri il momento di inerzia di quest'asse, e si tratti lo yo-yo

come un disco omogeneo. Si confronti la risposta per il caso in cui $R_2/R_1 = 5$ con la velocità di caduta libera dalla stessa altezza.

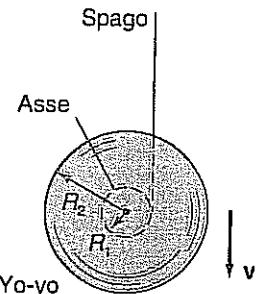


Figura 12.31 Problema 12.12.

- 12.13** Consideriamo un vagoncino delle montagne russe nell'istante in cui è a metà della salita in un giro della morte, come mostra la Figura 12.32. La velocità lineare del vagoncino è di 13 m/s verso l'alto, il raggio dell'anello è di 5.3 m, e gli attriti che tendono a ridurre l'energia meccanica del vagoncino sono trascurabili. Determinare il modulo e la direzione (a) della velocità angolare del vagoncino, (b) della sua accelerazione angolare, (c) della sua accelerazione lineare.

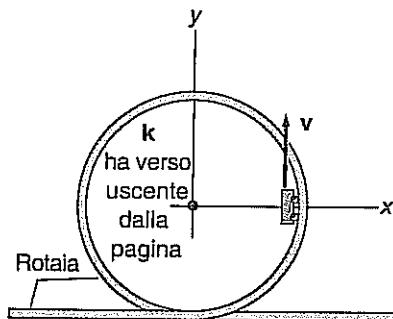


Figura 12.32 Problema 12.13.

- 12.14** Nel prossimo capitolo mostreremo che il momento di inerzia è una misura della resistenza che un corpo oppone alla variazione della propria velocità angolare. Un modo in cui un giocatore di baseball può accrescere la rapidità della propria battuta è quello di ridurre il momento di

inerzia della mazza. Ciò può essere fatto «accorciando» ossia afferrando la mazza più vicino al suo centro di massa. (a) Si tratti una mazza come un bastone di sezione costante, di massa M e lunghezza ℓ , e si consideri la rotazione intorno a un asse perpendicolare alla sua lunghezza e passante per un punto che è a distanza h una delle estremità (Figura 12.33). Si dimostri che $I = M(\ell^2/3 - \ell h + h^2)$. (b) Si costruisca un grafico in funzione di h per valori di h compresi tra zero e $\frac{1}{2}\ell$. Si riportino circa sei punti e si tracci una curva che li congiunga.

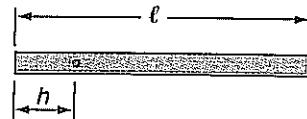


Figura 12.33 Problema 12.14.

- 12.15** Supponiamo che una scodella semisferica di raggio r_0 ruoti con velocità angolare costante θ intorno al suo asse di simmetria verticale (Figura 12.34). Se una biglia p sulla superficie interna della scodella è in quiete rispetto alla superficie a una distanza R dall'asse, essa rimane quiete, sempre rispetto alla superficie. Dimostrare che allora

$$R = \sqrt{r_0^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$$

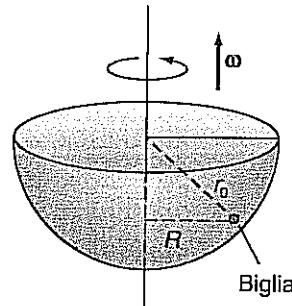


Figura 12.34 Problema 12.15.

DINAMICA DEL MOTO ROTATORIO E LEGGI GENERALI DEL MOTO DEI SISTEMI

13.1 INTRODUZIONE

Il moto rotatorio è estremamente comune in natura: elettroni, nuclei e molecole, ruote, ingranaggi e pulegge, pianeti, stelle e galassie, tutti ruotano. Ma che cosa fa sì che una ruota cominci a girare? E quando essa gira, che cosa la fa fermare? Il momento di una forza che si esercita sulla ruota fa variare la sua velocità angolare proprio come una forza fa variare la velocità lineare di un corpo. Una volta che una ruota è stata posta in rotazione, essa tende a continuare a girare. Ma i momenti dovuti all'attrito nei cuscinetti e alla resistenza dell'aria la rallentano e finiscono per fermarla. Il fatto che la ruota tenda a continuare a girare è una prova del fatto che al moto rotatorio è associata una grandezza analoga alla quantità di moto associata al moto traslatorio: essa è il momento angolare o momento della quantità di moto. Il momento angolare ha un ruolo centrale nello studio della dinamica rotatoria. Vedremo come il momento angolare totale e la quantità di moto totale di un sistema entrino in due equazioni vettoriali che sono il compendio dei principi della dinamica e che quindi saranno sempre condizioni necessarie nella descrizione di un qualunque sistema di punti materiali. Vedremo anche come tali equazioni siano sufficienti per la descrizione del moto dei corpi rigidi. Definiremo anche, estendendo i concetti introdotti per il punto materiale, il lavoro compiuto dalle forze, la potenza e l'energia meccanica nel caso dei sistemi di punti materiali. In sostanza, arriveremo a ricavare le leggi generali che governano il moto dei sistemi di punti materiali: le equazioni cardinali della meccanica e la conservazione dell'energia. Cominciamo a introdurre il momento angolare di un punto materiale.

13.2 MOMENTO ANGOLARE DI UN PUNTO MATERIALE

Nel Paragrafo 10.4 abbiamo definito la quantità di moto di un punto materiale come $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, dove m è la massa del punto materiale e \mathbf{v} la sua velocità. Abbiamo visto che questo concetto è di grande utilità, specialmente quando viene esteso applicandolo ai sistemi di punti materiali e ai corpi continui. Altrettanto utile è l'analogia grandezza rotatoria, il *momento angolare*.

Definizione del momento angolare. Definiamo il momento angolare ℓ di un punto materiale rispetto a un punto di riferimento O (detto anche "polo") come

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (13.1)$$

Definizione del momento angolare.

dove \mathbf{r} è il vettore posizione del punto materiale misurato a partire da O e \mathbf{p} è la sua quantità di moto, come mostra la Figura 13.1. Essendo definito come un prodotto vettoriale, il momento angolare è ovviamente una grandezza vettoriale. Esso è perpendicolare al piano contenente \mathbf{r} e \mathbf{p} , e il suo verso è definito dalla regola della mano destra (Paragrafo 11.6). Le dimensioni del momento angolare sono [massa] [lunghezza]² [tempo]⁻¹ e la relativa unità di misura SI è il $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. Il modulo ℓ del momento angolare può essere scritto in diversi modi equivalenti

$$\ell = r v \sin \phi = r m v \sin \phi = r_{\perp} p = r p_{\perp} \quad (13.2)$$

Modulo del momento angolare.

dove ϕ è l'angolo compreso tra \mathbf{r} e \mathbf{p} (o \mathbf{v}), e dove $r_\perp = r \sin \phi$ e $p_\perp = p \sin \phi$. Dal momento che la definizione di ℓ contiene \mathbf{r} , il valore di ℓ dipende dal punto O rispetto al quale viene calcolato. La scelta di questo punto è decisiva per rendere il momento angolare una grandezza utile. Ogni qualvolta si discute di un momento angolare, si deve aver ben chiaro in mente il punto rispetto al quale esso viene calcolato.

Punto materiale che si muove su una traiettoria circolare. Un caso semplice e importante è quello di un punto materiale che si muove lungo una circonferenza di raggio R . Determiniamo il momento angolare rispetto al centro della circonferenza, cosicché $r = R$ (Figura 13.2). Poiché nel moto circolare \mathbf{v} è perpendicolare a \mathbf{r} in ogni punto della traiettoria, $\phi = 90^\circ$ in ogni punto. Dall'Equazione (13.2),

$$\ell = Rmv \sin 90^\circ = Rmv$$

Il modulo del momento angolare per un punto materiale in moto circolare.

Momento angolare di un punto materiale in moto circolare.

Per un moto circolare, $v = \omega R$, e quindi $\ell = Rm(\omega R)$, ossia

$$\ell = mR^2\omega$$

Il verso di ℓ dipende dal senso della rotazione. Nella Figura 13.2, i vettori \mathbf{r} e \mathbf{p} sono contenuti nel piano xy , il che significa che ℓ giace sull'asse z . Il verso di ℓ sull'asse z (se cioè punta verso $+z$ o verso $-z$) è determinato dalla regola della mano destra. Se le quattro dita chiuse della mano destra indicano il senso di rotazione che porta \mathbf{r} a sovrapporsi a \mathbf{p} , il pollice disteso indica la direzione di ℓ . Quando il moto è in senso antiorario (se visto dalla direzione $+z$), ℓ è rivolto verso $+z$ (ℓ_z è positiva), e quando il moto è in senso orario, ℓ è rivolto verso $-z$ (ℓ_z è negativa). Dal momento che ciò corrisponde alla convenzione per il segno di ω_z , possiamo scrivere ℓ come

$$\ell = \ell_z \mathbf{k} = mR^2\omega_z \mathbf{k} \quad (13.3)$$

Se il moto è circolare uniforme, ω_z è costante, e di conseguenza anche ℓ , è costante.

Esempio 13.1

Determinare il modulo e la direzione, rispetto al Sole, del momento angolare della Terra dovuto al suo moto orbitale intorno al Sole. Il raggio orbitale della Terra è $R = 1.5 \times 10^{11}$ m, e la sua massa è $m_t = 6.0 \times 10^{24}$ kg.

Soluzione La Terra compie una rivoluzione (2π rad) all'anno ($T = 365$ giorni), e quindi la sua velocità angolare $\omega = 2\pi/T$ rispetto al Sole è

$$\omega = \frac{2\pi}{(365 \text{ giorni})(24 \text{ h/giorno})(3600 \text{ s/h})} = 2.0 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

Il modulo ℓ del momento angolare orbitale della Terra rispetto al Sole è

$$\ell = m_t R^2 \omega = (6.0 \times 10^{24} \text{ kg})(1.5 \times 10^{11} \text{ m})^2 (2.0 \times 10^{-7} \text{ rad/s}) = 2.7 \times 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Immaginando di guardare il sistema solare dalla Stella Polare, la Terra ruota intorno al Sole in senso antiorario. Quindi la direzione di ℓ è perpendicolare al piano dell'orbita e rivolta approssimativamente verso la Stella Polare.

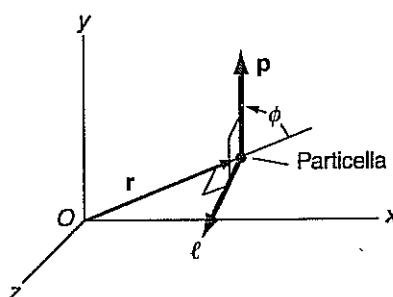


Figura 13.1 Il momento angolare di una particella rispetto all'origine O è $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, dove \mathbf{r} è il vettore posizione della particella e $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ è la sua quantità di moto. Quindi ℓ è perpendicolare al piano che contiene \mathbf{r} e \mathbf{p} .

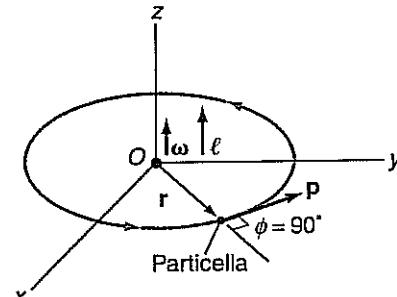


Figura 13.2 Per una particella in moto circolare intorno all'origine nel piano xy , il momento angolare relativo all'origine è $\ell = mR^2\omega_z \mathbf{k}$.

Punto materiale che si muove in linea retta. Per strano che possa apparire di primo acchito, un punto materiale che si muove in linea retta ha un momento angolare. La Figura 13.3 mostra un punto materiale che si muove nel piano xy lungo una retta parallela all'asse x . In base all'Equazione (13.2), il modulo del momento angolare della particella rispetto all'origine O è

$$\ell = rp \sin \phi = mvr_{\perp} \quad (13.4)$$

dove r_{\perp} è la distanza della traiettoria della particella da O . Quindi un punto materiale che si muove su una traiettoria rettilinea ha un momento angolare diverso da zero rispetto a qualunque punto che non si trovi sulla sua traiettoria. Se il modulo della velocità della particella è costante, anche il suo momento angolare è costante, ma se il punto materiale ha un moto rettilineo accelerato, il momento angolare varia nel tempo. Per la regola della mano destra, la direzione di ℓ per la particella della Figura 13.3 è quella di $-z$.

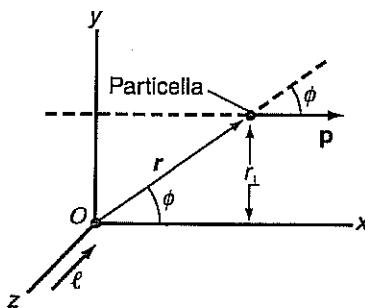


Figura 13.3

Per una particella che si muove in linea retta, ℓ rispetto a O è $\ell = r_{\perp}mv$, ove r_{\perp} è la distanza della traiettoria della particella da O .

Esempio 13.2

Supponi di trovarsi in un frutteto e che una mela di massa $m = 0.17 \text{ kg}$ cada da un albero da un'altezza di 2.6 m e tocchi terra a 3.1 m dal punto in cui ti trovi. (a) Servendoti del sistema di coordinate rappresentato nella Figura 13.4, determina il momento angolare della mela in caduta rispetto all'origine posta ai tuoi piedi. (b) Ammettendo che $t = 0$ corrisponda all'istante in cui la mela comincia a cadere e trascurando la resistenza dell'aria, calcola ℓ nell'istante prima che la mela tocchi terra.

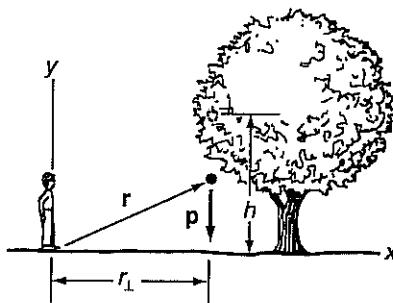


Figura 13.4

Esempio 13.2: una mela cade da un albero. $+z$ ha verso uscente dalla pagina.

Soluzione

(a) Con riferimento alla Figura 13.4, la regola della mano destra indica che ℓ è rivolto nella direzione z . Siccome $t = 0$ corrisponde all'istante in cui la mela comincia a cadere, $v = gt$, e

$$\begin{aligned} \ell &= -(r_{\perp}mv)\mathbf{k} = -(r_{\perp}mgt)\mathbf{k} \\ &= -[(3.1 \text{ m})(0.17 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)t]\mathbf{k} = -[(5.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2)t]\mathbf{k} \end{aligned}$$

(b) La mela tocca terra all'istante t_1 tale che $h = \frac{1}{2}gt_1^2$, quindi

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(2.6 \text{ m})}{(9.8 \text{ m/s}^2)}} = 0.73 \text{ s}$$

Nell'istante prima che la mela tocchi terra,

$$\ell = -[(5.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2)(0.73 \text{ s})]\mathbf{k} = -(3.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$$

■

Relazione tra momento angolare e momento delle forze applicate. Nel Paragrafo 10.4 abbiamo espresso la seconda legge di Newton per un punto materiale in termini della sua quantità di moto \mathbf{p} : $\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, dove $\Sigma \mathbf{F}$ è la forza risultante che

agisce sulla particella. Ora ricaveremo l'analoga espressione per il moto rotatorio che connette il momento risultante $\Sigma\tau$ applicato a un punto materiale al momento angolare ℓ della particella.

La derivata del momento angolare rispetto al tempo è

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

Utilizzando la regola per la derivazione di un prodotto si ha

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{dr}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Il primo dei due prodotti vettoriali a secondo membro di questa equazione è nullo, ché $dr/dt = \mathbf{v}$ e $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. I vettori \mathbf{v} ed $m\mathbf{v}$ sono paralleli, e quindi il loro prodotto vettoriale deve essere nullo. Pertanto

$$\frac{d\ell}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Usando la seconda legge di Newton per una particella, $\Sigma\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, si ha

$$\frac{d\ell}{dt} = \mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$$

La grandezza $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ è il momento risultante $\Sigma\tau$ applicato alla particella rispetto a un sistema di riferimento (Paragrafo 11.6): $\Sigma\tau = \mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$. Quindi

L'analogo rotatorio della seconda legge di Newton per un punto materiale.

$$\Sigma\tau = \frac{d\ell}{dt}$$

(1)

Nella seconda legge di Newton, $\Sigma\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, \mathbf{p} deve essere misurata relativamente a un sistema di riferimento inerziale. Analogamente, perché l'Equazione (13.5) sia valida, ℓ deve essere misurato rispetto a un sistema di riferimento inerziale. Nella deduzione della (13.5) si è supposto che dr/dt fosse la velocità del punto e ciò ha portato a $dr/dt \times \mathbf{p}$ fosse nullo. Questo è certamente vero se il punto O è un punto fisso nel sistema di riferimento in cui si misura la velocità. Se O è un punto che si muove rispetto a un sistema di riferimento scelto, allora potrà essere definito da un vettore di posizione \mathbf{r}_O e il momento angolare fatto rispetto ad O si scriverà

$$\ell = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{p}$$

e quindi procedendo come sopra si trova

$$\frac{d\ell}{dt} = \mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} \times \mathbf{p} \quad (13.5')$$

Se il punto O è fisso la (13.5') si riduce alla (13.5), la quale quindi è valida nei sistemi di riferimento inerziali e se il punto di riferimento per il calcolo dei momenti è fissa in tali sistemi. Nel Paragrafo 13.3 si mostrerà che essa è ancora valida se tale punto di riferimento coincide con il centro di massa del sistema.

Esempio 13.3

Calcolare separatamente il primo membro e il secondo membro dell'Equazione (13.5) per la mano destra dell'Esempio 13.2 e mostrare in tal modo che l'equazione è valida in questo caso.

Soluzione

Cominciamo a valutare il primo membro dell'Equazione (13.5). Il modulo della forza risultante applicata alla mela (trascurando la resistenza dell'aria) è mg , e il braccio di questa forza rispetto all'origine è r_{\perp} (vedi Figura 13.4). Il modulo del momento risultante è $r_{\perp}mt$, e la regola della mano destra stabilisce che la sua direzione è $-\mathbf{k}$. Pertanto

$$\Sigma\tau = -(r_{\perp}mg)\mathbf{k}$$

13.3 Il Momento angolare totale di un sistema di punti materiali e le equazioni cardinali della meccanica

Ora valutiamo il secondo membro dell'Equazione (13.5). Dall'Esempio 13.2 si ha $\ell = -(r_{\perp} mgt)\mathbf{k}$, quindi

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt} [-(r_{\perp} mgt)\mathbf{k}] = -(r_{\perp} mg)\mathbf{k}$$

che coincide con quanto si è ottenuto per il primo membro. ■

13.3 IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI E LE EQUAZIONI CARDINALI DELLA MECCANICA

L'Equazione (13.5) stabilisce che il momento risultante applicato a una singola punto materiale rispetto a un certo punto è pari alla rapidità di variazione del momento angolare del punto materiale rispetto a quel punto. Ora applichiamo questa equazione a un sistema di punti.

Il momento angolare totale \mathbf{L} di un sistema di n punti materiali rispetto a un punto è definito come *la somma vettoriale dei singoli momenti angolari di tutti i punti materiali rispetto a quello stesso punto*:

$$\mathbf{L} = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n = \sum \ell_i \quad (13.6)$$

Momento angolare totale.

dove ℓ_i è il momento angolare della i -esimo punto materiale. Per la regola di derivazione della somma, la derivata temporale del momento angolare totale è

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \frac{d\ell_i}{dt} \quad (13.7)$$

Ora usiamo l'Equazione (13.5) per sostituire $d\ell_i/dt$, ma modifichiamo leggermente la notazione. In precedenza abbiamo usato il simbolo $\Sigma \tau$ per il momento risultante (cioè per la somma vettoriale dei momenti applicati al singolo punto). Nell'Equazione (13.7) la sommatoria è estesa ai vari punti, e quindi, per evitare confusioni, scriviamo il momento risultante applicato al punto i semplicemente come τ_i . Con ciò si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \tau_i \quad (13.8)$$

La somma dei momenti risultanti applicati a tutti i punti materiali di un sistema, $\sum \tau_i$, può essere suddivisa in due parti: la somma dei momenti agenti sui punti del sistema a causa di forze che esse esercitano l'una sull'altra (*il momento risultante interno*), e la somma dei momenti agenti sui punti del sistema a causa di forze esercitate su di esse da corpi esterni al sistema (*il momento risultante esterno*). Ora dimostreremo che la terza legge di Newton implica che il momento risultante interno sia uguale a zero. Per l'interazione tra i punti i e j (Figura 13.5), la terza legge di Newton stabilisce che $F_{ij} = -F_{ji}$, e che *la direzione delle due forze è quella della congiungente i due punti*. Vale a dire, che le due forze sono uguali e opposte e hanno la stessa retta d'azione. Dal momento che le due forze hanno la stessa retta d'azione, sono uguali i loro bracci r_{\perp} rispetto al punto O , e i moduli dei due momenti sono anch'essi uguali. Se si utilizza la regola della mano destra per determinare la direzione dei momenti di Figura 13.5, si vede che questi sono opposti: $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$. Se i due momenti vengono sommati, la loro risultante è nulla, e ciò è vero per qualsiasi punto di riferimento che si voglia usare. Il medesimo discorso può essere fatto per tutte le coppie di momenti dovuti alle interazioni tra tutte le coppie di punti interne al sistema. Pertanto, nell'Equazione (13.8) $\sum \tau_i$ si riferisce ai momenti dovuti alle sole forze esterne:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

(13.9)

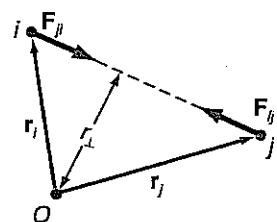


Figura 13.5
I momenti prodotti dall'interazione tra due particelle sono uguali e opposti perché le forze di interazione obbediscono alla terza legge di Newton.

L'analogo rotatorio della seconda legge di Newton per un sistema di punti materiali.

dove si è omesso per brevità l'indice i . Sempre per amor di brevità, spesso in $\sum \tau_{\text{ext}}$ si omette l'indice «ext». Ma si dovrebbe tenere ben presente che *soltanto i momenti esterni possono far variare il momento angolare di un sistema*.

Per esempio, nel sistema solare i pianeti e il Sole esercitano forze gli uni sugli altri momenti prodotti da queste forze rispetto a qualsiasi punto si elidono a due a due. Il momento angolare del sistema solare rispetto a qualunque punto non è influenzato da momenti prodotti dalle forze che si esercitano tra i pianeti o tra il Sole e qualsiasi pianeta.

L'analogo traslatorio dell'Equazione (13.9) è $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$. Anche per ric

quest'ultima equazione ci eravamo serviti della terza legge di Newton.

Le due equazioni

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \Sigma \tau_{\text{ext}} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt}\end{aligned}\quad (1)$$

Le equazioni cardinali della meccanica.

vengono spesso chiamate le equazioni cardinali della meccanica e sono la "summa dei principi della dinamica". Costituiscono condizione necessaria per qualunque problema dinamico e quindi sono sempre valide, e nel caso di corpi rigidi costituiscono anche condizione sufficiente. Ciò significa che per i corpi rigidi esse sono anche sufficienti a descriverne completamente il moto. Si ricordi, infatti, che i gradi di libertà di un corpo rigido sono sei e, poiché le equazioni cardinali costituiscono un insieme di sei equazioni scalari indipendenti, esse sono sufficienti a determinare i gradi di libertà del sistema in ogni istante.

La seconda di queste equazioni è valida se il punto rispetto al quale si calcolano i momenti delle forze e il momento angolare è fisso. In generale, partendo dalla (1) che vale per ognuno dei punti del corpo, e sommando su tutti i punti, si ottiene

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Sigma \tau_{\text{ext}} - \mathbf{v}_O \times \mathbf{P}$$

Questa è l'espressione più generale della seconda equazione cardinale. Poiché la quantità di moto totale \mathbf{P} si può scrivere in termini del centro di massa come $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_m$ (vedi Paragrafo 10.4), si nota subito che se il punto O coincide con il centro di massa (quindi $\mathbf{v}_O \equiv \mathbf{v}_m$) il prodotto vettoriale $\mathbf{v}_O \times \mathbf{P}$ è uguale a zero. Quindi, se il punto di riferimento al quale si calcolano i momenti è fermo rispetto al sistema di riferimento in cui il centro di massa coincide con il centro di massa, vale la seconda equazione delle (13.10). Questa constatazione è di grande importanza e utilità; infatti permette di descrivere il moto di un qualunque corpo rigido come un moto traslatorio del centro di massa, per descrivere il quale si usa la prima equazione cardinale $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$, e un moto rotatorio attorno al centro di massa, per il quale si usa l'altra equazione cardinale $\Sigma \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$.

È importante notare come per giungere alle equazioni cardinali si sia fatto uso del primo e del secondo principio della dinamica (sistema di riferimento inerziale e validità di $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ per ogni singolo punto materiale del sistema di corpi), sia del terzo principio della dinamica. Quest'ultimo, tuttavia, è stato formulato generalizzandolo al caso di un numero qualunque di punti materiali. Possiamo, quindi, formulare ora il terzo principio della dinamica nel seguente modo: *in un sistema di riferimento inerziale, per un sistema qualunque di corpi, la somma delle forze interne al sistema di corpi e la somma dei momenti delle forze interne al sistema di corpi sono nulli*.

Esempio 13.4

La Figura 13.6 rappresenta un sistema di quattro punti materiali disposti ai vertici di un quadrato di lato $a = 2.3$ m, con il centro nell'origine e contenuto nel piano xy . Ciascun punto ha massa $m = 10$ kg, e il sistema è tenuto insieme da aste rigide di massa trascurabile. Il sistema ruota intorno all'asse z in modo che la sua coordinata angolare θ è data da

$$\theta = 0.8 \text{ rad} - (5.1) \text{ rad/s}t + (1.6 \text{ rad/s}^2)t^2$$

Determinare (a) il momento angolare totale del sistema rispetto all'origine e (b) il momento risultante esterno agente sul sistema rispetto all'origine. (c) Le forze esterne che agiscono sul sistema sono: la forza $\mathbf{F}_2 = -F_i \hat{i}$ applicata alla particella 2 e la forza $\mathbf{F}_4 = F_i \hat{i}$ applicata al punto 4. Determinare le intensità F di queste forze.

Il terzo principio della dinamica per un sistema di corpi.

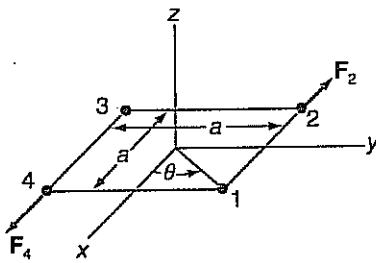


Figura 13.6

Esempio 13.4: un sistema di quattro particelle contenuto nel piano xy e con centro nell'origine ruota intorno all'asse z .

Soluzione

Riconosciamo nell'equazione della coordinata angolare del sistema l'equazione di un moto con accelerazione angolare costante (Paragrafo 12.5), dove $\omega_{z0} = -5.1 \text{ rad/s}$ e $\alpha_z = 3.2 \text{ rad/s}^2$. Pertanto

$$\omega_z = \omega_{z0} + \alpha_z t = -5.1 \text{ rad/s} + (3.2 \text{ rad/s}^2)t$$

(a) Dal momento che il sistema è rigido, ciascun punto percorre una traiettoria circolare, e tutte hanno la stessa velocità angolare e la stessa accelerazione angolare. Inoltre i punti hanno la medesima massa e la medesima distanza dall'origine $\left[r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = a/\sqrt{2} \right]$, cosicché per ciascuna di esse,

$$\ell_z = mr^2\omega_z = m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\omega_z = \frac{1}{2}ma^2\omega_z$$

Poiché vi sono quattro punti, $L_z = 4\ell_z$, ossia

$$\begin{aligned} L_z &= 4\left(\frac{1}{2}ma^2\omega_z\right) = 2ma^2\omega_z = 2ma^2(\omega_{z0} + \alpha_z t) \\ &= 2(1.8 \text{ kg})(2.3 \text{ m})^2[(-5.1 \text{ rad/s}) + (3.2 \text{ rad/s}^2)t] \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbf{L} = [-97 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} + (61 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2)t]\mathbf{k}$$

(b) La componente $\Sigma\tau_z$ del momento risultante esterno è la derivata di L_z rispetto al tempo:

$$\Sigma\tau_z = \frac{d}{dt}[2ma^2(\omega_{z0} + \alpha_z t)] = 2ma^2\alpha_z = 61 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Perciò

$$\Sigma\tau = (61 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

(c) Siccome $\mathbf{r}_2 = \left(-\frac{1}{2}a\mathbf{i} + \frac{1}{2}a\mathbf{j}\right)$ e $\mathbf{r}_4 = \left(\frac{1}{2}a\mathbf{i} - \frac{1}{2}a\mathbf{j}\right)$, i momenti agenti sui punti 2 e 4 rispetto all'origine sono

$$\tau_2 = \left(-\frac{1}{2}a\mathbf{i} + \frac{1}{2}a\mathbf{j}\right) \times (-F\mathbf{i}) = \frac{1}{2}aF\mathbf{k}$$

$$\tau_4 = \left(\frac{1}{2}a\mathbf{i} - \frac{1}{2}a\mathbf{j}\right) \times (F\mathbf{i}) = \frac{1}{2}aF\mathbf{k}$$

dove si è fatto uso delle relazioni $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Sommando questi momenti si ottiene

$$\Sigma\tau_z = \tau_{2z} + \tau_{4z} = \frac{1}{2}aF + \frac{1}{2}aF = aF$$

Perciò

$$F = \frac{\Sigma\tau_z}{a} = \frac{61 \text{ N} \cdot \text{m}}{2.3 \text{ m}} = 26 \text{ N}$$

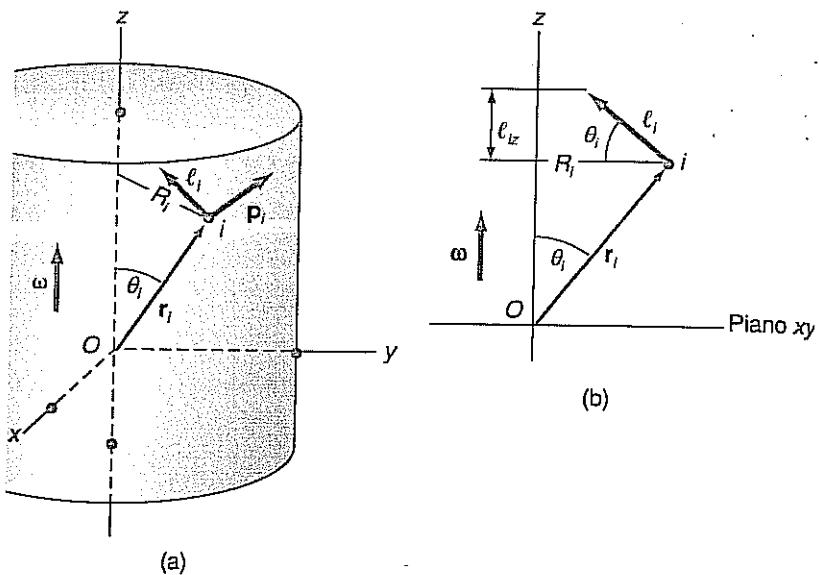
■

13.4 DINAMICA DELLA ROTAZIONE DI UN CORPO RIGIDO INTORNO A UN ASSE FISSO

Il moto rotatorio di un corpo rigido intorno a un asse fisso è di grande interesse pratico. Ora studieremo il momento angolare di un tale corpo e ricaveremo la sua equazione di moto.

Figura 13.7

(a) Quando un corpo rigido ruota intorno all'asse z , la particella i percorre una circonferenza con centro sull'asse. La distanza di i dall'origine O è r_i , mentre la distanza di i dall'asse è $R_i = r_i \sin \theta_i$. (b) Rispetto a O , la componente assiale di ℓ_i è $\ell_{iz} = \ell_i \sin \theta_i = m_i R_i^2 \omega_z$.



Il momento angolare. Consideriamo la relazione tra il momento angolare \mathbf{L} di un corpo rigido rispetto a un punto O sull'asse di rotazione e la velocità angolare del corpo rispetto all'asse. Nel seguito dovremo avere cura di distinguere tra una distanza r da un punto (l'origine O nella Figura 13.7) e una distanza R da un asse (l'asse z nella Figura 13.7). Il momento angolare \mathbf{L} è relativo a un *punto* (come O), mentre la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è relativa a un *asse* (come l'asse z).

La componente z (o componente assiale) del momento angolare di un corpo rigido rispetto a un punto O sull'asse di rotazione è $L_z = (\sum \ell_i)_z = \sum \ell_{iz}$. Per trovare L_z , cominciamo a trovare ℓ_{iz} per la particella i . Nella Figura 13.7a, θ_i è l'angolo compreso tra \mathbf{r}_i e l'asse z , e quindi $R_i = r_i \sin \theta_i$. Il momento angolare della particella i , $\ell_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$, ha sia una componente assiale che una componente radiale. Come risulta dalla figura, \mathbf{r}_i è perpendicolare a \mathbf{p}_i , e $\ell_i = r_i p_i \sin 90^\circ = r_i m_i v_i$. Siccome $v_i = R_i \omega$, $\ell_i = r_i m_i R_i \omega$. Dalla Figura 13.7b si vede che la componente z del momento angolare della particella i è

$$\ell_{iz} = r_i m_i R_i \omega_z \sin \theta_i = m_i R_i (r_i \sin \theta_i) \omega_z = m_i R_i^2 \omega_z$$

Si noti che, essendo R_i e ω_z riferite all'asse, ℓ_{iz} è indipendente dal particolare asse sull'asse in cui si trova l'origine. *Quindi questa espressione è valida qualunque sia l'origine, purché essa si trovi sull'asse.*

Sommando le componenti ℓ_{iz} di tutte le particelle del corpo si ottiene

$$L_z = \sum m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum m_i R_i^2$$

dove si è portato il fattore ω_z fuori dalla sommatoria perché non dipende da i (ω_z è la stessa per tutte le particelle.) La grandezza $\sum m_i R_i^2$ non è altro che il momento d'inerzia I del corpo rispetto all'asse di rotazione (Paragrafo 12.8). Perciò

$$L_z = I \omega_z \quad (13.10)$$

L'Equazione (13.10) è valida per qualunque corpo rigido, ma si riferisce alla sola componente assiale di \mathbf{L} . Risulta che quando un corpo ha un grado sufficiente di simmetria rispetto all'asse, \mathbf{L} è parallelo all'asse stesso. Per esempio, supponiamo che la particella i si trovi dalla parte opposta dell'asse rispetto alla particella j , e che $m_i = m_j$ (Figura 13.8): allora la componente radiale di ℓ_i è uguale e opposta a quella di ℓ_j . Se queste eliscono a coppie delle componenti radiali dei momenti angolari delle particelle si applica in tutto il corpo, la somma delle componenti radiali è nulla, e $\mathbf{L} = L_z \mathbf{k}$. Oltre questo dell'elisione a coppie, vi sono altri casi in cui un corpo dotato di sufficiente simmetria può avere \mathbf{L} parallelo all'asse. Dal momento che $\boldsymbol{\omega}$ è parallela all'asse ($\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$), \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$, per un corpo dotato di sufficiente simmetria rispetto all'asse di rotazione, sono paralleli tra loro, e

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega} \quad (\text{solo per corpi sufficientemente simmetrici}) \quad (13.10)$$

La componente assiale del momento angolare di un corpo rigido rispetto a un qualsiasi punto dell'asse di rotazione.

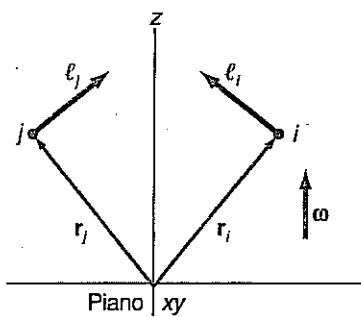


Figura 13.8

Quando le particelle i e j , che sono da parti opposte dell'asse, hanno la medesima massa ($m_i = m_j$), le componenti radiali di ℓ_i e ℓ_j sono uguali e opposte. Se le componenti radiali di ℓ per le varie particelle si elidono nella somma $\mathbf{L} = \sum \ell_i$, allora $\mathbf{L} = L_z \mathbf{k}$ e \mathbf{L} è parallelo a ω .

Se un corpo non ha una simmetria assiale sufficiente perché \mathbf{L} sia parallelo all'asse, allora la direzione di \mathbf{L} ruoterà al ruotare del corpo. Un esempio di questo tipo è una ruota d'automobile «non equilibrata»: in queste condizioni, la ruota tende a oscillare e il momento necessario per mantenerne fisso l'asse di rotazione è esercitato dai cuscinetti dell'assale.

L'analogo traslatorio dell'Equazione (13.12) per un sistema di particelle è $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm}$, dove \mathbf{P} è la quantità di moto totale, M è la massa totale, e \mathbf{v}_{cm} è la velocità del centro di massa (Paragrafo 10.4).

L'equazione di moto. La seconda legge di Newton per un corpo rigido soggetto a un moto traslatorio è $\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm}$. Per trovare l'analogo rotatorio di questa equazione, prendiamo la derivata rispetto al tempo dell'Equazione (13.11):

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} I\omega_z = I \frac{d\omega_z}{dt} = I\alpha_z$$

Abbiamo portato I fuori della derivata (perché il momento di inerzia è costante per un corpo rigido in rotazione intorno a un asse fisso), e abbiamo usato la relazione $d\omega_z/dt = \alpha_z$. La componente z dell'Equazione (13.9) è $\sum \tau_z = dL_z/dt$. In base a quanto scritto sopra, possiamo sostituire dL_z/dt con $I\alpha_z$ ottenendo

$$\boxed{\sum \tau_z = I\alpha_z} \quad (13.13)$$

Questa è l'equazione di moto per un corpo rigido vincolato a ruotare intorno a un asse fisso, ed è conseguenza delle leggi di Newton.

Ora affrontiamo il problema della determinazione del momento assiale τ_z applicato a un corpo rigido rispetto a un punto dell'asse di rotazione del corpo. Nell'aprire una porta siamo guidati dall'esperienza: l'efficacia di una forza in tale operazione dipende da due fattori: (i) la distanza R del punto P di applicazione della forza (il pomello) dalla retta passante per i cardini (l'asse), e (ii) la componente della forza perpendicolare al battente (chiamata *componente tangenziale* F_t , perché è tangente alla traiettoria circolare delle particelle che costituiscono la porta).

Nella Figura 13.9a è rappresentata una forza \mathbf{F} con direzione arbitraria applicata in un punto P di un corpo che può ruotare intorno all'asse z . (Per chiarezza, del corpo è rappresentato soltanto il punto P .) La componente assiale τ_z del momento di \mathbf{F} rispetto all'origine O è

$$\tau_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z$$

Decomponiamo \mathbf{F} in tre forze mutuamente perpendicolari: \mathbf{F}_z parallela all'asse, \mathbf{F}_R diretta radialmente dall'asse verso l'esterno, e \mathbf{F}_t tangente alla traiettoria circolare della particella in P . Ora scriviamo τ_z come

$$\tau_z = [\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_z + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_t)]_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_z)_z + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_R)_z + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_t)_z$$

Applicando la regola della mano destra a $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_z$ e a $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_R$ nella Figura 13.9a, si vede che entrambi i prodotti sono paralleli al piano xy : cioè $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}_z)_z = 0$ e $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}_R)_z = 0$. Soltanto \mathbf{F}_t contribuisce a τ_z . Inoltre, la Figura 13.9b mostra che $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}_t)_z = RF_t$, ossia

$$\tau_z = RF_t$$

L'equazione di moto di un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso.

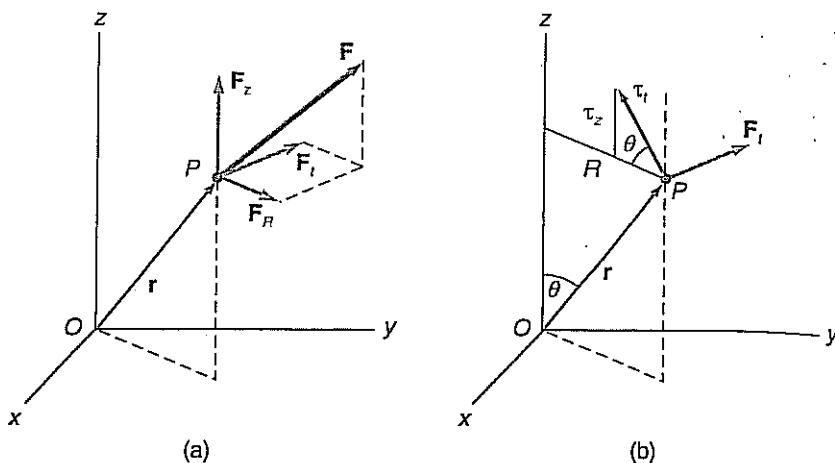
Determinazione del momento assiale di una forza applicata.

Figura 13.9

(a) Per determinare il momento assiale τ_z dovuto a una forza \mathbf{F} di direzione arbitraria, decomponiamo \mathbf{F} in tre forze mutuamente perpendicolari, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_z + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_t$, e osserviamo che $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}_z)_z = 0$ e $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}_R)_z = 0$ per la regola della mano destra.

Soltanto \mathbf{F}_t contribuisce a τ_z .

(b) Il momento dovuto a \mathbf{F}_t è τ_t , e siccome \mathbf{r} e \mathbf{F}_t sono perpendicolari, $\tau_t = rF_t$. Quindi $\tau_z = \tau_t \sin \theta = rF_t \sin \theta = (r \sin \theta) F_t = RF_t$.



Giungiamo alla conclusione che τ_z dipende (i) dalla distanza R del punto P dall'asse di rotazione, (ii) dalla sola componente tangenziale F_t della forza \mathbf{F} . Siccome τ_z dipende da R e da r , il valore di τ_z è lo stesso qualunque sia l'origine purché questa sia sull'asse di rotazione intorno a un asse fisso, è corretto parlare del «momento rispetto all'asse». Infine, perché τ_z abbia l'appropriato segno algebrico, la convenzione adottare per F_t deve essere analoga a quella valida per s , v_t e a_t ; F_t è positiva se produce una rotazione antioraria e negativa se tende a produrre una rotazione oraria.

Osservazioni sul momento di inerzia. Nel Capitolo 12 abbiamo introdotto il momento di inerzia in rapporto all'energia cinetica di rotazione, e in quell'occasione abbiamo rilevato che si tratta dell'analogia rotatoria della massa del corpo. La formazione delle Equazioni (13.11) e (13.13) suggerisce un diverso modo di introdurre il momento di inerzia, e da tale punto di vista risulta più chiara la ragione per cui nel nome compare la parola «inerzia». L'Equazione (13.13) indica che il momento di inerzia è la misura della resistenza che un corpo oppone alla variazione della propria velocità angolare. Per un dato momento risultante esterno, un corpo con un momento di inerzia maggiore subirà un'accelerazione angolare minore.

Esempio 13.5

Si determini il modulo del momento angolare della Terra dovuto alla sua rotazione giornaliera. Questo momento angolare viene chiamato *momento angolare di spin* \mathbf{L}_s della Terra. Si assume che \mathbf{L}_s sia parallelo all'asse della Terra e che la densità di questa sia uniforme. La massa della Terra è di 6.0×10^{24} kg e il suo raggio è di 6.4 Mm.

Soluzione

Il momento di inerzia di una sfera omogenea rispetto a un asse passante per il suo centro è $\frac{2}{5}MR^2$ (Tabella 12.2), e quindi il momento di inerzia della Terra (ammettendo che la sua densità sia uniforme) è $I = [2(6.0 \times 10^{24}) \text{ kg}(6.4 \text{ Mm})^2]/5 = 9.8 \times 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Il modulo della velocità angolare del moto di rotazione giornaliero della Terra è

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(24 \text{ h})(3600 \text{ s/h})} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Il modulo del momento angolare di spin della Terra è

$$\begin{aligned} L_s &= I\omega = (9.8 \times 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}) \\ &= 7.2 \times 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Esempio 13.6

Due forze sono applicate a una porta omogenea come in Figura 13.10. Inizialmente la porta ruota nel senso indicato con una velocità angolare di 0.45 rad/s. Ammettendo che i momenti di rotazione rimangano costanti, si determinino (a) la componente dell'accelerazione angolare della porta, (b) la componente della velocità angolare della porta in funzione del tempo, e (c) la coordinata angolare in funzione del tempo. Si trascuri il momento della forza d'attrito che agisce nei cardini. La massa della porta è $M = 38 \text{ kg}$, e la sua larghezza è $a = 0.88 \text{ m}$. Gli altri dati sono $\phi = 63^\circ$, $F_b = 12 \text{ N}$.

Soluzione

(a) Nella Figura 13.10, supponiamo che l'asse z passi per i cardini, e che $+z$ abbia verso uscente dalla pagina. La componente z del momento risultante rispetto a qualunque punto dell'asse è

$$\Sigma\tau_z = aF_b \sin \phi - \frac{1}{2}aF_c$$

Risolvendo rispetto ad α_z l'Equazione (13.12) si ottiene $\alpha_z = \Sigma\tau_z/I$, dove $I = Ma^2/3$ (Esempio 13.5). Sostituendo il valore di $\Sigma\tau_z$ ricavato sopra, si ha

$$\begin{aligned}\alpha_z &= \frac{3\left(F_b \sin \phi - \frac{1}{2}F_c\right)}{Ma} = \\ &= \frac{3\left[15 \text{ N} \sin 63^\circ - \frac{1}{2}(12 \text{ N})\right]}{(38 \text{ kg})(0.88 \text{ m})} = 0.66 \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

(b) La regola della mano destra applicata alla direzione iniziale di rotazione indicata nella Figura 13.10 comporta che ω_0 abbia verso entrante nella pagina cosicché ω_{z0} è negativa: $\omega_{z0} = -0.45 \text{ rad/s}$. Utilizzando il risultato ottenuto nella parte (a) e l'espressione $\omega_z = \omega_{z0} + \alpha_z t$, si ha

$$\omega_z = -0.45 \text{ rad/s} + (0.66 \text{ rad/s}^2)t$$

(c) Usando l'espressione $\theta = \theta_0 + \omega_{z0}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$ e ponendo uguale a zero la coordinata angolare iniziale θ_0 della porta, si ha

$$\theta = -(0.45 \text{ rad/s})t + (0.33 \text{ rad/s}^2)t^2$$

Esempio 13.7

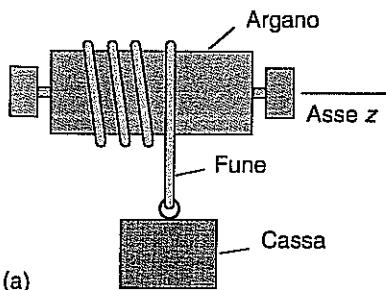
Una cassa è legata a una fune che viene avvolta su un argano, dopo di che la cassa viene lasciata cadere (Figura 13.11a). La massa della cassa è $M_C = 35 \text{ kg}$, la massa e il raggio dell'argano sono $M_A = 94 \text{ kg}$ e $R_0 = 83 \text{ mm}$. Determinare (a) il modulo a dell'accelerazione lineare della cassa e (b) la tensione F_T della fune. L'argano può essere trattato come un cilindro omogeneo di raggio R_0 ; il momento della forza d'attrito nei cuscinetti e la massa della fune sono entrambi trascurabili.

Soluzione

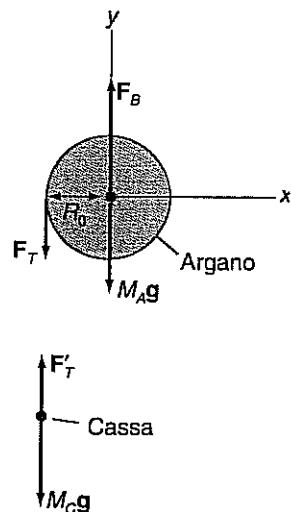
I diagrammi di corpo libero della cassa e dell'argano sono rappresentati nella Figura 13.11b, ove M_Ag è il peso dell'argano, M_Cg è il peso della cassa, F_T è la forza esercitata dalla fune sull'argano, F'_T è la forza esercitata dalla fune sulla cassa, e F_B è la forza esercitata dai cuscinetti sull'argano. Scegliamo un sistema di coordinate orientato come in figura, con $+z$ disposto lungo l'asse dell'argano e in verso uscente dalla pagina. Dal momento che la massa della fune è trascurabile, $|F_T| = |F'_T| = F_T$.

(a) La componente verticale della seconda legge di Newton applicata alla cassa è

$$F_T - M_Cg = -M_Ca \quad (\text{A})$$



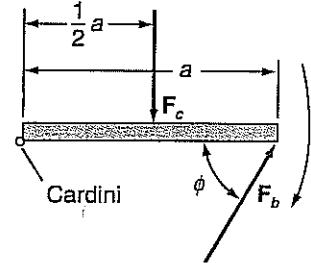
(a)



(b)

La componente assiale del momento esercitato dalla fune sull'argano rispetto a qualunque punto dell'asse è $\tau_z = F_T R_0$. I momenti di F_B e M_Ag sono nulli perché le rette d'azione di entrambe queste forze passano per l'asse. Quindi $\Sigma\tau_z = F_T R_0$. L'analogico rotatorio della seconda legge di Newton, Equazione (13.12), fornisce

$$F_T R_0 = I \alpha_z = I \alpha \quad (\text{B})$$

**Figura 13.10**

Esempio 13.6: l'asse z è perpendicolare alla pagina (passa per i cardini), e $+z$ ha verso uscente dalla pagina.

Figura 13.11

Esempio 13.7: (a) vista frontale. L'asse z è nel piano della pagina (lungo l'asse). (b) Diagrammi di corpo libero. L'asse z è perpendicolare alla pagina, con $+z$ uscente dalla pagina.

Tra i moduli dell'accelerazione lineare della cassa e dell'accelerazione angolare dell'argano la relazione $a = \alpha R_0$. Inoltre, essendo l'argano un cilindro omogeneo, $I = \frac{1}{2} M_A R_0^2$. Sostituendo nell'Equazione (B) e dividendo entrambi i membri per R_0 , si ottiene

$$F_T = \frac{1}{2} M_A a$$

Inserendo nell'Equazione (A) il valore di F_T dato dall'Equazione (C), e risolvendo rispetto a a si ha

$$a = \frac{M_C g}{M_C + \frac{1}{2} M_A} = \frac{(35 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{35 \text{ kg} + \frac{1}{2}(94 \text{ kg})} = 4.2 \text{ m/s}^2$$

Si noti che a è minore di g . Come mai?

(b) Sostituendo il valore di a appena ricavato nell'Equazione (C), si ha

$$F_T = \frac{\frac{1}{2} M_A M_C g}{M_C + \frac{1}{2} M_A} = \frac{\frac{1}{2}(94 \text{ kg})(35 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{35 \text{ kg} + \frac{1}{2}(94 \text{ kg})} = 200 \text{ N}$$

Si noti che la tensione della fune è minore del peso della cassa. Come mai?

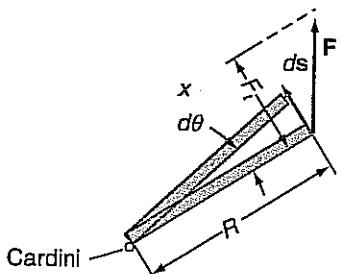


Figura 13.12

Il lavoro compiuto per far girare una porta. L'asse z è perpendicolare alla pagina (passa per i cardini), e $+z$ è uscente dalla pagina.

Lavoro compiuto su un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso.

13.5 LAVORO ED ENERGIA PER UN SISTEMA DI CORPI

Lavoro e potenza per un corpo rigido in rotazione. Quando una forza produce un momento su un corpo in rotazione, la forza compie lavoro. Nella Figura 13.12 considera il lavoro compiuto da una forza \mathbf{F} durante un intervallo di tempo nel quale la posizione angolare di una porta varia di una quantità $d\theta$. Il lavoro dW compiuto è

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_t(R d\theta)$$

dove F_t è la componente tangenziale di \mathbf{F} . Poiché $\tau_z = F_t R$,

$$dW = \tau_z d\theta$$

Il lavoro W compiuto dal momento τ_z quando la porta ruota da θ_i a θ_f è

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z d\theta \quad (13.14)$$

Nel caso di un momento costante, τ_z può essere portato fuori dall'integrale, e

$$W = \tau_z(\theta_f - \theta_i) = \tau_z \Delta\theta \quad (13.15)$$

L'analogo traslatorio dell'Equazione (13.14) è $W = \int F_x dx$ per un moto in un'asse.

Il lavoro compiuto dal momento di una forza può essere negativo. La Figura 13.13 mostra una ruota in rotazione che viene rallentata dal momento esercitato dalla ganascia del freno. Se l'asse z coincide con l'asse della ruota e $+z$ è uscente dalla pagina, lo spostamento angolare della ruota è positivo ($\Delta\theta > 0$), e, per la regola della mano destra, τ_z dovuto alla forza \mathbf{F}_a è negativo. Pertanto, τ_z e $\Delta\theta$ hanno segni opposti che rendono W negativo. Quali sono i segni algebrici di $\Delta\theta$, τ_z e W quando la ruota ruota nel senso inverso con il freno azionato?

Il teorema lavoro-energia fornisce la relazione tra il lavoro totale compiuto su un corpo e la variazione dell'energia cinetica del corpo stesso (Paragrafo 8.5). Ora ricaveremo l'equivalente rotatorio del teorema lavoro-energia per un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso. Combinando le Equazioni (13.14) e (13.15), si ottiene

$$dW_{\text{tot}} = \sum \tau_z d\theta = I \alpha_z d\theta = I \frac{d\omega_z}{dt} \omega_z dt \quad (13.16)$$

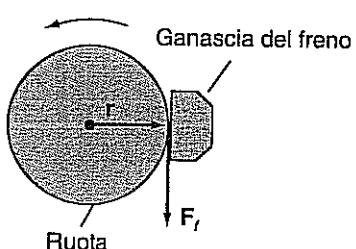


Figura 13.13

La ganascia di un freno che rallenta la rotazione di una ruota. L'asse z è perpendicolare alla pagina (coincide con l'asse della ruota), e $+z$ è uscente dalla pagina.

Poiché

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \omega_z^2 \right) = \omega_x \frac{d\omega_z}{dt}$$

si ha

$$dW_{\text{tot}} = I \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \omega_z^2 \right) dt = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} (\omega_z^2) dt = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} (\omega^2) dt$$

Ciò fornisce

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} I \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} (\omega^2) dt$$

dove si è portato I fuori dall'integrale perché il corpo è rigido e l'asse è fisso.
Eseguendo l'integrazione si ha

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 \quad (13.17)$$

La potenza P fornita a un corpo rigido in rotazione dal momento di una forza è la velocità con la quale il lavoro viene compiuto dal momento stesso. Usando l'Equazione (13.14), si ricava

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt} = \tau_z \omega_z \quad (13.18)$$

Come il lavoro, anche la potenza fornita da un momento può essere negativa. Se un momento tende a rallentare la rotazione, allora τ_z ha segno opposto a ω_z e P è negativa. Un trasferimento di energia di questo tipo tende a diminuire l'energia rotatoria del corpo.

Il lavoro e l'energia per un qualunque sistema di corpi. Il teorema lavoro-energia, che è valido per un punto materiale, rimane valido anche per un insieme di punti materiali. Per dimostrarlo basta sommare su tutti i singoli punti materiali la relazione (8.10) e si ottiene

$$W_{\text{tot}} = K_{\text{tot},f} - K_{\text{tot},i} \quad (13.19)$$

dove W_{tot} è il lavoro totale fatto su tutti i punti del sistema e K_{tot} è la somma di tutte le energie cinetiche dei punti. Il lavoro totale è compiuto da tutte le forze, sia quelle esterne (cioè dovute a corpi esterni al sistema considerato) sia quelle interne al sistema. Va sottolineato che, pur essendo zero la loro somma, le forze interne compiono lavoro, in quanto sono applicate a punti materiali diversi, i quali compiono spostamenti diversi. Per capire questo fatto, consideriamo un sistema costituito da due punti materiali (A e B) in interazione fra loro; sia \mathbf{F}_A la forza che agisce sul corpo A dovuta al corpo B e sia \mathbf{F}_B la forza che agisce su B dovuta ad A . Per il terzo principio della dinamica si ha che $\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B$. La posizione dei due corpi sarà individuata dai due vettori di posizione \mathbf{r}_A e \mathbf{r}_B e la loro mutua distanza sarà $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$. Il lavoro compiuto dalle due forze sui due corpi in un intervallo di tempo infinitesimo è dato dalla somma dei due lavori delle due forze interne:

$$dW = \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{r}_A + \mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{r}_B$$

da cui si ottiene

$$dW = \mathbf{F}_A \cdot (d\mathbf{r}_A - d\mathbf{r}_B) = \mathbf{F}_A \cdot d(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)$$

È chiaro che il lavoro delle forze interne è generalmente diverso da zero. È nullo solo se la mutua distanza fra i corpi rimane costante. Ciò avviene nel caso in cui il sistema di punti sia un corpo rigido, quindi: *il lavoro fatto dalle forze interne di un corpo rigido è nullo*.

Come nel caso di un punto materiale, le forze agenti, sia interne sia esterne al sistema, possono essere conservative o non conservative e, in generale, saranno presenti

Il teorema lavoro-energia per un corpo rigido in rotazione intorno a un asse fisso.

Potenza fornita a un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso.

tanto quelle di un tipo quanto quelle dell'altro. Separando i contributi delle \mathbf{F}_{int} e \mathbf{F}_{est} di quello delle altre, si ha

$$dW_{\text{tot}} = dW_{\text{tot}}^{\text{cons}} + dW_{\text{tot}}^{\text{non-cons}}$$

Sappiamo che il lavoro compiuto dalle forze conservative su ogni punto materiale può esprimere come la variazione dell'energia potenziale; allora, se si sommano i lavori per ottenere il lavoro totale $dW_{\text{tot}}^{\text{cons}}$ di tutte le forze conservative, si trova che il lavoro è uguale alla somma di tutte le variazioni di energia potenziale. Le forze conservative possono essere sia interne al sistema sia esterne e, quindi, il lavoro compiuto si può separare in due parti: $dW_{\text{tot}}^{\text{cons}, \text{int}}$ e $dW_{\text{tot}}^{\text{cons}, \text{est}}$. Esisteranno, allora, energie potenziali U^{int} e U^{est} tali che $dW_{\text{tot}}^{\text{cons}, \text{int}} = -dU^{\text{int}}$ e $dW_{\text{tot}}^{\text{cons}, \text{est}} = -dU^{\text{est}}$. Definitivamente si può scrivere che il lavoro totale compiuto da tutte le forze su un qualsiasi sistema di corpi è uguale al lavoro fatto dalle forze non conservative più le variazioni di due energie potenziali, quella delle forze interne e quella delle forze esterne.

$$dW_{\text{tot}} = dW_{\text{tot}}^{\text{non-cons}} - dU^{\text{int}} - dU^{\text{est}}$$

Poiché il teorema lavoro-energia ci dice che il lavoro totale è anche uguale alla variazione dell'energia cinetica dK , cioè $dW_{\text{tot}} = dK_{\text{tot}}$, abbiamo che

$$dK_{\text{tot}} = dW_{\text{tot}}^{\text{non-cons}} - dU^{\text{int}} - dU^{\text{est}} = dW_{\text{tot}}^{\text{non-cons}} - d(U^{\text{int}} + U^{\text{est}})$$

che scritta in altro modo è

$$dW_{\text{tot}}^{\text{non-cons}} = d(K_{\text{tot}} + U^{\text{int}} + U^{\text{est}}) \quad (1)$$

L'energia meccanica totale di un sistema di corpi.

La conservazione dell'energia meccanica per un sistema di corpi.

La quantità $K_{\text{tot}} + U^{\text{int}} + U^{\text{est}}$ viene chiamata *energia meccanica totale* del sistema. La relazione precedente, (13.19), è la generalizzazione della (9.15) ottenuta per punto materiale e afferma che la variazione dell'energia meccanica totale è uguale al lavoro fatto dalle forze non conservative. Se tutte le forze presenti sono conservative (assenza di forze non conservative), allora la variazione di E è nulla, $E = K_{\text{tot}} + U^{\text{int}} + U^{\text{est}} = \text{costante}$. Questa relazione esprime la conservazione dell'energia meccanica per un sistema di corpi: *in un sistema di riferimento inerziale l'energia meccanica totale di un sistema di corpi soggetto solo a forze conservative è costante*. La presenza di forze non conservative fa diminuire l'energia meccanica totale del sistema e il valore di questa diminuzione è dato dal lavoro delle forze non conservative (dette anche dissipative). Questa quantità di energia che viene "portata via" dal lavoro delle forze dissipative si ritroverà sotto una forma diversa da quella meccanica. Si ha quindi un processo di conversione dell'energia da una forma a un'altra, proprio come abbiamo discusso nel Capitolo 9 per il punto materiale.

Per un corpo rigido le forze interne non fanno lavoro e quindi l'energia meccanica totale è data dalla somma dell'energia cinetica totale del corpo più l'energia potenziale delle forze esterne che sono applicate al corpo. Poiché il moto di un corpo rigido può sempre descrivere come un moto di rototraslazione (in particolare da una traslazione del suo centro di massa più una rotazione attorno a un asse passante per il centro di massa), la sua energia cinetica totale sarà sempre esprimibile come la somma di *energia cinetica di traslazione* del centro di massa, che avrà la forma $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, e *energia cinetica di rotazione* attorno all'asse passante per il centro di massa, che avrà la forma $\frac{1}{2}I\omega^2$, dove M è la massa totale del sistema e I è il momento di inerzia attorno all'asse passante per il centro di massa.

Sempre nel caso dei corpi rigidi, le espressioni (13.14) e (13.15) ci mostrano che nel caso delle rotazioni, il lavoro risulta compiuto dai momenti delle forze esterne. Ad esempio una coppia di forze, che ha risultante nulla e momento diverso da zero, applicata a un corpo rigido, non porta a traslazioni ($\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$) ma solo a rotazioni e compie un lavoro, dato dalla (13.15), per far ruotare il corpo. In generale le forze esterne applicate a un corpo rigido compiono un lavoro per fargli compiere un moto traslatorio e un lavoro per fargli compiere un moto rotatorio. In particolare il vettore risultante

di tutte le forze esterne compie il lavoro di traslazione e il momento risultante di tutte le forze esterne compie il lavoro di rotazione.

Esempio 13.8

(a) Con riferimento all'Esempio 13.7 (Figura 13.11), determinare il lavoro compiuto sull'argano dalla forza esercitata dalla fune nell'intervallo di tempo nel quale l'argano ruota di un angolo di 45° . (b) Nell'ipotesi che l'argano sia in quiete all'inizio della rotazione di 45° , determinare la sua velocità angolare al termine di tale rotazione. (c) Calcolare la potenza fornita all'argano dalla fune nell'istante in cui la rotazione di 45° viene completata.

Soluzione

(a) Come si è visto nell'Esempio 13.7, il momento prodotto dalla fune è costante, $\tau_z = F_T R_0$, e quindi si può usare l'Equazione (13.15): $W = F_T R_0 \Delta\theta$. Siccome 45° corrispondono a $\pi/4$ rad,

$$W = (200 \text{ N})(0.083 \text{ m})(\pi/4 \text{ rad}) = 13 \text{ J}$$

(b) Poiché il momento prodotto dalla fune coincide con il momento risultante rispetto all'asse di rotazione, la soluzione trovata per la parte (a) fornisce $W_{\text{tot}} = 13 \text{ J}$. Inoltre la velocità angolare iniziale era nulla, e quindi $W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$, ossia

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{2W_{\text{tot}}}{I}} = \sqrt{\frac{2W_{\text{tot}}}{\frac{1}{2} MR_0^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2(13 \text{ J})}{\frac{1}{2} (94 \text{ kg})(0.083 \text{ m})^2}} = 9.0 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

(c) Usando il sistema di coordinate di Figura 13.11b (con $+z$ uscente dalla pagina), τ_z prodotto dalla fune è positivo:

$$\tau_z = F_T R_0 = (200 \text{ N})(0.083 \text{ m}) = 17 \text{ N} \cdot \text{m}$$

e ω_z alla fine della rotazione di 45° è positiva: $\omega_z = 9.0 \text{ rad/s}$. Pertanto

$$P = \tau_z \omega_z = (17 \text{ N} \cdot \text{m})(9.0 \text{ rad/s}) = 150 \text{ W}$$

Esempio 13.9

Supponendo che la Terra sia una sfera omogenea di raggio $R = 6.4 \text{ Mm}$ e di massa $M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ e che percorra un'orbita circolare di raggio $H = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ attorno al Sole, calcolare le energie cinetiche di rotazione e di traslazione della Terra.

Soluzione

Il moto della Terra, considerata come un corpo rigido, si può descrivere mediante una rototraslazione, in particolare come una traslazione del suo centro di massa più una rotazione attorno a un asse passante per il centro di massa. Nel nostro caso, il centro di massa coincide con il centro della sfera. L'energia di traslazione è data allora dall'energia che avrebbe il centro di massa se fosse un punto materiale di massa uguale alla massa totale della Terra, cioè:

$$K_{\text{trasl}} = \frac{1}{2} M v^2$$

La Terra compie, nella nostra schematizzazione, un moto circolare e uniforme, percorrendo una circonferenza di lunghezza $2\pi H \cong 9.4 \times 10^{11} \text{ m}$ in $T = \text{un anno}$, cioè in $T = 3 \times 10^7 \text{ s}$, quindi il modulo della sua velocità di traslazione è $v = \frac{2\pi H}{T} = \frac{9.4 \times 10^{11}}{3 \times 10^7} \cong 3 \times 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Si ottiene

$$K_{\text{trasl}} = 0.5 \times 6 \times 10^{24} \times (3 \times 10^4)^2 = 2.7 \times 10^{33} \text{ J}$$

L'energia di rotazione attorno all'asse passante per il suo centro è data da

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove I è il momento di inerzia della sfera rispetto all'asse di rotazione $I = \frac{2}{5} MR^2 = 9.8 \times 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e ω è il modulo della velocità di rotazione della Terra, cioè $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8.6 \times 10^4} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$, quindi

$$K_{\text{rot}} = 0.5 \times 9.8 \times 10^{37} \times (7.3 \times 10^{-5})^2 = 2.6 \times 10^{29} \text{ J}$$

13.6 LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Nei Capitoli 9 e 10 abbiamo introdotto i principi di conservazione dell'energia e quantità di moto. Ora presentiamo un terzo principio di conservazione, il principio della *conservazione del momento angolare*.

Supponiamo che il momento risultante esterno applicato a un sistema di punti materiali sia nullo: $\sum \tau = 0$. Per l'Equazione (13.9), $\sum \tau = d\mathbf{L}/dt$, e quindi

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{d}{dt} (\sum \ell_i) = 0$$

Se la derivata rispetto al tempo (cioè la velocità di variazione) di una grandezza la, la grandezza rimane costante. Pertanto, quando il momento risultante esterno cato a un sistema è nullo, si ha

$$\mathbf{L} = \sum \ell_i = \text{costante}$$

Anche se i singoli momenti angolari dei punti che compongono il sistema possono cambiare quando $\sum \tau = 0$, la loro somma non può variare. Un altro modo di esprimere questo risultato è

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f} \quad (1)$$

Il momento angolare totale si conserva quando $\sum \tau = 0$.

Il principio di conservazione del momento angolare.

L'enunciato conservativo del terzo principio della dinamica.

dove \mathbf{L}_i e \mathbf{L}_f sono il momento angolare totale iniziale e finale del sistema. Dunque il principio di conservazione del momento angolare afferma: *se il momento risultante esterno applicato a un sistema di punti materiali rispetto a un punto è zero, il momento angolare totale del sistema rispetto a quello stesso punto è costante*.

Abbiamo visto che il terzo principio della dinamica nella sua forma estesa ai sistemi di corpi afferma che nei sistemi di riferimento inerziali la risultante delle forze interne al sistema e il momento risultante delle forze interne al sistema di corpi sono nulli; ne discute che se si considera un sistema di corpi isolato, cioè non soggetto a forze esterne, le

equazioni cardinali si ottiene che $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$ e $\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$, da cui

che $\mathbf{P} = \text{costante}$ e $\mathbf{L} = \text{costante}$. In sostanza le forze di interazione interne al sistema, cioè di interazione fra i corpi del sistema, comunque esse siano fatte, non mutano la quantità di moto totale e il momento angolare totale del sistema e, se non ci sono forze esterne, tali vettori rimangono costanti nel tempo. Poiché tale legge naturale discende direttamente dal terzo principio della dinamica come enunciato da Newton, si può formulare il terzo principio della dinamica in termini di conservazione.

Enunciato conservativo del terzo principio della dinamica:
in un sistema di riferimento inerziale, la quantità di moto totale e il momento angolare totale di un sistema di corpi isolato rimangono costanti nel tempo (si servano).

Vogliamo far notare che l'universo è, per sua definizione, il sistema isolato più perfetto e quindi \mathbf{P} e \mathbf{L} sono delle costanti dell'universo.

Esempio 13.10

In un parco giochi, un ragazzo di massa m che corre con velocità di modulo v salta sul bordo di una giostra che inizialmente è ferma (Figura 13.14a). Qual è il modulo della velocità angolare dell'asse di rotazione una volta che il ragazzo sia in quiete rispetto ad essa? Si ammetta che il momento della forza d'attrito nel perno della giostra sia trascurabile.

Soluzione

Trattiamo il ragazzo come un punto materiale, e disponiamo il nostro sistema di coordinate come in Figura 13.14b. Consideriamo il sistema costituito dal ragazzo e dalla giostra. Poiché il momento della forza d'attrito nel perno è trascurabile, non vi sono momenti esterni che agiscono sul sistema, quindi il momento angolare totale di questo si conserva. Il ragazzo e la giostra esercitano l'un l'altra forze e momenti, ma queste forze e questi momenti sono interni; essi sono uguali e opposti perciò la loro somma è zero. Siccome la giostra inizialmente è in quiete, il momento angolare iniziale del sistema rispetto al perno (l'asse z) si riduce a quello del ragazzo:

$$L_{zi} = mvR$$

13.6 La conservazione del momento angolare

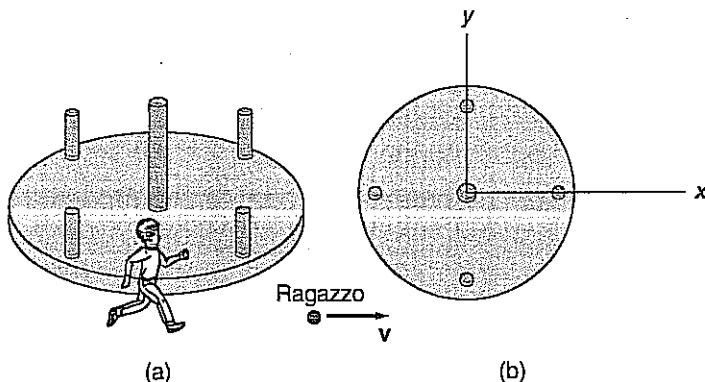


Figura 13.14

Esempio 13.10: (a) un ragazzo salta sulla giostra di un parco giochi. (b) Veduta dall'alto (+z ha verso uscente dalla pagina).

dove R è il raggio della giostra. Se I è il momento di inerzia della giostra, il momento di inerzia del sistema una volta che il ragazzo è in quiete rispetto alla giostra è $I + mR^2$. Perciò,

$$L_{zf} = (I + mR^2)\omega_z$$

La conservazione del momento angolare fornisce

$$mvR = (I + mR^2)\omega_z$$

Quindi il modulo della velocità angolare è

$$\omega = \frac{mvR}{I + mR^2}$$

Momento di inerzia variabile. Un'applicazione particolarmente interessante del principio di conservazione del momento angolare si ha nel caso di un sistema il cui momento di inerzia varia. Se l'oggetto in questione può essere considerato un corpo rigido in rotazione intorno all'asse z prima e dopo (ma non durante) la variazione del momento di inerzia, la componente z dell'Equazione (13.21) può essere scritta

$$I_i\omega_{zi} = I_f\omega_{zf} \quad (13.22)$$

Se il momento di inerzia di un sistema varia senza che ad esso siano applicati momenti esterni, anche la velocità angolare deve variare perché il momento angolare rimanga costante. Quando ciò accade, l'energia cinetica del sistema varia, e quindi deve essere compiuto del lavoro.

Esempio 13.11

Una persona è seduta su uno sgabello che gira intorno a un asse verticale con una velocità angolare ω_i , come mostra la Figura 13.15a. La persona ha le braccia tese e tiene in ciascuna mano un manubrio, di modo che il momento di inerzia del sistema (persona, sgabello e manubri) è I_i . A un certo punto la persona avvicina rapidamente i manubri al proprio corpo, cosicché il momento di inerzia finale del sistema è un terzo di quello iniziale: $I_f = I_i/3$ (Figura 13.15b). (a) Qual è la velocità angolare finale della persona? (b) Si confrontino l'energia cinetica finale e quella iniziale del sistema. Si trascuri il momento della forza d'attrito che agisce sul perno dello sgabello durante l'intervallo di tempo nel quale il momento di inerzia del sistema varia.

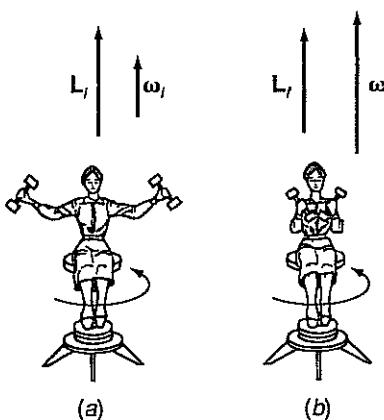


Figura 13.15

Esempio 13.11: una persona su uno sgabello in rotazione. (a) I è grande, ω è piccola. (b) I è piccolo, ω è grande.

Soluzione

(a) Poiché il momento della forza d'attrito agente sul perno dello sgabello è trascurabile, non momenti esterni applicati al sistema, e quindi il momento angolare di questo si conserva:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \frac{I_i}{3} \omega_f$$

Risolvendo rispetto a ω_f , si ha

$$\omega_f = 3\omega_i$$

Dunque, la conservazione del momento angolare implica che la velocità angolare aumenti del medesimo fattore di cui diminuisce il momento di inerzia.

(b) L'energia cinetica finale del sistema è

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_i}{3} \right) (3\omega_i)^2 \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \right) = 3K_i \end{aligned}$$

Quindi la conservazione del momento angolare implica che l'energia cinetica del sistema aumenti del medesimo fattore di cui diminuisce il momento di inerzia. Da dove viene questa energia cinetica?

Esempio 13.12

Un disco di raggio R e massa M , omogeneo, può ruotare attorno a un asse verticale passante per il centro ed è inizialmente a riposo. Un proiettile di massa m e velocità v viene sparato orizzontalmente e tangenzialmente al disco e si pianta sul perimetro del disco. Calcolare la velocità angolare che acquista il disco e l'energia dissipata in tale urto anelastico.

Soluzione

Essendo nulli i momenti delle forze esterne rispetto all'asse verticale, che chiameremo asse z , che il momento angolare rispetto a tale asse rimane costante, quindi $L_z^i = L_z^f$. Il momento angolare iniziale è quello del proiettile, mentre il momento angolare finale è quello del disco, $I = \frac{1}{2} MR^2$, più quello del proiettile inserito sul perimetro; allora:

$$L_z^i = mvR \quad \text{e} \quad L_z^f = I\omega + mR^2\omega$$

quindi

$$mvR = I\omega + mR^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{mvR}{(I + mR^2)} = \frac{mvR}{\left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2 \right)} = \frac{2mv}{(M + 2m)R}$$

L'energia dissipata durante l'urto è semplicemente la differenza fra l'energia cinetica iniziale e finale. Si ha che inizialmente l'unica energia è quella del proiettile e dopo l'urto l'energia è quella di rotazione del sistema composto dal disco che ruota con velocità angolare ω e dal proiettile che gira con la stessa velocità angolare trovandosi a distanza R dall'asse.

Quindi

$$K_i = \frac{1}{2} mv^2 \quad \text{e} \quad K_f = \frac{1}{2} I_{\text{tot}} \omega^2 \quad \text{con} \quad I_{\text{tot}} = I + mR^2 = \frac{1}{2} MR^2 + mR^2$$

Si ottiene

$$K_f = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{M + 2m}{2} \right) \frac{4m^2 v^2}{(M + 2m)^2 R^2} = \frac{m^2 v^2}{M + 2m}$$

e quindi l'energia dissipata è

$$E_{\text{diss}} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{m^2 v^2}{M + 2m} = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{M + 2m} \right) mv^2 = \left(\frac{M}{2(M + 2m)} \right) mv^2 = \frac{1}{2} mv^2 \left(\frac{M}{M + 2m} \right)$$

Conservazione del momento angolare nel caso di forze centrali. Il momento angolare di un sistema si conserva quando il momento risultante applicato al sistema è nullo; il momento risultante applicato a un sistema è sempre nullo quando la forza risultante che agisce sul sistema è nulla. Tuttavia è possibile che il momento risultante sia nullo anche quando la forza risultante non è nulla. Ciò accade quando il momento risultante è misurato rispetto a un punto che giace sulla retta d'azione della forza risultante. Un esempio di questo tipo è quello del momento agente su un pianeta, rispetto al Sole, a causa della forza gravitazionale esercitata dal Sole sul pianeta.

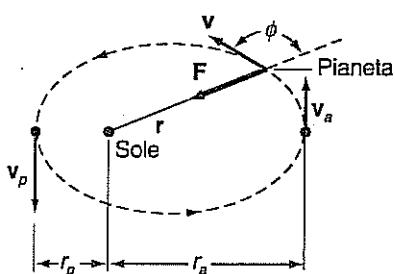


Figura 13.16
L'orbita ellittica
di un pianeta intorno al Sole.

Consideriamo un pianeta o una cometa di massa m in un'orbita ellittica intorno al Sole, come mostra la Figura 13.16. Prendiamo come sistema il solo pianeta (escludendo il Sole). La forza gravitazionale esercitata dal Sole sul pianeta è diretta verso il Sole. Il braccio di questa forza rispetto alla posizione del Sole è nullo, e quindi il momento di questa forza rispetto al Sole è anch'esso nullo. Pertanto il momento angolare orbitale del pianeta rispetto al Sole si conserva, ossia è costante:

$$mvr \sin \phi = \text{costante}$$

Tutte e tre le grandezze v , r e ϕ variano mentre il pianeta si muove sulla sua orbita ellittica, ma $mvr \sin \phi$ non varia.

In due posizioni sull'orbita (la posizione a (l'afelio) in cui il pianeta è alla massima distanza dal Sole, e la posizione p (il perielio) in cui il pianeta è alla minima distanza dal Sole) v è perpendicolare a r , il che significa che $\phi = 90^\circ$ e $\sin \phi = 1$. Applicando la conservazione del momento angolare a questi due punti, si ha

$$mv_ar_a = mv_pr_p \quad \text{ossia} \quad v_ar_a = v_pr_p$$

Ciò comporta che $v_a < v_p$ perché $r_a > r_p$. Mentre il pianeta gira intorno al Sole, il modulo della sua velocità aumenta nel tratto da a a p e poi diminuisce nel tratto da p ad a . Abbiamo raggiunto conclusioni simili servendoci del principio di conservazione dell'energia meccanica nel Capitolo 9.

Nel Capitolo 7 abbiamo accennato al fatto che la forza gravitazionale ha due caratteristiche importanti: è una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, ed è una forza attrattiva diretta lungo la congiungente dei corpi che interagiscono. Nel caso dei pianeti in orbita intorno al Sole, questo ha massa tanto maggiore di quella dei pianeti, che i pianeti in pratica girano intorno a un punto fisso al centro del Sole. Se una forza che agisce su un corpo ha sempre la direzione della retta che congiunge il corpo a un punto centrale, e se l'intensità della forza dipende soltanto dalla distanza da questo punto, la forza viene detta *centrale*. La forza gravitazionale esercitata dal Sole sui pianeti è un esempio di forza centrale. *Il momento angolare di un corpo che si muove sotto l'azione di una forza centrale, se viene misurato rispetto al punto verso il quale è diretta la forza, si conserva.*

Definizione di forza centrale

Esempio 13.13

Dimostrare la seconda legge di Keplero (Paragrafo 7.8).

Soluzione

La seconda legge di Keplero afferma che *la congiungente un pianeta con il Sole spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali*. La Figura 13.17 mostra un'area infinitesima dA che viene spazzata in un intervallo di tempo infinitesimo dt . L'area è quella di un triangolo di altezza $|dr| \sin \phi$ e base r :

$$dA = \frac{1}{2} (r) (|dr| \sin \phi) = \frac{1}{2} (r) (v dt \sin \phi)$$

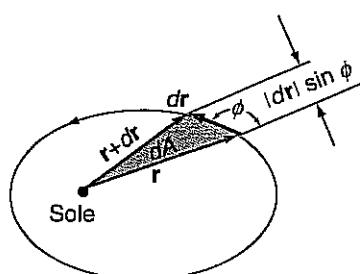


Figura 13.17
Esempio 13.13: la seconda legge di Keplero. La congiungente di un pianeta con il Sole spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali.

dove si è usata la relazione $|dr| = v dt$. Dividendo entrambi i membri per dt e moltiplicando dendo il secondo membro per m si ottiene

$$\frac{dA}{dt} = \frac{mvr \sin \phi}{2m}$$

Il numeratore del secondo membro è il modulo del momento angolare orbitale del pianeta, ch stante. Quindi $dA/dt = \text{costante}$: questa è una formulazione matematica della seconda legge di Keplero.

13.7 IL MOTO DEL GIROSCOPIO

Finora abbiamo applicato l'Equazione (13.9), $\Sigma\tau = d\mathbf{L}/dt$, soltanto ad alcuni casi particolari. Nei vari esempi, abbiamo discusso di corpi rigidi simmetrici rispetto a un asse di rotazione con orientamento fisso. In casi del genere, $\Sigma\tau$ (e $d\mathbf{L}/dt$) hanno la stessa direzione di \mathbf{L} ; entrambe le grandezze sono dirette come l'asse, e il problema è sostanzialmente unidimensionale. Lo studio del moto di un giroscopio ci offre la possibilità di considerare un caso più generale, in cui $\Sigma\tau$ e \mathbf{L} non hanno la stessa direzione: ciò fornisce una dimostrazione inequivocabile del carattere vettoriale del momento di una forza e del momento angolare.

Il moto giroscopico può essere esemplificato con una trottola o con un giroscopio giocattolo. Di solito, nell'aula di fisica, si ricorre a una ruota di bicicletta che ruota rapidamente intorno all'asse con velocità angolare ω_s . Un'estremità dell'asse (l'estremità A in Figura 13.18) è collegata con un giunto sferico alla sommità di un supporto, in modo che l'asse possa orientarsi liberamente. Quando si lascia andare l'estremità A dell'asse accade una cosa sorprendente: la ruota in rotazione sembra sfidare la gravità, e non torna a terra come farebbe se non stesse girando. La ruota e il suo asse si mettono a girare attorno a un asse verticale descrivendo la traiettoria rappresentata in Figura 13.18. Questa rotazione dell'asse e della ruota viene chiamata *precessione*, e noi indichiamo con ω_p la velocità angolare di precessione. Perché si verifichi la precessione, si deve avere $\omega_s \gg \omega_p$.

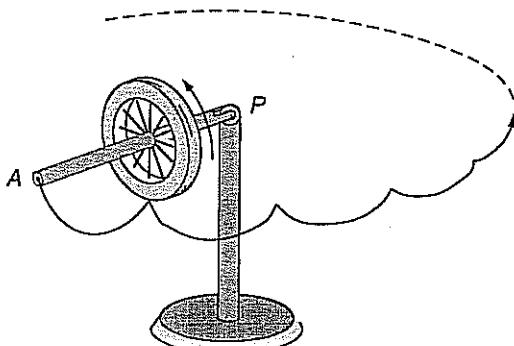
Come il lettore può vedere nella figura, in questo moto ci sono altri aspetti che non abbiamo ancora parlato. Quando viene lasciata andare, l'estremità A prenderà a oscillare su e giù mentre la ruota precede: questo moto oscillante viene chiamato *nutazione*, e tende a smorzarsi a causa dell'attrito nel perno. Noi ignoreremo la nutazione considerando il moto dopo che essa è divenuta trascurabile.

Nella Figura 13.19 è rappresentato un sistema di coordinate con l'origine nel punto A, l'asse y verticale, e il piano xz orizzontale. Ammettiamo per semplicità che l'asse dell'asse sia orizzontale, e consideriamo il moto nell'istante in cui esso ha la direzione dell'asse z. Vi sono due forze esterne che agiscono sulla ruota e sul suo asse (che costituiscono il nostro sistema). Si tratta del peso \mathbf{F}_g applicato nel centro della ruota retto verso il basso, e della forza \mathbf{F}_p esercitata dal supporto sul perno P. Trascuriamo il momento della forza d'attrito che agisce nel perno. Il momento risultante esterno applicato al sistema rispetto a P è

$$\Sigma\tau = F_p D \mathbf{i} = MgD \mathbf{i}$$

Figura 13.18

Una ruota di bicicletta precede intorno a un asse verticale. Appena lasciata libera, la ruota ha anche un moto di nutazione.



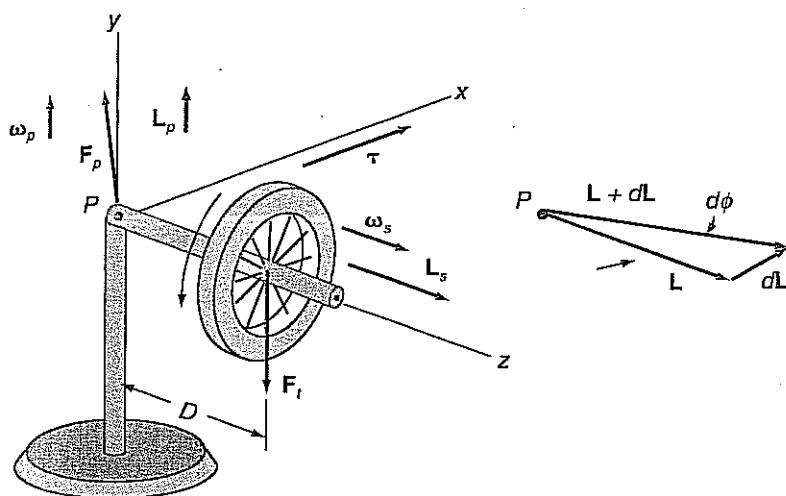


Figura 13.19

La ruota nell'istante in cui il suo asse ha la direzione dell'asse z.

Cioè, soltanto il peso contribuisce al momento rispetto a P perché la retta d'azione di F_p passa per P . Perciò la variazione infinitesima $d\mathbf{L}$ del momento angolare totale rispetto a P durante un intervallo di tempo infinitesimo dt è

$$d\mathbf{L} = \Sigma \tau dt = (MgD dt)\mathbf{i}$$

Il momento angolare totale \mathbf{L} del sistema rispetto a P è la somma del momento angolare \mathbf{L}_s dovuto alla rotazione della ruota sul proprio asse (momento di spin) e del momento angolare \mathbf{L}_p dovuto alla precessione della ruota e del suo asse:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_p$$

Il momento angolare di spin è

$$\mathbf{L}_s = I_s \omega_s \mathbf{k}$$

dove I_s è il momento di inerzia della ruota rispetto al suo asse. Il momento angolare di precessione è

$$\mathbf{L}_p = I_p \omega_p \mathbf{j}$$

dove I_p è il momento di inerzia della ruota e del suo asse rispetto all'asse y . Ciò porta a

$$\mathbf{L} = I_s \omega_s \mathbf{k} + I_p \omega_p \mathbf{j}$$

Si noti che \mathbf{L} è perpendicolare a $d\mathbf{L}$, il che significa che il modulo di \mathbf{L} non varia, ma varia la sua direzione.

Ora ammettiamo che ω_s sia molto maggiore di ω_p , di modo che il momento angolare totale sia praticamente uguale al momento angolare di spin. Introdotta questa semplificazione, possiamo vedere dal triangolo di Figura 13.19 che l'angolo infinitesimo di precessione $d\phi$ spazzato nell'intervallo di tempo dt è

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{MgD dt}{I_s \omega_s}$$

Siccome $\omega_p = d\phi/dt$

$$\omega_p = \frac{MgD}{I_s \omega_s} \quad (13.23)$$

In tal modo, basandoci su ipotesi ragionevoli, abbiamo ricavato un'equazione che dà la velocità angolare di precessione. L'equazione indica che, via via che l'attrito dell'asse fa diminuire ω_s , ω_p aumenta, una caratteristica del moto, questa, che si può facilmente verificare.

Ora cerchiamo di comprendere perché la ruota non cade se sta ruotando, ma cade se non è in rotazione. Cominciamo a descrivere, in termini di momento delle forze e di momento angolare, il modo in cui cade una ruota che non sta girando. Supponiamo che la ruota della Figura 13.19 non sia in rotazione, cosicché \mathbf{L}_s è nullo. Il momento risultante $\Sigma \tau$ e $d\mathbf{L}$ hanno entrambi la direzione dell'asse x . Poiché la ruota non gira

quando viene lasciata andare, il momento angolare iniziale è nullo; dopo che la viene lasciata andare, il momento angolare aumenta di modulo ed è sempre diretto lungo l'asse x . Cioè, l'asse e la ruota ruotano intorno all'asse x . Se si dispone il pollice della mano destra lungo l'asse x , le altre dita si piegano nella direzione della rotazione indicando che l'asse ruota verso il basso, ossia la ruota cade.

Ora supponiamo che la ruota inizialmente sia in rotazione. In questo caso dL ha la direzione dell'asse x) si somma al momento angolare preesistente L_s (diretto lungo l'asse z) dando luogo a un nuovo vettore $L + dL$, il quale forma un angolo $d\phi$ con l'asse z . Ciò significa che dopo un tempo dt l'asse della ruota ha preceduto di un angolo $d\phi$. Questa rotazione avviene intorno all'asse verticale y invece che intorno all'asse orizzontale x . Siccome l'asse della ruota si è spostato di un angolo $d\phi$ dall'asse momenti risultante ora forma un angolo $d\phi$ con l'asse x . Entrambi i vettori, $\Sigma\tau$ ruotano continuamente intorno alla verticale, con $\Sigma\tau$ in anticipo di 90° su L . Il moto delle forze non mantiene una direzione fissa quando la ruota gira, mentre la mano ne mantiene una fissa quando la ruota non gira. È il momento delle forze che causa la precessione della ruota che gira, come causa la caduta di una ruota che non gira.

RIEPILOGO

Paragrafo 13.2

Momento angolare di un punto materiale

Il momento angolare ℓ di un punto materiale rispetto a un punto O è

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (13.1)$$

dove \mathbf{r} è misurato rispetto a O e $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. In base alla seconda legge di Newton, la relazione tra ℓ e il momento risultante $\Sigma\tau = \mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ è

$$\Sigma\tau = \frac{d\ell}{dt} \quad (13.5)$$

Paragrafo 13.3

Il momento angolare totale di un sistema di punti materiali e le equazioni cardinali della meccanica

Il momento angolare totale di un sistema di punti materiali è la somma vettoriale dei momenti angolari di punti materiali che formano il sistema:

$$\mathbf{L} = \sum \ell_i \quad (13.6)$$

Usando l'Equazione (13.5) e la terza legge di Newton, si trova

$$\Sigma\tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (13.9)$$

dove $\Sigma\tau_{\text{ext}}$ è il momento risultante esterno applicato al sistema. Tutti i principi della dinamica, per un qualunque sistema di punti materiali, si possono compendere in due equazioni vettoriali, le equazioni cardinali della meccanica:

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbf{F}_{\text{ext}} &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \Sigma\tau_{\text{ext}} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} \end{aligned} \quad (13.10)$$

Per un corpo rigido, che ha sei gradi di libertà, queste due equazioni vettoriali, corrispondenti a sei equazioni scalari, sono sufficienti a descriverne il moto.

Paragrafo 13.4

Dinamica della rotazione di un corpo rigido intorno a un asse fisso

Nel caso di un corpo rigido in rotazione intorno a un asse fisso

$$L_z = I\omega_z \quad (13.11)$$

e

$$\Sigma\tau_z = I\alpha_z \quad (13.12)$$

Rispetto a qualunque punto dell'asse, la componente assiale del momento di una forza è

$$\tau_z = RF_t$$

Paragrafo 13.5

Lavoro ed energia per un sistema di corpi

Il lavoro compiuto dal momento di una forza su un corpo rigido in rotazione intorno a un asse fisso è

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z d\theta \quad (13.13)$$

Il lavoro compiuto dal momento risultante fa variare l'energia cinetica rotazionale:

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 \quad (13.14)$$

La potenza fornita a un corpo rigido in rotazione è

$$P = \tau_z \omega_z \quad (13.15)$$

Il teorema lavoro-energia per un sistema di punti materiali scrive

$$W_{\text{tot}} = K_{\text{tot},f} - K_{\text{tot},i} \quad (13.16)$$

e la conservazione dell'energia nel caso più generale si può esprimere così:

$$dW_{\text{tot}}^{\text{non-cons}} = d(K_{\text{tot}} + U^{\text{int}} + U^{\text{est}}) \quad (13.17)$$

In assenza di forze non conservative, l'energia meccanica totale $K_{\text{tot}} + U^{\text{int}} + U^{\text{est}}$, è una costante.

Per un corpo rigido, l'energia cinetica si può scrivere come somma di un'energia di traslazione del centro di massa, come fosse un punto in cui è concentrata tutta la massa, più un'energia di rotazione attorno a un asse passante per il centro di massa.

Paragrafo 13.6**La conservazione del momento angolare**

Se il momento risultante esterno applicato a un sistema è nullo, il momento angolare totale del sistema si conserva:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f \quad (13.22)$$

Paragrafo 13.7**Il moto del giroscopio**

Il moto di un giroscopio fornisce un esempio di moto rotatorio nel quale il corpo in rotazione non è vincolato a girare su un asse con orientamento fisso.

La Tabella riassuntiva 13.1 mette in evidenza l'analogia matematica tra moto traslatorio in una dimensione e moto rotatorio intorno a un asse fisso.

Tabella 13.1 L'analogia tra rotazione e traslazione.

Traslazione (in una dimensione)	Rotazione (su un asse fisso)
Coordinata x	Coordinata θ
Componente della velocità v_x	Componente della velocità ω_z
Componente dell'accelerazione a_x	Componente dell'accelerazione α_z
Massa M	Momento di inerzia I
Componente della forza F_x	Componente del momento τ_z
Quantità di moto P_x	Momento angolare L_z
$\sum F_{ext,x} = Ma_x$	$\sum \tau_{ext,z} = \alpha_z$
$P_z = Mv_x$	$L_z = I\omega_z$
$W = \int F_x dx$	$W = \int \tau_z d\theta$
$W_{tot} = \frac{1}{2}Mv_f^2 - \frac{1}{2}Mv_i^2$	$W_{tot} = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$
$P = F_x v_x$	$P = \tau_z \omega_z$

QUESITI

- 13.1 Qual è l'angolo tra la velocità di un punto materiale e il suo momento angolare?
- 13.2 Se un punto materiale si muove in linea retta, vi sono dei punti rispetto ai quali il suo momento angolare è nullo? Spiega.
- 13.3 Un punto materiale si muove lungo una linea retta con velocità di modulo crescente, e il punto P non giace sulla retta del moto. La direzione del momento angolare della particella rispetto a P è costante? Il modulo del suo momento angolare rispetto a P è costante?
- 13.4 Se un punto materiale è in moto circolare uniforme, il modulo del suo momento angolare rispetto al centro della traiettoria è costante? La direzione del momento angolare è costante? Se il modulo della velocità del punto materiale varia mentre essa descrive una circonferenza, il modulo del momento angolare è costante? La sua direzione è costante?
- 13.5 Se il momento risultante applicato a un punto materiale ha la stessa direzione del momento angolare del punto materiale, cambia la direzione di quest'ultimo? Cambia il suo modulo?
- 13.6 Se il momento risultante applicato a un punto materiale è perpendicolare al momento angolare del punto, cambia la direzione di quest'ultimo? Cambia il suo modulo?
- 13.7 Supponiamo che esista un sistema isolato costituito da due punti materiali a e b che interagiscono tra loro in modo che $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$, mentre la direzione delle forze è perpendicolare alla congiungente dei punti, come mostra la Figura 13.20.

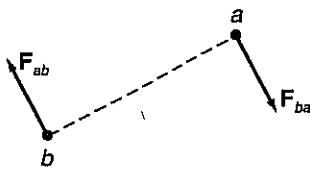


Figura 13.20 Quesito 13.7.

Che cosa accade a questo sistema con il passare del tempo? La quantità di moto totale si conserva? Il momento angolare totale si conserva? È possibile un sistema del genere? Spiega.

- 13.8 Spiega perché dei polpacci troppo muscolosi possono costituire uno svantaggio per uno scattista.
- 13.9 Spiega perché nel baseball spesso a un battitore conviene «accorciare» la mazza (Figura 13.21) quando ha di fronte un lanciatore in grado di imprimere alla palla una velocità molto elevata.



Figura 13.21 Quesito 13.9: un giocatore di baseball "accorcia" la mazza. (Tom Richard)

- 13.10 Quando una palla da biliardo rotola giù per un piano inclinato senza strisciare, quale forza produce il momento che causa l'accelerazione angolare rispetto a un asse passante per il centro di massa della palla? Quale forza produce il momento che causa l'accelerazione angolare rispetto a un asse passante per il punto di contatto con la superficie?

13.11 Si dice che un gatto cada sempre sulle zampe. Fotografie ad alta velocità hanno dimostrato che, quando un gatto comincia a cadere a zampe in su, la sua coda ruota rapidamente e il suo corpo ruota anch'esso, di modo che il gatto ricade effettivamente sulle zampe. Spiega il moto in termini di conservazione del momento angolare, includendo nella spiegazione un confronto tra il senso di rotazione del corpo del gatto e quello della sua coda. Cosa credi che potrebbe fare un gatto con la coda mozza che cominciasse a cadere a zampe in su?

13.12 Un piccolo satellite in orbita intorno alla Terra ha soltanto un oblò per l'astronauta, e quest'oblò è rivolto dalla parte opposta alla Terra. Spiega come l'astronauta può far ruotare il satellite in modo da vedere la Terra senza usare nell'operazione combustibile per razzi.

13.13 Un pattinatore che sta girando su sé stesso allarga rapidamente le braccia. (Si trascuri l'attrito durante l'intervallo di tempo nel quale le braccia si allargano.) La sua energia cinetica si conserva? La sua energia potenziale si conserva? La sua energia meccanica si conserva? Il suo momento angolare si conserva? Se qualcuna di queste grandezze non si conserva, aumenta o diminuisce?

13.14 Uno yo-yo con metà dello spago avvolto sull'asse è appoggiato di costa sul pavimento, come mostra la Figura 13.22. Si immagini di tirare delicatamente lo spago in tre diverse direzioni indicate nella figura da F_a , F_b e F_c . La forza è in ciascun caso abbastanza lieve da non far scivolare lo yo-yo. In quale caso (se ce n'è qualcuno) lo spago si avvolge sullo yo-yo, e in quale caso (se ce n'è qualcuno) lo spago si svolge?

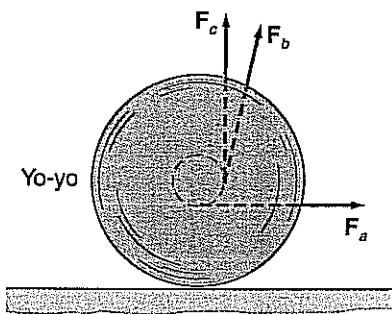


Figura 13.22 Quesito 13.14.

13.15 Un punto materiale si muove in linea retta con velocità costante, e l'origine O non è sulla traiettoria del punto. Il segmento che ha per estremi O e il punto spazza aree uguali in tempi uguali? Spiega.

13.16 Consideriamo il momento angolare \mathbf{L} di una porta omogenea rispetto all'origine O posta sull'asse passante per i cardini, che è l'asse z ; supponiamo che ω_z sia positiva. Si descriva qualitativamente la direzione di \mathbf{L} quando O è (a) a metà tra la sommità e la base della porta, (b) in cima alla porta, (c) ai piedi della porta. Si riconsideri il quesito con ω_z negativa.

13.17 Nel caso considerato nella Figura 13.8, ω_z è positiva quindi \mathbf{p}_i ha verso entrante nella pagina e \mathbf{p}_f verso uscente. Disegnare la figura per il caso in cui ω_z è negativa. Se $m_i = m_f$, le componenti radiali di ℓ_i e ℓ_f sono ancora uguali e opposte?

13.18 Una matita che era in equilibrio sull'estremità dotata di gomma cade di lato in modo che la gomma non scivola (Figura 13.23). Consideriamo la forza di contatto \mathbf{F}_c esercitata dalla superficie di appoggio sulla matita, componente x di \mathbf{F}_c è positiva o negativa? Spiega. componente y di \mathbf{F}_c è uguale a mg , minore di mg , maggiore di mg ? (c) Fai uno schizzo della Figura rappresenta \mathbf{F}_c e mg .

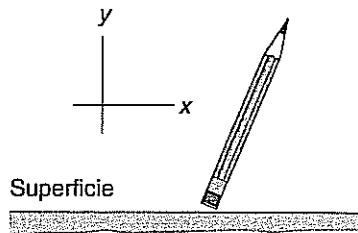


Figura 13.23 Quesito 13.18: una matita che cade.

13.19 Perché è più facile tenere in equilibrio sulla punta di un pallone da basket che gira piuttosto che una palla non gira?

13.20 Supponiamo che il momento angolare di un sistema rispetto a un particolare punto sia nullo. Deve essere nullo il momento risultante esterno applicato al sistema rispetto a quel punto? Deve essere nulla la forza risultante esterna applicata al sistema?

13.21 Supponiamo che il sistema asse-ruota del Paragrafo 13.2 sia costruito in modo che la massa dell'asse sia molto minore di quella della ruota. In questo caso, se si raddoppia la massa della ruota, quale sarà approssimativamente l'effetto sul modulo della velocità angolare di precessione?

13.22 Si immagini che la ruota di bicicletta della Figura 13.22 giri in senso opposto a quello indicato in figura. Quale sono le direzioni di ω_p , \mathbf{L} , $d\mathbf{L}$ e $\Sigma\tau_{ext}$ in questo caso?

13.23 Dai a un facchino una valigia all'interno della quale c'è un grosso rotore che gira. Che cosa succede quando il facchino svolta a un angolo?

13.24 Completare la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità
ℓ		Vettore	
\mathbf{L}			$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\Sigma\tau_{ext}$			
r	Distanza da un punto		
R			
P			

ESERCIZI

Paragrafo 13.2

Momento angolare di un punto materiale

- 13.1 Un osservatore è fermo 125 m a sud di una strada orientata in direzione est-ovest, e un'automobile della massa di 1340 kg viaggia verso est lungo la strada.
 (a) Quali sono il modulo e la direzione del momento angolare dell'automobile rispetto all'osservatore nell'istante in cui la prima si trova esattamente a nord del secondo e si muove con una velocità di 36.4 m/s?
 (b) Qual è il momento angolare dopo che l'automobile ha percorso 325 m oltre la posizione della parte (a), se la sua velocità è sempre di 36.4 m/s?
- 13.2 Determinare il modulo del momento angolare orbitale di Marte rispetto al Sole, ammettendo che la sua orbita sia circolare con un raggio di 2.28×10^{11} m. La massa di Marte è di 6.46×10^{23} kg, e il periodo della sua orbita è di 5.94×10^7 s.
- 13.3 Qual è il momento angolare rispetto all'origine di un corpo di massa 4.1 kg nell'istante in cui la sua posizione è $\mathbf{r} = (-3.5 \text{ m})\mathbf{i} + (1.4 \text{ m})\mathbf{j}$ e la sua velocità è $\mathbf{v} = (-2.0 \text{ m/s})\mathbf{i} + (-6.3 \text{ m/s})\mathbf{j}$?
- 13.4 Un corpo di massa 3.6 kg si muove nel piano xy . Qual è (in modulo e direzione) il suo momento angolare rispetto all'origine nell'istante in cui attraversa l'asse x con una velocità di 2.4 m/s, in $x = +4.6$ m? L'angolo tra \mathbf{i} e \mathbf{v} in tale istante è $+0.76$ rad.
- 13.5 Una pallina forata di massa 72 g scivola senza attrito lungo un anello di filo metallico di raggio 0.93 m disposto in un piano verticale, come mostra la Figura 13.24. Se la pallina viene lasciata andare da ferma in $\theta = 0.87$ rad, qual è il suo momento angolare rispetto a C nell'istante in cui attraversa l'asse x ?

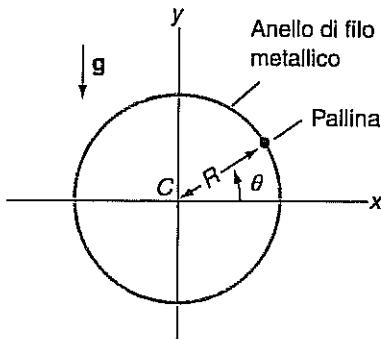


Figura 13.24 Esercizio 13.5.

- 13.6 Tenendo presente che l'energia cinetica di un punto può essere scritta nella forma $K = \frac{1}{2}p^2/m$ ove $p = mv$, si dimostri che l'energia cinetica di un punto che si muove su una circonferenza di raggio R può essere scritta come $K = \frac{1}{2}\ell^2/I$, ove $I = mR^2$ e ℓ è misurato rispetto al centro della circonferenza.

Paragrafo 13.3

Il momento angolare totale di un sistema di punti materiali e le equazioni cardinali della meccanica

- 13.7 Un sistema è costituito da tre punti che hanno momento

angolare rispetto all'origine $\ell_a = (2.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{i}$, $\ell_b = (-6.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$ e $\ell_c = (-4.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} + (1.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{j}$. Qual è il momento angolare totale del sistema rispetto all'origine?

- 13.8 Due punti A e B esercitano l'una sull'altra una forza di intensità 14 N, come mostra la Figura 13.25. (a) Determinare il modulo e la direzione del momento esercitato da B su A rispetto all'origine. (b) Determinare il modulo e la direzione del momento esercitato da A su B rispetto all'origine. (c) Determinare il momento risultante applicato ai due punti per effetto della loro interazione.

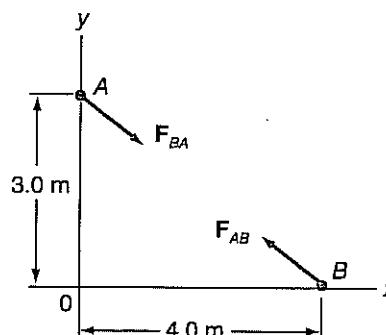


Figura 13.25 Esercizio 13.8: la direzione $+z$ esce dalla pagina.

- 13.9 Due punti di uguale massa m si muovono in direzioni opposte lungo traiettorie rettilinee, con la medesima velocità v . Le traiettorie dei punti sono parallele e separate da una distanza D . Dimostrare che il modulo del momento angolare totale dei due punti è mvD rispetto a qualunque punto.
- 13.10 Due punti di massa M_1 e M_2 sono connesse tra loro e all'asse di rotazione da un'asta rigida di massa trascurabile, come mostra la Figura 13.26. Due punti hanno una velocità angolare e sono a distanze R_1 e R_2 dall'asse. Scrivere l'espressione del momento angolare totale in funzione di M_1 , M_2 , R_1 , R_2 e ω .

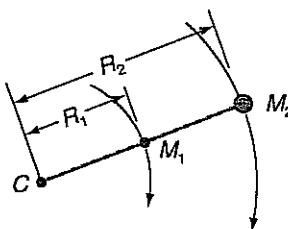
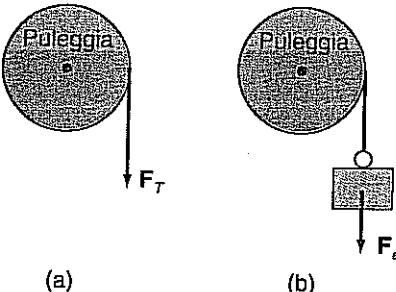


Figura 13.26 Esercizio 13.10.

Paragrafo 13.4

Dinamica della rotazione di un corpo rigido intorno a un asse fisso

- 13.11 Qual è il momento angolare rispetto al suo centro di un disco di massa 85 g e raggio 150 mm, che ruota sul piatto di un giradischi a 33.33 giri/min?
- 13.12 (a) Qual è la componente z del momento risultante esterno applicato a una porta omogenea di massa 22 kg e larghezza 0.95 m nell'istante in cui la componente z della sua accelerazione angolare è 8.2 rad/s^2 ? L'asse z passa per i cardini, con $+z$ rivolto verso l'alto. (b) Se la componente del momento risultante calcolata nella parte

- (a) è interamente dovuta a una forza perpendicolare al battente della porta e applicata al pomello, che si trova a 0.89 m dall'asse passante per i cardini, qual è l'intensità di questa forza?
- 13.13** A una mola, il cui momento di inerzia rispetto al proprio asse è di $0.15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, è applicato un momento costante di modulo $18 \text{ N} \cdot \text{m}$ rispetto all'asse. Ammettendo che la ruota parta da ferma per $t = 0$, ricavare le equazioni che danno la sua accelerazione angolare, la sua velocità angolare e la sua posizione angolare in funzione del tempo.
- 13.14** Una ruota di bicicletta con un momento di inerzia rispetto all'asse di $0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e una velocità angolare iniziale di 12 rad/s rallenta fino a fermarsi a causa dell'attrito dei cuscinetti in un intervallo di tempo di 320 s . Determinare il modulo del momento della forza d'attrito, nell'ipotesi che esso sia costante.
- 13.15** (a) La puleggia della Figura 13.27a ha un momento di inerzia rispetto al proprio asse di $0.085 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e un raggio di 170 mm . La corda avvolta attorno alla puleggia esercita una forza costante di intensità 32 N . Trascurando il momento della forza d'attrito presente nei cuscinetti, determinare il modulo dell'accelerazione angolare della puleggia. (b) Sulla stessa puleggia ora è avvolta una corda alla quale è legato un blocco del peso di 32 N , che viene lasciato andare (Figura 13.27b). Determinare il modulo dell'accelerazione angolare della puleggia. (c) Spiegare perché le risposte date alla parte (a) e alla parte (b) sono diverse.
- 
- Figura 13.27 Esercizio 13.15.
- 13.16** Su una puleggia di massa 3.0 kg e raggio 120 mm è avvolta una corda cui è attaccato un blocco di massa 7.3 kg , in modo analogo a quanto avviene nella Figura 13.27b. Il blocco cade partendo da fermo per un tratto di 450 mm in 0.33 s . Trovare il momento di inerzia della puleggia rispetto al suo asse, ammettendo che gli attriti siano trascurabili. Che cosa si può dire del modo in cui la massa della puleggia è distribuita intorno all'asse?
- 13.17** Ripetere l'esercizio precedente tenendo conto dell'attrito dei cuscinetti della puleggia. Seguendo il procedimento dell'Esercizio 13.14, si trova che il momento della forza d'attrito che si esercita tra la puleggia e i suoi cuscinetti è di $0.23 \text{ N} \cdot \text{m}$. Confrontare la risposta ottenuta con quella dell'esercizio precedente.
- 13.18** I blocchi B e C sono attaccati a una corda che passa su una puleggia P , come mostra la Figura 13.28. Trascurando l'attrito tra la puleggia e i cuscinetti, trascurando la massa della corda e ammettendo che la corda non slitti, determinare (a) il modulo dell'accelerazione lineare dei blocchi, (b) la tensione del tratto di corda attaccato a B , (c) la tensione del tratto di

corda attaccato a C , (d) il modulo della forza esercitata sulla puleggia dai cuscinetti. (e) Confrontare la risposta data alla parte (d) con il peso totale dei blocchi e della puleggia, e spiegare perché questi due risultati sono diversi. Trattare la puleggia come un disco omogeneo di raggio R_0 e servirsi dei seguenti dati: $R_0 = 78 \text{ mm}$, $m_p = 0.74 \text{ kg}$, $m_B = 0.83 \text{ kg}$ e $m_C = 0.57 \text{ kg}$.

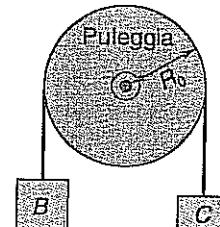


Figura 13.28 Esercizio 13.18.

- 13.19** I blocchi B e C sono legati l'uno all'altro da una corda trascurabile che passa su una puleggia, come mostra la Figura 13.29. L'attrito tra il blocco B e il tavolo e l'attrito nella puleggia sono trascurabili. Ammettendo che la corda non slitti, determinare (a) il modulo dell'accelerazione lineare dei blocchi, (b) la tensione della corda tra il blocco B e la puleggia, (c) la tensione della corda tra il blocco C e la puleggia. Esprimere le risposte in termini di m_B , m_C , I , R_0 e θ .

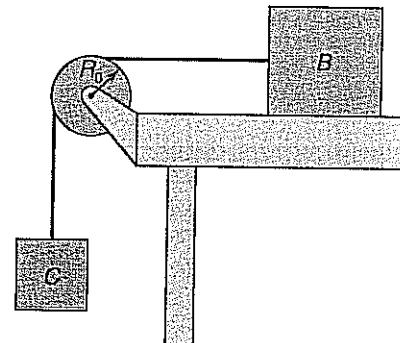


Figura 13.29 Esercizio 13.19.

- 13.20** Un blocco di massa 4.5 kg è legato a una corda che avvolta intorno a una puleggia, e il blocco scivola giù su un piano inclinato, come mostra la Figura 13.30. Il coefficiente di attrito cinetico tra il blocco e il piano inclinato è 0.30 , e sulla puleggia agisce un momento costante dovuto all'attrito di intensità $1.3 \text{ N} \cdot \text{m}$. Il momento di inerzia della puleggia rispetto al suo asse è $0.016 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Gli altri dati sono $\theta = 0.73 \text{ rad}$ ed $R_0 = 85 \text{ mm}$. Determinare (a) il modulo dell'accelerazione del blocco e (b) la tensione della corda.

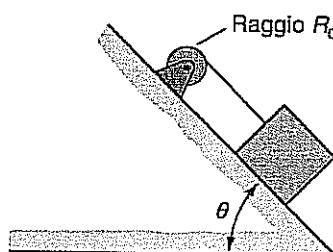


Figura 13.30 Esercizio 13.20.

- 13.21** Trovare la forza esercitata dai cuscinetti sull'argano dell'Esempio 13.7

Paragrafo 13.5

Lavoro ed energia per un sistema di corpi

- 13.22 (a) Qual è il lavoro compiuto dal momento della forza d'attrito presente nei cuscinetti di una ruota di bicicletta di momento di inerzia $0.22 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, quando la ruota rallenta fino a fermarsi partendo da una velocità angolare di 14 rad/s ? (b) La ruota si arresta al termine di un intervallo di tempo di 86 s . Ammettendo che il momento dell'attrito sia costante, qual è il modulo dell'accelerazione angolare? (c) Determinare la potenza fornita alla ruota in funzione del tempo, con $t = 0$ che corrisponde all'istante in cui la velocità angolare è di 14 rad/s .

- 13.23 Dimostrare che l'energia cinetica di un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso può essere scritta nella forma $K = \frac{1}{2} L^2/I$.

- 13.24 Qual è la potenza fornita dalla corda alla puleggia della Figura 13.27a nell'istante in cui la sua velocità angolare è di 2.9 rad/s , con $F_T = 32 \text{ N}$?

- 13.25 Determinare la velocità dei due blocchi di Figura 13.28 nell'istante in cui il blocco B è caduto per 12 mm essendo stato lasciato andare da fermo.

- 13.26 Nella Figura 13.31, la puleggia P viene fatta ruotare in senso orario finché la molla è tesa di 52 mm , dopodiché viene lasciata andare da fermo. Si determinino (a) il modulo della velocità del blocco quando passa dalla posizione in corrispondenza della quale la molla non è tesa e (b) la potenza fornita dalla molla al blocco nell'istante in cui questo passa dalla medesima posizione. Si trascurino l'attrito tra il blocco e la superficie d'appoggio e quello dei cuscinetti della puleggia. I dati sono $m_B = 4.3 \text{ kg}$, $I_P = 0.016 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $R_0 = 73 \text{ mm}$, e $k = 230 \text{ N/m}$.

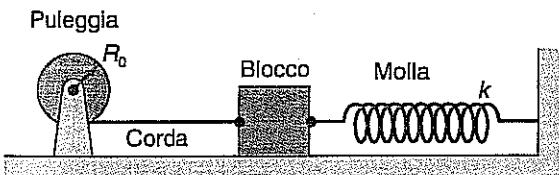


Figura 13.31 Esercizio 13.26.

Paragrafo 13.6

La conservazione del momento angolare

- 13.27 Una pattinatrice gira su se stessa, cioè intorno a un asse verticale, con una velocità angolare di 5.3 rad/s e con le braccia tese in fuori; poi avvicina rapidamente le braccia al corpo in un intervallo di tempo così breve che l'effetto degli attriti tra pattini e ghiaccio è trascurabile. Il momento d'inerzia iniziale della pattinatrice rispetto all'asse di rotazione è di $1.72 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, e il momento d'inerzia finale è di $0.61 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. (a) Qual è la sua velocità angolare finale? (b) Qual è la variazione della sua energia cinetica? (c) Spiega questa variazione dell'energia cinetica.

- 13.28 Un bambino di massa 22 kg sta in piedi a metà tra il centro e il bordo di una giostra che ruota liberamente con una velocità angolare di 1.8 rad/s . (a) Qual è la velocità angolare della giostra dopo che il bambino si è spostato sul bordo? (b) Qual è la variazione dell'energia cinetica

del sistema (bambino più giostra)? Il raggio della giostra è di 3.0 m , e il suo momento di inerzia, quando non c'è sopra nessuno, è di $610 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Si trascuri l'attrito dell'asse durante l'intervallo di tempo nel quale il bambino si sposta.

- 13.29 Una porta aperta di massa M è ferma quando viene colpita da una palla di massa m ($m \ll M$) in un punto che si trova a distanza D dall'asse passante per i cardini, come mostra la Figura 13.32. Immediatamente prima che la palla colpisca la porta, la sua traiettoria è perpendicolare al battente, e, poiché $m \ll M$, la traiettoria è ancora pressoché perpendicolare subito dopo l'urto. La porta ha densità uniforme e larghezza a v_i e v_f rappresentano i moduli della velocità iniziale e della velocità finale della palla. Si trascuri l'attrito dei cardini durante l'urto. (a) Prendendo come sistema la palla e la porta, si spieghi perché la quantità di moto totale del sistema non si conserva. (b) Si conserva il momento angolare del sistema rispetto a qualche asse? Se sì, si identifichi l'asse. (c) Utilizzando l'approssimazione di cui sopra, si determini un'espressione per la velocità angolare della porta dopo l'urto, in funzione delle grandezze introdotte. (d) Si calcoli quando $m = 1.1 \text{ kg}$, $M = 35 \text{ kg}$, $a = 73 \text{ cm}$, $D = 62 \text{ cm}$, $v_i = 27 \text{ m/s}$ e $v_f = 16 \text{ m/s}$. (Questo urto viene ulteriormente analizzato nel Problema 13.19. Si veda anche l'Esempio 12.6.)

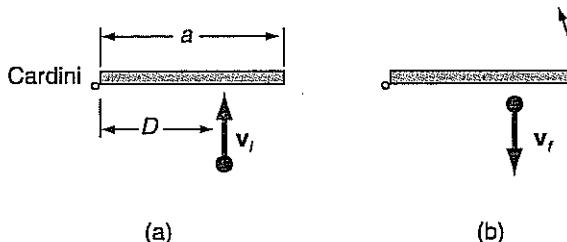


Figura 13.32 Esercizio 13.29: la porta vista dall'alto: (a) prima dell'urto; (b) dopo l'urto.

- 13.30 La porta descritta nell'esercizio precedente è in quiete quando viene colpita da una palla di stucco di massa m , come mostra la Figura 13.33. La velocità iniziale della palla è orizzontale e forma un angolo θ con la normale alla porta; dopo l'urto lo stucco si attacca alla porta.

- (a) Trovare la velocità angolare finale della porta.
(b) Determinare la variazione dell'energia cinetica del sistema (porta più stucco). (c) Calcolare i valori numerici delle espressioni trovate nelle parti (a) e (b) quando $m = 1.1 \text{ kg}$, $M = 35 \text{ kg}$, $a = 73 \text{ cm}$, $D = 62 \text{ cm}$, $\theta = 0.38 \text{ rad}$, e $v = 2727 \text{ m/s}$.

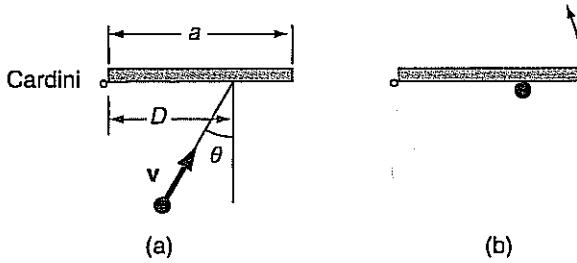


Figura 13.33 Esercizio 13.30: la porta vista dall'alto: (a) prima dell'urto; (b) dopo l'urto.

- 13.31 Un blocco di massa m si muove lungo una circonferenza di raggio R_i con velocità di modulo v_i , scivolando senz'attrito sul piano orizzontale di un tavolo. Il blocco è legato a uno spago che passa attraverso un foro praticato

nel tavolo, come mostra la Figura 13.34, e non c'è attrito tra il tavolo e lo spago. L'estremità dello spago che si trova sotto il tavolo viene spostata verso il basso, in modo che, dopo lo spostamento, il blocco percorre una circonferenza di raggio R_f . (a) Dimostrare che il rapporto tra la tensione dello spago dopo lo spostamento e la tensione prima dello spostamento è pari a $(R_i/R_f)^3$. (b) Determinare la tensione dello spago dopo lo spostamento nel caso in cui la tensione prima dello spostamento è 3.4 N e $R_f = \frac{1}{2} R_i$.

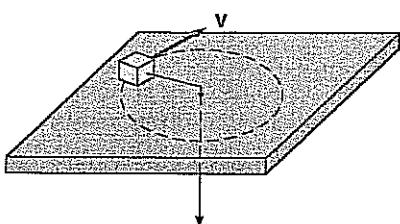


Figura 13.34 Esercizio 13.31.

- 13.32** Il disco B ruota liberamente con velocità angolare ω_B ed è solidale con un'asta cilindrica che ne sporge lungo l'asse di rotazione. Il disco C ha un foro al centro che consente di infilarlo sull'asta, come mostra la Figura 13.35; il disco C , inizialmente in quiete, viene lasciato cadere sul disco B . (a) Si determini la velocità angolare del sistema dopo che l'attrito tra B e C li ha portati a una velocità angolare comune. (b) Qual è la variazione dell'energia cinetica del sistema? Si esprimano le risposte in termini di ω_B , I_B e I_C . (c) Si calcolino i valori numerici delle espressioni trovate nelle parti (a) e (b) quando $I_B = 0.20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_C = 0.10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $\omega_B = 6.2 \text{ rad/s}$.
- 13.33** Due pattinatori di uguale massa m pattinano in linea retta l'uno verso l'altro su traiettorie parallele, con la

medesima velocità v . Le traiettorie sono a un D , leggermente maggiore della lunghezza di. Quando i pattinatori sono l'uno accanto all'al prendono sottobraccio e cominciano a girare cerchio di diametro D . (a) Determinare la lon angolare in funzione delle grandezze introdot Determinare l'eventuale variazione dell'energ del sistema.

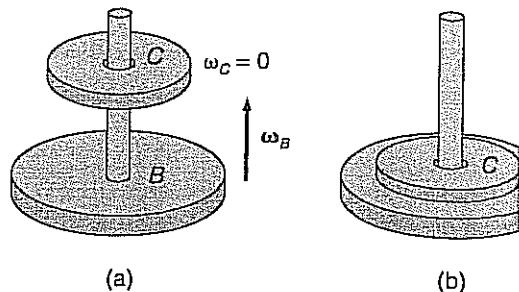


Figura 13.35 Esercizio 13.32: il disco B è connesso all'asta che passa comodamente nel foro praticato nel centro del disco C ; (b) dopo che C è caduto.

Paragrafo 13.7 Il moto del giroscopio

- 13.34** Un giroscopio a ruota di bicicletta precede senza nutazione, con l'asse orizzontale (Figura 13.15), gira sul proprio asse con la velocità angolare $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$. Il momento di inerzia della ruota rispetto all'asse è $0.23 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, e il momento di inerzia della ruota dell'asse rispetto al perno è di $0.14 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. L'asse è lungo 280 mm e la ruota è al centro dell'asse. Determinare la velocità angolare di precessione supponendo $L_s \ll L_p$. (b) Determinare L_s e L_p giustificare l'ipotesi fatta nella parte (a).

PROBLEMI

- 13.1** Si consideri una particella che si muove lungo una circonferenza e si dimostri che l'espressione $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, dove \mathbf{r} è la posizione della particella rispetto al centro della circonferenza, fornisce in modo corretto il modulo e la direzione di \mathbf{v} .
- 13.2** Si consideri una particella nella posizione $\mathbf{r} = x_i \mathbf{i} + y_j + z_k$, con quantità di moto $\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}$, e sulla quale si esercita una forza $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$.
- Si determinino le componenti del momento angolare ℓ e del momento τ rispetto all'origine.
 - Si dimostri che $d\ell_z/dt = v_x p_y - v_y p_x + x F_y - y F_x$.
 - Si dimostri che i primi due termini del secondo membro di questa equazione si elidono, cosicché $d\ell_z/dt = \tau_z$.
- 13.3** Per far sì che una palla da biliardo di raggio r_0 cominci a rotolare senza scivolare su una superficie orizzontale priva di attrito, sulla palla viene esercitata una forza orizzontale la cui retta d'azione passa a una distanza h dal centro della palla, al di sopra di questo (Figura 13.36). Si determini h in funzione di r_0 . (Suggerimento: si considerino sia il moto traslatorio che il moto rotatorio della palla.)

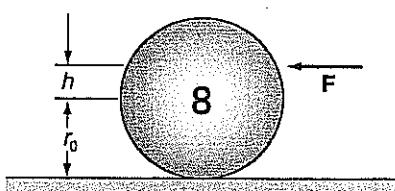


Figura 13.36 Problema 13.3.

- 13.4** Si consideri una palla da biliardo che rotola senza scivolare giù per un piano inclinato che forma un angolo θ con l'orizzontale. (a) Si dimostri che il modulo dell'accelerazione lineare della palla è $(5g \sin \theta)^{1/2}$. (b) Si dimostri che il valore minimo che deve avere il coefficiente d'attrito tra la palla e la superficie per far sì che la palla rotoli giù per il piano inclinato senza scivolare è $(2 \tan \theta)/7$. (Suggerimento: si considerino sia il moto traslatorio che il moto rotatorio della palla.)
- 13.5** Una palla da biliardo di raggio r_0 inizialmente si muove senza rotolare con velocità lineare v_0 su una superficie orizzontale; il coefficiente d'attrito tra la palla e la superficie è μ . Dimostrare che, nell'istante in cui la palla comincia a rotolare senza scivolare, (a) la sua velocità

lineare è $5v_0/7$; (b) il tempo trascorso è $2v_0/7\mu g$; (c) lo spazio percorso è $12v_0^2/49\mu g$. (Suggerimento: per tutto il tempo in cui la palla rotola e scivola, la superficie esercita una forza costante μmg nel punto di contatto. Inoltre, nell'istante in cui comincia il rotolamento senza scivolamento, sono valide le equazioni $v = \omega r_0$ e $a = \alpha r_0$.)

- 13.6 Supponiamo che sullo yo-yo della Figura 13.22 si eserciti la forza F_a . (a) Ammettendo che lo yo-yo non scivoli, si determini il modulo della sua accelerazione lineare in funzione della sua massa M , del suo raggio R_2 , del raggio R_1 del suo asse, e di F_a . Si ponga $I = \frac{1}{2}MR_2^2$.

(b) Si dimostri che il valore massimo che F_a può avere senza che lo yo-yo scivoli è $3\mu MgR_2/(R_2 + 2R_1)$, ove μ è il coefficiente d'attrito tra lo yo-yo e la superficie.

- 13.7 Una palla da biliardo di raggio r_0 rotola senza scivolare partendo da ferma dalla sommità di una guida con un anello di raggio R_0 , come mostra la Figura 13.37. Qual è l'altezza minima h dalla quale la palla può essere lasciata andare senza che perda il contatto con l'anello quando passa per il suo punto più alto? Si supponga $r_0 \ll R_0$.

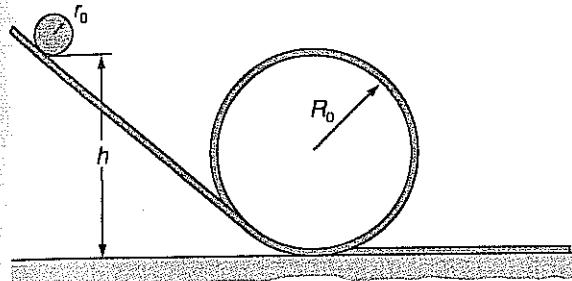


Figura 13.37 Problema 13.7.

- 13.8 Un pallone da basket di raggio r_0 rotola senza scivolare lungo il percorso circolare di raggio R_0 rappresentato nella Figura 13.38. Il pallone viene lasciato andare da fermo in corrispondenza dell'angolo θ . Qual è il modulo della sua velocità quando raggiunge il punto più basso?

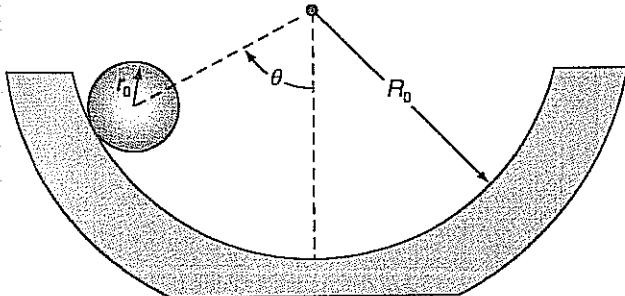


Figura 13.38 Problema 13.8.

- 13.9 Il portello di una botola è omogeneo, ha massa M e lunghezza h , e ruota senza attrito su un asse orizzontale passante per i suoi cardini, come mostra la Figura 13.39.

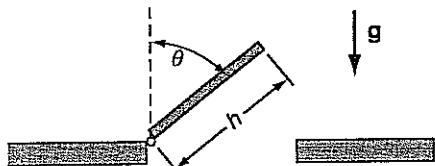


Figura 13.39 Problema 13.9: una botola vista lateralmente.

Dimostrare che, se la rotazione è cominciata con il portello verticale e con una velocità iniziale trascurabile, la velocità angolare del portello nella posizione θ è $\sqrt{3g(1 - \cos \theta)}$.

- 13.10 Due ruote B e C girano senza attrito su assi paralleli, come mostra la Figura 13.40. Le ruote hanno la stessa massa M , lo stesso raggio R_0 , e lo stesso momento di inerzia I . La ruota C ha velocità angolare $\omega_C k$ e la ruota B è ferma quando i loro bordi vengono posti a contatto. Un attimo dopo i moduli delle loro velocità angolari sono uguali per effetto della forza d'attrito che si esercita tra di loro: $\omega_C = \omega_B$ e $\omega_B = -\omega_C$. (a) Se consideriamo come sistema le due ruote (escludendo i loro assi), l'energia cinetica del sistema si conserva? (b) Il momento angolare del sistema si conserva? (c) Dimostrare che il momento che si esercita su ciascuna ruota è, rispetto a qualunque asse parallelo agli assi delle ruote, $-FR_0 k$, dove F è il valore assoluto della componente verticale della forza d'attrito. (d) Dimostrare che $\omega = \frac{1}{2}\omega_0$. (e) Qual è il rapporto tra l'energia cinetica finale e l'energia cinetica iniziale? (f) Qual è il momento angolare finale del sistema? (Suggerimento: Occorre tener conto della forza esercitata sulle ruote dai loro assi.)

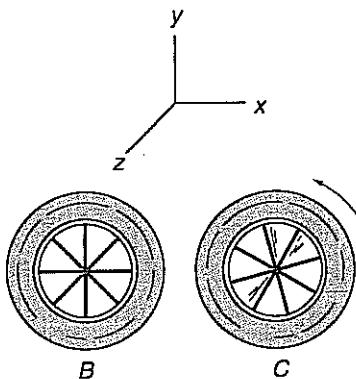


Figura 13.40 Problema 13.10: la direzione +z esce dalla pagina.

- 13.11 Riprendiamo in esame il blocco dell'Esercizio 13.31 (Figura 13.34) e supponiamo che lo spago venga tirato verso il basso molto lentamente, in modo che si possa ritenere che il blocco si muova in ogni istante praticamente lungo un cerchio di raggio R . (a) Dimostrare che la tensione dello spago varia con R come $mv_i^2 R_i^2 / R^3$, dove l'indice i si riferisce ai valori iniziali. (b) Usare la risposta data alla parte (a) per trovare il lavoro compiuto sul blocco dalla tensione dello spago mentre il raggio della traiettoria circolare del blocco varia da R_i a R_f . (c) Dimostrare che il lavoro calcolato nella parte (b) è pari alla variazione dell'energia cinetica del blocco.

- 13.12 Una studentessa è seduta su uno sgabello che può ruotare intorno a un asse verticale, e tiene in mano una ruota di bicicletta in modo che l'asse di questa sia anch'esso verticale, come mostra la Figura 13.41. Il momento di inerzia della ruota rispetto al suo asse è di $0.21 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, e il momento di inerzia della studentessa più la ruota più il sedile dello sgabello rispetto all'asse dello sgabello è di $2.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. La velocità angolare iniziale della ruota intorno al suo asse è di $(61 \text{ rad/s})k$, e la velocità angolare iniziale della studentessa intorno all'asse dello sgabello è zero, ove si è preso k orientato verticalmente verso l'alto. La studentessa ribalta l'asse della ruota di 180° , in modo

che esso sia di nuovo verticale e che la velocità angolare della ruota diventi $(-61 \text{ rad/s})\mathbf{k}$. (a) Determinare la velocità angolare acquistata dalla studentessa intorno all'asse dello sgabello. (b) Determinare il lavoro compiuto dalla studentessa. L'attrito dell'asse dello sgabello è trascurabile.

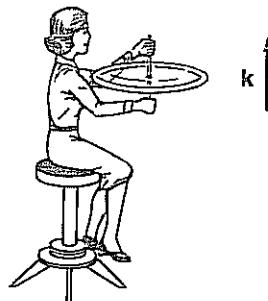


Figura 13.41 Problema 13.12: \mathbf{k} è diretto verticalmente verso l'alto.

- 13.13 Supponiamo che l'asse di una ruota di bicicletta che precede in modo costante non sia orizzontale, come appariva nella Figura 13.19, ma formi un angolo θ con il piano xz . Adottando le stesse ipotesi fatte nel Paragrafo 13.7, dimostrare che la velocità angolare di precessione è indipendente da θ .
- 13.14 Si determini I_p per il giroscopio a ruota di bicicletta di Figura 13.19, nel quale la ruota si trova a metà dell'asse. Si ponga $I_s = M_R R_0^2$, ove M_R è la massa della ruota (cerchione e pneumatico) e R_0 il suo raggio; ossia, si tratti la ruota come un anello. Ci si serva del teorema della figura piana (Problema 12.6) e del teorema degli assi paralleli per mostrare che
- $$I_p = \frac{1}{2} M_R R_0^2 + M_R D^2 + 4mD^2/3, \text{ dove } m \text{ è la massa dell'asse e } 2D \text{ la sua lunghezza.}$$

- 13.15 (a) Dimostrare che la componente orizzontale della forza esercitata dal perno sul giroscopio a ruota di bicicletta descritto nel Paragrafo 13.7 è $Mg[M^2gD^3/(I_s\omega_s)^2]$. (b) Determinare il modulo della forza esercitata dal perno. (c) Determinare l'angolo compreso tra la verticale e la direzione della forza esercitata dal perno.

- 13.16 L'asse di rotazione della Terra precede perché la Terra non è una sfera perfetta. Essa può essere considerata come una sfera perfetta a cui sia stata aggiunta una «cintura» (Figura 13.42). (a) Dimostrare che, se si approssima ulteriormente la cintura con un manubrio da ginnastica le cui due sfere di massa Δm si trovano nelle posizioni indicate in figura, allora il modulo τ_s del momento esercitato dal Sole rispetto al centro della Terra è

$$\tau_s = \frac{2GM_s \Delta m R_t^2 \sin 23^\circ \cos 23^\circ}{R_0^3}$$

dove M_s è la massa del Sole, R_t è il raggio della Terra, e R_0 è la distanza Terra-Sole. (b) Tenendo conto dell'effettivo rigonfiamento equatoriale e mediando su un anno si ottiene un momento medio pari a $3/8$ di quello ottenuto sopra. Inoltre, un confronto fra la circonferenza polare e la circonferenza equatoriale della Terra indica un valore di Δm pari a $8/3000$ della massa della Terra. Dimostrare che ciò porta a una precessione dell'asse terrestre con un periodo di circa 80 000 anni. (Effetti

dovuti alla Luna, poi, riducono il periodo della precessione a circa 26 000 anni.)

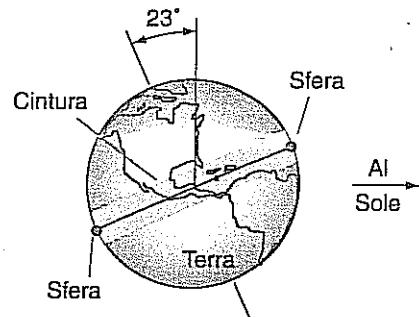


Figura 13.42 Problema 13.16.

- 13.17 Consideriamo un sistema in cui ω e \mathbf{L} non siano paralleli. Due sfere di uguale massa M sono connesse da un'asta di massa trascurabile e ruotano intorno a un asse, come mostra la Figura 13.43. Si dimostri che nell'istante in cui le sfere sono nel piano yz : (a) il momento angolare rispetto all'origine è

$$\mathbf{L} = 2Mr^2\omega [\sin \theta \mathbf{k} + (\cos \theta)\mathbf{j}]$$

- (b) il momento rispetto all'origine esercitato sull'asse dai cuscinetti è

$$\tau_c = -(2Mr^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta)\mathbf{i}$$

(*Suggerimento:* si considerino le proiezioni di \mathbf{L} e $d\mathbf{L}$ sul piano xy , analogamente a quanto fatto nella Figura 13.19.) (c) la componente orizzontale della forza esercitata sull'asse dal cuscinetto superiore è

$$F_c = \frac{Mr^2\omega^2}{D} \cos \theta \sin \theta$$

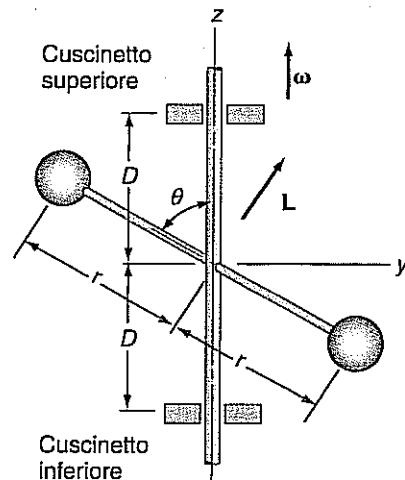


Figura 13.43. Problema 13.17: la direzione $+x$ esce dalla pagina.z

- 13.18 La particella di massa m in Figura 13.44 si muove di moto circolare uniforme intorno al punto $(a, 0)$. (a) Dimostrare che il modulo del suo momento angolare rispetto all'origine è

$$\ell = ma^2\omega(1 + \cos \omega t)$$

ove ω è la sua velocità angolare e $t = 0$ corrisponde all'istante in cui la particella si trova nel punto $(2a, 0)$. (b) Tracciare un grafico di ℓ in funzione di t da $t = 0$ a $t = 2\pi/\omega$.

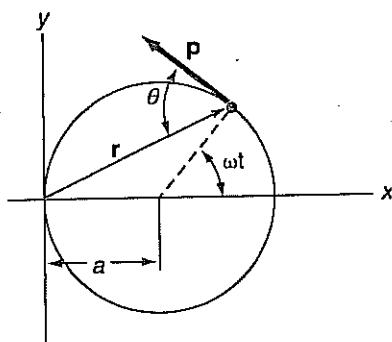


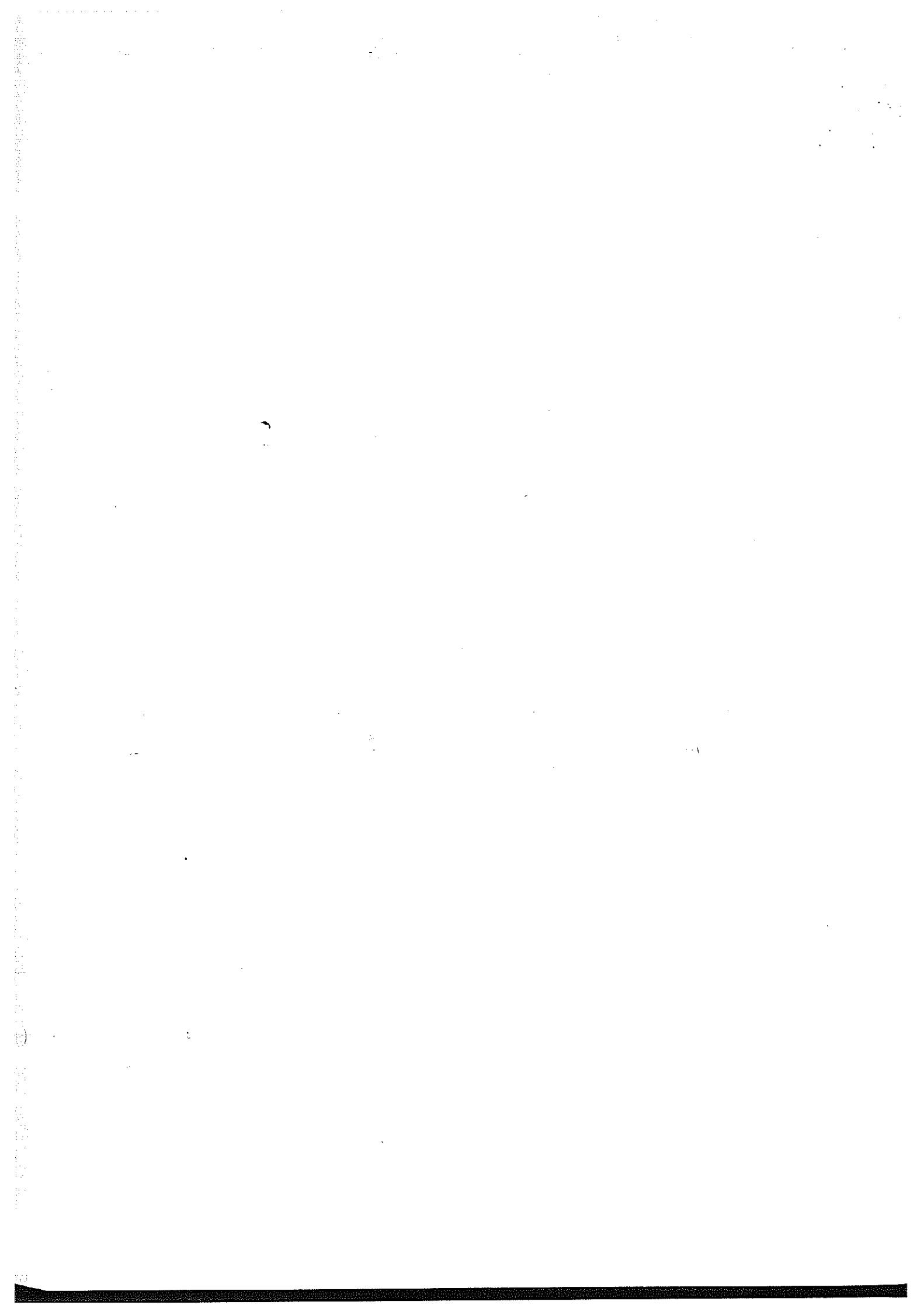
Figura 13.44 Problema 13.18.

- 13.19 Consideriamo l'urto tra la palla e la porta discussa nell'Esercizio 13.29 (Figura 13.32). (a) Ammettendo che l'urto sia elastico (cioè che l'energia cinetica del sistema si conservi), dimostrare che

$$v_f = v_i \frac{Ma^2 - 3mD^2}{Ma^2 + 3mD^2}$$

$$\omega = v_i \frac{6mD}{Ma^2 + 3mD^2}$$

- (b) Usare le espressioni riportate sopra e i valori dati nell'Esercizio 13.29 per calcolare v_f e ω . L'urto discusso nell'Esercizio 13.29 era elastico?



OSCILLAZIONI

14.1 INTRODUZIONE

Un tipo di moto comune in natura è il *moto oscillatorio*, o *moto periodico*. Molti fenomeni hanno carattere periodico: basta pensare al battito cardiaco, alle stagioni dell'anno, all'oscillazione del pendolo di un vecchio orologio, alle vibrazioni degli atomi nei solidi, alla corrente elettrica che scorre nei fili della lampadina, e si potrebbe continuare a lungo. Sulla scala più vasta, alcuni cosmologi ritengono che l'intero universo potrebbe essere oscillante, con un intervallo di tempo di decine di miliardi di anni tra un'oscillazione e l'altra.

Due tipi di moto strettamente connessi con il moto oscillatorio sono il moto circolare (o quasi circolare) e il moto ondulatorio. Il moto circolare è trattato in questo capitolo, mentre il moto ondulatorio sarà trattato nel Capitolo 20.

14.2 CINEMATICA DEL MOTO ARMONICO

Il tipo più semplice di moto oscillatorio è chiamato *moto armonico*. Supponiamo di appendere un blocco metallico a una molla attaccata al soffitto: se si solleva leggermente il blocco dalla sua posizione di equilibrio e lo si lascia andare, il blocco oscilla su e giù. Questo è un esempio di moto armonico. Nello studio di tale moto, è importante acquistare familiarità con la terminologia e con i simboli matematici utilizzati; perciò cominciamo a introdurre le equazioni e la terminologia proprie del moto armonico.

Definiamo moto armonico il moto di un punto materiale che si muove sull'asse x in modo tale che la sua coordinata x cambi nel tempo secondo la seguente legge:

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (14.1)$$

Coordinata x di un corpo che si muove di moto armonico.

Detto in altro modo, se un sistema ha un solo grado di libertà e la coordinata che lo descrive (si chiama essa x o in altro modo) cambia nel tempo seguendo la (14.1), allora si dice che lo sviluppo temporale del sistema è di tipo *armonico*.

Mentre il corpo oscilla avanti e indietro (o su e giù come nell'esempio appena accennato), x varia sinusoidalmente con il tempo (cioè come un seno o un coseno) tra $x = A$ e $x = -A$ (Figura 14.1). A viene chiamata *ampiezza* perché è la distanza massima tra il corpo e la posizione centrale corrispondente a $x = 0$. Il simbolo ω rappresenta la *pulsazione* o *frequenza angolare*, e, come vedremo, il suo valore dipende dal ritmo delle oscillazioni. Il parametro ϕ è chiamato *costante di fase* e dipende dalla scelta dell'istante in cui si comincia la misura ($t = 0$). La grandezza tra parentesi, cioè l'argomento del coseno $\omega t + \phi$, prende il nome di *fase*. Nel prossimo paragrafo forniremo una descrizione dinamica del moto armonico che conduce all'Equazione (14.1).

Una caratteristica di qualunque moto oscillatorio, e anche del moto armonico, è il fatto che il moto si ripete dopo un intervallo di tempo caratteristico, che viene chiamato *periodo* T . Vale a dire che il *corpo compie un ciclo completo del suo moto durante l'intervallo di tempo T* , come mostra la Figura 14.1. Quindi, in un ciclo completo, la fase $(\omega t + \phi)$ aumenta di 2π rad mentre il tempo t aumenta di T , ossia

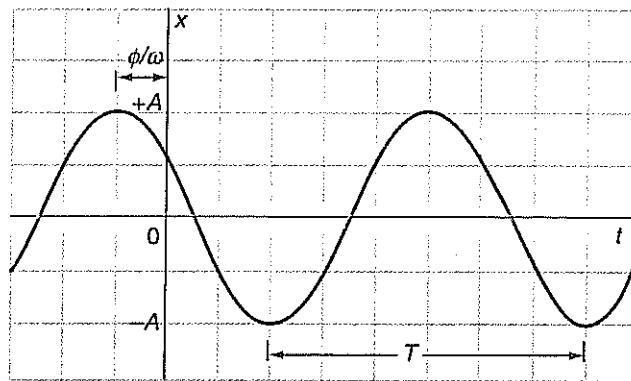
$$\omega(t + T) + \phi = (\omega t + \phi) + 2\pi$$

Definizioni dell'ampiezza A , della pulsazione ω , della costante di fase ϕ , e della fase $(\omega t + \phi)$.

Definizione del periodo T .

Figura 14.1

La coordinata x in funzione del tempo t per un corpo che si muove di moto armonico.



Sottraendo $\omega t + \phi$ da entrambi i membri si ottiene $\omega T = 2\pi$, ossia

Relazione tra T e ω .

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1)$$

Il periodo T è inversamente proporzionale a ω ; quanto maggiore è la pulsazione, minore è il periodo e tanto più rapidamente il corpo completa un ciclo.

Oltre a T e ω , c'è una terza grandezza che viene usata per specificare il ritmo oscillazioni, la *frequenza* ν :

Definizione della frequenza ν .

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (2)$$

Dal momento che T è il tempo richiesto per effettuare un ciclo, ν è il numero de per unità di tempo. Sostituendo $T = 2\pi/\omega$ nell'Equazione (14.3), si ottiene $\nu = \omega/2\pi$, ossia

$$2\pi\nu = \omega$$

Radianti e cicli sono adimensionali, e quindi ν e ω hanno le stesse dimensioni, cioè di un [tempo]⁻¹. Le unità SI per queste grandezze strettamente connesse sono differenti: rad/s nel caso di ω e Hz (hertz) nel caso di ν ¹. A titolo di esempio, supponiamo un corpo che si muove di moto armonico abbia un periodo $T = 2\text{ s}$. Allora la frequenza è $\nu = 1/(2\text{ s}) = 0.5\text{ s}^{-1} = 0.5\text{ Hz}$ e la pulsazione è $\omega = 2\pi(0.5\text{ Hz}) = \pi\text{ rad/s}$.

Possiamo trovare la velocità e l'accelerazione di un corpo che compie un moto armonico applicando i procedimenti già introdotti per lo studio della cinematica del Capitolo 3: data un'espressione di x , si determinano $v_x = dx/dt$ e $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$. Derivando la x dell'Equazione (14.1) rispetto a t (si veda l'Appendice) si trova

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (3)$$

Derivando una seconda volta, si ha

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (4)$$

La derivata di una funzione che varia sinusoidalmente è ancora una funzione che varia sinusoidalmente con la medesima frequenza. Quindi v_x e a_x oscillano con la stessa frequenza di x , come mostra la Figura 14.2. Si noti che ogni derivazione comporta moltiplicazione del coefficiente della funzione per il fattore ω ; x oscilla tra A e $-A$, v_x oscilla tra ωA e $-\omega A$ mentre a_x oscilla tra $\omega^2 A$ e $-\omega^2 A$. Quindi la velocità del corpo ha modulo massimo $v_{\max} = \omega A$ e l'accelerazione ha modulo massimo $a_{\max} = \omega^2 A$.

Un altro effetto di ciascuna derivazione è una variazione della fase di $\frac{\pi}{2}$ rad, di 90° . Confrontando i grafici di x e di v_x nella Figura 14.2, si vede che v_x passa ogni massimo e ogni minimo un quarto di periodo prima di x .

La componente della velocità nel moto armonico.

La componente dell'accelerazione nel moto armonico.

¹ Una frequenza di 1 ciclo/s = 1 Hz. L'hertz prende nome da H.R. Hertz (1857-1894), i cui contributi saranno discussi nel Volume 2.

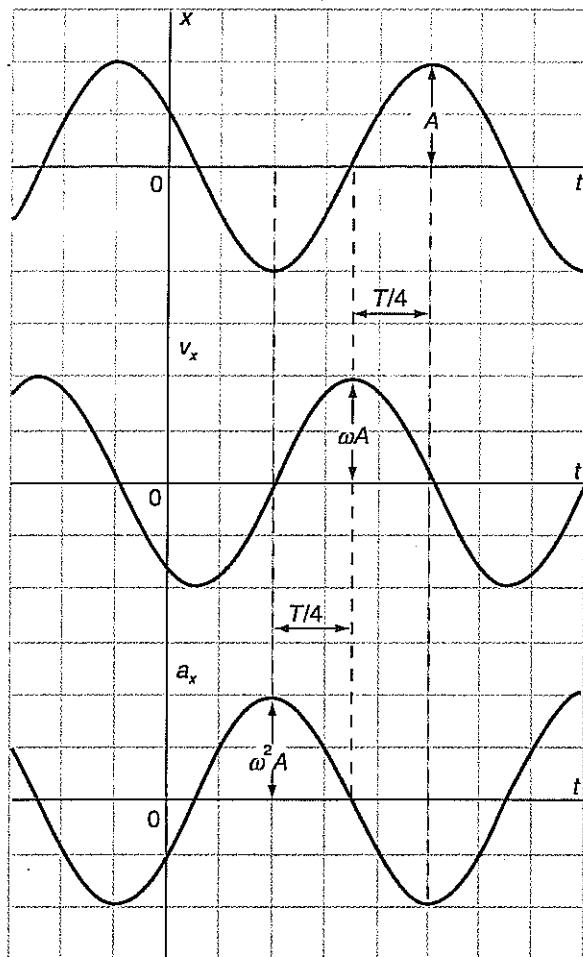


Figura 14.2 Le relazioni tra x , v_x e a_x per un corpo che compie un moto armonico: x e v_x sono sfasate di $1/2\pi$ rad, ossia di 90° ; v_x e a_x sono sfasate di 90° ; x e a_x sono sfasate di 180° .

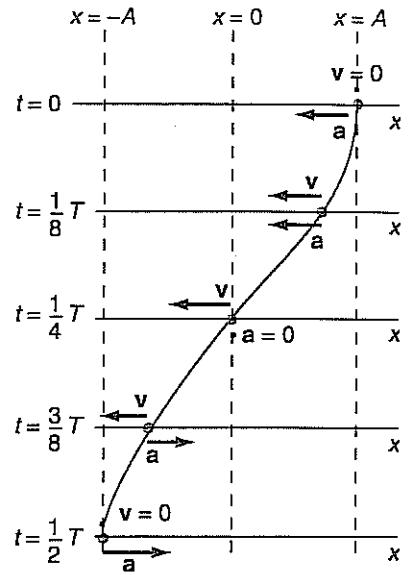


Figura 14.3 Un corpo che si muove di moto armonico rappresentato in cinque diversi istanti di un semiperiodo. Si osservino l'intensità e la direzione della velocità e dell'accelerazione in ciascun istante.

Poiché un quarto di periodo corrisponde a una variazione di fase di $\frac{1}{2}\pi$ rad, ossia di 90° , a volte si descrive questa situazione dicendo che « v_x è in anticipo di 90° su x ». Analogamente, come si può verificare nella figura, a_x è in anticipo di 90° su v_x ed è in anticipo di 180° su x .

La Figura 14.3 mostra un corpo in cinque istanti diversi durante un semiperiodo del suo moto tra $t = 0$ e $t = T/2$. Si è posto $\phi = 0$, di modo che la figura rappresenta un moto che ha luogo tra $x = A$ e $x = -A$. Per chiarire come è stata costruita la figura, determiniamo x , v_x e a_x per $t = 3T/8$. Sostituendo $t = 3T/8$ nella fase, si trova $wt + \phi = (2\pi/T)(3T/8) + 0 = 3\pi/4$, cosicché $x = A \cos 3\pi/4 \approx -0.7 A$; $v_x = -\omega A \sin 3\pi/4 \approx -0.7 \omega A$; e $a_x = -\omega^2 A \cos 3\pi/4 \approx 0.7 \omega^2 A$. Per $t = 3T/8$, la figura mostra il corpo in $x = -0.7 A$, con $v = -0.7 v_{\max} i$ e $a = 0.7 a_{\max} i$. Lasciamo al lettore la verifica dei vari valori negli altri istanti rappresentati nella figura.

Per un corpo che si muove di moto armonico, c'è una relazione diretta tra lo spostamento (xi) e l'accelerazione ($a_x i$). Siccome

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos (\omega t + \phi)$$

e

$$x = A \cos (\omega t + \phi)$$

si ha

$$a_x = -\omega^2 x \quad (14.6)$$

L'accelerazione e lo spostamento del corpo hanno direzioni opposte e moduli proporzionali. Questa relazione identifica un sistema che compie un moto armonico. Nei prossimi paragrafi applicheremo la seconda legge di Newton a svariati sistemi: in cia-

L'accelerazione e lo spostamento hanno direzioni opposte e moduli proporzionali.

Un oscillatore armonico è un sistema che compie un moto armonico.

scun caso stabiliremo che l'accelerazione e lo spostamento hanno direzioni opposte moduli proporzionali. Ne concluderemo che ognuno di questi sistemi compie un moto armonico. Un sistema che compie un moto armonico viene chiamato *oscillatore armonico*.

Esempio 14.1

Un corpo compie un moto armonico con un'ampiezza di 0.17 m e un periodo di 0.84 s. Determinare (a) la frequenza e (b) la pulsazione del moto. Scrivere le espressioni (c) della coordinata, (d) della componente della velocità ed (e) della componente dell'accelerazione in funzione del tempo.

Soluzione

- (a) La frequenza è $\nu = 1/T = 1/(0.84 \text{ s}) = 1.2 \text{ Hz}$.
- (b) La pulsazione è $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(0.84 \text{ s}) = 7.5 \text{ rad/s}$.
- (c) Per l'Equazione (14.1), $x = A \cos(\omega t + \phi)$. Il valore di A è dato e ω è stata trovata nella (b). Per utilizzare questa espressione, bisogna assegnare un valore a ϕ : dal momento che in questo problema nulla ci impone di fare altrimenti, sceglieremo per semplicità $\phi = 0$. Allora

$$x = (0.17 \text{ m}) \cos[(7.5 \text{ rad/s})t]$$

(d) Dall'Equazione (14.4),

$$\begin{aligned} v_x &= -\omega A \sin(\omega t + \phi) \\ &= -(7.5 \text{ rad/s})(0.17 \text{ m}) \sin[(7.5 \text{ rad/s})t] \\ &= -(1.3 \text{ m/s}) \sin[(7.5 \text{ rad/s})t] \end{aligned}$$

Si noti che $v_{\max} = 1.3 \text{ m/s}$.

(e) Dall'Equazione (14.5),

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \\ &= -(7.5 \text{ rad/s})^2(0.17 \text{ m}) \cos[(7.5 \text{ rad/s})t] \\ &= -(9.5 \text{ m/s}^2) \cos[(7.5 \text{ rad/s})t] \end{aligned}$$

Si noti che $a_{\max} = 9.5 \text{ m/s}^2$.

Determinazione di ϕ e di A a partire dalle condizioni iniziali. Spesso, quando si ha a che fare con un sistema che si muove di moto armonico, i valori di ϕ e A non vengono misurati direttamente, ed in generale si conoscono i valori di x_0 e di v_{x0} . Le grandezze x_0 e v_{x0} sono chiamate *condizioni iniziali*. Ora mostreremo come possano determinare ϕ e A a partire dalle condizioni iniziali. Ponendo $t = 0$ nelle Equazioni (14.1) e (14.4), si trova

$$x_0 = A \cos \phi \quad \text{e} \quad v_{x0} = -\omega A \sin \phi \quad (1)$$

Queste equazioni forniscono x_0 e v_{x0} in funzione di ϕ e A , ma noi vogliamo ϕ e A in funzione di x_0 e v_{x0} . Cominciamo a trovare ϕ eliminando A . Dividendo la seconda delle Equazioni (14.7) per la prima, si ha $v_{x0}/x_0 = (-\omega A \sin \phi)/(A \cos \phi) = -\omega \tan \phi$. Risolvendo rispetto a ϕ , si ottiene

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-v_{x0}}{\omega x_0} \quad (1)$$

La costante di fase ϕ in funzione di x_0 e di v_{x0} .

Ora determiniamo A eliminando ϕ . Elevando al quadrato ciascuna delle Equazioni (14.7) e ricordando che $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$, si ha $(v_{x0}/\omega A)^2 + (x_0/A)^2 = 1$, ossia

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2}} \quad (1)$$

L'ampiezza A in funzione di x_0 e di v_{x0} .

Come semplice esempio, determiniamo ϕ e A nel caso in cui il corpo parte da fermo in tal caso $v_{x0} = 0$, e quindi l'Equazione (14.8) fornisce $\phi = \tan^{-1}(0) = 0$, mentre l'Equazione (14.9) fornisce $A = \sqrt{x_0^2 + 0} = |x_0|$. Ciò corrisponde al caso illustrato nella Figura 14.3.

14.3 DINAMICA DEL MOTO ARMONICO

Ora che abbiamo appreso come descrivere il moto armonico, affrontiamo il problema di che cosa lo determini. Come esempio di oscillatore armonico, prenderemo un blocco di massa m connesso a una molla di massa trascurabile e di costante elastica k (Figura 14.4). In questo sistema idealizzato il blocco scivola sulla superficie orizzontale con attrito trascurabile, cosicché la forza esercitata dalla superficie è uguale e opposta al peso del blocco, e la forza risultante che agisce su quest'ultimo è la forza ΣF dovuta alla molla: $\Sigma F = F_m$. Come sappiamo dal Paragrafo 8.4, la forza dovuta alla molla è

$$F_m = -(kx)\mathbf{i} \quad (14.10)$$

dove x è la coordinata del blocco misurata a partire dalla posizione in cui la molla è a riposo, cioè non è né tesa né compressa. Una forza di questo tipo è chiamata *forza di richiamo lineare*: «lineare» perché è direttamente proporzionale allo spostamento $x\mathbf{i}$, e «di richiamo» perché è diretta in verso opposto allo spostamento. Se x è positivo, la forza è diretta verso $-x$, e se x è negativo, la forza è diretta verso $+x$. La forza tende a riportare il corpo verso la posizione centrale ($x = 0$), ed è tanto più intensa quanto maggiore è lo spostamento.

Dal momento che la forza risultante applicata al blocco coincide con la forza della molla, la seconda legge di Newton, $\Sigma F = ma$, fornisce

$$-kx = ma_x$$

Scrivendo a_x come d^2x/dt^2 e riordinando, si ottiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (14.11)$$

La forza di una molla è una forza di richiamo lineare.

L'equazione differenziale per la coordinata x .

La seconda legge di Newton è esplicitata come equazione differenziale nella coordinata x . Una soluzione dell'equazione è un'espressione di x in funzione del tempo che soddisfa l'equazione. Quale funzione del tempo ha una derivata seconda proporzionale alla funzione stessa con il segno cambiato? Abbiamo incontrato una funzione con questa caratteristica nell'ultimo paragrafo: la derivata seconda di una funzione coseno è proporzionale alla funzione stessa con il segno cambiato. (Ciò vale anche per una funzione seno. Si veda l'Esercizio 14.12.) Quindi la soluzione dell'Equazione (14.11) può essere scritta come la (14.1)

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

Come abbiamo visto, la derivata seconda di x rispetto a t è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Sostituendo nell'Equazione (14.11) si ha

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \phi)$$

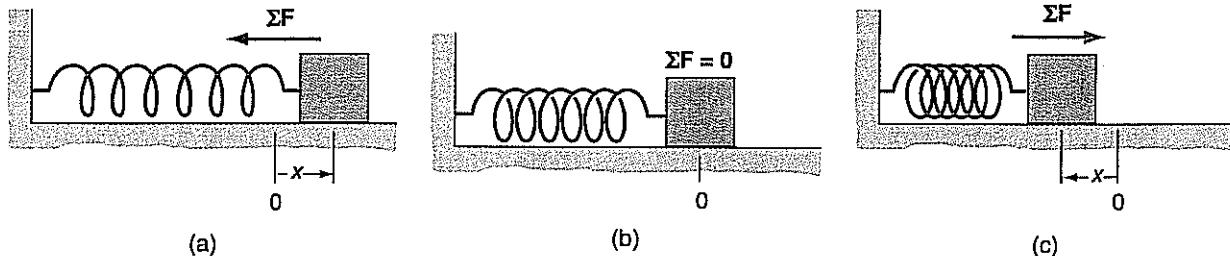


Figura 14.4 Un blocco attaccato a una molla. In questo sistema idealizzato l'attrito è trascurabile e la massa della molla è molto piccola rispetto alla massa del blocco. La forza risultante applicata al blocco è quella dovuta alla molla, $\Sigma F = F_m = -kx\mathbf{i}$. (a) Il blocco è spostato a destra e ΣF è diretta a sinistra. (b) Il blocco è nella posizione di equilibrio e $\Sigma F = 0$. (c) Il blocco è spostato a sinistra e ΣF è diretta a destra. Se il blocco viene allontanato dalla posizione di equilibrio e lasciato andare, si muove di moto armonico.

Quindi l'Equazione (14.1) è una soluzione dell'Equazione (14.11), purché $\omega^2 = k/m$. Ciò significa che il blocco si muove di moto armonico, e che la pulsazione è

La pulsazione espressa in termini della costante della molla k e della massa m .

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (1)$$

Qui abbiamo dimostrato che il moto armonico (14.1) è soluzione dell'equazione differenziale (14.11) verificando che soddisfa l'equazione; tuttavia ciò si può fare se conosce il tipo di funzione che può essere soluzione dell'equazione. In generale, lo che occorre fare è risolvere l'equazione differenziale, ed essendo questa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea, la soluzione è relativamente semplice. Nell'Appendice C sono riportati i metodi di risoluzione per questo tipo di equazioni e per la (14.11) in particolare. Desideriamo sottolineare ancora una volta che il legame fra moto e cause del moto (le forze) consiste in equazioni differenziali: il secondo principio della dinamica che, più in generale, le equazioni cardinali della meccanica sono equazioni differenziali.

Nel caso di una molla forte (k grande) o di una massa piccola, le oscillazioni sono rapide, e nel caso di una molla debole (k piccola) o di una massa grande, le oscillazioni sono lente. Queste affermazioni sono in accordo con l'esperienza ordinaria dei sistemi oscillanti comprendenti molle. Abbiamo stabilito che cosa causa il moto armonico è una forza risultante che sia una forza di richiamo lineare.

La conclusione cui siamo pervenuti, che il blocco compie un moto armonico di pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$, può essere verificata confrontando l'Equazione (14.11) con l'Equazione (14.6), $a_x = -\omega^2 x$. Se scriviamo l'Equazione (14.11) con ax in luogo di d^2x/dt^2 , il confronto dà

$$a_x = -\frac{k}{m}x \quad \text{e} \quad a_x = -\omega^2 x$$

Se $\omega^2 = k/m$, le due equazioni coincidono.

Esempio 14.2

Supponiamo che il blocco della Figura 14.4 abbia una massa di 0.31 kg e che la costante della molla sia 63 N/m. Il blocco viene spostato in modo che la molla si allunga di 0.074 m, e poi viene lasciato andare per $t = 0$. (a) Determinare ω , T e v . (b) Scrivere le espressioni di x , v_x e a_x .

Soluzione

(a) La pulsazione è

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{63 \text{ N/m}}{0.31 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad/s}$$

Il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.31 \text{ kg}}{63 \text{ N/m}}} = 0.44 \text{ s}$$

La frequenza è

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{63 \text{ N/m}}{0.30 \text{ kg}}} = 2.3 \text{ Hz}$$

(b) Dal momento che il blocco è stato lasciato andare con velocità iniziale nulla e con la molla già allungata di 0.074 m, $x_0 = 0.074 \text{ m}$ e $v_{x0} = 0$. Pertanto, $\phi = 0$ e

$$x = (0.074 \text{ m}) \cos [(14 \text{ rad/s})t]$$

Si ha $v_{max} = \omega A = (14 \text{ rad/s})(0.074 \text{ m}) = 1.1 \text{ m/s}$, e quindi

$$v_x = -(1.1 \text{ m/s}) \sin [(14 \text{ rad/s})t]$$

Inoltre $a_{max} = \omega^2 A = (14 \text{ rad/s})^2(0.074 \text{ m}) = 15 \text{ m/s}^2$, perciò

$$a_x = -(15 \text{ m/s}^2) \cos [(14 \text{ rad/s})t]$$

14.4 L'ENERGIA DELL'OSCILLATORE ARMONICO

Nel Capitolo 9 abbiamo stabilito che la forza esercitata da una molla è una forza conservativa e che l'espressione dell'energia potenziale di una molla è $U = \frac{1}{2}kx^2$.

Usando l'Equazione (14.1), si trova che l'energia potenziale del nostro oscillatore armonico ideale formato dal blocco e dalla molla di Figura 14.4 è $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k[A \cos(\omega t + \phi)]^2$, ossia

$$U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (14.13)$$

Energia potenziale di un oscillatore armonico.

In modo analogo possiamo servirci dell'Equazione (14.4) per trovare l'energia cinetica del sistema blocco-molla: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[-\omega A \sin(\omega t + \phi)]^2$, ossia

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (14.14)$$

Energia cinetica di un oscillatore armonico.

Il valore massimo del quadrato di una funzione seno o coseno è 1, e quindi possiamo esprimere queste energie nella forma

$$\begin{aligned} U &= U_{\max} \cos^2(\omega t + \phi) \\ K &= K_{\max} \sin^2(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

dove $U_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$ e $K_{\max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$. Siccome $\omega^2 = k/m$, $K_{\max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m(k/m)A^2 = \frac{1}{2}kA^2$, ossia

$$K_{\max} = U_{\max}$$

Nell'oscillatore blocco-molla, soltanto la forza della molla compie lavoro. Di conseguenza, l'energia meccanica dell'oscillatore è

$$E = K + U = K_{\max} \sin^2(\omega t + \phi) + U_{\max} \cos^2(\omega t + \phi)$$

Facendo uso delle relazioni $K_{\max} = U_{\max}$ e $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, si ha $E = K_{\max} = U_{\max}$, ovvero

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (14.15)$$

Energia meccanica di un oscillatore armonico.

L'energia meccanica dell'oscillatore è costante: ciò era prevedibile, in quanto l'unica forza agente sul punto materiale, che causa il moto armonico, è una forza conservativa, come si è visto nel Capitolo 9.

I grafici di K e U in funzione del tempo sono riportati nella Figura 14.5 (dove, per semplicità, $\phi = 0$). Entrambe le funzioni oscillano tra zero ed E . L'energia dell'oscillatore si converte continuamente da potenziale a cinetica, e viceversa.

Le Equazioni (14.13) e (14.14) danno l'energia potenziale e l'energia cinetica in funzione del tempo. Ora esprimiamo queste energie in funzione della coordinata x .

L'equazione che dà l'energia potenziale in funzione di x è $U = \frac{1}{2}kx^2$. Ci serviamo della conservazione dell'energia per trovare l'espressione di K in funzione di x : $E = K + U = K + \frac{1}{2}kx^2$, ossia

$$K = E - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

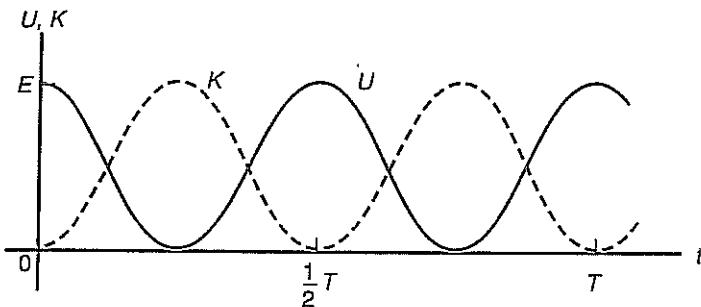


Figura 14.5 L'energia potenziale U e l'energia cinetica K in funzione del tempo t per un oscillatore armonico ($\phi = 0$). Si noti che $E = U_{\max} = K_{\max}$.

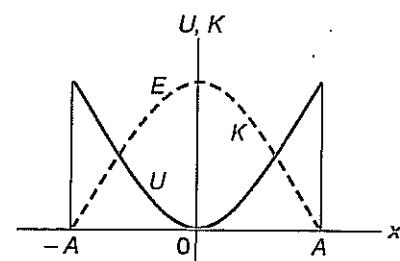


Figura 14.6 L'energia potenziale U e l'energia cinetica in funzione della coordinata x per un oscillatore armonico.

Nella Figura 14.6 sono riportati i grafici di U e K in funzione di x . Entrambe le curve sono parabole centrate su $x = 0$. Supponiamo di voler individuare il punto in cui le due curve si intersecano: in questo punto $U = K$, ossia $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}E$. Risolvendo rispetto a x , si trova $x = \pm A/\sqrt{2} \approx \pm 0.7A$.

Esempio 14.3

Supponiamo che in un sistema blocco-molla sia $k = 18 \text{ N/m}$ e $m = 0.71 \text{ kg}$. Il sistema oscilla un'ampiezza $A = 54 \text{ mm}$. (a) Determinare la pulsazione delle oscillazioni. (b) Ricavare un'espressione del modulo della velocità v del blocco in funzione di x e usare tale espressione per calcolare v quando $x = 34 \text{ mm}$. (c) Ricavare un'espressione della distanza $|x|$ del blocco dal punto centrale in funzione del modulo della velocità v , e servirsi di tale espressione per trovare $|x|$ quando $v = 0.18 \text{ m/s}$.

Soluzione

(a) La pulsazione è

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{18 \text{ N/m}}{0.71 \text{ kg}}} = 5.0 \text{ rad/s}$$

(b) Utilizzando la conservazione dell'energia con $E = \frac{1}{2}kA^2$, si ha

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Risolvendo rispetto a v si ottiene

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

dove si è usata la relazione $\omega = \sqrt{k/m}$. Il modulo della velocità per $x = 34 \text{ mm}$ è

$$v = (5.0 \text{ rad/s}) \sqrt{(0.054 \text{ m})^2 - (0.034 \text{ m})^2} = 0.21 \text{ m/s}$$

(c) Dalla conservazione dell'energia con $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$, si ha

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Risolvendo rispetto a $\sqrt{x^2} = |x|$, si ottiene

$$|x| = \sqrt{A^2 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$$

Perciò, quando $v = 0.18 \text{ m/s}$,

$$|x| = \sqrt{(0.054 \text{ m})^2 - \left(\frac{0.18 \text{ m/s}}{5.0 \text{ rad/s}}\right)^2} = 40 \text{ mm}$$

14.5 ESEMPI DI MOTO ARMONICO

Come primo esempio di moto armonico, abbiamo discusso il caso di un corpo attaccato a una leggera molla orizzontale e in moto su una superficie anch'essa orizzontale. La forza risultante era quella della molla, e si supponeva che gli effetti dissipativi d-

l'attrito fossero trascurabili. L'accelerazione del corpo era proporzionale al suo spostamento, ma aveva direzione opposta. Vi sono molti altri sistemi che si muovono in modo che l'accelerazione sia sostanzialmente proporzionale allo spostamento ma abbia direzione opposta, cioè che si muovono di moto armonico. Qui considereremo, a titolo di esempi, alcuni di questi sistemi.

Corpo appeso a una molla verticale. Supponiamo che una molla di massa trascurabile e con costante elastica k sia appesa in posizione verticale a un supporto, come mostra la Figura 14.7a. Inizialmente la molla non è né tesa né compressa. Quindi, all'altra estremità della molla viene attaccato un blocco di massa m , che viene lasciato abbassare lentamente finché non raggiunge la posizione d'equilibrio, come mostra la Figura 14.7b. In questa configurazione la molla ha subito un allungamento ℓ ed esercita sul blocco una forza diretta verso l'alto di intensità $k\ell$. In tale posizione il blocco è in equilibrio, e la forza della molla controbilancia il suo peso, di intensità mg , rivolto verso il basso:

$$k\ell = mg \quad (14.16)$$

Se il blocco viene spostato verticalmente e allontanato da questa posizione di equilibrio, la forza della molla non controbilancia più il peso e il blocco ha una accelerazione. Determiniamo questa accelerazione. Scegliamo l'origine dell'asse y nella posizione di equilibrio, come mostra la Figura 14.7c, nella quale sono anche rappresentate le due forze che agiscono sul blocco quando la sua coordinata è y . Si noti che y fornisce lo spostamento del blocco dalla posizione di equilibrio. Ma la molla ha subito un allungamento $\ell - y$, e quindi esercita una forza diretta verso l'alto di intensità $k(\ell - y)$. Il peso del blocco è diretto verso il basso e la sua intensità è sempre mg . Pertanto la forza risultante ha una componente y data da $\Sigma F_y = k(\ell - y) - mg$. Applicando la seconda legge di Newton si ha

$$\Sigma F_y = k(\ell - y) - mg = ma_y$$

L'Equazione (14.16) determina l'allungamento ℓ della molla quando il blocco è in equilibrio, e quindi $k\ell - mg = 0$. In tal modo l'espressione scritta sopra si semplifica, divenendo $-ky = ma_y$, ossia

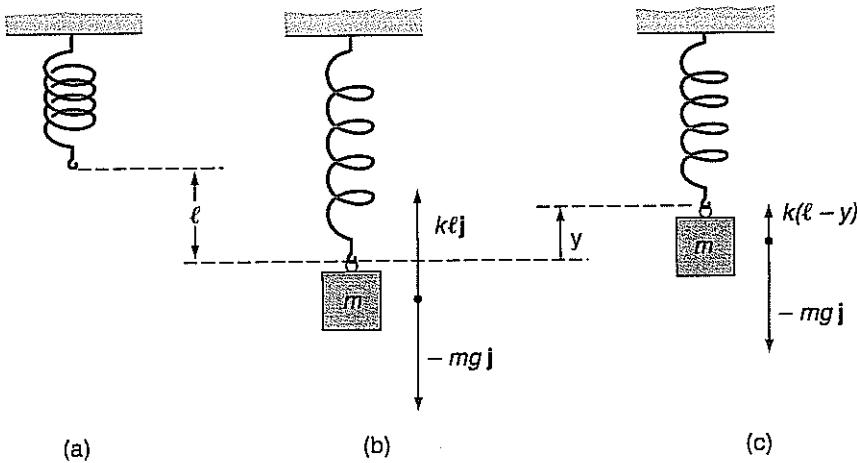
$$a_y = -\frac{k}{m}y \quad (14.17)$$

L'accelerazione del blocco è proporzionale ma opposta al suo spostamento dall'equilibrio.

Si confronti l'Equazione (14.17) con l'equazione caratteristica del moto armonico, Equazione (14.6), $a_x = -\omega^2 x$. Se si esclude il diverso nome della coordinata (y invece di x), le due equazioni coincidono purché sia $\omega^2 = k/m$. Vale a dire che il moto del blocco attaccato alla molla verticale è un moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$. Lo spostamento del blocco dalla posizione di equilibrio è dato da (sostituendo semplicemente x con y nell'Equazione (14.1))

$$y = A \cos(\omega t + \phi) \quad (14.18)$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



Lo spostamento del blocco dalla sua posizione di equilibrio è rappresentato da y .

Un blocco appeso a una molla verticale si muove di moto armonico.

Figura 14.7

(a) Una molla di piccola massa è appesa verticalmente. (b) Il blocco è in equilibrio, con $[k\ell - mg] = 0$. (c) La molla subisce un allungamento $\ell - y$, e la forza risultante è $[k(\ell - y) - mg]j = -kyj$: questa forza tende a riportare il blocco nella sua posizione d'equilibrio.

Esempio 14.4

Un'estremità di una molla di piccola massa è attaccata a un supporto rigido, dal quale la molla è in posizione verticale, come mostra la Figura 14.7. Un blocco di massa 5.0 kg viene attaccato tra estremità della molla e viene fatto abbassare lentamente fino alla posizione d'equilibrio. L'allungamento della molla viene misurato e risulta di 180 mm. Il blocco viene poi tirato in basso di altri 75 mm e viene lasciato andare con velocità iniziale nulla. Determinare (a) la costante della molla, (b) l'ampiezza del moto e (c) il periodo del moto. (d) Determinare altresì l'energia potenziale elastica della molla nell'istante in cui il blocco viene lasciato andare.

Soluzione

(a) Dall'Equazione (14.16), che vale per la configurazione di equilibrio, si ha

$$K = \frac{mg}{\ell} = \frac{(5.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{0.18 \text{ m}} = 270 \text{ N/m}$$

(b) Dal momento che il blocco viene lasciato andare da fermo in $y = -75 \text{ mm}$, oscillerà di 75 mm, secondo l'Equazione (14.18) con $A = 75 \text{ mm}$.

(c) Poiché $\omega = \sqrt{k/m}$ il periodo $T = 2\pi/\omega$ è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5.0 \text{ kg}}{270 \text{ N/m}}} = 0.85 \text{ s}$$

(d) L'energia potenziale elastica della molla dipende dal suo allungamento: nell'istante in cui il blocco viene lasciato andare, la molla ha subito un allungamento rispetto alla lunghezza di riposo di $75 \text{ mm} + 75 \text{ mm} = 255 \text{ mm}$. L'energia potenziale elastica U_m è

$$U_m = \frac{1}{2}(270 \text{ N/m})(0.255 \text{ m})^2 = 8.8 \text{ J}$$

In questo moto l'energia meccanica si conserva, e c'è un continuo interscambio tra energia cinetica e energia potenziale gravitazionale ed energia potenziale elastica. (Si veda l'Esercizio 14.25.)

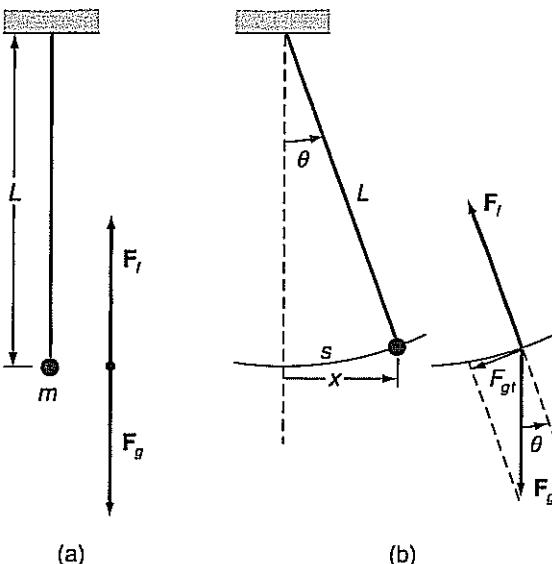
In un pendolo semplice la massa è concentrata a una delle estremità.

Il pendolo semplice. Da molto tempo il moto periodico di un pendolo viene utilizzato negli orologi a pendolo per regolare il meccanismo che fa girare le lancette sul quadrante. Ora vedremo che, per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio, un pendolo compie un moto armonico. Consideriamo per il momento un *pendolo semplice*, cioè un pendolo la cui massa è tutta concentrata a un'estremità mentre il punto di sospensione è all'altra estremità, come nel caso del pendolo di Figura 14.8, forma una sferetta appesa a un filo. La sferetta costituisce il «peso» del pendolo, la cui lunghezza è L .

Nella Figura 14.8a il peso è rappresentato in quiete nella posizione di equilibrio. La forza F_f esercitata dal filo sulla sferetta è equilibrata dal peso F_g di intensità mg . Supponiamo che la sferetta venga leggermente spostata di lato e lasciata andare. La Figura 14.8b mostra la sferetta in un punto dell'arco di circonferenza sul quale oscilla.

Figura 14.8

(a) Il peso del pendolo è in quiete e $F_f + F_g = 0$. (b) Per $x \ll L$, la lunghezza dell'arco $s \approx x$. La componente tangenziale della forza F_g ha modulo $F_g \sin \theta = -mgx/L$.



La componente tangenziale della forza risultante, $\Sigma F_t = -F_g \sin \theta$, produce la componente tangenziale dell'accelerazione a_t , e fa sì che il peso ritorni alla posizione d'equilibrio lungo l'arco. Per la seconda legge di Newton,

$$\Sigma F_t = -mg \sin \theta = ma_t$$

Considereremo soltanto piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio, in modo che la lunghezza s dell'arco sia molto piccola rispetto a L . In tal caso, lo spostamento verticale del peso è molto piccolo rispetto allo spostamento orizzontale, e quindi la lunghezza s dell'arco praticamente coincide con la coordinata x , e $a_t \approx a_x$. Anche la componente tangenziale della forza può essere espressa in termini di x , $-mg \sin \theta = -mgx/L$, poiché, come risulta dalla figura, $\sin \theta = x/L$. Operando queste sostituzioni nella seconda legge di Newton scritta sopra, si ha

$$-\frac{mgx}{L} = ma_x$$

ossia

$$a_x = -\frac{g}{L}x \quad (14.19)$$

Dal momento che a_x è proporzionale a $-x$ per piccoli spostamenti dall'equilibrio, il peso del pendolo si muove di moto armonico.

Confrontando l'Equazione (14.19) con l'Equazione (14.6), $a_x = -\omega^2 x$, si vede che la pulsazione del moto del pendolo semplice è $\omega = \sqrt{g/L}$. Il moto del peso è descritto da

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (14.20)$$

$$\text{dove } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Il periodo $T = 2\pi/\omega$ di un pendolo semplice è dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (14.21)$$

Il pendolo semplice per piccoli spostamenti si muove di moto armonico.

Il periodo di un pendolo semplice è determinato dalla sua lunghezza.

Si noti che il periodo è indipendente dalla massa del pendolo; esso dipende soltanto dalla sua lunghezza e da g . Se il periodo di un pendolo viene determinato con precise misure di tempo, il pendolo può essere usato per valutare g . Misure di precisione effettuate con un pendolo fisico (che viene descritto qui di seguito) consentono di determinare variazioni locali di g dovute a variazioni della densità degli strati superficiali della Terra, e sono quindi utili per la localizzazione dei giacimenti di risorse naturali.

Esempio 14.5

Un astronauta in esplorazione sulla Luna mette in funzione un pendolo semplice lungo 860 mm e ne misura il periodo: quest'ultimo risulta, per piccoli spostamenti, di 4.6 s. Determinare l'accelerazione di gravità in questo punto della superficie lunare.

Soluzione

Risolvendo l'Equazione (14.21) rispetto a g , si ottiene

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 (0.86 \text{ m})}{(4.6 \text{ s})^2} = 1.6 \text{ m/s}^2$$

Il pendolo fisico. Un *pendolo fisico* (o pendolo composto) è un corpo rigido vincolato a ruotare intorno a un asse orizzontale fisso, non passante per il suo centro di massa, come mostra la Figura 14.9. Come abbiamo visto nel Capitolo 13, le equazioni cardinali costituiscono una condizione anche sufficiente per la descrizione del moto di un corpo rigido; in particolare, nel caso di sole rotazioni, l'equazione che le descrive è $\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$. Nel nostro caso il corpo rigido ha un asse fisso e quindi, avendo un solo grado di libertà, è sufficiente una sola equazione scalare per descriverne il moto, quel-

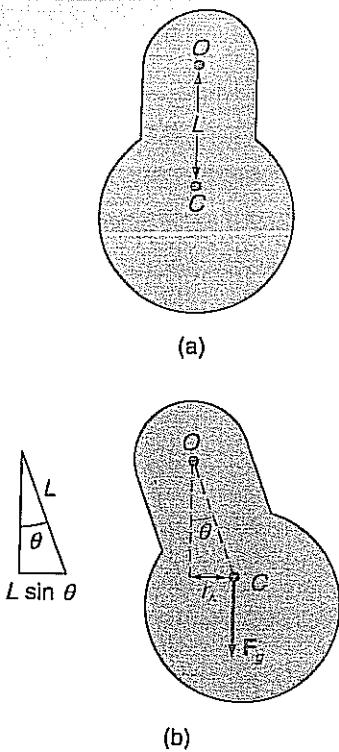


Figura 14.9

(a) Un corpo rigido è in equilibrio rotatorio, con il baricentro C esattamente sotto l'asse di rotazione O . (b) La componente del momento della forza peso F_g è $\tau_z = -r_{\perp}F_g = -(L \sin \theta)(mg)$. L'asse z passa per O ed è uscente dal piano della figura.

la che si ha proiettando l'equazione vettoriale lungo l'asse di rotazione. Sia τ_z l'asse di rotazione, sia $\Sigma\tau_z$ la somma di tutti i momenti delle forze esterne proiettati sull'asse z , allora, ricordando che L_z si può scrivere come $I\omega_z$, l'equazione del moto diventa $\Sigma\tau_z = \frac{d(I\omega_z)}{dt}$, cioè $\Sigma\tau_z = I \frac{d\omega_z}{dt} = I\alpha_z$. È importante capire che questo ragionamento, e quindi la formula precedente, è valido per un qualunque corpo che possa ruotare attorno a un asse fisso. Il pendolo fisico è un caso particolare di questo tipo di moto e, quindi, ne descriveremo il moto utilizzando la formula precedente. Nella Figura 14.9a è rappresentata la posizione di equilibrio del pendolo, con il centro di gravità sulla verticale passante per l'asse a una distanza L da questo. In tale configurazione, la componente τ_z del momento rispetto all'asse di rotazione è nulla.

Se il pendolo viene spostato dalla posizione di equilibrio, come nella Figura 14.9b, la componente τ_z del momento della forza peso tende a produrre una rotazione inversa oraria tale da riportare il pendolo nella posizione di equilibrio. Nella situazione presentata in figura, $L \sin \theta$ è la distanza dell'asse dalla retta d'azione del peso F_g . L'asse z è orientato in verso uscente dal piano della figura, la componente del moto è $\tau_z = -mgL \sin \theta$. Sia $\alpha_z = d^2\theta/dt^2$ la componente dell'accelerazione angolare del corpo rigido con momento di inerzia I rispetto all'asse di rotazione. Applichiamo la seconda legge di Newton per il moto rotatorio, Equazione (13.12), trascurando gli attriti, cosicché l'unico momento applicato al pendolo è quello del peso. Allora

$$\Sigma\tau_z = -mgL \sin \theta = I\alpha_z$$

Dividendo questa equazione per I , si ottiene

$$\alpha_z = -\frac{mgL}{I} \sin \theta \quad (14.1)$$

per il moto di rotazione.

Ora confrontiamo l'Equazione (14.22) con l'Equazione (14.6) caratteristica del moto armonico: $a_x = -\omega^2 x$. I primi membri sono analoghi: $\alpha_z = d^2\theta/dt^2$ è una componente dell'accelerazione angolare e $a_x = d^2x/dt^2$ è una componente dell'accelerazione lineare. La medesima analogia sussisterà anche tra i secondi membri, se il moto è limitato a piccoli spostamenti dall'equilibrio, cosicché $\sin \theta \approx \theta$, ove θ è espresso in radianti. [Per esempio, se $\theta = 0.100$ rad (ossia 5.73°), $\sin 0.100$ rad = 0.0998 \approx 0.1.] Si confrontino i valori di $\sin \theta$ e θ per valori maggiori e minori di θ , ricordando di disporre la calcolatrice per la misura degli angoli in radianti.] Sostituendo $\sin \theta$ con nell'Equazione (14.22), si ottiene

$$\alpha_z = -\frac{mgL}{I} \theta$$

che è perfettamente analoga ad $a_x = -\omega^2 x$, con $\omega^2 = mgL/I$. Quindi, per piccoli spostamenti, la coordinata angolare del pendolo fisico è data da

$$\theta = A \cos(\omega t + \phi) \quad (14.2)$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$.

Essendo θ una coordinata angolare, bisogna fare attenzione all'interpretazione di alcuni dei simboli che compaiono nell'Equazione (14.23). L'ampiezza A rappresenta la massima coordinata angolare θ_{\max} . La pulsazione del moto oscillatorio $\omega = \sqrt{mgL/I}$. Essa va distinta dalla componente della velocità angolare del corpo rigido, $\omega_z = d\theta/dt$. Derivando θ rispetto al tempo nell'Equazione (14.23), si ha

$$\omega_z = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

Questa espressione della componente della velocità angolare del pendolo fisico è analoga a l'espressione $v_x = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$, valida per la componente della velocità lineare nel moto rettilineo. In entrambe, $\omega = 2\pi/T$ è la pulsazione dell'oscillazione.

Un pendolo fisico si muove di moto armonico.

Esempio 14.6

Un'asta sottile e omogenea di massa m e lunghezza D è impenniata a un'estremità in modo da poter ruotare liberamente intorno a un asse orizzontale. Determinare il periodo di questo pendolo per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio.

Soluzione

Per piccoli spostamenti dall'equilibrio, l'asta oscilla con moto armonico di pulsazione $\omega = \sqrt{mgL/I}$. Poiché L rappresenta la distanza dell'asse dal baricentro, situato nel punto medio dell'asta omogenea, $L = \frac{1}{2}D$. Il momento di inerzia dell'asta di lunghezza D rispetto a un asse passante per una sua estremità è $mD^2/3$. (Si veda l'Esempio 12.8, ma si tenga presente che in quel caso il simbolo L era usato per indicare la lunghezza dell'asta.) Operando queste sostituzioni, si ha

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} = \sqrt{\frac{mg \frac{1}{2}D}{mD^2/3}} = \sqrt{\frac{3g}{2D}}$$

Il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{2D}{3g}}$$



Esempio 14.7

Il moto delle gambe di un essere umano o di un animale, durante una normale camminata, può essere schematizzato come il moto di un pendolo fisico. Tale constatazione ha permesso di valutare la velocità di animali ora estinti, come i dinosauri. Infatti, supponendo che la gamba sia un'asta di lunghezza L impenniata a un'estremità in modo da poter ruotare attorno a un asse orizzontale e che gli spostamenti siano piccoli rispetto alla posizione di equilibrio, si può calcolare facilmente il periodo di oscillazione della gamba; conoscendo la lunghezza del passo si può, poi, calcolare la velocità dell'andatura durante la camminata. Se una giraffa ha le zampe lunghe $L = 1.8 \text{ m}$ e una lunghezza del passo di 1.5 m , calcolare la sua velocità di camminata.

Soluzione

Se si schematizza la gamba come un pendolo fisico, si ha che il suo periodo di oscillazione è dato, per le piccole oscillazioni, da $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$, dove I è il momento di inerzia della gamba, rispetto a un asse passante per un suo estremo, cioè $I = \frac{1}{3}mL^2$, m è la sua massa e L la sua lunghezza. Quindi si ottiene $T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{3mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{3g}} = 1.6 \text{ s}$. La velocità della giraffa si ottiene dividendo lo spazio percorso in un passo per il tempo impiegato a percorrerlo, cioè un periodo: $v = \frac{1.5 \text{ m}}{1.6 \text{ s}} \cong 1 \text{ m/s}$.



Il pendolo di torsione. Nella Figura 14.10 sono rappresentati schematicamente due esempi di *pendolo di torsione*. A una fibra verticale è attaccato un corpo rigido, come un disco piatto o un'asta. Il disco di Figura 14.10a può ruotare in un piano orizzontale intorno a un asse passante per la fibra verticale. L'angolo θ misura la rotazione del disco a partire dalla posizione di equilibrio. All'equilibrio, $\theta = 0$ e la fibra non è sottoposta a torsione.

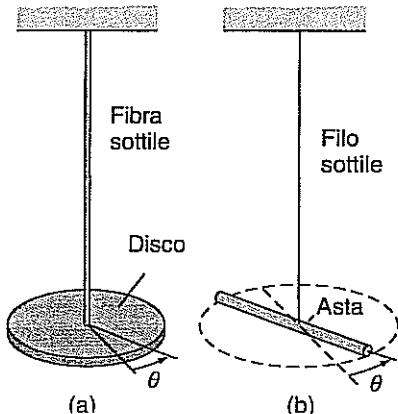


Figura 14.10

Una fibra che subisce una torsione di un angolo θ esercita un momento di richiamo su
(a) un disco orizzontale e
(b) un'asta orizzontale.

Quando subisce una torsione di un angolo θ , la fibra esercita sul disco un momento di richiamo che tende a riportare il disco nella posizione di equilibrio. Per molti tipi di fibra questo momento di richiamo è proporzionale all'angolo di torsione θ . Se l'asse è disposto verticalmente lungo la fibra, allora

$$\tau_z = -k\theta \quad (1)$$

è la componente del momento e k è chiamata *costante di torsione* della fibra.

Supponiamo che soltanto la fibra eserciti un momento sul disco, cioè $\Sigma\tau_z = -k\theta$. Se I è il momento di inerzia del disco rispetto all'asse materializzato dalla fibra, l'Equazione (13.12) dà $-k\theta = I\alpha_z$, ossia

$$\alpha_z = -\frac{k}{I}\theta$$

Dal momento che questa equazione è della forma $\alpha_z = -\omega^2\theta$, il disco si muove in moto armonico nella coordinata angolare θ con $\omega^2 = k/I$:

$$\theta = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$.

Esempio 14.8

Una matita di massa $m = 10 \text{ g}$ e lunghezza $L = 200 \text{ mm}$ è sospesa nel suo punto medio a un filo, come mostra la Figura 14.10b. Il sistema viene messo in moto come pendolo di torsione e si serve che il periodo è di 4 s. (a) Calcolare la costante di torsione del filo. (b) Se l'ampiezza è di 3 rad, determinare l'intensità massima del momento di richiamo che agisce sulla matita.

Soluzione

(a) Siccome per un pendolo di torsione $\omega = \sqrt{k/I}$, si ha $k = \omega^2 I = 4\pi^2 I/T^2$, dove $T = 2\pi/\omega$ è il periodo. In base alla Tabella 12.2, la matita ha un momento di inerzia $I = mL^2/12$.

$$\begin{aligned} K &= \frac{4\pi^2 m L^2}{12 T^2} = \frac{m \pi^2 L^2}{3 T^2} \\ &= \frac{(0.01 \text{ kg}) \pi^2 (0.2 \text{ m})^2}{(3)(4 \text{ s})^2} = 8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1} \end{aligned}$$

(b) L'ampiezza è il valore massimo di θ : $\theta_{\max} = A = 3 \text{ rad}$. (Un pendolo di torsione di questo tipo può compiere un moto armonico anche se l'angolo θ non è piccolo.) Dall'Equazione (14.24),

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= |\tau_z|_{\max} = k\theta_{\max} = (8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1})(3 \text{ rad}) \\ &= 2 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

14.6 MOTO ARMONICO E MOTO CIRCOLARE UNIFORME

C'è un'intima connessione tra il moto armonico di un corpo che si muove lungo una retta come l'asse x , e il moto circolare uniforme di un punto materiale. Analizzare questa connessione può aiutarci a capire meglio entrambi i tipi di moto e a renderci consapevoli di come altri tipi di moto siano correlati al moto armonico.

Consideriamo una particella o un punto materiale Q che si muove con velocità costante lungo una circonferenza di raggio A , come mostra la Figura 14.11. Il raggio OQ condotto dall'origine al punto Q forma un angolo θ con il semiasse positivo x . Dal momento che il punto Q si muove con velocità costante, l'angolo θ varia in modo uniforme e $d\theta/dt = \omega_z$. (Vedi Paragrafo 12.6.) Nel caso illustrato in figura, ω_z è positiva e noi tralascieremo il pedice z , usando la velocità angolare $\omega = v/A$. Siccome ω è costante, si ha $\theta = \omega t + \phi$, dove la costante di fase ϕ è il valore iniziale di θ .

Ora determiniamo la coordinata x del punto Q , che è anche la coordinata x del punto P sull'asse x . Dalla figura si ricava $x = A \cos \theta$, ossia con $\theta = \omega t + \phi$,

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

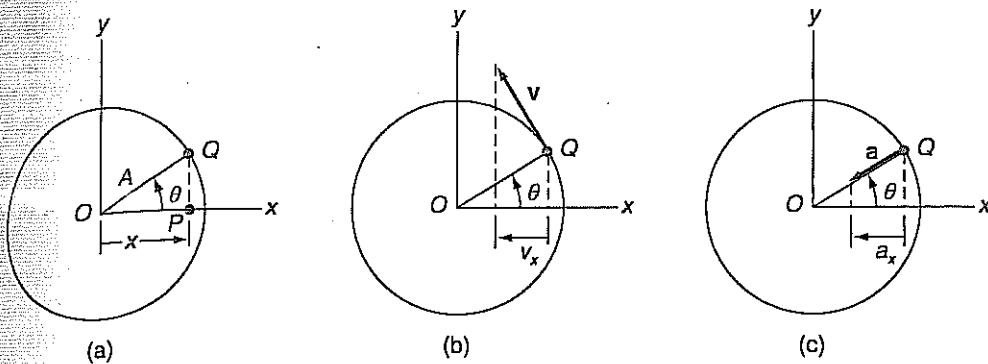


Figura 14.11 Il punto Q si muove in senso antiorario su una circonferenza di raggio A , con velocità angolare costante ω , cosicché $\theta = \omega t + \phi$. (a) La coordinata x di Q e di P è $x = A \cos \theta = A \cos (\omega t + \phi)$. (b) La componente x della velocità di Q e di P è $v_x = v \cos (\theta + \pi/2) = -\omega A \sin (\omega t + \phi)$. (c) La componente x dell'accelerazione di Q e di P è $a_x = a \cos (\theta + \pi) = -\omega^2 A \cos (\omega t + \phi)$.

che coincide con l'Equazione (14.1) del moto armonico. Quindi, mentre il punto Q si muove su una circonferenza con velocità costante, il punto P si muove lungo l'asse x con moto armonico.

Possiamo pensare al punto P come alla *proiezione* del punto Q sull'asse x . La proiezione può essere realizzata fisicamente usando la luce proveniente da un proiettore per diapositive posto a una certa distanza per osservare su uno schermo l'ombra di una particella che si muove su una circonferenza. Un dispositivo di questo tipo è rappresentato schematicamente nella Figura 14.12.

Possiamo anche prendere in considerazione le componenti x della velocità e dell'accelerazione del punto Q nel suo moto circolare uniforme. La velocità è tangente alla traiettoria circolare, come mostra la Figura 14.11b. L'angolo compreso tra la velocità e il semiasse positivo x è $\theta + \pi/2$. La componente della velocità è

$$v_x = v \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -v \sin \theta$$

Ma $v = \omega A$ e $\theta = \omega t + \phi$, cosicché

$$v_x = -\omega A \sin (\omega t + \phi)$$

che coincide con l'Equazione (14.4) per la componente della velocità di un punto P che si muove di moto armonico.

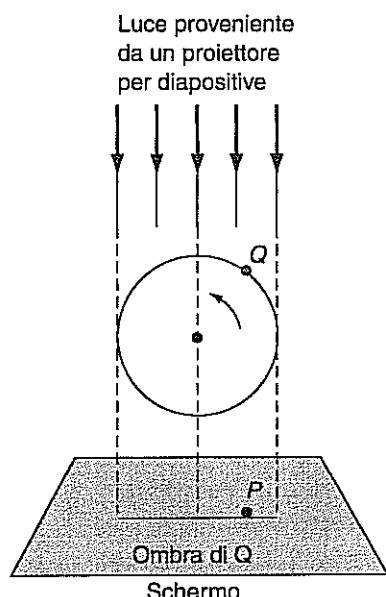


Figura 14.12
La luce proveniente da un proiettore per diapositive illumina un corpo Q in rotazione con velocità angolare costante sul piatto di un giradischi. L'ombra di Q su uno schermo si muove di moto armonico lungo un segmento di retta.

L'accelerazione di un moto circolare uniforme è l'accelerazione centripeta, la quale, come sappiamo dal Paragrafo 12.6, è diretta verso il centro e ha modulo $a = v^2/A =$

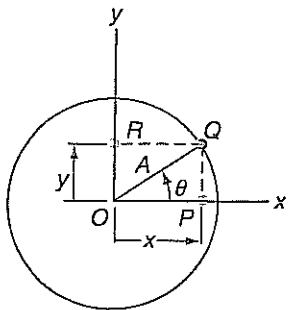


Figura 14.13

Il punto P è la proiezione di Q sull'asse x , e il punto R è la proiezione di Q sull'asse y .

Il moto circolare uniforme è la composizione di due moti armonici.

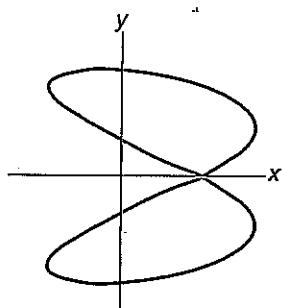


Figura 14.14

Una figura di Lissajous in cui la componente x del moto ha pulsazione ω doppia di quella della componente y .

L'energia meccanica viene dissipata dall'attrito, e il moto è smorzato.

sta alla direzione del vettore posizione che va da O a Q . Pertanto a forma un $\theta + \pi$ con il semiasse positivo x . La componente dell'accelerazione è $a_x = (\theta + \pi) = -a \cos \theta$. Sostituendo $a = \omega^2 A$ e $\theta = \omega t + \phi$ si ottiene

$$a_x = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$$

che coincide con l'Equazione (14.5) per la componente dell'accelerazione di P che si muove di moto armonico.

Quindi per quanto riguarda la coordinata, la velocità e l'accelerazione, la componente x del moto di una particella che percorre una circonferenza di raggio A con velocità angolare costante ω è equivalente a un moto armonico con ampiezza A e pulsazione ω . Conclusioni analoghe valgono per la componente y del moto. Per esempio la coordinata y del punto Q nella Figura 14.13 è

$$y = A \sin(\omega t + \phi)$$

che è anche la coordinata y del punto R , proiezione del punto Q sull'asse y . Questo moto lungo l'asse y è un moto armonico di ampiezza A e pulsazione ω , che nell'espressione di y compaia un seno e in quella di x un coseno indica che la componente x e la componente y del moto c'è una differenza di fase di $\pi/2$.

Abbiamo visto che il moto armonico è equivalente alla proiezione di un moto circolare uniforme sull'asse x o sull'asse y , o su qualunque diametro della circonferenza. Possiamo anche considerare questa equivalenza in senso inverso: il moto circolare uniforme è equivalente alla composizione di due moti armonici lungo diametri perpendicolari (come gli assi x e y). I due moti devono avere la stessa ampiezza e la stessa pulsazione e fra di essi deve esserci una differenza di fase di $\pi/2$. In altri termini, una particella materiale che si muove su una traiettoria circolare di raggio A con velocità angolare costante ω ha coordinate date da

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad y = A \sin(\omega t + \phi) \quad (14.26)$$

Componendo dei moti armonici si possono ottenere anche moti più complessi. Combinando moti della forma data dalle Equazioni (14.26), si possono generare figure bidimensionali, chiamate *figure di Lissajous*. Per ottenere figure circolari si devono rendere diverse le ampiezze o le pulsazioni, oppure si deve cambiare la differenza di fase. Nella Figura 14.14 è rappresentato un esempio di queste figure, nel quale la pulsazione della componente x del moto è doppia di quella della componente y .

Anche le complicate vibrazioni degli atomi in un cristallo possono essere rappresentate come composizioni di moti armonici. Nel modello più semplice, un atomo si muove con tre moti armonici lungo tre direzioni mutuamente perpendicolari: ci servirà di questa idea nel Capitolo 18 per comprendere la risposta di una sostanza a una variazione della temperatura.

14.7 IL MOTO ARMONICO SMORZATO

Nella nostra discussione delle oscillazioni finora abbiamo trascurato effetti dissipativi come quelli dovuti agli attriti. Questi effetti sono quasi sempre presenti, e spesso non possono essere trascurati. Supponiamo che un pendolo venga messo in moto: anche se può compiere molte oscillazioni prima che si noti una diminuzione dell'ampiezza, il moto finirà per arrestarsi o per «smorzarsi totalmente» a meno che non si reintegri energia meccanica dissipata dall'attrito.

Consideriamo un sistema blocco-molla che oscilla verticalmente intorno alla posizione di equilibrio situata in $y = 0$. Come abbiamo visto nel Paragrafo 14.5, la componente della forza risultante è $\Sigma F_y = -ky$ e il moto è un moto armonico se si trascurano le forze dissipative. Possiamo studiare gli effetti della dissipazione aggiungendo un meccanismo di smorzamento, come quello rappresentato schematicamente in Figura 14.15. Una paletta solidale con il corpo oscillante è immersa in un fluido, e su di essa esercita una resistenza d'attrito o forza di smorzamento. Tale forza agisce

direzione opposta a quella della velocità del corpo. Variando la forma della paletta e usando fluidi diversi questa forza di smorzamento può essere resa grande o piccola.

Un semplice modello per la forza di smorzamento è quello in cui essa è proporzionale alla velocità del blocco ma ha direzione opposta: $F_S = -bv$, dove b è una costante che dipende dal fluido e dalla forma della paletta. Dal momento che la forza ha verso opposto alla velocità, essa compie un lavoro negativo per qualunque spostamento del blocco.

Vale a dire che questa forza fa diminuire l'energia meccanica dell'oscillatore.

Includendo questa forza nella seconda legge di Newton relativa al blocco, si ha

$$\Sigma F_y = -ky - bv_y = ma_y$$

ossia

$$a_y = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}v_y \quad (14.27)$$

che, scritta esplicitando le derivate, diventa

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

Questa, che viene detta l'*equazione del moto dell'oscillatore armonico smorzato*, è un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare, omogenea e a coefficienti costanti. La sua soluzione si ottiene utilizzando le espressioni (C.3), (C.4) e (C.5) dell'Appendice C, a seconda dei valori di b , m e k .

Un tipo di soluzione, valida nel caso di smorzamento relativamente piccolo è:

$$y = e^{-\gamma t} A \cos(\omega_s t + \phi) \quad (14.28)$$

dove $\gamma = b/2m$ e $\omega_s = \sqrt{k/m - (b/2m)^2}$. Questa soluzione è valida per $(b/2m)^2 < k/m$. Prescindendo dal fattore esponenziale $e^{-\gamma t}$, la soluzione rappresenta un moto armonico con pulsazione ω_s minore della pulsazione «naturale» o «propria» $\omega = \sqrt{k/m}$, cioè della pulsazione in assenza di smorzamento (se $b = 0$). Il fattore esponenziale decresce continuamente e tende a zero al crescere di t . In effetti, l'oscillazione ha un'ampiezza continuamente decrescente. Il moto è detto *sottosmorzato*. Nella Figura 14.16 è rappresentato graficamente un esempio di questo tipo, nel quale $(b/2m)^2 = 0.0050 \text{ k/m}$, e quindi $\gamma = 0.071\omega_s$.

La soluzione dell'Equazione (14.27) è qualitativamente diversa per smorzamenti grandi. Se $(b/2m)^2 > k/m$, la forza di smorzamento impedisce del tutto le oscillazioni, e il moto è detto *sovrasmorzato*. Come risulta dalla Figura 14.17, un oscillatore sovrasmorzato allontanato inizialmente dall'equilibrio si riavvicina lentamente alla posizione di equilibrio senza oltrepassarla. La forma della soluzione sovrasmorzata è data dall'espressione (C.4) dell'Appendice C e viene discussa nell'Esercizio 14.44.

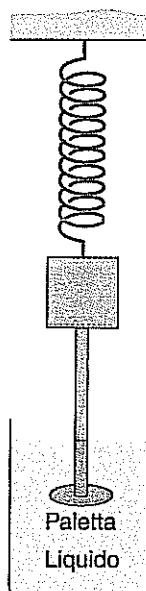


Figura 14.15

A un blocco che oscilla è attaccata una paletta smorzatrice. Il liquido esercita sulla paletta in moto una forza di smorzamento.

Soluzione per l'oscillatore sottosmorzato.

Soluzione per l'oscillatore sovrasmorzato.

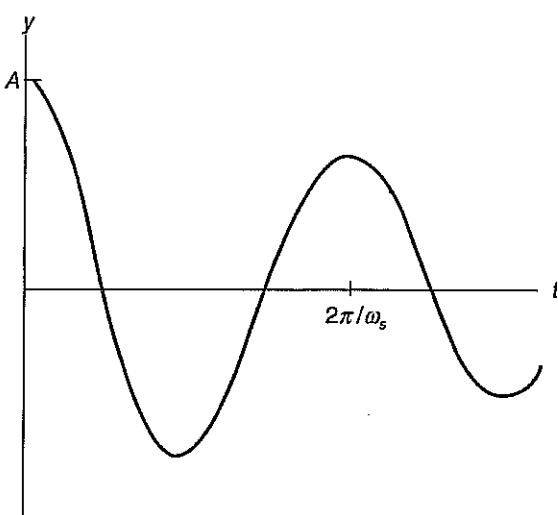


Figura 14.16 La soluzione per un oscillatore armonico sottosmorzato con $(b/2m)^2 = 0.005 \text{ k/m}$ e quindi $\gamma = 0.071\omega_s$. L'oscillatore viene lasciato andare da fermo per $t = 0$, con $y_0 = A$.

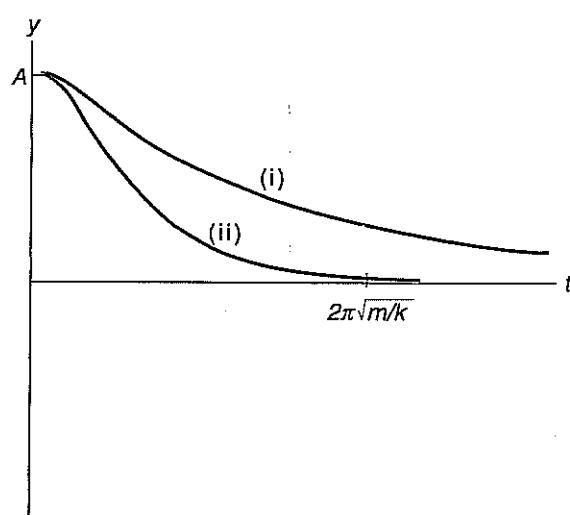


Figura 14.17 Un oscillatore lasciato andare da fermo con $y = A$ per $t = 0$. Sono rappresentati due casi: (i) moto sovrasmorzato con $(b/2m)^2 = 6k/m$ e (ii) moto criticamente smorzato con $(b/2m)^2 = k/m$.

Soluzione per l'oscillatore criticamente smorzato.

Se infine $(b/2m)^2 = k/m$, si parla di *smorzamento critico*. Come indica la 14.17, un oscillatore criticamente smorzato non oscilla ma si avvicina alla posiz equilibrio più rapidamente dell'oscillatore sovrasmorzato. La forma della sol criticamente smorzata è data dall'espressione (C.3) dell'Appendice C e viene d nell'Esercizio 14.45.

Esempio 14.9

Determinare, per il moto sottosmorzato rappresentato nella Figura 14.16, il rapporto tra la x_0 per $t = T_S = 2\pi/\omega_S$ e la coordinata per $t = 0$.

Soluzione

La soluzione sottosmorzata è data dall'Equazione (14.28) e il moto in Figura 14.16 corrispondente a $\gamma = 0.071\omega_S$. La parte sinusoidale dell'equazione, $A \cos(\omega_S t + \phi)$, ha lo stesso valore per $t = T_S$ perché $\cos(\omega_S T_S + \phi) = \cos(2\pi + \phi) = \cos \phi$. Pertanto, il rapporto tra le coordinate rispondenti a questi due istanti è dato dal rapporto tra le parti esponenziali:

$$\frac{e^{-\gamma T_S}}{e^{-\gamma \cdot 0}} = \frac{e^{-\gamma 2\pi/\omega_S}}{1} = e^{-2\pi(0.071)} = 0.64$$

14.8 OSCILLAZIONI FORZATE E RISONANZA

Le oscillazioni forzate sono eccitate da una forza esterna.

Una forza eccitatrice esterna con pulsazione ω_E .

Un oscillatore smorzato finisce per arrestarsi quando la sua energia meccanica si è dissipata, a meno che non vi sia una forza esterna che fornisce altra energia meccanica. Per esempio, un bambino su un'altalena può oscillare per ore se di tanto in tanto uno dei suoi genitori dà all'altalena una spinta nella direzione della sua velocità. Le oscillazioni che si verificano nelle macchine e nei circuiti elettrici sono, nella maggior parte dei casi, *oscillazioni forzate*, cioè oscillazioni che sono prodotte e mantenute da una forza esterna o forza eccitatrice.

La più semplice forza eccitatrice è una forza che a sua volta oscilla come un seno o un coseno. Supponiamo che una forza esterna di questo tipo, \mathbf{F}_E , sia applicata ad un oscillatore che si muove lungo l'asse x , come per esempio un blocco attaccato a una molla. Scriviamo la componente della forza esterna come

$$F_{Ex} = F_0 \cos \omega_E t \quad (14.29)$$

dove F_0 è l'intensità massima della forza, e la componente della forza oscilla sinusoidalmente con pulsazione ω_E . La pulsazione della forza esterna in generale è diversa dalla pulsazione naturale $= \sqrt{k/m}$ dell'oscillatore, che a sua volta è l'effettiva pulsazione soltanto se non c'è alcuno smorzamento né alcuna forza eccitatrice.

Se nella seconda legge di Newton per un oscillatore armonico smorzato si aggiunge un termine per la componente della forza data nell'Equazione (14.29), si ha

$$\Sigma F_x = F_0 \cos \omega_E t - kx - bv_x = ma_x$$

Ossia, sono tre le forze che agiscono: una forza esterna, una forza di richiamo e una forza di smorzamento. Dividendo per la massa si ottiene l'equazione di moto,

$$a_x = -\omega^2 x - 2\gamma v_x + \left(\frac{F_0}{m} \right) \cos \omega_E t \quad (14.30)$$

dove $\omega^2 = k/m$ e $\omega = b/2m$ come in precedenza.

Le tecniche di soluzione dell'Equazione (14.30) sono al di fuori della portata di questo corso, ma noi descriveremo alcune caratteristiche interessanti della soluzione. La soluzione generale è formata dalla somma di due termini. Uno di essi è chiamato *soluzione transitoria*, ed è la soluzione valida per un oscillatore armonico smorzato discusso nel paragrafo precedente. Questa soluzione dipende nei suoi aspetti particolari dalle condizioni iniziali, ma dopo un certo tempo si estingue. Rimane allora l'altro termine, che è chiamato *soluzione stazionaria*. Si tratta della soluzione dovuta alla forza eccitatrice esterna, e persiste dopo che la soluzione transitoria si è annullata. Supponiamo che il moto sia iniziato da molto tempo, cosicché per $t \geq 0$ rimanga solo la soluzione stazionaria.

La soluzione transitoria si estingue e rimane soltanto la soluzione stazionaria.

La soluzione stazionaria oscilla sinusoidalmente con la stessa frequenza angolare della forza esterna; ha un'ampiezza costante A_0 e una definita differenza di fase ϕ_E con la forza esterna. Tale soluzione, che il lettore potrà verificare nel Problema 14.10, è

$$x = A_0 \cos(\omega_E t - \phi_E) \quad (14.31)$$

dove

$$A_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_E^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2}}$$

$$\tan \phi_E = \frac{2\gamma\omega_E}{\omega^2 - \omega_E^2}$$

L'ampiezza del moto A_0 è proporzionale all'ampiezza F_0 della forza eccitatrice.

L'ampiezza dipende anche dalla frequenza eccitatrice ω_E . Cioè, l'oscillatore risponde in modi diversi a forze eccitatorie della stessa intensità ma con diverse frequenze di eccitazione. Per comprendere questo comportamento, si pensi la frequenza propria ω come fissa e la frequenza eccitatrice ω_E come variabile. Per ciascun valore di ω_E , si può determinare l'ampiezza A_0 del moto. Questa dipendenza è rappresentata nella Figura 14.18 per un oscillatore debolmente smorzato. È da notare che l'ampiezza del moto è piccola tanto se ω_E è molto maggiore quanto se ω_E è molto minore della frequenza angolare naturale ω . L'ampiezza è massima se $\omega_E \approx \omega$. In questo caso la forza eccitatrice è approssimativamente in fase con la velocità, e quindi tale forza compie lavoro positivo sul blocco durante la maggior parte del ciclo. Perciò l'oscillatore può assorbire più energia dalla forza esterna e l'ampiezza è grande.

Il drastico aumento dell'ampiezza del moto per $\omega_E \approx \omega$ è chiamato *risonanza*. La risonanza può verificarsi anche quando un qualsiasi sistema oscillante è eccitato da un altro sistema oscillante o accoppiato ad esso, se le loro frequenze sono approssimativamente uguali. In effetti, l'accoppiamento tra i sistemi è accentuato se le frequenze sono uguali. A seconda delle circostanze, la risonanza può essere desiderabile o indesiderabile. Per esempio, la forma caratteristica di una chitarra consente un accoppiamento risonante tra la corda che vibra e l'aria che vibra nella cassa armonica dello strumento. Un apparecchio radio o un televisore sono sintonizzati in modo da essere in risonanza con la frequenza dei segnali che si vogliono ricevere. D'altro canto, per quanto riguarda gli effetti indesiderabili, in un sistema meccanico che venga eccitato alla risonanza possono verificarsi vibrazioni non volute di grande ampiezza: un esempio spettacolare è quello del crollo del ponte di Tacoma Narrows nel 1940. La vibrazione di ampiezza distruttiva fu prodotta da un accoppiamento risonante dovuto ai venti impetuosi.

L'ampiezza è massima se $\omega_E \approx \omega$.

La risonanza si verifica tra sistemi accoppiati con frequenze pressoché uguali.

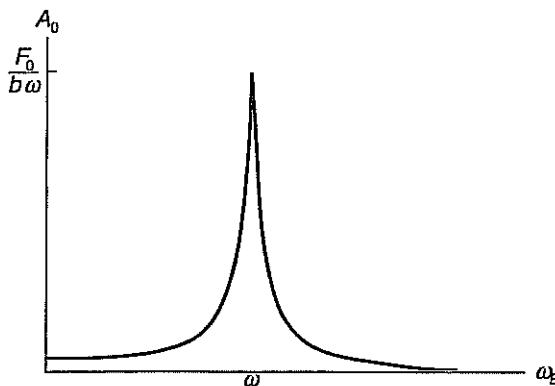


Figura 14.18

L'ampiezza A_0 di un oscillatore forzato nel caso di piccolo smorzamento, $(b/2m)^2 = 0.005$ ω^2 . Il picco di risonanza per $\omega_E = \omega$ ha ampiezza $A_0 = F_0/b\omega$.

Esempio 14.10

Dimostrare che, come indica la Figura 14.18, l'ampiezza dell'oscillazione alla risonanza ($\omega_E = \omega$) è data da $A_0 = F_0/b\omega$.

Soluzione

La dipendenza dell'ampiezza A_0 dalla pulsazione è data dall'espressione scritta subito sotto l'Equazione (14.31),

$$A_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_E^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2}}$$

Per $\omega_E = \omega$, il denominatore diventa

$$\sqrt{(0)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = 2\gamma\omega$$

Quindi

$$A_0 = \frac{F_0/m}{2\gamma\omega} = \frac{F_0/m}{(b/m)\omega} = \frac{F_0}{b\omega}$$

Si noti che un minor valore di b , che corrisponde a un minore smorzamento, porta a un valore maggiore dell'ampiezza A_0 alla risonanza.

RIEPILOGO

Paragrafo 14.2 Cinematica del moto armonico

Per un corpo che si muove di moto armonico

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (14.1)$$

$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (14.4)$$

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (14.5)$$

La pulsazione o frequenza angolare ω , la frequenza ν , e il periodo T sono correlati da

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Il moto armonico può essere identificato dalla relazione

$$a_x = -\omega^2 x \quad (14.6)$$

Paragrafo 14.3 Dinamica del moto armonico

Il moto armonico è prodotto da una forza risultante che sia una forza di richiamo lineare. La seconda legge di Newton applicata a un corpo che compie un tale moto può essere posta in forma di equazione differenziale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (4.11)$$

Una soluzione di quest'equazione è $x = A \cos(\omega t + \phi)$, con $\omega = \sqrt{k/m}$.

Paragrafo 14.4 L'energia dell'oscillatore armonico

L'energia potenziale e l'energia cinetica di un oscillatore armonico sono

$$U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (14.13)$$

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (14.14)$$

e l'energia meccanica è costante:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (14.15)$$

QUESITI

- 14.1 Fai tre esempi di sistemi oscillanti. Qualcuno di essi è un oscillatore armonico? Se no, perché?
- 14.2 Qual è lo spazio percorso durante un periodo da un corpo che compie un moto armonico di ampiezza A ?
- 14.3 Supponiamo che la pulsazione ω di un oscillatore armonico venga raddoppiata. Di che fattore ciò fa variare (a) la pulsazione ω , (b) la frequenza ν , (c) il periodo T , (d) il massimo modulo della velocità v_{max} , (e) il massimo modulo dell'accelerazione a_{max} , (f) l'energia meccanica E ?
- 14.4 Durante il moto armonico, lo spostamento e la velocità hanno mai la stessa direzione? La velocità e l'accelerazione? Lo spostamento e l'accelerazione?

Paragrafo 14.5 Esempi di moto armonico

Si è visto che compiono moti armonici i seguenti sistemi: (i) blocco appeso a una molla verticale, $\omega = \sqrt{k/m}$; (ii) il pendolo semplice, $\omega = \sqrt{g/L}$; (iii) il pendolo fisico, $\omega = \sqrt{mgL/I}$; (iv) il pendolo di torsione, $\omega = \sqrt{k/I}$.

Paragrafo 14.6 Moto armonico e moto circolare uniforme

Per un punto materiale che compie un moto circolare uniforme nel piano xy , la componente x e la componente y del moto entrambi moti armonici.

Paragrafo 14.7 Il moto armonico smorzato

L'equazione di moto per un oscillatore armonico smorzato è

$$a_y = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}\nu_y \quad (14)$$

Per il caso sottosmorzato

$$y = e^{-\gamma T} A \cos(\omega_{st}t + \phi) \quad (14)$$

L'ampiezza delle oscillazioni decresce esponenzialmente col tempo. Se l'oscillatore è criticamente smorzato o sovrasmorzato non si verificano oscillazioni.

Paragrafo 14.8 Oscillazioni forzate e risonanza

L'equazione di moto per un oscillatore forzato è

$$a_x = -\omega^2 x - 2\gamma\nu_x + \left(\frac{F_0}{m}\right) \cos\omega_E t \quad (14)$$

L'ampiezza delle oscillazioni è

$$A_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_E^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega_E^2}}$$

L'ampiezza è massima quando si verifica la risonanza: $\omega_E \approx \omega$

14.6 Un astronauta deve rimanere in orbita terrestre per molti mesi. Escogita un procedimento per tenere sotto osservazione la sua massa.

14.7 Per arrivare alla relazione $\omega = \sqrt{k/m}$ per il sistema blocco-molla, abbiamo trascurato la massa della molla. Supponendo che invece la molla abbia una massa significativa, se ne descrivano gli effetti sul moto del sistema.

14.8 È possibile determinare l'ampiezza o la costante di fase di un oscillatore armonico se si conosce la coordinata iniziale ma non la velocità iniziale? E se si conosce la velocità iniziale ma non la coordinata iniziale? Spiega.

14.9 Un blocco di massa m viene appeso a due molle di piccola massa in due modi diversi (Figura 14.19). Le due molle hanno la stessa costante elastica k e la stessa lunghezza quando non sono tese. Qual è, in termini di k e m , la pulsazione delle oscillazioni quando le molle sono una accanto all'altra, come in Figura 14.19a? Qual è la pulsazione quando le molle sono disposte consecutivamente, come nella Figura 14.19b?

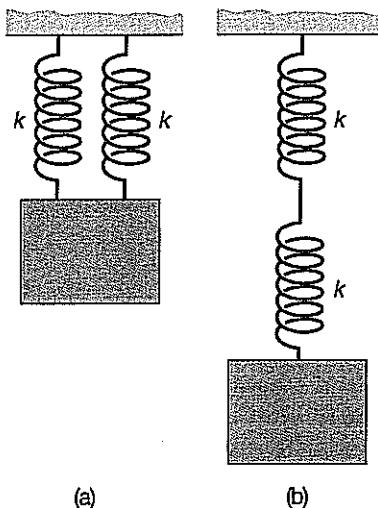


Figura 14.19 Quesito 14.9.

14.10 Un oscillatore armonico blocco-molla ha un'energia meccanica $E = 4 \text{ J}$ quando $x = A$. Per $x = A$, che valore hanno (a) U e (b) K ? Per $x = 0$, che valore hanno (c) E ; (d) U ; (e) K ? Per $x = -A$, che valore hanno (f) E ; (g) U ; (h) K ?

14.11 Si stimi la costante elastica delle balestre (assimilabili a molle) di un'automobile, partendo da una valutazione della massa e del periodo di oscillazione del veicolo quando viene spinto verso il basso e poi lasciato andare.

14.12 Perché le automobili hanno gli ammortizzatori? Si stimi il valore della costante dell'Equazione (14.28) in base al modo in cui un'automobile oscilla su un terreno accidentato.

14.13 Spesso i pendoli degli orologi hanno una lunghezza di circa 1 m oppure di circa 1/4 m. Quali sono i vantaggi di ciascuna di queste lunghezze?

14.14 Un orologio a pendolo avrebbe lo stesso periodo all'equatore e a uno dei poli? E un orologio da polso a molla che utilizzi un pendolo di torsione? Spiega.

14.15 Il periodo di un pendolo dipende dalla sua temperatura? Hai pensato a questo nel rispondere alla domanda precedente?

14.16 Un bambino oscilla su un'altalena salendo molto in alto, quasi fino al punto in cui le corde sono orizzontali. Se smette di spingersi e lascia che l'ampiezza delle oscillazioni decresca, come varia il periodo del moto?

14.17 Se si guida un'automobile con uno pneumatico non equilibrato, si avverte una forte vibrazione a una certa velocità. Perché l'ampiezza della vibrazione diminuisce se si accelera o si rallenta?

14.18 Perché i soldati rompono la cadenza di marcia quando passano su un ponte? A volte si dice che un gatto può far crollare un ponte. È possibile? Spiega.

14.19 La Terra ruota intorno al Sole su un'orbita quasi circolare. Questo moto è la composizione di due moti armonici? Se sì, quali sono le loro pulsazioni?

14.20 La Figura 14.20 rappresenta un pendolo conico con il peso che oscilla su una circonferenza orizzontale nel piano xy . In che relazione stanno il periodo e l'ampiezza del moto lungo l'asse x con il periodo e l'ampiezza del moto lungo l'asse y ? Quali altre curve può tracciare un pendolo di questo tipo? Fai la prova.

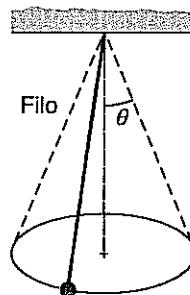


Figura 14.20 Quesito 14.20.

14.21 Completare le seguenti tabelle:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
ω			
T		Scalare	
v			

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
S			
ϕ			rad
k	Costante di torsione		
ω_E			

ESERCIZI

Paragrafo 14.2 Cinematica del moto armonico

14.1 La pulsazione di un corpo che si muove di moto armonico è 5.8 rad/s. Determinare il periodo e la frequenza del moto.

14.2 (a) Verificare che le dimensioni di ωA sono quelle della velocità, $(\text{lunghezza})(\text{tempo})^{-1}$. (b) Verificare che le dimensioni di $\omega^2 A$ sono quelle dell'accelerazione, $(\text{lunghezza})(\text{tempo})^{-2}$.

- 14.3** Un corpo compie un moto armonico con $A = 63 \text{ mm}$, $\omega = 4.1 \text{ rad/s}$, e $\phi = 0$. (a) Scrivere le espressioni di x , v_x e a_x . (b) Determinare x , v_x e a_x per $t = 1.7 \text{ s}$.
- 14.4** La coordinata di un corpo è data da $x = (0.057 \text{ m}) \cos [(3.9 \text{ rad/s})t]$. (a) Che valore hanno A , ω , v , T e ϕ ? (b) Scrivere le espressioni di v_x e a_x . (c) Determinare x , v_x e a_x per $t = 2.3 \text{ s}$.
- 14.5** La componente x della velocità di un corpo è data da $v_x = (1.8 \text{ m/s}) \sin [(7.1 \text{ rad/s})t]$. (a) Che valore hanno ω , A , v , T e ϕ ? (b) Scrivere le espressioni di x e di a_x . (c) Determinare x , v_x e a_x per $t = 0.25 \text{ s}$.
- 14.6** La componente x dell'accelerazione di un corpo è data da $a_x = -(16.8 \text{ rad}^2/\text{s}^2)x$. La coordinata iniziale del corpo è $x_0 = 24 \text{ mm}$ e la componente della sua velocità iniziale è $v_{x0} = 0.71 \text{ m/s}$. Determinare le espressioni in funzione del tempo (a) della coordinata del corpo, (b) della componente della sua velocità, (c) della componente della sua accelerazione.
- 14.7** Un corpo si muove di moto armonico con $a_{\max} = 13 \text{ m/s}^2$, $T = 0.94 \text{ s}$ e $\phi = \frac{1}{2}\pi$. (a) Scrivere le espressioni di x , v_x e a_x . (b) Determinare x , v_x e a_x per $t = 0.54 \text{ s}$.
- 14.8** Un corpo si muove di moto armonico con periodo $T = 1.8 \text{ s}$, coordinata iniziale $x_0 = 0$ e componente della velocità iniziale $v_{x0} = -0.33 \text{ m/s}$. (a) Scrivere le espressioni di x , v_x e a_x in funzione del tempo. (b) Tracciare i grafici di x , v_x e a_x in funzione del tempo da $t = 0$ a $t = 3.0 \text{ s}$.
- 14.9** Un corpo si muove di moto armonico con frequenza $\nu = 0.42 \text{ Hz}$. La coordinata iniziale è $x_0 = 0.021 \text{ m}$, e la componente della velocità iniziale è $v_{x0} = 1.3 \text{ m/s}$. Determinare A , v_{\max} e a_{\max} .

Paragrafo 14.3 Dinamica del moto armonico

- 14.10** Verificare che le dimensioni di $\sqrt{k/m}$ sono quelle di un $[\text{tempo}]^{-1}$.
- 14.11** Per un oscillatore armonico blocco-molla, $k = 45 \text{ N/m}$ e $m = 0.88 \text{ kg}$. Determinare (a) ω ; (b) v ; (c) T .
- 14.12** (a) Verificare che $x = A \sin (\omega t + \delta)$ è una soluzione dell'Equazione (14.11),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$
(b) Determinare la relazione tra la δ dell'espressione data sopra e la ϕ dell'Equazione (14.1), $x = A \cos (\omega t + \phi)$.
- 14.13** Il periodo di un oscillatore armonico blocco-molla è $T = 0.87 \text{ s}$. Se la massa del blocco è 0.62 kg , qual è la costante elastica della molla?
- 14.14** Per un oscillatore armonico blocco-molla si ha $k = 27 \text{ N/m}$ e $m = 0.46 \text{ kg}$. Ammettendo che il blocco sia stato lasciato andare con velocità nulla in $x = 29 \text{ mm}$, scrivere le espressioni di x , v_x e a_x in funzione del tempo.
- 14.15** La frequenza di un oscillatore armonico blocco-molla è di 1.4 Hz . Se la costante della molla è 26 N/m , qual è la massa del blocco?
- 14.16** Un blocco di massa 1.4 kg oscilla con moto armonico sotto l'azione della forza esercitata da una molla.

L'ampiezza del moto è $A = 0.14 \text{ m}$, e la velocità del blocco ha modulo massimo $v_{\max} = 2.3 \text{ m/s}$. Qual è la costante della molla?

Paragrafo 14.4 L'energia dell'oscillatore armonico

- 14.17** Un oscillatore armonico blocco-molla ha costante elastica $k = 22 \text{ N/m}$ e oscilla con ampiezza $A = 87 \text{ mm}$. Quanto è l'energia meccanica dell'oscillatore?
- 14.18** La massa del blocco in un oscillatore armonico blocco-molla è $m = 0.49 \text{ kg}$. Se l'oscillatore ha un periodo $T = 0.91 \text{ s}$ e un'ampiezza $A = 62 \text{ mm}$, qual è la sua energia meccanica?
- 14.19** In un oscillatore armonico blocco-molla, la costante della molla è $k = 31 \text{ N/m}$ e la massa del blocco è $m = 0.1 \text{ kg}$. Il blocco viene lasciato andare con velocità nulla in $t = 0$ in $x_0 = 39 \text{ mm}$. Scrivere le espressioni in funzione del tempo di (a) U e (b) K . (c) Tracciare su un foglio di carta millimetrata i grafici di U e K in funzione di t per un periodo del moto.
- 14.20** Un oscillatore armonico blocco-molla oscilla in modo che l'ampiezza del moto del blocco sia A e il modulo massimo della sua velocità sia v_{\max} . (a) A quale distanza dal punto centrale (come frazione di A) si trova il blocco quando il modulo della sua velocità è $\frac{1}{2}v_{\max}$? (b) Qual è il modulo della velocità del blocco (come frazione di v_{\max}), quando la sua distanza dal punto centrale è $\frac{1}{2}A$?
- 14.21** Un oscillatore armonico blocco-molla con $k = 23 \text{ N/m}$ e $m = 0.47 \text{ kg}$ ha un'energia meccanica di 25 mJ . (a) Qual è l'ampiezza del suo moto? (b) Qual è il massimo modulo della velocità del blocco? (c) Qual è il modulo della velocità del blocco quando $x = 11 \text{ mm}$? (d) Qual è la distanza del blocco dal punto centrale quando il modulo della sua velocità è 0.25 m/s ?
- 14.22** Un blocco di massa 2.0 kg viene attaccato a una molla verticale di piccola massa e viene fatto abbassare lentamente, finché viene a trovarsi in equilibrio dopo che la molla si è allungata di 450 mm . Lo stesso blocco viene poi attaccato alla molla non tesa e lasciato andare da fermo. Determinare (a) il periodo e (b) l'ampiezza dell'oscillazione verticale che si produce.
- 14.23** Se a una molla verticale di massa trascurabile si attacca una massa campione di 1000 kg , il periodo di oscillazione è di 1.43 s . Se al posto del campione si mette una massa incognita, il periodo è di 1.85 s . Determinare (a) la massa incognita e (b) la costante della molla.
- 14.24** Un blocco di massa 3.0 kg è attaccato a una molla verticale di piccola massa e di costante elastica 240 N/m . Il sistema oscilla verticalmente, e il modulo massimo della velocità del blocco è 1.0 m/s . Per questo moto, determinare (a) l'ampiezza, (b) il periodo e (c) il modulo massimo dell'accelerazione del blocco. (d) Di quanto è allungata la molla quando il blocco è in quiete nella posizione di equilibrio?
- 14.25** Un blocco di massa 5.0 kg viene attaccato a una molla con costante di 1200 N/m e viene abbassato lentamente fino alla posizione di equilibrio in $v = 0$. Si assume che

l'energia potenziale della molla non tesa sia nulla e che l'energia potenziale gravitazionale del blocco sia nulla in $y = 0$. (a) Qual è l'energia meccanica del sistema in questa configurazione? (b) Il blocco viene tirato in giù di altri 25 mm e lasciato andare da fermo. Si determini l'energia meccanica iniziale del sistema. (c) Dove si trova il blocco quando il modulo della sua velocità è massimo, e quanto vale questo modulo massimo? (d) Qual è il valore massimo dell'energia potenziale gravitazionale in questo moto?

- 14.26 I periodi del pendolo semplice, del pendolo fisico e del pendolo di torsione sono dati rispettivamente da $2\pi\sqrt{L/g}$, $2\pi\sqrt{I/mgL}$ e $2\pi\sqrt{I/k}$. Verificare che ciascuna di queste espressioni ha le dimensioni di un tempo.
- 14.27 Un bambino di massa 20 kg oscilla su un'altalena lunga 3 m con un'ampiezza di 0.2 m. Determinare (a) il periodo e la frequenza ν e (b) il massimo modulo della velocità del bambino in questo moto.
- 14.28 Tarzan salta da un albero all'altro appeso a una liana che è attaccata a un ramo 15 m sopra la sua testa e a metà strada tra i due alberi. (a) Si stimi l'intervallo di tempo necessario per l'oscillazione se Tarzan si limita a staccarsi da un albero e a oscillare attaccato alla liana fino al successivo. (b) La risposta dipende dalla distanza tra gli alberi? (c) L'intervallo di tempo sarebbe diverso se Tarzan si desse una spinta contro il primo albero in modo da avere un'accelerazione iniziale? Spiega.
- 14.29 Un'asta metrica omogenea è impennata a un'estremità su un asse orizzontale. (a) Determinare il periodo delle piccole oscillazioni dell'asta. (b) Determinare il periodo delle piccole oscillazioni nel caso che l'asta sia impennata su un asse passante per un foro praticato in corrispondenza del tratto dei 250 mm.
- 14.30 Due sferette identiche di massa 1.0 kg sono attaccate alle estremità di un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza $L = 1$ m. Determinare il periodo delle piccole oscillazioni di questo pendolo se esso è sospeso (a) per un'estremità, (b) per l'altra estremità, (c) per un punto posto a $L/3$ da un estremo, (d) per il punto di mezzo.
- 14.31 Un orologio meccanico a molla è regolato dal periodo di un pendolo di torsione chiamato bilanciere. Il bilanciere ha momento di inerzia $4.20 \times 10^{-88} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ed è progettato per oscillare con un periodo di 0.250 s. (a) Determinare la costante di torsione della molla a spirale che agisce da fibra di torsione. (b) Qual è il massimo modulo dell'accelerazione angolare del bilanciere se l'ampiezza dell'oscillazione è di 0.45 rad?
- 14.32 Un disco circolare omogeneo di raggio 180 mm e massa 0.75 kg è appeso a una fibra sottile con costante di torsione $k = 24 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$, come mostra la Figura 14.10. Il disco viene ruotato di 1.5 rad a partire dalla posizione di equilibrio e lasciato andare da fermo. Determinare per questo moto (a) il periodo, (b) la pulsazione, (c) la velocità angolare massima, (d) la massima energia cinetica di rotazione del disco.
- 14.33 Una matita di massa 25 g e lunga 150 mm è sospesa come nella Figura 14.10b. Se alle due estremità della matita sono applicate, perpendicolarmente ad essa, due forze orizzontali uguali e opposte di intensità 2.2 mN, la

matita viene a trovarsi in una nuova posizione di equilibrio ruotata di $\pi/4$ rad rispetto all'originaria posizione di equilibrio. Determinare (a) il periodo di oscillazione e (b) la massima energia cinetica di rotazione della matita dopo che le forze sono state rimosse.

Paragrafo 14.6 Moto armonico e moto circolare uniforme

- 14.34 Un punto materiale si muove con velocità di modulo costante $v = 12 \text{ m/s}$ su una traiettoria circolare di raggio $A = 0.50 \text{ m}$. Determinare, per il moto della sua proiezione sull'asse x , (a) il periodo, (b) l'ampiezza, (c) il massimo modulo della velocità, (d) il massimo modulo dell'accelerazione.
- 14.35 Il corpo Q in Figura 14.12 si trova a 150 mm dal centro del piatto di un giradischi che ruota a $33 \frac{1}{3}$ giri/min. Si consideri il moto della sua ombra sullo schermo, e si scrivano le espressioni di x , v_x e a_x in funzione del tempo, ammettendo che x sia massima per $t = 0$.
- 14.36 Mentre il peso del pendolo conico di Figura 14.20 descrive una traiettoria circolare, il filo leggero di lunghezza L descrive un cono di semiapertura θ . Dimostrare che il periodo del moto circolare del peso è dato da $2\pi\sqrt{(L/g)\cos\theta}$.
- 14.37 Supponiamo che la circonferenza descritta dal peso dell'esercizio precedente sia nel piano xy , con il centro nell'origine. (a) Dimostrare che le coordinate x e y corrispondono a moti armonici. (b) Determinare l'ampiezza e la pulsazione dei moti lungo gli assi x e y .
- Paragrafo 14.7 Il moto armonico smorzato
- 14.38 Determinare le unità SI (a) della costante di smorzamento b che compare nell'Equazione (14.27) e (b) della costante $\gamma = b/2m$ che compare nell'Equazione (14.28).
- 14.39 Un blocco attaccato a una molla viene messo in oscillazione con un'ampiezza iniziale di 120 mm. Dopo 2.4 min l'ampiezza si è ridotta a 60 mm. (a) Dopo quanto tempo l'ampiezza sarà di 30 mm? (b) Determinare il valore di γ per questo moto.
- 14.40 Un blocco di massa 2.5 kg è attaccato a una molla di costante 1250 N/m. Il blocco viene lasciato andare con velocità iniziale nulla per $t = 0$ a 28 mm dalla posizione di equilibrio, e il moto è smorzato con $b = 50 \text{ kg/s}$. (a) Determinare la pulsazione ω_S del moto armonico smorzato. (b) Determinare l'ampiezza iniziale A e la costante di fase ϕ dell'Equazione (14.28) per questo moto. (Avvertenza: ϕ non è zero.) (c) Determinare x , v_x e a_x per $t = \pi/5 \text{ s}$.
- 14.41 Il pendolo di un orologio normalmente oscilla su un arco lungo 135 mm. Il meccanismo, che è azionato dalla discesa di un peso, si arresta se la lunghezza dell'arco è minore di 50 mm. Dopo che il peso ha raggiunto il punto più basso alle ore 9:17, la lunghezza dell'arco si riduce a 95 mm alle 9:22. (a) Qual è la costante γ per questo moto armonico smorzato? (b) A che ora l'orologio si ferma?
- 14.42 Per far muovere una barca di massa 700 kg nell'acqua a una velocità costante di 1.0 m/s occorre una forza costante di 120 N. Ammettiamo che la forza di smorzamento esercitata dall'acqua sia data da

$F_S = -bv$: (a) Determinare il valore di b . (b) La barca è assicurata con delle molle a due pali, come mostra la Figura 14.21, ed è tenuta a 2.0 m dalla sua posizione di equilibrio da una forza orizzontale di 450 N. Scrivere l'equazione di moto per la barca dopo che essa viene lasciata andare per $t = 0$.

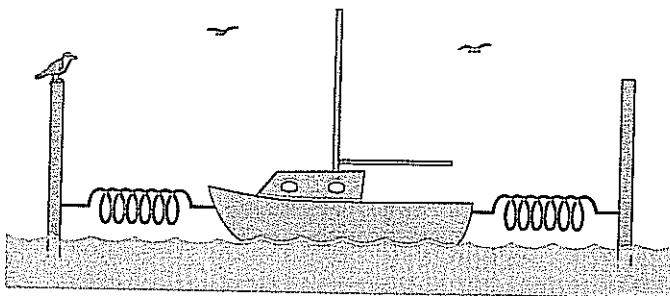


Figura 14.21 Esercizio 14.42: la barca viene spostata di 2.0 m verso destra dalla posizione di equilibrio e poi lasciata andare con velocità iniziale nulla.

- 14.43 Verificare per sostituzione diretta che l'Equazione (14.28) è una soluzione dell'Equazione (14.27).
[Suggerimento: le funzioni $\cos(\omega_{st}t + \phi)$ e $\sin(\omega_{st}t + \phi)$ sono linearmente indipendenti. Vale a dire che $C \cos(\omega_{st}t + \phi) + D \sin(\omega_{st}t + \phi) = 0$ se e soltanto se $C = D = 0$.]
- 14.44 Verificare per sostituzione diretta che la soluzione dell'Equazione (14.27) nel caso dell'oscillatore

sovrasmorzato è data da

$$y = e^{-\gamma t}(Ae^{pt} + Be^{-pt})$$

dove $\gamma = b/2m$, $p = \sqrt{(b/2m)^2 - k/m}$ e A e B costanti.

- 14.45 Nel caso di smorzamento critico $b/2m = \sqrt{k/m}$. Verificare che la soluzione criticamente smorzata dell'Equazione (14.27) è data da

$$y = e^{-\omega t}(A + Bt)$$

dove A e B sono costanti.

Paragrafo 14.8 Oscillazioni forzate e risonanza

- 14.46 Verificare che il metro è l'unità SI per la grandezza che compare nell'espressione scritta sotto l'Equaz. (14.31).

- 14.47 Al blocco dell'Esercizio 14.40 viene applicata una eccitatrice sinusoidale di pulsazione $\omega_E = 25$ rad/s intensità massima $F_0 = 12$ N. Determinare (a) l'ampiezza A_0 e (b) la costante di fase ϕ_E per i stazionario. (c) Determinare l'ampiezza se il sistema viene eccitato in risonanza.

- 14.48 Costruire grafici analoghi a quello di Figura 14.18 $b/2m =$ (a) 0.07 ω ; (b) 0.10 ω ; (c) 0.70 ω . Rappresentare tutti e tre i casi nello stesso grafico e analizzare gli effetti dell'aumentato smorzamento.

PROBLEMI

- 14.1 Esprimere in termini del periodo T il tempo necessario perché un oscillatore armonico si sposti da $x = A$ a $x = \frac{1}{2}A$.
- 14.2 Consideriamo un oscillatore armonico blocco-molla con $k = 200$ N/m e $m = 2.4$ kg. Le condizioni iniziali dell'oscillatore sono $x_0 = 0.15$ m e $v_{x0} = 0.45$ m/s. Determinare la posizione del blocco per $t = 3.0$ s.
- 14.3 Un orologio regolato da un pendolo semplice con periodo di 0.11 s viene posto in un ascensore. (a) Qual è il periodo quando l'ascensore accelera verso l'alto con intensità $\frac{1}{2}g$? (b) Qual è il periodo quando l'ascensore sale con una velocità costante di 5.1 m/s? (c) Qual è il periodo quando l'ascensore accelera verso il basso con intensità $\frac{1}{2}g$? (d) All'inizio della giornata l'orologio a pendolo si trova nell'ascensore al piano terreno e viene sincronizzato con l'orologio dell'atrio. L'orologio a pendolo e quello dell'atrio sono regolati in modo da restare sincronizzati se non vengono spostati. Dopo molte salite e discese nell'ascensore, alla fine della giornata l'orologio a pendolo è di nuovo al piano terreno. I due orologi segnano la stessa ora? Se no, quale è indietro rispetto all'altro?
- 14.4 Un orologio regolato da un pendolo semplice è preciso quando la sua temperatura rimane costante sui 20 °C. La lunghezza del pendolo aumenta dello 0.0010 per cento ogni 1.0 °C di aumento della temperatura.

Qual è la temperatura se l'orologio ritarda di 2.0 s i giorni?

- 14.5 Quando abbiamo stabilito che la pulsazione delle oscillazioni del sistema ideale blocco-molla è $\omega = \sqrt{k/m}$, abbiamo trascurato la massa della molla. Ora invece teniamo conto della massa m_m della molla. Ammettiamo che l'allungamento della molla sia distribuito in modo uniforme su tutta la sua lunghezza che la sua densità lineare di massa μ sia uniforme. Sotto queste ipotesi, $\mu = m_m/\ell$, e la relazione tra il modulo della velocità del blocco e il modulo v_ξ della velocità di un elemento della molla posto in ξ (vedi Figura 14.22) è $v_\xi = (\xi/\ell)v$. (a) Mostrare che l'energia cinetica K_m della molla è

$$K_m = \frac{m_m v^2}{6}$$

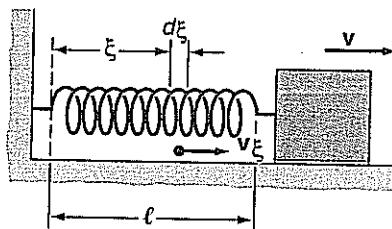


Figura 14.22 Problema 14.5.

- (b) Scrivere l'espressione dell'energia meccanica del sistema blocco-molla, tenendo conto dell'energia cinetica della molla. Facendo un confronto con l'espressione dell'energia meccanica di un sistema blocco-molla in

la molla abbia massa trascurabile, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, mostrare che la pulsazione del sistema tenendo conto della massa della molla è

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_m/3}}$$

- [14.6] (a) Un'asta metrica omogenea oscilla liberamente intorno a un'estremità. Qual è il periodo per piccole oscillazioni?
 (b) Un grumo di cera la cui massa è il 12 per cento della massa del metro viene attaccato sulla tacca dei 500 mm. Qual è ora il periodo per piccole oscillazioni? (c) Dove si potrebbe collocare il grumo di cera sull'asta senza che il periodo ne sia influenzato?
- [14.7] Un cubetto di ghiaccio molto scivoloso viene messo vicino al fondo di una scodella con raggio di curvatura $R = 140$ mm. Qual è il periodo delle piccole oscillazioni del cubetto?
- [14.8] Un supporto per pesi la cui massa è di 100.0 g è attaccato a una molla leggera e oscilla verticalmente con un periodo di 0.33 s. (Si veda la Figura 14.23.) Supponiamo che sul supporto venga messo un pesetto di massa 10.0 g. Qual è la massima ampiezza che possono avere le oscillazioni del sistema se il pesetto da 10 g deve rimanere a contatto con il supporto durante tutto il moto?
- [14.9] Se a un corpo è applicata una forza esterna \mathbf{F}_E , la potenza fornita è $P = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{v}$, dove \mathbf{v} è la velocità del corpo. (Vedi Paragrafo 8.6.) (a) Determinare un'espressione della potenza fornita dalla forza eccitatrice a un oscillatore descritto dall'Equazione (14.31).

(b) La risposta alla parte (a) dovrebbe contenere il termine $\cos \omega_E t \sin (\omega_E t - \phi_E)$. La media di questo termine su un ciclo è

$$-\frac{1}{2} \sin \phi_E = \frac{-\gamma \omega_E}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_E^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_E^2}}$$

Dimostrare che la potenza media \bar{P} è massima se $\omega_E = \omega$.

- [14.10] Si verifichi che l'Equazione (14.31) è una soluzione dell'Equazione (14.30), tenendo presente che

$$\cos(\omega_E t - \phi_E) = \cos \omega_E t \cos \phi_E + \sin \omega_E t \sin \phi_E$$

$$\sin(\omega_E t - \phi_E) = \sin \omega_E t \cos \phi_E - \cos \omega_E t \sin \phi_E$$

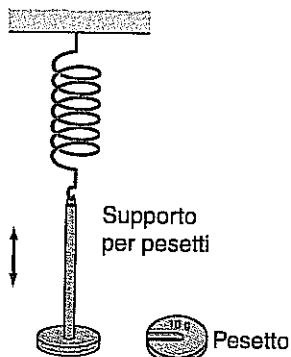
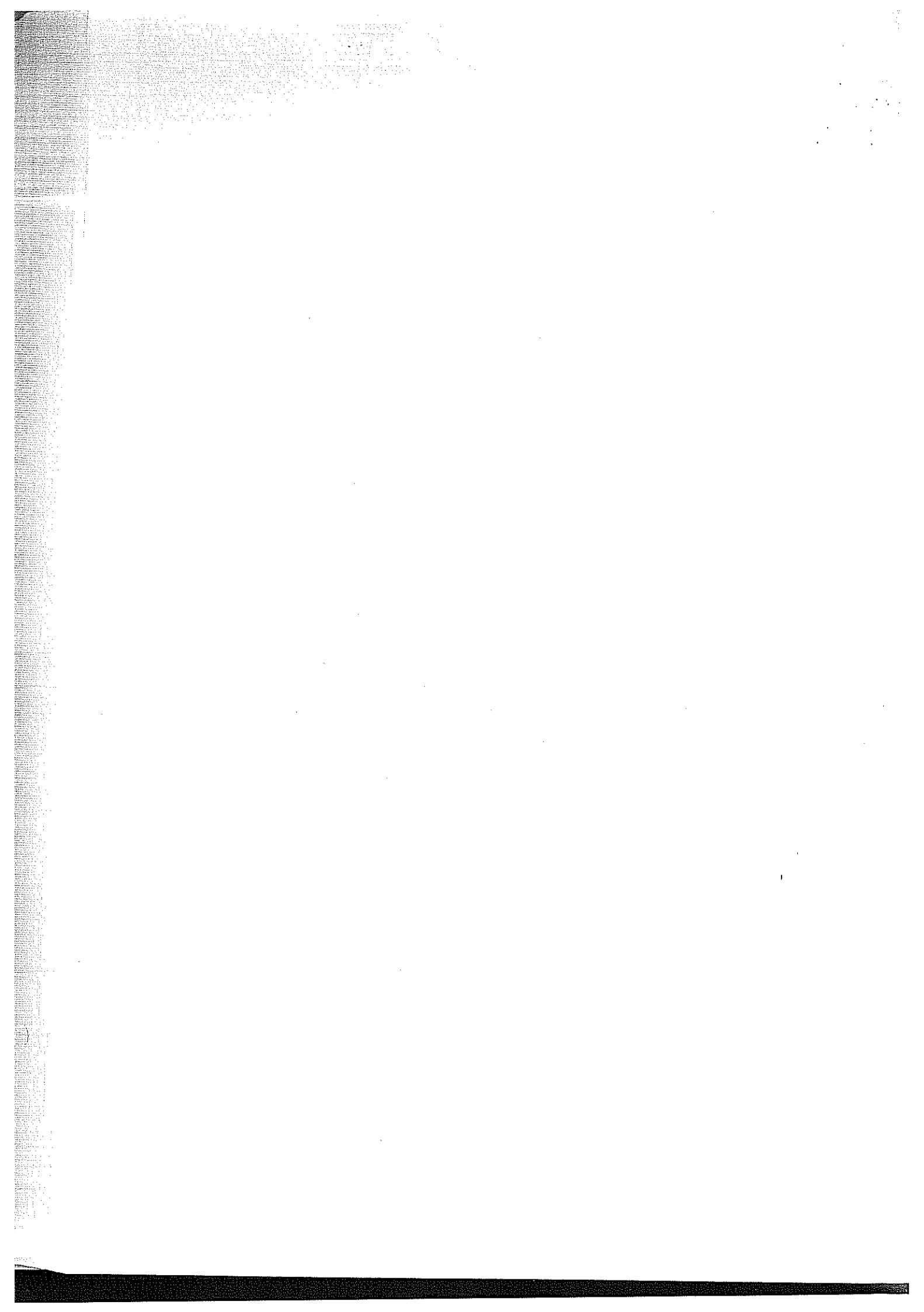


Figura 14.23 Problema 14.8.



SOLIDI E FLUIDI

15.1 INTRODUZIONE

Nella maggior parte dei casi le sostanze che esistono in natura possono essere fatte rientrare in una delle tre *fasi*: solida, liquida o gassosa. I solidi, quando su di essi agiscono forze esterne, tendono a mantenere il loro volume e la loro forma, i liquidi tendono a mantenere il loro volume ma non la loro forma, e i gas non mantengono né il volume né la forma.

Le linee di demarcazione tra solidi, liquidi e gas non sono nette, e molti corpi non possono essere classificati in modo definito. Il vetro passa gradualmente da uno stato in cui è chiaramente un liquido a uno in cui è chiaramente un solido quando viene fatto raffreddare nel ristretto intervallo di temperature nel quale si indurisce. Le rocce «solide» che formano il mantello della Terra si deformano lentamente sotto l'azione delle forze che hanno separato le Americhe dall'Africa e dall'Europa. La pasta del pane e la plastilina scorrono come liquidi se su di esse agiscono forze piccole, ma si spezzano sotto l'azione di forze grandi. Variando opportunamente la pressione e la temperatura, è possibile convertire gradualmente un liquido in un gas, senza che vi sia una netta linea di demarcazione a segnare il cambiamento di fase. Inoltre, alcuni parlano di una quarta fase della materia, la fase di plasma, che ha proprietà distinte da quelle dei liquidi, dei gas e dei solidi.

Nonostante queste ambiguità, la classificazione in solidi, liquidi e gas è utile. Un cristallo di sale e un diamante sono solidi tipici, l'acqua è un liquido tipico, e l'aria che respiriamo è un tipico gas.

15.2 PROPRIETÀ DEI SOLIDI

I solidi resistono ai cambiamenti di forma. Supponiamo di applicare delle forze a un solido, mantenendolo in equilibrio sia traslatorio che rotatorio: anche se il solido non cambierà molto di dimensioni o di forma, si deformerà leggermente. Una forza applicata all'estremità aguzza di un piolo causa una deformazione maggiore della stessa forza applicata all'estremità piatta: ciò perché la deformazione dipende dalla forza per unità di area e non semplicemente dalla forza in sé. Di conseguenza introduciamo una grandezza chiamata *sforzo* σ , definendola come rapporto tra l'intensità della forza e l'area sulla quale questa è applicata.

Consideriamo il cubo solido della Figura 15.1. Quando forze uguali di intensità F_n vengono applicate perpendicolarmente a due facce opposte, lo sforzo viene chiamato *sforzo normale*. Nella Figura 15.1a le forze hanno direzione uscente dal solido, e in questo caso lo sforzo normale viene detto *sforzo di trazione*. Nella Figura 15.1b le forze sono dirette verso l'interno del solido, e allora lo sforzo normale, che in pratica è una trazione negativa, viene detto *sforzo di compressione*. In entrambi i casi la grandezza dello sforzo normale è

$$\sigma_t = \frac{F_n}{A}$$

(15.1)

Sforzo normale o di compressione.

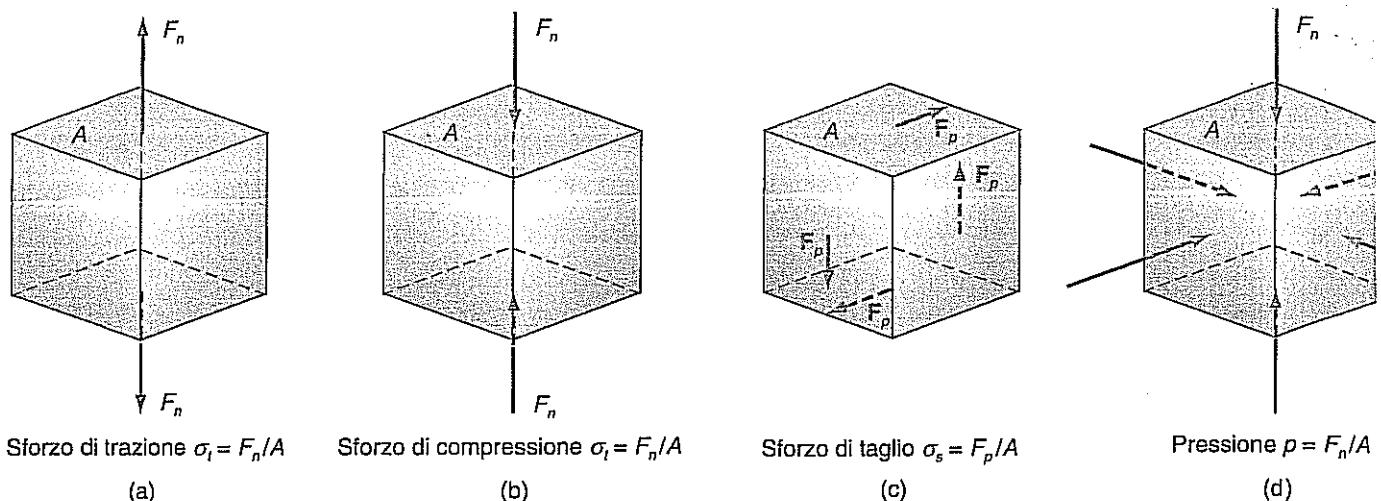


Figura 15.1 Lo sforzo è definito come forza agente su una superficie per unità di area. (a) e (b) Se la forza è normale alla superficie, lo sforzo è uno sforzo di trazione o di compressione. (c) Se la forza è parallela alla superficie, lo sforzo è uno sforzo di taglio. (d) Se la stessa forza è applicata normalmente a tutte le superfici, viene chiamata pressione.

dove A è l'area su cui è applicata F_n . Le dimensioni dello sforzo sono quelle di una forza diviso un'area, e l'unità di misura SI è il N/m^2 , cui viene dato il nome di **pas** (Pa). Nel sistema tecnico si usa il kgf/cm^2 (che è pari a 98 kPa); nel sistema britannico l'unità è la libbra su pollice quadrato (*pound per square inch*), che si abbrevia lb/in² o psi (1 lb/in² è pari a 6.9 kPa).

Se le forze applicate a un solido cubico hanno una componente parallela alle facce per mantenere il solido in equilibrio devono essergli applicate almeno quattro forze (Fig. 15.1c). Lo sforzo che deriva da queste componenti delle forze è chiamato **sforzo di taglio** σ_s :

Sforzo da taglio.

$$\boxed{\sigma_s = \frac{F_p}{A}} \quad (15.)$$

dove F_p è la componente della forza parallela alla superficie.

Se su tutte le facce del solido viene applicata perpendicolarmente verso l'interno stessa forza per unità d'area, come mostra la Figura 15.1d, lo sforzo viene chiamata **pressione** p :

Pressione.

$$\boxed{p = \frac{F_n}{A}}$$

dove F_n è la componente della forza che è applicata normalmente a ciascuna superficie. L'atmosfera terrestre esercita a livello del mare una pressione di 1 atmosfera (atm), ossia di 1.01×10^5 Pa.

Quando uno sforzo è applicato a un solido, questo si deforma. Il modo in cui si deforma non dipende soltanto dallo sforzo, ma anche dal solido. Un materiale anisotropo, come il legno, si comporta in modo diverso a seconda che uno sforzo di trazione sia applicato lungo la venatura oppure perpendicolarmente ad essa. Un materiale isotropo, come il vetro, si comporta nello stesso modo comunque sia orientato. Per semplicità qui studieremo solo i materiali isotropi.

La deformazione di un solido isotropo in risposta a uno sforzo di trazione è rappresentata nella Figura 15.2a. La dimensione ℓ , del solido si allunga di una quantità $\Delta\ell$. La **deformazione da trazione** ε_t è definita da

$$\boxed{\varepsilon_t = \frac{\Delta\ell}{\ell}} \quad (15.)$$

Dal momento che è un rapporto tra lunghezze, la deformazione è adimensionale. La *deformazione da compressione* è definita come rapporto tra la diminuzione della lunghezza e la lunghezza di partenza.

La risposta di un solido omogeneo e isotropo a uno sforzo di taglio è chiamata *deformazione da taglio* ed è definita da

$$\varepsilon_s = \phi \approx \frac{\Delta x}{\ell} \quad (15.4)$$

dove Δx è lo spostamento del vertice del cubo dalla posizione che occupa quando l'angolo è retto, come mostra la Figura 15.2c. Anche la deformazione da taglio è adimensionale.

Che relazione c'è tra la deformazione di un solido e lo sforzo ad esso applicato? Questa è una domanda cui solo l'esperimento può dare risposta. Nella Figura 15.3 è rappresentata la grandezza della deformazione in funzione dello sforzo applicato per un materiale ordinario come il rame. Per deformazioni inferiori allo 0.5 per cento circa, la deformazione è proporzionale allo sforzo nei limiti degli errori sperimentali. Questo comportamento è noto come *legge di Hooke*. (Si noti che la legge di Hooke non ha la stessa generalità delle leggi di Newton; essa esprime semplicemente una proprietà di molti materiali, ma non di tutti.) Per deformazioni maggiori, gli esperimenti mostrano che la deformazione non è esattamente proporzionale allo sforzo. Il valore dello sforzo in corrispondenza del quale ciò diventa evidente è chiamato *limite di proporzionalità* ed è indicato con A nella Figura 15.3.

Se lo sforzo è abbastanza grande, il solido si deforma in modo permanente. Il valore dello sforzo in corrispondenza del quale ciò si verifica è detto *limite di elasticità* o *limite di snervamento* ed è rappresentato da B nella Figura 15.3. La regione compresa tra il limite di snervamento e la frattura è chiamata *regione di plasticità*.

Le proprietà elastiche di un solido isotropo sono descritte da due grandezze, una relativa allo sforzo normale e una relativa allo sforzo di taglio. Nella regione di proporzionalità della curva sforzo-deformazione, il rapporto tra lo sforzo e la deformazione è una costante il cui valore dipende dal materiale di cui è costituito il solido. Il *modulo di Young* Y esprime questa relazione lineare tra lo sforzo normale e la deformazione di un solido:

$$Y = \frac{\sigma_t}{\varepsilon_t} = \frac{F_n/A}{\Delta\ell/\ell}$$

ossia $\sigma_t = Y\varepsilon_t$. Il modulo di Young ha le dimensioni di una forza per unità di area, e la sua unità SI è il Pa. Un filo d'acciaio ha un valore di Y grande, mentre un elastico debole che si allunga facilmente ha un valore di Y piccolo. Si veda la Tabella 15.1.

Il *modulo di elasticità a taglio* S esprime la relazione tra lo sforzo di taglio e la deformazione da taglio:

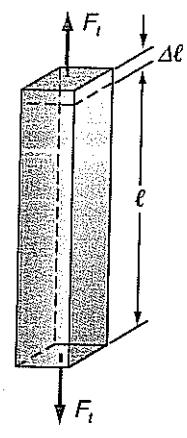
$$S = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} = \frac{F_p/A}{\Delta x/\ell}$$

ossia $\sigma_s = S\varepsilon_s$. Anche il modulo di elasticità a taglio ha le dimensioni di una forza per unità di area, e si misura nel SI in Pa. Un solido che resiste fortemente alla torsione ha un valore di S grande. Come si può verificare nella Tabella 15.1, solitamente nel medesimo materiale solido a grandi valori di Y corrispondono grandi valori di S .

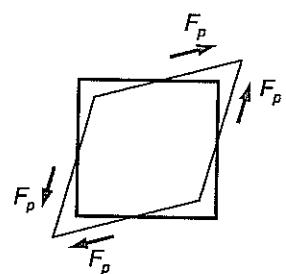
Il *modulo di compressione* B connette la variazione relativa del volume alla variazione della pressione applicata:

$$B = -V \frac{dp}{dV} \approx -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}$$

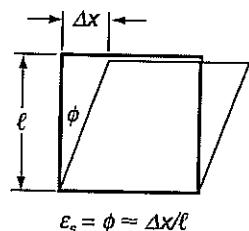
Esso misura la pressione necessaria per comprimere una sostanza di una data frazione del suo volume. Si osservi nella Tabella 15.1 come i solidi e i liquidi abbiano valori di B molto superiori a quelli dei gas.



(a)



(b)



(c)

Figura 15.2

(a) La deformazione da trazione è definita come rapporto tra l'allungamento $\Delta\ell$ dovuto alle forze applicate e la lunghezza ℓ in assenza di sforzi. (b) Quando vengono applicati degli sforzi di taglio, il corpo si deforma. (c) Se si ruota il corpo soggetto a sforzo in modo che una sua faccia abbia la stessa posizione che ha in assenza di sollecitazioni, diventa possibile definire la deformazione da taglio mediante l'angolo ϕ . Per deformazioni da taglio ordinarie, $\phi \approx \Delta x/\ell$.

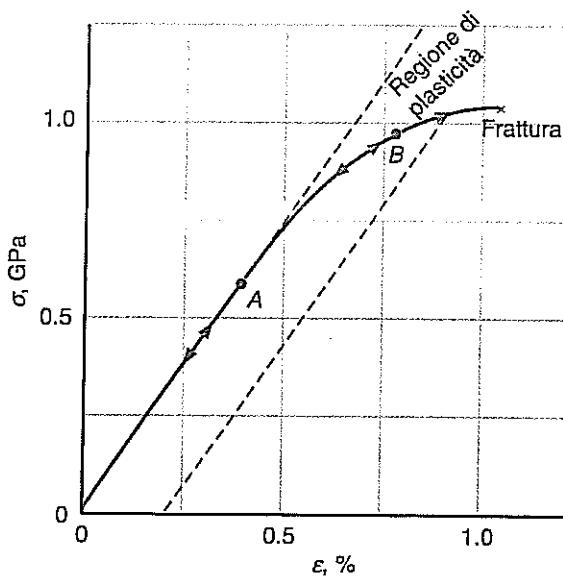
Il modulo di Young.

Il modulo di elasticità a taglio.

Il modulo di elasticità cubica.

Figura 15.3

Una curva sforzo-deformazione ottenibile sperimentalmente per un solido tipico. Per sforzi maggiori di quello che corrisponde al punto *A*, il diagramma sforzo-deformazione non può più essere considerato lineare: il punto *A* è chiamato limite di proporzionalità. Se lo sforzo cessa dopo aver superato il valore che corrisponde al punto *B*, chiamato limite di elasticità, il solido si deforma in modo permanente; quando lo sforzo cessa, il comportamento del corpo è descritto da una linea come quella tratteggiata.

**Tabella 15.1** Valori approssimativi delle costanti elastiche per alcuni materiali.

Materiale	<i>Y</i> GPa	<i>S</i> GPa	<i>B</i> GPa
Alluminio	70	30	70
Ottone	91	36	61
Rame	110	44	140
Ghisa	100	40	90
Piombo	15	5.6	7.7
Acciaio	200	84	160
Tungsteno	390	150	200
Osso	15	80	
Mattone	14		
Calcestruzzo	25		
Diamante	1120	450	540
Vetro	55	23	31
Ghiaccio	14	3	8
Nylon	5		
Roccia	50		40
Gomma (vulcanizzata)	14		
Legno (venatura) (⊥ venatura)	10 1		
Alcool etilico	0	0	0.9
Glicerina	0	0	4.8
Mercurio	0	0	27
Acqua	0	0	2.2
La maggior parte dei gas a temperatura ambiente e a pressione atmosferica	0	0	10^{-4}

Esempio 15.1

Un cavo d'acciaio viene avvolto intorno a un tronco d'albero e tirato da un trattore. Il cavo ha il metro di 12.5 mm ed è lungo 10.5 m tra il trattore e il tronco. Per sradicare l'albero è necessaria forza di 9500 N. (a) Qual è lo sforzo applicato al cavo? (b) Qual è la deformazione del cavo? (c) quanto si allunga il cavo quando l'albero viene sradicato?

Soluzione

(a) In base alla definizione di sforzo normale:

$$\sigma_t = \frac{F_n}{A} = \frac{9600 \text{ N}}{\pi(6.25 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 7.74 \times 10^7 \text{ Pa}$$

(b) La deformazione può essere calcolata a partire dal valore del modulo di Young dato nella Tabella 15.1:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{Y} = \frac{7.74 \times 10^7 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 3.87 \times 10^{-4}$$

(c) La variazione della lunghezza del cavo può essere determinata in base alla definizione di deformazione, $\varepsilon_t = \Delta\ell/\ell$:

$$\Delta\ell = \varepsilon_t \ell = (3.87 \times 10^{-4})(10.5 \text{ m}) = 4.06 \text{ mm}$$

Benché l'allungamento sia misurabile, non è tale da essere rilevato dal taglialegna.

15.3 LA DENSITÀ

Che cosa si intende quando si dice che il ferro è «più pesante» dell'alluminio? Non certo che ogni pezzo di ferro pesi più di qualunque pezzo di alluminio; si intende che, dati uguali volumi di ferro e di alluminio, il ferro pesa di più e quindi ha massa maggiore. Ciò viene tradotto in termini quantitativi nel concetto di massa per unità di volume, o *densità* ρ , di una sostanza:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La densità

dove m è la massa e V è il volume. Le dimensioni della densità sono quelle di una massa diviso un volume, e la relativa unità SI è il kg/m^3 . Le densità approssimative di alcuni materiali sono date nella Tabella 15.2. Come vedremo nel prossimo paragrafo, la pressione in un fluido a una data profondità è determinata dalla densità del fluido.

Tabella 15.2 Valori approssimativi delle densità di alcuni materiali*

Materiale	Densità ρ (kg/m^3)	Materiale	Densità ρ (kg/m^3)
Alluminio	2.7×10^3	Legno	0.7×10^3
Ottone	8.4×10^3	Sangue	1.05×10^3
Rame	8.9×10^3	Alcool etilico	0.81×10^3
Oro	19.3×10^3	Glicerina	1.26×10^3
Iridio	22.6×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Ferro o acciaio	7.8×10^3	Acqua	1.00×10^3
Piombo	11.3×10^3	Acqua marina	1.03×10^3
Platino	21.4×10^3	Aria	1.29
Tungsteno	19.3×10^3	Elio	0.179
Osso	1.8×10^3	Idrogeno	0.090
Mattone	$1.4-2.2 \times 10^3$	Vapore acqueo (100°C)	0.6
Calcestruzzo	2.4×10^3	Esafluoruro di uranio	15
Diamante	3.5×10^3	Spazio interstellare	3×10^{-22}
Vetro	2.6×10^3	Sole (media)	1.4×10^3
Ghiaccio	0.92×10^3	Terra (media)	5.5×10^3
Nylon	1.1×10^3	Stella di neutroni	10^{17}
Roccia (media)	2.8×10^3		
Gomma (dura)	1.2×10^3		

* A temperatura ambiente e a pressione atmosferica, salvo dove esplicitamente indicato e per gli ambienti extraterrestri.

Dal momento che l'acqua ha un ruolo fondamentale nella vita quotidiana, si usa confrontare la densità di un materiale con la densità dell'acqua, dividendo la prima per la seconda e chiamando il rapporto *densità relativa* del materiale. Essendo un rapporto tra due grandezze con le stesse dimensioni, la densità relativa è adimensionale.

A volte si usa il *peso specifico*, che è dato da ρg , ossia

$$\frac{\text{peso}}{\text{volume}} = \frac{mg}{V}$$

L'unità di misura del peso specifico nel SI è il N/m³.

■ Esempio 15.2

Un blocco di silicio a forma di parallelepipedo ha le dimensioni di 120 mm × 165 mm × 255 ha una massa di 11.8 kg. (a) Qual è la densità del silicio? (b) Qual è la densità relativa del silicio?

Soluzione

(a) Il volume del blocco è

$$V = (0.120 \text{ m})(0.165 \text{ m})(0.255 \text{ m}) = 5.05 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Quindi la densità del silicio è

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{11.8 \text{ kg}}{5.05 \times 10^{-3} \text{ m}^3} = 2.34 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

(b) La densità relativa δ del silicio è il rapporto tra la densità del silicio e quella dell'acqua, ossia

$$\delta = \frac{2.34 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} = 2.34$$

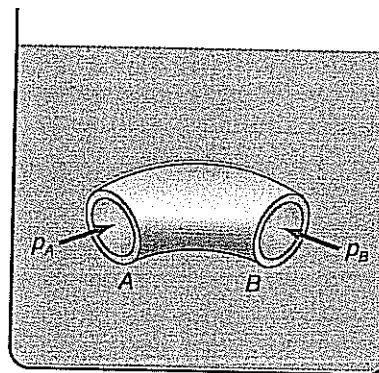
15.4 LA PRESSIONE IN UN FLUIDO STATICO

Un gas o un liquido, quando sono soggetti a uno sforzo di taglio, non raggiungono equilibrio ma si deformano continuamente. Le sostanze con questa proprietà sono chiamate *fluidi*. Quindi in condizioni statiche in un fluido non può esserci uno sforzo di taglio. Ne segue che la forza agente su qualunque superficie che racchiuda un fluido in quiete è normale alla superficie.

La pressione in un fluido in quiete è indipendente dall'orientamento della superficie sulla quale agisce. Per chiarire questo punto, supponiamo che un breve tratto di tubo curvo ad arco circolare sia immerso in posizione orizzontale in un fluido, come mostra la Figura 15.4. Se vi fosse una differenza di pressione alle due estremità, il fluido scorrerebbe, in contrasto con la nostra ipotesi che il fluido sia statico. Dal momento che le estremità del tubo possono avere qualunque orientamento, se ne conclude che la pressione del fluido a un dato livello è la stessa in tutte le direzioni.

Figura 15.4

Se un breve tubo curvo è immerso in un fluido statico, non si verifica alcun flusso. Ciò implica che la pressione sia uguale alle estremità del tubo orizzontale e abbia valore indipendente dalla direzione della superficie cui è applicata.

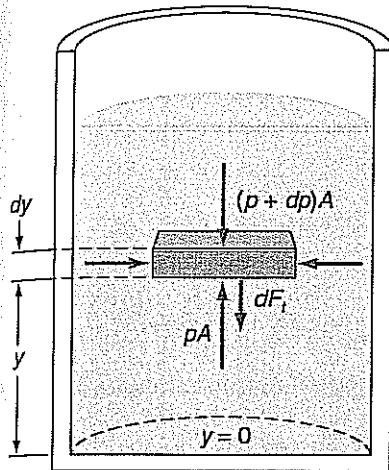


La pressione in funzione della profondità. Ora consideriamo gli effetti della forza gravitazionale della Terra sulla variazione verticale della pressione in un fluido. Prendiamo un piccolo elemento di fluido di peso dF , (Figura 15.5). Le forze agenti sulle facce laterali dell'elemento hanno risultante nulla come si è appena visto. Se p rappresenta la pressione al livello y , e $p + dp$ rappresenta la pressione al livello $y + dy$, le forze agenti sulla faccia superiore e sulla faccia inferiore devono essere leggermente diverse perché sia nulla la somma delle componenti verticali delle forze applicate all'elemento:

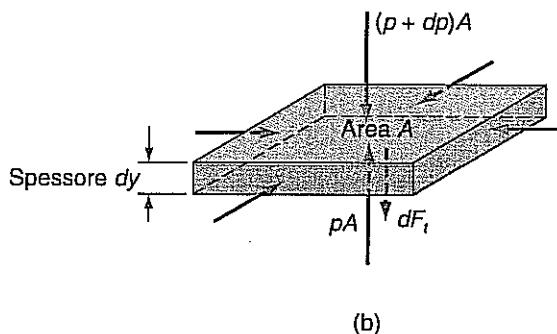
$$pA - (p + dp)A - dF_t = 0$$

Ma $dF_t = (dm)g = (\rho dV)g = \rho g A dy$ e quindi

$$dp = -\rho g dy \quad (15.5)$$



(a)



(b)

Figura 15.5
Le forze che agiscono su un elemento di fluido in equilibrio.

La differenza di pressione compensa il peso dell'elemento di fluido. Il segno negativo indica che la pressione diminuisce all'aumentare dell'altezza sopra il fondo del recipiente. Possiamo integrare l'Equazione (15.5) per ottenere la pressione in funzione dell'altezza:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

Dalla Tabella 15.1, si può vedere che generalmente i liquidi hanno un valore di modulo di compressione B grande e sono perciò praticamente incompressibili. Per esempio, per produrre una variazione dell'1 per cento del volume dell'acqua occorre una pressione di 2.2×10^7 Pa, ossia di 200 atmosfere. Quindi la densità ρ della maggior parte dei liquidi è pressoché indipendente da y , e ρ può essere portata fuori dall'integrale. L'integrazione allora fornisce

$$p_2 - p_1 = \rho g (y_2 - y_1)$$

Se la superficie libera del liquido è in y_2 e la pressione su tale superficie è p_0 , allora a una profondità $h = y_2 - y_1$, la pressione p è data da $p_0 - p = -\rho gh$, ossia

$$p = p_0 + \rho gh \quad (15.6)$$

La pressione in un fluido incompressibile.

Dunque la pressione in un fluido incompressibile aumenta linearmente con la profondità.

Esempio 15.3

Qual è la pressione sul fondo dell'oceano in un punto in cui la profondità è di 3 km? La pressione sulla superficie libera dell'oceano è la pressione atmosferica, ossia 1.01×10^5 Pa.

Soluzione

In base alla Tabella 15.2, la densità dell'acqua marina è 1.03×10^3 kg/m³. Quindi, per l'Equazione (15.6),

$$p = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + (1.03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ N/kg})(3.00 \times 10^3 \text{ m}) = 3.0 \times 10^7 \text{ Pa}$$

ossia circa 300 volte la pressione atmosferica. La densità dell'acqua 3 km sotto la superficie dell'oceano è dell'1.5 per cento circa maggiore che alla superficie, e quindi il nostro risultato, ottenuto nell'ipotesi di un fluido incompressibile, è leggermente errato. Questa è la ragione per cui abbiamo arrotondato la risposta arrivando due sole cifre significative.

L'Equazione (15.6) indica che, se la pressione p_0 alla superficie del liquido viene aumentata di Δp , anche la pressione in un punto arbitrario a distanza h sotto la superficie aumenta di Δp . Questa conclusione è nota come *principio di Pascal*:

la pressione applicata a un fluido statico incomprimibile racchiuso in un recipiente si trasmette inalterata in ogni punto del fluido.

Fluidi comprimibili. Se il fluido è comprimibile in misura significativa, prima di poter integrare l'Equazione (15.5) bisogna conoscere la relazione tra la densità e l'altezza nel fluido. Per molti gas, come l'aria, c'è una relazione tra la pressione p e la densità ρ quando la temperatura è costante: $p/p_0 = \rho/\rho_0$, dove p_0 e ρ_0 sono la pressione e la densità a un livello di riferimento, per esempio in $y = 0$. L'Equazione (15.5) può allora essere scritta $dp = -\rho g dy = (p\rho_0/p_0)g dy$,

ossia

$$\frac{dp}{p} = \frac{\rho_0 g}{p_0} dy$$

Questa espressione può essere integrata tra il livello di riferimento $y = 0$ e un livello $y = h$:

$$\ln p(h) - \ln p_0 = \frac{\rho_0 g}{p_0} (h - 0)$$

ovvero

$$\ln \frac{p(h)}{p_0} = \frac{\rho_0 g}{p_0}$$

cioè

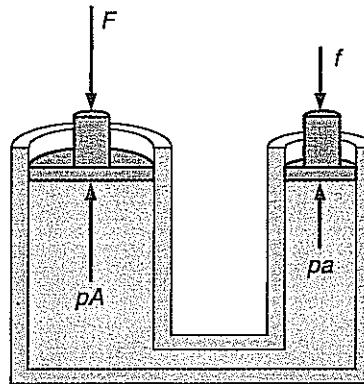
$$p(h) = p_0 e^{-(\rho_0 g/p_0)h} \quad (15.7)$$

La pressione decresce esponenzialmente con l'altezza.

La pressione in un fluido comprimibile.

Figura 15.6

Rappresentazione schematica della pressa idraulica.



Esempio 15.4

- (a) Qual è la differenza di pressione tra il pavimento e il soffitto di una stanza alta 4.0 m? (b) A qualsiasi altezza sopra la superficie terrestre la pressione è la metà di quella al livello del mare? Si assuma che la temperatura dell'atmosfera sia costante.

Soluzione

- (a) In base alla Tabella 15.2

$$\frac{\rho_0 g}{p_0} = \frac{(1.29 \text{ km/m}^3)(9.8 \text{ N/kg})}{1.01 \times 10^4 \text{ Pa}} = 1.25 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

Quindi

$$p(\text{soffitto}) = p(\text{pavimento}) e^{-(1.25 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1})(4 \text{ m})} = \\ = 0.99950 p(\text{pavimento})$$

ossia $p(\text{pavimento}) - p(\text{soffitto}) = (5.0 \times 10^{-4})p(\text{pavimento}) = 50 \text{ Pa}$. [Un altro metodo che può ricorrere si basa sul fatto che $e^{-x} \approx 1 - x$ quando $x \ll 1$, cosicché, per piccole differenze di altezza, $p - p_0 = p_0(1 - \rho_0 g/h) = 50 \text{ Pa}$.] Dal momento che la densità dell'aria è bassa, questa differenza di pressione è modesta, ma può essere misurata.

15.4 La pressione in un fluido statico

(b) Risolvendo l'Equazione (15.7) rispetto a h ,

$$h = \frac{P_0}{\rho_0 g} \ln \frac{P}{P_0} = (-8.0 \times 10^3 \text{ m}) \ln 0.5 = 5540 \text{ m}$$

Gli aeroplani volano ordinariamente al di sopra di questa quota, e questa è la ragione per cui sono necessarie le maschere a ossigeno per il caso che venga meno la pressurizzazione della cabina. In realtà, la temperatura dell'aria decresce leggermente con l'altezza, e la pressione a 5500 m è del 15 per cento circa inferiore alla nostra stima.

I manometri. La pressione di un gas all'interno di un recipiente può essere misurata con un manometro come quello rappresentato nella Figura 15.7. Il tubo a forma di U contiene un liquido, per esempio mercurio (Hg), che raggiunge livelli differenti nei due rami. La pressione nel punto A è la pressione atmosferica p_{atm} perché il tubo è aperto sopra A . In base all'Equazione (15.6), la pressione nel liquido manometrico in B è $p_{atm} + \rho gh$, dove ρ è la densità del liquido stesso. La pressione nel punto C è uguale a quella nel punto B , perché i due punti sono allo stesso livello. Quindi la pressione p nel bulbo di Figura 15.7 è

$$p = p_{atm} + \rho gh$$

La pressione totale p è chiamata *pressione assoluta*, mentre $p_r = p - p_{atm} = \rho gh$ è chiamata *pressione relativa*.

Esempio 15.5

Un manometro a mercurio è collegato a un serbatoio d'aria, come mostra la Figura 15.8. Qual è la pressione relativa nei punti a e b e all'interno del serbatoio?

Soluzione

Nel punto a la pressione è quella atmosferica, e quindi la pressione relativa è nulla. Nel punto b , la pressione è $p_b = p_{atm} + \rho gh$, e la pressione relativa p_{br} (o ρgh) è

$$p_{br} = (13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ N/kg})(0.044 \text{ m}) = 5.9 \text{ kPa}$$

All'interno del serbatoio, la pressione è sostanzialmente la stessa che in b perché la densità dell'aria è molto bassa.

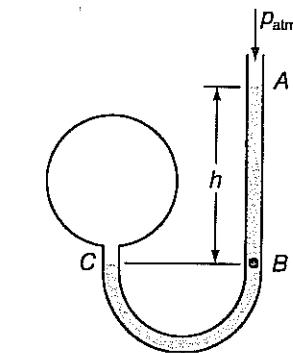
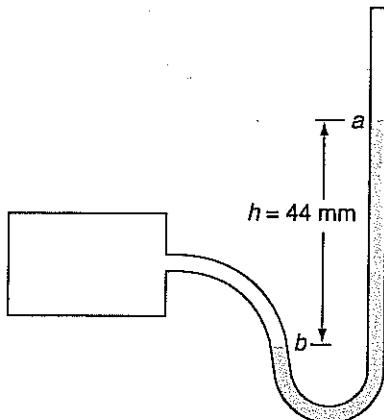


Figura 15.7
Un manometro.

Figura 15.8
Esempio 15.5.

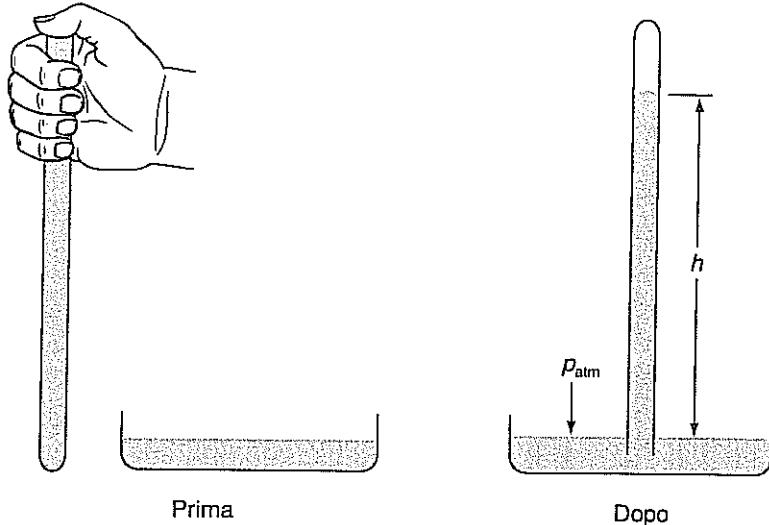
I barometri. Un barometro è un apparecchio per la misura della pressione dell'atmosfera. Un tipo di barometro può essere realizzato prendendo un tubo lungo almeno 800 mm e chiuso a un'estremità e riempendolo di mercurio. Si chiude poi con il pollice l'estremità aperta, si rovescia il tubo, si immerge l'estremità aperta in una vaschetta di mercurio, e si toglie il pollice, come mostra la Figura 15.9. Quando il pollice viene tolto, il livello del mercurio scende finché la sommità della colonna di liquido è a un'altezza h sopra la superficie libera del mercurio della vaschetta. Al livello del mare l'altezza h è mediamente di 760 mm e dipende dalle condizioni meteorologiche. Dal momento che sopra il mercurio nel tubo non c'è nulla, la pressione alla sommità della colonna liquida è zero. (Trascuriamo la pressione del vapore di mercurio presente in questa regione, essendo tale pressione minore di un milionesimo di atmosfera.) L'Equazione (15.6) indica che la pressione alla base della colonna è $\rho_{Hg} gh$. Ma que-

Un barometro misura la pressione esercitata dall'atmosfera.

sta è anche la pressione che l'atmosfera esercita sul mercurio della vaschetta $p_{\text{atm}} = \rho_{\text{Hg}}gh$. Vale a dire che la pressione dell'atmosfera è direttamente proporzionale all'altezza della colonna di mercurio. In altri termini, il peso della colonna di mercurio è uguale al peso di una colonna d'aria di pari sezione ed estesa fino alla base dell'atmosfera terrestre. Siccome venivano spesso misurate in questo modo, le pressioni atmosferiche sono a volte espresse in mmHg o torr, intendendosi con ciò l'altezza in mm della colonna di mercurio che la pressione può sostenere. La pressione sanguigna ordinariamente misurata in mmHg.

Figura 15.9

Un barometro. Un tubo viene riempito di mercurio, la sua imboccatura viene immersa nel mercurio e il pollice viene tolto. Il livello del mercurio nel tubo scende fino all'altezza h , che dipende dalla pressione dell'atmosfera.



Esempio 15.6

- (a) Qual è la pressione assoluta sul fondo di uno specchio d'acqua dolce profondo 6.2 m? (b) la pressione relativa sul fondo? (c) Qual è la pressione relativa sul fondo misurata in torr (non fa parte del SI)?

Soluzione

- (a) La pressione assoluta p è

$$p = p_{\text{atm}} + \rho gh = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + (1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(6.2 \text{ m}) = 1.62 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Si osservi che ρg per l'acqua vale circa 10^4 N/m^3 , cosicché nell'acqua ogni 10 m di profondità corrispondono a una pressione aumentata di 10^5 Pa , ossia di circa 1 atm.

(b) La pressione relativa p_r è la differenza tra la pressione assoluta e la pressione atmosferica p_{atm} : $p_r = p - p_{\text{atm}} = 6.1 \times 10^4 \text{ Pa}$.

(c) La pressione relativa in torr è l'altezza h (espressa in mm) della colonna di mercurio che questa pressione relativa può sostenere:

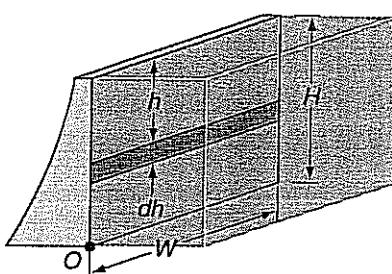
$$h = \frac{p_r}{\rho_{\text{Hg}}g} = \frac{6.1 \times 10^3 \text{ Pa}}{(13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ N/kg})} = 460 \text{ mm}$$

Quindi la pressione relativa può essere espressa anche come 460 torr.

Esempio 15.7

Una diga ha un'altezza H di 15 m e una larghezza L di 40 m, come mostra la Figura 15.10. (a) Qual è la componente orizzontale totale F_{or} della forza esercitata sulla diga dall'acqua retrostante? (b) Qual è il momento M esercitato dall'acqua sulla diga, rispetto a un asse passante per la base della diga e avente la direzione della sua larghezza?

Figura 15.10
Esempio 15.7.



Soluzione

Ci serviremo della pressione relativa dell'acqua per calcolare F_{or} e τ perché la pressione atmosferica si esercita da entrambi i lati della diga. Poiché la pressione varia con la profondità, è necessario un integrale. L'intensità della componente dF_{or} della forza che agisce su una sottile striscia di spessore dh e larghezza L , posta a profondità h è $dF_{or} = p_r dA = (\rho gh)(L dh)$, e quindi la componente totale della forza è

$$F_{or} = \int_0^H \rho g h L dh = \rho g L \int_0^H h dh = \rho g L \left(\frac{1}{2} H^2 \right)$$

Si noti che la forza è proporzionale al quadrato dell'altezza della diga. Nel nostro caso,

$$F_{or} = \frac{1}{2} (10^3 \text{ kg/m}^3) (9.8 \text{ N/m}) (40\text{m}) (15\text{m})^2 = 40 \text{ MN}$$

(b) Il modulo del momento della forza agente sulla sottile striscia rispetto a un asse orizzontale passante per il punto O è $d\tau = (H - h)dF = (H - h)(\rho gh)(L dh)$, e il momento totale esercitato dall'acqua ha modulo

$$\tau = \rho g L \int_0^H (H - h)h dh = \rho g L \left(\frac{1}{2} H^3 - \frac{1}{3} H^3 \right) = \frac{\rho g L H^3}{6}$$

Si noti che il modulo del momento è proporzionale al cubo dell'altezza della diga. Momenti di segno opposto che il terreno circostante esercita sui lati e sulla base della diga mantengono quest'ultima in equilibrio. Nel caso in esame,

$$\tau = \frac{(10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ N/kg})(40 \text{ m})(15 \text{ m})^3}{6} = 0.2 \text{ GN} \cdot \text{m}$$

Il centro di pressione è definito come quel punto in cui dovrebbe essere applicata un'unica forza orizzontale per fornire lo stesso effetto della forza totale esercitata dall'acqua. Perché il centro di pressione non è al centro della diga?

15.5 IL PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Il principio di Archimede può essere formulato nel modo seguente:

Un corpo che è immerso parzialmente o totalmente in un fluido riceve una spinta di intensità pari al peso del fluido spostato e diretta verso l'alto lungo una retta passante per il centro di gravità del fluido spostato.

Il principio di Archimede.

Per avere una giustificazione di questo principio in base alle leggi di Newton, si consideri un corpo in equilibrio mentre è immerso in un fluido, come mostra la Figura 15.11. Se si sostituisce il corpo con un uguale volume di fluido (il fluido spostato), anche questo è in equilibrio traslatorio e rotatorio. La forza che il fluido circostante esercita sul corpo e quella che esercita sul fluido spostato sono identiche; quindi la forza esercitata sul corpo dal fluido circostante deve essere uguale al peso del fluido spostato e deve essere diretta verso l'alto lungo una retta passante per il centro di gravità del fluido spostato. Siccome il peso del fluido spostato è pari alla massa ρV del fluido stesso moltiplicata per l'accelerazione di gravità, il modulo della spinta di Archimede F_A è

$$F_A = \rho h V$$

Si noti che ρ è la densità del liquido spostato e V il volume del liquido spostato.

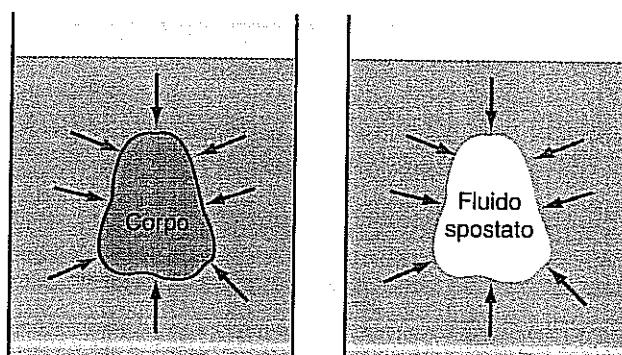


Figura 15.11

La spinta di Archimede che agisce su un corpo è uguale alla forza che si esercita sul fluido che il corpo sposta.

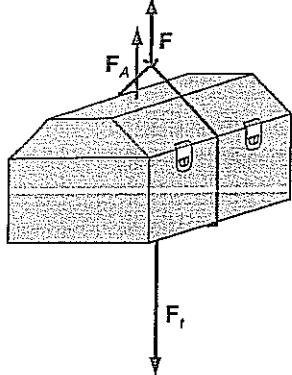


Figura 15.12
Esempio 15.8.

Esempio 15.8

Lo scrigno di un tesoro che ha una massa di 92 kg e un volume di 0.031 m^3 giace sul fondo del mare. Quale forza occorre per sollevarlo?

Soluzione

Come si vede nella Figura 15.12, l'intensità F della forza necessaria per sollevare lo scrigno è il suo peso diminuito della spinta di Archimede:

$$F = mg - \rho g V = (92 \text{ kg})(9.8 \text{ N/kg}) - (1.03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ N/kg})(0.031 \text{ m}^3) = 590 \text{ N}$$

Siccome 590 N è il peso di 60 kg (nell'aria), sollevare questo forziera nell'acqua sarebbe come avere un forziera di 60 kg fuori dall'acqua.

Esempio 15.9

Quale volume di elio è necessario per far galleggiare nell'aria un pallone, se l'involucro e l'equipaggiamento di questo hanno una massa di 390 kg?

Soluzione

La spinta di Archimede agente sul pallone a causa dell'aria spostata deve essere uguale al peso dell'involucro e dell'equipaggiamento più il peso dell'elio. Quindi $F_A = (390 \text{ kg} + m_{\text{elio}})g = \rho_{\text{aria}}gV$. Ma la massa dell'elio dipende dal volume del pallone: $m_{\text{elio}} = \rho_{\text{He}}V$. Si noti che al momento ammesso che il volume dell'involucro e dell'equipaggiamento del pallone sia trascurabile: $\rho_{\text{aria}}gV = (390 \text{ kg} + \rho_{\text{He}}V)g$, ossia

$$V = \frac{390 \text{ kg}}{\rho_{\text{aria}} - \rho_{\text{He}}} = 351 \text{ m}^3$$

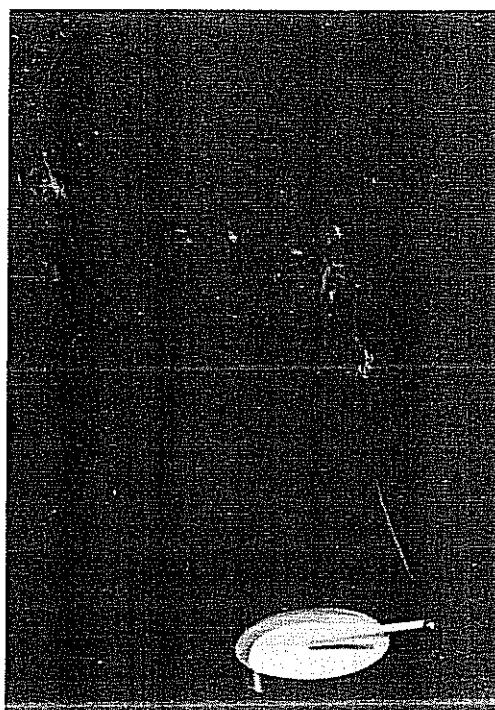
dove si è supposto che l'aria e l'elio siano a pressione atmosferica.

15.6 L'EQUAZIONE DI BERNOULLI

I fluidi in movimento sono molto più complessi dei fluidi in quiete. È difficile applicare le leggi di Newton a una singola «particella» di fluido, seguendone il moto all'interno di un sistema complicato. La seconda legge di Newton viene invece usata per minare le proprietà del fluido in ciascun punto del sistema, mentre le particelle del sistema fluiscono per quel punto. Una descrizione del moto del fluido consiste nello stabilire la densità, la pressione e la velocità del fluido in tutti i punti.

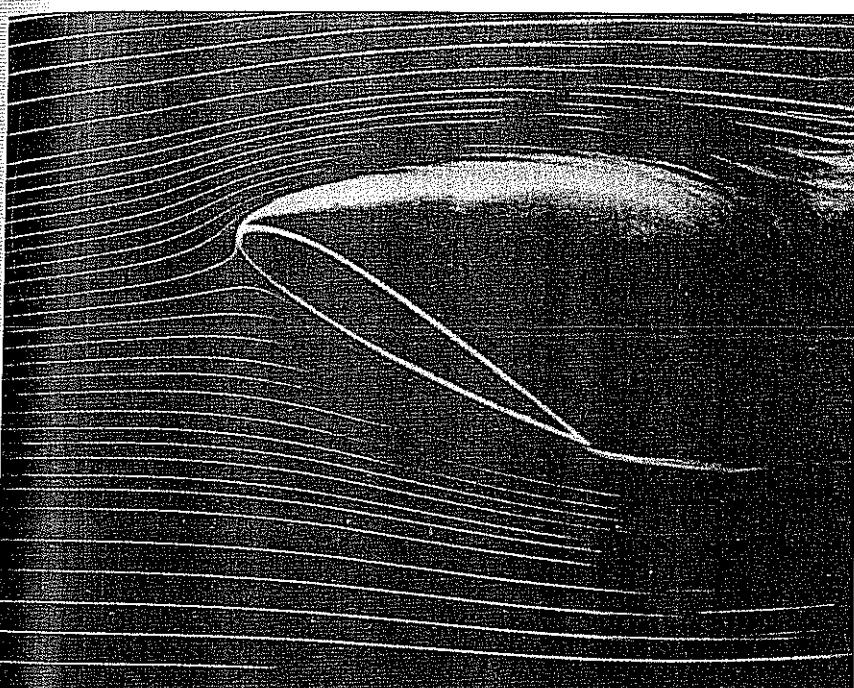
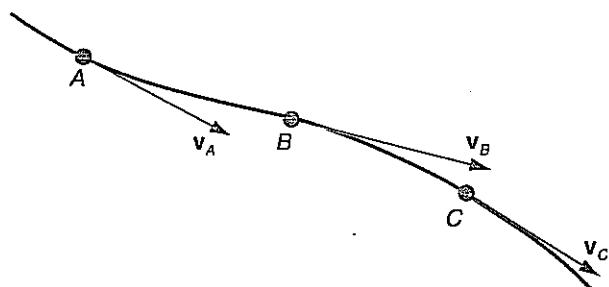
La Figura 15.13 mostra la forma del fumo che sale da una sigaretta. La configurazione del fumo in basso presenta una forma costante nel tempo e poi, più in alto,

Figura 15.13
Il flusso del fumo di una sigaretta. (a) Nel primo tratto il flusso è regolare e stazionario. (b) Quando il fumo sale, il flusso diventa instabile e forma vortici che variano nel tempo. (Tom Richard).

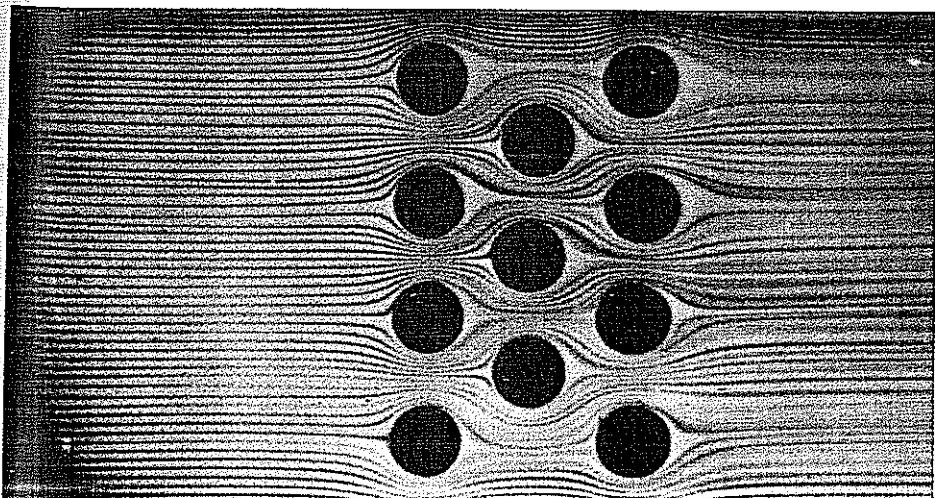


me una struttura più complicata che varia nel tempo. Questo regime variabile nel tempo viene detto *turbolento*. Una comprensione completa del moto turbolento non è ancora stata raggiunta. Perciò cominceremo con l'ipotesi di un flusso non turbolento, e inoltre discuteremo solo il caso delle condizioni stazionarie, nelle quali cioè la densità ρ , la pressione p , e la velocità v del fluido sono costanti in ogni dato punto. In questo caso le linee lungo le quali fluiscono le particelle del fluido sono regolari, come nella regione inferiore della struttura del fumo della sigaretta (Figura 15.13a), e possono essere disegnate, come nella Figura 15.14, oppure rese sperimentalmente osservabili, come nella Figura 15.15. Queste linee sono chiamate *linee di flusso*. In ogni loro punto la tangente alla linea coincide con la direzione della velocità del fluido. Siccome le particelle si muovono lungo le linee di flusso, il fluido non attraversa mai una superficie formata da linee di flusso.

Linee di flusso.



(a)



(b)

Figura 15.14

Una linea di flusso in un fluido in moto. In ogni punto la tangente alla linea di flusso coincide con la direzione della velocità del fluido.

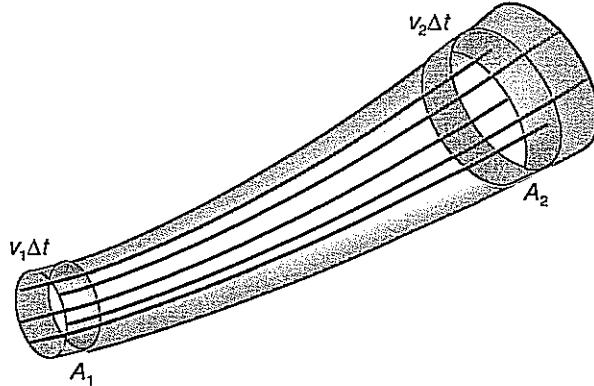
Figura 15.15

(a) Linee di flusso attorno a un profilo alare. [Illustrated Experiments in Fluid Mechanics (*The NCFMF Book of Film Notes*) National Committee for Fluid Mechanics Films, Educational Development Center, Inc., M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1972.] (b) Flusso non turbolento intorno a una serie di cilindri. Le linee di flusso sono formate da fluido che è stato colorato. (Tecquipment Ltd., Nottingham, England.)

tubo di flusso

Si possono tracciare delle linee di flusso in modo che esse delimitino un *tubo so*, costituito da un fascio di linee di flusso contigue, come mostra la Figur Benché il fascio venga visualizzato come se fosse fisso nel tempo e nello si sua parete esterna non è un tubo solido, ma una superficie di contorno. for ch'essa da linee di flusso. Supponiamo che la regione interna al tubo sia suf mente sottile perché la pressione p , la densità ρ e la velocità v siano uniformi lunque sezione trasversale di area A .

Figura 15.16
Un tubo di flusso è delimitato da linee di flusso.



La massa di fluido avente un piccolo volume ΔV che attraversa una qualunque trasversale di area A in un tempo breve Δt è $\Delta m = \rho\Delta V = \rhoAv\Delta t$. Quind locità di flusso della massa, detta *portata in massa*, è $\Delta m/\Delta t = \rho Av$. Se s flusso stazionario, questo deve essere identico in tutti gli istanti e in tutti i punti bo, perché tutto ciò che attraversa una sezione trasversale deve attraversare tuti tre: nulla infatti si accumula nel tubo e nulla attraversa la sua parete. Si ha così

L'equazione di continuità.

L'equazione di continuità per un fluido incomprimibile.

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

Questa equazione è chiamata *equazione di continuità*. Essa esprime la conservazione della massa in un flusso stazionario.

Se inoltre ammettiamo che il fluido sia incomprimibile o, in modo equivalente, la densità sia costante, allora $\rho_1 = \rho_2$ e

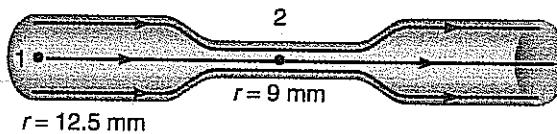
$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Questa è un'ipotesi valida nel caso dell'acqua, e funziona abbastanza bene anche la corrente d'aria intorno a un profilo alare o nelle condutture di riscaldamento e refrigerazione, dove le variazioni di pressione sono piccole. Il prodotto vA rappresenta la portata in volume, che è indicata con il simbolo Q .

Esempio 15.10

(a) Una conduttura per l'acqua ha una strozzatura in cui il raggio del tubo si restringe da 12.5 mm. Se la velocità dell'acqua nel tubo da 12.5 mm è di 1.8 m/s, qual è la velocità nel tubo più stretto? Si veda la Figura 15.17. (b) Qual è la portata in volume? (c) Qual è la portata in massa?

Figura 15.17
Esempio 15.10.



Soluzione

(a) Usando l'equazione di continuità,

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = v_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} = 3.5 \text{ m/s}$$

(b) La portata in volume Q è

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = [\pi(12.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2](1.8 \text{ m/s}) = 8.8 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

(c) La portata in massa è

$$\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 = (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(8.8 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}) = 0.88 \text{ kg/s}$$

Siamo stati in grado di dedurre l'equazione di continuità sotto l'ipotesi che il flusso sia stazionario e di dimostrare che vA è una costante nel flusso stazionario di un fluido incompressibile. Se inoltre il lavoro compiuto dalle forze non conservative è trascurabile, l'energia meccanica si conserva. Cominciamo a considerare questo caso, mentre nel prossimo paragrafo discuteremo il caso in cui il lavoro compiuto dalle forze non conservative non è trascurabile.

La velocità di flusso, l'altezza del fluido e la pressione possono variare lungo una linea di flusso, come accade nei punti 1 e 2 della Figura 15.18. Ora mostreremo come il teorema lavoro-energia metta in relazione queste grandezze per punti posti lungo le linee di flusso.

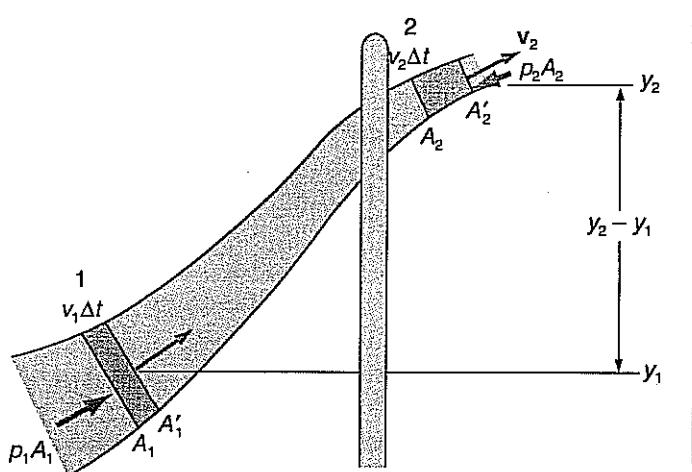


Figura 15.18

Il flusso lungo un tubo di flusso. I volumi ΔV nelle regioni ombreggiate sono uguali: $\Delta V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$. La massa di ciascuna regione ombreggiata è $\Delta m = \rho \Delta V$.

Determiniamo anzitutto il lavoro compiuto in un breve intervallo di tempo Δt sul fluido che si trova inizialmente nella regione delimitata da A_1 , A_2 e dal tubo di flusso. La forza esercitata sulla superficie A_1 dal fluido retrostante è $p_1 A_1$. Il lavoro compiuto da questa forza nel tempo Δt è il prodotto della forza per lo spostamento del suo punto di applicazione, $v_1 \Delta t$. Quindi $W_1 = p_1 A_1 v_1 \Delta t$. Analogamente, in A_2 la pressione compie un lavoro $W_2 = -p_2 A_2 v_2 \Delta t$. Il lavoro totale $W = W_1 + W_2$ compiuto sul fluido dalle forze di pressione è

$$W = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t$$

In base all'equazione di continuità per un fluido incompressibile, $v_1 A_1 = v_2 A_2$. Quindi $\Delta V = v_1 A_1 \Delta t = v_2 A_2 \Delta t$ è il volume compreso tra A_1 e A'_1 oppure tra A_2 e A'_2 . Si tratta del volume di fluido che entra da una estremità del tubo ed esce dall'altra nell'intervallo di tempo Δt . Il lavoro totale compiuto sul fluido dalle forze di pressione può allora essere scritto come $W = (p_1 - p_2) \Delta V$.

Il teorema lavoro-energia indica che questo lavoro è pari alla variazione dell'energia meccanica del fluido inizialmente presente tra A_1 e A_2 . Siccome il flusso è stazionario, le proprietà del fluido nella regione compresa tra A'_1 e A_2 sono costanti. C'è una variazione dell'energia meccanica nella regione appena occupata tra A_2 e A'_2 ; e nella regione tra A_1 e A'_1 , che viene abbandonata. Dal momento che il volume di entrambe queste regioni è ΔV e la densità è costante, la massa contenuta in ciascuna delle regioni è $\Delta m = \rho \Delta V$. L'energia potenziale è data da $(\Delta m)gy$ e l'energia cinetica da $\frac{1}{2}(\Delta m)v^2$. La variazione dell'energia meccanica è quindi

$$\Delta E = \left[(\Delta m)gy_2 + \frac{1}{2}(\Delta m)v_2^2 \right] - \left[(\Delta m)gy_1 + \frac{1}{2}(\Delta m)v_1^2 \right]$$

Il teorema lavoro-energia stabilisce allora che

$$(p_1 - p_2) \Delta V = \left[(\Delta m)gy_2 + \frac{1}{2}(\Delta m)v_2^2 \right] - \left[(\Delta m)gy_1 + \frac{1}{2}(\Delta m)v_1^2 \right]$$

ossia, dividendo per ΔV e tenendo presente che $\rho = \Delta m / \Delta V$, si perviene a

$$p_1 - p_2 = \rho gy_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \rho gy_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

Portando al primo membro i termini con il pedice 1 e al secondo membro quelli con il pedice 2, si ottiene

Il teorema di Bernoulli.

$$p_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Questa equazione, che comparve nel 1738 nell'*Hydrodynamica* di Daniel Bernoulli, è nota come *equazione di Bernoulli*. Si noti che nella sua deduzione abbiano preso in considerazione un flusso stazionario, non turbolento, senza forze dissipative, e un liquido incompressibile.

Benché la nostra deduzione dell'Equazione (15.10) metta in relazione la pressione, la velocità e l'altezza lungo una linea di flusso, in testi di livello superiore si dice che, se il flusso è «irrotazionale», l'equazione di Bernoulli vale anche trasversalmente alle linee di flusso. Ci si può fare un'idea intuitiva di che cosa significhi «irrotazionale» immaginando una piccola ruota a pale immersa nel fluido. Se la ruota non ruota intorno al suo asse, il flusso è irrotazionale. Dal punto di vista matematico, il flusso è irrotazionale se il rotore del campo delle velocità del fluido ha rotore nullo.

Infine si noti che se la velocità v è nulla, l'equazione di Bernoulli, E (15.10), si riduce all'Equazione (15.6), com'era prevedibile.

Esempio 15.11

L'acqua (considerata come un fluido incompressibile di viscosità trascurabile) scorre nel tubo rettilineo della Figura 15.17. Nel punto 1 la pressione relativa è di 51 kPa e la velocità è di 1.8 m/s. Quali sono la velocità e la pressione relativa nel punto 2?

Soluzione

La velocità nel punto 2 può essere determinata per mezzo dell'equazione di continuità per un fluido incompressibile:

$$v_2 A_2 = v_1 A_1$$

$$v_2 = v_1 \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = 3.5 \text{ m/s}$$

La pressione nel punto 2 può essere poi calcolata in base all'equazione di Bernoulli. Poiché

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 \\ &= 5.1 \times 10^4 \text{ Pa} + \frac{1}{2} (1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) [(1.8 \text{ m/s})^2 - (3.5 \text{ m/s})^2] \\ &= 4.7 \times 10^3 \text{ Pa} \end{aligned}$$

A prima vista può sembrare paradossale che la pressione in 2 sia inferiore a quella in 1. Ma si considera che il fluido deve essere accelerato tra 1 e 2, è chiaro che la pressione in 1 deve essere maggiore di quella in 2. Anche quando il fluido ha una piccola viscosità, le forze dovute alla viscosità possono essere piccole rispetto a quelle necessarie per accelerare il fluido, e p_2 può essere minore di p_1 . Da questo esempio vediamo che quando l'altezza è costante, una velocità del fluido composta da una velocità oraria e da una velocità di accelerazione composta da una velocità minore, e una velocità più bassa comporta una pressione maggiore.

Esempio 15.12

Un cilindro verticale di vetro ha un diametro interno di 150 mm e un foro sulla superficie laterale alla base. Il recipiente viene riempito d'acqua finché il livello del liquido è 350 mm sopra il foro. Da questo fuoriesce un getto d'acqua del diametro di 5 mm. Qual è la velocità dell'acqua nel getto?

Soluzione

La pressione sulla superficie libera dell'acqua contenuta nel cilindro e la pressione sull'acqua che esce dal foro sono entrambe pari alla pressione atmosferica. Quindi l'equazione di Bernoulli ha la forma

$$\frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) = g(y_2 - y_1)$$

dove il pedice 1 si riferisce al getto e il pedice 2 si riferisce alla superficie libera dell'acqua nel cilindro. L'equazione di continuità mette in relazione le velocità nel getto e nel cilindro:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

Quindi

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{2g(y_2 - y_1)}{1 - (A_1/A_2)} = \frac{2(9.8) \text{ m/s}^2 (350 \text{ mm})}{1 - (5 \text{ mm}/150 \text{ mm})^2} \\ &= \frac{6.9 \text{ m}^2/\text{s}^2}{0.999} \end{aligned}$$

Va notato che, arrotondando alla seconda cifra significativa, il denominatore diventa 1.0. Calcolando la radice quadrata, si ottiene

$$v_1 = 2.6 \text{ m/s}$$

Se il cilindro è abbastanza grande perché la velocità alla superficie libera sia trascurabile, la velocità dell'acqua nel getto è la stessa che il liquido avrebbe se cadesse di un tratto $y_2 - y_1$.

Esempio 15.13

Un acquedotto utilizza un serbatoio per immagazzinare l'acqua e renderla disponibile all'occorrenza. Se il livello dell'acqua nel serbatoio, nel punto indicato con *A* nella Figura 15.19, è 12 m sopra la conduttrice, e la velocità nella conduttrice nel punto *B* è di 16 m/s, qual è la pressione relativa nei punti *A* e *B*?

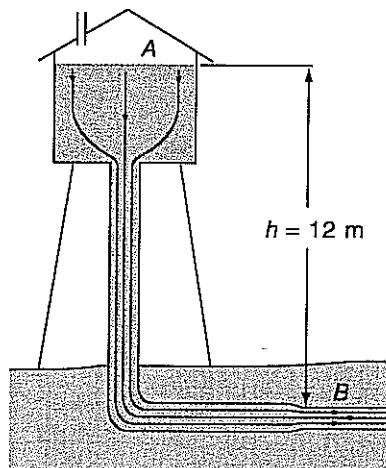


Figura 15.19
Esempio 15.13.

Soluzione

Nel punto *A*, la pressione relativa è nulla, perché il recipiente è in comunicazione con l'atmosfera. Applicando l'equazione di Bernoulli ai punti *A* e *B*, si ha

$$p_B + \rho gy_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_A + \rho gy_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

La velocità v_A dell'acqua alla superficie del serbatoio è praticamente nulla (sai spiegare perché?), e $y_A - y_B = 12 \text{ m}$. Quindi

$$\begin{aligned} p_B &= \rho gh - \frac{1}{2} \rho v_B^2 \\ &= (1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \left[(9.8 \text{ N/kg})(12 \text{ m}) - \frac{1}{2} (16 \text{ m/s})^2 \right] \\ &= -1.0 \times 10^4 \text{ Pa} \end{aligned}$$

La pressione relativa nella conduttrice è negativa! Ciò significa che la pressione assoluta nella conduttrice è minore della pressione atmosferica. (La pressione assoluta non è però minore di zero.) Nel progettare gli acquedotti, situazioni di questo tipo devono essere evitate, perché se nel tubo ci fosse un foro, potrebbe venir risucchiata dal terreno acqua inquinata. Negli acquedotti reali il flusso è spesso turbolento, e di rado l'acqua ha velocità superiori a 3 m/s.

Molti congegni di utilità pratica sono applicazioni dell'equazione di Bernoulli. La Figura 15.20a rappresenta un nebulizzatore per profumo. Apparecchi simili vengono usati per spruzzare la vernice o gli insetticidi. Quando la pompetta del nebulizzatore viene schiacciata, l'aria viene spinta a grande velocità attraverso la strozzatura: se il profumo ha la densità dell'acqua, una velocità dell'aria di circa 17 m/s nel sottile tubicino è sufficiente ad abbassare la pressione nel punto *A* quanto basta perché la pressione atmosferica spinga il profumo 2 cm in su, facendolo arrivare nel tubicino. Il tubo aspirante che i dentisti usano per tenere la bocca pulita dalla saliva utilizza un condot-

to sottile percorso dall'acqua ad alta velocità per creare una pressione inferiore alla atmosferica.

Questo abbassamento della pressione dovuto alla velocità del fluido è alla base del venturimetro, rappresentato nella Figura 15.20b. La differenza di pressione tra A e B fornisce la misura della velocità del fluido. Molti carburatori per i motori contengono un condotto sottile chiamato tubo di Venturi (Figura 15.20c), il cui scopo è di abbassare la pressione nel punto A in modo che la benzina venga risucchiata dalla corrente d'aria e trasferita alle camere di combustione del motore.

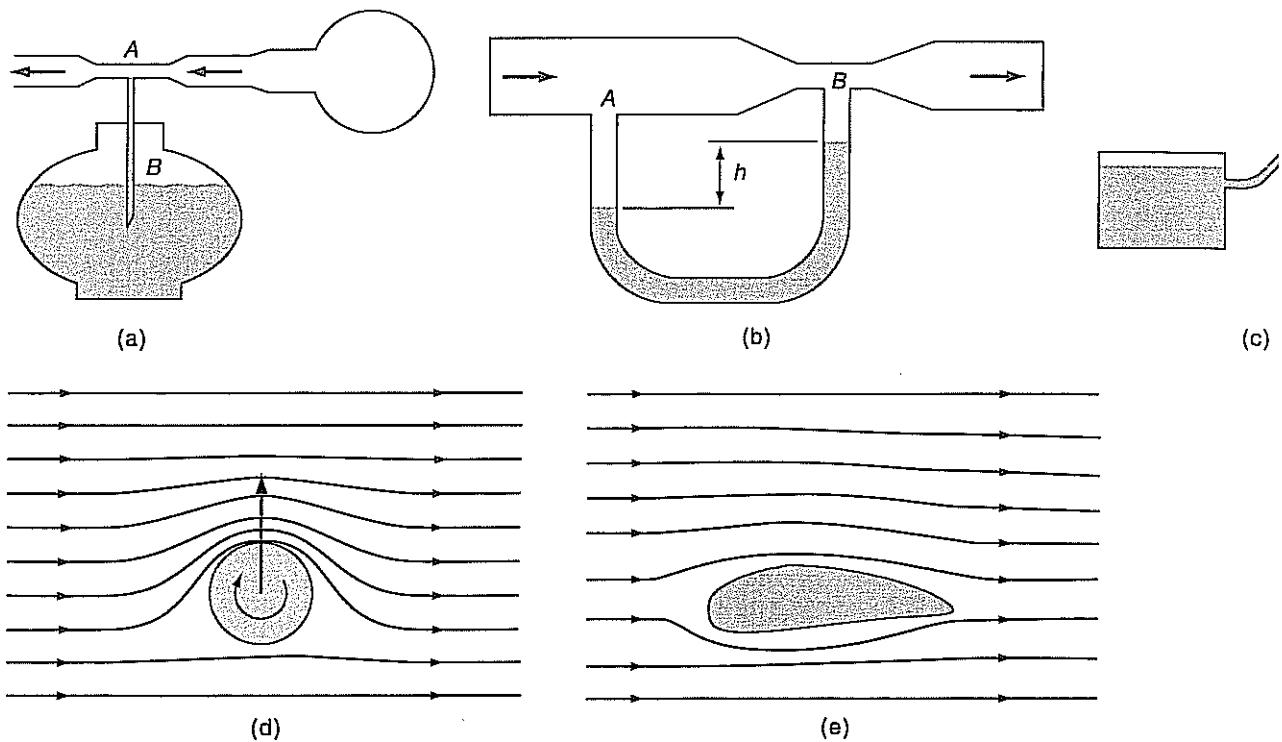


Figura 15.20 Esempi di applicazione dell'equazione di Bernoulli.

Durante gli uragani e quando c'è vento forte, l'aria che scorre veloce vicino a un edificio fa sì che la pressione all'esterno dell'edificio sia minore di quella all'interno. Ciò può far scoppiare i vetri delle finestre verso l'esterno dell'edificio. Analogamente, i camini hanno di solito un pò di tiraggio anche quando sono spenti perché l'aria in cima al comignolo ha almeno una piccola velocità, mentre l'interno della casa è fermo. Guardando un caminetto in una notte ventosa, si vede chiaramente l'effetto Bernoulli.

La Figura 15.20d rappresenta un cilindro che ruota in un fluido in moto. Il cilindro trascina del fluido nel suo moto rotatorio, le linee di flusso hanno l'andamento in figura. Ciò rende la velocità del fluido più elevata sopra il cilindro che sotto di esso. Quindi sul cilindro c'è una forza perpendicolare alla direzione del flusso (verso la parte superiore della sfera in questo caso). Questo fenomeno è chiamato *effetto Magnus*. In passato sono state costruite navi dotate di cilindri rotanti invece che di vele: esse funzionavano bene, ma non si sono affermate nella pratica (Figura 15.21).

La «portanza» di un'ala di aeroplano, cioè la forza diretta verso l'alto che agisce sull'aereo, deriva in gran parte dalla differenza di pressione tra la parte superiore e inferiore dell'ala. La minor pressione sopra l'ala è dovuta alla velocità dell'aria che scorre sopra essa, come si vede nella Figura 15.20e. La determinazione dell'effettiva entità della portanza costituisce un problema complicato perché in gioco svolge un ruolo importante la viscosità dell'aria, e inoltre è presente la penetrazione.

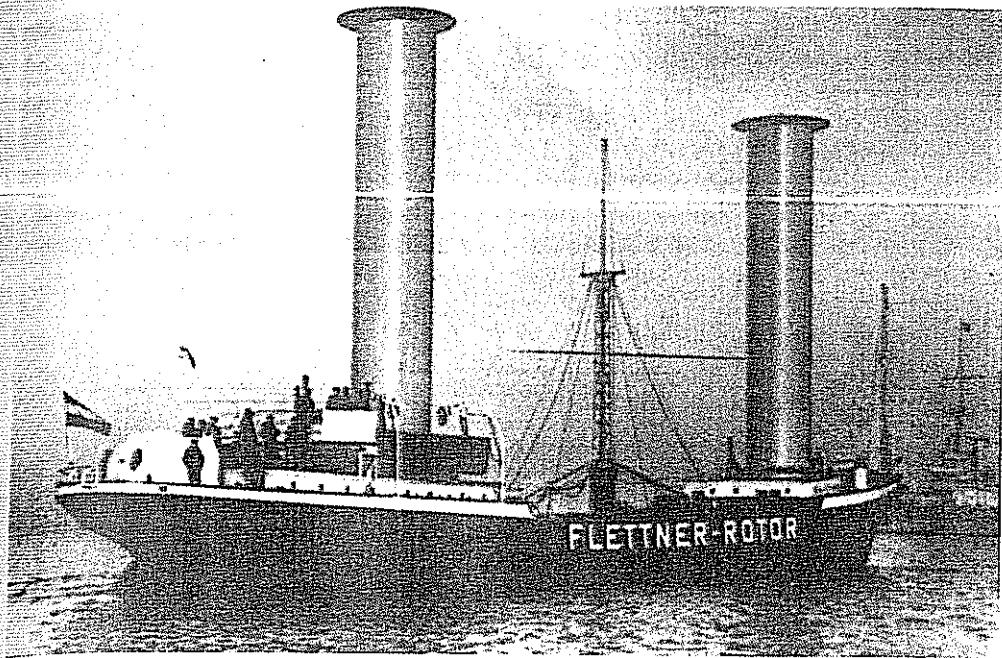


Figura 15.21
Una nave Flettner.
I due alti cilindri venivano fatti ruotare e, in presenza di vento, spingevano avanti la nave.
(Wolf D. Seufert).

15.7 LA VISCOSITÀ

Spesso le forze non conservative che agiscono in un fluido non possono essere trascurate come abbiamo fatto finora in questo capitolo. Tali forze dissipano l'energia meccanica del fluido convertendola in energia interna del fluido, più o meno come gli attriti dissipano l'energia di un blocco che scivola convertendola in energia interna del blocco e della superficie d'appoggio. Un fluido in cui sono presenti forze di questo tipo viene detto *viscoso*. Se la viscosità di un fluido non è trascurabile, l'energia meccanica non si conserva e l'equazione di Bernoulli non è valida. Quando un fluido viscoso fluisce in un tubo orizzontale di sezione costante, la pressione diminuisce lungo una linea di flusso, come indica la Figura 15.22.

Le forze viscose dissipano energia.

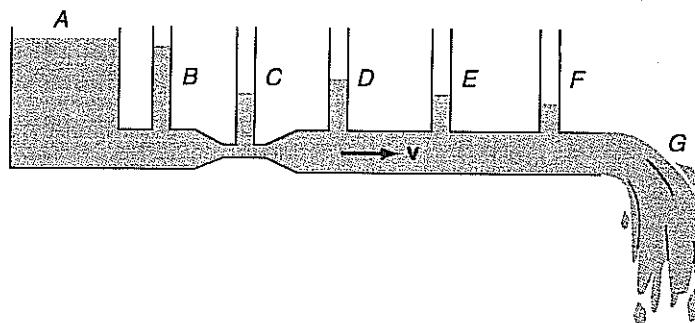


Figura 15.22
Il flusso di un fluido viscoso.

Per studiare la viscosità dei fluidi ci si può servire del dispositivo rappresentato nella Figura 15.23. La lastra superiore viene mossa con velocità bassa e costante a contatto con la superficie libera del fluido. L'esperimento mostra che, per la maggior parte dei fluidi, la velocità in punti compresi tra le due lastre della Figura 15.23 varia linearmente con la distanza dalla lastra in moto. I fluidi per i quali la componente orizzontale della forza necessaria per muovere la lastra è proporzionale alla velocità della lastra stessa sono chiamati *fluidi newtoniani*. L'acqua e l'aria sono esempi di fluidi pressoché newtoniani. All'opposto, certe materie plastiche, il sangue o le miscele acqua-argilla sono esempi di fluidi completamente non newtoniani, nei quali l'intensità della forza necessaria per muovere la lastra può essere proporzionale al quadrato della velocità. Alle alte velocità, il flusso diviene turbolento e assai complesso in tutti i fluidi.

Gli esperimenti mostrano che l'intensità della forza F che agisce sulla lastra mobile non dipende soltanto dalla velocità v della lastra: essa è anche proporzionale all'area

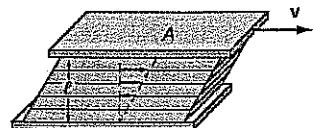


Figura 15.23
Quando la lastra superiore viene tirata lentamente, il fluido viscoso compreso tra le due lastre fluisce in lamine la cui velocità è proporzionale alla distanza dalla lastra fissa sottostante, come indica la lunghezza delle frecce.

disegnate nella figura.

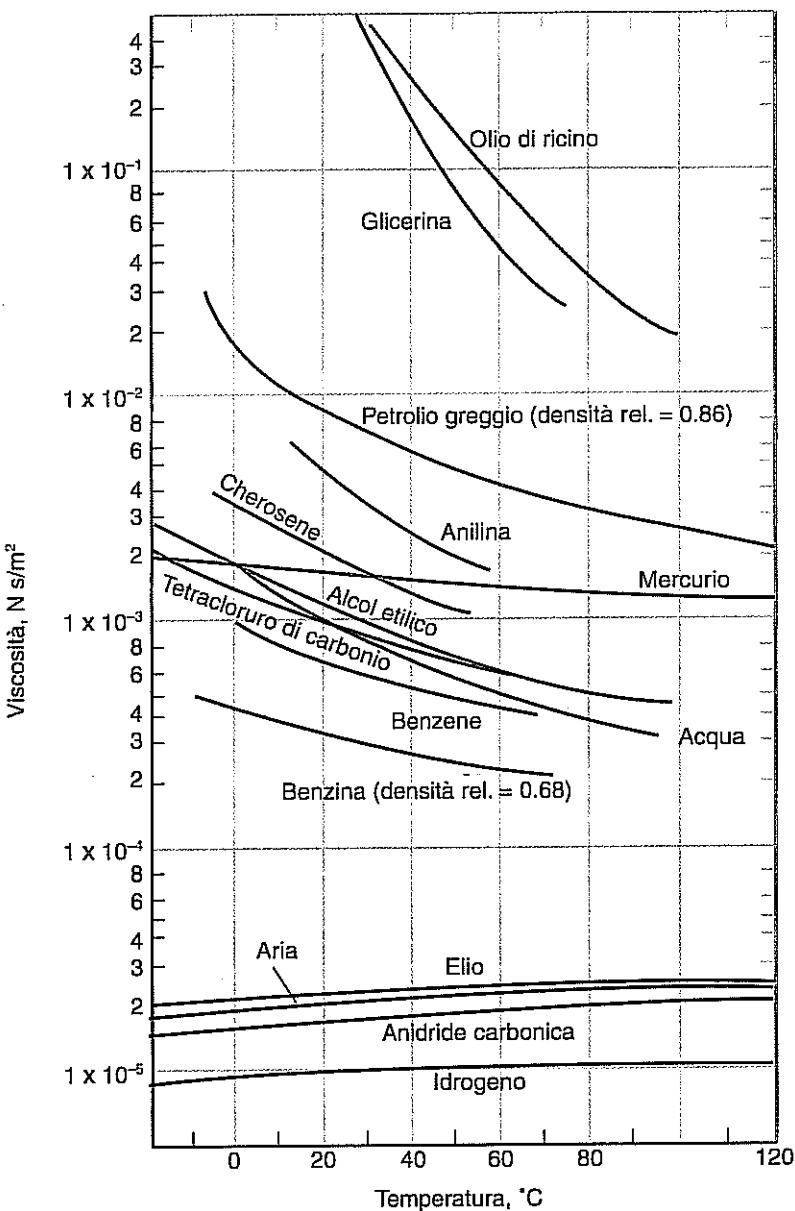
A della lastra, e inversamente proporzionale alla distanza ℓ , tra la lastra mobile e la fissa:

$$F = \frac{\eta A v}{\ell}$$

dove η è una costante di proporzionalità chiamata *viscosità*. L'unità SI della η è il $N \cdot s \cdot m^{-2}$. Un'unità di uso comune non appartenente al SI è il poise (P) o $0.1 N \cdot s \cdot m^{-2}$. Nella Figura 15.24 sono rappresentate le viscosità di alcuni fluidi in funzione della temperatura.

Figura 15.24

Viscosità di alcuni fluidi.
(Adattato da V. L. Streeter,
Fluid Mechanics, 5^a ediz.,
McGraw-Hill, New York,
1971)



Il tipo di moto del fluido rappresentato nella Figura 15.23 è chiamato *flusso laminare*. Ogni strato (o lamina) del fluido esercita una forza sullo strato contiguo, ma, se il flusso non è turbolento, gli strati non si mescolano.

Si può dimostrare che, per effetto di una differenza di pressione Δp , la portata Q di un fluido viscoso attraverso un tubo cilindrico di raggio R e lunghezza:

$$Q = \frac{\pi(\Delta p)R^4}{8\eta\ell}$$

La deduzione di questo risultato è delineata nel Problema 15.14.

Esempio 15.14

Supponiamo che l'arteriosclerosi riduca il raggio interno di un'arteria prossima al cuore di un fattore 2. Di quale fattore il cuore deve aumentare il gradiente di pressione nell'arteria per mantenere costante il flusso? Ammettiamo che il sangue sia un fluido newtoniano e che il flusso sia laminare.

Soluzione

Dal momento che la portata è proporzionale alla quarta potenza del raggio, diminuendo il raggio di un fattore 2, la portata diminuisce di un fattore 2^4 , ossia 16. La portata è direttamente proporzionale alla pressione, e quindi il cuore deve aumentare la pressione di un fattore 16. Dal momento che, in realtà, il sangue non è un fluido newtoniano e il flusso del sangue non è privo di turbolenza, questo risultato può non essere esatto; tuttavia esso dà un'idea dei problemi creati dall'arteriosclerosi. ■

RIEPILOGO**Paragrafo 15.2 Proprietà dei solidi**

La forza che agisce su un solido per unità di area è chiamata sforzo σ , e l'effetto che ne deriva è chiamato deformazione ϵ . Sforzo e deformazione sono classificati come normali o di taglio a seconda che le forze applicate al solido siano perpendicolari alle superfici o tangenti ad esse. Lo sforzo e la deformazione in un solido sono connessi tra loro dalla legge di Hooke:

$$\begin{aligned}\sigma_t &= Y\epsilon_t \\ \sigma_s &= S\epsilon_s\end{aligned}$$

dove Y è chiamato modulo di Young e S è chiamato modulo di elasticità a taglio. La variazione di volume è connessa alla variazione della pressione applicata dal modulo di compressione B :

$$\Delta p = -B \left(\frac{\Delta V}{V} \right)$$

Paragrafo 15.3 La densità

La densità ρ di un corpo è il rapporto tra la sua massa m e il suo volume V .

Paragrafo 15.4 La pressione in un fluido statico

La pressione in un fluido agisce normalmente a qualunque superficie. In un fluido incomprimibile essa varia con la distanza dalla superficie libera secondo la

$$p = p_0 + \rho gh \quad (15.6)$$

Nella maggior parte dei gas, quando la temperatura è costante, la pressione è data in funzione dell'altezza da

$$p(h) = p(0)e^{-(\rho_0 g / p_0)h} \quad (15.7)$$

QUESITI

- 15.1 Classifica i seguenti corpi come solidi, liquidi, gas o altro: il ghiaccio, un ghiacciaio, la gelatina, il vapore acqueo, la nebbia, una nuvola, una caramella morbida, la pasta per il pane, lo zucchero, il miele.
- 15.2 Fai un esempio di una sostanza che potrebbe essere considerata un solido o un liquido, a seconda della durata dell'osservazione.
- 15.3 Due blocchi sono incollati in modo da formare un cubo, come mostra la Figura 15.25, dove la linea diagonale rappresenta l'incollatura. Se vengono applicate delle forze come quelle rappresentate, lo sforzo che agisce

Paragrafo 15.5 Il principio di Archimede

Archimede scoprì il principio che governa la spinta idrostatica: un corpo che è immerso parzialmente o totalmente in un fluido riceve una spinta di intensità pari al peso del fluido spostato e diretta verso l'alto lungo una retta passante per il centro di gravità del fluido spostato.

Paragrafo 15.6 L'equazione di Bernoulli

L'equazione di continuità esprime la conservazione della massa per un fluido che fluisce in un condotto di sezione variabile A :

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (15.8)$$

Nel caso di un fluido incomprimibile non viscoso, la conservazione dell'energia meccanica porta all'equazione di Bernoulli lungo una linea di flusso:

$$p_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (15.10)$$

Paragrafo 15.7 La viscosità

Per i fluidi newtoniani la forza viscosa F_v che agisce su una superficie di area A è connessa al gradiente della velocità v/ℓ nel fluido dalla

$$F_v = \frac{\eta A v}{\ell} \quad (15.11)$$

Applicando questa relazione al flusso in un condotto si dimostra che la portata in volume del condotto è

$$Q = \frac{\pi (\Delta p) R^4}{8 \eta \ell} \quad (15.12)$$

sull'incollatura è di trazione o di taglio, o una combinazione dei due? Se è una combinazione, qual è il rapporto tra sforzo di trazione e sforzo di taglio?

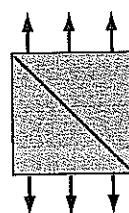


Figura 15.25 Quesito 15.3.

- 15.4** Quando si dice che una sostanza è «resistente», di solito si intende che essa ha un modulo di Young grande oppure che ha un limite di snervamento elevato, o ancora che ha un modulo di elasticità a taglio elevato? Una bacchetta di legno è più resistente di una bacchetta di vetro?
- 15.5** Per applicazioni ad alussima «resistenza» spesso si utilizzano materiali compositi come la vetroresina. Sai spiegare il perché in termini del modulo di Young e del limite di elasticità?
- 15.6** È vero che quanto più elevato è il numero d'ordine di un elemento nella tavola periodica, tanto maggiore è la sua densità?
- 15.7** Qual è il gas meno denso (a pressione atmosferica e a temperatura ambiente)? Qual è la sostanza più densa a pressione atmosferica e a temperatura ambiente?
- 15.8** In quale dei tubi verticali dell'apparecchio rappresentato nella Figura 15.26 un fluido in quiete raggiungerà la massima altezza? Si trascurino gli effetti della tensione superficiale.

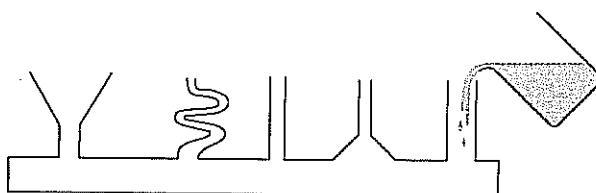


Figura 15.26 Quesito 15.8.

- 15.9** Come funziona il «diavoletto di Cartesio» di Figura 15.27? Quando la membrana superiore viene premuta, il diavoletto scende, e quando la membrana viene rilasciata il diavoletto risale. Se il diavoletto è fermo nel mezzo del recipiente, qual è la sua densità media? Quali proprietà dei fluidi sono importanti per il funzionamento del diavoletto?



Figura 15.27 Quesito 15.9: Il diavoletto di Cartesio.

- 15.10** Perché è più facile nuotare nell'acqua di mare che nell'acqua dolce?
- 15.11** Le petroliere, dopo aver scaricato il loro carico di petrolio, riempiono le cisterne d'acqua per il viaggio di ritorno, anche se alla loro destinazione l'acqua non occorre. Perché?
- 15.12** Un blocco viene calato nell'acqua come mostra la Figura 15.28. Che cosa segna la bilancia nella Figura 15.28b, dopo che il blocco è stato immerso nell'acqua?

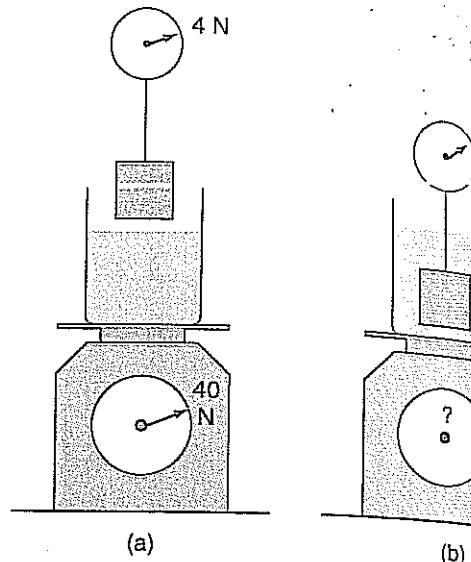


Figura 15.28 Quesito 15.12

- 15.13** Osservando il getto d'acqua che esce da un rubinetto, vede che, scendendo, esso si restringe. Si metta l'effetto in relazione con l'equazione di continuità.
- 15.14** Fino a che altezza giungerà il getto d'acqua dell'Escher riportato in Figura 15.29? Spiega.

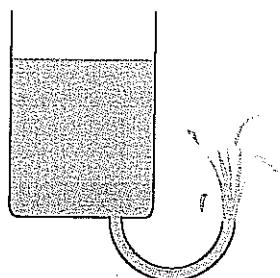


Figura 15.29 Quesito 15.14.

- 15.15** Cosa c'è che non va nella litografia di Escher riportata nella Figura 15.30? (Dal punto di vista fisico, naturalmente, non da quello estetico!)

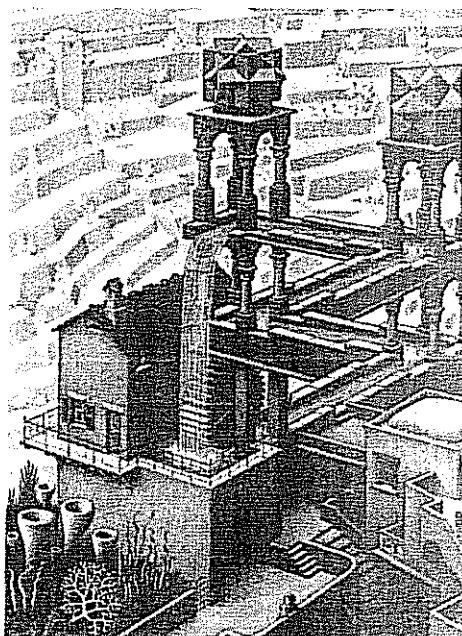


Figura 15.30 Quesito 15.15: Cascata, una litografia di Escher (Resources)

15.16 Se si soffia tra due fogli di carta, questi tendono a separarsi o ad avvicinarsi? Prova a farlo e spiega i tuoi risultati.

15.17 Quando un'automobile con il tettuccio apribile viaggia ad alta velocità, sembra sempre che il tettuccio si gonfi verso l'esterno. Perché?

15.18 Nel tubo di Pitot rappresentato nella Figura 15.31, la pressione nel punto A è maggiore che nel punto B. Perché? Come si può utilizzare questo dispositivo per misurare la velocità di un aeroplano rispetto all'aria?

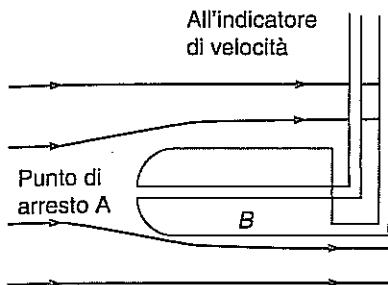


Figura 15.31 Quesito 15.18: un tubo di Pitot.

15.19 In cosa la dipendenza della viscosità dei gas dalla temperatura differisce da quella dei liquidi? (Si veda la Figura 15.24.)

15.20 Il flusso viscoso in un tubo è irrotazionale?

15.21 L'apparecchio di Figura 15.32 viene usato in un esperimento sul flusso dell'acqua, e i livelli dell'acqua sono quelli mostrati in figura. Dimostrare che il valore di $p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2$ non è lo stesso nei punti A e B. Qual è la ragione di questa divergenza dall'equazione di Bernoulli?

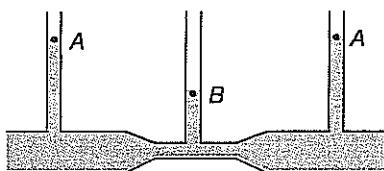


Figura 15.32 Quesito 15.21.

15.22 Durante un uragano i muri delle case possono venir risucchiati verso l'esterno ma non verso l'interno. Perché?

15.23 Se un grosso autocarro sorpassa un'automobile in autostrada, il flusso dell'aria spinge l'automobile verso l'autocarro o la allontana da esso? Spiega.

15.24 Un bicchiere è pieno d'acqua fino all'orlo e nell'acqua galleggia un cubetto di ghiaccio. Quando il ghiaccio si scioglie, l'acqua trabocca, oppure il suo livello si abbassa, o rimane uguale? Spiega.

15.25 Il congegno della Figura 15.33 è stato proposto come macchina per il moto perpetuo. La spinta di Archimede che agisce sulla fune immersa nell'acqua solleva la fune sul lato sinistro. Perché non funziona, anche se tutti gli attriti sono trascurabili? Spiega (non limitandoti a citare la conservazione dell'energia).

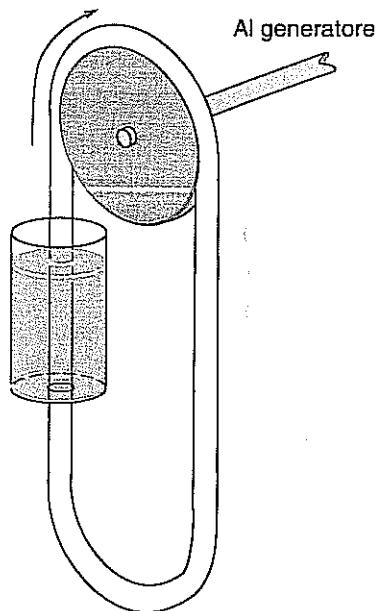


Figura 15.33 Quesito 15.25.

15.26 Fra le molte macchine per il moto perpetuo che sono state proposte, c'è anche quella rappresentata nella Figura 15.34. Ai bracci sono attaccate delle tazze piene d'aria chiuse da pistoni a tenuta liberi di muoversi in entrambi i sensi nelle tazze. Quando le tazze sono rivolte verso il basso, i pistoni tendono a cadere, e le tazze spostano più acqua di quanto non facciano sul lato in cui sono rivolte verso l'alto. La spinta di Archimede è quindi maggiore sulla sinistra che sulla destra, e il congegno gira come indicato nella figura. Che cosa c'è di sbagliato in questa analisi?

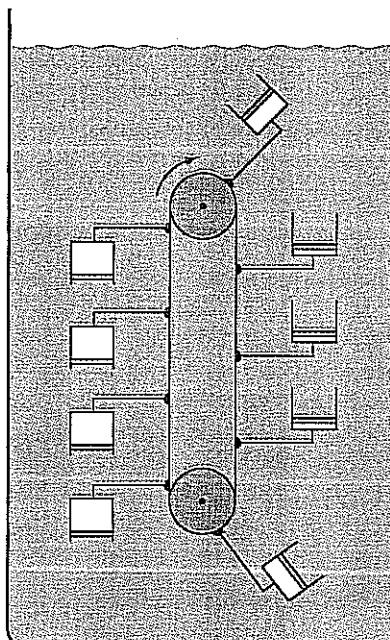


Figura 15.34 Quesito 15.26.

15.27 Una pompa «aspirante», che opera abbassando la pressione in un tubo che raggiunge il fondo di un pozzo, può pompare l'acqua da un pozzo profondo al massimo 10 m. Perché?

15.28 Spiega come fa il sifone della Figura 15.35 a trasferire l'acqua da A a B. Perché l'acqua contenuta nel tubo non

ricade semplicemente nei due recipienti? Qual è il massimo valore di h compatibile con il funzionamento del sifone?

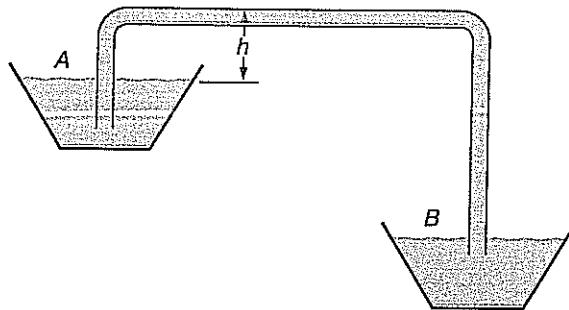


Figura 15.35 Quesito 15.28.

ESERCIZI

Paragrafo 15.2 Proprietà dei solidi

- 15.1** Un cubo di rame di spigolo 12.7 mm viene posto in una morsa e compresso da una forza di 215 N esercitata da entrambe le ganasce della morsa. Qual è lo sforzo nel cubo di rame?
- 15.2** Un corpo di massa 13.4 kg è appeso a un filo d'acciaio lungo 1.33 m la cui sezione è di 1.63 mm^2 . Qual è lo sforzo nel filo?
- 15.3** Un blocco di massa 22.4 kg è appeso a un cubo d'ottone per mezzo di un filo d'alluminio del diametro di 3 mm e lungo 750 mm; lo spigolo del cubo è lungo 85.0 mm (Figura 15.36). Qual è lo sforzo (a) nell'alluminio e (b) nell'ottone? Si ammetta che l'ottone sia soggetto a uno sforzo puramente di taglio.

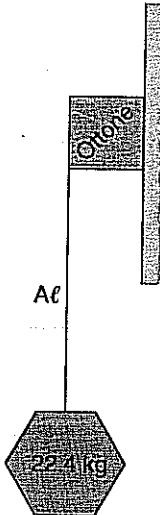


Figura 15.36 Esercizio 15.3.

- 15.4** Un edificio di massa 130 Mg poggia su fondamenta costituite da 160 blocchi di calcestruzzo, ciascuno con una sezione efficace di 6000 mm^2 . Si stimi lo sforzo nei blocchi di calcestruzzo.
- 15.5** (a) Qual è la deformazione del cubo di rame

15.29 Si completino le seguenti tabelle:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità S
σ			Pa
ϵ	Deformazione		
p		Scalare	
γ			

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità S
B			
S			
ρ			
η			

dell'Esercizio 15.1? (b) Di quanto si riduce lo spigolo del cubo di rame?

- 15.6** (a) Qual è la deformazione del filo dell'Esercizio 15.2? (b) Di quanto si allunga il filo quando gli viene applicato un peso?
- 15.7** Il blocco dell'Esercizio 15.3 è attaccato al filo ma sorretto completamente dalla tua mano. (a) Qual è la deformazione del cubo di ottone quando togli la mano? (b) Di quanto varia l'angolo formato dagli spigoli del cubo di ottone? (c) Di quanto scende il blocco?
- 15.8** La più elevata pressione costante raggiungibile in laboratorio è di circa 20 GPa e viene ottenuta in un cubo di mercurio pressato a punta di diamante. Se il mercurio rimanesse liquido quando viene sottoposto a questa pressione che frazione diminuirebbe il suo volume?

Paragrafo 15.3 La densità

- 15.9** Una sfera di plutonio di raggio 73.0 mm ha una massa di 32.3 kg. Qual è la densità del plutonio?
- 15.10** In passato il metro era definito come lunghezza di una barra di platino con una sezione rettangolare di $25.0 \times 4.0 \text{ mm}$. Qual è la massa di questo antico campione?
- 15.11** Qual è la densità dell'acqua in fondo al mare dove la pressione è di 30 MPa? Qual è la densità del piombo in fondo del mare?
- 15.12** Quando a un corpo viene applicato uno sforzo di trazione, non soltanto aumenta la sua lunghezza nel direzione della forza applicata, ma si riduce anche la larghezza in direzione perpendicolare a quella della trazione. Per molte sostanze il rapporto tra contrazione relativa perpendicolare alla forza applicata e allungamento relativo parallelo alla forza applicata è approssimativamente pari a $1/3$. Questo rapporto è chiamato coefficiente di Poisson n . Ammettendo che valga $1/3$ per l'acciaio, di quale frazione varia la densità di un cubo d'acciaio di spigolo lungo 15 mm, quando viene applicato uno sforzo di trazione di 1 GPa?

Paragrafo 15.4 La pressione in un fluido statico

- 15.13 Le zone più profonde dell'oceano si trovano a circa 10 km sotto la superficie. Qual è la pressione laggiù?
- 15.14 Nei paesi di lingua inglese, la pressione nelle condutture d'aria viene a volte misurata in «pollici d'acqua». Qual è il fattore di conversione tra la pressione misurata in pollici con un manometro ad acqua e la pressione misurata in pascal?
- 15.15 Le montagne più alte hanno un'altezza di circa 8 km. Qual è la pressione sulla loro vetta, assumendo che l'atmosfera abbia una temperatura costante?
- 15.16 Qual è la forza che agisce su un timpano circolare di 7 mm di diametro se all'interno dell'orecchio c'è la pressione del livello del mare e all'esterno dell'orecchio c'è la pressione di una cabina di aereo, pari a quella dell'atmosfera 1500 m sopra il livello del mare? (Questa forza è la causa del dolore che si prova quando non si possono equilibrare le pressioni sulle due facce del timpano tramite la tromba di Eustachio che mette in comunicazione l'interno dell'orecchio con l'atmosfera.)
- 15.17 Con riferimento alla Figura 15.37, quale forza occorre esercitare in A per sollevare l'automobile di massa 0.85 Mg in B? Il pistone in A ha un diametro di 17 mm e il pistone in B un diametro di 300 mm.

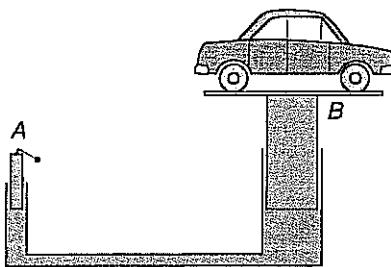


Figura 15.37 Esercizio 15.17.

Paragrafo 15.5 Il principio di Archimede

- 15.18 Un iceberg ha una massa di 13 Gg. Che volume d'acqua sposta?
- 15.19 La parte emersa di un iceberg ha un volume di 100 m^3 . Quanta acqua sposta l'iceberg?
- 15.20 Una corona viene pesata come mostra la Figura 15.38. Nell'aria essa pesa 28.24 N, e nell'acqua pesa 26.36 N. Qual è la densità della corona?

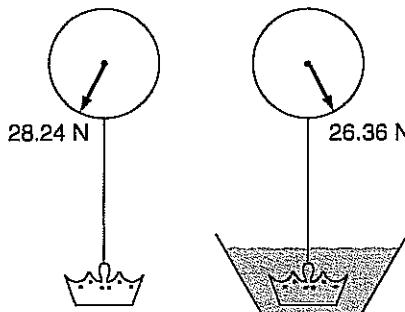


Figura 15.38 Esercizio 15.20.

- 15.21 Stima il volume del tuo corpo senza fare nessuna misura di lunghezza e nessuna particolare ipotesi.

- 15.22 Supponiamo che un sottomarino abbia una sezione trasversale analoga a quella di un cilindro, come mostra la Figura 15.39. (a) Dov'è il centro di gravità dell'acqua spostata? (b) Supponiamo che il sottomarino abbia della zavorra fissata nella parte inferiore della stiva, in modo che il suo centro di gravità venga a trovarsi in un punto A , $3r/4$ sotto l'asse del cilindro. Se il sottomarino ruota di 10° sul proprio asse, qual è l'intensità (rispetto al centro di massa) del momento di richiamo che tende a raddrizzarlo? Si esprima il momento in termini della massa del sottomarino m , della densità dell'acqua ρ , del raggio della sezione cilindrica r , e dell'accelerazione di gravità g .

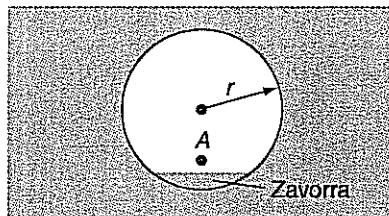


Figura 15.39 Esercizio 15.22: Un sottomarino con zavorra immerso nell'acqua.

- 15.23 Quando ti pesi, il tuo peso reale p è maggiore di quello indicato dalla bilancia, p' , a causa della spinta di Archimede dell'aria. Determina l'entità del fattore di correzione f della relazione $p = fp'$, supponendo che la tua densità sia uguale a quella dell'acqua.

Paragrafo 15.6 L'equazione di Bernoulli

- 15.24 Nel punto A della Figura 15.40, la pressione relativa è di 50 kPa e la velocità dell'acqua che fluisce nel tubo circolare è di 2.4 m/s. Il tubo è orizzontale. (a) Qual è la portata in volume nei punti A e B? (b) Qual è la velocità nel punto B? (c) Qual è la pressione relativa nel punto B? Si faccia l'ipotesi di un flusso privo di turbolenza.

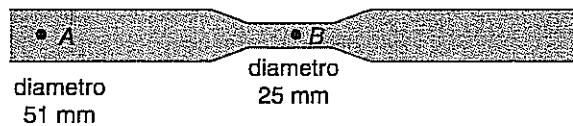


Figura 15.40 Esercizio 15.24.

- 15.25 Nel punto A della Figura 15.41 la pressione relativa è di 75 kPa e la velocità dell'acqua che fluisce in questo tubo del diametro di 50 mm è di 1.7 m/s. Il tubo si biforca in due tubi più piccoli, entrambi con diametro di 25 mm. (a) Quali sono le portate in volume in A e in B? (b) Qual è la velocità nel punto B? (c) Qual è la pressione relativa nel punto B? Si facciano le ipotesi di un flusso non turbolento e di un'altezza costante.

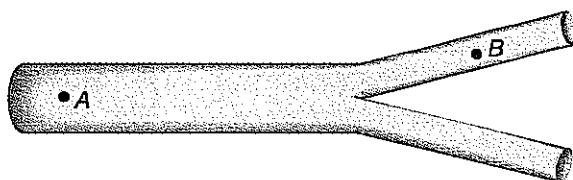


Figura 15.41 Esercizio 15.25.

- 15.26 La Figura 15.42 mostra parte di un impianto di aerazione con condotti a sezione quadrata. Se in A la pressione relativa è di 320 Pa e la portata in volume è di $2.2 \text{ m}^3/\text{s}$, qual è la pressione dell'aria in B, nell'ipotesi di un flusso non turbolento e di un fluido incompressibile?

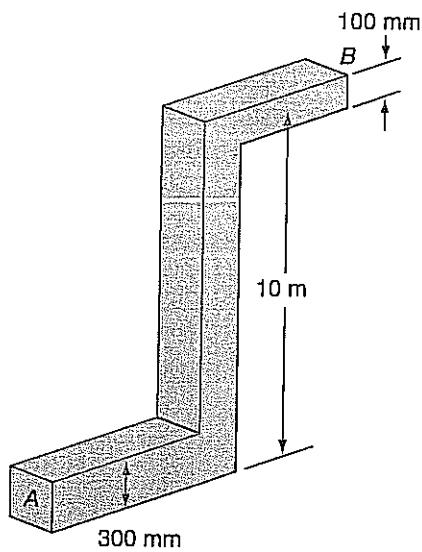


Figura 15.42 Esercizio 15.26.

- 15.27** Verificare che l'equazione di Bernoulli, Equazione (15.10), si riduce all'Equazione (15.6) quando la velocità di flusso è la stessa nei due punti.
- 15.28** Un veicolo antincendio ha una pompa che deve fornire una pressione sufficiente a far giungere l'acqua all'ultimo piano di un edificio alto 30 m in una manichetta di sezione costante e con una velocità di 10 m/s. Trascurando la viscosità, qual è la pressione relativa minima che la pompa deve fornire? Qual è la potenza minima che deve erogare?
- 15.29** Il motore di un'automobile ha una cilindrata di 1.6 l. Ogni volta che il motore compie due giri completi, in esso viene immesso un volume d'aria approssimativamente uguale alla cilindrata. Alle velocità che si tengono in autostrada il motore effettua 3500 giri/min. Il tubo di Venturi del carburatore ha un diametro di 9.1 mm. Qual è la pressione relativa nel tubo di Venturi in queste condizioni?
- 15.30** Il nebulizzatore per insetticidi della Figura 15.43 ha una pompa con un diametro di 60 mm. Il livello dell'insetticida è 90 mm sotto il tubo di immissione in *A*. Tale tubo in *A* ha un diametro di 2 mm. Si stimi la velocità minima con cui lo stantuffo deve essere premuto perché il getto d'aria in uscita contenga dell'insetticida. Si ammetta che l'insetticida abbia la densità dell'acqua e che l'aria sia incompressibile e priva di turbolenze.

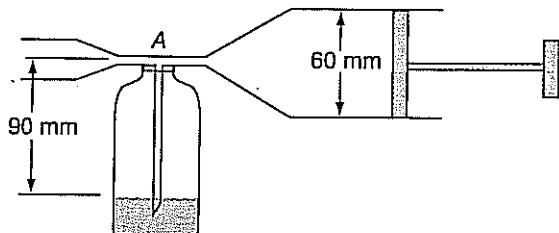


Figura 15.43 Esercizio 15.30.

- 15.31** L'acqua fluisce in modo costante dal serbatoio della Figura 15.44. La sezione del tubo nel punto *A* è di 0.055 m^2 , nel punto *B* è di 0.040 m^2 ; la sezione del condotto di

scarico in *C* è di 0.025 m^2 . Si trascurino la viscosità e la turbolenza. (a) Qual è la velocità in *C*? (b) Qual è la portata in volume? (c) Quali sono le pressioni relative ai punti *A* e *B*?

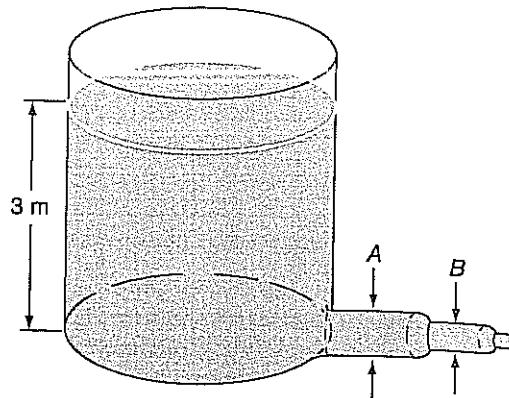


Figura 15.44 Esercizio 15.31.

- 15.32** La superficie interna di una finestra di area 5.0 m^2 è in contatto con aria ferma, mentre all'esterno l'aria ha una velocità di 15 m/s. Supponendo che il flusso dell'aria sia irrotazionale, così che tra i punti delle due facce va l'equazione di Bernoulli, quale forza si esercita sulla finestra? In quale direzione?

Paragrafo 15.7 La viscosità

- 15.33** Una chiatte il cui fondo piatto ha un'area di 30 m^2 , trascinata lungo un canale alla velocità di 1.5 m/s. Il fondo della chiatte è 140 mm sopra il fondo del canale. L'acqua nel canale ha la temperatura di 20°C . Quale forza viscosa che agisce sulla chiatte? (Normalmente le forze che le onde esercitano su una chiatte sono molto maggiori della forza viscosa.)
- 15.34** La Figura 15.45 mostra un viscosimetro cilindrico. Quando il cilindro interno viene fatto ruotare a velocità costante, sul cilindro esterno fisso si esercita un momento.

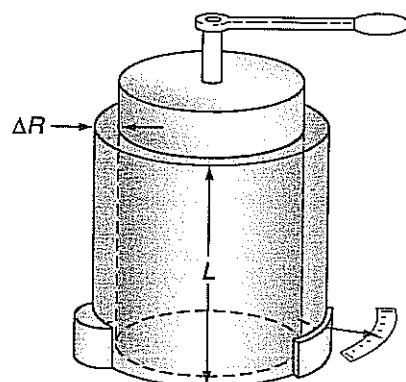


Figura 15.45 Esercizio 15.34.

L'intensità del momento applicato al cilindro esterno fornisce una misura della viscosità del fluido compresa tra i due cilindri. Se la distanza tra i cilindri ΔR è più grande rispetto ai raggi R_1 ed R_2 dei cilindri stessi, la forza esercitata dal fluido sul cilindro esterno è

$$F = \frac{\eta Av}{\ell} \approx \eta(2\pi RL) \frac{v}{\Delta R}$$

dove $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ e v è la velocità tangenziale del cilindro interno. (a) Qual è il momento applicato al cilindro esterno? (b) Un viscosimetro cilindrico ha raggi di 92 e 93 mm e lunghezza di 170 mm. Quando il cilindro interno viene fatto girare con una velocità angolare costante di 20 giri/min, al cilindro esterno fisso è applicato un momento di 0.54 N·m. Qual è la viscosità del fluido contenuto nel viscosimetro? Se la temperatura è di 30 °C, di quale sostanza potrebbe trattarsi?

PROBLEMI

- 15.1 Tre barre sono saldate tra loro consecutivamente in modo da formare un'unica asta. La prima di esse è lunga 0.55 m, ha una sezione di 420 mm^2 , ed è fatta di rame. La seconda è lunga 0.75 m, ha una sezione di 390 mm^2 , ed è fatta di ghisa. La terza barra è lunga 0.45 m, ha una sezione di 405 mm^2 , ed è fatta di alluminio. (a) Qual è la massa dell'intera asta? (b) Qual è la sua densità media? (c) Se alle due estremità dell'asta vengono applicate forze di trazione di 10 kN, di quanto si allunga?

- 15.2 Un tappo di sughero di densità ρ_s ha la forma di un cilindro di raggio r e lunghezza ℓ , e galleggia nell'acqua di densità ρ . Dimostrare che, se il tappo riceve una piccola spinta verso il basso a partire dalla sua posizione di equilibrio nell'acqua e poi viene lasciato libero, esso oscilla su e giù con un periodo $2\pi\sqrt{\rho_s\ell/(\rho g)}$.

- 15.3 Dell'olio di densità $\rho_0 < \rho_{H_2O}$ galleggia sull'acqua. Il tappo descritto nel problema precedente ha densità $\rho_s > \rho_0$ e galleggia tra i due strati, in modo che la sua parte superiore è nell'olio e la parte inferiore nell'acqua. Quale frazione del tappo è immersa nell'acqua? Formulare la risposta in termini di ρ_0 , ρ_s e ρ_{H_2O} .

- 15.4 Il chilogrammo campione è fatto di una lega costituita per il 90 per cento di platino e per il 10 per cento di iridio. Qual è l'entità della correzione che deve essere apportata per tener conto della spinta di Archimede dovuta all'aria, quando il campione viene pesato?

- 15.5 La massima deformazione da compressione che il calcestruzzo può sopportare in condizioni di sicurezza è dello 0.1 per cento circa. Qual è la massima altezza che può raggiungere un edificio di sezione costante realizzato in calcestruzzo? In base allo stesso criterio, qual è la massima altezza che può raggiungere un edificio di sezione costante realizzato in acciaio?

- 15.6 Si può dimostrare che la forza viscosa F_v che agisce su una sferetta di raggio r in moto con velocità v in un fluido di viscosità η (con flusso laminare) è data dalla legge di Stokes: $F_v = 6\pi r\eta hv$. Dimostrare che la velocità limite v_l di una sfera di densità ρ_s che cade in un fluido di densità ρ_0 è

$$v_l = \frac{2(\rho_s - \rho_0)r^2g}{9\eta}$$

- 15.7 Un grosso serbatoio ha un tubo che fuoriesce dalla base (vedi Figura 15.46). Lungo il tubo c'è una strozzatura il cui diametro è un terzo di quello del resto del tubo. Da questa strozzatura si diparte un tubetto che porta a un secondo recipiente contenente lo stesso fluido che riempie il serbatoio.

- 15.35 Olio di densità relativa 0.765 e viscosità $2.5 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ viene immesso in un foro d'ingrassaggio di lunghezza 10 mm in modo che vada a lubrificare un cuscinetto. Se la caduta di pressione lungo il condotto è di 0.305 MPa e il diametro del foro è di 0.843 mm, quale volume di olio attraverserà il cuscinetto in un'ora? Si faccia l'ipotesi di un flusso laminare.

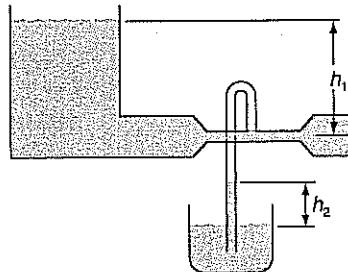


Figura 15.46 Problema 15.7.

Quando il liquido fuoriesce dal primo serbatoio, fino a che altezza h_2 sale il fluido nel tubetto? Si esprima la risposta in funzione di h_1 , ammettendo che il flusso sia laminare e il fluido non sia viscoso.

- 15.8 In un recipiente cilindrico pieno d'acqua sono praticati diversi fori. L'acqua esce dai fori in direzione orizzontale, come mostra la Figura 15.47. A che altezza deve essere praticato un foro perché l'acqua che ne zampilla tocchi terra alla massima distanza dal cilindro? Si ammetta che il fluido non sia viscoso.

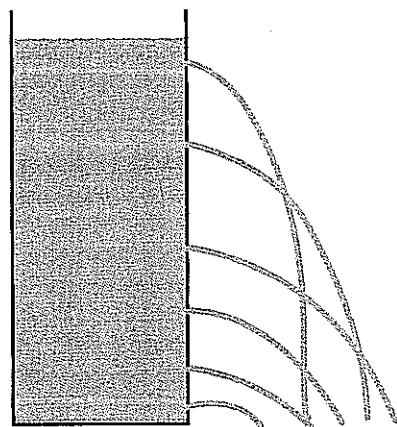


Figura 15.47 Problema 15.8.

- 15.9 Un barile di birra può essere approssimato con un cilindro di raggio 250 mm e alto 750 mm. Se vicino alla sua base viene praticato un foro, cui viene attaccato un tubo lungo 1.0 m e con il diametro interno di 3.8 mm, quanto tempo ci vorrà perché defluisca metà della birra? Sulla faccia superiore del barile c'è un foro che fa sì che la superficie libera della birra sia sempre alla pressione atmosferica. Si ammetta che la birra abbia la densità e la viscosità dell'acqua e sia mantenuta alla temperatura di 5 °C.

- 15.10** Un densimetro è formato da una sfera di vetro vuota di raggio r con sopra un tubetto verticale, sempre di vetro, di raggio R , come mostra la Figura 15.48.

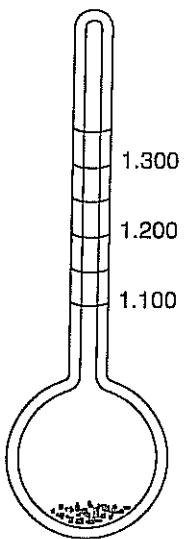


Figura 15.48 Problema 15.10.

Lo strumento è destinato a misurare le densità relative nell'intervallo tra 1.100 e 1.300, la densità relativa essendo determinata dalla profondità di immersione del densimetro in equilibrio nel fluido. La massa dello strumento viene regolata aggiungendo pallini di piombo. Trovare la massa totale m che deve avere il densimetro e la lunghezza ℓ , che deve avere il tubetto per misurare questo intervallo di densità relative. Esprimere la risposta in termini di r , R e della densità dell'acqua ρ .

- 15.11** Un filo d'acciaio di sezione A e modulo di Young Y viene teso orizzontalmente tra due pali. Inizialmente la tensione del filo è trascurabile. Un corpo di massa m viene appeso nel punto medio del filo, facendolo piegare come mostra la Figura 15.49. (a) Dimostrare che il filo si allunga finché θ è dato dall'equazione trascendente

$$2 \sin \theta (\sec \theta - 1) = \frac{mg}{YA}$$

- (b) Qual è il valore di θ quando $mg/YA = 1$ per cento?

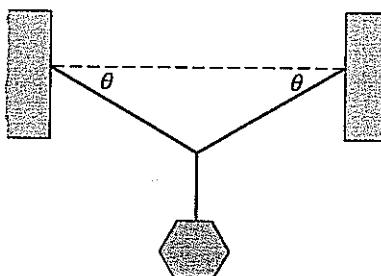


Figura 15.49 Problema 15.11.

- 15.12** Il flusso dell'acqua sopra lo sfioratore di una diga rappresentato nella Figura 15.50.

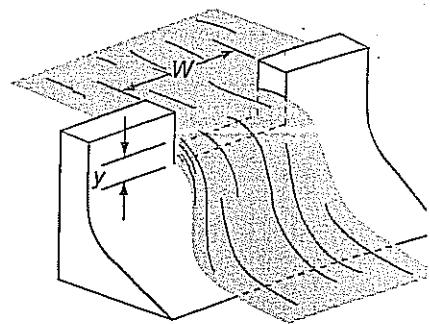


Figura 15.50 Problema 15.12.

Assumendo che la viscosità sia trascurabile, si dimostra che la portata in volume Q del flusso sopra lo sfioratore è

$$Q = \frac{2}{3} w \sqrt{2gy^3}$$

dove y è l'altezza del livello dell'acqua sopra lo sfioratore. I flussi reali sono circa la metà di queste cause della viscosità e dell'abbassamento del livello dell'acqua tra il bacino e lo sfioratore.

- 15.13** (a) Dimostrare che l'intensità della forza viscosa F che agisce sul cilindro interno della Figura 15.51 è $F = \eta(2\pi R\ell)(dv/dR)$. (b) Dimostrare che il gradiente del modulo della velocità $dv/dR = -[(p_1 - p_2)R]/(2\eta\ell)$. (c) Integrare questa espressione tra $R = R_{\text{tubo}}$ e $R = R'$; e dimostrare che la velocità del fluido a distanza R' dal centro è:

$$v(R') = \frac{|p_1 - p_2|}{4\eta\ell} (R_{\text{tubo}}^2 - R'^2)$$

- 15.14** Dimostrare che l'Equazione (15.12) si può ottenere come risultato del Problema 15.13 integrando la portata

$$dQ = v(R)dA = v(R)(2\pi R dR)$$

tra $R = 0$ e $R = R_{\text{tubo}}$.

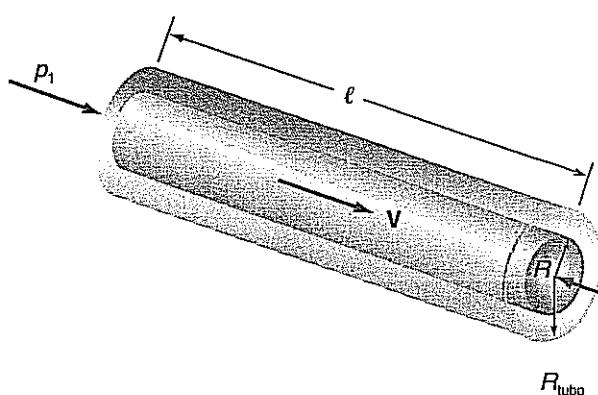


Figura 15.51 Problema 15.13.

TEMPERATURA E CALORE

16.1 INTRODUZIONE

Supponiamo di prendere un cubetto di ghiaccio dal frigorifero e di porlo su un tavolo. Negli istanti iniziali l'interazione di questo corpo con l'ambiente può essere descritta ricorrendo ai metodi della meccanica: il cubetto di ghiaccio è in equilibrio statico e la forza risultante che agisce su di esso è nulla; la Terra esercita sul cubetto una forza gravitazionale diretta verso il basso equilibrata dalla forza normale esercitata dal tavolo verso l'alto (nonché dalla piccola spinta di Archimede dovuta all'atmosfera). Ben presto, però, il ghiaccio comincia a sciogliersi, e alla fine non rimane che una chiazza d'acqua sul tavolo. Non è possibile descrivere né comprendere questo processo di fusione in base alla sola meccanica. Per discutere situazioni di questo tipo è necessario introdurre alcuni nuovi concetti indipendenti dalla meccanica. In questo capitolo e nei tre successivi esporremo alcune delle idee che svolgono un ruolo fondamentale nella termodinamica e nella meccanica statistica. I concetti di temperatura e di trasmissione del calore vengono introdotti in questo capitolo.

16.2 DESCRIZIONE MICROSCOPICA E MACROSCOPICA

Supponiamo che un recipiente contenga una data quantità di un gas, per esempio 5 g di ossigeno. Una *descrizione microscopica* di tale sistema comincerebbe dalla constatazione che il gas è formato da molecole. È ragionevole tentare di determinare il moto di ciascuna molecola applicando le leggi di Newton? Con un grande calcolatore superveloce si può simulare un sistema molto piccolo formato da alcune migliaia di molecole, ricavandone utili informazioni: in queste simulazioni si segue in modo particolareggiato il moto di ciascuna molecola, e qualunque proprietà del sistema che dipenda dalle posizioni e dalle velocità delle molecole può essere calcolata. Questa impostazione è propria della *dinamica molecolare*.

Tuttavia, il numero delle molecole presenti in 5 g di ossigeno è dell'ordine di 10^{23} , cioè di gran lunga troppo elevato per consentire una trattazione in termini di dinamica molecolare: la semplice elencazione dei valori istantanei della posizione e della velocità di ogni singola molecola sarebbe un'impresa titanica. Una simile quantità di informazioni sarebbe impossibile da assimilare e quindi sarebbe di scarsa utilità per la descrizione di questo sistema e della sua interazione con l'ambiente. È più utile, invece, prendere in considerazione i valori medi. L'impostazione della dinamica molecolare si avvale anche di grandezze che comportano medie sui moti molecolari. I metodi della *meccanica statistica* connettono le medie delle proprietà molecolari a grandezze quali la temperatura e la pressione che fanno parte della nostra esperienza quotidiana. Vedremo alcune connessioni di questo tipo nel Capitolo 18.

Una *descrizione macroscopica* prende in considerazione proprietà che si manifestano su una scala molto più grande di quella molecolare. Su questa scala non si fa alcun riferimento diretto alle proprietà molecolari del sistema.

La descrizione macroscopica dell'interazione di un sistema con il suo ambiente è chiamata *termodinamica*. Benché la termodinamica non dipenda dalla nostra conoscenza della struttura molecolare della materia, interpretare la descrizione termodina-

Una descrizione microscopica è una descrizione a livello molecolare.

La termodinamica è la descrizione macroscopica, cioè su scala molto più grande di quella molecolare.

mica in termini di medie molecolari spesso aiuta a farsi un'idea intuitiva di ciò c'è.

Va notato che gran parte della termodinamica classica è stata formulata quando non si aveva idea che la materia fosse costituita da atomi e molecole e che le nostre conoscenze e idee sulla reale struttura della materia dovessero essere i principi base della termodinamica resterebbero invariati. In questo senso, i concetti della termodinamica sono di portata assolutamente generale.

Abbiamo già incontrato alcune delle grandezze macroscopiche che vengono studiate in termodinamica. La *pressione* p di un gas (Capitolo 15) è la forza per unità di area esercitata dal gas su una superficie. Il gas occupa un *volumen* V . La massa del gas può essere specificata dal *numero di moli* n^1 . Per esempio, O₂ ha una massa molecolare di circa 32 g/mol, e la massa di 3.0 mol di O₂ è $(3.0 \text{ mol})(32 \text{ g/mol}) = 96 \text{ g} = 0.096 \text{ kg}$. Ulteriori grandezze, che saranno definite in seguito, sono, tra le altre, la *temperatura* T , l'*energia interna* U e l'*entropia* S . Queste grandezze sono le variabili che descrivono il sistema e sono dette *variabili di stato*. Le variabili di stato di un sistema sono appunto variabili, in quanto i loro valori in generale cambiano in seguito alle interazioni con l'ambiente circostante il sistema. Per esempio, è possibile di ridurre il volume V del gas racchiuso in un pallone comprimendo (con cautela) il pallone.

■ Esempio 16.1

Un gas occupa un recipiente cilindrico con sezione circolare di raggio $R = 0.22 \text{ m}$ e lunghezza $L = 0.35 \text{ m}$. La pressione del gas è di 2.00 atm, ossia di $2.02 \times 10^5 \text{ Pa}$. Determinare (a) il volume occupato dal gas e (b) la forza esercitata dal gas su una delle facce circolari del cilindro. Supponendo che il gas sia He e che la sua massa sia di 0.0072 kg, qual è il numero di moli n ?

Soluzione

(a) Il volume del cilindro è dato dal prodotto della sua lunghezza L per l'area della sua sezione circolare:

$$V = \pi R^2 L = 0.053 \text{ m}^3 = 53 \text{ l}$$

(b) La forza esercitata su un'area $A = \pi R^2$ è

$$F = pA = (202 \text{ kPa})(0.15 \text{ m}^2) = 31 \text{ kN}$$

(c) La massa molecolare dell'He è $M_0 = 4.0 \text{ g/mol}$. Il numero di moli è

$$n = \frac{m}{M_0} = \frac{7.2 \text{ g}}{4.0 \text{ g/mol}} = 1.8 \text{ mol}$$

16.3 L'EQUILIBRIO TERMICO E IL PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA

Nello stato di equilibrio, le variabili di stato sono costanti.

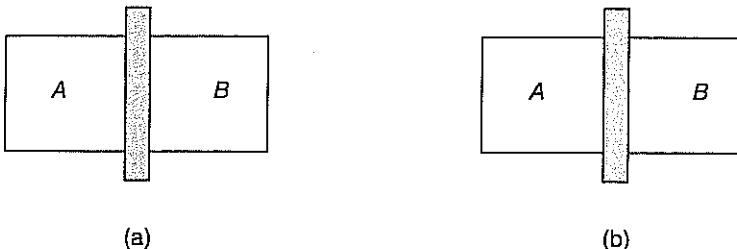
Una parete adiabatica isolata un sistema da un altro.

Ammetteremo che una variabile di stato, come per esempio la pressione, abbia il medesimo valore in tutto il sistema. In tal caso un unico valore della pressione descrive l'intero sistema. Supporremo anche che ciascuna delle variabili di stato di un sistema sia costante nel tempo: si dice allora che il sistema si trova in uno stato di equilibrio. Finché le variabili di stato rimangono costanti, il sistema rimane in questo stato di equilibrio.

Le variabili di stato di un sistema possono cambiare in seguito all'interazione con un altro sistema. Spesso si vuole "isolare" un sistema da un altro: a questo scopo si inserisce tra i sistemi una barriera che impedisca loro di interagire. Una versione idealizzata di barriera isolante fissa di questo tipo viene detta *parete adiabatica*. Due sistemi separati da una parete adiabatica, rappresentata schematicamente nella Fig. 16.1a dallo strato ombreggiato in grigio, non si influenzano reciprocamente: ciascuno

¹Una mole (simbolo: mol) di una sostanza è la quantità di tale sostanza che contiene un numero di elementari (atomi, molecole) pari al *numero di Avogadro* $N_A = 6.02 \times 10^{23}$. Tale numero risulta dall'avere definito che una mole di atomo di carbonio dell'isotopo 12 abbia esattamente una massa di 12 g. La massa molecolare di una sostanza, M (chiamata spesso anche *peso molecolare*), esprime il numero di grammi che occorrono per avere una mole di tale sostanza.

può rimanere nel proprio stato di equilibrio. Una parete adiabatica può essere approssimata da uno spesso strato di un materiale isolante come il polistirolo espanso. Viceversa, una *parete diatermica* facilita l'interazione termica dei due sistemi. Nella Figura 16.1b essa è rappresentata dallo strato ombreggiato in colore. Un sottile strato di metallo, per esempio di rame, si comporta approssimativamente come una parete diatermica.

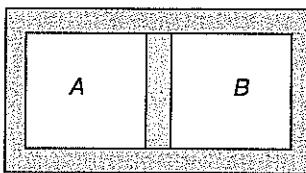


Una parete diatermica permette l'interazione tra due sistemi.

Figura 16.1

Due sistemi sono separati da
(a) una parete adiabatica fissa che
ne impedisce l'interazione e
(b) una parete diatermica fissa
che consente loro di interagire.

Supponiamo che a due sistemi *A* e *B* sia consentito di interagire attraverso una parete diatermica, come mostra la Figura 16.2. Le pareti adiabatiche del recipiente impediscono ogni contatto termico con sistemi esterni al recipiente stesso. Per effetto dell'interazione tra *A* e *B*, alcune delle variabili di stato di ciascuno dei sistemi si modificheranno; alla fine, tuttavia, queste variabili si stabilizzeranno su valori costanti, ed entrambi i sistemi raggiungeranno uno stato di equilibrio. Si dice allora che i due sistemi *A* e *B* sono in *equilibrio termico*. *Due sistemi sono in equilibrio termico se, quando vengono posti a contatto tramite una parete diatermica, le loro variabili di stato non mutano.*



Equilibrio termico tra due sistemi.

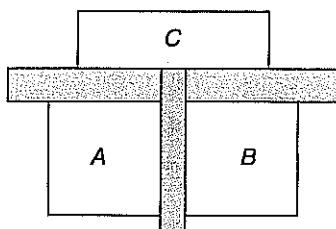
Figura 16.2

Due sistemi interagiscono
attraverso una parete diatermica.
L'involucro adiabatico isola *A* e
B dall'esterno.

Due sistemi possono essere in equilibrio termico anche se non sono a contatto diretto. Nella Figura 16.3 una parete adiabatica separa i sistemi *A* e *B*, ma ciascuno di essi è in contatto con un terzo sistema *C* tramite una parete diatermica. Dopo un tempo sufficientemente lungo, le variabili di ognuno dei sistemi diventano costanti. Pertanto, i sistemi *A* e *C* sono in equilibrio termico, e i sistemi *B* e *C* sono in equilibrio termico. L'esperimento indica che anche i sistemi *A* e *B* sono in equilibrio termico tra loro. Questo risultato trova una generalizzazione nell'enunciato del principio zero della termodinamica:

Due sistemi in equilibrio termico con un terzo sistema sono in equilibrio termico tra di loro.

Tale enunciato può apparire banalmente ovvio; ma non è logicamente necessario, come suggerisce, per analogia, il classico triangolo degli innamorati: Aida ama Radames e Amneris ama Radames, ma Aida e Amneris non si amano. La necessità del principio zero fu riconosciuta dopo che al primo principio della termodinamica era stato dato tale nome. Pertanto fu utilizzato l'inconsueto ordinale "zero" per indicare che tale principio precedeva il primo.



Il principio zero della termodinamica.

Figura 16.3

Una parete adiabatica separa *A* da *B*. Entrambi questi sistemi interagiscono con *C* attraverso una parete diatermica.

Nel prossimo paragrafo definiremo la temperatura specificando un procedimento per la sua misura. Tuttavia, spesso è utile pensare alla temperatura di un sistema come a una grandezza correlata al moto casuale delle molecole del sistema. Questa relazione

Temperatura ed equilibrio termico.

verrà stabilita nel Capitolo 18; per ora, ci limiteremo ad associare un aumento di temperatura di un sistema a un aumento della velocità media e dell'energia media delle molecole.

Il concetto di temperatura è intimamente connesso allo stato di equilibrio tra due sistemi. Infatti, si definisce la temperatura come quella grandezza fisica comune se un sistema sia o non sia in equilibrio termico con un altro sistema e, si può affermare che *due sistemi in equilibrio termico hanno la stessa temperatura*. Due sistemi vengono posti a contatto e le loro variabili di stato cambiano, a meno che non siano alla stessa temperatura, ma perverranno a una temperatura comune quando raggiunto l'equilibrio termico. Supponiamo che uno di questi sistemi sia un termostato usato per misurare la temperatura; dopo che il termometro ha raggiunto l'equilibrio termico con l'altro sistema, esso ha la stessa temperatura dell'altro sistema, cioè che si misura è la temperatura del termometro! L'altro sistema ha la stessa temperatura perché è in equilibrio termico con il termometro. Il termometro può anche essere utilizzato insieme con il principio zero della termodinamica per determinare se due sistemi non contigui A e B siano in equilibrio termico. Se A e B hanno, in base alle leggi del termostato, la stessa temperatura, allora sono in equilibrio termico. Se le loro temperature sono diverse, A e B non sono in equilibrio termico.

16.4 I TERMOMETRI E LA SCALA DELLA TEMPERATURA DEL GAS PERFETTO

La temperatura viene descritta dal punto di vista soggettivo con termini come "bollente", "caldo" e "freddo". L'aggettivo "caldo" corrisponde a una temperatura più elevata che non l'aggettivo "freddo", ma questi termini non hanno un significato oggettivo coerente. Per esempio, supponiamo che ci vengano serviti una zuppa di minestra bollente e un bicchiere di acqua fredda. Se rimangono sul tavolo per un po', poi ci lamentiamo che la minestra è fredda e l'acqua è calda. Nonostante il termometro mostrerà che la minestra ha ancora una temperatura superiore a quella dell'acqua. Sappiamo che una grandezza fisica si definisce precisando il procedimento per tutte le operazioni necessarie a misurarla. Solo in questo modo potremo ottenere una definizione oggettiva e quantitativa.

Le temperature vengono espresse in termini quantitativi usando una scala che è fissata arbitrariamente specificando il procedimento mediante il quale viene effettuata la misura della temperatura stessa, ossia, in breve, specificando quale termometro viene utilizzato.

I termometri. Un termometro è un qualunque congegno o sistema che serve per connettere i valori di una delle sue variabili di stato alla temperatura. Vi sono caratteristiche che un termometro dovrebbe possedere. Esso dovrebbe avere proprietà, come una lunghezza, una pressione, o una resistenza elettrica, che variano con la temperatura in modo facilmente misurabile; le sue letture dovrebbero essere ripetibili; dovrebbe essere costruito in modo da essere facilmente riproducibile, così che termometri uguali possano essere usati in tutto il mondo; la sensibilità delle sue divisioni non dovrebbe dipendere dai particolari materiali utilizzati nella sua costruzione; dovrebbe essere in grado di misurare le temperature in un ampio intervallo. I termometri reali posseggono queste caratteristiche in modo più o meno soddisfacente.

Un esempio familiare di termometro è quello del *termometro a mercurio* in cui nel quale la lunghezza della colonna di mercurio nel capillare di vetro indica la temperatura: si ammette che la temperatura dipenda linearmente dalla lunghezza della colonna di mercurio. Sul vetro può essere tracciata una scala graduata con divisioni di lunghezza costante in modo da indicare i valori della temperatura tra due punti fissi. I punti fissi si potrebbero scegliere, per esempio, la temperatura normale di fusione del ghiaccio e la temperatura normale di ebollizione dell'acqua. (L'aggettivo "normale" comporta che il sistema sia alla normale pressione atmosferica di 101 kPa.)

Un altro tipo di termometro è la *termocoppia*, che è costituita da due giunzioni di fili di metalli differenti: se una giunzione viene mantenuta a una temperatu-

Il termometro a mercurio.

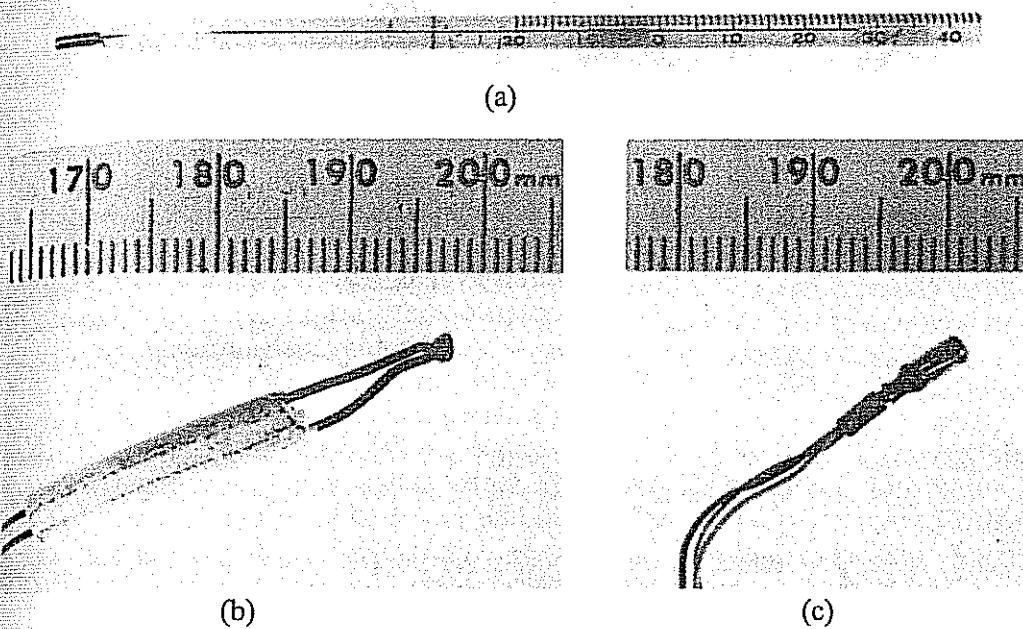
Il termometro a termocoppia.

perimento (per esempio in un bagno di acqua e ghiaccio) e l'altra è a una diversa temperatura, tra le due giunzioni si stabilisce una differenza di potenziale elettrico o tensione (di cui discuteremo nel secondo volume). Questa differenza di potenziale viene usata per misurare la temperatura. Un altro tipo di termometro elettrico è il *termometro a resistenza*. La resistenza elettrica del termometro varia con la temperatura e viene usata per misurare quest'ultima.

Il termometro a resistenza

Tre diversi tipi di termometro:

- (a) un termometro a mercurio in capillare di vetro,
- (b) una termocoppia con una giunzione di differenti metalli, e
- (c) un termometro a resistenza al silicio.



Il *termometro a gas a volume costante* sarà analizzato in modo particolareggiato tra poco: esso consiste in un bulbo contenente un gas e dotato di un meccanismo che garantisce che il volume occupato dal gas rimanga costante (dove il nome di "termometro a gas a volume costante"). Si misura la pressione del gas, e tale misura viene usata per determinare la temperatura in base al presupposto che la temperatura sia proporzionale alla pressione del gas. Tale presupposto non inficia la definizione della temperatura rendendola dipendente da un'ipotesi; infatti si potrebbe scegliere, come presupposto, una dipendenza funzionale diversa fra la variabile di stato del termometro (in questo caso la pressione del gas) e la temperatura, ottenendo solo valori diversi per le temperature misurate, cioè ottenendo scale diverse non lineari, quindi solo più complicate.

Supponiamo che i vari termometri di cui abbiamo parlato siano tarati in modo da fornire indicazioni identiche a una certa temperatura fissa, e che poi essi vengano usati per misurare la temperatura di qualche altro sistema. È probabile che ogni termometro fornisca un'indicazione leggermente diversa. In tal caso il valore della temperatura misurata dipende dal termometro utilizzato per misurarla, e questa è una situazione insoddisfacente. Nel Capitolo 19 definiremo una temperatura, detta *temperatura termodinamica*, che è indipendente dalle proprietà di qualunque materiale; fino ad allora opereremo con le temperature intendendole misurate con un termometro a gas a volume costante. Come vedremo, l'uso di questo termometro porterà a una misura della temperatura praticamente indipendente dal particolare gas utilizzato nello strumento.

In un termometro a gas a volume costante la temperatura è proporzionale alla pressione.

Il termometro a gas a volume costante. Supponiamo di confrontare le temperature di due sistemi *A* e *B* con un termometro a gas a volume costante. Cominciamo a mettere il termometro a contatto con il sistema *A* in modo che raggiunga l'equilibrio termico con *A*; il sistema *A* e il gas contenuto nel termometro hanno allora la stessa temperatura, che chiamiamo T_A . Misuriamo la pressione del gas nel *bulbo del termometro*, e indichiamo con p_A il suo valore. Quindi facciamo in modo che il termometro raggiunga l'equilibrio termico con il sistema *B*. La temperatura T_B corrisponde al valore p_B della pressione del gas nel termometro. Dal momento che si è convenuto che la temperatura sia proporzionale alla pressione del gas nel termometro, si ha

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{p_B}{p_A}$$

Per esempio, se il rapporto tra le pressioni è $p_B/p_A = 2.1$, allora la temperatura stema B è 2.1 volte maggiore della temperatura del sistema A . Si noti, però, che disponiamo di alcun valore per nessuna delle due temperature: la scala non è stata fissata.

Per istituire una scala termometrica si assegna un valore numerico della temperatura a un punto fisso, cioè a un ben definito stato di un certo sistema. Per convenzione si sceglie come punto fisso il *punto triplo dell'acqua*. Abbiamo tutti presente un sistema formato da ghiaccio e acqua liquida. Due fasi, solida e liquida, possono coesistere in equilibrio a una temperatura chiamata *punto di fusione*. Analogamente, le fasi di ghiaccio e di vapore (acqueo) sono in equilibrio al *punto di ebollizione*. Il *punto di sublimazione*, poi, corrisponde all'equilibrio tra le fasi solida e di vapore. Le temperature di questi punti dipendono dalla pressione delle fasi liquida o di vapore, come indica la Figura 16.4, nella quale le temperature sono espresse nella scala Celsius. Riducendo la pressione, per esempio, si abbassa la temperatura del punto di ebollizione. C'è un'altra pressione del sistema alla quale tutte e tre le fasi dell'acqua sono in equilibrio: questo stato è il *punto di fusione*, il *punto di ebollizione* e il *punto di sublimazione* coincidono. Questo stato è il *punto triplo dell'acqua*. Esso corrisponde a una pressione di vapore di 0.610 Pa e a una temperatura di 0.01 °C sulla consueta scala Celsius.

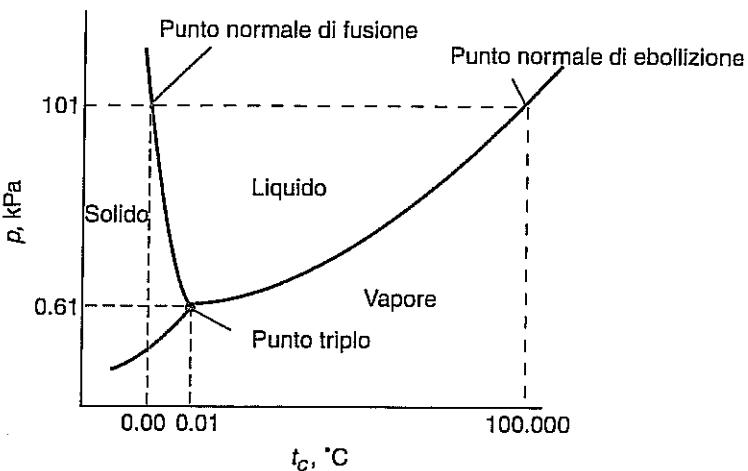
Al punto triplo le fasi solida, liquida e di vapore sono in equilibrio.

Figura 16.4

Una porzione del diagramma delle fasi per l'acqua. Le scale *non* sono lineari. Al punto triplo le fasi solida, liquida e di vapore sono in equilibrio.

La temperatura del punto triplo.

Il grado Kelvin (K) e il grado Celsius hanno la stessa grandezza.



La scala delle temperature che si ottiene dal termometro a gas a volume costante corrisponde a una scelta arbitraria ma conveniente della temperatura del punto triplo. La temperatura del punto triplo T_3 viene scelta in modo che sia

$$T_3 = 273.16 \text{ K} \quad (1)$$

dove il simbolo "K" sta per kelvin, l'unità SI della temperatura. Il vantaggio di questa particolare scelta è che un intervallo di temperatura di 1 K corrisponde a una divisione, o grado, della scala Celsius. Quindi il grado Celsius e il grado Kelvin hanno la stessa grandezza. Il punto normale di fusione dell'acqua sulla scala Kelvin è a 273.15 K (0.00 °C), e il punto normale di ebollizione è 100 K più in alto, a 373.15 K (100.00 °C).

Per tarare il termometro a gas a volume costante al punto triplo dell'acqua, gli si deve raggiungere l'equilibrio termico con dell'acqua al punto triplo. La pressione p_3 del termometro viene misurata a questa temperatura T_3 . Per misurare la temperatura di un dato sistema, si fa in modo che il termometro raggiunga l'equilibrio termico con il sistema. Indicata con T la temperatura di quel sistema e con p la pressione del gas nel termometro a quella temperatura, dall'Equazione (16.1) si ha

$$\frac{T}{T_3} = \frac{p}{p_3}$$

ossia

$$T = (273.16 \text{ K}) \frac{p}{p_3} \quad (1)$$

Una volta che sia stata determinata la pressione del gas quando esso è in equilibrio

un sistema formato da acqua al punto triplo, la temperatura di un altro sistema viene determinata per mezzo dell'Equazione (16.2) misurando la pressione del gas quando è in equilibrio termico con quest'ultimo sistema.

Esempio 16.2

Quando un termometro a gas a volume costante è in equilibrio termico al punto triplo dell'acqua, la pressione dell'He in esso contenuto è di 1020 Pa. La pressione dell'He è di 288 Pa quando il termometro è in equilibrio termico con dell'azoto liquido al suo punto normale di ebollizione. Qual è il punto normale di ebollizione dell'azoto in base alla misura effettuata con questo termometro?

Soluzione

Sostituendo i valori della pressione nell'Equazione (16.2) si ha

$$T = (273.16 \text{ K}) \frac{288}{1020} = 77.1 \text{ K}$$



La temperatura del gas perfetto. Una minore pressione del gas nel termometro corrisponde a una temperatura più bassa (la quale, a sua volta, rispecchia una minore velocità media e una minore energia cinetica media delle molecole). L'Equazione (16.2) suggerisce che, al tendere a zero di p , anche la temperatura tenda a zero, cioè a quello che è noto come *zero assoluto della temperatura*. A questa temperatura minima la pressione di un gas diviene teoricamente nulla; in pratica, però, qualunque gas reale o si liquefà o diventa solido prima che questa temperatura venga raggiunta. A causa di questa proprietà dei gas reali, il termometro a gas a volume costante non può essere utilizzato per misurare temperature inferiori a circa 1 K.

Il termometro a gas a volume costante pone un altro problema tecnico: termometri costruiti in modo identico forniscono misure differenti della temperatura se in essi vengono usati gas diversi o quantità diverse del medesimo gas. Queste differenze nella misura delle temperature sono in genere assai piccole. Comunque, per assegnare un valore univoco alla temperatura si ricorre a una tecnica di estrapolazione. Supponiamo che vengano effettuate misurazioni con una serie di termometri a gas a volume costante contenenti quantità decrescenti di gas. Una minore quantità di gas corrisponde a un valore più basso della pressione p_3 del gas al punto triplo. I risultati delle misurazioni di una temperatura con questa serie di termometri sono rappresentati graficamente nella Figura 16.5. I termometri si differenziano sia per il tipo di gas che per la quantità di gas, e quest'ultima è indicata dal valore di p_3 . Se si estrapolano le misure per ciascun gas fino al valore zero di p_3 , queste estrapolazioni conducono allo stesso valore della temperatura, indipendentemente dal tipo di gas. *Nel caso limite di gas infinitamente rarefatto* ($p_3 \rightarrow 0$), la temperatura determinata dal termometro a gas a volume costante è la stessa per tutti i gas. Modifichiamo allora l'Equazione (16.2) in modo da tener conto di questa conclusione: la *temperatura del gas perfetto* è definita da

$$T = \lim_{p_3 \rightarrow 0} \left(\frac{p}{p_3} \right) (273.16 \text{ K}) \quad (16.3)$$

La temperatura del gas perfetto.

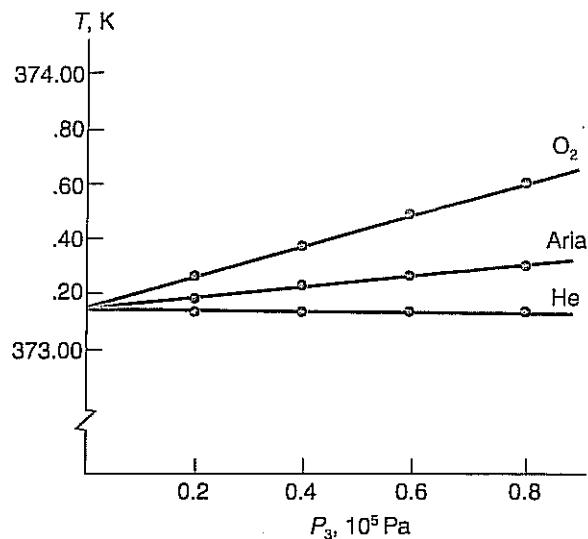
dove il limite è determinato effettuando il procedimento di estrapolazione descritto sopra. Nell'intervallo di temperature in cui si può usare il termometro a gas, la temperatura del gas perfetto è indipendente dal particolare gas utilizzato e coincide con la temperatura termodinamica che discuteremo più avanti.

In questo limite di rarefazione infinita, gas reali che occupano il medesimo volume presentano la stessa dipendenza della temperatura dalla pressione: T e p sono proporzionali, e la costante di proporzionalità è la stessa per tutti i gas a volume costante. È utile prendere in considerazione un gas fittizio per il quale la proporzionalità della temperatura alla pressione valga non soltanto nel caso rarefatto ma a qualunque pressione. A questo gas immaginario si dà il nome di *gas perfetto* (o *ideale*). Torneremo sul gas perfetto nei prossimi tre capitoli. Per ora osserviamo che le sue proprietà sono approssimate dai gas reali rarefatti, e che una scala delle temperature, basata sulle proprietà comuni dei gas rarefatti, porta il suo nome.

Il gas perfetto.

Figura 16.5

La temperatura del punto normale di ebollizione dell'acqua viene misurata con una serie di termometri a gas a volume costante. I termometri contengono gas diversi o quantità diverse di un dato gas. Ognuno di essi è caratterizzato dalla pressione p_3 del suo gas al punto triplo. Estrapolando fino a $p_3 = 0$, la temperatura risulta essere 373.15 K.



16.5 ALTRE SCALE TERMOMETRICHE

La temperatura Celsius.

Storicamente, la scala Celsius delle temperature si basava sulle proprietà dell'acqua. Il punto normale di fusione corrispondeva a 0 °C e quello del punto normale di ebollizione a 100 °C. Oggi questa scala è definita da

$$t_C = T - 273.15 \text{ K}$$

dove la temperatura Celsius è indicata con t_C . Si noti che, in base all'Eq. (16.4), la scala Celsius e la scala Kelvin differiscono soltanto per il loro zero assoluto ($T = 0 \text{ K}$) corrisponde a $t_C = -273.15 \text{ °C}$. Il punto normale di fusione dell'acqua ($t_C = 0.00 \text{ °C}$) corrisponde a $T = 273.15 \text{ K}$. Dal momento che la grandezza del "grado" è uguale nelle due scale, le differenze di temperatura hanno il medesimo valore numerico. Per esempio, una differenza di temperatura di 5.7 °C (leggidi: 5 Celsius) corrisponde a una differenza di 5.7 K (leggidi: 5.7 kelvin). Per convenzione, il simbolo del grado (°) non viene utilizzato quando si esprimono temperature o differenze di temperatura nella scala Kelvin.

La scala Rankine delle temperature ha lo stesso zero della scala Kelvin, ma la grandezza del suo grado è minore. Se T_R rappresenta una temperatura espressa nel sistema Rankine, la sua relazione con la temperatura Kelvin è

La temperatura Rankine.

$$T_R = \frac{9}{5} T$$

Per esempio, il punto normale di ebollizione dell'acqua nella scala Rankine è $T_R = (9/5)(373 \text{ K}) = 671 \text{ °R}$.

La scala Rankine e la scala Fahrenheit sono ancora in uso negli Stati Uniti e in Bretagna. Il grado della scala Fahrenheit ha la stessa grandezza di quello dell'equivalente sistema Rankine, ma le due scale hanno un diverso zero. Per convertire una temperatura in Fahrenheit in una temperatura Celsius e viceversa, si usano le formule:

La temperatura Fahrenheit.

$$t_F = \frac{9}{5} t_C + 32 \text{ °F}$$

$$t_C = \frac{5}{9} (t_F - 32 \text{ °F})$$

Nella scala Fahrenheit il punto normale di fusione e il punto normale di ebollizione dell'acqua corrispondono a 32 e 212 °F rispettivamente. La Figura 16.6 mette a confronto le quattro scale termometriche indicando le temperature di alcuni punti fisici.

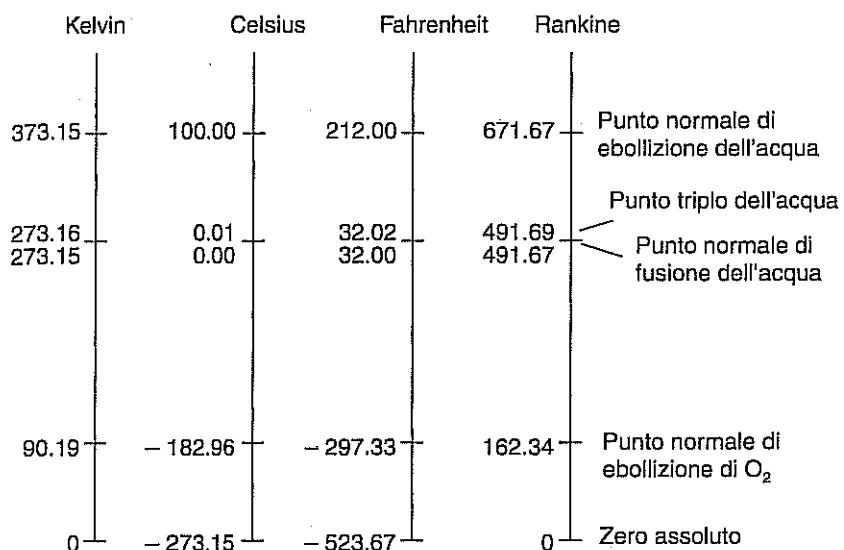


Figura 16.6

Confronto tra i valori di alcune temperature espressi in quattro diverse scale termometriche.

16.6 LA DILATAZIONE TERMICA

La maggior parte delle sostanze si dilata al crescere della temperatura e si contrae al diminuire della temperatura. Questa dilatazione termica è solitamente molto piccola, ma può essere un effetto di notevole importanza. Supponiamo che la lunghezza di una sbarra solida sia L_0 a una certa temperatura di riferimento. Se la temperatura varia di una quantità $\Delta T = T - T_0$, la lunghezza varia di una quantità $\Delta L = L - L_0$. L'esperimento dimostra che in circostanze ordinarie la variazione di lunghezza è proporzionale alla variazione della temperatura, almeno per piccole variazioni di quest'ultima. Sembra poi ragionevole che la variazione di lunghezza sia proporzionale alla lunghezza di riferimento L_0 , cioè che, se la variazione di lunghezza di una sbarra lunga 2 m è di 0.4 mm, allora la variazione di lunghezza di una sbarra lunga 1 m sia di 0.2 mm. La variazione della lunghezza dipende anche dal tipo di materiale: per esempio, sbarre di rame e di ferro di uguale lunghezza a una data temperatura hanno lunghezze differenti ad altre temperature.

Questi aspetti del fenomeno possono essere espressi sotto forma di equazione introducendo un coefficiente caratteristico del materiale. Il *coefficiente di dilatazione lineare* medio viene indicato con α . La variazione di lunghezza corrispondente a una variazione della temperatura ΔT è data da

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad (16.7)$$

Il coefficiente di dilatazione lineare.

Benché dipenda dall'intervallo di temperatura ΔT e dalla temperatura di riferimento T_0 , tale dipendenza è solitamente trascurabile per variazioni di temperatura non molto grandi. Il coefficiente non dipende dalla lunghezza L_0 . Le dimensioni di α sono quelle del reciproco di una temperatura, e l'unità di misura solitamente utilizzata è il reciproco del grado Celsius, $(^{\circ}\text{C})^{-1}$. Si noti che questa unità coincide con l'unità SI K^{-1} , kelvin reciproco, perché quelle che si misurano sono variazioni di temperatura. Nella Tabella 16.1 sono riportati i valori di α per alcune sostanze tra le più comuni.

Tabella 16.1 Coefficienti di dilatazione di alcune sostanze

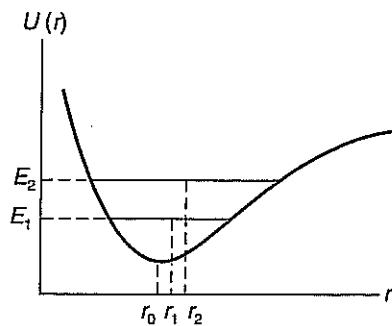
Dilatazione lineare		Dilatazione cubica	
Sostanza (solido)	$\alpha, 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$	Sostanza (liquido)	$\beta, 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
Alluminio	2.4	Metanolo	113
Rame	1.8	Glicerina	49
Acciaio	1.1	Mercurio	18
Vetro	0.1-1.3	Trementina	90
Calcestruzzo	0.7-1.4	Acetone	132

La nostra discussione della dilatazione termica era riferita alla variazione della ghezza di una sbarra, ma l'Equazione (16.7) vale per qualunque dimensione lineare come il diametro di un cilindro o anche il raggio di un foro circolare in una lamiera (può pensare alla dilatazione termica come a una sorta di ingrandimento fotografico cui ogni caratteristica lineare di una sostanza isotropa varia in modo proporzionale). Ricordiamo che una sostanza isotropa ha le stesse proprietà in tutte le direzioni.)

Analizzando il fenomeno a livello microscopico possiamo farci un'idea del perché un solido tipico si dilati in seguito a un aumento della temperatura. In un solido gli atomi adiacenti esercitano gli uni sugli altri forze di tipo elastico e compiono movimenti. A una data temperatura, una molecola tipica oscilla intorno alla propria posizione media come indica schematicamente la Figura 16.7, nella quale è rappresentata la funzione energia potenziale efficace per due atomi adiacenti separati da una distanza r . Tale funzione è asimmetrica rispetto al suo minimo, e la distanza media dipende dall'energia della molecola. Un aumento della temperatura viene interpretato come un aumento dell'energia molecolare media; se aumenta l'energia, aumenta la distanza media tra le molecole. È questo l'effetto che, agendo sugli atomi di un solido, dà origine alla dilatazione termica.

Figura 16.7

L'energia potenziale di interazione di due atomi adiacenti è asimmetrica rispetto al minimo posto in r_0 . La distanza media è r_1 quando l'energia vibrazionale è E_1 . La distanza media aumenta fino a r_2 se l'energia vibrazionale aumenta diventando E_2 a causa dell'aumento della temperatura.



Nel caso dei liquidi, ma anche dei solidi, è utile prendere in considerazione le variazioni di volume che corrispondono alle variazioni della temperatura. Se V_0 è il volume di una certa quantità di una sostanza a una temperatura di riferimento T_0 , la variazione di volume ΔV che accompagna una variazione della temperatura ΔT è data da

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad (16.8)$$

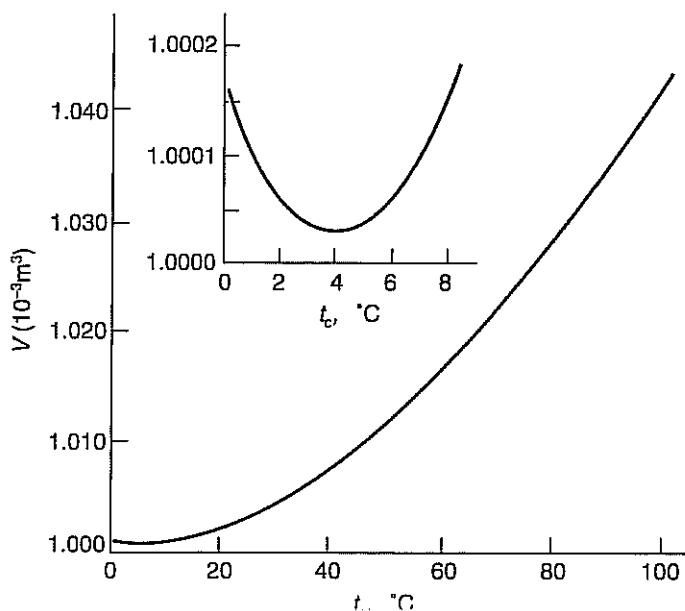
Il coefficiente di dilatazione cubica β .

dove β è il *coefficiente di dilatazione cubica* medio, il cui valore è caratteristico di particolare sostanza in esame. Nella Tabella 16.1 sono riportati i valori di β per alcuni liquidi.

Dal momento che il prodotto di tre dimensioni lineari dà un volume, non sorprende che la dilatazione lineare e la dilatazione cubica siano connesse. Il risultato del Problema 16.2 mostra che, per una sostanza isotropa, $\beta = 3\alpha$.

Figura 16.8

Il grafico mostra la dipendenza dalla temperatura del volume di 1.000 kg di acqua. L'ingrandimento rappresenta la regione attorno ai 4 °C, dove la densità dell'acqua ha un massimo.



Significativa è l'assenza dell'acqua liquida dalla Tabella 16.1. I valori positivi di α e di β per le sostanze citate nella Tabella indicano che tali sostanze si dilatano al crescere della temperatura. Anche l'acqua si dilata (sebbene non linearmente) all'aumentare della temperatura nell'intervallo tra 4 e 100 °C. Però, tra 0 °C e circa 4 °C, l'acqua si contrae all'aumentare della temperatura. Questo comportamento è illustrato dalla Figura 16.8, nella quale il volume di 1 kg d'acqua è rappresentato in funzione della temperatura. L'ingrandimento parziale mostra la regione attorno ai 4 °C in cui il volume è minimo (e la densità è massima).

Questa variazione del volume ovvero della densità con la temperatura è all'origine della stratificazione che a volte si verifica nelle grandi masse di acqua dolce. L'anomala dilatazione termica dell'acqua è dovuta in ultima analisi all'interazione tra le molecole d'acqua che hanno una forma del tutto particolare.

Esempio 16.3

In una giornata invernale un lastrone di calcestruzzo ha la lunghezza di 12 m a -5 °C. Che variazione di lunghezza si verifica nel passaggio dall'inverno all'estate, quando la temperatura è di 35 °C?

Soluzione

Dalla Tabella 16.1 si desume che il coefficiente di dilatazione lineare del calcestruzzo è circa $1 \times 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$. Utilizzando l'Equazione (16.7), si ha

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T = (1 \times 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})(12 \text{ m})(40 \text{ }^{\circ}\text{C}) = 5 \text{ mm}$$

Per tenere conto di questo tipo di dilatazione, spesso nella pavimentazione delle autostrade e nei marciapiedi tra i lastroni adiacenti vengono inseriti dei distanziatori elastici.

Esempio 16.4

Una sfera di alluminio ha un raggio R di 3.000 mm a 100.0 °C. Qual è il suo volume a 0.0 °C?

Soluzione

Il volume della sfera ($4\pi R^3/3$) a 100 °C è $V = 113.1 \text{ mm}^3$. Dalla Tabella 16.1 si ha $\alpha = 2.4 \times 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ e $\beta = 3\alpha = 7.2 \times 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Applicando l'Equazione (16.8), si ha

$$\Delta V = (7.2 \times 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})(113.1 \text{ mm}^3)(-100 \text{ }^{\circ}\text{C}) = -0.81 \text{ mm}^3$$

Il volume a 0 °C è $113.1 \text{ mm}^3 - 0.8 \text{ mm}^3 = 112.3 \text{ mm}^3$.

In alternativa si può determinare il raggio della sfera (una dimensione lineare) a 0 °C e calcolare il volume con la formula $V = 4\pi R^3/3$. (Nell'Esercizio 16.21 sarà richiesto di dimostrare che in questo modo si perviene alla stessa risposta.)

16.7 LA TRASMISSIONE DEL CALORE

Supponiamo di voler aumentare la temperatura di un recipiente d'acqua. Nel linguaggio quotidiano diciamo che vogliamo "riscalarlo". Potremmo, per esempio, applicare una fiamma al recipiente, oppure potremmo immergere un corpo molto caldo nell'acqua. In entrambi i casi si verifica un trasferimento di energia all'acqua, e tale trasferimento di energia ha luogo perché c'è una differenza di temperatura tra l'acqua e una parte dell'ambiente circostante. Questa osservazione costituisce la base della nostra definizione del termine "calore". *Il calore è l'energia scambiata tra un sistema e il suo ambiente unicamente a causa di una differenza di temperatura che sussiste tra il sistema e qualche parte del suo ambiente.* Il riferimento a una differenza di temperatura è parte essenziale della definizione del calore perché l'energia può essere trasferita anche in altri modi (che saranno descritti nel prossimo capitolo). Per poter essere considerata calore, l'energia fornita o sottratta a un sistema deve essere stata trasferita direttamente ed esclusivamente a causa di una differenza di temperatura tra il sistema e il suo ambiente.

Come avviene questo trasferimento di energia a livello molecolare? Nel processo di *conduzione del calore*, che sarà descritto più ampiamente tra poco, l'energia viene

Definizione del calore.

trasferita negli urti tra le molecole di una sostanza che si muovono casualmente. Consideriamo una sbarra le cui estremità si trovano a temperature diverse. Le molecole all'estremità con la temperatura maggiore si muoveranno in media più rapidamente delle molecole dell'estremità con la temperatura minore. In un urto tipico, la molecola più lenta acquisterà energia, e la più veloce ne cederà; facendo la media su un gran numero di urti in cui sono coinvolte le molecole lungo tutta la sbarra, si ha un trasferimento netto di energia – ossia di calore – dovuto a questa differenza di temperatura.

Il termine "calore" è usato in modo appropriato quando si riferisce a una quantità di energia che viene trasferita a un sistema o da un sistema. Non si tratta di un'energia che risiede in un sistema o appartiene a un sistema come l'energia potenziale. Perciò è sbagliato parlare del "calore presente in un sistema" o del "calore di un sistema". Si parla invece del "calore fornito a un sistema" o del "calore sottratto a un sistema". Per rappresentare la quantità di calore si usa il simbolo Q . Essendo un trasferimento di energia, il calore ha le dimensioni dell'energia; l'unità SI della quantità di calore è joule (J). Sono di uso comune anche altre unità di misura della quantità di calore, come noi introdurremo via via che se ne porrà l'esigenza.

In che modo avviene la trasmissione del calore tra un sistema e il suo ambiente, e vero, per maggiore semplicità, tra due sistemi? I processi tramite i quali il calore viene trasferito sono classificati in tre categorie: *la conduzione*, *la convezione*, e *l'irraggiamento*. In alcune situazioni può accadere che sia uno soltanto di questi meccanismi a svolgere un ruolo significativo; ma spesso sono due o tutti e tre i processi a contribuire in misura rilevante alla trasmissione del calore. Li discuteremo separatamente, cominciando dalla conduzione del calore.

La conduzione del calore. Nel processo di conduzione, il calore viene trasferito tra due sistemi tramite un mezzo che li mette in comunicazione. Ammetteremo che nessuna parte del mezzo sia in moto; in tal modo il mezzo deve essere un solido rigido, o pure, se è un fluido, non deve presentare circolazione di correnti. Consideriamo la situazione rappresentata schematicamente nella Figura 16.9. Una barra omogenea la cui sezione ha area A e la cui lunghezza è L è il mezzo interposto tra i due sistemi che sono mantenuti alle temperature T_1 e T_2 . Il calore viene trasferito attraverso il mezzo dalla temperatura più alta, che indicheremo con T_2 , alla temperatura inferiore. Una parete adiabatica che copre la superficie laterale della barra impedisce qualunque flusso di calore attraverso tale superficie.

C'è da attendersi che la temperatura vari nel senso della lunghezza della barra: essa dovrebbe essere T_2 all'estremità sinistra ($x = 0$) e T_1 all'estremità opposta ($x = L$). In un punto intermedio della barra, individuato da x , la temperatura dovrebbe essere compresa tra T_1 e T_2 e in generale varierà con il tempo. Nella Figura 16.10 sono tracciati alcuni profili di temperatura. L'esperimento mostra che, una volta che siano state raggiunte condizioni di *regime stazionario* (cioè, una volta che la temperatura non cambi più in nessun punto), la temperatura varia linearmente nel senso della lunghezza della barra, purché T_1 e T_2 non siano troppo differenti.

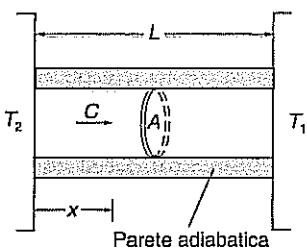
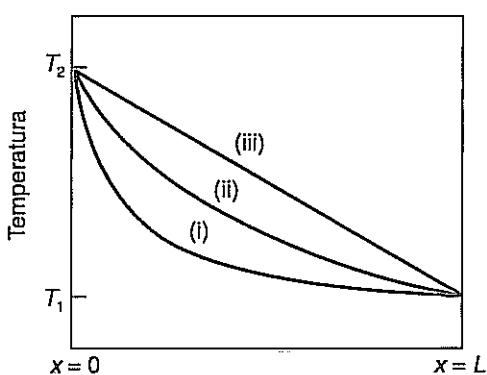


Figura 16.9
Una barra omogenea conduce il calore da una temperatura più elevata T_2 a una temperatura inferiore T_1 . La superficie laterale della barra è coperta da un isolante.

Flusso di calore in regime stazionario.

Figura 16.10
Profili di temperatura in diversi istanti per la barra di Figura 16.9. Il profilo (i) è relativo a un istante di poco successivo all'inizio della conduzione; dopo un certo tempo il profilo è (ii). Trascorso un tempo sufficientemente lungo, viene raggiunto il profilo di regime stazionario (iii).



Se il flusso di calore nella barra è in regime stazionario, la quantità di calore Q che fluisce attraverso una sezione della barra stessa in un intervallo di tempo t è la stessa

lungo tutta la barra. Quindi, in condizioni di regime stazionario, l'energia viene trasferita attraverso il mezzo senza che nessuna parte di esso ne acquisti o ne perda. Definiamo la *corrente termica C* come la quantità di calore che fluisce nell'unità di tempo attraverso una data sezione:

$$C = \frac{Q}{t}$$

Corrente termica.

In regime stazionario la corrente termica *C* ha allora il medesimo valore in tutta la barra omogenea. Gli esperimenti dimostrano che la corrente termica *C* che fluisce nella barra in regime stazionario è (i) proporzionale alla differenza di temperatura $T_2 - T_1$, (ii) proporzionale all'area *A* della sezione della barra, (iii) inversamente proporzionale alla sua lunghezza *L* e (iv) dipendente dal materiale di cui la barra è costituita. Queste caratteristiche sono riassunte nell'espressione

$$C = kA \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (16.9)$$

dove *k* è il *coefficiente di conducibilità termica* caratteristico del materiale di cui è fatta la barra (ma indipendente dalle dimensioni e dalla forma di questa). La dipendenza del coefficiente di conducibilità termica dalla temperatura è, per la maggior parte delle sostanze, trascurabile. L'unità SI della corrente termica è il watt (W) e l'unità SI della conducibilità termica è il $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$. Nella Tabella 16.2 sono riportati i valori del coefficiente di conducibilità termica per alcuni materiali di uso comune.

Coefficiente di conducibilità termica.

Tabella 16.2 Coefficienti di conducibilità termica di alcune sostanze e valori *R* di alcuni materiali

Sostanza	<i>k, W m⁻¹ K⁻¹</i>	Materiale	valore <i>R</i> , °F ft ² h Btu ⁻¹ *
Alluminio	237	Listelli di cartonfondo bitumato	0.44
Rame	401	Pannello ingessato, 1/2 pollice	0.45
Calcestruzzo	0.9-1.3	Compensato, 3/4 di pollice	0.9
Legno	0.05-0.36	Rivestimento laterizio	0.6-1.3
Pannello in lana di vetro	0.04	Pannello in polistirolo, 3/4 poll.	6.3
Aria	0.02	Lana di vetro in rotoli, 3.5 poll.	11
Polistirolo	0.01		

* I valori *R* riportati nella Tabella possono essere convertiti nell'unità SI ($\text{m}^2 \text{K/W}$) semplicemente moltiplicandoli per il fattore 0.175.

Una sostanza con alti valori di conducibilità termica viene detta "buon" conduttore del calore e può essere utilizzata per approssimare una parete diatermica. In generale i metalli sono buoni conduttori del calore; tra di essi, il rame è uno dei migliori. Viceversa, una sostanza con un piccolo valore della conducibilità termica è un cattivo conduttore del calore e un buon isolante. Uno spesso strato isolante approssima una parete adiabatica. Il polistirolo espanso è un eccellente isolante (al di sotto del suo punto di fusione, naturalmente).

L'Equazione (16.9) può essere generalizzata in modo che descriva la conduzione del calore in condizioni non stazionarie e in differenti configurazioni geometriche. In un punto di un mezzo caratterizzato dalla conducibilità termica *k*, *C* rappresenti la corrente termica istantanea che attraversa un piccolo elemento di area *A*. Se *x* è una coordinata perpendicolare al piano di tale area, e se la temperatura varia con questa coordinata, allora dT/dx è il *gradiente termico* in quel punto. Queste grandezze sono correlate dall'equazione

$$C = -kA \frac{dT}{dx} \quad (16.10)$$

Il gradiente termico $\frac{dT}{dx}$ altro non è che la componente lungo *x* (direzione di flusso del calore) del gradiente della temperatura, cioè $\frac{dT}{dx} = \text{grad}_x T \equiv \nabla_x T$.

Un buon conduttore del calore ha una conducibilità termica elevata; un buon isolante ha una piccola conducibilità termica.

Gradiente termico.

Equazione della conduzione del calore.

Il segno meno che compare nell'Equazione (16.10) corrisponde al fatto che il fluisce dai punti a temperatura maggiore a quelli a temperatura minore. Quindi temperatura diminuisce nella direzione in cui x cresce, $-dT/dx$ è positiva e il fluisce nella direzione x positiva.

Esempio 16.5

Si stimi la corrente termica che attraversa l'isolamento in polistirolo presente nelle pareti di un frigorifero da cucina. Quanto calore fluisce attraverso queste pareti in un'ora?

Soluzione

L'area totale delle pareti di un frigorifero è di circa 4 m^2 e la differenza di temperatura tra l'esterno e l'interno è approssimativamente $25^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C} = 20^\circ\text{C}$. Supponiamo che lo spessore del polistirolo sia di 30 mm. Ricavando il valore del coefficiente di conducibilità termica del polistirolo dalla Tabella 16.2, si ottiene dall'Equazione (16.9),

$$C = \frac{(0.01 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1})(4 \text{ m}^2)(20^\circ\text{C})}{0.03 \text{ m}} = 30 \text{ W}$$

In un'ora la quantità di calore trasmessa sarebbe

$$Q = Ct = (30 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 100 \text{ kJ}$$

Esempio 16.6

Calcolare il gradiente termico presente nell'isolamento di polistirolo dell'Esempio 16.5.

Soluzione

Scegliamo l'asse x positivo perpendicolare a una delle pareti e diretto dall'esterno del frigorifero verso l'interno. Il profilo di temperatura per questo flusso di calore in regime stazionario è rappresentato dalla linea (iii) della Figura 16.10. Il gradiente termico è la pendenza di tale segmento di retta:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{-20^\circ\text{C}}{0.03 \text{ m}} = -700^\circ\text{C m}^{-1}$$

Siccome $dT/dx < 0$, la corrente termica fluisce nella direzione x positiva, ossia verso l'interno del frigorifero.

Nell'industria delle costruzioni le proprietà isolanti dei materiali in condizioni di calore a regime stazionario vengono talvolta espresse mediante il cosiddetto "valore R ". Applichiamo l'Equazione (16.9) a una lastra di spessore $\Delta x = L$ con una differenza (positiva) di temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$ tra le due facce:

$$C = \frac{kA \Delta T}{\Delta x}$$

Ricaviamo la differenza di temperatura ΔT in termini della corrente termica per unità di area C/A :

$$\Delta T = \frac{C}{A} \frac{\Delta x}{k}$$

Il valore R è definito come $\Delta x/k$, e l'equazione data sopra diventa²

$$\Delta T = \frac{C}{A} R \quad (16)$$

In un sistema di unità in uso nell'industria statunitense delle costruzioni, l'unità di misura della quantità di calore è la Btu (British thermal unit) e $1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J}$; l'unità di area è il piede quadrato (ft^2); l'unità di tempo è l'ora (h); l'unità di lunghezza (per i spessori) è il pollice; e la differenza di temperatura viene espressa in $^\circ\text{F}$. L'unità di

² Con il simbolo R viene sovente indicata anche la resistenza termica, pari a $\frac{\Delta x}{k A}$ e, quindi eguale al *lore R per unità di superficie*. L'inverso della resistenza termica è chiamato *conduttanza termica*. L'introduzione della resistenza termica consente una facile analogia (del tutto formale) tra flusso termico e flusso elettrico.

sura del valore R , che sia esplicitamente indicata o sottintesa, è $^{\circ}\text{F ft}^2 \text{ h Btu}^{-1}$. Per esempio, se un rotolo di isolante in lana di vetro porta stampato "R 11", significa che il relativo valore R è $11 \text{ }^{\circ}\text{F ft}^2 \text{ h Btu}^{-1}$. Spesso, nel citare un valore di R , ci atterremo alla convenzione di omettere questa poco pratica unità di misura. Nel SI l'unità di R è $\text{W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$. Nella Tabella 16.2 sono riportati i valori di R per alcuni materiali da costruzione.

L'Equazione (16.11) e il valore R risultano particolarmente utili nella determinazione della conduzione termica attraverso strutture stratificate di diversi materiali, quali le pareti o le pavimentazioni. In condizioni di regime stazionario, la corrente termica per unità di area è la stessa in tutto lo spessore (perché?), la differenza di temperatura tra le due facce della struttura composta è pari alla somma delle differenze di temperatura tra le facce dei singoli strati, e il valore R efficace della struttura composta è semplicemente la somma dei valori R dei vari strati.

Il valore R per una struttura a strati è pari alla somma dei valori R relativi ai singoli strati.

Esempio 16.7

Una parete è formata da un pannello ingessato dello spessore di 1/2 pollice, da uno strato isolante di lana di vetro spesso $3\frac{1}{2}$ pollici, e da uno strato di compensato spesso 3/4 di pollice. (a) Determinare il valore R efficace della parete composta. Se la temperatura interna è di $70 \text{ }^{\circ}\text{F}$ e quella esterna di $10 \text{ }^{\circ}\text{F}$, calcolare (b) la corrente termica che attraversa la parete per unità di area e (c) la distribuzione della temperatura nella parete.

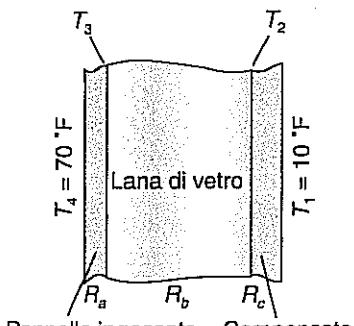
Soluzione

(a) Nella Figura 16.11a è rappresentata la parete composta in sezione trasversale, e sono indicate le temperature alle interfacce tra gli strati. Applicando l'Equazione (16.11) a ciascuno strato, si ha

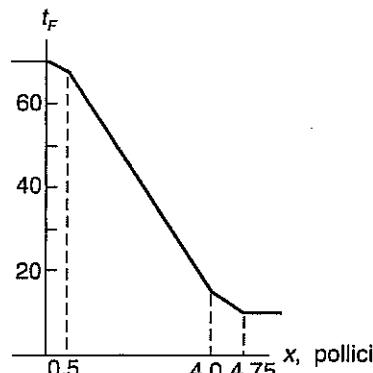
$$T_2 - T_1 = \frac{C}{A} R_c$$

$$T_3 - T_2 = \frac{C}{A} R_b$$

$$T_4 - T_3 = \frac{C}{A} R_a$$



(a)



(b)

La corrente termica per unità di area (C/A) è la stessa in tutti gli strati in condizioni di regime stazionario, e non si hanno guadagni né perdite di energia in nessuno strato. Sommando membro a membro queste tre equazioni si ha

$$T_4 - T_1 = \frac{C}{A} (R_a + R_b + R_c) = \frac{C}{A} R_{\text{eff}}$$

Quindi R_{eff} , il valore efficace di R , è la somma dei singoli fattori R . Dalla Tabella 16.2, si ha

$$R_{\text{eff}} = 0.45 + 11 + 0.95 = 12.4 \text{ }^{\circ}\text{F h ft}^2 \text{ Btu}^{-1}$$

(b) Utilizzando questo valore, è possibile calcolare la corrente termica per unità di area:

$$\frac{C}{A} = \frac{T_4 - T_1}{R_{\text{eff}}} = 4.8 \text{ Btu h}^{-1} \text{ ft}^{-2}$$

(c) Ora è possibile determinare, in base alle prime due equazioni scritte sopra, i valori delle temperature T_2 e T_3 :

$$T_2 = T_1 + \frac{C}{A} R_c = 10 \text{ }^{\circ}\text{F} + (4.8)(0.95) \text{ }^{\circ}\text{F} = 15 \text{ }^{\circ}\text{F}$$

Figura 16.11
Esempio 16.7: (a) Sezione trasversale di una parete composta di tre strati: 1/2 pollice di pannello ingessato, 3 pollici e 1/2 di lana di vetro in rotoli, e 3/4 di pollice di compensato.
(b) Il profilo di temperatura per la parete. La principale caduta di temperatura si ha nell'isolamento di lana di vetro.

In modo analogo si può determinare T_3 , che risulta pari a 68 °F. La Figura 16.11b mostra di temperatura. Si noti che la principale caduta di temperatura si verifica tra le due facce de isolante di lana di vetro, il componente con il valore R più elevato.

Correnti di convezione.

I corpi emettono energia dalla loro superficie.

La legge di Stefan-Boltzmann.

La costante di Stefan-Boltzmann.

Convezione e irraggiamento. Nella convezione il calore viene trasferito da mento macroscopico della materia, movimento che ha la forma di correnti di convezione. Queste correnti possono verificarsi spontaneamente nei fluidi la cui densità varia con la temperatura. Nell'atmosfera, per esempio, a causa del campo gravitazionale della Terra, si generano correnti di convezione quando aria di temperatura più elevata (e di minore densità) sale e aria di temperatura più bassa (e di densità maggiore) scende. La convezione forzata viene prodotta ricorrendo ai compressori. I calcoli del flusso di calore dovuto alla convezione sono complessi e non verranno trattati in questa sezione.

L'irraggiamento è il terzo meccanismo di trasmissione del calore. In certe situazioni può essere il meccanismo dominante. Tutti i corpi emettono energia dalla loro superficie. Parte di questa energia raggiante è facilmente visibile se la superficie ha una temperatura abbastanza elevata (come nel caso di un tizzone acceso); ma anche a temperature molto inferiori una superficie emette energia, benché soltanto una frazione significativa sia visibile. Si può avvertire, per esempio, la radiazione proveniente da un forno acceso.

Una superficie alla temperatura T (della scala Kelvin) emette energia raggiante che misura proporzionale alla sua area A e alla quarta potenza della temperatura T . L'espressione della potenza irradiata P è chiamata *legge di Stefan-Boltzmann*:

$$P = \epsilon\sigma AT^4 \quad (1)$$

dove ϵ è il *coefficiente di emissione*, che caratterizza le proprietà di emissione della particolare superficie ($0 \leq \epsilon \leq 1$) e σ è la *costante di Stefan-Boltzmann*, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$, che è uguale per tutti i corpi.

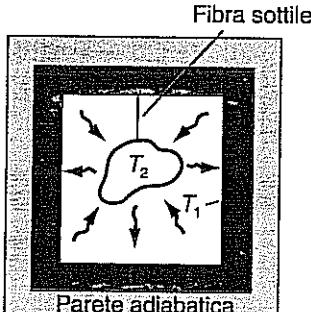
Le superfici assorbono la radiazione oltre a emetterla. Consideriamo un corpo di temperatura T_2 circondato da pareti a temperatura T_1 , come mostra la Figura 16.12. L'esperimento dimostra che le temperature dopo qualche tempo diventano uguali. Allora alla temperatura di equilibrio la superficie del corpo racchiuso e quella delle pareti circostanti devono entrambe emettere e assorbire energia nella stessa misura, in modo che si mantenga l'equilibrio termico. Vale a dire che la superficie del corpo racchiuso alla temperatura T deve emettere e assorbire energia nella medesima misura. Una superficie che ha buone proprietà di assorbimento è anche un buon emettitore ($\epsilon \approx 1$) mentre una superficie che assorbe poco (ma riflette molto) emette anche poco ($\epsilon \approx 0$).

Supponiamo che il corpo racchiuso nella cavità sia mantenuto a una temperatura superiore a quella delle pareti circostanti: $T_2 > T_1$. Allora la potenza che esso emette è maggiore della potenza che assorbe, e la potenza termica trasferita (o corrente termica) C è data da

$$C = \epsilon\sigma A(T_2^4 - T_1^4) \quad (1)$$

Dal momento che i contributi alla corrente termica dipendono dalla quarta potenza della temperatura, l'effetto può essere importante a temperature elevate e per grandi differenze di temperatura.

Figura 16.12
Un corpo isolato alla temperatura T_2 è circondato da pareti alla temperatura T_1 . Entrambe le superfici assorbono ed emettono energia.



Esempio 16.8

Calcolare la potenza termica trasferita dal capo scoperto di un uomo calvo (a 37°C) all'ambiente (a) 20°C e (b) a -40°C .

Soluzione

Approssimiamo la testa con una sfera di raggio $a = 120\text{ mm}$ e coefficiente di emissione $e = 1$. Poiché $0 \leq e \leq 1$, stiamo ipotizzando che la pelle sia un eccellente emettitore e assorbitore. L'area della superficie emittente è allora $A = 4\pi a^2 = 0.2\text{ m}^2$. La temperatura deve essere espressa nella scala Kelvin. L'Equazione (16.13) fornisce

$$C = (1)(5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4})(0.2 \text{ m}^2) [(310 \text{ K})^4 - T_1^4]$$

(a) Con $T_1 = 293\text{ K}$, si ottiene

$$C = (1 \times 10^{-8} \text{ W K}^{-4}) [(310 \text{ K})^4 - (293 \text{ K})^4] = 20 \text{ W}$$

(b) Per $T_1 = 233\text{ K}$, un calcolo analogo fornisce

$$C = 60 \text{ W}$$

Esempio 16.9

Il raggio del Sole è $7 \times 10^8\text{ m}$, la temperatura della sua superficie è di 6000 K e il suo coefficiente di emissione è prossimo a 1. (a) Calcolare la potenza irradiata dalla superficie solare. (b) Ammettendo che l'energia irradiata si propaghi in modo uniforme in tutte le direzioni e che quantità uguali di energia attraversino in uguali intervalli di tempo sfere concentriche di raggi diversi, calcolare la potenza irradiata per unità di area alla distanza della Terra dal Sole ($1.5 \times 10^{11}\text{ m}$).

Soluzione

(a) La potenza irradiata dal Sole in tutto lo spazio si calcola mediante la legge di Stefan-Boltzmann $P = eA\sigma T^4$; supponendo che il coefficiente di emissione e sia uguale a uno ed essendo $4\pi R^2$ la superficie del Sole si ottiene

$$P = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 4\pi (7 \times 10^8 \text{ m}) (6.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}) (6000 \text{ K})^4 = 4.5 \times 10^{26} \text{ W.}$$

(b) Tale potenza è emessa uniformemente in tutte le direzioni e, quindi, è distribuita uniformemente sulla superficie di ogni sfera che abbia centro nel Sole. Se si considera la superficie della sfera di raggio uguale alla distanza Sole-Terra, allora la potenza irradiata per unità di area alla distanza della Terra dal Sole, cioè la quantità di energia per unità di tempo e per unità di area che arriva sulla Terra, sarà

$$I = \frac{P}{\text{Area}} = \frac{4.5 \times 10^{26}}{4\pi (1.5 \times 10^{11})^2} = 1600 \text{ W m}^{-2}$$

RIEPILOGO

Paragrafo 16.2 Descrizione microscopica e macroscopica

La descrizione macroscopica di un sistema utilizza variabili di stato termodinamiche quali la pressione, il volume e la temperatura.

Paragrafo 16.3 L'equilibrio termico e il principio zero della termodinamica

Due sistemi a contatto sono in equilibrio termico quando le loro proprietà rimangono costanti. Il principio zero della termodinamica afferma che due sistemi in equilibrio termico con un terzo sistema sono in equilibrio termico tra loro. Se due sistemi sono in equilibrio termico, hanno la stessa temperatura.

Paragrafo 16.4 I termometri e la scala della temperatura del gas perfetto

La temperatura del gas perfetto è definita tramite un procedimento di passaggio al limite che utilizza gas reali rarefatti in termometri a gas a volume costante. La scala viene fissata assegnando al punto triplo dell'acqua la temperatura di 273.16 K .

Paragrafo 16.5 Altre scale termometriche

Le temperature possono essere espresse in diverse scale. La relazione tra la scala Celsius e la scala Kelvin è

$$T = T - 273.15 \text{ K}$$

Paragrafo 16.6 La dilatazione termica

La lunghezza L_0 di un corpo, in seguito a una variazione della temperatura ΔT , varia di una quantità

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad (16.7)$$

Le variazioni del volume sono descritte dalla

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad (16.8)$$

Paragrafo 16.7 La trasmissione del calore

Il calore Q è definito come energia trasferita tra un sistema e il suo ambiente esclusivamente a causa di una differenza di temperatura tra il sistema e ciò che lo circonda. La conduzione è uno dei meccanismi di trasmissione del calore ed è descritta dall'equazione della conduzione del calore:

$$C = -kA \frac{dT}{dx} \quad (16.10)$$

La convezione è un meccanismo di trasmissione del calore nel quale sono presenti correnti convettive macroscopiche. Quanto al calore trasferito per irraggiamento, la potenza irradiata da una superficie è data dalla legge di Stefan-Boltzmann

$$P = e\sigma AT^4 \quad (16.12)$$

QUESITI

- 16.1** Descrivi alcune situazioni che si verificano in una normale cucina nelle quali è desiderabile usare (a) una parete adiabatica e (b) una parete diatermica.
- 16.2** Sia i liquidi sia i gas sono fluidi: in che cosa differiscono? In che cosa sono simili?
- 16.3** La pressione è una variabile di stato per un liquido? E per un solido? Spiega.
- 16.4** Qual è la massa di 1 mol di idrogeno biamericico H_2 ? Quante molecole ci sono in essa? Quanti atomi? Rispondi a queste stesse domande per He e per CO_2 .
- 16.5** In un termometro a gas a volume costante la pressione aumenta all'aumentare della temperatura. Come varia con la temperatura il volume in un termometro a gas a pressione costante?
- 16.6** Se al crescere della temperatura si dilatano sia il vetro che il mercurio, come mai un termometro a mercurio in capillare di vetro può funzionare?
- 16.7** Quali difficoltà si incontrano nel misurare temperature molto basse con un termometro a gas a volume costante? E per quanto riguarda le temperature molto elevate?
- 16.8** Supponiamo che alla temperatura del punto triplo venga assegnato un valore tondo come 300. Quali cambiamenti si verificherebbero nella scala della temperatura del gas perfetto? Spiega i vantaggi che derivano dalla scelta del valore 273.16 K per la temperatura del punto triplo.
- 16.9** Se due sistemi sono in equilibrio termico, hanno la stessa temperatura. È vero l'inverso? Cioè, se due sistemi hanno la stessa temperatura, sono in equilibrio termico? Che cosa si può dire di due sistemi che hanno temperature diverse?
- 16.10** È possibile che l'acqua contenuta in un recipiente congeli e bolla nello stesso momento? Spiega.
- 16.11** Il diametro esterno di una sfera di alluminio cava aumenta all'aumentare della temperatura. Che cosa accade al diametro interno? Spiega.
- 16.12** Descrivi come varia con la profondità la temperatura dell'acqua di un lago (a) d'estate e (b) d'inverno.
- 16.13** La pressione, il volume e la temperatura sono variabili di stato per un sistema termodinamico. La quantità di calore è una variabile di stato? Spiega.
- 16.14** In pratica c'è sempre una differenza di temperatura tra un sistema e qualche parte, per quanto lontana, dell'ambiente. Ci deve sempre essere qualche trasferimento di calore a causa di questa differenza di temperatura. Spiega.
- 16.15** Supponi che un'asta di legno e una di metallo si trovino entrambe a temperatura ambiente. Quale sembra più fredda al tatto e perché?
- 16.16** Spiega perché un bollitore di rame per il tè di solito è dotato di un manico di legno.
- 16.17** Qual è l'unità SI del valore R ?
- 16.18** Quali sono i meccanismi di trasmissione del calore significativi in una finestra a vetri semplici? E in una finestra a doppi vetri?
- 16.19** Il vetro ha una conducibilità termica relativamente elevata. Spiega le buone proprietà di isolamento della vetrata in pannelli o in rotoli.
- 16.20** Un thermos è un recipiente con una doppia parete, cui intercapedine viene fatto il vuoto. Qual è il vantaggio di questa configurazione?
- 16.21** Perché le pareti di un thermos sono argenteate, cioè altamente riflettenti?
- 16.22** Perché le notti di cielo sereno di solito sono, a parità di stagione, più fredde delle notti in cui il cielo è coperto?
- 16.23** Completare la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
p			
V			
n			
T			K
t_c			
α			
β			
Q		Scalare	
C			
k			
R			
σ			

ESERCIZI

Paragrafo 16.2

Descrizione microscopica e macroscopica

- 16.1** Supponiamo che i valori istantanei della posizione e della velocità di una molecola di un sistema possano essere determinati applicando al sistema le leggi di Newton, e che, con un calcolatore superveloce, il tempo di calcolo

per molecola sia 1 ns. Si esprima in anni il tempo che sarebbe necessario per calcolare le posizioni e le velocità di tutte le molecole (10^{23}) di quel sistema.

- 16.2** 2.4 mol di He gassoso occupano un volume di 82 l ($= 10^{-3} \text{ m}^3$). (a) Qual è la massa del gas? (b) Quaranta molecole ci sono nel sistema? (c) Si ottiene la distanza

media tra le molecole e la si confronti con le dimensioni di un atomo di elio (circa 50 pm).

- 16.3 Una mole di un gas a temperatura e pressione ordinarie ($T = 273 \text{ K}$ e $p = 101 \text{ kPa}$) occupa un volume di 22.5 l. Supponiamo che il recipiente sia di forma cubica.
 (a) Determinare la lunghezza dello spigolo del cubo.
 (b) Quale forza viene esercitata dal gas su ciascuna faccia del recipiente?

Paragrafo 16.4 I termometri e la scala della temperatura del gas perfetto

- 16.4 Supponiamo che il gas dell'Esercizio 16.3 raggiunga l'equilibrio termico con dell'acqua al punto normale di ebollizione. Se il volume viene mantenuto fisso a 22.5 l,
 (a) qual è la pressione del gas e (b) quale forza esercita il gas su ciascuna faccia del recipiente?

- 16.5 L'elio gassoso in un termometro a volume costante è alla pressione di 1439 Pa quando si trova in equilibrio termico con dell'acqua al punto triplo. (a) Qual è la pressione di questo gas quando si trova in equilibrio termico con dello zinco al proprio punto normale di fusione (693 K)? (b) La pressione del gas è di 406 Pa quando esso è in equilibrio termico con un liquido al proprio punto normale di ebollizione. Qual è la temperatura di questo punto di ebollizione?

- 16.6 Quattro termometri a gas a volume costante vengono usati per misurare la temperatura del punto normale di fusione dello zinco. Ciascuno di essi contiene una diversa quantità dello stesso gas, e queste quantità di gas hanno pressioni diverse in corrispondenza del punto triplo dell'acqua, come mostra la Tabella riportata qui sotto. Nella Tabella sono riportati anche i valori della pressione all'equilibrio termico con lo zinco al punto di fusione. In base a questi dati, costruire un grafico analogo a quello della Figura 16.5 ed effettuare l'estrapolazione in modo da determinare la temperatura del gas perfetto corrispondente al punto normale di fusione dello zinco.

Termometro	1	2	3	4
p_3, kPa	217.12	123.01	84.09	49.83
p, kPa	551.01	312.08	213.31	126.39

- 16.7 La pressione del gas in un termometro a gas a volume costante è di 24.5 mmHg quando lo strumento è in equilibrio termico con dell'acqua al punto normale di ebollizione. Qual è la pressione (in mmHg) quando il gas è in equilibrio termico con dell'acqua (a) al punto triplo, (b) al punto normale di fusione, (c) a 37°C ?

- 16.8 Le temperature possono essere determinate utilizzando un termometro a resistenza nel quale si misura appunto la resistenza elettrica. Supponiamo che la temperatura del termometro sia proporzionale alla sua resistenza. [L'unità di misura della resistenza è l'ohm (Ω), definito nel secondo volume.] Il termometro viene tarato misurandone la resistenza, che risulta pari a 100.000Ω al punto triplo dell'acqua e 104.783Ω al punto normale di ebollizione dell'acqua. Qual è la temperatura segnata da questo termometro quando la resistenza è (a) 102.445Ω ? (b) 98.729Ω ? (c) Qual è la resistenza al punto normale di fusione dell'acqua?

- 16.9 La lunghezza della colonna di mercurio nel capillare di vetro di un termometro è 43 mm quando lo strumento è in equilibrio termico con la parte inferiore della lingua di una persona sana (37°C). Nel caso di una persona con la febbre (39°C), la lunghezza è 67 mm. Qual è la temperatura di un bagno tiepido nel quale la lunghezza della colonna di mercurio è 16 mm? Esplicita tutte le ipotesi di cui ti servi.

Paragrafo 16.5 Altre scale termometriche

- 16.10 Si esprima la temperatura corporea normale di 37°C
 (a) sulla scala Fahrenheit, (b) sulla scala Kelvin, (c) sulla scala Rankine.
- 16.11 A quale temperatura (ammesso che ve ne siano) coincidono le letture (a) sulla scala Celsius e quella Fahrenheit, (b) sulla scala Kelvin e quella Fahrenheit, (c) sulla scala Kelvin e quella Rankine, (d) sulla scala Kelvin e quella Celsius
- 16.12 Il punto normale di ebollizione dell'elio è a 4.2 K ; una gradevole temperatura ambiente è 295 K ; la superficie del Sole è a circa 6000 K ; l'interno di una stella è a circa 10 MK . Si esprimano queste temperature (a) sulla scala Celsius, (b) sulla scala Fahrenheit, (c) sulla scala Rankine.

Paragrafo 16.6 La dilatazione termica

- 16.13 Un regolo d'acciaio viene graduato a 22°C per confronto con un campione, in modo che la distanza tra le divisioni numerate sia 10.00 mm. (a) Qual è la distanza tra queste divisioni quando il regolo è a -5°C ? (b) Se si misura una lunghezza nominale di 1 m con il regolo a questa temperatura inferiore, quale errore percentuale si commette? (c) Quale errore assoluto si commette misurando una lunghezza di 100 m?
- 16.14 Una lastra di rame a 0°C ha uno spessore di 5.00 mm e un foro circolare di raggio 75.0 mm. La sua temperatura viene portata a 220°C . Determinare i valori a questa temperatura (a) dello spessore della lastra, (b) del raggio del foro, (c) della circonferenza che delimita il foro circolare, (d) dell'area del foro.
- 16.15 Un albero d'acciaio ha un diametro di 42.51 mm a 28°C e deve essere inserito in una puleggia pure d'acciaio che ha un foro del diametro di 42.50 mm a quella stessa temperatura. (a) Di quanto deve essere abbassata la temperatura dell'albero perché possa entrare nel foro? (b) Supponiamo che la temperatura dell'intera struttura venga ridotta a -5°C dopo che l'albero è stato inserito. L'albero si allenterà? Spiega.
- 16.16 Si svolga nuovamente l'Esercizio 16.15, sostituendo una puleggia d'alluminio alla puleggia d'acciaio.
- 16.17 Un pendolo semplice è costituito da un peso attaccato a un sottile filo d'acciaio in modo che la lunghezza del pendolo sia 0.2482 m a 27°C . (a) Qual è la variazione del periodo del pendolo (Paragrafo 14.5) se la sua temperatura varia di -5°C ? (b) Se questo pendolo viene usato come orologio ed è preciso a 27°C , di quanti secondi va avanti o indietro in un giorno a causa di questo cambiamento di temperatura?

- 16.18** La densità dell'alluminio è 2692 kg/m^3 a 20°C . (a) Qual è la massa di una sfera ($V = 4\pi R^3/3$) di alluminio il cui raggio R a tale temperatura è di 25.00 mm ? (b) Qual è il raggio della sfera a 100.0°C ? (c) Qual è la densità dell'alluminio a 100.0°C ?

- 16.19** Un bulbo di vetro ($\beta = 2.2 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) è completamente riempito da 176.2 ml di mercurio ($\beta = 18 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) a 0.0°C . Nel bulbo è inserito, come mostra la Figura 16.13, un tubicino di vetro con il diametro interno di 2.5 mm a 0.0°C .

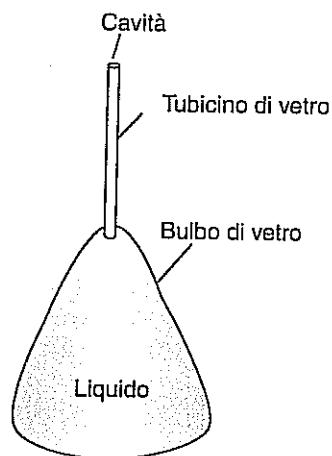


Figura 16.13 Esercizio 16.19

Di quanto sale il livello del mercurio nel tubicino se la temperatura del sistema viene elevata a 50.0°C ? La variazione del diametro del tubicino di vetro può essere trascurata. Perché?

- 16.20** Supponiamo che il bulbo di vetro dell'esercizio 16.19 venga riempito con un olio che occupa il volume di 176.2 ml a 0.0°C . A una temperatura di 8.0°C , l'olio sale nel tubicino di vetro a un'altezza di 190 mm . Calcolare il coefficiente di dilatazione cubica di questo liquido.

- 16.21** Svolgere l'Esempio 16.4 nel modo a suo tempo indicato, determinando il raggio della sfera a 0.0°C e calcolando poi il volume a tale temperatura.

- 16.22** Un oggetto di plastica con $\beta = 2 \times 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ rimane in quiete se viene lasciato libero mentre è completamente immerso in acqua a 6°C . Come si comporta lo stesso oggetto se viene lasciato libero mentre è completamente immerso in acqua alla temperatura di (a) 8°C , (b) 4°C , (c) 1°C ? Si consulti la Figura 16.8.

Paragrafo 16.7 La trasmissione del calore

- 16.23** Una pentola di alluminio contiene acqua che viene mantenuta in costante ebollizione (100°C). La superficie inferiore della pentola, che ha uno spessore di 12 mm e un'area di $1.5 \times 10^4 \text{ mm}^2$, viene mantenuta a una temperatura di 102°C da un fornello elettrico. Le altre parti della superficie della pentola sono ben isolate dall'ambiente. Determinare la corrente termica che entra nell'acqua attraverso la superficie inferiore.

- 16.24** Determinare l'unità SI di R ed esprimere in tale unità il valore R di un rotolo di isolante in lana di vetro dello spessore di 3.5 pollici (90 mm).

- 16.25** Una tavoletta di legno quadrata di lato 350 mm e spessore 15 mm conduce il calore attraverso il suo spessore in condizioni di regime stazionario. La conductività termica che attraversa la tavoletta viene misurata e rilevata a 14.3 W quando tra le due facce viene mantenuta una differenza di temperatura di 25°C . (a) Calcolare il gradiente termico nella tavoletta. (b) Determinare il coefficiente di conducibilità termica di questo legno. (c) Questo materiale sarebbe classificato come un buon conduttore del calore o come un buon isolante termico?

- 16.26** Approssimiamo lo spazio abitabile di una casa con un parallelepipedo avente pavimento e soffitto di $40 \text{ piedi} \times 40 \text{ piedi}$ per 40 piedi e pareti alte 8 piedi . Supponiamo che l'interno sia mantenuto a 70°F , mentre le superfici esterne delle pareti e del soffitto sono esposte a una temperatura costante di 10°F e la superficie esterna del pavimento è a 40°F . La struttura dei muri ha un valore efficace, $R_m = 10$; per il soffitto $R_s = 15$, e per il pavimento $R_p = 8$, sempre nelle unità di misura dell'industria statunitense delle costruzioni. Calcolare corrente termica (a) attraverso il soffitto, (b) attraverso i muri, (c) attraverso il pavimento. (d) Supponiamo che queste condizioni vengano mantenute per un periodo di 24 h . Qual è la perdita di calore verso l'esterno in tale periodo?

- 16.27** Il valore R di un materiale da costruzione viene determinato sperimentalmente costruendo una scatola di questo materiale in esame e misurando la potenza elettrica fornita a un radiatore posto all'interno della scatola, che mantiene una data temperatura. Supponiamo che una scatola di area totale 96 ft^2 sia costruita con un pannello truciolare spesso $3/4$ di pollice e che una potenza di 1 W mantenga una differenza di temperatura di 30°F tra l'interno e l'esterno. (a) Qual è la corrente termica totale che attraversa le pareti, espressa in Btu h^{-1} ? (b) Calcolare il valore R di questo pannello truciolare. (c) Esprimere in unità SI il coefficiente di conducibilità termica del truciolare.

- 16.28** Due barre di identica sezione e con valori R pari a R_1 e R_2 sono disposte in serie, cioè consecutivamente, come mostra la Figura 16.14a. Le loro superfici laterali sono isolate e le estremità opposte sono mantenute a temperature differenti. Per il caso di conduzione in regime stazionario, (a) dimostrare che la combinazione in serie ha un valore R efficace, R_{eff} dato da

$$R_{\text{eff}} = R_1 + R_2$$

- (b) Supponiamo $R_1 < R_2$; lungo quale delle due barre si ha la maggiore caduta di temperatura?

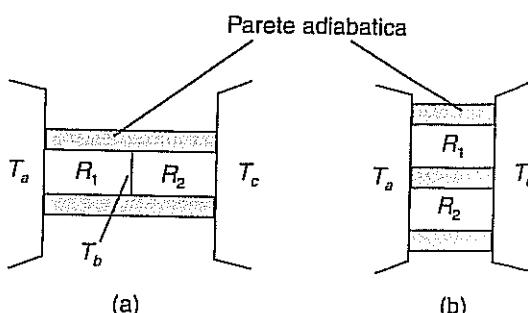


Figura 16.14 Esercizi 16.28 e 16.29

- 16.29 Supponiamo che le due barre dell'esercizio precedente siano disposte in parallelo, come nella Figura 16.14b. Dimostrare che, nel caso di conduzione in regime stazionario, la combinazione in parallelo ha un valore R efficace, R_{eff} , dato da

$$\frac{2}{R_{\text{eff}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{o} \quad R_{\text{eff}} = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Si noti che la corrente termica totale $C = C_1 + C_2$.

- 16.30 Una parete è formata da due strati: un pannello ingessato con valore $R_p = 0.45$ e un rivestimento laterizio con valore $R_l = 1.2$. Se tra le due facce c'è una differenza di temperatura di 50°F , determinare (a) la corrente termica per unità di area che attraversa la parete e (b) la temperatura all'interfaccia gesso-laterizio, nell'ipotesi che la temperatura interna sia di 70°F e quella esterna di 20°F .
- 16.31 Un tubo di legno ($k = 0.19 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) lungo 250 mm ha una sezione circolare con raggio interno $a = 10 \text{ mm}$ e raggio esterno $b = 20 \text{ mm}$. Nel tubo è inserita senza lasciare interstizi una barra cilindrica di alluminio della medesima lunghezza. Tra le due estremità di questa barra composita viene mantenuta una differenza di temperatura di 150°C , e la perdita di calore dalla superficie laterale è

trascurabile. In condizioni di regime stazionario, (a) qual è la corrente termica totale che percorre la barra composita e (b) quanta energia viene trasferita attraverso la barra in un'ora?

- 16.32 Una sfera metallica di raggio 150 mm ha una superficie con coefficiente di emissione 0.40. (a) Che potenza emette se la sua temperatura viene mantenuta a 900°C ? (b) Supponiamo che la sfera a 900°C sia in una cavità in cui è stato fatto il vuoto e le cui pareti sono mantenute a 500°C . Che potenza occorre fornire alla sfera per mantenere queste condizioni stazionarie?
- 16.33 Si confrontino le potenze irradiate per unità di area dalle superfici (a) del Sole a 6000 K , (b) della Terra a 300 K , (c) della faccia oscura della Luna a 200 K , (d) di una stella di neutroni a 3 K . Si ammetta, per semplicità, che il coefficiente di emissione di ciascuna superficie sia 1.
- 16.34 Consideriamo un corpo con coefficiente di emissione e a temperatura T_2 , il quale sia circondato da pareti a temperatura T_1 . Supponiamo che la differenza di temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$ sia piccola rispetto a T_1 . Dimostrare che $T_2^4 - T_1^4 \approx 4T_1^3 \Delta T$ e che la corrente termica netta C è

$$C = 4\sigma AT_1^3 \Delta T$$

PROBLEMI

- 16.1 Si consideri una lastra rettangolare di lunghezza L_0 e larghezza W_0 a una certa temperatura di riferimento T_0 . L'area della lastra a questa temperatura è $A_0 = L_0 W_0$. In seguito a una variazione di temperatura ΔT , ciascuna dimensione lineare varia in una misura determinata dal coefficiente di dilatazione lineare α . Si dimostri che la variazione ΔA dell'area è data da

$$\Delta A = 2\alpha A_0 \Delta T$$

dove si è trascurato il piccolo elemento di area $\Delta L \Delta W$.

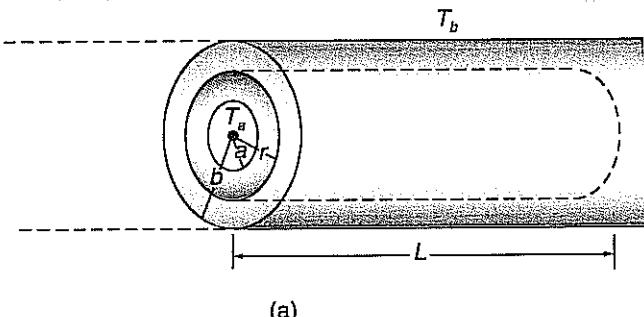
- 16.2 Un blocco a forma di parallelepipedo ha dimensioni L_0 , W_0 e T_0 e volume V_0 alla temperatura T_0 . Dimostrare che il coefficiente di dilatazione cubica $\beta = 3\alpha$. Quali approssimazioni sono state fatte? Quale sarebbe la relazione tra α e β per una sfera?

- 16.3 Applichiamo l'equazione della conduzione del calore, Equazione (16.10), al flusso radiale di calore in regime stazionario corrispondente alla configurazione a simmetria cilindrica della Figura 16.15a. Supponiamo che un lungo cilindro interno di raggio a sia mantenuto a una temperatura T_a . Intorno al cilindro interno c'è un mezzo anch'esso cilindrico di conducibilità termica k e raggio esterno b . La superficie esterna viene mantenuta a una temperatura inferiore T_b . La coordinata radiale r rappresenta la distanza di una data superficie cilindrica dall'asse, e noi consideriamo un tratto del cilindro di lunghezza L . L'area A attraverso la quale fluisce il calore è $2\pi rL$. (a) Imponendo che l'energia si conservi, si dimostri che le correnti termiche C che attraversano cilindri concentrici di raggi r_1 e r_2 hanno lo stesso valore (vedi Figura 16.15b). (b) Si dimostri che il gradiente termico a una distanza r dall'asse è dato da

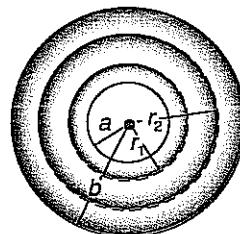
$$\frac{dT}{dr} = \frac{-C}{2\pi r L k}$$

(c) Si integri questa equazione in modo da ottenere la distribuzione della temperatura

$$T(r) = \left(\frac{c}{2\pi L K} \right) \ln r + \text{costante}$$



(a)



(b)

Figura 16.15 Problema 16.3

- (d) La costante di integrazione e il valore della corrente termica sono determinati dai valori della temperatura agli estremi. Si dimostri che

$$C = \frac{2\pi kL(T_a - T_b)}{\ln(b/a)}$$

$$T(r) = T_a + \frac{(T_b - T_a)\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$$

- 16.4** Consideriamo un mezzo racchiuso tra due sfere concentriche, l'una di raggio a a temperatura T_a , e l'altra di raggio b a temperatura T_b . Seguendo la traccia del problema precedente (ma ora r rappresenta la distanza radiale dal centro della sfera), dimostrare che

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-C}{4\pi r^2 k}$$

e che

$$C = \frac{4\pi abk(T_a - T_b)}{b - a}$$

$$T = \frac{bT_b - aT_a}{b - a} + \frac{ab(T_a - T_b)}{(b - a)r}$$

- 16.5** Un tubo metallico cilindrico di raggio esterno 12 mm convoglia vapore acqueo ad alta pressione alla temperatura di 140 °C. Attorno ad esso e a diretto contatto c'è un manicotto isolante cilindrico di raggio esterno 28 mm e di conducibilità termica $k = 0.11 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. La superficie esterna è esposta a una temperatura costante di 35 °C. Determinare (a) la corrente termica per ogni metro di lunghezza e (b) la distribuzione della temperatura nel mezzo isolante. (c) Costruire un grafico di T in funzione di r in modo da illustrare la distribuzione della temperatura. (d) Determinare il gradiente termico in un punto a 20 mm dall'asse. (Suggerimento: Si veda il Problema 16.3.)

- 16.6** Una sfera di rame radioattivo di raggio 25 mm è isolata rispetto all'ambiente che si trova a 25 °C da un rivestimento sferico di polistirolo con un raggio interno di 25 mm e uno spessore di 15 mm. Se la corrente termica che fluisce nell'ambiente (pari alla potenza fornita dai processi radioattivi) è di 600 mW, determinare (a) la temperatura della sfera di rame e (b) la distribuzione della temperatura nell'isolamento di polistirolo. (c) Rappresentare graficamente la distribuzione della temperatura. (d) Spiegare perché si può ritenere che la sfera si trovi tutta alla stessa temperatura. (Suggerimento: Si veda il Problema 16.4.)

- 16.7** Una lamina bimetallica è formata da due lame metalliche con diversi coefficienti di dilatazione lineare, α_1 e α_2 , entrambe di spessore d e lunghezza L_0 alla temperatura T_0 . Le due lame sono saldate tra loro e, in seguito a una variazione ΔT della temperatura, si curvano formando un arco circolare, come mostra la Figura 16.16. Dimostrare che il raggio di curvatura R è dato approssimativamente da

$$R = \frac{d}{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}$$

(Suggerimento: Si rappresentino con $R_1 = R - \frac{1}{2}d$ ed $R_2 = R + \frac{1}{2}d$ i raggi medi delle due lame e si egualino gli angoli sottesi da ciascuna di esse.)

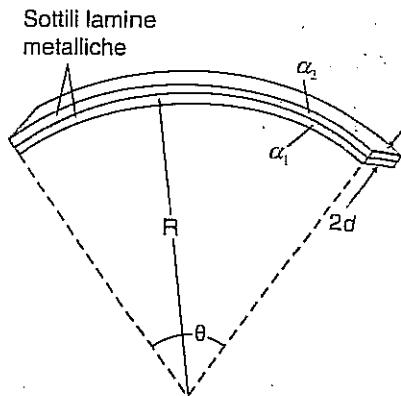


Figura 16.16 Problema 16.7

- 16.8** Un isolamento di lana di vetro a rotoli spesso 90 separa le superfici di due pareti le cui temperature sono 290 e 270 K. (a) Si determini la corrente termica unità di area (in unità SI). (b) La si confronti con corrente termica netta per unità di area che verrebbe trasferita per irraggiamento tra queste superfici se lo spazio tra le pareti fosse vuoto. Si supponga che entrambe le pareti abbiano coefficiente di emissione $\epsilon = 0.8$. (c) Si ripetano i calcoli fatti ammettendo che le temperature delle due superfici siano 490 e 470 K. Si ripetano nuovamente per il caso di due superfici a temperature di 90 e 70 K. Si ammetta che la conduttività termica e i coefficienti di emissione siano indipendenti dalla temperatura.

- 16.9** **L'equazione di Laplace.** Nel caso della conduzione del calore in regime stazionario in una dimensione, la distribuzione della temperatura $T(x)$ è data dalla soluzione dell'*equazione di Laplace* per un mezzo che non vi siano sorgenti di calore:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Questa equazione deve essere risolta [cioè integralmente] in modo da determinare $T(x)$ con la temperatura assunta negli estremi. Per $x = 0$, la temperatura è T_2 ; per $x = L$, la temperatura è T_1 . Si risolva l'equazione di Laplace per la situazione illustrata nella Figura 16.9.

- 16.10** Per configurazioni con simmetria cilindrica, l'equazione di Laplace (vedi Problema 16.9) è

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Si risolva questa equazione con le condizioni al contorno

$$T = T_a \quad \text{per } r = a$$

$$T = T_b \quad \text{per } r = b$$

Si confronti la soluzione con quella esposta nel Problema 16.3.

- 16.11** L'equazione di Laplace (si vedano i due problemi precedenti) per configurazioni con simmetria sferica è

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Si dimostri che la distribuzione della temperatura ottenuta nel Problema 16.4 è una soluzione dell'equazione di Laplace.

IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

17.1 INTRODUZIONE

Le origini della termodinamica e dei suoi principi risalgono alle invenzioni della rivoluzione industriale, e in special modo a quella della macchina a vapore. Queste invenzioni finirono per sostituire il lavoro eseguito dagli uomini e dagli animali con il lavoro meccanico eseguito dalle macchine termiche. Per ottenere lavoro meccanico da una macchina, per esempio da una macchina a vapore, occorreva bruciare del combustibile e occorreva il conseguente trasferimento di calore tra la fiamma e la sostanza che compiva il lavoro nella macchina (di solito acqua).

Fu soltanto intorno alla metà del secolo diciannovesimo che si affermò l'idea che calore e lavoro meccanico sono trasferimenti di energia e che l'energia è una grandezza che si conserva. Tra coloro che contribuirono alla graduale elaborazione di queste idee, un posto di primo piano spetta a Benjamin Thompson (1753-1814) e James Joule (1818-1889). Fu Thompson a rendersi conto dell'inadeguatezza della concezione secondo la quale il calore era un fluido, chiamato «calorico», che poteva fluire da un corpo all'altro. Basandosi sulle proprie osservazioni delle elevate temperature che si producevano nell'alesatura dei cannoni, egli propose che vi fosse una correlazione tra il calore e il lavoro compiuto dall'attrito. Joule, dal quale prende il nome l'unità SI dell'energia, determinò in una serie di esperimenti la quantità di lavoro meccanico che equivale a una data quantità di calore nell'elevare la temperatura dell'acqua. Questi furono passi cruciali in direzione della formulazione del primo principio della termodinamica.

17.2 EQUAZIONI DI STATO

Che cosa determina il valore di una variabile di stato, per esempio della pressione p di un gas? Supponiamo di introdurre una certa quantità di gas (n moli) in un recipiente di dimensioni fisse (volume V) e di mantenerla a una temperatura costante T . Sperimentalmente si constata che la pressione del gas in queste condizioni non può essere variata; fissando i valori di n , V e T si determina la pressione. Tuttavia, se si cambiano una o più delle variabili n , V e T , anche la pressione p può cambiare, raggiungendo un valore che è determinato dai nuovi valori delle altre variabili. Vale a dire che queste variabili di stato sono correlate da un'equazione matematica; tale relazione è chiamata *equazione di stato* della materia in esame. Usando l'equazione di stato, è possibile calcolare una qualunque delle variabili di stato, la pressione per esempio, a partire dai valori delle altre. L'equazione di stato di certi aggregati di materia può essere una funzione estremamente complicata delle variabili di stato. Ma la misura è in grado di chiarire l'interdipendenza di tali variabili in tutte le condizioni sperimentalmente accessibili.

L'equazione di stato di un dato sistema dipende dalla struttura della materia di cui è fatto tale sistema e si deve ricavare dagli esperimenti o da considerazioni teoriche sulla struttura microscopica del sistema. Va ricordato che, per assegnare in un dato istante un valore definito a una variabile di stato di un sistema, è necessario che tale sistema sia in equilibrio; cioè ogni stato di un sistema al quale si può assegnare un insieme di

L'equazione di stato è un'equazione che correla le variabili di stato.

valori delle variabili di stato è uno stato di equilibrio. Quindi, l'equazione di una relazione che lega le variabili di stato di un sistema per i suoi stati di equilibrio, per esempio, mantenere fissi n e T e stabilire come la pressione p di varia con il volume V .

Esperimenti di questo tipo condotti sui gas a basse densità conducono alle seguenti conclusioni:

- Per n e T fissi, p e V sono inversamente proporzionali. Quindi, se il volume raddoppia la pressione si dimezza. Questa relazione, nota da molto tempo come *legge Boyle*, può essere scritta anche come

Legge di Boyle.

$$pV = \text{costante} \quad (n, T \text{ fissi})$$

- Per n e V fissi, p e T (espressa in scala Kelvin) sono proporzionali. Questa relazione è evidente alla luce della discussione condotta nel capitolo precedente sul manometro a gas a volume costante. La relazione matematica è

$$\frac{p}{T} = \text{costante} \quad (n, V \text{ fissi})$$

- Per V e T fissi, p e n sono proporzionali. Se in un recipiente contenente del gas si immette un'ulteriore quantità di gas, la pressione aumenta in modo proporzionale.

$$\frac{p}{n} = \text{costante} \quad (V, T \text{ fissi})$$

Tutti questi risultati, insieme a quelli relativi alle variazioni delle altre coppie di variabili, sono riassunti nella relazione

$$\frac{pV}{nT} = \text{costante}$$

La costante che compare in questa espressione è sostanzialmente indipendente dalle variabili p , V , n e T purché la densità del gas sia bassa. Sperimentalmente la costante risulta avere all'incirca lo stesso valore per tutti i gas. Nel caso limite di gas infinitamente rarefatti, ovvero per il gas perfetto, la costante ha lo stesso valore per tutti i gas e prende il nome di *costante universale dei gas*, R . Il suo valore in unità SI è

$$R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Quindi le variabili di stato di un gas rarefatto reale sono correlate da un'equazione di stato identica per tutti i gas con queste caratteristiche. Essa è chiamata *equazione di stato dei gas perfetti*:

La costante universale dei gas.

L'equazione di stato dei gas perfetti.

$$pV = nRT$$

(1)

L'equazione di stato dei gas perfetti è approssimativamente valida per un gas reale, la cui pressione non sia troppo elevata e la cui temperatura non sia troppo bassa, o per un gas rarefatto. L'Equazione (17.1) può essere usata soltanto per un gas reale di questo tipo. Per gas reali a densità e pressioni più elevate una equazione di stato che meglio approssima il loro comportamento è l'equazione di stato di van der Waals. In tale equazione sono stati introdotti dei termini correttivi alla (17.1) che tengono conto del fatto che le molecole del gas interagiscono fra loro e che hanno un volume proprio non nullo. L'equazione di van der Waals è

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = nRT$$

dove a e b sono costanti che dipendono dal gas e che vengono determinate sperimentalmente.

Esempio 17.1

- (a) Qual è la pressione di $n = 0.85$ mol di He che occupano un volume V di 0.012 m^3 a una temperatura T di 273 K ? (b) Qual è il volume di questo gas alla stessa pressione ma alla temperatura $T = 580 \text{ K}$?

Soluzione

(a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti, Equazione (17.1), si ricava

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{(0.85 \text{ mol})(8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1})(273 \text{ K})}{0.012 \text{ m}^3} = 160 \text{ kPa}$$

(b) Spesso risulta conveniente formare rapporti tra le variabili di stato per ciascuno dei due stati. Denotiamo con a lo stato del gas descritto nella parte (a) e con b lo stato in esame nella parte (b). Le variabili relative ai due stati soddisfano (n rimanendo lo stesso) le relazioni

$$p_a V_a = nRT_a \quad \text{e} \quad p_b V_b = nRT_b$$

Dividendo la prima equazione per la seconda e semplificando i fattori comuni n e R , si ottiene

$$\frac{p_b V_b}{p_a V_a} = \frac{T_b}{T_a}$$

Ovvero, siccome $p_a = p_b$,

$$V_b = V_a \frac{T_a}{T_b}$$

Dal momento che qui abbiamo a che fare con dei rapporti, possiamo esprimere il volume in qualsiasi unità. Usiamo come unità più comoda il litro ($1 \text{ l} = 0.001 \text{ m}^3$). Allora

$$V_b = 12 \frac{580}{273} = 251$$



Il diagramma p - V . L'equazione di stato dei gas perfetti ci consente di determinare il valore di una delle variabili di stato di un gas in funzione delle altre. Se abbiamo a che fare con una quantità fissa di gas (n rimane invariato), due qualsiasi delle altre variabili sono sufficienti per determinare la terza. In questo caso, avendo tre variabili di stato legate fra di loro da una relazione, i gradi di libertà del sistema sono due e quindi sono sufficienti due delle tre variabili di stato per descrivere gli stati del sistema. Per rappresentare nel modo più conveniente certi tipi di informazione, spesso si scelgono p e V come variabili indipendenti; il valore di T è determinato allora dall'Equazione (17.1). In tal modo i valori di p e di V determinano lo stato del gas.

Uno stato di un sistema come un gas può essere rappresentato su un *diagramma p - V* . Nella Figura 17.1, sugli assi sono riportati i valori della pressione e del volume, cosicché un punto del piano corrisponde a valori definiti di p e V . Ogni punto nel diagramma p - V rappresenta uno stato del sistema con un determinato numero di moli n . In base ai valori di p e V è possibile calcolare la temperatura T dello stato. Quindi ad ogni punto del diagramma p - V è associato un valore della temperatura. Lo stato contrassegnato con a nella Figura 17.1, per esempio, corrisponde a una temperatura $T_a = 300 \text{ K}$.

Nel diagramma p - V c'è un insieme di stati del sistema che corrispondono alla stessa temperatura. Lo stato contrassegnato con b nella Figura 17.1 è caratterizzato da una pressione doppia e da un volume che è la metà di quello dello stato a , ma la temperatura è la stessa per i due stati. L'insieme di tutti gli stati con quel valore della temperatura forma, in un diagramma p - V , una curva chiamata *isoterma*. La curva che nella Figura 17.1 contiene i punti a e b è l'isoterma dei 300 K ; nella figura è rappresentata anche l'isoterma dei 900 K .

Un punto in un diagramma p - V rappresenta uno stato di un sistema.

Gli stati con la stessa temperatura giacciono su un'isoterma.

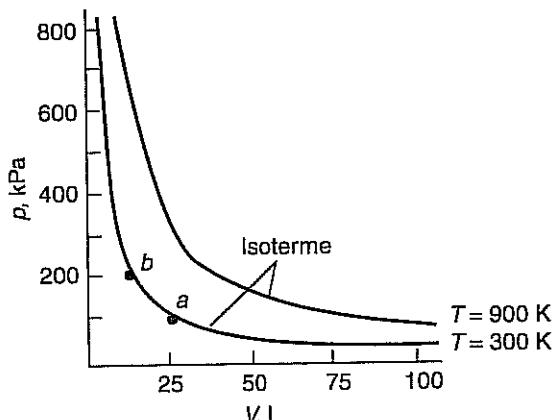


Figura 17.1

Lo stato a e lo stato b , rappresentati da dei punti in un diagramma p - V , hanno la stessa temperatura. La figura mostra le isoterme dei 300 e dei 900 K .

L'equilibrio termodinamico.

Vari tipi di trasformazioni.

In una trasformazione quasi-statica, il sistema passa attraverso una successione di stati di equilibrio.

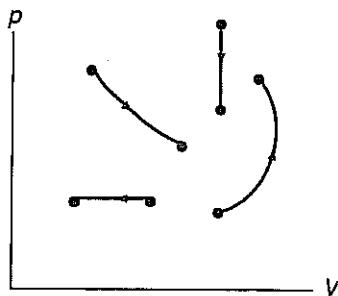


Figura 17.2
Diverse trasformazioni quasi-statiche rappresentate in un diagramma p - V .

Quando un sistema termodinamico, cioè un sistema che ha come gradi di libertà le riabili che descrivono lo stato interno del sistema, cambia il proprio stato, si dice ha compiuto una *trasformazione*.

È utile dare qui una definizione di equilibrio per i sistemi termodinamici. Si dice che un sistema è in *equilibrio termodinamico* quando è in equilibrio sia meccanico sia termico, sia chimico. Si ha *equilibrio meccanico* quando le forze che il sistema esercita verso l'esterno si equilibrano con quelle che l'ambiente esterno esercita sullo stesso. L'*equilibrio termico* l'abbiamo già definito nel capitolo precedente e, in questo caso, si avrà che tutte le parti del sistema hanno la stessa temperatura, che coincide con quella dell'ambiente circostante se è in contatto termico con il sistema. L'*equilibrio chimico* si avrà quando non vi sono reazioni che alterino la composizione relativa del sistema.

Un sistema, se è lasciato isolato per un periodo di tempo sufficientemente lungo, raggiunge uno stato di equilibrio termodinamico.

Le trasformazioni di un sistema termodinamico possono essere di vario tipo e anche importanti categorie sono: *trasformazioni fra stati di equilibrio*, cioè gli stati di partenza e di arrivo sono di equilibrio termodinamico, *trasformazioni cicliche*, in quali lo stato iniziale coincide con quello finale, *trasformazioni adiabatiche*, in quali il sistema non scambia calore con l'ambiente, *trasformazioni quasi-statiche*, cioè il sistema per evolvere da uno stato a un altro passa attraverso stati tutti di equilibrio, *trasformazioni reversibili*, cioè il sistema si sviluppa in modo tale che il sistema e l'ambiente che ha interagito con il sistema possano essere ricondotti ai rispettivi stati iniziali senza che avvengano cambiamenti in tutti gli altri sistemi dell'universo.

Un diagramma p - V permette di rappresentare le eventuali trasformazioni che lo stato del sistema assume. Di solito si considerano trasformazioni *quasi-statiche*, le quali si verificano così lentamente che il sistema può essere ritenuto in uno stato di equilibrio in ogni istante nel corso della trasformazione. In particolare, i valori di p e V sono ben definiti in ogni istante. Una trasformazione quasi-statica può essere rappresentata nel diagramma p - V da una curva corrispondente alla successione dei valori della pressione e del volume assunti dal sistema. La Figura 17.2 mostra, in un diagramma p - V , alcuni esempi di trasformazioni quasi-statiche. Si noti che ogni punto di una curva rappresentativa di una trasformazione corrisponde a un *diverso* stato del sistema. La direzione temporale di ciascuna trasformazione è indicata dalla punta delle frecce.

Non tutte le trasformazioni sono quasi-statiche: un sistema può subire trasformazioni, per esempio rapide o anche violente, nelle quali esso non passa attraverso una successione di stati di equilibrio. Trasformazioni di questo genere non possono essere rappresentate da curve nel diagramma p - V (Figura 17.3). Il sistema può partire da uno stato di equilibrio iniziale e raggiungere uno stato di equilibrio finale, rappresentati entrambi da un punto nel diagramma p - V ; ma non è possibile tracciare un curva che collega questi due stati per rappresentare una trasformazione che non sia quasi-statica.

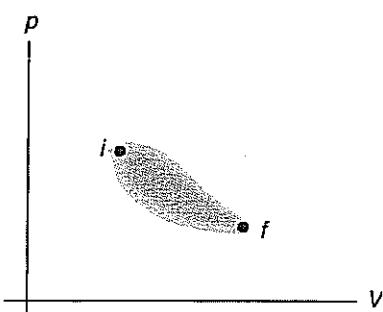


Figura 17.3 Un processo non quasi-statico. Al variare del volume del sistema da V_i a V_f , la pressione assume valori diversi in punti diversi del sistema. Il processo non può essere rappresentato nel diagramma p - V da una curva.

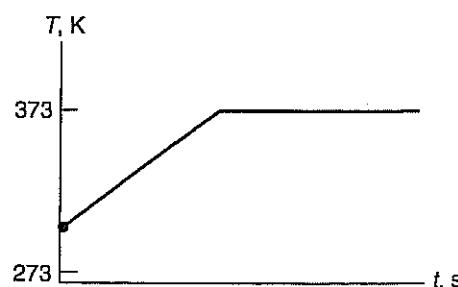


Figura 17.4 La temperatura di un campione di acqua aumenta fino al punto di ebollizione, se viene fornito del calore. Anche dopo che l'acqua ha raggiunto il punto di ebollizione continua ad essere fornito calore, ma la temperatura non varia.

17.3 CALORE SPECIFICO E CALORE LATENTE

Nel capitolo precedente abbiamo definito il calore come energia scambiata tra un sistema e il suo ambiente a causa della differenza di temperatura tra essi. Che cosa accade alla temperatura del sistema quando gli viene fornito calore dall'ambiente? La nostra esperienza quotidiana suggerisce che l'effetto può essere un aumento della temperatura del sistema.

Supponiamo, per esempio, di tenere sotto osservazione la temperatura dell'acqua in un bollitore posto sul fornello. La Figura 17.4 è un grafico che mostra in modo schematico come la temperatura dell'acqua varia con il tempo: mentre il calore viene trasferito dal fornello all'acqua, la temperatura di questa aumenta regolarmente; tuttavia, quando l'acqua raggiunge il punto di ebollizione, la sua temperatura non cambia più, anche se continua ad esserne fornito calore.

Nella prima fase del processo, il calore fornito produce una variazione della temperatura, che corrisponde a un aumento della velocità media delle molecole. Nella seconda fase, il calore fornito produce un cambiamento di fase da liquido a vapore senza far variare la temperatura. A livello molecolare, tale cambiamento di fase corrisponde a un aumento della distanza media tra le molecole e a un'attenuazione delle loro forze di interazione.

Il calore specifico. Supponiamo di misurare la variazione di temperatura ΔT subita da un sistema di massa m quando gli viene fornita una quantità di calore Q . Ammetteremo per il momento che il sistema venga mantenuto a una pressione costante e che non si verifichi alcun cambiamento di fase. Per piccole variazioni di temperatura è ragionevole attendersi che il calore fornito e la variazione di temperatura siano proporzionali, e l'esperimento conferma tale aspettativa. Inoltre, per produrre una data variazione di temperatura, la quantità di calore fornita deve essere proporzionale alla massa del sistema. Per esempio, la quantità di calore che deve essere fornita a 2 kg di acqua è doppia di quella che deve essere fornita a 1 kg di acqua per produrre la stessa variazione di temperatura. Quindi la quantità di calore ceduta a un sistema è proporzionale tanto alla massa del sistema che alla variazione di temperatura: $Q \propto m\Delta T$. Questa relazione può essere posta sotto forma di equazione introducendo una grandezza caratteristica della sostanza: il calore specifico. Si definisce come calore specifico di una sostanza il calore richiesto per incrementare di 1 K la temperatura di 1 kg di tale sostanza.

Il calore specifico a pressione costante c_p è definito, nel caso limite di variazioni infinitesime di temperatura, come

$$dQ_p = mc_p dT \quad (17.2)$$

Calore specifico a pressione costante.

In base all'Equazione (17.2), l'unità SI del calore specifico è il $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$. Si rammenti che una *variazione* di temperatura ha la medesima espressione in K come in $^{\circ}\text{C}$, per cui l'unità del calore specifico può anche essere espressa come $\text{J kg}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Nel caso descritto qui sopra abbiamo fornito calore mantenendo costante la pressione, ma il calore può venire fornito a un sistema in modo diverso, cioè facendo compiere al sistema una trasformazione diversa, per esempio a volume costante. Se si compiono trasformazioni diverse, la quantità di calore fornito al sistema per ottenere una stessa variazione di temperatura non è detto che sia la stessa. Anzi, vedremo che, in generale, la quantità di calore fornito è diversa a seconda della trasformazione e che quindi i calori specifici saranno diversi. Non si può, dunque, parlare di calore specifico se non si indica la trasformazione a cui ci si riferisce. L'indice di c_p serve a ricordare che il calore viene fornito a pressione costante.

Se invece il calore viene fornito mantenendo costante il volume, si deve introdurre il calore specifico a volume costante c_V :

$$dQ_V = mc_V dT \quad (17.3)$$

Calore specifico a volume costante.

Per molte sostanze, e in particolare per i gas, questi due calori specifici hanno valori significativamente diversi. Vale a dire che produrre la stessa variazione di temperatura in

una data quantità di una sostanza richiede una diversa quantità di calore, a seconda che questo sia fornito a pressione costante o a volume costante. In condizioni ordinarie la maggior parte dei solidi e dei liquidi, c_p e c_v sono approssimativamente uguali. Tabella 17.1 sono riportati i valori del calore specifico per alcune sostanze.

Tabella 17.1 Calori specifici e capacità termiche molari di alcune sostanze a 25 °C e a pressione atmosferica.

Sostanza	c_p		c_p J mol ⁻¹ K ⁻¹
	J kg ⁻¹ K ⁻¹	cal g ⁻¹ °C ⁻¹	
Alluminio	910	0.215	24.4
Rame	386	0.092	24.5
Ferro	447	0.107	25.0
Piombo	128	0.031	26.8
Mercurio	140	0.033	28.0
Tungsteno	136	0.032	25.0
Elio	5200	1.24	20.8
Azoto	1040	0.25	29.1
Ossigeno	920	0.22	29.4
Carbonio (diamante)	509	0.121	6.1
Acqua	4180	0.998	75.3
Ghiaccio (-10 °C)	2100	0.50	38
Alcool (etilico)	2500	0.60	91.5
Vetro (crown)	67	0.016	

Il calore specifico c_p è definito nel caso limite di variazioni infinitesime della temperatura ed è una funzione della temperatura stessa. Tuttavia, per piccole variazioni di temperatura, il calore specifico di molte sostanze può essere considerato indipendente da essa. In tali casi l'Equazione (17.2) e la (17.3) possono essere scritte come

$$Q_p = mc_p \Delta T \quad \text{e} \quad Q_v = mc_v \Delta T$$

Il calore specifico correla il calore fornito e la variazione della temperatura.

Queste equazioni correlano il calore fornito a un sistema a pressione costante (volume costante) e la conseguente variazione della temperatura. Evitiamo di utilizzare il simbolo Δ con il calore Q perché il calore è un trasferimento di energia e non una variazione di una grandezza. Viceversa, la variazione della temperatura è indicata correttamente dalla parola "variazione".

Esempio 17.2

Quanto calore occorre fornire a una padella di ferro di massa 2 kg per innalzare la sua temperatura da 120 °C?

Soluzione

In base alla Tabella 17.1 il calore specifico del ferro è $c_p = 447 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. L'Equazione (17.2) si scrive così:

$$Q = (2 \text{ kg})(447 \text{ J kg}^{-1} \text{ °C}^{-1})(120 \text{ °C}) = 100 \text{ kJ}$$

Questo risultato rappresenta la quantità di calore minima necessaria, ammettendo che non vi siano perdite verso altre parti dell'ambiente.

La capacità termica molare. Spesso, invece di specificare la massa m di una sostanza, si specifica il numero delle molte che lo costituiscono, $n = m/M$, dove M è la massa molecolare della sostanza espresso in grammi. (Nell'Appendice E è riportata una tabella periodica degli elementi.) Invece del calore specifico c_p e c_v si fa uso allora della capacità termica molare C_p e C_v definite da

$$dQ_p = nC_p dT \quad dQ_v = nC_v dT$$

Capacità termica molare.

L'unità SI della capacità termica molare è il $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$. Nella Tabella 17.1 sono riportati i valori della capacità termica molare per alcune sostanze.

Il calore specifico dell'acqua e la calorìa. La *calorìa* (cal) è un'unità di energia originariamente definita in base alle proprietà dell'acqua. Essa era definita come quantità di calore necessaria per elevare di 1°C la temperatura di 1 g d'acqua. In tal modo il calore specifico c_p dell'acqua risultava esattamente pari a $1 \text{ cal g}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. In realtà il calore specifico dell'acqua liquida dipende assai lievemente dalla temperatura tra 0 e 100°C . Oggi la calorìa è definita in termini del joule. L'equivalenza è

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J} \quad (17.6)$$

Definizione della calorìa.

La calorìa è un'unità di energia comoda da usare quando si ha a che fare con un sistema costituito di acqua liquida, poiché nell'intervallo $0\text{-}100^\circ\text{C}$ $c_p = 1.00 \text{ cal g}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ con tre cifre significative. Un'altra unità di misura del calore analoga è la Btu (*British thermal unit*). Essa fu definita in origine in modo tale che 1 Btu elevasse la temperatura di 1 lb di acqua di 1°F . L'equivalenza è $1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J}$.

Il calore latente. Alla pressione atmosferica la temperatura del punto di fusione dell'acqua (ghiaccio) è 0.00°C . Mentre il ghiaccio fonde, cambiando fase da solida a liquida, si deve fornire calore, anche se la temperatura rimane costante. Analogamente, mentre l'acqua liquida congela passando alla fase solida, si deve sottrarre calore. La quantità di calore per unità di massa che viene fornita o sottratta a una sostanza che subisce un cambiamento di fase viene detta *calore latente L*:

$$Q = mL \quad (17.7)$$

Il calore latente.

L'unità SI del calore latente è il J/kg . Il calore latente relativo al passaggio di una sostanza dalla fase solida a quella liquida e viceversa è indicato con L_f e chiamato *calore latente di fusione*. Per un cambiamento di fase liquido-vapore, si parla di *calore latente di vaporizzazione*, che viene indicato con L_v . Nella Tabella 17.2 sono riportati alcuni valori dei calori latenti di fusione e di vaporizzazione. Osserviamo infine che, oltre ai cambiamenti di fase del tipo descritto qui, vi sono altri tipi di cambiamento di fase che non comportano calore latente.

Tabella 17.2 Valori del calore latente di alcune sostanze a pressione atmosferica.

Sostanza	L_f (fusione), MJ kg^{-1}	L_v (vaporizzazione), MJ kg^{-1}
Alluminio	0.400	12.3
Rame	0.205	4.80
Ferro	0.275	6.29
Piombo	0.023	0.87
Mercurio	0.011	0.29
Tungsteno	0.192	4.35
Azoto	-	0.20
Ossigeno	-	0.21
Acqua	0.335	2.260
Alcool (etilico)	-	1.1

Esempio 17.3

Quanto calore deve essere fornito a pressione atmosferica a 0.50 kg di acqua sotto forma di ghiaccio a 0°C per convertirlo in vapore a 100°C ?

Soluzione

Vi sono tre contributi da prendere in considerazione: il calore fornito per fondere il ghiaccio, quello per innalzare la temperatura del liquido da 0 a 100°C e quello necessario per il cambiamen-

to di fase da liquido a vapore. I valori del calore specifico e dei calori latenti sono riportati nelle Tabelle 17.1 e 17.2:

$$\begin{aligned} Q &= (0.50 \text{ kg})(0.335 \text{ MJ/kg}) \\ &+ (0.50 \text{ kg})(4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}(100 \text{ }^{\circ}\text{C})) \\ &+ (0.50 \text{ kg})(2.26 \text{ MJ/kg}) \\ &= 0.17 \text{ MJ} + 1.1 \text{ MJ} = 1.5 \text{ MJ} \end{aligned}$$

Si notino i considerevoli contributi alla quantità di calore totale fornita all'acqua, che corrispondono ai cambiamenti di fase.

17.4 LAVORO E TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

Lavoro compiuto da un sistema.

Il lavoro è associato al moto dell'ambiente.

Lavoro infinitesimo compiuto da un sistema.

In una trasformazione isocora, il volume è costante e $dW = 0$.

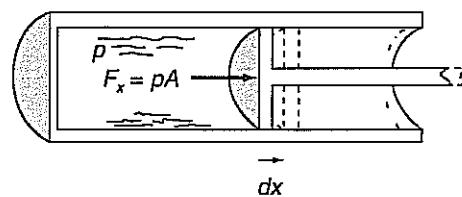
Figura 17.5
Spaccato di un cilindro con un pistone mobile. Il fluido a pressione p esercita una forza di intensità $F_x = pA$ sul pistone la cui sezione ha area A .

L'energia che viene scambiata tra un sistema e il suo ambiente a causa di una differenza di temperatura tra l'uno e l'altro è calore. Ma c'è un altro tipo di scambio di energia tra un sistema e il suo ambiente: si tratta del *lavoro*. Il lavoro è l'energia scambiata tra un sistema e il suo ambiente attraverso meccanismi indipendenti dalla differenza di temperatura esistente tra loro. L'energia può essere trasferita sotto forma di lavoro ad opera di forze elettriche e magnetiche, ma noi ci occuperemo soprattutto del lavoro meccanico compiuto dalle forze che il sistema esercita sull'ambiente. D'altronde che il lavoro è il prodotto di una forza per uno spostamento [Equazione (8)] il lavoro compiuto dal sistema è sempre associato al moto di qualche parte dell'ambiente. Si noti che consideriamo il lavoro compiuto dal sistema sul proprio ambiente non il lavoro compiuto dall'ambiente sul sistema: la nostra convenzione trae origine dall'importanza pratica del lavoro compiuto dal vapore (il sistema) sulle parti meccaniche mobili di una macchina a vapore (l'ambiente). Questo lavoro è positivo se l'energia viene trasferita dal sistema al suo ambiente.

Un semplice esempio del lavoro compiuto da un sistema è il lavoro meccanico compiuto su una parete mobile di un recipiente dalla forza dovuta alla pressione di un fluido. Supponiamo che il fluido (che costituisce il sistema) subisca un'espansione infinitesima mentre il pistone mobile (che fa parte dell'ambiente) di Figura 17.5 viene spostato di un tratto dx . Se il pistone ha una sezione di area A e la pressione del fluido è p , il fluido esercita sul pistone una forza $F_x = pA$. Il lavoro compiuto da questa forza è $F_x dx = pA dx$; ovvero, siccome $A dx$ è la variazione infinitesima dV del volume del sistema, il lavoro dW compiuto dal sistema è

$$dW = pdV \quad (1)$$

Nel caso di un'espansione, ossia di un aumento di volume ($dV > 0$), la forza esercitata dal fluido ha la stessa direzione dello spostamento, e il lavoro compiuto dal sistema è positivo ($dW > 0$). Se il volume diminuisce in seguito a una compressione ($dV < 0$) la forza esercitata dal fluido ha direzione opposta allo spostamento del pistone, e il lavoro compiuto dal sistema è negativo ($dW < 0$). Nel caso di una trasformazione isocora, ossia a volume costante ($dV = 0$), il lavoro compiuto è nullo; nessuna parte dell'ambiente si muove, e il sistema non compie lavoro meccanico ($dW = 0$).



Nel caso di una trasformazione finita nella quale il volume varia in modo quasi-statico da V_i a V_f , per determinare il lavoro compiuto si deve integrare l'Equazione (17.8):

$$W_{if} = \int_{V_i}^{V_f} p dV \quad (1)$$

Per calcolare l'integrale, occorre sapere come la pressione varia con il volume durante il processo. Come semplice esempio, consideriamo una trasformazione *isobara*, ossia a pressione costante, nella quale la pressione viene mantenuta uguale al suo valore iniziale p_i . L'integrazione è immediata poiché la pressione è costante:

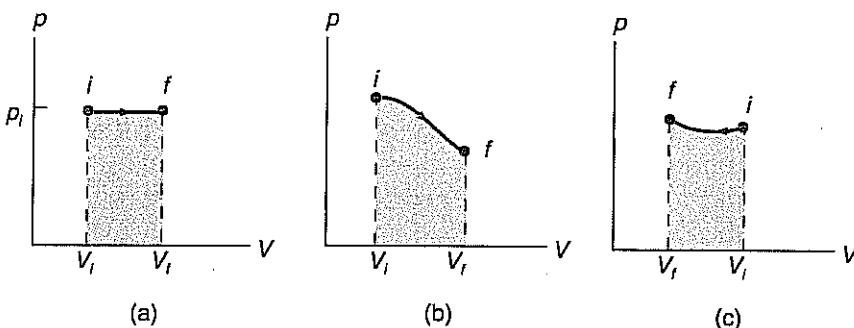
$$W_{if} = p_i \int_{V_i}^{V_f} dV = p_i(V_f - V_i)$$

Ossia, ponendo $\Delta V = V_f - V_i$,

$$W_{if} = p_i \Delta V \quad (17.10)$$

Questa trasformazione isobara è rappresentata nel diagramma p - V di Figura 17.6a. Il lavoro compiuto dal sistema è pari all'area che sta sotto la curva rappresentativa della trasformazione, come indicato. Per l'espansione illustrata nella figura, la variazione del volume ΔV è positiva, e quindi anche il lavoro compiuto dal sistema è positivo. Per una compressione, la variazione del volume sarebbe negativa, e di conseguenza il lavoro compiuto dal sistema sarebbe negativo.

L'interpretazione grafica dell'integrale, secondo cui il lavoro è dato dall'area sotto la curva, può essere applicata a qualunque trasformazione quasi-statica rappresentata in un diagramma p - V . Il lavoro compiuto dal sistema durante la trasformazione mostrata nella Figura 17.6b è pari all'area ombreggiata sotto la curva. Nel caso di un'espansione l'area è positiva. Nel caso di una compressione, ossia di una diminuzione del volume, come quella illustrata nella Figura 17.6c, l'area sarebbe negativa e ciò corrisponderebbe a un valore negativo del lavoro.



La Figura 17.7 rappresenta una trasformazione *isoterma*, ossia a temperatura costante, per un gas perfetto. Nel diagramma p - V è riportata come riferimento l'isoterma corrispondente alla temperatura T , e il gas si espanderà da un volume iniziale V_i a un volume finale V_f mentre la temperatura è fissa. Una trasformazione isoterma come questa può essere effettuata facendo in modo che il sistema rimanga in contatto termico con un ambiente mantenuto alla temperatura desiderata. Per esempio, un cilindro metallico contenente un gas può essere immerso, durante l'espansione, in un bagno fluido a temperatura leggermente superiore a T : il calore passa dal bagno al gas per conduzione attraverso le pareti del cilindro, di modo che la temperatura del gas rimane costante.

Per calcolare il lavoro compiuto dal gas durante l'espansione, lavoro che è pari all'area sottostante alla curva nel diagramma p - V , si usa l'equazione di stato dei gas perfetti, Equazione (17.1): $pV = nRT$. Se ne ricava la pressione in funzione del volume (T è costante per una trasformazione isoterma) e si sostituisce tale espressione nell'Equazione (17.9):

$$W_{if} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT(\ln V_f - \ln V_i)$$

Dal momento che $\ln V_f - \ln V_i = \ln(V_f/V_i)$, si ha

$$W_{if} = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad (17.11)$$

Se $V_f > V_i$, allora $\ln(V_f/V_i) > 0$ e il lavoro è positivo. Ma se $V_f < V_i$, $\ln(V_f/V_i) < 0$ e W_{if} è negativo.

In una trasformazione isobara, la pressione è costante e $W_{if} = p_i \Delta V$.

Figura 17.6

(a) Il lavoro compiuto dal sistema in una trasformazione isobara è $p_i(V_f - V_i)$: esso è rappresentato dall'area del rettangolo. (b) Il lavoro eseguito dal sistema in una trasformazione quasi-statica è pari all'area sottostante alla curva. (c) Per una compressione l'area, ossia il lavoro compiuto dal sistema, è negativa.

In una trasformazione isoterma, la temperatura è costante.

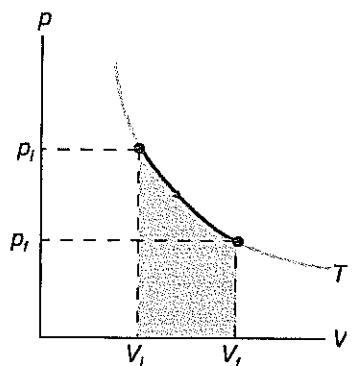


Figura 17.7

Un'espansione isoterma per un gas perfetto.

Lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione isoterma.

Lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione adiabatica.

Un'altra trasformazione per la quale il lavoro può essere calcolato senza una trasformazione adiabatica di un gas perfetto. (Su questa trasformazione i più volte nei prossimi due capitoli.) Per una trasformazione adiabatica (nel sistema non scambia calore con l'ambiente), c'è una relazione tra la pressione e il volume che dipende da un parametro γ , dove $\gamma = C_p/C_V$ per il gas perfetto. del lavoro compiuto da un gas perfetto in una trasformazione adiabatica viene nell'Esercizio 17.22, cui rinviamo il lettore.

Citiamo qui il risultato per comodità:

$$W = \frac{p_i V_i}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} \right]$$

dove p_i e V_i sono la pressione e il volume dello stato iniziale e V_f è il volume finale del gas.

Esempio 17.4

In un cilindro dotato di un pistone mobile a tenuta è contenuto elio gassoso a 310 K. Il gas si trova alla pressione di 2 atm (202 kPa) e occupa un volume di 48 L. Poi subisce un'espansione isoterma fino a raggiungere il volume di 106 L. Quindi subisce una compressione isobara determinata alla fine dell'espansione, e così torna al volume iniziale di 48 L. Calcolo compiuto dal gas durante (a) l'espansione isoterma, (b) la compressione isobara, (c) l'intero processo. (d) Qual è la temperatura finale dell'He? Nella Figura 17.7 questa trasformazione è rappresentata sul diagramma p - V .

Soluzione

(a) Il lavoro effettuato dal gas durante l'espansione isoterma è dato dall'Equazione (17.11) per la legge dei gas perfetti, il valore di nRT è

$$nRT = p_i V_i = (202 \text{ kPa})(48 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 9.7 \text{ kJ}$$

e il lavoro è

$$W = (9.7 \text{ kJ}) \left(\ln \frac{106}{48} \right) = 7.7 \text{ kJ}$$

(b) La pressione al termine dell'espansione isoterma e durante la compressione isobara è

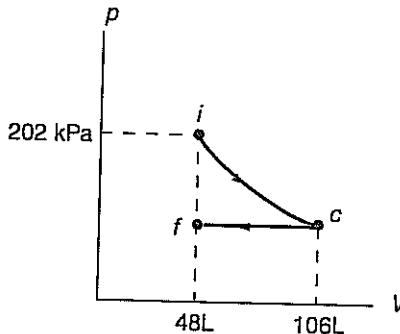
$$p_f = p_c = \frac{p_i V_i}{V_c} = 202 \text{ kPa} \frac{48}{106} = 91 \text{ kPa}$$

In base all'Equazione (17.10),

$$W = (91 \text{ kPa})(0.048 \text{ m}^3 - 0.106 \text{ m}^3) = -5.3 \text{ kJ}$$

Figura 17.8

Esempio 17.4: Un'espansione isoterma seguita da una compressione isobara.



Il lavoro compiuto dal gas durante la compressione isobara è negativo perché il volume diminuisce.

(c) Per l'intero processo il lavoro si ottiene semplicemente sommando i due contributi calcolati in (a) e (b):

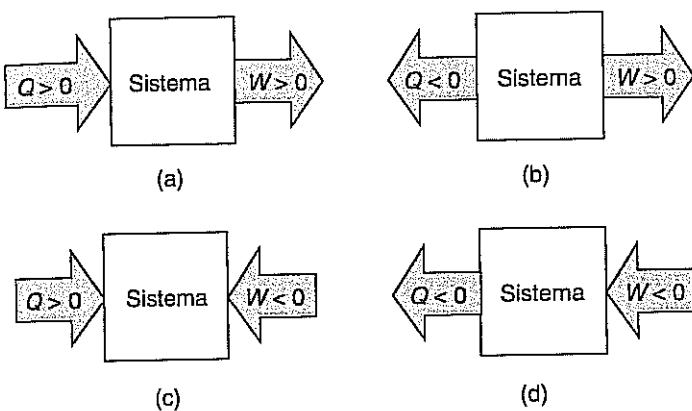
$$W = 7.7 \text{ kJ} + (-5.3 \text{ kJ}) = 2.4 \text{ kJ}$$

(d) La temperatura finale può essere ottenuta usando l'equazione di stato dei gas perfetti e considerando gli stati iniziale e finale, cui corrisponde il medesimo volume:

$$T_f = T_i \frac{p_f}{p_i} = 310 \text{ K} \frac{91}{202} = 140 \text{ K}$$

17.5 IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Abbiamo identificato i due tipi di trasferimento di energia che hanno luogo tra un sistema e il suo ambiente: il calore e il lavoro. Le convenzioni adottate per i segni del calore e del lavoro sono illustrate schematicamente nella Figura 17.9, in cui il senso delle frecce indica il trasferimento di energia. Il calore Q è positivo se l'energia viene fornita al sistema da ciò che lo circonda, come accade nelle Figure 17.9a e c. Il calore Q è negativo se viene sottratto al sistema, come nelle Figure 17.9b e d. Il lavoro W compiuto dal sistema è positivo se viene trasferita energia all'ambiente, come accade nelle Figure 17.9a e b. Il lavoro è invece negativo se l'energia viene trasferita dall'ambiente al sistema, come nelle Figure 17.9c e d. Durante alcune trasformazioni nelle quali il sistema compie un lavoro W e ad esso viene fornita una quantità di calore Q , l'energia netta trasferita al sistema dall'ambiente è $Q - W$.



L'energia totale trasferita a un sistema è $Q - W$.

Figura 17.9

Le frecce indicano il senso dei trasferimenti di energia tra un sistema e il suo ambiente. In (a) per esempio, il calore è positivo in quanto entra nel sistema, e il lavoro è pure positivo in quanto esce dal sistema.

Che un trasferimento di energia sia da considerarsi come calore o come lavoro può dipendere da ciò che si sceglie come sistema. Per esempio, supponiamo che la temperatura dell'acqua contenuta in un recipiente venga innalzata usando un riscaldatore a resistenza che viene immerso nell'acqua. Il riscaldatore è connesso a una batteria che fornisce energia. Se scegliamo di prendere come sistema l'acqua e di considerare la resistenza come parte dell'ambiente, l'energia viene trasferita esclusivamente in virtù della differenza di temperatura tra la resistenza e l'acqua: quindi l'energia trasferita è calore. D'altro canto, se scegliamo di considerare il sistema costituito sia dall'acqua che dalla resistenza, l'energia viene trasferita a questo sistema allargato tramite forze elettriche e non a causa di una differenza di temperatura tra la batteria e il sistema: in questo caso il trasferimento di energia è lavoro. Questo esempio chiarisce la grande importanza di un'accurata definizione del sistema e di una precisa distinzione tra esso e il suo ambiente.

L'entità del lavoro compiuto dal sistema dipende non soltanto dal suo stato iniziale e dal suo stato finale, ma anche da come si effettua la trasformazione. Questa conclusione è evidente se si osserva la Figura 17.10, nella quale sono rappresentate, su un diagramma p - V relativo a una data sostanza, tre differenti trasformazioni che portano dallo stesso stato iniziale allo stesso stato finale. Per ciascuna delle trasformazioni, il lavoro compiuto dal sistema – pari all'area sottostante alla relativa curva – ha un differente valore. Contrassegnando le trasformazioni con a , b e c , si ha

$$W_a \neq W_b \neq W_c$$

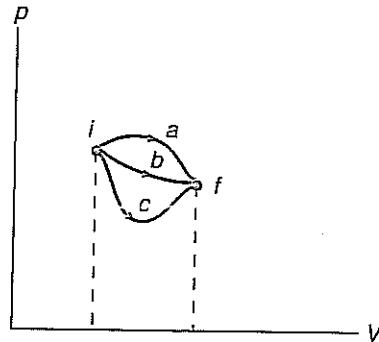
Il lavoro compiuto da un sistema durante una trasformazione che lo fa passare da uno stato iniziale a uno stato finale dipende dai particolari di tale trasformazione.

Le misure mostrano che anche la quantità di calore fornita al sistema dipende da come si effettua la trasformazione. Per le tre trasformazioni rappresentate nella Figura 17.10, la quantità di calore fornita è differente (anche se questa conclusione non risulta ovvia dalla figura). Servendoci degli stessi pedici utilizzati sopra, abbiamo

$$Q_a \neq Q_b \neq Q_c$$

Figura 17.10

Tre differenti trasformazioni che portano un sistema da uno stesso stato iniziale a uno stesso stato finale: il lavoro compiuto dal sistema dipende dalla trasformazione.



La quantità di calore dipende dalla trasformazione.

La quantità di calore fornita a un sistema durante una trasformazione passare da uno stato iniziale a uno stato finale dipende dai particolari di sformazione.

Possiamo anche prendere in considerazione l'energia totale trasferita al sistema di queste trasformazioni. Nella trasformazione *a*, l'energia totale $Q_a - W_a$. Il valore di questa energia *totale* trasferita al sistema, quando viene, risulta uguale per tutte e tre le trasformazioni che connettono la stato ini- stato finale del sistema. Ossia,

$$Q_a - W_a = Q_b - W_b = Q_c - W_c$$

La generalizzazione cui si perviene sulla base di un gran numero di esperimenti mentre la quantità di calore fornita e il lavoro compiuto dipendono dalla trasf- ne, la loro differenza, $Q - W$, non dipende dalla trasformazione. Tale diffe- pende soltanto dallo stato iniziale e dallo stato finale del sistema.

Tutte le volte in cui una grandezza fisica non dipende da come il sistema ev- passare da uno stato a un altro, ma solo dallo stato di partenza e da quello di arri- ra, matematicamente, si ha che tale grandezza è uguale al valore di una funzio- lata nello stato finale meno il valore di tale funzione nello stato iniziale. Funzio- te si chiamano *funzioni di stato*, in quanto dipendono solo dallo stato del siste- gnificato fisico di tali funzioni dipende dalla grandezza fisica che si è conside- esempio di questo fatto lo abbiamo visto nel caso in cui il lavoro compiuto da su un punto materiale non dipende dalla sua traiettoria, ma solo dalla sua posiz- ziale e dalla sua posizione finale; in questo caso (forze conservative) esiste una ne scalare (funzione delle variabili del sistema, cioè delle coordinate del punto :le) la cui variazione dà il lavoro compiuto. Il significato fisico di tale funzione fatto che la sua variazione è un lavoro, quindi è un'energia e, poiché dipende da zione del punto materiale, è un'energia posseduta dal punto stesso, la sua energi- ziale. In termodinamica, si considera l'interno dei sistemi e non il loro moto c- posizione, quindi, se abbiamo trovato che una grandezza, $Q - W$, non dipen- trasformazione compiuta dal sistema, ciò significa che esiste una funzione delle li di stato, relative all'interno del sistema, la cui variazione dà il valore della gr- $Q - W$. Tale funzione di stato, che indichiamo con U , deve essere un'energia, i- to $Q - W$ è un'energia trasferita al sistema, e un'energia dipendente dallo stato del sistema. Per tali ragioni si può dire che tutti gli esperimenti condotti indican- sistema termodinamico che si trova in un dato stato, definito dalle sue variabili e possiede un'energia, che chiamiamo *energia interna* e che dipende solo dallo cui si trova e non da come si è arrivati in quello stato.

Se un sistema passa da uno stato *i* a uno stato *f*, la sua energia interna varia e variazione è uguale all'energia netta che è entrata nel sistema o uscita dal s- Tale energia netta è data da $Q - W$. La formulazione generale di tale consta- costituisce il *primo principio della termodinamica*:

In una trasformazione in cui la quantità di calore Q viene fornita a un sistema, il lavoro W viene compiuto dal sistema, l'energia totale trasferita al sistema è $Q - W$, la variazione ΔU dell'energia interna del sistema stesso.

Sotto forma di equazione, il primo principio della termodinamica si scrive

$$Q - W = \Delta U = U_f - U_i \quad (17.12)$$

Il primo principio introduce il concetto di energia interna ed esprime la conservazione dell'energia nel senso che l'energia totale trasferita a un sistema ne varia l'energia interna di una pari quantità. Ma il primo principio va al di là della conservazione dell'energia: nel suo enunciato è compresa l'idea che la variazione dell'energia interna, $\Delta U = U_f - U_i$, dipende soltanto dagli stati iniziale e finale e non dalla particolare trasformazione che li connette.

L'energia interna di un sistema è suscettibile di un'interpretazione a livello molecolare. Nel caso di un gas rarefatto, o di un gas perfetto, l'energia potenziale di interazione delle molecole tra loro è trascurabile. L'energia interna è semplicemente la somma delle energie cinetiche di tutte le molecole del sistema. Un aumento dell'energia interna di un gas perfetto corrisponde a un aumento dell'energia cinetica totale delle molecole (e a un aumento della temperatura). Nel caso di un gas più denso, l'energia potenziale di interazione delle molecole tra loro contribuisce all'energia interna. Altri contributi all'energia interna diventano significativi nel caso di sistemi più complicati.

La variazione dell'energia interna di un sistema dipende soltanto dagli stati iniziale e finale. Pertanto è possibile assegnare a uno stato del sistema un valore ben definito dell'energia interna. Consideriamo lo stato contrassegnato con i nella Figura 17.11, per il quale i valori della pressione e del volume sono rispettivamente p_i e V_i . La temperatura del sistema in tale stato è T_i , e noi assegnamo arbitrariamente il valore U_i all'energia interna di tale stato. L'energia interna di qualunque altro stato del sistema, per esempio dello stato f , può allora essere determinata applicando una trasformazione che porti il sistema da i a f . Per qualsiasi trasformazione che conduca il sistema dallo stato i allo stato f , la variazione dell'energia interna è $U_f - U_i$, indipendentemente dalla trasformazione stessa. Quindi l'energia interna dello stato f dipende soltanto dallo stato i e non da come il sistema lo ha raggiunto. L'energia interna, dunque, è una variabile di stato. Una volta che lo stato di un sistema è specificato, per esempio dai valori di p e V , i valori delle altre variabili di stato sono determinati. Perciò, nello stesso senso in cui assegnamo un valore della temperatura a un punto nel diagramma p - V , possiamo assegnare a un punto del diagramma un valore dell'energia interna. Qualunque trasformazione che porti il sistema da i a f corrisponderà a una variazione dell'energia interna del sistema $U_f - U_i$. Viceversa, il calore e il lavoro non sono variabili di stato. La quantità di calore fornita in una trasformazione che connette gli stati i e f dipende dal particolare modo in cui la trasformazione viene effettuata. Analogamente, il lavoro compiuto dal sistema nella trasformazione dipende dalla trasformazione stessa. Per qualunque trasformazione, l'energia totale trasferita al sistema, $Q - W$, è pari alla differenza tra i valori dell'energia interna relativi allo stato iniziale e allo stato finale, $U_f - U_i$. Questi concetti costituiscono il nucleo del primo principio della termodinamica.

Il primo principio della termodinamica si può scrivere in termini infinitesimi: si consideri un sistema e una sua trasformazione infinitesima, cioè una trasformazione che fa passare il sistema da uno stato di equilibrio, definito da determinate variabili di stato, a un altro stato, pure di equilibrio, definito da variabili di stato che differiscono

La variazione dell'energia interna è indipendente dalla trasformazione.

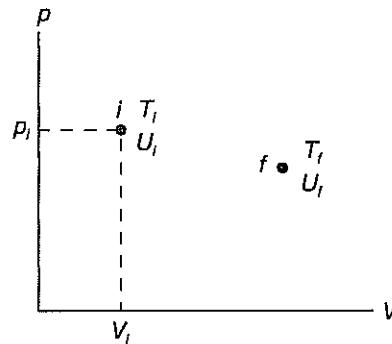


Figura 17.11
Ad ogni punto di un diagramma p - V è possibile assegnare un valore dell'energia interna di un sistema.

da quelle precedenti per valori infinitesimi; allora l'energia interna del sistema sarà di una quantità infinitesima dU , cioè del differenziale della funzione U . D'après questa trasformazione il sistema avrà scambiato con l'ambiente una quantità di infinitesima δQ e sarà stato compiuto un lavoro infinitesimo δW ; allora il principio della termodinamica per questa trasformazione si può scrivere:

$$\delta Q - \delta W = dU$$

Abbiamo qui introdotto il simbolo δ per indicare le quantità infinitesime di scambiato e di lavoro compiuto, mentre abbiamo usato il noto simbolo d per la variazione infinitesima dell'energia interna. In termini matematici ciò significa che d è un differenziale esatto, mentre δQ e δW sono quantità infinitesime ma non differenziali esatti. In termini fisici significa che U è una grandezza posseduta dal sistema, una funzione di stato, mentre Q e W non lo sono e non si può parlare di calore e di lavoro posseduti da un sistema.

Esempio 17.5

- (a) La temperatura di 0.25 kg d'acqua viene elevata gradualmente da 1.1 a 7.7 °C a pressione atmosferica con un riscaldatore a resistenza. Durante questa trasformazione, il volume dell'acqua si misura trascurabile. Determinare la variazione dell'energia interna dell'acqua. (b) Un thermos contiene 0.25 kg d'acqua inizialmente a 1.1 °C viene agitato energeticamente finché la temperatura dell'acqua sale a 7.7 °C. All'inizio e alla fine la pressione è quella atmosferica. Determinare la variazione dell'energia interna dell'acqua e il lavoro compiuto da essa.

Soluzione

- (a) Per questa trasformazione, la quantità di calore fornita all'acqua a pressione costante è data da

$$Q = mc_p \Delta t = (0.25 \text{ kg})(4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ °C}^{-1})(6.6 \text{ °C}) = 6.9 \text{ kJ}$$

dove si è ammesso che il calore specifico dell'acqua tratto dalla Tabella 17.1 sia sostanzialmente costante nell'intervallo di temperatura considerato. Dal momento che la variazione di volume è trascurabile, anche il lavoro compiuto dall'acqua in questa trasformazione quasi-statica è trascurabile, cioè $W = 0$. Il primo principio della termodinamica, Equazione (17.12), fornisce

$$U_f - U_i = Q - W = 6.9 \text{ kJ} - 0 = 6.9 \text{ kJ}$$

- (b) In questa seconda trasformazione, che non è quasi-statica, lo stato iniziale e lo stato finale sono identici a quelli della parte (a). Anche la variazione dell'energia interna deve essere la stessa, in quanto essa dipende soltanto dagli stati iniziale e finale e non dalla particolare trasformazione:

$$U_f - U_i = 6.9 \text{ kJ}$$

Poiché questa trasformazione si verifica mentre il sistema è isolato dal thermos, la quantità di calore fornita è trascurabile, cioè $Q = 0$. Il primo principio applicato a questa trasformazione dà

$$U_f - U_i = Q - W$$

$$6.9 \text{ kJ} = 0 - W$$

ossia $W = -6.9 \text{ kJ}$. L'acqua compie un lavoro negativo (perché?) sul meccanismo usato per ag-

17.6 ALCUNE APPLICAZIONI DEL PRIMO PRINCIPIO

Il primo principio della termodinamica descrive gli scambi di energia che si verificano in qualunque trasformazione che faccia passare un sistema da uno stato di equilibrio iniziale a uno stato di equilibrio finale. Ora applicheremo il primo principio a diversi tipi di trasformazione: in ciascun caso calcoleremo due delle tre grandezze Q , W , U e useremo il primo principio per determinare la terza.

Trasformazione isocora. Una *trasformazione isocora* è una trasformazione in cui il volume del sistema rimane invariato; è una trasformazione a volume costante. È il caso di una trasformazione quasi-statica a volume costante, $dV = 0$.

$\Delta V = 0$, per cui il sistema non compie lavoro: $W = \int p dV = 0$. Applicando il primo principio della termodinamica, si ha per una trasformazione isocora

$$\Delta U = Q - W = Q - 0 = Q$$

Vale a dire che la quantità di calore fornita è pari alla variazione dell'energia interna perché $W = 0$.

Esempio 17.6

La temperatura di 2.50 mol di He viene innalzata a volume costante da 275.0 a 325.0 K. Nello stato iniziale la pressione è quella atmosferica; nell'intervallo di temperature e di pressioni considerato, la capacità termica molare dell'He è $C_V = 12.5 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Calcolare la variazione dell'energia interna di questo gas.

Soluzione

Dal momento che il volume rimane costante, la quantità di calore fornita al sistema è (vedi Paragrafo 17.3),

$$Q = nC_V\Delta T = (2.50 \text{ mol})(12.5 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1})(50.0 \text{ K}) = \text{kJ}$$

Siccome la trasformazione avviene a volume costante, $W = 0$. Il primo principio dà, per la variazione dell'energia interna,

$$U_f - U_i = Q - W = 1.56 \text{ kJ} - 0 = 1.56 \text{ kJ}$$

Trasformazione adiabatica. Una *trasformazione adiabatica* è una trasformazione nella quale il sistema non scambia calore con l'ambiente. In ogni passo infinitesimo della trasformazione, $dQ = 0$; per l'intera trasformazione adiabatica, $Q = 0$. Un modo per impedire gli scambi di calore tra il sistema e l'ambiente è quello di isolare il sistema con pareti adiabatiche. In alternativa, la trasformazione può essere effettuata così rapidamente da rendere trascurabile la quantità di calore trasferita. Per esempio, la fase di compressione nel motore di un'automobile è sostanzialmente una compressione adiabatica della miscela aria-carburante, in quanto si verifica troppo rapidamente perché possa aver luogo un significativo trasferimento di calore. Applicando il primo principio a una trasformazione adiabatica si ha

$$\Delta U = Q - W = 0 - W = -W$$

In una trasformazione adiabatica, il sistema non scambia calore con l'ambiente.

Esempio 17.7

Il volume del cilindro di un motore sperimentale diminuisce, durante la fase di compressione, di un fattore 8 (il rapporto di compressione). Il lavoro compiuto dalla miscela aria-carburante durante questa compressione viene misurato e risulta essere $W = -200 \text{ J}$.

Calcolare la variazione dell'energia interna della miscela aria-carburante.

Soluzione

Poiché la compressione si verifica rapidamente, questa trasformazione può essere considerata adiabatica: $Q = 0$. Il lavoro compiuto dalla miscela è $W = -200 \text{ J}$ ed è negativo perché il volume diminuisce. Applicando il primo principio, si ottiene per la variazione dell'energia interna

$$U_f - U_i = Q - W = 0 - (-200 \text{ J}) = 200 \text{ J}$$

Trasformazione isobara. In una *trasformazione isobara*, ossia a *pressione costante*, possono verificarsi entrambi i tipi di trasferimento di energia tra il sistema e l'ambiente. Il lavoro compiuto dal sistema in una trasformazione isobara quasi-statica è dato dall'Equazione (17.10). Il calore assorbito dal sistema può essere calcolato utilizzando i dati relativi ai calori specifici o ai calori latenti.

Esempio 17.8

Il volume occupato da 1.00 kg di acqua a 100 °C e a pressione atmosferica varia da 1.0 l nella fase liquida a 1700 l nella fase di vapore. Calcolare la differenza di energia interna tra 1.00 kg di vapore acqueo e 1.00 kg di acqua liquida al punto normale di ebollizione.

Soluzione

Consideriamo una trasformazione nella quale a 1.00 kg di acqua liquida a 100 °C viene fornita a pressione atmosferica costante per convertirlo in vapore a 100 °C. L'acqua è contenuta in un recipiente dotato di un pistone a tenuta che si muove verso l'esterno per mantenere costante la pressione. La variazione del volume è $1700 \text{ l} - 1 \text{ l} = 1.7 \text{ m}^3$. In base all'Equazione (17.10) il lavoro compiuto dal sistema è

$$W = p\Delta V = (101 \text{ kPa})(1.7 \text{ m}^3) = 170 \text{ kJ}$$

La quantità di calore assorbita durante la trasformazione può essere calcolata utilizzando il rapporto di vaporizzazione dato nella Tabella 17.2:

$$Q = mL_v = (1.00 \text{ kg})(2260 \text{ kJ/kg}) = 2260 \text{ kJ}$$

La differenza tra le energie interne di questi due stati dell'acqua è

$$U_f - U_i = Q - W = 2260 \text{ kJ} - 170 \text{ kJ} = 2090 \text{ kJ} \approx 2100 \text{ kJ}$$

Il calcolo indica che, dei 2260 kJ di calore forniti al sistema, circa 170 kJ costituiscono il lavoro compiuto dal sistema, e il resto, circa 2100 kJ, si manifesta come un incremento dell'energia interna. Benché ci siamo serviti di una particolare trasformazione per calcolare la differenza tra le energie interne di questi due stati dell'acqua, va sottolineato che la differenza di 2100 kJ è indipendente dalla trasformazione.

Espansione libera. Consideriamo un gas che inizialmente occupa uno dei due compartimenti in cui è suddiviso un recipiente, come mostra la Figura 17.12. Una membrana sottile separa i due compartimenti, e in quello a destra viene fatto il vuoto; l'ambiente esterno è isolato dall'esterno. Lo stato iniziale del gas è caratterizzato dai valori delle sue variabili di stato: p_i, V_i, T_i e U_i . Ora supponiamo che la membrana rompa spontaneamente e che il gas si espanda liberamente fino a riempire tutto il recipiente. Questa trasformazione è chiamata *espansione libera*. Durante l'espansione libera, il gas non è in equilibrio, e quindi la trasformazione non è quasi-statica e non può essere rappresentata in un diagramma p - V . Ma i valori finali p_f, V_f, T_f e U_f sono raggiungibili per raggiungere uno stato di equilibrio in cui le variabili di stato assumeranno nuovi valori. Qual è la differenza tra questi valori finali e i valori iniziali? La variazione di volume è aumentato, e la misura mostra che la pressione è diminuita. Anche la variazione di temperatura può essere misurata (sia pure con una certa difficoltà) e la variazione di temperatura può essere misurata (sia pure con una certa difficoltà).

La variazione dell'energia interna del gas può essere calcolata applicando il principio della termodinamica al processo di espansione libera. La trasformazione è adiabatica a causa dell'isolamento, per cui $Q = 0$. Nessuna parte dell'ambiente esterno muove (consideriamo la membrana che si rompe come una parte inerte del sistema), quindi il sistema non compie lavoro sull'ambiente: $W = 0$. Pertanto l'energia interna non varia

$$U_f - U_i = Q - W = 0 - 0 = 0$$

Lo stato iniziale e lo stato finale di questo gas hanno la stessa energia interna.

Solitamente si pensa all'energia interna di un gas come a una funzione delle variabili indipendenti V e T : $U(V, T)$. Gli esperimenti in cui un gas subisce un'espansione libera forniscono informazioni su questa dipendenza funzionale. Se, in un'espansione libera, il volume varia da V_i a V_f e la temperatura varia da T_i a T_f , per l'Equazione (17.13) si ha

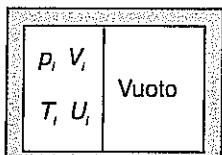
$$U(V_f, T_f) = U(V_i, T_i)$$

Nel caso dei gas reali, le misure mostrano che la temperatura varia leggermente in un'espansione libera. Quindi l'Equazione (17.14) indica una dipendenza dell'energia interna dal volume. Tuttavia, nel caso limite di gas rarefatti ovvero nel caso di un gas perfetto, la diminuzione di temperatura associata a un'espansione libera tende a zero. Posto $T_i = T_f = T$, l'Equazione (17.14) diventa

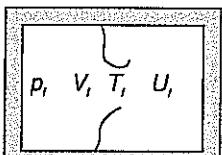
$$U(V_f, T) = U(V_i, T)$$

il che implica che l'energia interna di un gas perfetto non dipende affatto dal volume. Il processo di espansione libera ci ha condotto alla seguente conclusione: l'energia interna $U(V, T)$ di un gas perfetto dipende soltanto dalla temperatura.

L'espansione libera.



(a)



(b)

Figura 17.12

(a) Una sottile membrana confina un gas in una parte di un recipiente isolato. (b) La membrana si rompe spontaneamente, e il gas si espande liberamente fino a occupare tutto il recipiente.

Per un gas perfetto, U dipende soltanto da T .

Esempio 17.9

Si abbiano n moli di un gas perfetto, si esprima la capacità termica molare a volume costante di tale gas in funzione della sua energia interna e si ricavi l'espressione dell'energia interna del gas nell'ipotesi in cui la capacità termica sia costante; si trovi inoltre la relazione esistente fra capacità termica a volume costante e a pressione costante.

Soluzione

Durante la trasformazione isocora il volume del gas non cambia e quindi il sistema non compie alcun lavoro; quindi, in ogni elemento infinitesimo della trasformazione, si ha che $\delta W = 0$. Ne segue che, per il primo principio della termodinamica, $\delta Q = dU$. Dalla definizione di capacità termica molare (vedi formula (17.5)) a volume costante si ha

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$$

Poiché l'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla temperatura si può scrivere

$$dU = nC_V dT$$

da cui, nell'ipotesi che C_V non dipenda dalla temperatura, si ha che

$$U = nC_V T + \text{costante}$$

Ricordando che il lavoro infinitesimo per un gas è dato da $\delta W = pdV$, si può scrivere $dU = \delta Q - pdV$, da cui $nC_V dT = \delta Q - pdV$, cioè $\delta Q = nC_V dT + pdV$. Da qui possiamo ricavare la capacità termica molare a pressione costante

$$C_p = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{n} \left(\frac{nC_V dT}{dT} + p \frac{dV}{dT} \right) = C_V + \frac{1}{n} \frac{pdV}{dT}.$$

L'equazione di stato dei gas perfetti è $pV = nRT$, da cui, differenziando, si ha $pdV + Vdp = nRdT$ e quindi $pdV = nRdT - Vdp$. Per ricavare C_p la trasformazione deve essere a pressione costante e quindi $dp = 0$, allora $C_p = C_V + \frac{nRdT}{dT}$, cioè

$$C_p = C_V + R$$

Trasformazione isoterma. In una *trasformazione isoterma* la temperatura rimane costante. Un esempio di trasformazione isoterma è quello in cui una sostanza cambia fase, per esempio da solido a liquido, quasi-staticamente. Viene fornito calore al sistema, e questo può compiere lavoro sull'ambiente, ma la temperatura non cambia. L'esempio 17.8 trattava di un cambiamento di fase a pressione costante da liquido a vapore; quella trasformazione non era solo isobara, ma anche isoterma.

Esempio 17.10

Un cilindro metallico con un pistone mobile a tenuta contiene 0.24 mol di gas N₂ a una pressione iniziale di 140 kPa. Il pistone viene spostato lentamente nel cilindro fino a far raddoppiare il volume occupato dal gas. Il cilindro rimane, durante la trasformazione, in contatto termico con l'ambiente a 310 K. Quanto calore viene ceduto al gas in questa trasformazione?

Soluzione

Negli esperimenti condotti a queste temperature e con questi valori della pressione, l'azoto si comporta come un gas perfetto. La trasformazione è isoterma a 310 K, e l'energia interna del gas, dipendendo soltanto da T , non cambia: $\Delta U = 0$. Il lavoro compiuto da un gas perfetto durante un'espansione isoterma è dato dall'Equazione (17.11): $W = nRT \ln(V_f/V_i)$. Applicando alla trasformazione il primo principio, si ha

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U + W = 0 + nRT \left(\ln \frac{V_f}{V_i} \right) \\ &= (0.24 \text{ mol})(8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1})(310 \text{ K})(\ln 2) = 430 \text{ J} \end{aligned}$$

Esempio 17.11

Un grammo di acqua va in ebollizione alla pressione costante di 1 atm trasformandosi in 1670 cm³ di vapore. Il calore latente di vaporizzazione dell'acqua a questa pressione è $L = 2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$. Calcolare (a) il lavoro compiuto dall'acqua nella trasformazione e (b) l'aumento di energia interna

Soluzione

(a) Un grammo di acqua ha un volume di $1 \times 10^{-6} \text{ m}^3$, quindi la variazione di vol. $V_f - V_i = (1670 - 1) \times 10^{-6} \text{ m}^3$ e, avvenendo la trasformazione a pressione costante, il compiuto è $W = p(V_f - V_i) = (1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(1669 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 169 \text{ J}$.

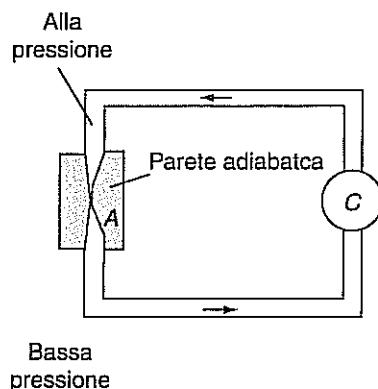
(b) Durante la trasformazione il calore fornito all'acqua per farla evaporare è $Q = mL = (0.0226 \times 10^6 \text{ J kg}) = 2260 \text{ J}$; allora, dal primo principio della termodinamica, si $\Delta U = Q - W = 2260 \text{ J} - 169 \text{ J} = 2091 \text{ J}$.

Strozzamento. Il *processo di strozzamento* ha una considerevole importanza perché viene utilizzato nella maggior parte dei cicli frigoriferi. Il processo si ca quando un fluido ad alta pressione fluisce attraverso una parete porosa o attraverso una stretta valvola in una regione a pressione più bassa. Di solito il processo è nuo, come mostra la Figura 17.13, e la differenza di pressione dalle due parti dell'valva è mantenuta da una pompa o da un compressore, mentre la regione della va è isolata. Il Problema 17.5 mostra che, mentre una data quantità di gas subisce i cesso di strozzamento, la grandezza $U + pV$, chiamata *entalpia*, rimane costante

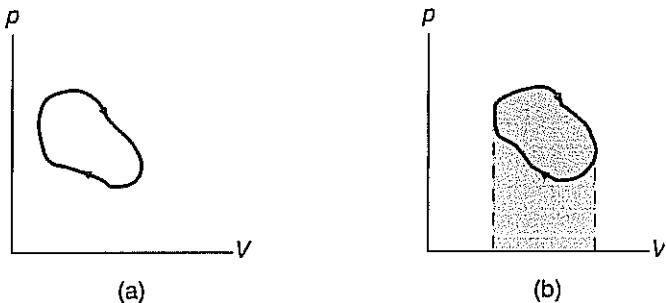
Se il fluido nella regione ad alta pressione è un liquido prossimo all'evapora ed esso parzialmente evapora nella regione a bassa pressione, la temperatura si asse considerabilmente in quest'ultima regione. È questa proprietà che viene sfruttata molti sistemi di refrigerazione.

Figura 17.13

In un processo di strozzamento continuo, gas ad alta pressione fluisce attraverso una valvola A in una regione di bassa pressione. La differenza di pressione viene mantenuta dal compressore C.

**Figura 17.14**

(a) Un ciclo è rappresentato in un diagramma p - V da una curva chiusa. (b) Il lavoro compiuto dal sistema in un ciclo è pari all'area del piano p - V racchiusa dal ciclo.



$\Delta U = 0$ in una trasformazione ciclica.

Quando un sistema compie una trasformazione ciclica, la variazione della sua energia interna durante il ciclo è nulla. L'energia interna dello stato finale è uguale all'energia interna dello stato iniziale perché i due stati coincidono. La quantità di calore assorbito dal sistema e il lavoro compiuto dal sistema durante un ciclo non sono però necessariamente nulli. Nella Figura 17.14b, un ciclo è suddiviso in una fase di espansione durante la quale il sistema compie un lavoro positivo, e in una fase di compressione durante la quale il sistema compie un lavoro negativo. Il lavoro totale compiuto dal sistema è pari all'area racchiusa dal ciclo; esso è positivo nel caso rappresentato nella

Se W indica il lavoro totale compiuto durante il ciclo e Q la quantità di calore fornita durante il ciclo, applicando al ciclo il primo principio si ha $Q - W = \Delta U = 0$, ossia

$$W = Q$$

Quindi in un ciclo il lavoro totale compiuto dal sistema è pari alla quantità di calore totale fornita al sistema.

RIEPILOGO

Paragrafo 17.2 Equazioni di stato

Le variabili di stato p , V , T e n relative a una sostanza sono connesse tra loro da un'equazione matematica chiamata equazione di stato. Per un gas perfetto, o per un gas reale rarefatto, l'equazione di stato è $pV = nRT$. Uno stato di equilibrio di un sistema come un gas può essere rappresentato da un punto nel diagramma p - V . Una trasformazione quasi-statica, che è costituita da una successione di stati di equilibrio del sistema, è rappresentata da una curva in un diagramma p - V .

Paragrafo 17.3 Calore specifico e calore latente

La quantità di calore fornita a un sistema a pressione costante è correlata alla variazione della temperatura dal calore specifico

$$dQ = mc_p dT \quad (17.2)$$

se è specificata la massa m , oppure dalla capacità termica molare

$$dQ = nC_p dT \quad (17.5)$$

se è specificato il numero delle moli n . In modo analogo sono definiti il calore specifico a volume costante c_V e la capacità molare a volume costante C_V . Il calore ceduto a un sistema di massa m che subisce un cambiamento di fase è

$$Q = mL \quad (17.7)$$

dove L è il calore latente relativo al cambiamento di fase.

Paragrafo 17.4 Lavoro e trasformazioni termodinamiche

Il lavoro è un trasferimento di energia tra un sistema e il suo am-

biente dovuto al moto di qualche parte dell'ambiente. Il lavoro compiuto da un fluido sul suo ambiente è

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p \, dV \quad (17.9)$$

Il lavoro compiuto dal sistema è positivo se viene trasferita energia dal sistema all'ambiente.

Paragrafo 17.5 Il primo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica fornisce la relazione fra l'energia scambiata tra un sistema e il suo ambiente e la variazione dell'energia interna del sistema:

$$Q - W = U_f - U_i \quad (17.12)$$

La quantità di calore fornita al sistema e il lavoro compiuto dal sistema dipendono dagli aspetti particolari della trasformazione. L'energia interna è una variabile di stato; la variazione dell'energia interna $U_f - U_i$ dipende solamente dagli stati iniziale e finale e non dalla trasformazione che porta dall'uno all'altro.

Paragrafo 17.6 Alcune applicazioni del primo principio

Il primo principio della termodinamica può essere applicato senza difficoltà ad alcune trasformazioni particolari come quella isocora, quella adiabatica, quella isobara, quella isotermica, quella di strozzamento e quella ciclica. In base agli esperimenti sull'espansione libera dei gas rarefatti, il primo principio implica che l'energia interna di un gas perfetto dipenda soltanto dalla temperatura.

QUESITI

- 17.1 Vi sono circostanze in cui l'equazione di stato $pV = nRT$ descrive correttamente l' He (a) in fase gassosa?
(b) In fase liquida? Spiega.
- 17.2 Vi sono circostanze in cui l'equazione di stato $pV = nRT$ descrive correttamente l' H_2O (a) in fase liquida?
(b) In una delle sue fasi solide? Spiega.
- 17.3 L'aria a temperature e pressioni ordinarie è una miscela di parecchi gas diversi, principalmente azoto e ossigeno. La sua equazione di stato è data da $pV = nRT$? Qual è il significato di n in questo caso?
- 17.4 Qual è il valore della costante universale dei gas R in unità $\text{cal mol}^{-1} \text{K}^{-1}$?
- 17.5 È possibile rappresentare su un diagramma p - V una trasformazione che non sia quasi-statica? Spiega.
- 17.6 È possibile fornire calore a un sistema mantenendo fissa la pressione. Il calore può essere fornito anche a volume costante. È possibile fornirlo mantenendo fissa la temperatura? Spiega.

- 17.7 Il lavoro può essere compiuto da un sistema mentre la pressione viene mantenuta fissa o mentre viene mantenuta costante la temperatura. È possibile che il lavoro venga compiuto mentre il volume viene mantenuto costante? Spiega.
- 17.8 Se a un sistema viene fornito calore, la sua energia interna deve aumentare? Spiega.
- 17.9 L'energia interna di un sistema deve aumentare se aumenta la sua temperatura? Spiega.
- 17.10 Supponiamo che in una trasformazione un sistema compia un lavoro W sull'ambiente. Quanto lavoro viene compiuto dall'ambiente sul sistema? Puoi concepire delle eccezioni alla tua risposta?
- 17.11 La superficie esterna di un recipiente metallico pieno di gas viene lucidata energeticamente da un disco apposito. L'energia trasferita al gas che si trova nel recipiente è chiamata calore o lavoro? Spiega.

- 17.12** Il gas contenuto in un cilindro si espande mentre il pistone viene estratto. Tra il pistone e la parete del cilindro agisce una forza d'attrito. L'energia trasferita al gas a causa dell'attrito è calore o lavoro? Spiega.
- 17.13** È possibile «riscaldare» una tazza di brodo senza fornirle calore? La temperatura di un sistema deve necessariamente cambiare se gli viene fornito calore?
- 17.14** Supponiamo che un sistema subisca una trasformazione nella quale lo stato finale ha il medesimo volume dello stato iniziale. Sei in grado di determinare quanto lavoro ha compiuto il sistema? Utilizza un diagramma p - V per chiarire la tua risposta.
- 17.15** Un cubetto di ghiaccio viene posto in un recipiente ben isolato pieno di acqua tiepida. Consideriamo il sistema costituito dal cubetto di ghiaccio e dall'acqua. Il ghiaccio fonde, e lo stato finale del sistema è acqua liquida a una temperatura finale inferiore. Questa trasformazione è adiabatica? Che cosa ha fornito l'energia necessaria per fondere il ghiaccio?
- 17.16** Spiega perché la tua pelle si scotterebbe più seriamente se fosse posta in contatto con 1 g di vapore acqueo a 100 °C che con 1 g di acqua liquida a 100 °C.
- 17.17** Il lavoro può essere convenientemente rappresentato in un diagramma p - V . Quale informazione utile può essere messa in evidenza in un diagramma p - T ? (Si veda il Capitolo 16.)
- 17.18** Rappresenta una trasformazione isobara in un diagramma p - T . Rappresenta una trasformazione isoterna in un diagramma p - T . Rappresenta una trasformazione isocora di un gas perfetto su un diagramma p - T .
- 17.19** Dati lo stato iniziale e lo stato finale di un sistema in un diagramma p - V e il valore della variazione dell'energia interna, è possibile determinare quanto calore è stato fornito e quanto lavoro è stato compiuto? Spiega.
- 17.20** In un ciclo lo stato finale del sistema coincide con lo stato iniziale. Data la quantità di calore fornita in un ciclo, si può determinare quanto lavoro è stato compiuto dal sistema? Spiega.
- 17.21** In base alle proprietà o alla condizione di un sistema che subisce una trasformazione ciclica, è possibile determinare quanti cicli sono stati effettuati in precedenza? Spiega.
- 17.22** Un piccolo magnete immerso in un liquido lo mescolando sotto l'azione di un magnete rotante e Spiega perché questo trasferimento di energia è lavoro anche se non ci sono variazioni di volume.
- 17.23** Qualcuno dei seguenti tipi di trasformazione deve essere quasi-statico? Se sì, quale o quali? Motiva la tua risposta.
- Un'isobara
 - Un'isoterna
 - Un'isocora
- 17.24** In uno scaldabagno elettrico ci sono alcune resistenze immerse nell'acqua contenuta nel serbatoio. (a) Se il sistema si considera l'intero apparecchio, l'energia trasferita al sistema è calore o lavoro? (b) Se come sistema si considera soltanto l'acqua, l'energia trasferita al sistema è calore o lavoro? (c) In entrambi i casi considerati, che cosa accade all'energia interna del sistema?
- 17.25** Traccia un'analogia tra il primo principio della termodinamica e le tue finanze personali, servendoti di tre concetti: entrate q , spese w , e contante disponibile. Ha senso parlare dell'entità delle spese a disposizione? Quale equazione connette le tre grandezze q , w , u ? Perché l'analogia è imperfetta?
- 17.26** I dietologi (e coloro che seguono le diete) usano la «grande Caloria», 1 Caloria = 1 kcal. Supponiamo tu segua rigorosamente una dieta da 1600 Calorie al giorno. A quale ritmo medio, espresso in J per giorno, tuo corpo metabolizza il cibo? Esprimi questo ritmo anche in W.
- 17.27** Si completi la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
R			
C_p			
C_v			
L	Calore latente		
W			
ΔU			J
U			

ESERCIZI

Paragrafo 17.2 Equazioni di stato

- 17.1** Un gas perfetto subisce una trasformazione nella quale la temperatura raddoppia e la pressione triplica. (a) Di quale fattore varia il volume? (b) Rappresenta lo stato iniziale e lo stato finale in un diagramma p - V .
- 17.2** Determinare il volume in litri ($1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$) occupato da 1 mol di un gas perfetto a pressione atmosferica (101 kPa) e a 0.0 °C.
- 17.3** Dell'olio gassoso si trova inizialmente in uno stato definito da $p = 0.73 \text{ kPa}$, $V = 12 \text{ l}$ e $T = 320 \text{ K}$. (a) Determinare la quantità di gas presente. (b) Il gas subisce un'espansione isoterna che gli fa raggiungere il volume di 18 l. Determinare la pressione dell'He in quest'ultimo stato. (c) Rappresentare la trasformazione su un diagramma p - V .
- 17.4** Un gas perfetto si trova inizialmente nello stato contrassegnato da p_i , V_i , T_i . Esso subisce un'espansione isoterna che lo porta in uno stato intermedio m in cui la pressione è $p_m = \frac{1}{2} p_i$. Il gas viene quindi compresso fino a raggiungere uno stato finale f : il valore della pressione p_f rimane costante finché il volume ritorna al suo valore iniziale. (a) Si rappresentino queste trasformazioni in un diagramma p - V . (b) Si determinino i valori delle variabili p , V , T per gli stati i , m e f .

esprimendoli come funzioni dei valori relativi allo stato iniziale.

- 17.5 La pressione dei gas viene sovente espressa in atmosfere ($1 \text{ atm} = 101 \text{ kPa}$) e il volume in litri. Determinare il valore della costante universale dei gas in unità $\text{1 atm mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. [Nota: $(1 \text{ Pa})(1 \text{ m}^3) = 1 \text{ J}$.]

- 17.6 Un cilindro contiene 2.54 mol di O_2 a 113 kPa e 325 K. Il gas subisce una compressione isoterma che ne dimezza il volume iniziale. Il pistone mobile non è perfettamente a tenuta, e nella trasformazione 0.26 mol sfuggono.
(a) Determinare la pressione finale del gas. (b) Questa trasformazione ammette una rappresentazione dotata di significato in un diagramma p - V ? Spiega.

- 17.7 Determinare il numero delle molecole presenti in ogni m^3 di un gas perfetto in condizioni normali (1.0 atm e 0.0 °C).

- 17.8 Il coefficiente di dilatazione cubica (vedi il Capitolo 16) di un gas a pressione costante è definito da $\beta = (1/V)(dV/dT)$, dove la derivata è da calcolarsi considerando la pressione costante. (a) Dimostrare che $\beta = 1/T$ per un gas perfetto. (b) Calcolare β a 0.0 °C per un gas perfetto.

Paragrafo 17.3 Calore specifico e calore latente

- 17.9 Quanto calore si deve fornire a pressione costante a un chiodo di ferro di massa 3 g per elevare la sua temperatura di 20 °C?
- 17.10 Quanto calore si deve fornire a pressione costante a 1.5 mol di ferro per elevarne la temperatura da 280 a 320 K?

- 17.11 Un recipiente isolato contiene 0.75 kg di acqua a 20 °C, cui vengono aggiunti 1.24 kg di piombo, inizialmente a 95 °C. (a) Ammettendo che non vi siano scambi di energia con l'ambiente, determinare la temperatura finale del sistema acqua-piombo. (b) Considerando come sistema soltanto l'acqua, quanto calore le è stato fornito nella trasformazione?

- 17.12 Supponiamo che il sistema acqua-piombo dell'esercizio precedente si trovi inizialmente a 15 °C e che gli vengano forniti 1800 J di calore usando un riscaldatore a immersione. (a) Qual è la temperatura finale del sistema? (b) Quanto calore viene ceduto al piombo?
- 17.13 Quanta acqua alla temperatura iniziale di 25 °C si deve aggiungere a 0.35 kg di ghiaccio a 0.0 °C, per far fondere completamente il ghiaccio? Lo stato finale è costituito di liquido a 0.0 °C.

- 17.14 Un pezzo di ghiaccio di massa 0.35 kg a 0.0 °C viene messo in un recipiente isolato contenente acqua inizialmente a 25 °C. (a) Ammettendo che la quantità iniziale di acqua sia 2.0 kg, determinare la temperatura e la composizione finali del sistema. (b) Ripetere il calcolo nell'ipotesi che all'inizio sia presente 1.0 kg di acqua.

- 17.15 La temperatura di 1.2 kg di H_2O viene misurata con un termometro di massa 0.033 kg e calore specifico $1070 \text{ J kg}^{-1} \text{ °C}^{-1}$. Il termometro segna 23.5 °C prima di essere introdotto nell'acqua. Una volta raggiunto l'equilibrio termico con l'acqua, il termometro segna 57.9 °C.
(a) Trascurando altri scambi energetici con l'ambiente, determinare la temperatura dell'acqua prima
17.16 Si supponga che il termometro (b) Supponiamo che

questo termometro venga impiegato per misurare la temperatura di 0.012 kg di acqua. Discutere l'effetto del procedimento di misura sul valore misurato.

- 17.16 Il calore specifico del Si viene misurato immersando un pezzo di Si di massa 1.50 kg, inizialmente a 40.0 °C, in 3.00 kg di acqua, inizialmente a 25.0 °C. Il sistema raggiunge una temperatura finale di 26.2 °C. Trascurando le perdite di energia verso l'esterno, determinare il calore specifico del Si in base a questi dati.

Paragrafo 17.4 Lavoro e trasformazioni termodinamiche

- 17.17 Un fluido si espande a pressione atmosferica costante (101 kPa) da un volume iniziale di 0.344 m^3 a un volume finale di 0.424 m^3 . (a) Determinare il lavoro compiuto dal fluido. (b) Determinare il lavoro compiuto dal fluido nel caso che la trasformazione venga invertita, cioè nel caso che il fluido venga compresso a pressione atmosferica fino a farlo tornare al volume iniziale.

- 17.18 Un cilindro chiuso da un pistone mobile contiene 96 g di O_2 inizialmente alla pressione di 150 kPa e alla temperatura di 290 K. (a) Determinare il volume occupato dal gas. (b) Il gas si espande a pressione costante, compiendo un lavoro di 7.2 kJ. Qual è il volume dello stato finale? (c) La pressione viene poi aumentata a 300 kPa con una trasformazione isocora. Quanto lavoro viene compiuto dal gas nell'intero processo?

- 17.19 Un gas perfetto subisce una trasformazione (rappresentata nella Figura 17.15) che è composta da un'espansione isobara seguita da una compressione isoterma. Determinare il lavoro effettuato dal gas (a) nell'espansione isobara, (b) nella compressione isoterma, (c) nell'intera trasformazione. (d) Controllare le risposte ottenute stimando le aree che nella figura stanno sotto alle curve rappresentative dei singoli processi.

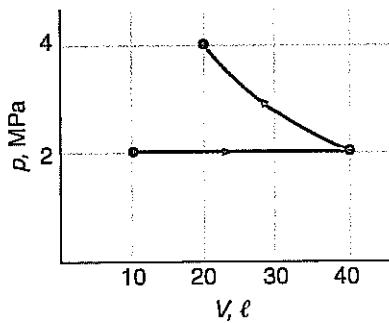


Figura 17.15 Esercizio 17.19.

- 17.20 È possibile individuare una trasformazione simile a quella rappresentata nella Figura 17.15 nella quale il lavoro totale sia nullo. Supponiamo che la trasformazione isobara sia come quella rappresentata in figura e che la compressione isoterma porti il sistema a un volume finale V_f . Determinare V_f in modo tale che sia $W = 0$ per l'intera trasformazione.

- 17.21 Un gas perfetto si trova inizialmente in uno stato specificato dai valori p_i , V_i . Esso subisce una trasformazione nella quale la pressione varia linearmente con il volume finché viene raggiunto lo stato finale specificato dai valori p_f , V_f , come mostra la Figura 17.16. (a) Determinare il lavoro compiuto dal gas in

questa trasformazione, esprimendolo in funzione dei valori iniziali e finali della pressione e del volume.
 (b) Calcolare il lavoro compiuto dal gas in questa trasformazione se $p_i = 140 \text{ kPa}$, $V_i = 0.064 \text{ m}^3$, $p_f = 108 \text{ kPa}$, $V_f = 0.096 \text{ m}^3$. (c) Determinare le temperature dello stato iniziale e di quello finale nell'ipotesi che il sistema sia formato da 3.0 mol di gas.

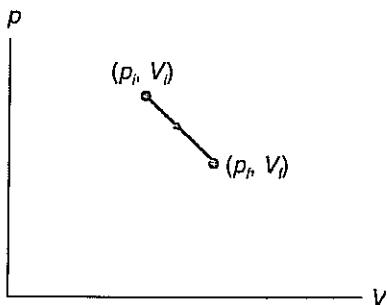


Figura 17.16 Esercizio 17.21.

- 17.22** La pressione di un gas perfetto che subisce una trasformazione adiabatica (al sistema non viene fornito calore) quasi-statica varia con il volume in modo che pV^γ sia costante. (Vedremo nel prossimo capitolo che $\gamma = C_p/C_V$) Se p_i e V_i si riferiscono allo stato iniziale, allora in corrispondenza del volume V la pressione è

$$P = \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma}$$

Dimostrare che il lavoro compiuto dal gas perfetto in una trasformazione adiabatica quasi-statica è dato da

$$W = \frac{p_i V_i}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} \right]$$

- 17.23** Il valore di γ (si veda l'esercizio precedente) per l'aria è 1.4. Supponiamo che 1.0 mol di aria sia inizialmente alla pressione di 202 kPa e occupi un volume di 45 l; l'aria si espande adiabaticamente fino a raggiungere un volume di 65 l. Determinare (a) il lavoro compiuto dall'aria, (b) la pressione finale, (c) le temperature iniziale e finale del sistema.

Paragrafo 17.5 Il primo principio della termodinamica

- 17.24** Un sistema subisce una trasformazione nella quale gli vengono ceduti 27 J di calore, mentre esso compie un lavoro di 8 J. (a) Qual è la variazione dell'energia interna del sistema? (b) Se l'energia interna dello stato iniziale è di 304 J, qual è l'energia interna dello stato finale?
 (c) Supponiamo che il sistema passi dallo stesso stato iniziale allo stesso stato finale tramite una differente trasformazione nella quale esso compie un lavoro di 12 J. Qual è l'energia interna dello stato finale e quanto calore è stato fornito?
- 17.25** Un fluido subisce la trasformazione *iaf* rappresentata nella Figura 17.17. Nella parte isobara della trasformazione $Q_{ia} = 11 \text{ kJ}$, e nella parte isocora $Q_{af} = 12 \text{ kJ}$. Sapendo che l'energia interna dello stato iniziale *i* è $U_i = 2.0 \text{ kJ}$, determinare l'energia interna (a) dello stato *a* e (b) dello stato *f*. (c) Supponiamo che il sistema sia ricondotto dallo stato *f* allo stato *i* lungo il cammino rettilineo (cioè la trasformazione) rappresentato nella figura. Quanto calore deve essere sottratto al sistema?

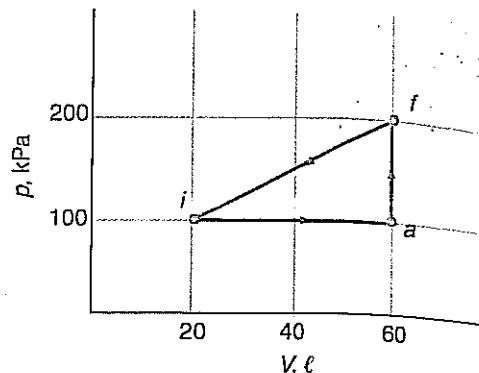


Figura 17.17 Esercizio 17.25.

- 17.26** Un chiodo viene posto in un bagno d'acqua, ed è inizialmente a 20°C . L'acqua e il chiodo vengono poi riscaldati gradualmente fino a 90°C . L'energia interna del chiodo aumenta di 45 J. Un altro chiodo identico al primo, anch'esso inizialmente a 20°C , è estratto bruscamente da un blocco di legno con un martello, e in seguito a ciò la sua temperatura è 25°C . Per ciascuno dei due processi, precisare se è stato fornito calore o è stato compiuto lavoro. Di quanto è variata l'energia interna del chiodo nel secondo processo?

Paragrafo 17.6 Alcune applicazioni del primo principio

- 17.27** Una mole di He subisce la trasformazione *iaf* rappresentata nella Figura 17.17. I valori della capacità termica molare dell'He sono $C_V = 12.5 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e $C_p = 20.8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Calcolare le differenze di energia interna tra (a) lo stato *i* e lo stato *a*, (b) lo stato *a* e lo stato *f*, (c) lo stato *i* e lo stato *f*.
- 17.28** Alla pressione atmosferica e a 0.0°C , il volume di 1 kg di ghiaccio è $V_S = 0.917 \text{ l}$, mentre il volume di un'uguale massa di acqua liquida è $V_L = 1.000 \text{ l}$. Calcolare, per 1.00 kg di acqua, la differenza di energia interna tra gli stati liquido e solido, $U_L - U_S$.
- 17.29** Determinare, per 1 mol di H_2O , la differenza di energia interna tra il liquido al punto normale di fusione e il liquido al punto normale di ebollizione. Le piccole variazioni di volume subite dall'acqua liquida quando la sua temperatura varia a pressione atmosferica possono essere trascurate.
- 17.30** Si consideri la trasformazione ciclica *iafi* rappresentata nella Figura 17.17. Si calcolino, per l'intero ciclo, (a) il lavoro compiuto dal sistema, (b) la variazione dell'energia interna del sistema, (c) la quantità di calore ceduta al sistema.
- 17.31** Per ciascuna delle trasformazioni elencate nella seguente tabella, indicare in ogni casella vuota il segno opposto (+, -, 0):

Descrizione della trasformazione	Q	W
Diminuzione di pressione		
Compressione isobara di un gas perfetto		
Espansione adiabatica		
Espansione isoterma di un gas perfetto		
Compressione isoterma di un gas perfetto		
Espansione libera di un gas		
Trasformazione ciclica	+	

- [17.32] Ogni chilogrammo di acqua cade per circa 50 m nelle Cascate del Niagara. Di quanto aumenta la temperatura dell'acqua per effetto di tale caduta? Si ammetta che

l'aumento dell'energia interna dell'acqua, che si verifica nel processo, sia dovuto alla variazione della sua energia potenziale gravitazionale.

PROBLEMI

- [17.1] La capacità termica molare C_p dell'Al varia linearmente con la temperatura da $24.4 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ a 300 K, a $28.1 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ a 600 K. (a) Costruire un'espressione matematica di C_p della forma $C_p = A + BT$, determinando le costanti A e B in base ai dati forniti. (b) Costruire un grafico che rappresenti questa dipendenza della capacità termica molare dalla temperatura. (c) Determinare la quantità di calore fornita a pressione costante a 2.50 mol di Al per farne variare la temperatura da 300 a 500 K.

- [17.2] L'equazione di stato di van der Waals per 1 mol di un gas è

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

dove a e b sono costanti che vengono determinate sperimentalmente per ciascun gas. L'equazione descrive i gas a densità e pressioni elevate con maggior precisione di quanto non faccia l'equazione di stato dei gas perfetti. Si utilizzi l'equazione di stato di van der Waals per calcolare il lavoro compiuto da 1 mol di un gas che passa, tramite un trasformazione quasi-statica isoterma a temperatura T , da uno stato iniziale p_i, V_i a uno stato finale p_f, V_f . Si esprima la risposta in termini di V_i, V_f, T , e delle costanti a e b .

- [17.3] La compressibilità isoterma di una sostanza è definita come $(\text{vedi Capitolo 15}) -(1/V)(dV/dp)$, ove si intende che T sia mantenuta fissa. Calcolare la compressibilità isoterma (a) di un gas perfetto e (b) di un gas di van der Waals (vedi il problema precedente). (c) Partendo dalla seconda risposta, dimostrare che, quando i parametri a e b tendono a zero, si riottiene la risposta data alla parte (a).

- [17.4] L'energia interna di un sistema può essere considerata come una funzione di V e di T : $U(V, T)$. (a) Usando il primo principio della termodinamica si dimostri che

$$c_V = \frac{1}{m} \frac{dU}{dT}$$

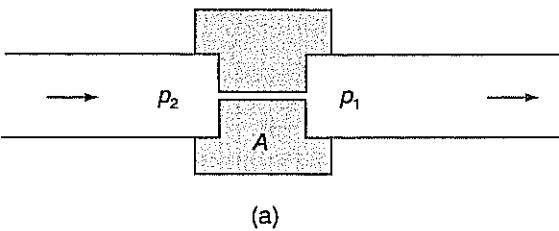
dove V viene mantenuto fisso nel calcolo della derivata rispetto a T . (b) Spiegare perché non vale per c_p un'espressione corrispondente; ossia, perché

$$c_p \neq \frac{1}{m} \frac{dU}{dT}$$

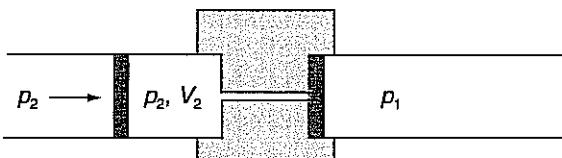
dove la derivata è calcolata con p fissa.

- [17.5] Nella Figura 17.18a è rappresentato schematicamente un processo continuo di strozzamento nel quale un fluido scorre adiabaticamente attraverso una valvola da una regione ad alta pressione (p_2) a una regione a bassa pressione (p_1). Per una data quantità di fluido, la trasformazione può essere simulata dal processo illustrato nelle Figure 17.18b e c. I pistoni che si trovano dalle due

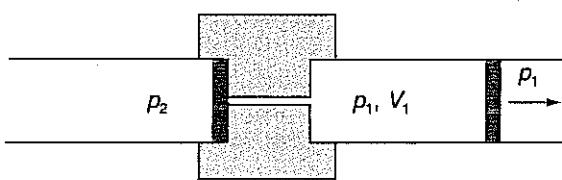
parti della valvola si muovono in modo tale da forzare una certa quantità di fluido a pressione p_2 a passare attraverso la valvola giungendo nella regione a pressione p_1 . Calcolare il lavoro compiuto dal fluido, applicare il primo principio e dimostrare che l'entalpia $U + pV$ è costante nel processo: $U_2 + p_2 V_2 = U_1 + p_1 V_1$.



(a)



(b)



(c)

Figura 17.18 Problema 17.5: (a) Un processo di strozzamento simulato (b, c) dal moto di due pistoni.

- [17.6] A basse temperature la capacità termica molare di un solido, come per es. NaCl, presenta una dipendenza dalla temperatura data approssimativamente da

$$C_V = 234 R \left(\frac{T}{\theta} \right)^3$$

dove R è la costante universale dei gas e θ è la temperatura di Debye, un parametro caratteristico del materiale. Per NaCl la temperatura di Debye $\theta = 300 \text{ K}$, e l'espressione data sopra è valida per T piccola rispetto a θ . Determinare la quantità di calore che si deve fornire a volume costante a 1.0 mol di NaCl per elevarne la temperatura da 1.0 a 9.0 K.

- [17.7] Un gas perfetto subisce una trasformazione adiabatica quasi-statica. Si dimostri che, in tale trasformazione, (a) $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$ e (b) $p^{\gamma-1}/T^{\gamma} = \text{costante}$.

- 17.8** Una mole di un gas perfetto si trova inizialmente a 300 K e occupa un volume di 24 l. Essa subisce un'espansione isoterma nella quale il suo volume raddoppia, seguita da una compressione adiabatica nella quale la temperatura sale a 600 K. Si assuma per questo gas $C_p = 2.5R$ e $C_V = 1.5R$. (a) Calcolare il volume e la pressione finali del gas. (b) Rappresentare la trasformazione su un diagramma p - V . (c) Calcolare la quantità di calore fornita nell'intero processo. (d) Calcolare il lavoro compiuto nell'intero processo (si veda l'Esercizio 17.22). (e) Qual è la variazione dell'energia interna del gas? (Si veda anche il problema precedente.)

- 17.9** Un gas perfetto subisce la trasformazione ciclica quasi-statica, formata da due adiabatiche e due isoterme, che è rappresentata nella Figura 17.19. Usando soltanto il primo principio e il fatto che l'energia interna di un gas perfetto dipende solamente dalla temperatura, dimostrare che il lavoro compiuto dal gas nelle due trasformazioni

adiabatiche soddisfa la relazione $W_{41} = -W_{23}$.

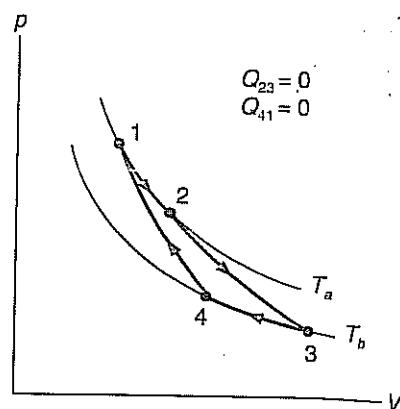


Figura 17.19 Problema 17.9: Un gas perfetto subisce una trasformazione ciclica composta da due isoterme (alle temperature T_b) e da due adiabatiche.

LA TEORIA CINETICA DEI GAS

8.1 INTRODUZIONE

«Le probabilità di "sbancare" una slot-machine sono 1 su 2 300 000 000.» «Il numero fa la forza.» «Se non ci riesci al primo tentativo, riprova, e riprova ancora.» Queste frasi comunissime sono manifestazioni di un buonsenso basato sulla pratica di fare la media sui grandi numeri di entità quando si ha a che fare con un sistema complesso. In modo analogo, si cerca di mettere in relazione il comportamento macroscopico di un sistema come un gas con i suoi costituenti, cioè con un grande numero di molecole.

Il numero di molecole presenti in un sistema ordinario è effettivamente grande: una monetina, per esempio, contiene circa 10^{23} atomi. Anche nel «vuoto» dello spazio interstellare possono esserci 10^8 molecole in 1 m^3 . A causa di questi grandi numeri, non si cerca di seguire il moto delle singole molecole, ma si considerano invece delle medie sui moti molecolari. La *teoria cinetica*, che è un ramo particolare della meccanica statistica, consente di esprimere alcune delle grandezze macroscopiche in termini di medie sui moti molecolari. In questo modo si può pervenire a una comprensione molto più profonda delle proprietà termodinamiche di un sistema.

8.2 MODELLO MOLECOLARE DI UN GAS PERFETTO

Per elaborare un modello microscopico o molecolare di un gas perfetto, faremo alcune ipotesi semplificatrici sul comportamento delle molecole del gas e sul sistema che esse formano:

Ipotesi per il modello molecolare di un gas perfetto.

1. *I grandi numeri.* Il gas è costituito da N molecole, dove N è un numero molto grande. Ciascuna molecola ha massa m e dimensioni trascurabili rispetto alla distanza media tra le molecole stesse.
2. *La meccanica.* I moti delle singole molecole sono adeguatamente descritti dalla meccanica newtoniana.
3. *Gli urti.* Ciascuna molecola si muove liberamente, senza che su di essa agiscano forze significative, salvo negli istanti in cui essa entra in contatto e urta con un'altra molecola o con una parete del recipiente. Tutti gli urti sono elastici e, nel caso dell'urto di una molecola con una parete, varia soltanto la componente della velocità perpendicolare alla parete. Nell'urto tale componente cambia di segno, ma non di valore assoluto.
4. *La casualità.* Le molecole del gas sono in moto casuale, e il gas è in equilibrio. Al sistema possono essere applicati i metodi del calcolo elementare delle probabilità.

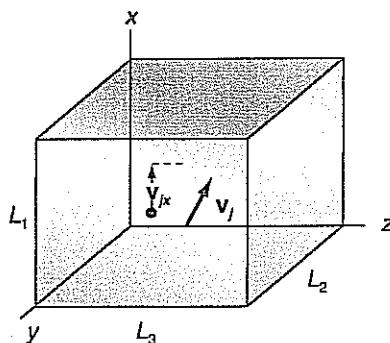
Alcune di queste ipotesi sono più restrittive di quanto sia realmente necessario. Ma le connessioni che cerchiamo tra la descrizione microscopica e quella macroscopica si ottengono più facilmente usando le ipotesi così come le abbiamo formulate. Inoltre, per semplicità, ammetteremo che il gas sia racchiuso in un recipiente fisso a forma di parallelepipedo, di spigoli L_1, L_2, L_3 , e di volume $V = L_1 L_2 L_3$. I risultati cui perverremo saranno comunque indipendenti dalla forma del recipiente.

Medie e probabilità. In che senso si parla del «moto medio di una molecola»? Per illustrare questo concetto, consideriamo alcune semplici ma utili medie sui moti colari, cominciando con la velocità media. Dal momento che le molecole si muovono in modo casuale, una data molecola può muoversi con uguale probabilità in qualsiasi direzione e il modulo della sua velocità può avere quasi qualunque valore. Utilizziamo un sistema di coordinate con gli assi paralleli agli spigoli del recipiente e fissiamoci l'attenzione sulla componente x della velocità di una molecola del sistema (Figura 18.1). Contrassegniamo questa molecola con l'indice j e denotiamo la componente di velocità con v_{jx} . Ora facciamo la media su tutte le N molecole del sistema:

$$\langle v_x \rangle = \frac{\sum v_{jx}}{N}$$

Figura 18.1

Una delle molecole di un gas in un recipiente di volume $V = L_1 L_2 L_3$. La molecola ha velocità v_j , con componente x indicata da v_{jx} .



dove il simbolo $\langle \rangle$ denota la media o valore medio e la somma è estesa a tutte le molecole del sistema. Dal momento che una componente della velocità può avere valori negativi che positivi, c'è una molecola con un valore negativo di v_x per ogni molecola con un valore positivo di v_x . I contributi positivi e negativi alla somma dell'Equazione (18.1) ricorrono con la stessa frequenza, ossia *con la stessa probabilità*. Quindi la somma $\sum v_{jx}$ è nulla e $\langle v_x \rangle = 0$. Lo stesso ragionamento vale per le componenti y e z della velocità, e si ha

$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$$

Vale a dire che il valore medio della velocità molecolare è zero:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \langle v_x \rangle \mathbf{i} + \langle v_y \rangle \mathbf{j} + \langle v_z \rangle \mathbf{k} = 0$$

Il valore medio della velocità delle molecole è zero, ma il valore medio del modulo della velocità non è zero.

Anche se il valore medio della velocità (vettoriale) è zero, questo risultato *non significa* che le molecole siano in quiete! In effetti, il valore medio del modulo della velocità molecolare (che è uno scalare) non è zero. Consideriamo il quadrato del modulo della velocità. Per la molecola contrassegnata con j ,

$$v_j^2 = v_{jx}^2 + v_{jy}^2 + v_{jz}^2$$

Il valore medio di questa grandezza, $\langle v^2 \rangle$, svolgerà un ruolo di importanza primario. Esso dunque è il *valore medio del quadrato del modulo della velocità molecolare* ed è dato da

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum v_j^2}{N}$$

In seguito vedremo come $\langle v^2 \rangle$ sia correlato con la temperatura di un gas.

La grandezza $\langle v^2 \rangle$ può essere espressa per mezzo del valore medio del quadrato di una delle componenti. Dal momento che le direzioni x , y e z sono equivalenti, si ha

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

e $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$ ossia

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$$

Il fattore 3 corrisponde alle tre direzioni spaziali equivalenti, e, in vista di quanto seguire, abbiamo scelto per comodità di usare il quadrato della componente x .

Abbiamo discusso medie relative alla velocità e al suo modulo. Ora consideriamo i valori medi della posizione. Qual è il valore medio $\langle x \rangle$ della coordinata x per le molecole del sistema? Dalla Figura 18.1 si vede che $\langle x \rangle = (\Sigma x_j)/N$ deve avere un valore compreso tra 0 e L_1 . Coerentemente con il carattere casuale del moto molecolare, un gas in equilibrio è spazialmente omogeneo; vale a dire che tutti i valori di x compresi tra 0 e L_1 sono ugualmente probabili, e il valore medio di x è $\frac{1}{2} L_1$:

$$\langle x \rangle = \frac{\Sigma x_j}{N} = \frac{1}{2} L_1$$

In altri termini, la probabilità che una particolare molecola si trovi in una metà del recipiente, $0 \leq x \leq \frac{1}{2} L_1$, è $1/2$. È ugualmente probabile che essa si trovi nell'altra metà. Più in generale, la probabilità che una data molecola abbia una coordinata x compresa in un intervallo ℓ_1 è pari al rapporto tra l'intervallo e il campo di variazione totale $[0, L_1]$ della x . Questa probabilità P è

$$P = \frac{\ell_1}{L_1} \quad (18.3)$$

La conclusione così ottenuta è una conseguenza dell'omogeneità spaziale del gas, e noi ne faremo uso immediatamente nello studio della pressione.

Probabilità che una coordinata x sia compresa in un intervallo ℓ_1 .

Calcolo della pressione. Un gas a pressione p esercita su una parete di area A una forza di intensità $F = pA$. Tale forza, dal punto di vista microscopico, è causata dagli urti delle molecole contro la parete. Consideriamo la molecola con componente della velocità $v_{jx} > 0$ rappresentata nella Figura 18.1. Che contributo darà, in un prefissato intervallo di tempo Δt , alla forza esercitata sulla parete superiore? Vi sono due aspetti da considerare: se la molecola urti effettivamente la parete nell'intervallo di tempo in questione e, in caso affermativo, quale impulso, $J = \bar{F}\Delta t$, trasferisca alla parete nell'urto (vedi Paragrafo 10.6).

Supponiamo che la molecola urti contro la parete. In base alle nostre ipotesi, la componente x della velocità cambia semplicemente di segno. Quindi questa componente passa da v_{jx} prima dell'urto a $-v_{jx}$ dopo l'urto. La variazione della componente x della quantità di moto è, come si desume dalla Figura 18.2 (e dal Capitolo 10),

$$\Delta p_{jx} = p_{jx}^{(f)} - p_{jx}^{(i)} = m(-v_{jx}) - m(v_{jx}) = -2mv_{jx}$$

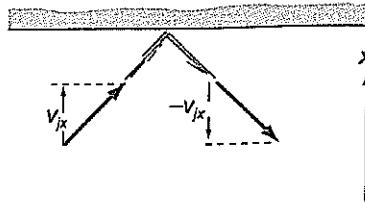


Figura 18.2
Una molecola subisce un urto elastico contro una parete. La componente della velocità perpendicolare alla parete varia da v_{jx} prima dell'urto a $-v_{jx}$ dopo l'urto.

La componente x dell'impulso della forza esercitata dalla parete sulla molecola è

$$J'_{jx} = \Delta p_{jx} = -2mv_{jx}$$

L'impulso impartito alla parete dalla molecola è, per la terza legge di Newton, uguale e opposto all'impulso impartito alla molecola. Indicando con J_{jx} la componente x dell'impulso impartito alla parete a causa dell'urto, si ha $J_{jx} = -J'_{jx}$, ossia

$$J_{jx} = 2mv_{jx} \quad (18.4)$$

Ma la molecola può non raggiungere la parete con questa velocità: potrebbe subire prima un urto con un'altra molecola. Dovremmo perciò moltiplicare l'Equazione (18.4) per la probabilità che la molecola urti la parete nell'intervallo di tempo prefissato Δt .

Una molecola trasferisce un impulso alla parete.

Sceglieremo l'intervallo di tempo sufficientemente piccolo perché in esso (quindi la molecola non ne urti un'altra). Allora la molecola colpirà la parete verso di essa e non in direzione opposta (la probabilità che sia $v_{jx} > 0$ è 1) trova a una distanza dalla parete non superiore a $v_{jx}\Delta t$. Vale a dire che la molecola colpisca la parete è metà della probabilità che essa si trovi a una distanza dalla parete non superiore a $v_{jx}\Delta t$ all'inizio dell'intervallo di tempo nell'Equazione (18.3) $\ell_1 = v_{jx}\Delta t$, si ottiene

$$p = \frac{\frac{1}{2}v_{jx}\Delta t}{L_1}$$

Probabilità che la molecola urti la parete.

dove si suppone v_{jx} positiva e il fattore 1/2 tiene conto della probabilità che la si muova inizialmente verso la parete piuttosto che in direzione opposta.

Il valore atteso o medio dell'impulso trasferito da una molecola alla parete è dato dalla probabilità P di un urto per l'impulso trasferito nell'urto. Moltiplicando le Equazioni (18.4) e (18.5), si ottiene

$$\langle J_{jx} \rangle = 2mv_{jx} \frac{\frac{1}{2}v_{jx}\Delta t}{L_1} = \frac{mv_{jx}^2\Delta t}{L_1}$$

Sommiamo ora questa espressione su tutte le molecole del sistema. La componente dell'impulso totale impartito alla parete in un intervallo di tempo Δt per gli urti delle molecole con la parete stessa è data da

$$\langle J_x \rangle = \frac{\Delta t m}{L_1} \sum v_{jx}^2$$

Il valore medio nell'intervallo di tempo Δt della componente \bar{F}_x della forza esercitata sulla parete è dato dall'impulso diviso per l'intervallo di tempo:

$$\bar{F}_x = \frac{\langle J_x \rangle}{\Delta t} = \frac{m}{L_1} \sum v_{jx}^2$$

Per ottenere la pressione, dividiamo questa forza per l'area $L_2 L_3$ della parete:

$$p = \frac{\bar{F}_x}{L_2 L_3} = \frac{m \sum v_{jx}^2}{L_1 L_2 L_3}$$

ossia, essendo il volume $V = L_1 L_2 L_3$,

$$pV = m \sum v_{jx}^2$$

La sommatoria che compare nell'Equazione (18.6) è connessa alla media del quadrato della velocità tramite l'Equazione (18.2), $\langle v^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle$. Moltiplicando e dividendo per il numero delle molecole del sistema, si ha

$$\sum v_{jx}^2 = N \frac{\sum v_{jx}^2}{N} = N \langle v_x^2 \rangle = \frac{N \langle v^2 \rangle}{3}$$

L'Equazione (18.6) diventa allora

$$pV = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3}$$

La pressione è proporzionale alla media del quadrato della velocità.

Risulta così che per un dato volume, la pressione di un gas è proporzionale alla media del quadrato della velocità delle molecole. Quanto più rapidamente si muovono le molecole, tanto maggiore è la media del quadrato della loro velocità e tanto maggiore è la pressione. Effettuando delle medie sui moti molecolari, abbiamo ottenuto una connessione tra una grandezza macroscopica, la pressione, e una grandezza microscopica, la media del quadrato della velocità delle molecole. Questo è il punto essenziale del paragrafo.

Esempio 18.1

La pressione di 1.0 mol di He che occupa 22.5 l è di 101 kPa. Determinare la media del quadrato della velocità delle molecole.

Soluzione

Il peso molecolare dell'He è $M = 4.0 \text{ g/mol}$, cosicché 1.0 mol ha una massa totale $Nm = 4.0 \text{ g}$. Usando l'Equazione (18.7), si ha

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3pV}{Nm} = \frac{3(101 \text{ kPa})(22.5 \text{ l})}{0.0040 \text{ kg}} \\ = 1.7 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$$



18.3 L'INTERPRETAZIONE MICROSCOPICA DELLA TEMPERATURA

La media $\langle v^2 \rangle$ del quadrato della velocità delle N molecole del gas perfetto è definita da $\langle v^2 \rangle = \sum(v_j^2)/N$, e l'Equazione (18.7) mostra come la pressione del gas è correlata alla media del quadrato della velocità. Anche l'energia interna del gas e la sua temperatura possono essere interpretate in termini della media del quadrato della velocità.

Consideriamo un gas perfetto *monoatomico*, le cui molecole sono quindi formate da singoli atomi. I «gas nobili» – He, Ne, Ar, Kr, Xe e Rn – sono monoatomici in condizioni ordinarie. Ammettiamo che le molecole si comportino come punti materiali e che l'energia potenziale della loro interazione possa essere trascurata. Nel caso di molecole puntiformi, non occorre considerare alcuna rotazione o vibrazione. L'energia meccanica del sistema è costituita esclusivamente dall'energia cinetica di traslazione delle molecole. Cioè, l'energia interna U è la somma delle energie cinetiche delle molecole:

$$U = \sum \frac{1}{2}mv_j^2 \quad (18.8)$$

L'energia cinetica media $\langle K \rangle$ di una molecola di questo sistema è data da

$$\langle K \rangle = \frac{\sum \frac{1}{2}mv_j^2}{N} = \frac{1}{2}m \frac{\sum v_j^2}{N} = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle$$

Quindi l'energia cinetica media delle molecole è proporzionale alla media del quadrato della velocità, com'è anche l'energia interna di un gas perfetto monoatomico: $U = N\langle K \rangle$, ossia

$$U = \frac{1}{2}Nm\langle v^2 \rangle \quad (18.9)$$

Dal momento che la pressione del gas, per l'Equazione (18.7), e l'energia interna sono entrambe proporzionali alla media del quadrato della velocità, esse sono proporzionali tra loro. Combinando le Equazioni (18.7) e (18.9), si ha

$$pV = \frac{1}{3}Nm\langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}Nm\langle v^2 \rangle \right)$$

ossia

$$pV = \frac{2}{3}U \quad (18.10)$$

Ora confrontiamo l'Equazione (18.10), ricavata dalla teoria cinetica, con l'equazione di stato dei gas perfetti, Equazione (17-1), $pV = nRT$. Uguagliando i secondi membri di queste due espressioni di pV , si ottiene

$$\frac{2}{3}U = nRT$$

In un gas monoatomico, una molecola contiene un solo atomo.

L'energia interna di un gas perfetto è l'energia cinetica delle sue molecole.

L'energia interna di un gas perfetto monoatomico è proporzionale a T .

ovvero

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

Ossia: l'energia interna di un gas perfetto è proporzionale alla temperatura Kelvin. Per il gas perfetto monoatomico, il fattore di proporzionalità è $\frac{3}{2} nR$.

Il risultato espresso nell'Equazione (18.11) può essere riformulato in termini colari usando l'Equazione (18.9). Si noti che un sistema di n moli contiene N molecole, con $n = N/N_A$, dove N_A è il numero di Avogadro, cioè il numero delle molecole contenute in una mole. L'Equazione (18.11) diventa

$$U = \frac{3N}{2N_A} RT$$

L'energia cinetica media di traslazione delle molecole è data da

$$\langle K \rangle = \frac{U}{N} = \frac{(3N/2N_A)RT}{N} = \frac{3R}{2N_A} T$$

ossia

$$\boxed{\langle K \rangle = \frac{3}{2} kT}$$

Energia cinetica media di traslazione.

La costante di Boltzmann k .

Interpretazione molecolare della temperatura.

Velocità quadratica media v_{qm}

Nell'Equazione (18.12) abbiamo introdotto la *costante di Boltzmann*,

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

La costante dei gas R si riferisce a 1 mol di una sostanza, come pure il numero di Avogadro N_A . La costante di Boltzmann $k = R/N_A$ è perciò indipendente dalla sostanza e si riferisce alla molecola. Possiamo concepire la costante di Boltzmann come costante dei gas *per molecola*.

L'Equazione (18.12) fornisce l'interpretazione molecolare della temperatura: *gia cinetica media di traslazione delle molecole e la temperatura sono proporzionali*. Quanto più elevata è la temperatura di un sistema, tanto maggiore è, probabilmente, l'energia cinetica media di traslazione delle molecole di quel sistema. L'Equazione (18.12) è stata ricavata prendendo in considerazione un gas perfetto monoatomico; ma la conclusione relativa all'energia cinetica media di traslazione $\langle K \rangle = \frac{3}{2} kT$, risulta valida per qualunque gas. La relazione $U = N\langle K \rangle$, invece, non è valida solo per un gas monoatomico, per il quale l'energia interna è costituita dalla sola energia cinetica di traslazione.

Se la temperatura di un sistema aumenta, le molecole si muovono in media più rapidamente. Possiamo esprimere questo fatto in termini di velocità introducendo la *velocità quadratica media* v_{qm} ,

$$v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

La velocità quadratica media è una delle grandezze che caratterizzano la distribuzione delle velocità molecolari, che discuteremo nel Paragrafo 18.7. Non si tratta della velocità media ma della radice quadrata della media del quadrato della velocità. Per dimostrarlo, come v_{qm} dipende dalla temperatura, ci serviamo della relazione $\langle K \rangle = \frac{1}{2} m v_{qm}^2$, ottenuta dall'Equazione (18.12) diventa

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

Risolvendo rispetto a $\langle v^2 \rangle$ e prendendo le radici quadrate dei due membri si ha

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Quindi la velocità quadratica media è proporzionale alla radice quadrata della temperatura Kelvin e inversamente proporzionale alla radice quadrata della massa molecolare.

Le Equazioni (18.12) e (18.14) implicano – erroneamente – che il moto molecolare cessi per $T \rightarrow 0$. Una delle nostre ipotesi, su cui si basano queste conclusioni, smette di essere valida se un sistema di molecole è a temperature estremamente basse: le leggi di Newton non descrivono in modo adeguato il moto di una molecola in queste condizioni, e si deve fare ricorso ai metodi della meccanica statistica quantistica. Questi effetti quantistici sono importanti nel comportamento di sistemi quali gli elettroni nella materia condensata e le fasi superfluide dell'elio liquido.

Esempio 18.2

Un sistema è costituito di 2.21 mol di Ar a 273 K. Determinare per questo gas (a) l'energia cinetica molecolare media, (b) l'energia interna, e (c) la velocità quadratica media. (d) Che valore ha v_{qm} per l'He alla stessa temperatura?

Soluzione

(a) L'energia cinetica media delle molecole è data dall'Equazione (18.12):

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(273 \text{ K}) = 5.65 \times 10^{-21} \text{ J}$$

(b) L'energia interna di questo gas perfetto monoatomico può essere calcolata ricorrendo all'Equazione (18.11). In alternativa, si può determinare il numero delle molecole del sistema:

$$N = nN_A = (2.21 \text{ mol})(6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}) = 1.33 \times 10^{24}$$

L'energia interna è allora

$$U = N\langle K \rangle = (1.33 \times 10^{24})(5.65 \times 10^{-21} \text{ J}) = 7.52 \text{ kJ}$$

(c) La massa di un atomo di Ar è $m = M/N_A$, dove M è la massa molecolare. Dalla tavola periodica (vedi Appendice E), si desume $M = 39.9 \text{ g/mol}$ e

$$m = \frac{0.0399 \text{ kg/mol}}{6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 6.63 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

La velocità quadratica media per l'Ar a questa temperatura è, in base all'Equazione (18.14):

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{(3)(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(273 \text{ K})}{6.63 \times 10^{-26} \text{ kg}}} = 413 \text{ m/s}$$

(d) La velocità quadratica media per l'He alla stessa temperatura può essere calcolata nel medesimo modo. Ma, dal momento che v_{qm} è inversamente proporzionale alla radice quadrata della massa molecolare, si può scrivere per l'He,

$$v_{qm} = 413 \text{ m/s} \sqrt{\left(\frac{m_{Ar}}{m_{He}}\right)}$$

e il rapporto tra le masse è $m_{Ar}/m_{He} = 39.9/4.00 = 9.98$. Quindi per l'He,

$$v_{qm} = 1300 \text{ m/s}$$

Si noti che le molecole dell'He, di massa minore, a parità di temperatura si muovono più rapidamente, in termini di velocità quadratica media, delle molecole di Ar di massa maggiore. ■

18.4 L'EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA

Secondo l'Equazione (18.12), l'energia cinetica media di traslazione delle molecole per un sistema a temperatura T è data da

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (18.15)$$

È utile ripercorrere gli ultimi due paragrafi per rintracciare l'origine del fattore 3 presente in questa espressione. Esso compare per la prima volta nell'Equazione (18.2) che dà la media del quadrato della velocità ($\langle v^2 \rangle$), ed è stato introdotto in virtù dell'equivalenza delle tre direzioni spaziali, ossia dell'equivalenza tra i valori medi dei quadrati

delle componenti della velocità:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$$

A causa di questa equivalenza, che ha le proprie radici nel fatto che le proprietà del sistema non dipendono dalla nostra scelta dell'orientazione del sistema di coordinate xyz , possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{2}kT$$

Sommendo questi tre contributi uguali si ottiene l'Equazione (18.15).

Il fattore 3 è connesso con i tre *gradi di libertà* traslazionali di una molecola monoatomica. Per i nostri scopi, ciascun grado di libertà corrisponde alla possibilità per una molecola di prendere parte a un moto in una dimensione che contribuisce all'energia meccanica di quella molecola.¹ Il concetto è illustrato nel modo migliore e più semplice di un grado di libertà traslazionale: una molecola può avere una componente della velocità nella direzione x , cui corrisponde un contributo all'energia meccanica $\frac{1}{2}mv_x^2$. [Si noti che, quantunque possiamo parlare di un contributo unidimensionale all'energia cinetica, l'energia cinetica di una molecola è $\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$.] D'altra parte, tenendo conto che vi sono tre direzioni spaziali in cui la molecola può muoversi, il gas perfetto monoatomico ha tre gradi di libertà, e l'energia meccanica media delle molecole $\langle E \rangle = \langle K \rangle$ è

$$\langle E \rangle = 3 \left(\frac{1}{2}kT \right)$$

Il principio di equipartizione dell'energia.

A una formulazione generale di questo risultato si dà il nome di *principio di equipartizione dell'energia*. Per un sistema di molecole a temperatura T , nel quale ogni molecola ha ν gradi di libertà, l'energia meccanica molecolare media $\langle E \rangle$ vale

$$\boxed{\langle E \rangle = \nu \left(\frac{1}{2}kT \right)} \quad (18.16)$$

L'Equazione (18.16) implica che ad ogni grado di libertà sia associata, in media, una quantità $\frac{1}{2}kT$ di energia meccanica. Per il gas perfetto monoatomico ci sono solo tre gradi di libertà traslazionali, $\nu = 3$, e si ritrova l'Equazione (18.12).

Le molecole dei gas biamericani o poliamericani (cioè con più di due atomi per molecola) possono avere ulteriori gradi di libertà corrispondenti a ulteriori contributi all'energia meccanica. Consideriamo la rotazione di una molecola biammerica come quella di H_2 , rappresentata schematicamente nella Figura 18.3a. Vi sono tre gradi di libertà traslazionali per il moto del centro di massa. La molecola può anche ruotare attorno a uno scuno dei due assi perpendicolari passanti per il centro di massa e normali al segmento che congiunge i due atomi. (Siccome concepiamo ogni atomo come un punto naturalmente non consideriamo la rotazione intorno alla retta passante per i due atomi.) C'è un contributo di energia cinetica rotazionale per ciascuno di questi due assi, e quindi vi sono due gradi di libertà rotazionali. Se tutti e cinque i gradi di libertà (tre traslazionali e due rotazionali) contribuiscono mediamente all'energia meccanica della molecola biammerica, l'energia meccanica media delle molecole del gas biammerico a temperatura

$$\langle E \rangle = 5 \left(\frac{1}{2}kT \right)$$

Può essere necessario prendere in considerazione anche i gradi di libertà vibratori. Una molecola biammerica, oltre a traslare e a ruotare, può avere un movimento vibratorio nel quale i due atomi sono in moto relativo, come mostra la Figura 18.3b. Si po-

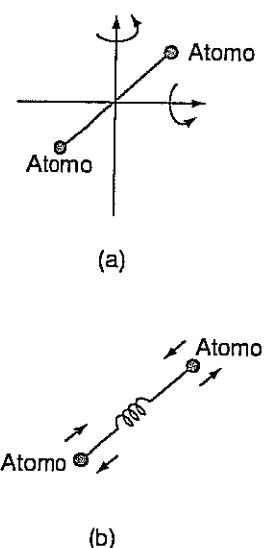


Figura 18.3

(a) Una molecola lineare biammerica può ruotare attorno a due assi perpendicolari passanti per il suo centro di massa. (b) Il moto relativo dei due atomi è vibratorio.

¹ Il numero di gradi di libertà di una molecola corrisponde al numero di modi indipendenti di assegnare energia e quindi al numero di termini quadratici che compaiono nell'espressione dell'energia classica di una molecola.

Si pensare i due atomi collegati da una molla e quindi dotati di un'energia potenziale di interazione. Un'analisi più approfondita indica che un'energia potenziale della forma $\frac{1}{2} kx^2$ fornisce un grado di libertà.

Si noti che questa energia potenziale è interna alla molecola: resta invece valida la nostra ipotesi che non vi sia alcuna energia potenziale di interazione tra le molecole del gas. Vi sono due gradi di libertà vibrazionali: uno è associato all'energia cinetica del moto relativo, e l'altro all'energia potenziale di interazione dei due atomi della molecola. Quindi all'energia meccanica di una molecola biamomica possono contribuire fino a sette gradi di libertà: tre traslazionali, due rotazionali e due vibrazionali. Nel prossimo paragrafo analizzeremo come il numero dei gradi di libertà coinvolti sia connesso alla capacità termica molare.

Esempio 18.3

Ogni molecola di un certo gas poliatomico a 1200 K ha tre gradi di libertà traslazionali, tre rotazionali e quattro vibrazionali che contribuiscono alla sua energia meccanica. Determinare (a) l'energia meccanica media delle molecole e (b) l'energia interna di 1.0 mol di questo gas perfetto.

Soluzione

(a) Con $v = 3 + 3 + 4 = 10$ gradi di libertà, l'energia meccanica media delle molecole è

$$\langle E \rangle = (10) \left(\frac{1}{2} \right) (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}) (1200 \text{ K}) = 8.3 \times 10^{-20} \text{ J}$$

(b) L'energia interna è costituita dall'energia meccanica totale delle molecole:

$$U = N\langle E \rangle = nN_A\langle E \rangle \\ = (1.0 \text{ mol})(6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(8.3 \times 10^{-20} \text{ J}) = 50 \text{ kJ}$$

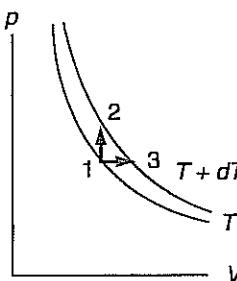
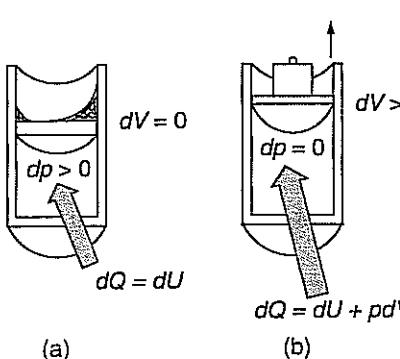


18.5 CAPACITÀ TERMICHE DEI GAS PERFETTI E DEI SOLIDI ELEMENTARI

Quando a un sistema viene fornito calore a volume costante, come mostra la Figura 18.4a, non viene compiuto lavoro ($dW = pdV = 0$). Conformemente al primo principio della termodinamica, il calore dQ fornito va interamente ad accrescere l'energia interna: $dQ = dU$. La quantità di calore fornita a volume costante può essere espressa in termini della capacità termica molare a volume costante C_V . Cioè, $dQ = nC_VdT$, dove n è il numero delle moli che formano il sistema e dT è la variazione di temperatura prodotta. Poiché $dU = dQ = nC_VdT$, si ha

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad (18.17)$$

dove si intende che la derivata dU/dT sia calcolata a volume costante. Dal momento che conosciamo, grazie alla teoria cinetica, la dipendenza dell'energia interna di un gas perfetto dalla temperatura, possiamo calcolare la capacità termica molare C_V del sistema in base all'Equazione (18.17).



(a)

(b)

(c)

Figura 18.4

(a) Il pistone rimane fermo e a un gas viene fornito calore a volume costante. (b) Al gas viene fornito calore a pressione costante. Il pistone scorre verso l'alto in modo che p sia costante. (c) La trasformazione $1 \rightarrow 2$ corrisponde alla trasformazione a volume costante della parte (a). La trasformazione $1 \rightarrow 3$ corrisponde alla trasformazione a pressione costante della parte (b).

Consideriamo C_V per un gas perfetto monoatomico. L'espressione desunta da cinetica per l'energia interna di un gas perfetto monoatomico è data dall'Eq (18.11):

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

Servendoci dell'Equazione (18.17), calcoliamo la derivata dU/dT a volume (U è indipendente da V per il gas perfetto) e otteniamo

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{d}{dT} \left(\frac{3}{2} nRT \right) = \frac{3}{2} R$$

La capacità termica molare a volume costante è una costante, $\frac{3}{2} R$, per qualunque gas perfetto monoatomico.

Quando a un gas viene fornito calore a *pressione costante*, come mostra la Figura 18.4b, non soltanto varia l'energia interna, ma viene anche compiuto lavoro. Di conseguenza, la capacità termica molare a pressione costante C_p è maggiore. Il calcolo del valore di C_p non è affatto semplice. Per un gas perfetto, tuttavia, determinare C_p rispetto a C_V nel modo seguente: nella Figura 18.4c sono rappresentate in un diagramma p-V due trasformazioni infinitesime (ingrandite) per un gas, una a volume costante e una a pressione costante. A entrambe le trasformazioni corrisponde la stessa variazione di temperatura dT . Inoltre esse comportano la stessa variazione di energia interna dU perché l'energia interna di un gas perfetto varia soltanto dalla temperatura. Quindi, per la medesima variazione di temperatura, la variazione di energia interna di un gas perfetto è la stessa sia che venga mantenuta costante la pressione, sia che venga mantenuto costante il volume, e per l'Eq (18.17)

$$dU = nC_V dT$$

Il lavoro $p dV$ effettuato dal gas durante la trasformazione a pressione costante può essere espresso in funzione della variazione di temperatura differenziando l'equazione dello stato dei gas perfetti, $pV = nRT$:

$$pdV + Vdp = nRdT$$

Ma $Vdp = 0$ per una trasformazione a pressione costante, e perciò

$$p dV = nR dT \quad (\text{per una trasformazione a pressione costante})$$

Sostituendo queste espressioni di dU e $p dV$ nel primo principio della termodinamica $dQ = dU + p dV$, si ha

$$dQ = nC_V dT + nRdT$$

Siccome $dQ = nC_p dT$ per la trasformazione a pressione costante, si ha

$$nC_p dT = nC_V dT + nRdT.$$

Risolvendo rispetto a C_p si ottiene

$$C_p = C_V + R \quad (18.18)$$

Quindi, per un *gas perfetto* C_p e C_V differiscono della costante universale dei $C_p - C_V = R$. Se si è in grado di calcolare C_V , si può ottenere C_p sommando C_V .

Per il gas perfetto monoatomico, $C_V = \frac{3}{2} R$; pertanto $C_p = \frac{3}{2} R + R = \frac{5}{2} R$

Gas biatomici e poliatomici. Le capacità termiche molari di alcuni gas biatomici e poliatomici possono essere calcolate utilizzando il principio di equipartizione dell'energia. Supponiamo che le molecole di un gas abbiano v gradi di libertà; allora l'Equazione (18.16), l'energia meccanica media delle molecole è

$$\langle E \rangle = v \left(\frac{1}{2} kT \right)$$

La capacità termica molare C_V per un gas perfetto monoatomico.

Per un gas perfetto, $C_p - C_V = R$.

L'energia interna di un gas con $N = nN_A$ molecole è

$$U = N\langle E \rangle = nN_A v \left(\frac{1}{2} kT \right) = nv \left(\frac{1}{2} N_A kT \right) = nv \left(\frac{1}{2} RT \right)$$

dove $N_A k = R$. La capacità termica molare C_V è, per l'Equazione (18.17),

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{d}{dT} \left(nv \frac{1}{2} RT \right) = \frac{1}{2} vR$$

$C_p = C_V + R$. Quindi le capacità termiche di un gas perfetto possono essere previste in base al numero dei gradi di libertà attivi delle molecole.

Fino a che punto i valori previsti delle capacità termiche molari si accordano con i valori sperimentali? Nella Tabella 18.1 vengono forniti i raffronti tra i valori misurati e quelli calcolati per diversi gas. I primi gas elencati sono monoatomici, quelli che seguono sono biatomici, e gli ultimi sono poliatomici. Nella tabella sono riportati i valori misurati di C_V , $C_p - C_V$, e il rapporto tra le capacità termiche $\gamma = C_p/C_V$. I valori calcolati in base alla teoria cinetica compaiono, per ciascun gruppo di gas, tra parentesi quadre.

Tabella 18.1 I valori della capacità termica molare per alcuni gas a 25 °C.

Gas	C_V , $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	$C_p - C_V$, $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\gamma = C_p/C_V$
He	12.8	8.04	1.63
Ne	12.7	8.12	1.64
Ar	12.6	8.20	1.65
Kr	12.3	8.49	1.69
valore teorico	[12.5]	[8.31]	[1.67]
H ₂	20.6	8.25	1.40
N ₂	20.8	8.33	1.40
O ₂	21.1	8.33	1.40
Cl ₂ *	25.7	8.46	1.33
valore teorico	[20.8]	[8.31]	[1.40]
CO ₂	28.5	8.50	1.30
NH ₃	28.5	8.79	1.31
C ₂ H ₆	43.1	8.58	1.20
valore teorico	[24.9]	[8.31]	[1.33]

* A 15 °C.

Per i gas monoatomici, l'accordo è buono. I valori calcolati, corrispondenti ai tre gradi di libertà traslazionali, sono $C_V = 3R/2 = 12.5 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$, $C_p - C_V = R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$ e $\gamma = (5R/2)/(3R/2) = 5/3 = 1.67$. Ne concludiamo che la teoria cinetica può essere applicata in modo soddisfacente alla descrizione delle capacità termiche dei gas monoatomici a temperature moderate.

I dati relativi ai gas biatomici e poliatomici presentano una minor regolarità, benché per alcuni di essi l'accordo con la teoria cinetica sia accettabile. Per i gas biatomici i valori teorici sono calcolati in base all'ipotesi di cinque gradi di libertà attivi, tre traslazionali e due rotazionali. Così, $C_V = 5R/2$, $C_p - C_V = R$ e $\gamma = (7R/2)/(5R/2) = 7/5 = 1.40$. Per i gas poliatomici, i valori sono calcolati sul presupposto di sei gradi di libertà attivi, tre traslazionali e tre rotazionali. I valori calcolati sono $C_V = 6R/2$, $C_p - C_V = R$ e $\gamma = 8/6 = 1.33$. Si suppone che i gradi di libertà vibrazionali siano «inattivi» in tutti i casi a questa temperatura (25 °C).

Il mancato accordo tra l'esperimento e le previsioni della teoria cinetica è connesso all'idea di gradi di libertà «attivi» e «inattivi». A una data temperatura, alcuni dei gradi di libertà vibrazionali non partecipano effettivamente alla ri-

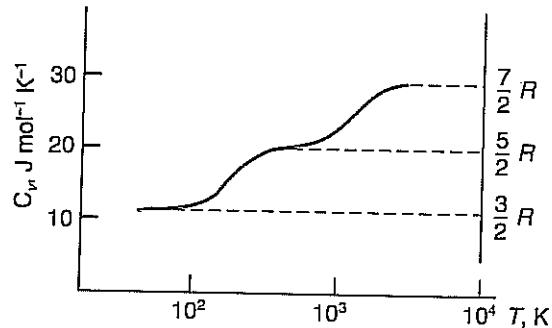
partizione dell'energia scambiata tra le molecole negli urti. Questa mancata *azione non trova alcuna giustificazione nella fisica newtoniana o classica. Una comprensione della capacità termica dei gas perfetti può venire soltanto dalla meccanica statistica quantistica. Tuttavia le sue caratteristiche possono essere espresse sotto forma di una dipendenza dalla temperatura de di gradi di libertà attivi.*

Questa dipendenza dalla temperatura è illustrata graficamente nella Figura il caso del gas biatomico H_2 . A basse temperature sono attivi soltanto i tre gradi di libertà traslazionali e $C_V = 3R/2$. A temperature più elevate, due dei gradi di libertà traslazionali «si scongelano» e diventano attivi mentre C_V sale a $5R/2$. A temperature ancora più alte, i gradi di libertà vibrazionali cominciano a partecipare, ma le molecole si dissociano prima che questi ulteriori gradi di libertà diventino pienamente attivi.

Si noti che $C_p - C_V$ è relativamente prossima al valore previsto R per i valori elencati nella Tabella 18.1. Il risultato $C_p - C_V = R$ è stato ricavato utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti e la dipendenza dalla sola temperatura dell'energia interna del gas perfetto. Il risultato è indipendente dal numero dei gradi di libertà. Le deviazioni dall'ugualità $C_p - C_V = R$ presenti nella tabella si verificano laddove i gas sono lontani da essere perfetti.

Figura 18.5

La capacità termica molare dell' H_2 aumenta con la temperatura. Si noti che la scala delle temperature è logaritmica. L'idrogeno molecolare si dissocia a circa 3200 K.



Capacità termica molare di un solido. Il principio di equipartizione dell'energia può essere applicato a un semplice modello di solido per calcolare la sua capacità termica molare. In questo modello, rappresentato schematicamente nella Figura 18.6, si ammette che i singoli atomi vibrino intorno alle loro posizioni di equilibrio e fossero connessi da molle ideali. (Consideriamo per semplicità soltanto solidi elementari con un atomo per molecola.) Per ciascun atomo ci sono tre gradi di libertà traslazionali e tre gradi di libertà vibrazionali per le vibrazioni indipendenti nelle tre dimensioni. L'energia interna del solido con N atomi è costituita dall'energia cinetica e dall'energia potenziale delle molecole in vibrazione, ciascuna dotata di sei gradi di libertà.

$$U = N\langle E \rangle = N\nu\left(\frac{1}{2}kT\right) = N \cdot 6\left(\frac{1}{2}kT\right) = 3NkT$$

Figura 18.6

Un semplice modello di solido elementare è formato da atomi identici connessi da molle.

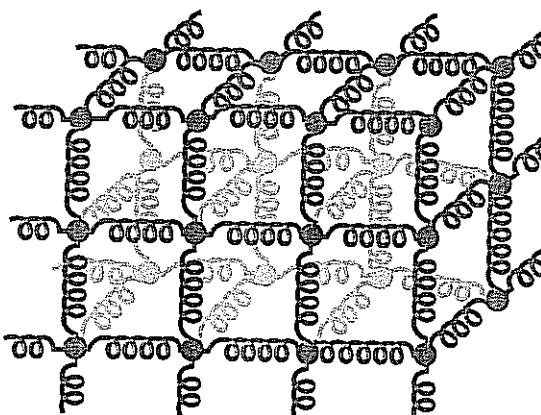


Tabella 18.2 Valori della capacità termica molare per alcuni solidi elementari a 25 °C ($\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$).

Solido	C_p	Solido	C_p
Al	24.4	Pb	26.7
Sb	25.2	K	29.6
Ba	26.4	Se	25.4
C (diamante)	8.6	Ag	25.5
Cu	24.5	S	22.6
Au	25.4	W	24.4
Fe	25.0	Zn	25.4

Ossia, siccome $Nk = nN_A k = nR$,

$$U = 3nRT$$

La capacità termica molare a volume costante si ottiene applicando l'Equazione (18.17):

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{d}{dT} (3nRT) = 3R$$

I nostri calcoli portano alla previsione che la capacità termica molare C_V dei solidi elementari sia uguale per tutti questi solidi, il suo valore essendo $3R = 24.9 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Nella Tabella 18.2 sono elencati alcuni valori della capacità termica molare a temperatura ambiente. Per i solidi tipici, le capacità termiche C_p e C_V hanno praticamente lo stesso valore, e per solito si misura C_p . (Perché è più facile misurare C_p che C_V per un solido o un liquido?) Con poche eccezioni, la capacità termica molare dei vari solidi è prossima al valore $3R$, indipendentemente dalla temperatura, in accordo con le conclusioni cui siamo giunti sopra. Questo risultato di carattere empirico è noto come legge di Dulong e Petit.

La capacità termica di un solido presenta tuttavia una dipendenza dalla temperatura a temperature più basse, dove alcuni dei gradi di libertà diventano inattivi. La Figura 18.7 mostra la tipica dipendenza dalla temperatura della capacità termica molare di un solido elementare, dipendenza dovuta alle vibrazioni atomiche. Alle basse temperature, C_p è approssimativamente proporzionale a T^3 e tende a zero al tendere di T a zero. A temperature più elevate, la capacità termica molare si stabilizza sul valore $3R$ previsto dalla legge di Dulong e Petit.

La legge di Dulong e Petit,
 $C_p = 3R$.

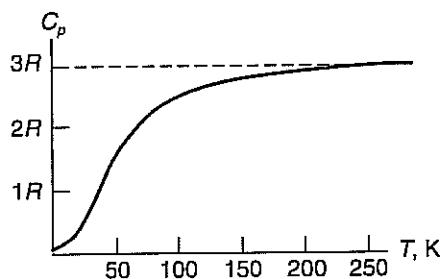


Figura 18.7

La capacità termica molare dell'Ag a basse temperature è approssimativamente proporzionale a T^3 . Essa tende al valore $3R$ di Dulong e Petit a temperature più elevate. Alla capacità termica molare contribuiscono anche gli elettroni, e tale contributo diventa significativo al di sotto di 4 K circa.

Esempio 18.4

Stimare la capacità termica molare C_p (a) del gas Ne, (b) del gas N_2 e (c) di Pb solido, tutti a 400 K.

Soluzione

(a) Il neon è un gas monoatomico con tre gradi di libertà traslazionali. La sua capacità termica molare C_V è pertanto $3R/2$ e

$$C_p = C_V + R = \frac{5R}{2} = 21 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

(b) Per il gas biatomico N_2 , ammettiamo che vi siano due gradi di libertà rotazionali oltre ai tre traslazionali. Pertanto $C_V = 5R/2$, e

$$C_p = C_V + R = \frac{7R}{2} = 29 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

(c) Pb solido a questa temperatura dovrebbe presentare il valore asintotico $3R$:

$$C_p = 3R = 25 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

18.6 TRASFORMAZIONE ADIABATICA DI UN GAS PERFETTO

Molti processi importanti si verificano in modo sufficientemente rapido | quantità di calore scambiata sia trascurabile (trasformazioni adiabatiche). Per la compressione della miscela carburante-aria nel motore di un'automobile è mativamente adiabatica. Le variazioni della densità e della pressione producono da un'onda sonora sono adiabatiche (si veda il Problema 18.4). Se un gas perfetto subisce una trasformazione adiabatica quasi-statica, esso passa per una successione di stati di equilibrio rappresentata da una curva in un diagramma p - V .

Questa curva dipende dal valore di $\gamma = C_p/C_V$ per il gas (vedi Tabella 18.1). Mostriremo che i valori della pressione e del volume di questo insieme di stati sfano la relazione

$$pV^\gamma = K$$

dove K è una costante determinata dallo stato iniziale del sistema.

Per ricavare l'Equazione (18.19) a partire dalle proprietà del gas perfetto, faremo un passo infinitesimo della trasformazione adiabatica. Vogliamo trovare la relazione tra la variazione della pressione dp e quella del volume dV , eliminando la variazione della temperatura dT . Applicando alla trasformazione adiabatica il principio, si ha

$$dQ = 0 = dU + pdV$$

Utilizziamo l'Equazione (18.17) per esprimere $dU = nC_VdT$ in termini di variazione di temperatura dT , cosicché $0 = nC_VdT + pdV$. Da questa espressione ricaviamo dT :

$$dT = -\frac{pdV}{nC_V} \quad (\text{trasformazione adiabatica})$$

Un'altra espressione di dT può essere ottenuta dall'equazione di stato del gas perfetto $pV = nRT$, prendendone il differenziale, $pdV + Vdp = nRdT$, ossia

$$dT = \frac{pdV + Vdp}{nR} \quad (\text{gas perfetto})$$

Eliminando dT (e n) tra queste due espressioni, si ha

$$p dV + V dp = -\frac{R}{C_V} p dV = -\frac{C_p - C_V}{C_V} p dV = -(\gamma - 1)p dV$$

dove abbiamo utilizzato sia la relazione $R = C_p - C_V$ che la relazione $\gamma = C_p/C_V$. Riordinando l'equazione otteniamo

$$V dp = -\gamma p dV$$

ossia

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

per la trasformazione adiabatica infinitesima. Per variazioni finite di p e V otegrare (servendoci dell'integrale indefinito con una costante di integrazione):

$$\int \frac{dp}{p} = - \int \gamma \frac{dV}{V} + \text{costante}$$

ossia

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{costante}$$

dove si è ammesso che γ non vari nel dominio di integrazione. Le proprietà del logaritmo ci consentono di scrivere questa relazione come

$$\ln p V^\gamma = \text{costante}$$

ossia

$$p V^\gamma = K$$

dove K è una costante. Questa è l'Equazione (18.19).

Durante una trasformazione adiabatica, la pressione e il volume del gas perfetto variano, ma in modo tale che sia soddisfatta l'Equazione (18.19). Possiamo scegliere due qualsiasi stati del sistema connessi da una trasformazione adiabatica – supponiamo che uno di essi sia lo stato iniziale i – e applicare l'Equazione (18.19), $p V^\gamma = K = p_i V_i^\gamma$, ovvero

$$p V^\gamma = p_i V_i^\gamma$$

Questa equazione può essere risolta rispetto a una delle variabili, per esempio rispetto

$$p = \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma} \quad (18.20)$$

Questa espressione mostra come la pressione del gas perfetto vari con il volume in una trasformazione adiabatica quasi-statica. L'espressione è rappresentata in un diagramma p - V da una curva come quella di Figura 18.8, relativa a un gas con $\gamma = 1.40$. Nella figura sono riportate, per confronto, anche due isoterme ($pV = nRT = \text{costante}$, per una trasformazione isoterma). L'adiabatica passante per un punto del diagramma è più ripida di un'isotermica passante per lo stesso punto (si veda il Problema 18.1).

Esempio 18.5

In un cilindro di un motore diesel, l'aria inizialmente a pressione atmosferica e a 310 K occupa un volume di 0.420 l. Essa viene compressa in modo quasi-statico e adiabatico fino a raggiungere un volume di 0.028 l (rapporto di compressione 15). Determinare i valori finali (a) della pressione e (b) della temperatura.

Soluzione

(a) Usando l'Equazione (18.20) e il valore $\gamma = 1.40$ per l'aria (si vedano i valori relativi a N_2 e a O_2 nella Tabella 18.1), si ottiene

$$p_f = p_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma = (101 \text{ kPa}) \left(\frac{0.420}{0.028} \right)^{1.40} = 4500 \text{ kPa}$$

(b) La temperatura può essere determinata impiegando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$T_f = T_i \frac{p_f V_f}{p_i V_i} = 310 \text{ K} \frac{(4500 \text{ kPa})(0.028 \text{ l})}{(101 \text{ kPa})(0.420 \text{ l})} = 920 \text{ K}$$

Sai noti che la temperatura del gas aumenta in seguito alla compressione adiabatica. Che cosa succede in un'espansione adiabatica?

Esempio 18.6

Determinare, per la compressione adiabatica dell'esempio precedente, (a) il lavoro compiuto dall'aria e (b) la variazione dell'energia interna dell'aria.

Soluzione

(a) Il lavoro compiuto dal gas in una trasformazione adiabatica quasi-statica può essere calcolato per mezzo dell'Equazione (18.20):

$$\begin{aligned} W &= \int p dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma} dV = p_i V_i^\gamma \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{1}{V_f^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_i^{\gamma-1}} \right) \\ &= p_i V_i \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{V_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} - \frac{V_f^{\gamma-1}}{V_i^{\gamma-1}} \right) = \frac{p_i V_i}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} \right] \\ &= \frac{(101 \text{ kPa})(0.42 \text{ l})}{0.40} \left[1 - \left(\frac{0.42}{0.028} \right)^{0.40} \right] = -210 \text{ J} \end{aligned}$$

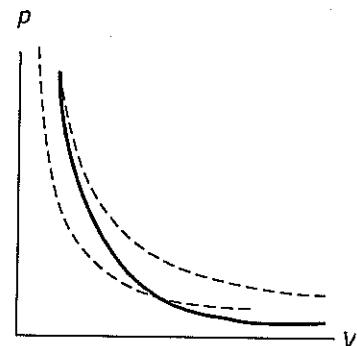


Figura 18.8

La curva continua rappresenta una trasformazione adiabatica quasi-statica di un gas perfetto. Le linee tratteggiate rappresentano due isoterme.

(b) La variazione dell'energia interna è, per il primo principio,

$$\Delta U = Q - W = 0 - (-210 \text{ J}) = 210 \text{ J}$$

In alternativa, è possibile determinare n a partire dall'equazione di stato dei $p_i V_i = nRT_i$, $n = 0.016 \text{ mol}$, e allora

$$\Delta U = nC_V\Delta T = (0.016 \text{ mol})(21 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1})(610 \text{ K}) = 200 \text{ J}$$

Il valore di C_V è stato desunto da quelli di N_2 e O_2 riportati nella Tabella 18.1. Durante la svolta adiabatica, il sistema compie un lavoro negativo mentre l'energia interna aumenta. Perché questi due valori (calcolati) di ΔU sono leggermente diversi?

18.7 LA DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ MOLECOLARI

La media del quadrato della velocità $\langle v^2 \rangle$ e la sua radice quadrata, la velocità media v_{qm} , sono state correlate alle proprietà macroscopiche dei gas. Abbiamo considerato i valori medi perché l'esperimento mostra che le molecole di un gas hanno una distribuzione di velocità: alcune molecole hanno velocità minori di v_{qm} , altre hanno velocità maggiori di v_{qm} . C'è uno spettro di velocità che si estende a valori piuttosto elevati.

La distribuzione delle velocità è descritta da una *funzione di distribuzione*, quale è definita in modo che, delle N molecole presenti nel sistema, il numero di quelle che hanno un valore della velocità compreso tra v e $v + \Delta v$ sia dato da

$$\Delta N = f(v)\Delta v$$

In altri termini, $f(v)$ è il numero di molecole per intervallo unitario di velocità. Il termine che solitamente si considera molto grande il numero totale delle molecole opera nel limite in cui Δv tende a zero, cosicché

$$dN = f(v)dv$$

è il numero delle molecole con velocità compresa tra v e $v + dv$. Integrando su questa velocità si ottiene il numero totale delle molecole:

$$N = \int_0^\infty f(v)dv$$

La funzione di distribuzione per le velocità molecolari fu ricavata per la prima volta da James Clerk Maxwell (1831-1879), il quale applicò concetti di carattere statistico casuale delle molecole dei gas. Questa distribuzione delle velocità molecolari ha la forma

$$f(v) = A v^2 \exp \frac{-\frac{1}{2}mv^2}{kT} \quad (1)$$

dove k è la costante di Boltzmann e m è la massa molecolare. Il fattore A è indipendente dalla velocità molecolare v :

$$A = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$$

(Il Problema 18.6 prende in considerazione una tecnica sperimentale per la misura della distribuzione delle velocità molecolari.)

La forma della funzione di distribuzione è rappresentata graficamente nella Figura 18.9a per Ar a 200 K, e nella Figura 18.9b per Ar a 600 K. A entrambe le temperature il numero delle molecole con velocità molto bassa è piccolo; e non vi sono neppure molte molecole con velocità assai elevate. Al crescere della temperatura, la distribuzione si sposta verso velocità più alte e si allarga. L'area sottostante all'intera curva, ossia all'integrale di $f(v)$ su tutte le velocità, rappresenta il numero totale delle molecole. Quindi l'area è la stessa per entrambi i grafici di Figura 18.9; essa corrisponde a una scelta di $N = 10^{23}$ molecole, circa 1/6 di mole.

La funzione di distribuzione $f(v)$ fornisce la distribuzione delle velocità molecolari.

Distribuzione delle velocità molecolari per un gas perfetto.

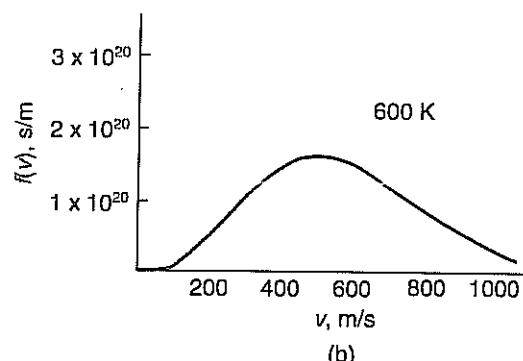
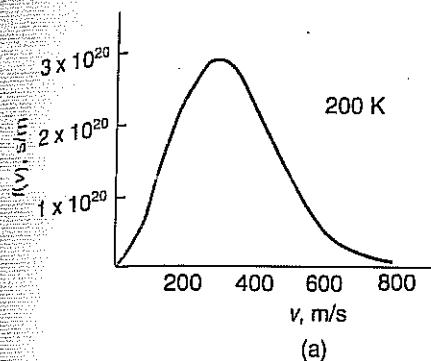


Figura 18.9
La distribuzione delle velocità molecolari per Ar (a) a 200 K e (b) a 600 K. Il numero totale delle molecole è 1×10^{23} .

L'allargamento della distribuzione al crescere della temperatura deriva dal fattore T presente nel denominatore dell'argomento della funzione esponenziale, $\exp\left(-\frac{1}{2}mv^2/kT\right)$. Un minor valore della massa molecolare presente nel numeratore dell'argomento avrebbe, sull'aspetto della funzione di distribuzione, il medesimo effetto di un aumento della temperatura. Vale a dire che la distribuzione delle velocità molecolari è più larga, a parità di temperatura, per un gas di massa molecolare minore che per un gas di massa molecolare maggiore. Per esempio, la Figura 18.9b potrebbe anche rappresentare la distribuzione delle velocità per He, che ha una massa molecolare pari a 1/10 di quella di Ar, alla temperatura di 60 K.

Nel grafico della Figura 18.10 è indicato il valore della velocità quadratica media v_{qm} . Ne abbiamo già determinato il valore in funzione della massa molecolare m e della temperatura, Equazione (18.14):

$$v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Il suo valore può anche essere ricavato utilizzando la funzione di distribuzione per calcolare la media del quadrato della velocità. Dal momento che $f(v)dv$ è il numero delle molecole con velocità compresa tra v e $v + dv$, la media del quadrato della velocità (la media di v^2) è data da

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty v^2 f(v) dv}{N}$$

Integrali di questo tipo, una volta fatto il cambio di variabile $x = \frac{1}{2}mv^2/kT$, possono essere calcolati ricorrendo a una qualsiasi tabella di integrali. Il risultato è $\langle v^2 \rangle = 3kT/m$, cosicché $v_{qm} = \sqrt{3kT/m}$, come previsto.

Individuiamo altre due velocità caratteristiche: una è la velocità media. Si noti che con $\langle v \rangle$ intendiamo lo scalare valore medio del modulo della velocità, ben diverso dal vettore valore medio della velocità $\langle \mathbf{v} \rangle$, che è nullo. Si ottiene la velocità media facendo la media dei moduli delle velocità delle molecole. Ciascun valore della velocità v viene moltiplicato per il numero delle molecole che hanno quella velocità, $f(v)dv$. Il risultato viene poi sommato o integrato e diviso per il numero totale delle molecole:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^\infty v f(v) dv}{N}$$

Anche questo integrale può essere calcolato ricorrendo alle tabelle, con il risultato,

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Confrontando la velocità media $\langle v \rangle$ con $v_{qm} = \sqrt{3kT/m}$, si trova che $\langle v \rangle < v_{qm}$, poiché $8/\pi p < 3$.

La terza velocità caratteristica è chiamata velocità più probabile v_m , e corrisponde al picco, ossia al valore massimo, della funzione di distribuzione. Ci sono più molecole con questa velocità che con qualunque altra. Il suo valore si ottiene derivando la

La velocità quadratica media:
 $v_{qm} = \sqrt{3kT/m}$

La velocità media:
 $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m}$

funzione di distribuzione $f(v)$ e uguagliando a zero la derivata. Il risultato è
Esercizio 18.35)

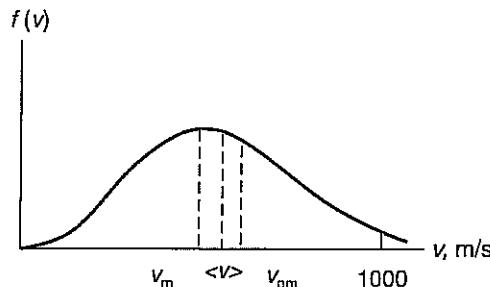
La velocità più probabile:
 $v_m = \sqrt{2kT/m}$.

Queste tre velocità sono indicate nel grafico della Figura 18.10. Tra esse sussiste
pre la relazione

$$v_m < \langle v \rangle < v_{qm}$$

Figura 18.10

Nel grafico sono indicate tre
velocità caratteristiche per il caso
della Figura 18.9b. I valori sono
 $v_m = 500$ m/s, $\langle v \rangle = 560$ m/s,
 $v_{qm} = 610$ m/s.



Esempio 18.7

L'aria è una miscela di gas, prevalentemente N₂ e O₂ con piccole quantità di altri gas. Ciascuna componente alla temperatura T ha una funzione di distribuzione data dall'Equazione (18.21). Determinare la velocità maggiormente probabile, la velocità media, e la velocità quadratica delle molecole di O₂ nell'aria a 300 K. (b) Determinare gli analoghi valori per H₂.

Soluzione

(a) La massa di una molecola di O₂ è $m = M/N_A$, ove $M = 32$ g/mol è il peso molecolare:

$$m = \frac{0.032 \text{ kg/mol}}{6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 5.3 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Il fattore kT/m è necessario per il calcolo di tutte e tre le velocità:

$$\frac{kT}{m} = \frac{(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}{5.3 \times 10^{-26} \text{ kg}} = 7.8 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Allora

$$\begin{aligned} v_m &= \sqrt{2 \left(\frac{kT}{m} \right)} = 390 \text{ m/s} \\ \langle v \rangle &= \sqrt{\frac{8}{\pi} \left(\frac{kT}{m} \right)} = 450 \text{ m/s} \\ v_{qm} &= \sqrt{3 \left(\frac{kT}{m} \right)} = 480 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(b) Nel caso di H₂ basta introdurre il corretto valore della massa, circa 1/16 della massa della molecola di O₂. Poiché le velocità sono inversamente proporzionali alla radice quadrata della massa molecolare, le velocità per H₂ sono 4 volte maggiori di quelle di O₂:

$$\begin{aligned} v_m &= 1.6 \text{ km/s} \\ \langle v \rangle &= 1.8 \text{ km/s} \\ v_{qm} &= 1.9 \text{ km/s} \end{aligned}$$

RIEPILOGO

Paragrafo 18.2 Modello molecolare di un gas perfetto
Un modello molecolare di un gas perfetto si basa sulle seguenti ipotesi: il numero delle molecole è molto grande, le molecole si comportano come punti materiali, le leggi di Newton sono valide per i moti molecolari, gli urti sono elastici, e le molecole si muovono casualmente.

La media del quadrato della velocità è definita da $\langle v^2 \rangle = \sum v^2$ ed è correlata alla pressione del gas dalla

$$pV = \frac{1}{3} Nm \langle v^2 \rangle \quad (1)$$

Paragrafo 18.3**L'interpretazione microscopica della temperatura**

L'energia interna di un gas perfetto monoatomico è data da

$$U = \frac{3}{2} nRT \quad (18.11)$$

La temperatura viene interpretata a livello molecolare in termini dell'energia cinetica media di traslazione delle molecole:

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (18.12)$$

La radice quadrata della media del quadrato della velocità, o velocità quadratica media, $v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, dipende dalla temperatura e dalla massa molecolare:

$$v_{qm} = \frac{3kT}{m} \quad (18.14)$$

Paragrafo 18.4 L'equipartizione dell'energia

L'energia media di una molecola con ν gradi di libertà attivi è

$$\langle E \rangle = \nu \frac{1}{2} kT \quad (18.16)$$

In media, ad ogni grado di libertà è associata un'energia $\frac{1}{2} kT$.

Paragrafo 18.5 Capacità termiche dei gas perfetti e dei solidi elementari

Le capacità termiche molari C_V e C_p di un gas perfetto con ν gradi di libertà attivi sono date da

$$C_V = \frac{1}{2} \nu R \quad C_p = C_V + R$$

QUESITI

- 18.1** Spiega perché $\langle v \rangle$ è diversa da zero mentre $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$, e quindi $\langle v \rangle = 0$.
- 18.2** Per un gas perfetto, $\langle v \rangle < v_{qm}$, ossia $\langle v \rangle^2 < \langle v^2 \rangle$. Vale a dire che il *quadrato della velocità media* è minore della *media del quadrato della velocità*. È possibile che in qualche circostanza $\langle v \rangle^2$ sia uguale o maggiore di $\langle v^2 \rangle$? Spiega.
- 18.3** In un gas puro, tutte le molecole sono identiche e hanno la medesima massa. L'energia cinetica media di traslazione è ancora data da $\frac{3}{2} kT$ per una miscela di gas come l'aria? Spiega.
- 18.4** Dimostra che l'equazione di stato dei gas perfetti può essere scritta come $pV = NkT$ e identifica la N di questa equazione.
- 18.5** Anche le pareti di un recipiente pieno di gas sono fatte di molecole. Quindi una molecola del gas che urta contro una parete che ha la stessa temperatura del gas in realtà urta contro una o più molecole. Come possiamo giustificare, con considerazioni sulle medie, la nostra ipotesi che la componente perpendicolare della velocità di una molecola semplicemente si inverta in un urto contro la parete?
- 18.6** L'energia potenziale gravitazionale di interazione con la Terra delle molecole di un gas può essere trascurata in confronto con l'energia cinetica delle molecole? E l'energia potenziale gravitazionale di interazione delle molecole tra di loro? Spiega.
- 18.7** Considera l'aria contenuta in un pallone da basket. Durante una partita, il vettore $\langle v \rangle$ è uguale a zero per l'aria? Spiega.
- 18.8** Una molecola di un liquido deve avere un'energia cinetica minima caratteristica per poter evaporare. Perché un liquido come l'acqua in un recipiente aperto si raffredda per evaporazione?
- 18.9** Perché C_p deve essere maggiore di C_V per un gas? Questa conclusione vale anche per i liquidi e i solidi? Spiega.
- 18.10** Se il modulo della velocità di una molecola può cambiare in seguito all'urto con un'altra molecola, come mai la funzione di distribuzione $f(v)$ è indipendente dal tempo? Spiega.
- 18.11** Se la funzione di distribuzione dipende dal tempo, $f(v, t)$, il gas può essere in equilibrio? Spiega.
- 18.12** Che cosa accade alla temperatura di un gas perfetto che viene compresso adiabaticamente?
- 18.13** Perché la temperatura di un gas durante una trasformazione adiabatica cambia, nonostante non vi siano scambi di calore con l'ambiente? (*Suggerimento*: Si consideri la variazione di velocità di una molecola che urta contro una parete mobile.)
- 18.14** Supponiamo che due pareti opposte di un recipiente pieno di gas vengano mantenute a temperature differenti. Tramite quale meccanismo basato sugli urti molecolari

A temperature sufficientemente elevate, la capacità termica molare di un solido elementare risulta essere, in base a un semplice modello, $C_V = 3R$, mentre $C_p \approx C_V$. Questo modello ipotizza tre gradi di libertà traslazionali e tre vibrazionali per ciascun atomo.

Paragrafo 18.6**Trasformazione adiabatica di un gas perfetto**

Un gas perfetto che subisce una trasformazione adiabatica quasi-statica assume valori della pressione e del volume che soddisfano la

$$pV^\gamma = K \quad (18.19)$$

dove K è una costante e $\gamma = C_p/C_V$.

Paragrafo 18.7**La distribuzione delle velocità molecolari**

La distribuzione delle velocità molecolari per un gas perfetto è data da

$$f(v) = A v^2 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}mv^2}{kT}\right) \quad (18.21)$$

dove $A = 4\pi N(m/2\pi kT)^{3/2}$. Tre velocità che contribuiscono a caratterizzare la distribuzione sono la velocità maggiormente probabile, $v_m = \sqrt{2kT/m}$; la velocità media, $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m}$, e la velocità quadratica media, $v_{qm} = \sqrt{3kT/m}$.

avviene la conduzione del calore in questo gas? Si noti che il gas non ha temperatura uniforme.

- 18.15** Perché è improprio parlare di temperatura di una molecola? E di un sistema di 100 molecole? Quante molecole deve contenere un sistema perché abbia senso parlare di temperatura di quel sistema?
- 18.16** Immaginiamo un'enorme astronave interstellare popolata da miliardi di esseri umani che fluttuano disordinatamente al suo interno. Questi esseri umani di tanto in tanto urtano tra loro e con le pareti dell'astronave. Ha senso parlare di un gas di esseri umani (antropogas)? Se sì, si stimi la v_{qm} degli umani.
- 18.17** A quali valori tendono le differenze $v_{qm} - \langle v \rangle$ e $\langle v \rangle - v_m$ quando la temperatura di un gas si abbassa? Descrivere il modo in cui cambia la forma del grafico della funzione di distribuzione quando la temperatura si abbassa.
- 18.18** La velocità del suono in He è maggiore della velocità del suono nell'aria a parità di temperatura e pressione. Che spiegazione se ne può dare a livello molecolare?
- 18.19** Le velocità molecolari hanno intensità comprese tra zero e valori arbitrariamente grandi (ma inferiori alla velocità della luce). Spiega su queste basi perché la distribuzione delle velocità molecolari è asimmetrica rispetto alla velocità maggiormente probabile.

ESERCIZI

Paragrafo 18.2 Modello molecolare di un gas perfetto

- 18.1** I seguenti numeri rappresentano i valori in m/s di un piccolo campione di 10 velocità molecolari: 290, 47, 182, 439, 330, 268, 302, 372, 344, 410. Determinare per questo campione (a) la velocità media $\langle v \rangle$ e (b) la media del quadrato della velocità $\langle v^2 \rangle$. (c) Confrontare i valori di $\langle v^2 \rangle$ e $\langle v \rangle^2$.
- 18.2** Stimare la distanza media tra le molecole di 1 mol di un gas a pressione atmosferica e a 300 K. Confrontarla con le dimensioni di una molecola di O₂ (circa 0.2 nm).
- 18.3** Si consideri un gas puro formato da molecole identiche di massa m . Si dimostri che le componenti della velocità del centro di massa di questo gas sono connesse ai valori medi delle componenti della velocità delle molecole da

$$(v_{cm})_x = \langle v_x \rangle \quad (v_{cm})_y = \langle v_y \rangle \quad (v_{cm})_z = \langle v_z \rangle$$

In quale sistema di riferimento è condotta la nostra descrizione del gas perfetto?

- 18.4** Lanciando una moneta per fare a testa o croce la probabilità di una testa è 1/2 e quella di una croce è 1/2. Qual è la probabilità che escano (a) tre teste di seguito? (b) Testa, croce, croce, nell'ordine, in tre lanci? (c) Una testa (e una croce) in due lanci? (d) Due teste su quattro lanci? (*Suggerimento:* Elencare tutti i 16 possibili risultati di quattro lanci e determinare la frazione di essi in cui si hanno due teste.)
- 18.5** Supponiamo che una moneta venga lanciata 1000 volte. Qual è il numero atteso di teste? Ti aspetti che *davvero* esca esattamente quel numero di teste? Vedi l'esercizio precedente.

18.20 In base alle caratteristiche della distribuzione delle velocità molecolari, si dia una possibile spiegazione della mancanza di atmosfera sulla Luna. Perché non c'è He nell'atmosfera terrestre?

18.21 Il radon è un gas (radioattivo) monoatomico. Si determinino i valori di C_V e C_p per questo gas.

18.22 Si completi la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
$\langle v^2 \rangle$	Media del quadrato della velocità		
v_{qm}			
$\langle v \rangle$		Scalare	
v_m			
$\langle K \rangle$			
k			J/K
v			
C_p			
C_V			
$f(v)$			

18.6 Stima l'impulso esercitato sulla tua pelle dall'urto di una tipica molecola dell'aria a temperatura ambiente, assumendo che sia $\langle v^2 \rangle = 2 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}^2$.

18.7 Si dimostri che l'Equazione (18.7) può essere scritta come

$$pV = \frac{nM\langle v^2 \rangle}{3}$$

dove M è la massa molecolare.

18.8 Una mole di un gas a pressione $p = 101 \text{ kPa}$ occupa un volume $V = 28.8 \text{ l}$. Determinare la media del quadrato della velocità delle molecole se il gas è (a) He, (b) H₂, (c) CO₂, (d) UF₆.

Paragrafo 18.3 L'interpretazione microscopica della temperatura

18.9 Determinare la velocità quadratica media per ciascuna delle seguenti specie molecolari nell'aria a 300 K: (a) N₂, (b) O₂, (c) CO₂. (d) Qual è l'energia cinetica media di traslazione delle molecole per ciascuna di queste specie?

18.10 Dimostrare che l'Equazione (18.14) può essere scritta in termini della massa molecolare M come

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

18.11 Di quale fattore deve variare la temperatura di un gas perché la sua velocità quadratica media vari (a) del 10 per cento, (b) del -10 per cento, (c) del 50 per cento?

18.12 Una miscela gassosa di 0.80 mol di He e 0.15 mol di Ne è a 400 K. Calcolare (a) la velocità quadratica media per ciascun tipo di molecola, (b) l'energia cinetica media di

traslazione per ciascun tipo di molecola, (c) l'energia interna di questa miscela.

- 18.13 L'elettron-volt (eV) è un'unità di misura dell'energia comoda quando si ha a che fare con atomi e molecole. Sussiste la seguente equivalenza:

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Esprimere in eV l'energia cinetica media di traslazione delle molecole di un gas (a) a 90 K (punto di ebollizione normale dell' O_2), (b) a 300 K (temperatura della superficie terrestre), (c) a 6000 K (temperatura della superficie del Sole).

- 18.14 Giustificare la seguente asserzione: il valore di kT per un sistema a temperatura ambiente è di 1/40 eV. (Si veda l'esercizio precedente.)

- 18.15 Un carro cisterna chiuso ermeticamente ti passa davanti percorrendo un binario a 80 km/h nella direzione x positiva. Esso contiene gas N_2 a 300 K. (a) Quali sono i valori di $\langle v_x \rangle$, $\langle v_y \rangle$ e $\langle v_z \rangle$ per questo gas? (Vedi l'Esercizio 18.3.) (b) Quali sono i valori in un sistema di riferimento solidale con il treno? (c) L'espressione $\langle K \rangle = \frac{3}{2} kT$ per l'energia cinetica media di traslazione è valida in tutti i sistemi di riferimento? Spiega.

Paragrafo 18.4 L'equipartizione dell'energia

- 18.16 Un gas poliatomico è costituito da molecole non lineari che, a 650 K, hanno 12 gradi di libertà attivi. (a) Calcolare l'energia meccanica media delle molecole. (b) Qual è il valore di v_{qm} ? Si assuma $m = 1.3 \times 10^{-25}$ kg. (c) Quanti gradi di libertà vibrazionali sono attivi?

- 18.17 La temperatura di 2.2 mol di O_2 viene innalzata da 10 °C a 140 °C. (a) Ammettendo che i gradi di libertà vibrazionali non siano attivi in questo intervallo di temperature, calcolare la variazione dell'energia interna del gas. (b) Sei in grado di determinare quanto calore è stato fornito e quanto lavoro è stato compiuto? Spiega.

Paragrafo 18.5 Capacità termiche dei gas perfetti e dei solidi elementari

- 18.18 Si dimostri che sia la costante universale dei gas R che la costante di Boltzmann k hanno le dimensioni di una capacità termica molare. Si noti che la mole è adimensionale.

- 18.19 (a) Supponiamo che la trasformazione dell'Esercizio 18.17 si sia verificata a volume costante. Quanto calore è stato fornito al gas e quanto lavoro è stato compiuto dal gas? (b) Qual è il valore di C_p per questo intervallo di temperature? (c) Quali sono le risposte alla parte (a) se la variazione di temperatura è avvenuta a pressione costante?

- 18.20 Sapendo che F_2 è biatomico e gassoso a temperatura ambiente, calcolare i valori di C_V , C_p e γ per F_2 a 25 °C. Confrontarli con i valori dati nel prossimo esercizio.

- 18.21 I valori misurati di C_p e γ per F_2 a 25 °C sono $C_p = 31.4 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e $\gamma = 1.36$. (a) Determinare il valore di C_V . (b) A questa temperatura i gradi di libertà vibrazionali sono attivi? Spiega.

- 18.22 In base al grafico della Figura 18.5, stimare il numero dei gradi di libertà attivi in H_2 (a) a 100 K, (b) a 600 K, (c) a 2000 K. (d) Stimare il valore di C_v a 600 K

- 18.23 Stimare il valore di γ per l' H_2 a ciascuna delle tre temperature citate nell'esercizio precedente.

- 18.24 Un cilindro con un pistone mobile contiene 18 g di Ar con $p_i = 180 \text{ kPa}$, $V_i = 12.0 \text{ l}$. Il gas viene compresso fino a raggiungere uno stato finale da $p_f = 480 \text{ kPa}$, $V_f = 6.0 \text{ l}$. (a) Determinare la temperatura iniziale e quella finale. (b) Qual è la variazione dell'energia interna?

- 18.25 Il gas Ar dell'esercizio precedente subisce la trasformazione rappresentata nella Figura 18.11. (a) Determinare la quantità totale di calore fornita al gas, usando i valori di C_p e C_V . (b) Calcolare il lavoro compiuto dal gas determinando l'area sottostante la curva. (c) Verificare le risposte usando il primo principio e il risultato dell'esercizio precedente.

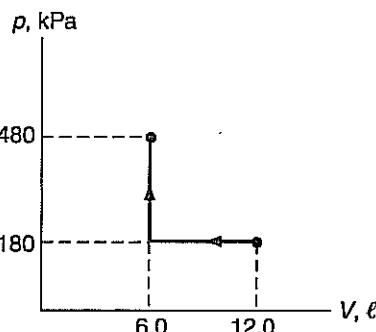


Figura 18.11 Esercizio 18.25.

- 18.26 (a) Calcolare la capacità termica molare di KCl solido a temperatura ambiente, tenendo presente che 1 mol contiene $2N_A$ atomi. (b) Calcolare il valore di c_V , il calore specifico a volume costante, per KCl a temperatura ambiente.

Paragrafo 18.6 Trasformazione adiabatica di un gas perfetto

- 18.27 Un gas perfetto monoatomico con $\gamma = 1.67$ subisce un'espansione adiabatica quasi-statica che lo porta dallo stato iniziale $p_i = 320 \text{ kPa}$, $V_i = 12 \text{ l}$ a uno stato finale con volume $V_f = 18 \text{ l}$. (a) Determinare la pressione finale del gas. (b) Determinare la temperatura iniziale e quella finale, sapendo che $n = 1.4 \text{ mol}$. (c) Rappresentare la trasformazione in un diagramma p - V .

- 18.28 (a) Determinare il lavoro effettuato dal gas nell'espansione adiabatica descritta nell'esercizio precedente, calcolando l'integrale $\int p dV$. (b) Controllare il risultato determinando la variazione dell'energia interna del gas e utilizzando il primo principio.

- 18.29 Dimostrare che in una trasformazione adiabatica quasi-statica di un gas perfetto, $T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$. Qual è l'espressione corrispondente per una trasformazione isobara?

- 18.30 Dell'olio si trova inizialmente alla pressione $p_i = 101 \text{ kPa}$ in un cilindro di volume $V_i = 2.25 \text{ l}$, ed è in equilibrio con l'ambiente che è e rimane a 300 K. Il gas viene compresso quasi-staticamente, ma in modo sufficientemente rapido da poter considerare la trasformazione adiabatica, fino a raggiungere il volume finale $V_f = 1.64 \text{ l}$, e viene mantenuto in tale volume finché perviene all'equilibrio con l'ambiente. (a) Calcolare la massima temperatura e la massima pressione

- raggiunte dall'He. (b) Rappresentare la trasformazione sul diagramma p - V . Determinare, per l'intera trasformazione, (c) il lavoro compiuto dall'He e (d) la quantità di calore ceduta all'He.
- 18.31 La temperatura di 64 g di O_2 viene elevata da 15 °C a 45 °C. Qual è la variazione dell'energia interna dell' O_2 se la trasformazione è (a) isocora, (b) isobara, (c) adiabatica? Si tratti il gas come un gas perfetto.
- 18.32 L' O_2 dell'esercizio precedente si trova inizialmente a pressione atmosferica. Per ciascuna delle tre trasformazioni quasi-statiche considerate sopra, determinare la quantità di calore ceduta al gas e il lavoro compiuto da questo.
- 18.33 Una mole di un gas perfetto si trova inizialmente a $p_i = 200 \text{ kPa}$, $V_i = 20 \text{ l}$. Sul medesimo diagramma p - V rappresentare la trasformazione adiabatica quasi-statica che porta a un volume finale $V_f = 30 \text{ l}$, nell'ipotesi in cui il gas perfetto sia (a) He, (b) Ne, (c) O_2 , (d) CO_2 .
- 18.34 Dimostrare che il numero dei gradi di libertà attivi ν è correlato a γ da $\nu = 2/(\gamma - 1)$.

Paragrafo 18.7 La distribuzione delle velocità molecolari

- 18.35 Dimostrare, usando la funzione di distribuzione delle velocità molecolari, che la velocità maggiormente probabile è data da

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

- 18.36 Calcolare le velocità v_m , $\langle v \rangle$, v_{qm} per (a) H_2 a 300 K e (b) O_2 a 300 K.

PROBLEMI

- 18.1 Consideriamo una trasformazione rappresentata da una curva in un diagramma p - V , come mostra la Figura 18.12. In un dato punto (V, p) la pendenza della retta tangente alla curva è dp/dV . Calcolare dp/dV in uno stesso punto per un gas perfetto che subisce (a) una trasformazione isobara, (b) una trasformazione isotermica, (c) una trasformazione adiabatica. (d) A quale trasformazione corrisponde la massima pendenza?

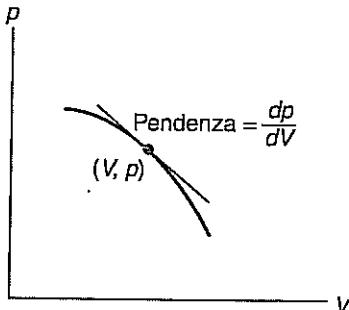


Figura 18.12 Problema 18.1.

- 18.2 Si dimostri, utilizzando una tabella di integrali o in altro modo, che il valore medio di v^n , $\langle v^n \rangle$ (n è un intero positivo), è dato da

$$\langle v^n \rangle = B_n \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{n}{2}}$$

- 18.37 Un piccolo campione di velocità molecolari è dato tabella sottoriportata, ove ΔN è il numero delle molecole con una velocità compresa in un intervallo $\Delta v = 10 \text{ m/s}$ attorno a v . Vale a dire che una molecola ha velocità compresa tra 0 e 100 m/s, due molecole hanno velocità comprese tra 100 e 200 m/s, e così via. Determinare questo campione (a) la velocità media, (b) la velocità quadratica media, (c) la velocità maggiormente probabile.

ΔN	$v, \text{ m/s}$
1	50
2	150
4	250
3	350
1	450

- 18.38 La velocità del suono v_s in un gas perfetto è data da (vedi Paragrafo 33.2 e anche il Problema 18.4)

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

dove $\gamma = C_p/C_V$ e M è la massa molecolare. Calcolare velocità del suono a 300 K (a) nell'He, (b) nell' N_2 , (c) nell'aria.

- 18.39 Dimostrare che la velocità del suono in un gas (vedi esercizio precedente) è connessa alla velocità media

$$\frac{v_s}{\langle v \rangle} = \sqrt{\frac{\gamma \pi}{8}}$$

Calcolare questo rapporto per l'He e per l'aria.

dove B_n è diverso a seconda che n sia pari o dispari, e dato da

$$B_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$B_2 = \frac{3}{2}$$

$$B_3 = \frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} \dots (2)(1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad \text{per } n \text{ dispari, } n$$

$$= \frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} \dots \frac{3}{2} \quad \text{per } n \text{ pari, } n$$

- 18.3 La velocità di fuga v_i di una molecola dalla superficie terrestre è stata calcolata nel Capitolo 9. Il suo quadrato dato da

$$v_i^2 = \frac{2GM_t}{r_i}$$

dove M_t è la massa della Terra e r_i è la distanza iniziale della molecola dal centro della Terra. La temperatura dell'alta atmosfera terrestre può raggiungere i 1000 K a un'altitudine di circa 150 km durante un periodo di massima attività delle macchie solari. (a) Determinare la media del quadrato della velocità di una molecola di N_2 in queste condizioni. (b) Determinare il rapporto tra il numero delle molecole che, in questa posizione, hanno velocità di fuga e il numero di quelle che hanno la velocità quadratica media. (c) Questo rapporto sarebbe diverso per H_2 ? Spiega.

- 18.4 Le ordinarie onde sonore in un gas hanno una velocità v_s data, in funzione della densità π e del modulo di compressione B (vedi Capitolo 15), da

$$v_s = \sqrt{\frac{B}{P}}$$

Le variazioni di pressione e di densità che costituiscono l'onda sonora si verificano così rapidamente che si deve usare il modulo di compressione adiabatica, $B = -V(dp/dV)$, e la derivata viene calcolata relativamente a una trasformazione adiabatica. Dimostrare che la velocità del suono in un gas perfetto è data da

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

- 18.5 I nuclei di ossigeno in una molecola di O_2 sono a una distanza di circa 0.2 nm, e praticamente tutta la massa della molecola è concentrata nei due nuclei. (a) Stimare il momento di inerzia della molecola rispetto a un asse baricentrico perpendicolare al segmento che congiunge i due nuclei. (b) Stimare la velocità angolare quadratica media ω_{qm} rispetto a questo asse per O_2 a 400 K.

- 18.6 Un metodo per la misura delle velocità molecolari utilizza un apparecchio a tamburo rotante come quello rappresentato schematicamente nella Figura 18.13. Le molecole che fuoriescono da un forno a temperatura T entrano nel tamburo soltanto al passaggio della fenditura S , e si arrestano su uno strato di vetro G dalla parte opposta: la loro distribuzione spaziale sul vetro dipende dalla distribuzione delle velocità molecolari. Supponiamo

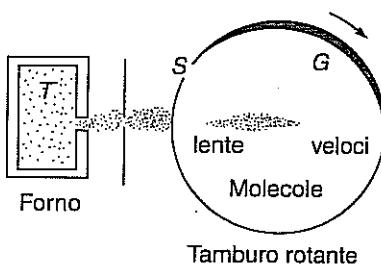


Figura 18.13 Problema 18.6: Atomi di argento provenienti da un forno entrano in un tamburo rotante attraverso una fenditura.

che il tamburo abbia un diametro di 120 mm e ruoti a 1200 giri/min, e che dal forno mantenuto alla temperatura di 1000 K fuoriescano atomi di Ag. Determinare la distanza che separa, sul vetro G , i punti di arrivo di atomi con velocità $\frac{1}{2} v_{qm}$ e $\frac{3}{2} v_{qm}$.

- 18.7 *Il modello di Einstein per le vibrazioni in un solido.* Nel modello di Einstein di un solido elementare, si ammette che tutti gli atomi vibrino con la stessa frequenza ν_0 . Ogni atomo può oscillare lungo ciascuna delle tre direzioni spaziali, e l'energia (quanto) meccanica media di ciascun oscillatore è data da

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu_0}{e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - 1}$$

dove $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s è la costante di Planck.

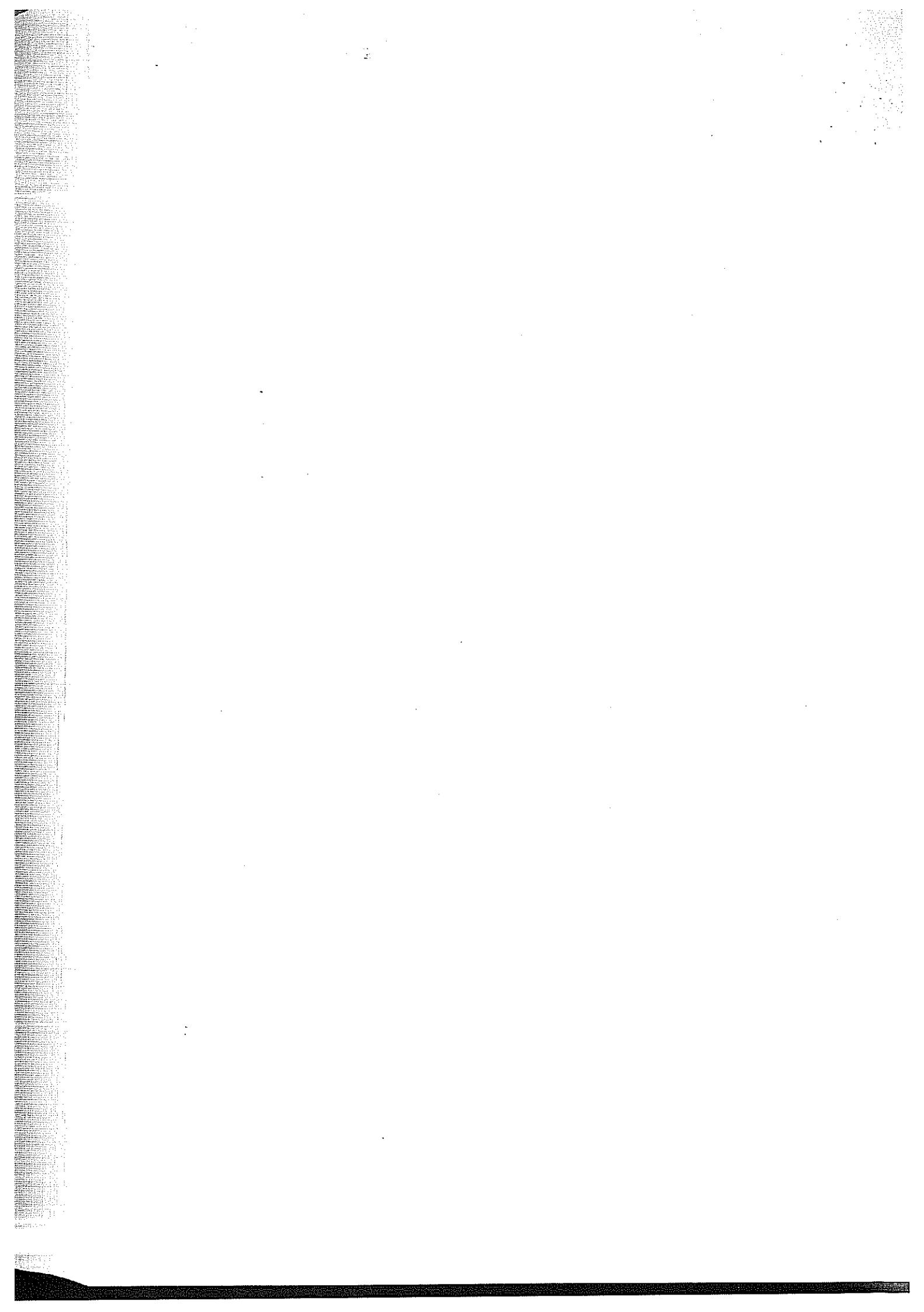
- (a) Dimostrare che, in base a questo modello, la capacità termica molare è

$$C_V = 3R \frac{\left(\frac{h\nu_0}{kT}\right)^2 e^{\frac{h\nu_0}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - 1\right)}$$

- (b) Costruire un grafico di questa funzione per T compresa tra 1 e 300 K, assumendo $\nu_0 = 10^{12}$ Hz come frequenza tipica. (c) A che valore tende C_V quando T diventa grande?

- 18.8 Stimare il calore specifico c_p del vapore acqueo a bassa pressione, ammettendo che vi siano tre gradi di libertà traslazionali e tre rotazionali. Confrontare tale valore con quello misurato, $c_p = 2000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ a temperatura ambiente. I gradi di libertà vibrazionali sono attivi? Spiega.

- 18.9 *La legge delle pressioni parziali di Dalton.* Si consideri una miscela di diversi gas con N_1 molecole di massa m_1 , N_2 molecole di massa m_2 , ... Estendendo l'analisi condotta nel Paragrafo 18.2, si dimostri la legge delle pressioni parziali di Dalton: *La pressione totale di una miscela di gas è pari alla somma delle pressioni parziali esercitate dai gas componenti.* La pressione parziale è la pressione che un gas eserciterebbe se fosse l'unico presente nel recipiente.



IL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

19.1 INTRODUZIONE

Capita a volte di veder scorrere al contrario un filmato o una videocassetta. È divertente vedere il consueto ordine di una sequenza di eventi invertito: persone che camminano all'indietro, acqua che scorre in salita, o edifici demoliti che risorgono dalle macerie, sono tutte cose che rafforzano la nostra predisposizione a una percezione unidirezionale del tempo, visto come un flusso dal passato al futuro. Delle leggi di natura che abbiamo incontrato finora – le leggi di Newton, la legge di gravitazione, le leggi di conservazione, il primo principio della termodinamica – nessuna dipende dalla direzione del tempo. Queste leggi, cioè, non cambiano se il tempo t viene sostituito con $-t$. Il moto di una palla in caduta libera (cioè in assenza di attriti) avrebbe il medesimo aspetto se il tempo venisse invertito. Se tutte queste leggi sono valide, come mai una sequenza temporalmente rovesciata di alcuni eventi ci appare innaturale, improbabile o addirittura impossibile? Effettivamente alcuni processi *solo* impossibili, ed è il *secondo principio della termodinamica* che stabilisce che tali processi non si verificano.

Il secondo principio può essere enunciato in molti modi diversi ma equivalenti. Buona parte della terminologia utilizzata ne riflette comunque le origini che risalgono ai tentativi di migliorare l'efficienza delle macchine a vapore. In questo capitolo prenderemo in considerazione diverse formulazioni del secondo principio della termodinamica, e constateremo che esso si applica in ambiti che vanno ben al di là delle macchine a vapore.

19.2 LE MACCHINE TERMICHE E IL SECONDO PRINCIPIO

Il primo principio della termodinamica, $\Delta U = Q - W$, riguarda gli scambi di energia tra un sistema e il suo ambiente. In un processo tipico, al sistema viene fornita una quantità di calore Q e il lavoro W viene compiuto dal sistema. Possiamo considerare questo come un processo che trasforma l'energia: essa entra nel sistema sotto forma di calore e ne esce come lavoro. Un semplice esempio è quello di un gas che si espande a pressione costante in un cilindro. La trasformazione o conversione dell'energia può anche avvenire, in un diverso processo, nel senso opposto: l'energia entra nel sistema come lavoro e ne esce come calore.

La trasformazione del lavoro in calore si verifica spontaneamente quando il lavoro viene effettuato da forze dissipative come l'attrito. Per esempio, nell'impianto frenante di un'automobile, l'energia entra nel disco come lavoro compiuto dalle forze d'attrito tra i blocchetti dei freni e il disco in rotazione. La temperatura di quest'ultimo aumenta, e a causa della differenza di temperatura, l'energia viene ceduta all'ambiente sotto forma di calore.

Il processo inverso, la conversione del calore in lavoro, è altamente desiderabile da un punto di vista economico.

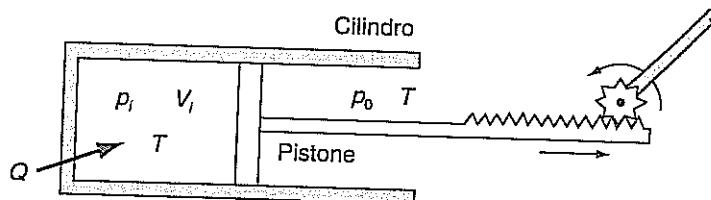
L'energia trasferita come lavoro può essere sfruttata a fini pratici, ad esempio per sollevare un peso o per far girare un albero che aziona delle macchine o un generatore elettrico. L'energia trasferita come calore, invece, non può essere utilizzata direttamente per sollevare un peso o far girare un albero di una macchina. Bruciando semplicemente

mente della benzina per trasferire energia sotto forma di calore a un'automobile, si fa muovere il veicolo. È necessario prima convertire il calore in lavoro.

Consideriamo il processo rappresentato nella Figura 19.1: un cilindro metallico tato di un pistone mobile a tenuta contiene un gas perfetto compresso in uno stato ziale caratterizzato da p_i , V_i , con una temperatura T uguale a quella dell'ambiente costante. Il gas viene fatto espandere isotermicamente, mentre l'ambiente gli cede calore. Aumentando di volume, il gas compie lavoro sul pistone mobile. Dal momento che la trasformazione è isoterma e il sistema è un gas perfetto, la variazione dell'energia interna $\Delta U = 0$. Per il primo principio, $\Delta U = 0 = Q - W$. In questo processo una quantità di calore Q è stata convertita nel lavoro W , e $W = Q$.

Figura 19.1

Un gas compresso ($p_i > p_0$) si espande isotermicamente convertendo calore in lavoro.



Come metodo pratico per la trasformazione del calore in lavoro, il processo di espansione singola non è molto soddisfacente, non potendo ripetersi. Una volta che la pressione del gas si è ridotta fino a egualare la pressione atmosferica, non si verifica più alcuna espansione.

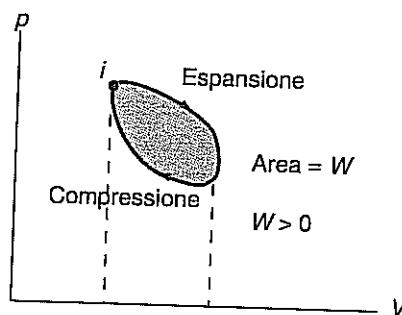
Siamo riusciti a convertire calore in lavoro con questo processo soltanto perché il gas era originariamente compresso. Per riportare il gas allo stato iniziale occorrerebbe che venisse compiuto del lavoro *sul gas* per comprimerlo: parte del lavoro ricavato durante l'espansione dovrebbe essere reinvestita per preparare il gas alla successiva espansione. Supponiamo di riportare il gas al suo stato iniziale lungo un percorso differente, caratterizzato da valori più bassi della pressione, cosicché sul gas debba essere compiuto un lavoro minore.

Allora il risultato globale è che (i) al gas è stato fornito del calore; (ii) il gas è stato riportato allo stato iniziale, ed è pronto per un'altra espansione; e (iii) durante l'espansione il gas ha compiuto un lavoro maggiore di quello che è stato reinvestito per completare il ciclo. In questo modo siamo condotti all'idea di un ciclo che opera come una *macchina termica*, ossia come un congegno per trasformare ripetutamente calore in lavoro.

Il ciclo come macchina termica per convertire calore in lavoro.

Figura 19.2

In un ciclo il lavoro totale compiuto dal sistema è pari all'area racchiusa dalla curva che rappresenta il ciclo nel piano p - V .



In un ciclo il sistema ritorna allo stato iniziale, e il ciclo può essere ripetuto un numero qualsiasi di volte. Questo carattere ripetitivo rende il ciclo interessante come macchina termica. Per solito analizzeremo un singolo ciclo di modo che tutte le grandezze si riferiscono a un solo ciclo di funzionamento. Nella Figura 19.2 è rappresentato su un diagramma p - V un ciclo quasi-statico generico. Per comodità lo stato iniziale è stato scelto in corrispondenza dell'inizio di un'espansione. Il sistema compie un lavoro positivo sull'ambiente durante l'espansione, e compie un lavoro negativo sull'ambiente durante la compressione con la quale il sistema viene riportato allo stato iniziale. Il lavoro totale W compiuto dal sistema durante l'intero ciclo è pari all'area racchiusa dal ciclo rappresentato nel diagramma p - V , come abbiamo visto nel Capitolo 17. Esso è positivo se il ciclo viene percorso in senso orario, perché in tal caso il lavoro effettuato durante l'espansione è maggiore del valore assoluto del lavoro negativo.

Il lavoro totale compiuto in un ciclo è pari all'area racchiusa dalla curva che rappresenta il ciclo nel piano p - V .

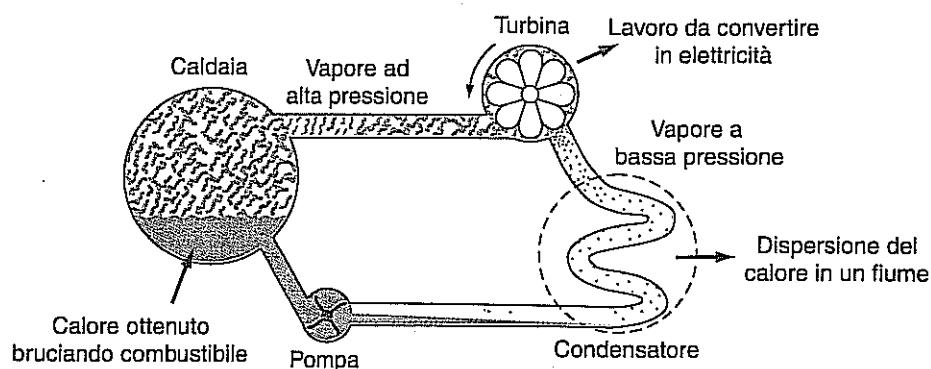
compressione. Se Q rappresenta la quantità totale di calore ceduta al sistema nell'intero ciclo, poiché $\Delta U = 0$ in un ciclo, il primo principio fornisce

$$W = Q \quad (19.1)$$

Vale a dire che il lavoro totale compiuto nel ciclo è pari alla quantità di calore totale fornita nel ciclo perché il sistema viene ricondotto allo stato iniziale ($\Delta U = 0$).

In una moderna macchina a vapore, come quelle impiegate nella produzione di energia elettrica, il lavoro viene compiuto facendo girare una turbina a vapore invece che facendo muovere un pistone. Come mostra la Figura 19.3, il calore proveniente da un combustibile fossile o nucleare viene ceduto all'acqua generando vapore ad alta pressione, il quale compie lavoro espandendosi contro le pale della turbina. Per poter comprimere il vapore a bassa pressione, lo si fa condensare, il che richiede che il calore venga estratto dall'acqua o rilasciato da essa.

Questo scambio di calore viene realizzato in torri di raffreddamento oppure utilizzando per il raffreddamento l'acqua di un grande bacino come quello di un fiume. Della quantità di calore ottenuta bruciando il combustibile, in una moderna centrale elettrica il 60 per cento o più viene disperso nel corso del ciclo; quindi al massimo il 40 per cento del calore fornito dal combustibile viene convertito in lavoro meccanico (e successivamente in energia elettrica, con piccole perdite).



Il rendimento delle macchine termiche. Tutte le macchine termiche cicliche hanno in comune alcune delle caratteristiche descritte sopra nel caso della macchina a vapore. C'è una sostanza, detta *fluido di lavoro*, che subisce una trasformazione ciclica. Gli scambi di calore tra il fluido di lavoro e l'ambiente avvengono ad almeno due temperature diverse: il calore viene assorbito dal sistema alla temperatura più elevata e, per completare il ciclo, deve essere smaltito dal sistema alla temperatura più bassa. È la quantità *netta* di calore assorbita che è pari al lavoro nel ciclo.

Per semplicità concentriamo la nostra attenzione sui cicli che operano tra due sole sorgenti di calore.

Vale a dire che gli scambi di calore con l'ambiente avvengono a due sole temperature, T_C e T_F (C sta per caldo e F per freddo). Ammettiamo che Q_C rappresenti la quantità di calore fornita in ogni ciclo al sistema alla temperatura più elevata T_C , e Q_F la quantità di calore ceduta in ogni ciclo dal sistema alla temperatura inferiore T_F . In base alla nostra convenzione, il calore fornito a un sistema è positivo, cosicché $Q_C > 0$. Il calore sottratto a un sistema è negativo, cosicché $Q_F < 0$. È comodo operare soltanto con scambi di energia di segno positivo. Pertanto ci serviamo del valore assoluto (positivo) $|Q_F| = -Q_F$ della grandezza negativa Q_F : la quantità netta di calore assorbita nel ciclo è

$$Q = Q_C + Q_F = Q_C - |Q_F| \quad (19.2)$$

Così l'Equazione (19.1), che è il primo principio della termodinamica applicato al ciclo, diventa

$$W = Q_C - |Q_F|$$

Per un ciclo, $\Delta U = 0$ e
 $W = Q$.

Figura 19.3

Rappresentazione schematica del ciclo di una moderna centrale termoelettrica. Vapore ad alta pressione viene generato nella caldaia dal calore fornito dal combustibile. Il vapore compie lavoro facendo girare le pale della turbina. All'uscita della turbina viene mantenuta una pressione più bassa sottraendo calore dal vapore e condensandolo. Il calore viene disperso nell'acqua di raffreddamento, spesso prelevata da un fiume. La pompa spinge poi l'acqua nuovamente nella caldaia ad alta pressione.

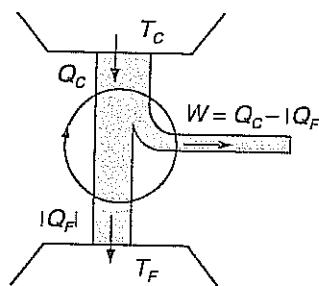


Figura 19.4

Una macchina termica opera tra due sorgenti. I valori di Q_C , $|Q_F|$ e W sono proporzionali alla larghezza dei percorsi di collegamento.

Il rendimento di una macchina termica è pari al rapporto tra l'energia in uscita W e quella in ingresso Q_C .

In una versione ideale di centrale termoelettrica, per esempio, la quantità di calore viene ceduta all'acqua nella caldaia, mentre la quantità di calore $|Q_F|$ viene sottratta all'acqua nelle serpentine di condensazione.

Gli scambi di calore e il ciclo sono rappresentati schematicamente nella Fig. 19.4.

Il cerchio rappresenta il ciclo come una macchina termica che opera tra due sorgenti alle temperature T_C e T_F . I valori di Q_C , $|Q_F|$ e W sono proporzionali alle larghezze dei percorsi in colore nel diagramma, percorsi che illustrano graficamente l'Equazione (19.2).

Q_C è considerata come energia in ingresso e W come energia utile in uscita ogni ciclo. Il calore smaltito $|Q_F|$ viene pertanto considerato come energia inutilizzabile. Il *rendimento* η della macchina termica è definito come rapporto tra energia in uscita ed energia in ingresso:

$$\eta = \frac{W}{Q_C} \quad (19.3)$$

Il rendimento può essere espresso anche in funzione delle due quantità di calore scambiate.

Sostituendo l'Equazione (19.2) nell'Equazione (19.3) si ha $\eta = (Q_C - |Q_F|)/Q_C$, ossia

$$\eta = 1 - \frac{|Q_F|}{Q_C} \quad (19.4)$$

Da questa formula si vede che il rendimento di una macchina termica aumenta ricorrendo $|Q_F|$ rispetto a Q_C .

Esempio 19.1

Una moderna centrale elettrica ha un rendimento del 35 per cento circa e produce energia elettrica erogando una potenza $P = 10^9$ W = 1 GW. Stimare gli scambi di calore che hanno luogo in 1 h di funzionamento nella caldaia e nel condensatore.

Soluzione

Benché i simboli W , Q_C e $|Q_F|$ si riferiscano a un solo ciclo, i valori corrispondenti per un qualunque numero di cicli saranno nelle stesse proporzioni. Ammettiamo quindi che in questo caso W , Q_C e $|Q_F|$ rappresentino i valori per 1 h di funzionamento. Esprimiamo l'energia in GW h (gigawatt ora), con $1 \text{ GW h} = 3.6 \times 10^{12}$ J. Il lavoro effettuato è

$$W = Pt = (1 \text{ GW})(1\text{h}) = 1 \text{ GW h}$$

Per l'Equazione (19.3), la quantità di calore Q_C è

$$Q_C = \frac{W}{\eta} = \frac{1 \text{ GW h}}{0.35} = 3 \text{ GW h}$$

e per il primo principio

$$Q_C - |Q_F| = W$$

$$|Q_F| = Q_C - W = 3 \text{ GW h} - 1 \text{ GW h} = 2 \text{ GW h}$$

Il secondo principio della termodinamica (enunciato di Kelvin-Planck). L'Equazione (19.4) combina la definizione del rendimento con il primo principio dell'termodinamica applicato a un ciclo. Da un punto di vista matematico, il rendimento massimo consentito è 1, ossia il 100 per cento; tale rendimento corrisponderebbe a $|Q_F| = 0$. Immaginiamo un ciclo nel quale non vi siano perdite o sprechi di calore ($|Q_F| = 0$); il primo principio fornirebbe allora $W = Q_C$. Il fluido di lavoro, al termine di un ciclo, sarebbe invariato, e una quantità di calore sottratta a una sorgente a temperatura uniforme sarebbe stata trasformata integralmente in lavoro.

Ci sono stati innumerevoli tentativi di costruire una macchina termica con un rendimento del 100 per cento, e tutti sono falliti. Affermare che una macchina termica con un rendimento del 100 per cento è impossibile è uno dei modi per enunciare il secondo principio della termodinamica:

Non è possibile realizzare un ciclo che sottragga calore a una sorgente a temperatura uniforme e lo converta completamente in lavoro.

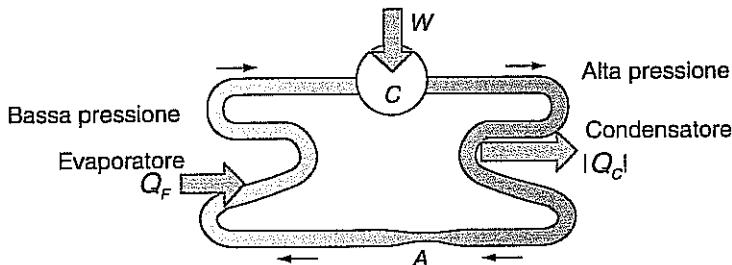
Questa forma del secondo principio è chiamata *enunciato di Kelvin-Planck* del principio. È importante rendersi conto del fatto che una macchina termica con un rendimento del 100 per cento non violerebbe il primo principio della termodinamica. È il secondo principio che esclude la possibilità di un ciclo senza smaltimento di calore a una temperatura inferiore. Immaginiamo, per esempio, un ciclo che estragga una quantità di calore Q_C dall'oceano a un'unica temperatura T_C e la converta integralmente nel lavoro W (per azionare una nave). Il primo principio imporrebbbe semplicemente $W = Q_C$, ma il secondo principio esclude la possibilità di un simile ciclo.

Il secondo principio non è una legge strettamente quantitativa: l'enunciato di Kelvin-Planck è di carattere qualitativo. Esso afferma l'impossibilità di certi tipi di processo. Nondimeno, il secondo principio è tanto rigoroso quanto il primo e ha altrettanta importanza. Via via che incontreremo altri modi di formulare il secondo principio, vedremo che esso si applica ad altri processi oltre a quelli suggeriti dall'enunciato di Kelvin-Planck.

19.3 LE MACCHINE FRIGORIFERE E IL SECONDO PRINCIPIO

L'enunciato di Kelvin-Planck del secondo principio della termodinamica è espresso in termini appropriati a una macchina termica. Ma il secondo principio può anche essere formulato in un modo che si riferisce al funzionamento di una macchina frigorifera.

Una macchina frigorifera è un dispositivo che opera lungo un ciclo, progettato per sottrarre calore dal suo interno, in modo da raggiungere o da mantenere all'interno una temperatura inferiore a quella dell'ambiente. Durante il ciclo di refrigerazione, il calore viene disperso all'esterno, che è di solito a una temperatura superiore a quella dell'interno. In ogni ciclo, sul sistema viene compiuto un lavoro, fornito generalmente da un motore elettrico. Un comune ciclo di refrigerazione impiega un processo di strozzamento quale quello descritto nel Paragrafo 17.6. Come mostra la Figura 19.5, un compressore C compie lavoro sul fluido refrigerante, una sostanza come il freon. Il compressore mantiene un'elevata differenza di pressione dalle due parti della valvola di strozzamento A . Quando il liquido evapora nella zona a bassa pressione e a bassa temperatura, una quantità di calore Q_F viene ceduta al fluido dall'interno della macchina frigorifera, provocando un abbassamento di temperatura nel frigorifero. Dalla parte ad alta pressione e a temperatura più elevata, la quantità di calore $|Q_C|$ viene ceduta dal fluido all'esterno quando il fluido condensa.



Gli scambi di energia che hanno luogo in un ciclo di refrigerazione sono illustrati schematicamente nella Figura 19.6. La quantità di calore Q_F viene ceduta al sistema dalla sorgente a bassa temperatura, che rappresenta l'interno della macchina frigorifera, alla temperatura T_F . Una quantità di calore positiva $|Q_C|$ viene ceduta alla sorgente a temperatura più alta, che rappresenta l'ambiente esterno, alla temperatura T_C . Il sistema compie il lavoro negativo W , il che equivale a dire che il lavoro positivo $|W|$ viene effettuato sul sistema dal motore del compressore. Applicando il primo principio della termodinamica al ciclo si ha $W = Q_C + Q_F$, ossia (moltiplicando per -1): $-W = -Q_C - Q_F$. Il risultato può essere scritto in termini di grandezze positive, $|W| = -W$ e $|Q_C| = -Q_C$:

$$|W| = |Q_C| - Q_F \quad (19.5)$$

Un confronto tra le Equazioni (19.5) e (19.2) nonché tra le Figure 19.6 e 19.4 suggerisce che una macchina frigorifera sia come una macchina termica che funziona al con-

Figura 19.5
Un ciclo di refrigerazione meccanico utilizza un processo di strozzamento. La quantità di calore Q_C viene assorbita dal refrigerante nella parte a bassa pressione e a bassa temperatura. La quantità di calore $|Q_F|$ viene ceduta dal refrigerante nella parte ad alta pressione e a temperatura più elevata quando il vapore viene liquefatto nel condensatore.

trario. Gli scambi di energia nel ciclo della macchina termica e in quello della macchina frigorifera sono invertiti. Ma non si deve pensare che i valori assoluti di Q_F , Q_C e W siano uguali nei due casi. In generale ci sono dei vincoli meccanici che in realtà impediscono che una particolare macchina termica possa essere fatta funzionare al contrario.

Una caratteristica di un ciclo di refrigerazione (analoga al rendimento di una macchina termica) è il suo *coefficiente di prestazione K*, definito da

Coefficiente di prestazione K
per una macchina frigorifera.

$$K = \frac{Q_F}{|W|} \quad (19.6)$$

Si tratta del rapporto tra la grandezza utile in una macchina frigorifera, la quantità di calore estratta dal suo interno, e il costo, il lavoro compiuto dal motore.

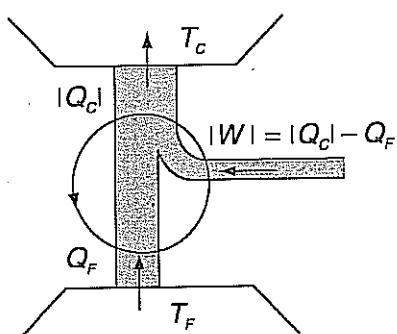


Figura 19.6
Una macchina frigorifera opera tra due sorgenti.

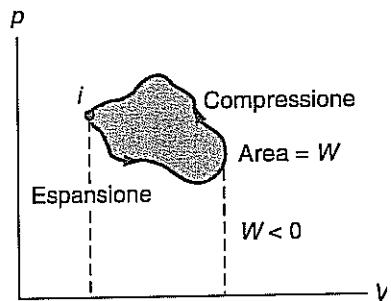


Figura 19.7

Un diagramma p - V di un ciclo di refrigerazione. Poiché la pressione è più bassa durante l'espansione che durante la compressione, W è negativo. Ossia, il lavoro compiuto sul sistema è maggiore di quello compiuto dal sistema sull'ambiente.

La pompa di calore. Il ciclo di refrigerazione estraе la quantità di calore Q_F da una sorgente a bassa temperatura (l'interno di un frigorifero) e tende così a ridurre la temperatura interna. Il ciclo smaltisce la quantità di calore $|Q_C|$ all'esterno, e la temperatura esterna tende ad aumentare. In pratica, il calore viene «pompato» mediante il ciclo di refrigerazione da regioni a temperatura inferiore a regioni a temperatura superiore.

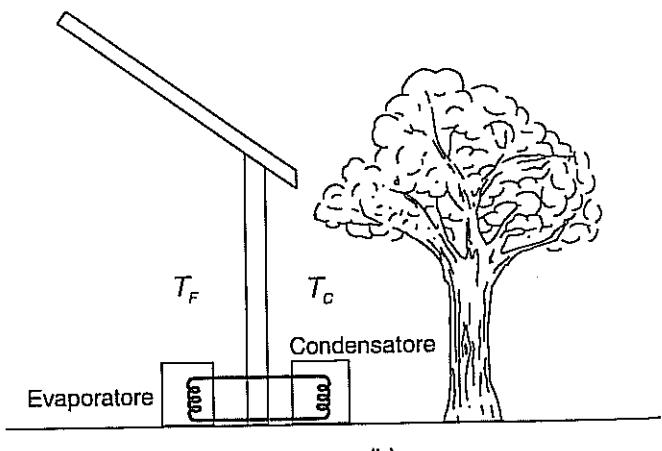
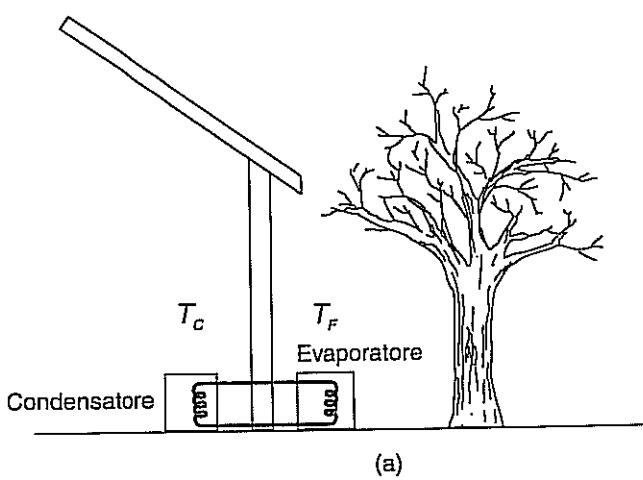


Figura 19.8

Una pompa di calore pompa calore (a) dall'esterno verso l'interno nella stagione invernale e (b) dall'interno verso l'esterno nella stagione estiva. Il compressore non è rappresentato.

Una pompa di calore
“pompa” calore da
temperature inferiori a
temperature superiori.

La *pompa di calore*, che è sostanzialmente una macchina frigorifera, è di uso comune nei climi temperati per riscaldare o raffreddare gli ambienti. Per riscaldare un ambiente, lo scambiatore di calore dell'evaporatore viene posto all'esterno della struttura, come mostra la Figura 19.8a, e assorbe la quantità di calore Q_F dall'aria circostante. Lo scambiatore di calore del condensatore si trova all'interno della struttura, e cede la

per raffreddare, lo scambiatore di calore interno diventa l'evaporatore e lo scambiatore di calore esterno diventa il condensatore, come mostra la Figura 19.8b. Il calore viene trasferito dall'interno all'esterno. In entrambi i casi, il ciclo è in grado di pompare calore da una sorgente a temperatura inferiore a un'altra a temperatura superiore.

Una pompa di calore usata per il riscaldamento di un ambiente può essere caratterizzata da un coefficiente diverso da quello di un frigorifero. La grandezza utile quando riscalda è $|Q_C|$, il calore ceduto all'interno, mentre la grandezza che si paga è sempre il lavoro $|W|$. L'*efficienza* di una pompa di calore K_{pc} è definita come

$$K_{pc} = \frac{|Q_C|}{|W|} \quad (19.7)$$

Efficienza K_{pc} di una pompa di calore.

Esempio 19.2

Un frigorifero il cui compressore è azionato da un motore da 480 W ha un coefficiente di prestazione $= 2.8$. Calcolare la potenza termica scambiata al condensatore e all'evaporatore.

Soluzione

In una macchina frigorifera che funziona con continuità, la potenza scambiata (energia scambiata al secondo) è proporzionale all'energia scambiata in ogni ciclo. Dall'Equazione (19.6)

$$K = \frac{Q_F}{|W|} = \frac{dQ_F/dt}{d|W|/dt}$$

si ha

$$\frac{dQ_F}{dt} = K \frac{d|W|}{dt} = (2.8)(480 \text{ W}) = 1.3 \text{ kW}$$

In base al primo principio, $|Q_C| = Q_F + |W|$, cosicché

$$\frac{d|Q_C|}{dt} = \frac{dQ_F}{dt} + \frac{d|W|}{dt} = 1.3 \text{ kW} + 0.48 \text{ kW} = 1.8 \text{ kW}$$



Esempio 19.3

Durante un'ora di funzionamento, una pompa di calore utilizza 1.4 kW h di energia elettrica e trasferisce 1.1×10^4 Btu all'interno di una casa. Determinare (a) l'efficienza e (b) la quantità di calore assorbita dall'esterno in un'ora.

Soluzione

Cominciamo a esprimere le energie scambiate nella medesima unità di misura, convertendo le Btu in W h:

$$|Q_C| = \frac{(1.1 \times 10^4 \text{ Btu})(1055 \text{ J Btu})}{3.6 \times 10^6 \text{ J kW}^{-1} \text{ h}^{-1}} = 3.2 \text{ kW h}$$

L'efficienza è

$$K_{pc} = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{3.2 \text{ kW h}}{1.4 \text{ kW h}} = 2.3$$

La quantità di calore assorbita dall'esterno in 1 h si ottiene applicando il primo principio al funzionamento della pompa di calore in questo lasso di tempo:

$$Q_F = |Q_C| - |W| = 3.2 \text{ kW h} - 1.4 \text{ kW h} = 1.8 \text{ kW h}$$



Secondo principio della termodinamica (enunciato di Clausius). Dagli ultimi due esempi, e in generale dalle Equazioni (19.6) e (19.7), si vede che il coefficiente di prestazione di un frigorifero o l'efficienza di una pompa di calore possono avere un valore maggiore di 1. Ovviamente, ai fini del raffreddamento e del riscaldamento, a valori maggiori di questi coefficienti corrispondono economie più consistenti. Dal punto di vista matematico, un valore maggiore di un coefficiente di prestazione o dell'efficienza di una pompa di calore si ottiene facendo diminuire $|W|$ rispetto a Q_F o a $|Q_C|$. Un valore potrebbe essere aumentato illimitatamente facendo tendere a zero $|W|$. Se $|W| = 0$, il primo principio applicato al ciclo darebbe $|Q_C| = Q_F$, e il risultato globale sarebbe il trasferimento di calore da una sorgente a temperatura inferiore a una a temperatura superiore senza alcun cambiamento in nessun altro sistema. Ma un pro-

Il secondo principio della termodinamica (enunciato di Clausius).

cesso di questo tipo non è mai stato osservato. Affermarne l'impossibilità è un modo di enunciare il secondo principio della termodinamica.

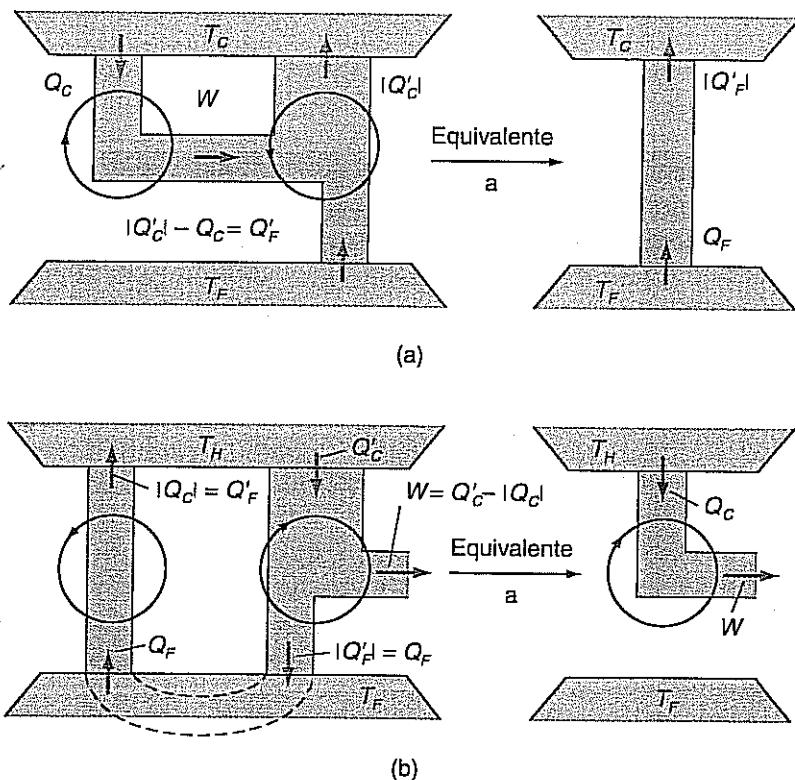
Non è possibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia il trasferimento di calore da una temperatura inferiore a una temperatura superiore.

Questa forma del secondo principio è nota come *enunciato di Clausius*. Il secondo principio non vieta il funzionamento di un frigorifero o di una pompa di calore. Il calore, cioè, può essere trasferito da una temperatura inferiore a una superiore ad operare un ciclo nel quale viene fornito lavoro. Il secondo principio vieta invece il funzionamento di un ciclo di refrigerazione nel quale *non venga fornito lavoro*. Vietato è che il flusso spontaneo del calore da una temperatura inferiore a una superiore.

L'enunciato di Clausius del secondo principio ha per oggetto il trasferimento di calore da una temperatura inferiore a una superiore; l'enunciato di Kelvin-Planck ha per oggetto la conversione del calore in lavoro. Come è possibile che questi enunciati formulazione così diversa corrispondano a un'unica legge di natura? Essi sono equivalenti perché si può dimostrare che qualunque trasformazione vietata da un enunciato è vietata anche dall'altro. La Figura 19.9 illustra questa equivalenza. Supponiamo che come mostra la Figura 19.9a, esista una macchina termica con un rendimento del 100% (in violazione dell'enunciato di Kelvin-Planck). Allora il lavoro fornito da tale macchina potrebbe essere utilizzato per far funzionare un ciclo di refrigerazione. Considerando l'insieme dei due cicli, il risultato netto, e unico, sarebbe un trasferimento di calore da una temperatura più bassa a una più alta (in contrasto con l'enunciato di Clausius). Quindi una trasformazione vietata dall'enunciato di Kelvin-Planck è vietata anche dall'enunciato di Clausius.

Figura 19.9

(a) Il lavoro proveniente da una ideale macchina termica con rendimento del 100% è utilizzato per azionare una macchina frigorifera. La macchina termica viola l'enunciato di Kelvin-Planck. Benché la macchina frigorifera non violi l'enunciato di Clausius, la combinazione ideale (macchina termica + macchina frigorifera) lo viola. Quindi la violazione dell'enunciato Kelvin-Planck implica una violazione di quello di Clausius. (b) Una macchina frigorifera ideale che non richiede lavoro viene usata in combinazione con una macchina termica. La macchina frigorifera viola il principio di Clausius. Benché la macchina termica da sola non violi l'enunciato di Kelvin-Planck, la combinazione delle due viola tale enunciato. Quindi la violazione dell'enunciato di Clausius implica la violazione dell'enunciato di Kelvin-Planck.



In modo analogo, la Figura 19.9b illustra la situazione inversa. Un ciclo di refrigerazione che violasse l'enunciato di Clausius potrebbe essere fatto operare insieme a un macchina termica. La combinazione darebbe luogo a un ciclo che potrebbe assorbire calore a un'unica temperatura e convertirlo integralmente in lavoro, in contrasto con l'enunciato di Kelvin-Planck.

Gli enunciati alternativi ed equivalenti del secondo principio sono di pari importanza nell'ambito della termodinamica. È soprattutto per comodità (e come conseguenza della storia della scoperta del secondo principio) che si ha più di un enunciato. Può risultare molto più semplice applicare a una data trasformazione un enunciato del secondo principio piuttosto che l'altro.

19.4 REVERSIBILITÀ E CICLO DI CARNOT

Il secondo principio della termodinamica ci dice che nessuna macchina termica può avere un rendimento del 100 per cento [$|Q_F|$ non può essere uguale a zero nell'Equazione (19.4)] e che nessuna macchina frigorifera può avere un coefficiente di prestazione infinito [$|W|$ non può essere uguale a zero nell'Equazione (19.6)]. Ma il secondo principio non ci dice quanto possono essere grandi il rendimento di una macchina termica o il coefficiente di prestazione di una macchina frigorifera. Nondimeno, l'esperienza suggerisce che, per esempio, gli attriti e il trasferimento di calore tra punti fra i quali sussistono grandi differenze di temperatura tendono a ridurre il rendimento delle macchine.

Trasformazioni reversibili e irreversibili. Il flusso di calore da un corpo a temperatura più elevata a uno a temperatura più bassa è un esempio di processo irreversibile. È irreversibile nel senso che il processo inverso, cioè un processo in cui l'ordine temporale degli eventi sia rovesciato, è impossibile alla luce del secondo principio. È questo un esempio della connessione tra secondo principio e direzione del tempo. Il processo temporalmente inverso, il flusso spontaneo del calore da una temperatura più bassa a una più alta, non si verifica. Il calore può essere trasferito da una temperatura più bassa a una più alta soltanto introducendo sostanziali cambiamenti della situazione, come per esempio mettendo in funzione una pompa di calore tra i due corpi in questione.

Ci serviamo di questa idea – della necessità di significativi cambiamenti nell'ambiente circostante per invertire un processo – per classificare le trasformazioni come reversibili o irreversibili. *Una trasformazione reversibile di un sistema è una trasformazione che può essere invertita effettuando soltanto cambiamenti infinitesimi nell'ambiente circostante.* In una trasformazione reversibile, gli scambi di calore devono avvenire a causa di differenze di temperatura infinitesime tra il sistema e l'ambiente circostante. Il calore viene ceduto in modo reversibile a un sistema ponendolo in contatto con una sorgente la cui temperatura sia trascurabilmente più alta di quella del sistema stesso. Per invertire tale trasferimento di calore, la sorgente deve avere una temperatura trascurabilmente inferiore a quella del sistema. Analogamente, effettuando soltanto cambiamenti infinitesimi delle forze esterne o dei vincoli che agiscono su un sistema, in un processo reversibile si può invertire qualunque moto. Quindi, in un processo reversibile, le forze d'attrito non possono compiere lavoro.

Una trasformazione che non sia reversibile è una trasformazione irreversibile. Di conseguenza, una trasformazione è irreversibile se nel trasferimento di calore la differenza di temperatura tra sistema e ambiente è finita, oppure se le forze d'attrito compiono lavoro, o in generale se, per invertire il processo, devono verificarsi variazioni finite nell'ambiente circostante.

Per essere reversibile una trasformazione deve essere quasi-statica. Ma non vale l'inverso: una trasformazione può essere quasi-statica ma non reversibile. Per esempio, il calore può essere ceduto quasi-staticamente a un sistema attraverso uno strato isolante con una differenza di temperatura non trascurabile. Il trasferimento di calore tra corpi con una differenza significativa di temperatura rende la trasformazione irreversibile.

Basta un'attimo di riflessione per rendersi conto che ogni trasformazione *reale* è irreversibile. Una trasformazione reversibile è un'idealizzazione utile, come altre già usate in meccanica. Una particolare trasformazione può essere considerata pressoché reversibile se bastano piccolissime variazioni dell'ambiente circostante il sistema per invertirla. Quanto più piccole sono le variazioni necessarie, tanto più prossima ad essere reversibile è la trasformazione. In questo senso limite classifichiamo come reversibile una trasformazione: ammettiamo cioè che si possa trovare o realizzare una trasformazione che connetta due qualsiasi stati di un sistema e che approssimi quanto si voglia una trasformazione reversibile. Il concetto di trasformazione reversibile svolge un ruolo essenziale nella nostra ulteriore analisi delle macchine termiche.

Definizione di trasformazione reversibile.

Definizione di trasformazione irreversibile.

Una trasformazione reversibile è un'idealizzazione.

al 100 per cento, come prevede il secondo principio. Quale di queste macchine rendimento massimo? La risposta a questa domanda di carattere teorico, che più grande importanza pratica, fu ottenuta per la prima volta dal fisico e ingegnere francese Sadi Carnot (1796-1832). Carnot prese in considerazione una macchina termica ideale in grado di conseguire il rendimento massimo possibile per macchine operate tra le temperature T_C e T_F . Tale macchina è nota come *macchina di Carnot* e il suo ciclo come *ciclo di Carnot*.

Il ciclo di Carnot è un ciclo reversibile.

Le fasi del ciclo della macchina di Carnot.

Il ciclo di Carnot è un ciclo ideale in quanto è reversibile. Esso può essere invaso (e fatto funzionare come macchina frigorifera invece che come motore) modificandone in misura soltanto infinitesima le condizioni esterne. Il ciclo, considerato come macchina termica, è costituito dalle seguenti quattro fasi (si noti il ricorrere dell'aggettivo *reversibile* a proposito del ciclo di Carnot):

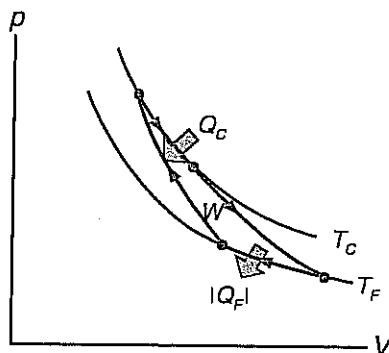
- 1 Un'espansione isoterma reversibile alla temperatura T_C : il sistema assorbe la quantità di calore Q_C .
- 2 Una trasformazione adiabatica reversibile: la temperatura del sistema si abbassa da T_C a T_F .
- 3 Una compressione isoterma reversibile alla temperatura T_F : il sistema cede la quantità di calore $|Q_F|$.
- 4 Una trasformazione adiabatica reversibile che completa il ciclo: la temperatura del sistema risale da T_F a T_C .

Nella Figura 19.10 il ciclo della macchina di Carnot è rappresentato in un diagramma $p-V$ per il caso in cui il fluido di lavoro è un gas perfetto. Gli scambi di energia sono rappresentati schematicamente, mentre il lavoro complessivo W è pari all'area racchiusa dal ciclo.

Figura 19.10

Il ciclo della macchina di Carnot per un gas perfetto è formato dalle seguenti fasi reversibili: (i) Viene fornito calore durante l'espansione isoterma alla temperatura T_C . (ii) La temperatura scende da T_C a T_F mentre il gas si espande adiabaticamente. (iii) La quantità di calore $|Q_F|$ viene estratta dal gas durante la compressione isoterma alla temperatura T_F . (iv) La temperatura aumenta da T_F a T_C mentre il gas viene compresso adiabaticamente e riportato allo stato iniziale. Il lavoro totale per il ciclo, $W = Q_C - |Q_F|$, è pari all'area racchiusa.

Teorema di Carnot



La macchina di Carnot è un caso particolare di una macchina termica più generale, chiamata *macchina reversibile*, la quale compie un ciclo costituito esclusivamente da fasi reversibili. È la macchina reversibile – *qualunque* macchina reversibile – ad avere il massimo rendimento tra tutte le macchine termiche che operano tra due date sorgenti. Questa conclusione è contenuta nel *teorema di Carnot*: *Tutte le macchine reversibili che operano tra le temperature T_C e T_F hanno il medesimo rendimento. Nessuna macchina che funzioni tra queste temperature può avere un rendimento maggiore.*

Il teorema di Carnot afferma due cose distinte:

1. Il rendimento di una macchina reversibile che funziona tra due sorgenti è indipendente dalla natura del fluido di lavoro o dai particolari del meccanismo. Tutte le macchine reversibili hanno il medesimo rendimento quando operano tra queste stesse temperature.
2. Il rendimento di una macchina reversibile è il rendimento massimo per macchine che operano tra le due temperature in questione. Il rendimento di qualunque macchina che funzioni tra queste sorgenti deve essere minore o uguale a quello di una macchina reversibile.

La distinzione tra la macchina reversibile generica e la macchina di Carnot è inessenziale ai nostri fini. Data la sua semplicità, ci serviremo della macchina di Carnot come di un tipo particolare di macchina reversibile.

La dimostrazione del teorema di Carnot consiste nel mostrare che, se il teorema non fosse vero, sarebbero possibili violazioni del secondo principio della termodinamica. (Il teorema di Carnot può quindi essere considerato come un ulteriore modo di formulare il secondo principio della termodinamica.) Delineiamo brevemente la dimostrazione della prima parte del teorema di Carnot, ammettendo che due macchine di Carnot CC' e CC possano avere rendimenti diversi, η ed η' , allorché funzionano tra le stesse due sorgenti. In particolare, supponiamo $\eta' > \eta$. Allora, come mostra la Figura 19.11, si può usare la macchina con il rendimento maggiore, CC' , per azionare l'altra, CC , come macchina frigorifera (è reversibile), ottenendo come risultato globale il trasferimento di calore da una temperatura inferiore a una superiore. Questo risultato è impossibile in base al secondo principio; quindi la nostra ipotesi che $\eta' > \eta$ è falsa. Scambiando i ruoli dei due cicli, si può mostrare che anche l'ipotesi $\eta > \eta'$ è falsa. Pertanto $\eta = \eta'$. La dimostrazione del teorema di Carnot sarà ripresa nel Problema 19.3.

Nel prossimo paragrafo ci serviremo delle due asserzioni del teorema di Carnot per ricavare alcuni risultati utili e significativi.

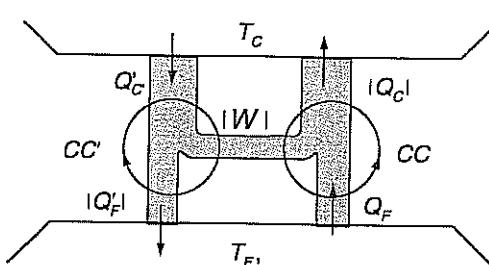


Figura 19.11

Un ciclo di Carnot CC' viene usato per azionare una macchina frigorifera di Carnot CC . Se $\eta' > \eta$, allora $|Q_C| > Q'_C$ e $Q_F > |Q'_F|$. Il risultato globale è il trasferimento di calore da T_F a T_C , il che viola l'enunciato di Clausius del secondo principio.

19.5 LA TEMPERATURA TERMODINAMICA

La macchina reversibile è la macchina termica con il rendimento massimo tra quelle che operano tra due sorgenti alle temperature T_C e T_F . Ora determineremo il valore di questo rendimento massimo. Dal momento che tutte le macchine reversibili che funzionano tra queste due sorgenti hanno lo stesso rendimento, sceglieremo una macchina di Carnot con un gas perfetto come fluido di lavoro. Questa scelta rende semplice il calcolo, ma il risultato è il medesimo qualunque sia il fluido di lavoro e per qualunque macchina reversibile.

Consideriamo n moli di un gas perfetto che compie un ciclo di Carnot tra due sorgenti alle temperature T_C e T_F , come mostra la Figura 19.12. Occorre calcolare le quantità di calore scambiate Q_C e $|Q_F|$ per determinare il rendimento in base all'Equazione (19.4). Per la trasformazione isoterna che connette gli stati a e b , la variazione dell'energia interna è nulla ($\Delta U = 0$ per il gas perfetto perché $\Delta T = 0$). Per il primo principio e l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$Q_C = W_{ab} = \int_a^b p \, dV = \int_{V_a}^{V_b} \frac{RT_C}{V} \, dV = nRT_C \ln \frac{V_b}{V_a}$$

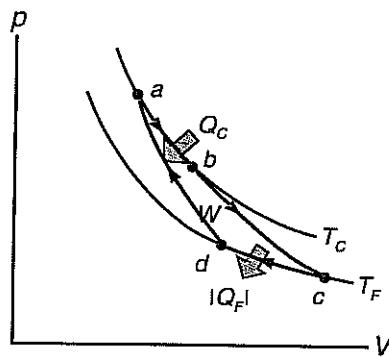


Figura 19.12

Un gas perfetto compie un ciclo di Carnot tra due sorgenti alle temperature T_C e T_F .

In modo analogo si calcola $|Q_F|$ per la compressione isoterna che da c porta a d :

$$|Q_F| = nRT_F \ln \frac{V_c}{V_d}$$

Il rendimento del ciclo è dato dall'Equazione (19.4), $\eta = 1 - |Q_F|/Q_C$, ossia

$$\eta = 1 - \frac{nRT_F \ln(V_c/V_d)}{nRT_C \ln(V_b/V_a)} \quad (19.8)$$

Questo risultato può essere semplificato prendendo in considerazione le variazioni di volume che hanno luogo nelle trasformazioni adiabatiche del ciclo. Per un gas perfetto, pV^γ è una costante in una trasformazione adiabatica quasi-statica. Usando la relazione $pV = nRT$, possiamo scrivere $pV^\gamma = pV\gamma^{-1} = nRT\gamma^{-1}$, cosicché anche $TV\gamma^{-1}$ è una costante. Quindi $T_C V_b^{\gamma-1} = T_F V_c^{\gamma-1}$ per l'espansione adiabatica, e $T_C V_d^{\gamma-1} = T_F V_d^{\gamma-1}$ per la compressione adiabatica. Dividendo la prima di queste equazioni per la seconda, si ottiene $(V_b/V_a)^{\gamma-1} = (V_c/V_d)^{\gamma-1}$, ossia

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

I logaritmi che compaiono nell'Equazione (19.8) sono quindi uguali. Semplificando fattori comuni al numeratore e al denominatore dell'Equazione (19.8), si ha per il rendimento del ciclo di Carnot che opera tra T_C e T_F ,

Rendimento di un ciclo di Carnot.

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad (19.9)$$

Il rendimento di questa macchina termica (un gas perfetto che compie un ciclo di Carnot) dipende soltanto dalle temperature del gas perfetto delle sorgenti. Secondo il teorema di Carnot, il rendimento è lo stesso per tutte le macchine reversibili che funzionano tra queste sorgenti.

La temperatura termodinamica. Supponiamo che un'altra macchina reversibile operi tra queste stesse due sorgenti. Può darsi che il fluido di lavoro sia un materiale molto complesso; esso può anche subire cambiamenti di fase durante parte del ciclo. Il teorema di Carnot ci assicura che il rendimento di questo ciclo ha esattamente lo stesso valore di quello del ciclo di Carnot del gas perfetto. Tutte le macchine reversibili che operano tra le stesse due sorgenti hanno infatti lo stesso rendimento. Le uniche caratteristiche comuni dell'insieme di tutte le macchine reversibili che operano tra queste due sorgenti sono le sorgenti stesse e il rapporto tra gli scambi di calore del ciclo con queste sorgenti. Vale a dire che, siccome $\eta = 1 - |Q_F|/Q_C$, il rapporto $|Q_F|/Q_C$ ha lo stesso valore per tutte le macchine reversibili che operano tra questa coppia di sorgenti. Tale osservazione costituisce la base della nostra ultima e più fondamentale definizione della temperatura.

La *temperatura termodinamica*, o *temperatura Kelvin*, è definita considerando il funzionamento di una macchina reversibile tra due sorgenti o sistemi. Il rapporto tra le temperature di questi due sistemi è per definizione pari al rapporto tra le quantità di calore scambiate da una macchina reversibile funzionante tra questi sistemi:

$$\frac{T_C}{T_F} = \left| \frac{Q_C}{Q_F} \right| \quad (19.10)$$

Come si è visto nel Capitolo 16, la scala Kelvin viene definita scegliendo 273.16 K come temperatura del punto triplo dell'acqua. La temperatura T di un sistema si ottiene misurando la quantità di calore Q scambiata con questo sistema da una macchina reversibile che opera tra il sistema stesso e una sorgente formata da acqua al punto triplo. Se Q_3 è la quantità di calore scambiata dalla macchina reversibile al punto triplo, la temperatura del sistema è

$$T = 273.16 \text{ K} \left| \frac{Q}{Q_3} \right| \quad (19.11)$$

Definizione della temperatura termodinamica, o temperatura Kelvin.

Dal momento che in una macchina reversibile si può usare qualunque sostanza e che il rapporto Q/Q_3 è uguale per tutte le macchine reversibili che funzionano tra gli stessi due sistemi, questa definizione della temperatura è indipendente dalle proprietà di qualsiasi sostanza.

Per l'Equazione (19.10), $|Q_F/Q_C| = T_F/T_C$, e quindi il rendimento $\eta = 1 - |Q_F/Q_C|$ di qualunque macchina reversibile funzionante tra due sorgenti è dato da

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad (19.12)$$

Questo stesso risultato compare nell'Equazione (19.9), ma in quel caso la temperatura era la temperatura del gas perfetto. Ne concludiamo che, nell'intervallo di temperatura in cui si può usare un termometro a gas, la definizione della temperatura del gas perfetto coincide con quella della temperatura termodinamica. Pertanto continueremo a usare lo stesso simbolo (T) per la temperatura sulla scala Kelvin.

Esempio 19.4

Un ciclo di Carnot opera tra acqua al punto triplo e N_2 liquido al punto normale di ebollizione. In ogni ciclo la quantità di calore scambiata con l' N_2 è $|Q_b| = 0.0401$ J, mentre la quantità di calore scambiata con l'acqua al punto triplo è $|Q_a| = 0.1422$ J. Determinare, in base a questi valori delle quantità di calore scambiate, il punto normale di ebollizione dell' N_2 .

Soluzione

Poiché uno dei sistemi è acqua al punto triplo, possiamo utilizzare l'Equazione (19.11):

$$T = \frac{(273.16 \text{ K})(0.0401 \text{ J})}{0.1422 \text{ J}} = 77.0 \text{ K}$$



Valutazione dei rendimenti. La prima parte del teorema di Carnot – tutte le macchine reversibili che funzionano tra due date sorgenti hanno lo stesso rendimento – ci ha condotto alla definizione della temperatura termodinamica. La seconda parte del teorema – nessuna macchina può avere un rendimento maggiore di quello di una macchina reversibile – ci consente di stabilire un limite superiore per i rendimenti delle macchine reali.

Un'analisi del funzionamento di una macchina termica reale mostra che, sebbene il calore possa essere ceduto e sottratto al fluido di lavoro in un intervallo di temperatura, la macchina opera tra due temperature estreme. Durante il ciclo, il fluido di lavoro raggiunge una temperatura massima T_C , e una temperatura minima T_F . Secondo l'Equazione (19.12), il rendimento di una macchina di Carnot (una macchina reversibile) che opera tra queste temperature estreme dipende soltanto dalle temperature, $\eta = 1 - T_F/T_C$. Il rendimento della macchina reale non può essere maggiore di quello del ciclo di Carnot. In tal modo, il limite superiore del rendimento di una macchina reale è fissato dalle temperature estreme raggiunte dal fluido di lavoro. In pratica poi, una macchina reale avrà un rendimento minore a causa delle perdite, quali quelle dovute agli attriti.

L'espressione del rendimento della macchina di Carnot, $\eta = 1 - T_F/T_C$, indica la convenienza che a fornire calore a un ciclo sia una sorgente a temperatura molto alta e che il calore venga ceduto a una sorgente a temperatura molto bassa. Si ottiene un maggior rendimento per la macchina di Carnot diminuendo T_F e aumentando T_C .

Nel valutare i rendimenti, si può usare anche l'Equazione (19.12), dove T_F e T_C rappresentano le temperature delle due sorgenti invece delle temperature estreme del fluido di lavoro in una macchina reale. In questa valutazione, il rendimento di Carnot rappresenta il limite superiore per il rendimento delle macchine reali che funzionano tra le due sorgenti.

Si può analizzare con criteri analoghi l'efficienza di una macchina frigorifera o di una pompa di calore.

Il coefficiente di prestazione di una macchina frigorifera reale non può superare quello di un ciclo di Carnot che operi come macchina frigorifera tra le due temperature estreme. Per il ciclo di Carnot il coefficiente è, in base alla definizione di temperatura,

$$K = \frac{Q_F}{|W|} = \frac{Q_F}{|Q_C| - Q_F} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

Il coefficiente di una normale macchina frigorifera è considerevolmente minore di quello del ciclo di Carnot.

Rendimento di una qualsiasi macchina reversibile che opera tra le temperature T_F e T_C .

Una macchina di Carnot fornisce un limite superiore per il rendimento.

Il rendimento è maggiore se T_C è più elevata e T_F è più bassa.

Esempio 19.5

Stimare il rendimento del ciclo utilizzato in una moderna macchina a vapore. Il vapore raggiunge una temperatura di 550 °C nella caldaia, e l'acqua nel condensatore scende a una temperatura di 60 °C.

Soluzione

Il rendimento della macchina a vapore non può superare quello di un ciclo di Carnot che opera tra la temperatura più alta e la temperatura più bassa disponibili. Le temperature nell'Equazione (19.12) devono essere espresse sulla scala Kelvin. Quindi $T_C = 273 \text{ K} + 550 \text{ }^{\circ}\text{C} = 823 \text{ K}$ e $T_F = 273 \text{ K} + 60 \text{ }^{\circ}\text{C} = 333 \text{ K}$. Il rendimento di Carnot è

$$\eta = 1 - \frac{333 \text{ K}}{823 \text{ K}} = 60 \text{ per cento}$$

Il rendimento del ciclo reale non può superare il 60 per cento. Risulta che il ciclo reale ha un rendimento che oscilla tra il 35 e il 45 per cento, a seconda dei particolari di funzionamento. Poiché non tutta l'energia fornita dal combustibile viene assorbita dal ciclo, il rendimento globale è limitato al 40 per cento circa, nel migliore dei casi.

Esempio 19.6

Si stimi la potenza necessaria a una pompa di calore che deve fornire $3 \times 10^4 \text{ Btu/h} = 9 \text{ kW}$ a una casa in un clima temperato. Per quanto riguarda gli scambi di calore all'esterno e all'interno, si ammetta che il fluido di lavoro abbia temperature estreme di $-23 \text{ }^{\circ}\text{C}$ e $47 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Soluzione

Una pompa di calore di Carnot funzionante tra queste temperature estreme avrebbe un'efficienza

$$K_{pc} = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = \frac{320 \text{ K}}{70 \text{ K}} = 4.6$$

Dal momento che il rapporto tra le energie trasferite nell'unità di tempo è pari al rapporto tra le energie trasferite in un ciclo, scriviamo (P rappresenta la potenza fornita al ciclo) $K_{pc} = 9 \text{ kW}/P$, ossia

$$P = \frac{9 \text{ kW}}{K_{pc}} = \frac{9 \text{ kW}}{4.6} = 2 \text{ kW}$$

Una pompa di calore reale cui venisse fornita questa potenza cederebbe calore all'interno a un ritmo inferiore a quello calcolato, e la sua efficienza sarebbe minore di 4.6.

19.6 L'ENTROPIA

Il cambiamento di una variabile di stato è nullo lungo qualunque trasformazione ciclica.

Finora il secondo principio della termodinamica è stato formulato in termini che descrivevano congegni di carattere pratico come le macchine termiche e le macchine frigorifere. C'è un modo di enunciare il secondo principio nel quale non si fa riferimento ad alcun tipo particolare di macchina né ad alcuna concreta trasformazione. Tale formulazione è espressa in termini di una grandezza più astratta, l'*entropia* di un sistema. In questo paragrafo definiremo l'entropia e indicheremo come calcolare le variazioni di entropia di un sistema. Nel prossimo analizzeremo la connessione tra entropia, irreversibilità e secondo principio della termodinamica.

L'entropia come variabile di stato. Rammentiamo che un sistema in uno stato di equilibrio può essere caratterizzato dai valori delle sue variabili di stato. Ci siamo già imbattuti in alcune variabili di stato che sono rappresentate dai familiari simboli p , V , T , n , U . La variazione di una variabile di stato in una trasformazione ciclica, come quella rappresentata dal cammino chiuso della Figura 19.13, è nulla perché il sistema ritorna al suo stato iniziale al termine del ciclo. Quindi

$$\Delta U = 0 \quad (\text{lungo un ciclo}) \quad (19.13)$$

Questa conclusione deriva dal fatto che l'energia interna U è una variabile di stato. Relazioni analoghe valgono per qualunque variabile di stato in un ciclo. Possiamo scrivere, per esempio,

$$\Delta p = 0 \quad \Delta T = 0 \quad \Delta V = 0 \quad (\text{lungo un ciclo})$$

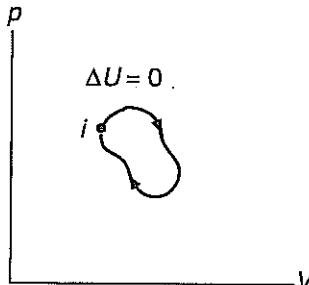


Figura 19.13

Il cambiamento di una variabile di stato, come l'energia interna, è nullo lungo qualunque trasformazione ciclica.

Viceversa, la quantità totale di calore e il lavoro totale scambiati in un ciclo (come quello di una macchina termica) non sono in generali nulli:

$$Q \neq 0 \quad W \neq 0 \quad (\text{lungo un ciclo})$$

Se una grandezza soddisfa una relazione della forma dell'Equazione (19.13) per qualsiasi ciclo, tale grandezza è una variabile di stato del sistema.

Introduciamo ora una nuova variabile di stato, l'entropia di un sistema. Supponiamo che un sistema alla temperatura T subisca una trasformazione infinitesima nella quale la quantità di calore dQ viene ceduta in modo reversibile al sistema. La variazione di entropia del sistema, dS , è definita come

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (19.14)$$

L'Equazione (19.14) in forma integrale definisce la differenza di entropia tra due stati del sistema, i e f :

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad (19.15)$$

dove l'integrale è calcolato lungo una trasformazione reversibile che connette i due stati del sistema. L'entropia ha le dimensioni di un'energia divisa per una temperatura termodinamica, e la relativa unità SI è il J/K.

Si noti che la differenza o variazione di entropia è definita impiegando una trasformazione reversibile per connettere i due stati. Nell'applicare la definizione non si può usare una trasformazione irreversibile; tuttavia, qualunque trasformazione reversibile che connetta gli stati i e f può essere utilizzata. Per quanto riguarda le trasformazioni che possono essere rappresentate in un diagramma p - V , ci si può servire di qualunque cammino che congiunga lo stato iniziale e quello finale. L'indipendenza dal particolare cammino corrisponde al fatto che l'entropia è una variabile di stato.

Possiamo verificare che l'entropia di un sistema è una variabile di stato mostrando che

$$\Delta S = 0 \quad (\text{lungo un ciclo})$$

Cominciamo a considerare un ciclo di Carnot che opera come una macchina termica tra le temperature T_1 e T_2 , come mostra schematicamente in un diagramma p - V la Figura 19.14a. La quantità di calore dQ_2 viene assorbita alla temperatura T_2 , e la quantità di calore $|\delta Q_1|$ viene ceduta alla temperatura T_1 . In base all'Equazione (19.10), si ha $|\delta Q_2/\delta Q_1| = T_2/T_1$, ossia

$$\frac{\delta Q_2}{T_2} = \frac{|\delta Q_1|}{T_1}$$

Poiché il ciclo opera come una macchina termica, δQ_2 è positiva e δQ_1 è negativa ($\delta Q_1 = -|\delta Q_1|$). Questa conclusione può essere espressa in forma più generale, eliminando il segno di valore assoluto, come

$$\frac{\delta Q_2}{T_2} + \frac{|\delta Q_1|}{T_1} = 0 \quad (19.16)$$

Vale a dire che, lungo qualunque ciclo di Carnot, è nulla la somma della grandezza $\delta Q/T$, ove δQ è la quantità di calore scambiata in modo reversibile con la sorgente a temperatura T .

Si noti che l'Equazione (19.16) rappresenta il calcolo della variazione di entropia lungo il ciclo di Carnot in esame: la variazione di entropia lungo la trasformazione isoterma reversibile alla temperatura T_2 è $\delta Q_2/T_2$, mentre è $\delta Q_1/T_1$ lungo la trasformazione isoterma reversibile alla temperatura T_1 . Il contributo alla variazione di entropia delle trasformazioni adiabatiche reversibili è nullo perché $\delta Q = 0$ per ciascuna di esse. Quindi, per qualunque ciclo di Carnot, $\Delta S = 0$.

Definizione dell'entropia.

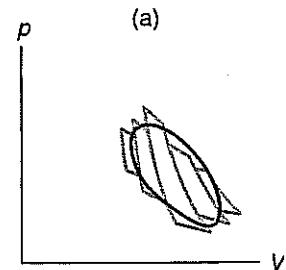
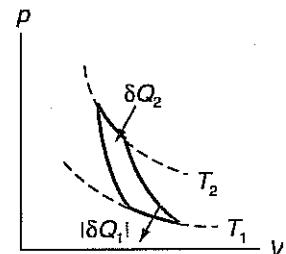


Figura 19.14
(a) Un ciclo di Carnot opera tra T_1 e T_2 , e $T_1/T_2 = |\delta Q_1/\delta Q_2|$
(b) Un ciclo reversibile è approssimato da un insieme di cicli di Carnot.

Per un qualunque ciclo di Carnot, $\Delta S = 0$

Un ciclo reversibile generico può essere approssimato da un insieme di cicli di Carnot.

L'entropia è una variabile di stato.

Ora consideriamo il ciclo reversibile generico rappresentato nella Figura 19.14b. E può essere approssimato da un insieme di trasformazioni reversibili isoterme e adiatiche raggruppate a formare un grande numero di cicli di Carnot, come suggeriscono schematicamente la figura. Siccome un'equazione della forma dell'Equazione (19.14) vale per ciascuno dei cicli di Carnot che approssimano il ciclo effettivo, si può scrivere:

$$\sum \frac{\delta Q}{T} = 0$$

La somma è estesa a tutto l'insieme di cicli di Carnot usato per approssimare il ciclo effettivo. Al tendere a infinito del numero dei cicli di Carnot usati per l'approssimazione, il risultato diventa esatto e

$$\Delta S = 0 \quad (\text{lungo un ciclo})$$

Poiché la variazione di entropia di un sistema è nulla per qualsiasi ciclo, l'entropia è una variabile di stato.

In termini matematici

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Come per ogni quantità il cui integrale ciclico sia nullo (vedi l'energia interna di un sistema termodinamico, vedi il caso delle forze conservative in meccanica ecc.), la quantità $\frac{\delta Q}{T}$ è un differenziale esatto, cioè è il differenziale di una funzione S chiamata entropia: $dS = \frac{\delta Q}{T}$ (vedi Equazione (19.14)).

Sottolineiamo che l'integrale ciclico precedente è calcolato lungo una trasformazione ciclica reversibile.

Da quanto detto risulta che l'entropia è una funzione di stato, in quanto i suoi valori dipendono solo dallo stato in cui si trova il sistema e non da come si è arrivati a quello stato. Quindi si può affermare che un sistema, che sia in un determinato stato di equilibrio, possiede una certa quantità di entropia, proprio come possiede una certa quantità di energia interna. Se il sistema subisce una trasformazione e cambia stato, la sua variazione di entropia è la differenza dell'entropia posseduta dal sistema nello stato finale meno quella posseduta nello stato iniziale e, quindi, non dipende né dalla trasformazione né dal modo in cui questa è avvenuta.

Nel caso in cui il ciclo non sia reversibile, cioè almeno una delle trasformazioni che lo compongono non lo sia, l'integrale ciclico precedente non è più uguale a zero. Si mostra, partendo dal secondo principio della termodinamica, che $\sum \frac{\delta Q}{T} < 0$ e quindi $\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$. In generale, quindi, si ha che

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Questa relazione è chiamata la *disuguaglianza di Clausius*, nella quale il segno di uguaglianza vale per i cicli irreversibili e il segno di disegualanza vale per i cicli reversibili.

È importante notare che, benché le trasformazioni reversibili siano delle idealizzazioni e le trasformazioni reali siano tutte irreversibili, i ragionamenti e i calcoli eseguiti su trasformazioni ideali, quali le reversibili, hanno permesso di comprendere meglio alcuni fenomeni naturali e di scoprire nuove leggi della natura; in particolare il calcolo dell'integrale ciclico di $\frac{\delta Q}{T}$ su una trasformazione reversibile ha reso possibile dimostrare l'esistenza reale di una nuova funzione di stato, l'*entropia*.

Esempio 19.7

Come abbiamo visto, l'entropia è una funzione di stato, e perciò è una funzione delle variabili che definiscono lo stato di un qualunque sistema. Si consideri come sistema termodinamico un gas costituito di n moli e si calcoli la sua entropia in funzione delle varie variabili di stato del gas.

Soluzione

Sappiamo che $dS = \frac{\delta Q}{T}$; per il primo principio della termodinamica il calore infinitesimo scambiato si può scrivere $\delta Q = dU + \delta W$. Poiché stiamo considerando un gas perfetto, abbiamo $dU = nC_V dT$ e $\delta W = pdV$. Allora

$$dS = \frac{nC_V dT + pdV}{T} = nC_V \frac{dT}{T} + \frac{nRTdV}{VT} = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

Integrando si ha

$$S = nC_V \ln T + nR \ln V + \text{cost}$$

Si noti che nelle trasformazioni la quantità che conta è sempre la differenza di entropia e, quindi, il valore della cost non ha importanza. (Si ricordi l'analogia con l'energia potenziale in meccanica e con l'energia interna e si colleghi questo fatto con l'uguaglianza a zero di tre integrali ciclici.)

Esempio 19.8

Consideriamo un gas reale che abbia come energia interna la seguente funzione delle variabili di stato

$$U(V, T) = nC_V T - n \frac{a}{V}$$

e che abbia come equazione di stato l'equazione di van der Waals

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT$$

Un tale gas viene chiamato gas di van der Waals e costituisce una buona approssimazione di un gas reale a pressioni non troppo alte. Si noti che l'energia interna non dipende solo dalla temperatura. Si calcoli l'entropia di tale gas in funzione delle variabili di stato.

Soluzione

Sappiamo che $dS = \frac{\delta Q}{T}$ e che $\delta Q = dU + \delta W$. Calcoliamo, quindi, dU e δW in questo caso. Il differenziale totale della funzione U è

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial T} dT = n \frac{a}{V^2} dV + nC_V dT$$

e

$$\delta W = pdV = \left(\frac{nRT}{V-b} - \frac{na}{V^2}\right) dV$$

Allora

$$dS = nC_V \frac{dT}{T} + \frac{nRdV}{V-b}$$

Integrando si ottiene

$$S = nC_V \ln T + nR \ln(V-b) + \text{cost}$$



Il calcolo delle variazioni di entropia. Quando un sistema subisce una trasformazione, la variazione di entropia del sistema dipende soltanto dallo stato iniziale e da quello finale. La trasformazione effettiva può essere reversibile o irreversibile; può essere quasi-statica o esplosiva. Ma è essenziale servirsi di una trasformazione reversibile per calcolare una variazione di entropia con l'Equazione (19.15). È sempre possibile immaginare una trasformazione reversibile che connetta lo stato iniziale assegnato e lo stato finale assegnato del sistema: l'integrale dell'Equazione (19.15) viene calcolato per questa trasformazione reversibile.

Il risultato, la differenza di entropia tra i due stati, è lo stesso indipendentemente da quale trasformazione si sia effettivamente verificata. È soltanto per il calcolo che si deve usare una trasformazione reversibile.

Ora analizzeremo diversi esempi di calcolo della variazione di entropia di un sistema tra uno stato iniziale e uno stato finale connessi da una trasformazione reale irreversibile. In ciascun caso, per calcolare la variazione di entropia immagineremo una trasformazione reversibile che connetta tali stati.

La differenza di entropia tra due stati viene calcolata usando una qualunque trasformazione reversibile.

Esempio 19.9

Un cambiamento di fase. Un blocco di ghiaccio di massa 0.120 kg e temperatura 0.00 °C viene immerso in acqua liquida alla stessa temperatura. L'insieme viene lasciato a contatto con l'aria a temperatura ambiente e agitato in modo che la sua temperatura rimanga di 0.00 °C mentre il ghiaccio si fonda. Determinare la differenza di entropia tra 0.120 kg di ghiaccio a 0.00 °C e 0.120 kg di acqua liquida a 0.00 °C.

Soluzione

Nella trasformazione effettiva sia il calore che il lavoro vengono scambiati in modo irreversibile, per calcolare la differenza di entropia tra questi due stati, o fasi, dell'acqua al punto di congelamento immaginiamo una semplice trasformazione reversibile che faccia fondere il ghiaccio. Servendo una sorgente la cui temperatura sia trascurabilmente più alta di quella del ghiaccio, cediamo calore a quest'ultimo in modo reversibile al punto normale di fusione (273 K). La quantità di calore ceduta determinata dal calore di fusione: $L_f = 0.335 \text{ MJ/kg}$, secondo la Tabella 17.2:

$$Q = mL_f = (0.120 \text{ kg})(0.335 \text{ MJ/kg}) = 40.2 \text{ kJ}$$

Per questa trasformazione reversibile l'integrale dell'Equazione (19.15) può essere calcolato senza difficoltà perché la temperatura rimane costante:

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_{\text{liquido}} - S_{\text{solido}} = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f dQ = \frac{Q}{T} \\ &= \frac{40.2 \text{ kJ}}{273 \text{ K}} = 147 \text{ J/K} \end{aligned}$$

Esempio 19.10

Una variazione di temperatura. Determinare la variazione di entropia di 1.0 kg di H₂O che viene scaldata su un fornello da 10 a 95 °C a pressione atmosferica.

Soluzione

Per elevare in modo reversibile la temperatura del sistema, dobbiamo servirci di una successione di sorgenti di calore, ciascuna a una temperatura di pochissimo superiore a quella che l'acqua ha momentaneamente raggiunto. Se c_p è il calore specifico (costante) dell'acqua, allora $dQ = mc_p dT$ è la quantità di calore fornita per innalzare la temperatura di dT . Usando l'Equazione (19.15), si ha

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_i}^{T_f} \frac{dQ}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{mc_p dT}{T} = mc_p \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc_p \ln \frac{T_f}{T_i} \\ &= (1.0 \text{ kg})(4.2 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}) \left(\ln \frac{368 \text{ K}}{283 \text{ K}} \right) \\ &= 1100 \text{ J/K} \end{aligned}$$

Esempio 19.11

Una variazione di volume. Nel Paragrafo 17.6, abbiamo applicato il primo principio al processo di espansione libera. In tale processo un gas confinato in una parte di un recipiente isolato a due compartimenti si espande liberamente quando la membrana divisoria si rompe. Per l'espansione libera $dQ = 0$, $W = 0$, e il primo principio fornisce $\Delta U = 0$. Nel caso di un gas perfetto, U dipende solo da T , e quindi $\Delta T = 0$. Che cosa si può dire di ΔS ? Un gas perfetto inizialmente alla temperatura T occupa un volume V_i . Esso subisce un'espansione libera nella quale il suo volume raggiunge il valore V_f . Determinare la variazione dell'entropia.

Soluzione

Un'espansione libera è ovviamente irreversibile, in quanto una piccola variazione delle condizioni esterne non può invertire l'espansione. Così, anche se $Q = 0$ nell'espansione libera irreversibile, dovremmo aspettarci che l'entropia rimanga invariata. Escogitiamo una trasformazione reversibile che porti n moli di un gas perfetto dallo stato individuato da (V_i, T) allo stato (V_f, T) . Dal momento che lo stato iniziale e quello finale hanno la stessa temperatura, usiamo un'espansione isoterma reversibile che porti da V_i a V_f . La quantità di calore fornita in ogni passo infinitesimo è, per il primo principio,

$$dQ = dU + dW = 0 + p dV = p dV$$

dove $dU = 0$ per un gas perfetto perché $dT = 0$. Usando l'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT$, si ha

$$\frac{dQ}{T} = \frac{p dV}{T} = \frac{nRT}{V} \frac{dV}{T} = \frac{nRT dV}{V}$$

Per l'Equazione (19.15),

$$\Delta S = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nR}{V} dV = nR \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Siccome il volume aumenta in seguito a un'espansione libera, il logaritmo è positivo, e lo stato finale ha un'entropia maggiore di quella dello stato iniziale. L'entropia, cioè, aumenta in seguito a un'espansione libera.

Esempio 19.12

Entropia di mescolamento. L'entropia è una grandezza additiva nel senso che la variazione di entropia di un sistema è pari alla somma delle variazioni di entropia dei suoi sottosistemi. Consideriamo un sistema formato da acqua divisa in due parti: 0.30 kg inizialmente a 90 °C e 0.70 kg inizialmente a 10 °C. Supponiamo che le due quantità d'acqua vengano mescolate in un recipiente isolato e raggiungano l'equilibrio (un processo irreversibile). Determinare la variazione di entropia del sistema formato da 1.00 kg di acqua.

Soluzione

La temperatura finale di equilibrio T_f del sistema si ottiene imponendo che la quantità di calore ceduta dall'acqua più calda mentre la sua temperatura si abbassa sia pari alla quantità di calore assorbita dall'acqua più fredda mentre la sua temperatura si innalza. Quindi

$$(0.30 \text{ kg})c_p(90^\circ\text{C} - T_f) = (0.70 \text{ kg})c_p(T_f - 10^\circ\text{C})$$

La temperatura finale è $T_f = 34^\circ\text{C} = 307 \text{ K}$. Calcoliamo separatamente la variazione di entropia di ciascun sottosistema immaginando di farne variare reversibilmente la temperatura fino a raggiungere T_f . Per l'acqua più calda, che chiameremo sottosistema 1:

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= \int_i^f \frac{dQ}{T} = m_1 c_p \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} = m_1 c_p \ln \frac{T_f}{T_1} \\ &= (0.30 \text{ kg})(4.2 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}) \left(\ln \frac{307 \text{ K}}{363 \text{ K}} \right) = -210 \text{ J/K}\end{aligned}$$

L'entropia dell'acqua più calda diminuisce con il raffreddamento, e il segno meno deriva dal logaritmo. L'entropia dell'acqua più fredda aumenta, come mostra un calcolo analogo:

$$\Delta S_2 = 0.70 \text{ kg}(4.2 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}) \left(\ln \frac{307 \text{ K}}{283 \text{ K}} \right) = 240 \text{ J/K}$$

La variazione di entropia del sistema è la somma di questi due contributi:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -210 \text{ J/K} + 240 \text{ J/K} = 30 \text{ J/K}$$

Si noti che l'entropia del sistema aumenta. Questo risultato è valido in generale per un processo di mescolamento. Se l'entropia di parte di un sistema può diminuire, l'entropia dell'altra parte aumenta in misura maggiore.

19.7 L'ENTROPIA E IL SECONDO PRINCIPIO

Che cos'è l'entropia? Qual è il suo valore concettuale ai fini di una più approfondita comprensione della termodinamica? Queste questioni possono essere affrontate in parte calcolando le variazioni di entropia, come abbiamo fatto nei vari esempi dell'ultimo paragrafo. Dall'Esempio 19.10 possiamo vedere che, a differenza dell'energia, l'entropia di un sistema isolato non necessariamente si conserva. L'entropia di una parte del sistema descritto in quell'esempio diminuiva mentre l'entropia dell'altra parte aumentava in misura maggiore; l'entropia del sistema isolato aumentava. Generalizziamo questa osservazione.

Qualunque trasformazione può essere descritta in termini dei cambiamenti che intervengono nel sistema in esame e dei cambiamenti che intervengono nell'ambiente circostante quel sistema. Il sistema e la parte coinvolta dell'ambiente formano un sistema più grande e isolato che viene chiamato *universo*. Consideriamo le variazioni di entropia che accompagnano una trasformazione. Indichiamo la variazione di entropia del nostro sistema con ΔS_{sic} e la variazione di entropia dell'ambiente circostante con

L'insieme di un sistema e dell'ambiente che lo circonda viene chiamato universo.

ΔS_{amb} . La somma di queste variazioni è la variazione di entropia dell'universo ΔS_{univ} :

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{sis}} + \Delta S_{\text{amb}}$$

Il secondo principio della termodinamica (enunciato in termini di entropia).

Ogni volta effettuiamo il calcolo, verifichiamo che l'entropia dell'universo aumenta o rimane costante. L'entropia dell'universo non diminuisce mai. Questa conclusione è in accordo con un ulteriore enunciato del secondo principio della termodinamica: *In qualunque trasformazione l'entropia dell'universo o aumenta (se la trasformazione è irreversibile) o rimane costante (se la trasformazione è reversibile)*:

$$\Delta S_{\text{univ}} \geq 0 \quad (19.17)$$

Questo enunciato viene chiamato *enunciato del secondo principio in termini di entropia*. Si rammenti che una trasformazione reversibile è un'idealizzazione; tutte le trasformazioni reali sono irreversibili. Per ogni trasformazione reale, dunque, l'entropia dell'universo aumenta.

Secondo questo enunciato, una trasformazione in seguito alla quale l'entropia dell'universo diminuisca è impossibile. Consideriamo, per esempio, un flusso spontaneo di una quantità di calore $|Q|$ dalla temperatura inferiore T_F alla temperatura superiore T_C , quale è rappresentato nella Figura 19.15. Si tratta di un processo impossibile perché viola l'enunciato di Clausius del secondo principio. Se potesse verificarsi, le variazioni di entropia, ΔS_F e ΔS_C , della sorgente a bassa temperatura e di quella a temperatura più elevata sarebbero

$$\Delta S_F = -\frac{|Q|}{T_F} \quad \Delta S_C = \frac{|Q|}{T_C}$$

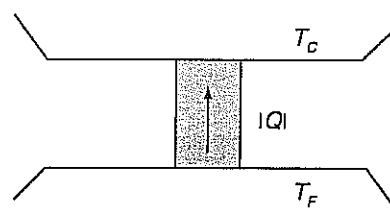


Figura 19.15

Il flusso spontaneo di calore da temperature più basse a temperature più elevate non si verifica. L'entropia dell'universo, in tal caso, diminuirebbe in violazione del secondo principio.

Il flusso del calore da temperature più elevate a temperature più basse è irreversibile.

La "freccia del tempo" è orientata verso l'aumento dell'entropia.

Il lavoro diventa non disponibile quando aumenta l'entropia.

La variazione di entropia dell'universo sarebbe la loro somma:

$$\Delta S_{\text{univ}} = -\frac{|Q|}{T_F} + \frac{|Q|}{T_C} = -|Q| \left(\frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_C} \right)$$

La grandezza tra parentesi è positiva poiché $T_F < T_C$, e la variazione dell'entropia dell'universo sarebbe negativa. Quindi il flusso spontaneo del calore da una temperatura più bassa a una più alta viola anche l'enunciato del secondo principio in termini di entropia.

Il flusso spontaneo del calore da una temperatura più elevata a una più bassa non è in contrasto con il secondo principio. Con un calcolo analogo a quello fatto sopra, si può mostrare che l'entropia dell'universo aumenta in questo comunissimo processo. Dunque il secondo principio consente il flusso spontaneo del calore da temperature più elevate a temperature inferiori ma vieta il processo inverso. In effetti, il flusso del calore è irreversibile.

Altre trasformazioni irreversibili possono essere analizzate con lo stesso risultato. Supponiamo che il secondo principio consenta il verificarsi di un processo (tale da far aumentare l'entropia dell'universo). Ma il processo inverso non ha luogo perché violerebbe il secondo principio (facendo diminuire l'entropia dell'universo). In tal modo il secondo principio, sancendo l'aumento dell'entropia dell'universo, spiega la natura unidirezionale dei processi macroscopici. La «freccia del tempo» è orientata nella direzione che corrisponde all'aumento dell'entropia. Vale a dire che la successione degli eventi nel tempo è sempre tale da portare a stati dell'universo con entropia uguale o maggiore. Un'altra connessione tra irreversibilità, aumento dell'entropia e secondo principio ha a che fare con l'idea di «perdita della possibilità di compiere lavoro» o di «lavoro non disponibile». Consideriamo ancora una volta il flusso spontaneo e irrever-

sibile del calore da una temperatura maggiore a una minore. In seguito a questo flusso, va perduta la possibilità di usare tale calore per compiere lavoro facendo funzionare una macchina termica tra le due temperature iniziali. Se il flusso prosegue finché i due corpi raggiungono la stessa temperatura, non si può più compiere alcun lavoro (in accordo con l'enunciato di Kelvin-Planck del secondo principio). Il lavoro che si sarebbe potuto effettuare facendo funzionare una macchina termica tra le due sorgenti a temperature diverse non può più essere ottenuto neppure in minima parte, una volta che queste hanno raggiunto la medesima temperatura. La possibilità è andata perduta a causa del flusso irreversibile del calore. Quel lavoro non è più in alcun modo disponibile.

L'entropia e il secondo principio sono suscettibili anche di un'interpretazione a livello microscopico: ivi la descrizione viene condotta in termini statistici. Invece di vietare un particolare processo, il secondo principio lo descrive come altamente improbabile. Per esempio, la probabilità che tutte le molecole di un gas si trovino in una porzione di un recipiente è praticamente nulla. Una volta che abbia avuto luogo l'espansione libera (irreversibile) discussa nell'Esempio 19.9, è altamente improbabile che il gas ritorni spontaneamente allo stato iniziale, con tutte le molecole raggruppate in una sola parte del recipiente.

L'aumento dell'entropia può essere interpretato a livello microscopico come un passaggio da una situazione o configurazione più ordinata a una meno ordinata. I processi naturali, cioè, conducono a uno stato dell'universo più disordinato o caotico. Spesso è facile decidere quale di due configurazioni sia più disordinata: per esempio, la fase liquida di una sostanza, con le molecole che si muovono in ogni direzione, è solitamente più disordinata della fase solida, nella quale le molecole sono disposte in un reticolo (Esempio 19.7). Un gas confinato in un volume minore diventa più disordinato se si espande liberamente fino a occupare un volume maggiore (Esempio 19.9). Un sistema isolato è più ordinato quando le sue parti si trovano a temperature differenti che non quando tutte le sue parti hanno raggiunto la stessa temperatura (Esempio 19.10). In quest'ultimo esempio, una macchina termica può essere fatta funzionare tra parti a temperature diverse, ma non tra parti alla stessa temperatura. Considerazioni di questo tipo possono indurre a formulare congetture sul destino finale dell'universo. In ogni processo naturale (irreversibile), l'entropia dell'universo aumenta. L'universo evolve da stati altamente ordinati a stati più disordinati. La cosiddetta morte termica dell'universo corrisponderebbe allo stato di massima entropia, in cui composizione e temperatura sarebbero uniformi e non vi sarebbe alcuna possibilità che venga compiuto lavoro. A un livello meno generale di quello cosmologico, su queste basi possiamo farci un'idea (magari imperfetta) del processo di invecchiamento, del flusso spontaneo del calore, dell'inevitabile deterioramento di qualunque macchina, e dell'incapacità di ogni macchina di riparare spontaneamente sé stessa.

L'aumento dell'entropia corrisponde a un aumento del disordine.

La morte termica dell'universo.

RIEPILOGO

Paragrafo 19.2 Le macchine termiche e il secondo principio

Il rendimento η di una macchina termica è definito da

$$\eta = \frac{W}{Q_C} \quad (19.3)$$

In base all'enunciato di Kelvin-Planck del secondo principio della termodinamica, non è possibile un ciclo che sottragga calore a una sorgente a temperatura uniforme e lo converta integralmente in lavoro.

Paragrafo 19.3 Le macchine frigorifere e il secondo principio

Il coefficiente di prestazione di una macchina frigorifera è

$$K = \frac{Q_F}{|W|} \quad (19.6)$$

e l'efficienza di una pompa di calore è

$$K_{pc} = \left| \frac{Q_C}{W} \right| \quad (19.7)$$

In base all'enunciato di Clausius del secondo principio, non è possibile una trasformazione il cui unico risultato sia di trasferire calore da una temperatura inferiore a una temperatura superiore.

Paragrafo 19.4 Reversibilità e ciclo di Carnot

Una trasformazione è reversibile se può essere invertita effettuando soltanto cambiamenti infinitesimi nell'ambiente circostante il sistema. In caso contrario si ha una trasformazione irreversibile. Una macchina di Carnot è una macchina reversibile e verifica il teorema di Carnot: tutte le macchine reversibili che operano tra le temperature T_C e T_F hanno il medesimo rendimento e nessuna macchina può avere un rendimento maggiore.

Paragrafo 19.5 La temperatura termodinamica

La temperatura termodinamica T di un sistema è definita da

$$T = 273.16 \text{ K} \left| \frac{Q}{Q_3} \right| \quad (19.11)$$

dove Q e Q_3 sono le quantità di calore scambiate da un ciclo di Carnot che opera tra il sistema e dell'acqua al punto triplo. Il rendimento di una macchina di Carnot che opera tra le temperature T_F e T_C è dato da

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

e rappresenta il limite superiore per il rendimento delle macchine termiche reali che operano tra queste due temperature.

Paragrafo 19.6 L'entropia

L'entropia è una variabile di stato. La differenza di entropia tra due stati di un sistema è data da

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad (19.1)$$

dove l'integrale è calcolato lungo qualunque trasformazione reversibile che connette i due stati.

Paragrafo 19.7 L'entropia e il secondo principio

La variazione di entropia dell'universo è la somma delle variazioni di entropia di un sistema e del suo ambiente.

In base all'enunciato del secondo principio in termini di entropia in qualunque trasformazione l'entropia dell'universo o aumenta (se la trasformazione è irreversibile) o rimane invariata (se la trasformazione è reversibile).

L'aumento dell'entropia di un sistema isolato in seguito a una trasformazione irreversibile è connesso alla perdita di una possibilità di compiere lavoro da parte del sistema. A livello microscopico, una trasformazione irreversibile porta da uno stato più ordinato a uno stato più disordinato.

QUESITI

- 19.1** Quali sono i vantaggi dell'uso di un ciclo come macchina termica? Vi sono degli svantaggi? Spiega.
- 19.2** Ogni ciclo è una macchina termica? Ogni macchina termica opera lungo un ciclo? Spiega.
- 19.3** È possibile raffreddare una stanza, per esempio una cucina, lasciando aperto lo sportello del frigorifero? Spiega.
- 19.4** In che senso una pompa di calore pompa il calore? È utile l'analogia con una pompa idraulica? Descrivi le analogie e le differenze.
- 19.5** Quali sono alcuni dei fattori che fanno sì che le macchine termiche reali abbiano rendimenti inferiori al rendimento di Carnot?
- 19.6** Per aumentare il rendimento di una macchina di Carnot, è più efficace aumentare T_C di una quantità ΔT o diminuire T_F di una quantità ΔT ? Spiega.
- 19.7** Descrivi alcuni processi che siano approssimativamente reversibili. Descrivine alcuni che siano altamente irreversibili.
- 19.8** Perché si può considerare un ciclo quello del motore a combustione interna a benzina, se in ogni fase di aspirazione viene aspirata nuova aria?
- 19.9** Nel motore a benzina, che cosa svolge il ruolo della sorgente ad alta temperatura? Che cosa svolge il ruolo della sorgente a bassa temperatura?
- 19.10** In una centrale idroelettrica, l'energia elettrica viene prodotta dall'acqua in caduta che fa girare una turbina. C'è una macchina termica coinvolta in questo processo di conversione dell'energia? Spiega. C'è un limite superiore per il rendimento di questo processo? Se sì, qual è questo limite? Se no, perché?
- 19.11** Considera le due seguenti trasformazioni eseguite su cubetti di ghiaccio identici inizialmente a 0 °C:
1 Tieni stretto il ghiaccio in mano. Il ghiaccio si scioglie e il liquido raggiunge l'equilibrio termico alla temperatura corporea
- 2 Prima frantumi il ghiaccio con un martello e poi tieni stretti i frammenti in mano. I pezzi si sciogliono e il liquido raggiunge l'equilibrio termico alla temperatura corporea. È reversibile una di queste trasformazioni? In che relazione stanno le variazioni di entropia del sistema (H_2O) nei due casi?**
- 19.12** L'entropia di un gas aumenta, diminuisce, o rimane costante se il gas si espande (a) reversibilmente e isotermicamente, (b) reversibilmente e adiabaticamente?
- 19.13** L'entropia di un gas aumenta, diminuisce, o rimane costante se il gas viene compresso (a) reversibilmente e isotermicamente, (b) reversibilmente e adiabaticamente?
- 19.14** Spiega la distinzione tra una trasformazione quasi-statica e una trasformazione reversibile.
- 19.15** Quale stato della materia è più ordinato, quello di liquido o quello di vapore? Quale ha l'entropia maggiore al punto di ebollizione? Si deve fornire calore per passare dal liquido al vapore o viceversa?
- 19.16** Spiega perché la perdita di possibilità di compiere lavoro in seguito a un processo irreversibile non viola il primo principio della termodinamica.
- 19.17** Molti organismi viventi sono caratterizzati dalla crescita dallo sviluppo che ne fanno strutture altamente differenziate (cioè ordinate). Spiega perché questo aspetto della vita non è in conflitto con il secondo principio.
- 19.18** Supponiamo che tu passi il fine settimana a pulire e a mettere in ordine la tua stanza. L'entropia dell'universo in seguito a ciò è aumentata, diminuita, o rimasta costante? Spiega.
- 19.19** Congelando, una sostanza passa dallo stato liquido a quello solido, nel quale ha una struttura più ordinata, e la sua entropia diminuisce. Spiega perché questa trasformazione non viola il secondo principio.
- 19.20** Considera i due seguenti modi di dire: «Non si può ottenere qualcosa in cambio di niente» e «Non si può finire in pari». Discuti il loro significato in relazione al

- 19.21 Come si può aumentare l'entropia di 1 kg di acqua? Come si può diminuire l'entropia di 1 kg di acqua?
- 19.22 Il parametro «qualità» viene a volte usato per descrivere il calore estratto da una sorgente in relazione alle sue potenzialità di conversione in lavoro a condizioni vantaggiose. Se del calore è estratto da diverse sorgenti a temperature differenti, quale pensi abbia la qualità più elevata? Dove collocheresti l'energia meccanica in questa scala di qualità?

- 19.23 Completare la seguente tabella:

Simbolo	Grandezza	Tipo	Unità SI
Q_C			
Q_F			
T_C			K
η	Rendimento di una macchina termica		
K			
K_{pc}			
S	Scalare		

ESERCIZI

Paragrafo 19.2 Le macchine termiche e il secondo principio

- 19.1 In ogni ciclo di funzionamento, una macchina termica assorbe 440 J di calore e compie lavoro con un rendimento del 28 per cento. Determinare per un ciclo (a) il lavoro compiuto, (b) il calore restituito all'ambiente dalla macchina, (c) la variazione dell'energia interna del fluido di lavoro.
- 19.2 Una macchina termica che funziona costantemente tra due sorgenti assorbe ogni ora 20 MJ di calore e ne smaltisce 14 MJ. (a) Qual è il rendimento di questa macchina? (b) Quanto lavoro viene effettuato in 1 h? (c) Qual è la potenza fornita?
- 19.3 In un ciclo di funzionamento, una macchina termica assorbe 2200 J di calore e compie un lavoro di 620 J. (a) Qual è il rendimento di questa macchina? (b) Quanto calore viene restituito all'ambiente in ogni ciclo? (c) Se la macchina completa un ciclo ogni 0.033 s, con quale ritmo viene assorbito il calore, con quale ritmo il calore viene restituito all'ambiente, con quale ritmo viene effettuato il lavoro?
- 19.4 L'energia elettrica viene prodotta in una centrale a vapore con una potenza di 500 MW, e con un rendimento globale del 34 per cento. Con quale ritmo (a) l'energia viene fornita dal carbone usato come combustibile e (b) il calore viene ceduto all'acqua di un fiume usata per il raffreddamento? (c) Il calore di combustione del carbone è di circa 3×10^{10} J/t. Stimare la quantità di carbone bruciata ogni giorno in questa centrale.
- 19.5 In una macchina termica che opera sul ciclo rappresentato nella Figura 19.16, il fluido di lavoro è una

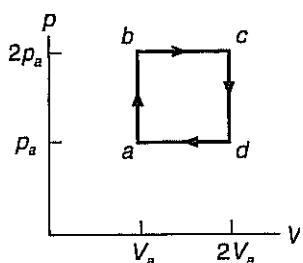


Figura 19.16 Esercizio 19.5.

mole di He, che considereremo un gas perfetto. Allo stato a corrispondono i valori della pressione e del volume $p_a = 101 \text{ kPa}$, $V_a = 22.4 \text{ l}$. (a) Determinare le temperature degli stati a , b , c e d . (b) Quanto calore viene assorbito in un ciclo? (c) Quanto lavoro viene compiuto in un ciclo? (d) Quanto calore viene smaltito in un ciclo? (e) Qual è il rendimento di questa macchina?

- 19.6 Una macchina termica fa eseguire a 2.2 mol di aria ($\gamma = 1.4$) il ciclo rappresentato nella Figura 19.17, nel quale la trasformazione bc è adiabatica. Allo stato a corrispondono la pressione $p_a = 150 \text{ kPa}$ e il volume $V_a = 38 \text{ l}$. Determinare (a) la pressione dello stato b e le temperature degli stati b e c , (b) la quantità di calore fornita all'aria in un ciclo, (c) la quantità di calore ceduta dall'aria in un ciclo, (d) il rendimento della macchina. Si ammetta che l'aria sia un gas perfetto.

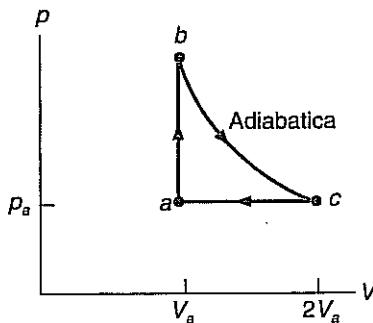


Figura 19.17 Esercizio 19.6.

Paragrafo 19.3 Le macchine frigorifere e il secondo principio

- 19.7 Un ciclo di refrigerazione cede 250 J di calore all'ambiente mentre il motore fornisce 80 J di lavoro. (a) Quanto calore viene estratto dall'interno del frigorifero? (b) Qual è il coefficiente di prestazione del frigorifero?
- 19.8 L'impianto frigorifero di una fabbrica alimentare raffredda le derrate estraendone $2 \times 10^8 \text{ J}$ di calore ogni ora. Esso opera con un coefficiente di prestazione 4.3. Determinare, per ogni ora di funzionamento, (a) il lavoro compiuto sulla macchina frigorifera e (b) il calore smaltito all'esterno. (c) Quale potenza è necessaria per azionare l'impianto?

- 19.9** Una pompa di calore funziona con un'efficienza $K_{pc} = 2.2$. Il lavoro viene fornito da un motore elettrico con una potenza di 3.5 kW. Con quale ritmo il calore viene (a) ceduto alla temperatura più alta e (b) assorbito alla temperatura più bassa? (c) Qual è il costo di 1 h di funzionamento, se l'energia elettrica ha il prezzo di 130 lire al kW h?
- 19.10** In una tipica notte invernale, il ritmo con cui il calore dall'interno di una casa si disperde all'esterno è in media di 6 kW. Supponiamo che questa perdita sia compensata da una pompa di calore con un motore da 3 kW che funziona per circa 30 min ogni ora. (a) Qual è l'efficienza della pompa di calore in queste condizioni? (b) A quale ritmo il calore viene assorbito dall'esterno? (c) Stimare il costo di un giorno intero di funzionamento in queste condizioni, ammettendo che l'energia elettrica costi 130 lire al kW h.

Paragrafo 19.4 Reversibilità e ciclo di Carnot

- 19.11** Si rappresenti in modo accurato su un diagramma p - V un ciclo di Carnot per l'aria (considerata come un gas perfetto con $\gamma = 1.4$) operante tra 250 e 350 K. Si assuma $n = 1.0$ mol e si ammetta che l'espansione isoterma a 350 K faccia passare il volume da 22 a 32 l. Si stimi il lavoro compiuto in un ciclo in base all'area racchiusa nel diagramma.
- 19.12** Si consideri il ciclo di Carnot descritto nell'esercizio precedente. Si determinino tramite il calcolo diretto, per un ciclo, (a) la quantità di calore assorbita a 350 K, (b) la quantità di calore ceduta a 250 K, (c) il lavoro compiuto, per mezzo del primo principio (si confronti con la stima basata sul grafico). (d) Qual è il rendimento di questa macchina?

Paragrafo 19.5 La temperatura termodinamica

- 19.13** Supponiamo che un ciclo reversibile con He come fluido di lavoro operi tra due sorgenti costituite rispettivamente di acqua al punto normale di fusione e acqua al punto normale di ebollizione. (a) Qual è il rapporto tra le quantità di calore scambiate con queste due sorgenti? (b) Se in un ciclo dall'acqua a temperatura più alta vengono estratti 0.0125 J di calore, quanto ne viene ceduto alla sorgente a temperatura più bassa? (c) Le risposte date sarebbero diverse se tra le due sorgenti venisse fatto operare una ciclo di Carnot con del freon come fluido di lavoro? Spiega.
- 19.14** Un ciclo praticamente reversibile viene fatto operare tra due sorgenti costituite da Hg al punto triplo e acqua al punto triplo. Supponiamo che le quantità di calore scambiate con queste due sorgenti siano $|Q_{Hg}| = 22.1 \mu J$ e $|Q|_3 = 25.8 \mu J$. Determinare la temperatura del punto triplo del Hg.
- 19.15** Dimostrare che l'efficienza di una pompa di calore reversibile che funziona tra due sorgenti alle temperature T_C e T_F è data da

$$K_{pc} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

Che cosa accade se $T_C = T_F$? Spiega.

- 19.16** Supponiamo che una macchina di Carnot operi tra le temperature $T_F = 300$ K e $T_C = 400$ K. (a) Determinare

il rendimento della macchina. Se $Q_C = 0.160$ J per ciclo, quali sono i valori di (b) $|Q_F|$ e (c) W ? (d) Cambierebbero le risposte se si avesse a che fare coi macchina reversibile che non fosse una macchina di Carnot? Spiega.

- 19.17** Consideriamo la macchina dell'esercizio precedente. Determinare la variazione che si verificherebbe nel rendimento della macchina reversibile (a) se T_F foss ridotta di 20 K e (b) se T_C venisse aumentata di 20 K. Riesaminare le parti (a) e (b) nell'ipotesi di una variazione del 10 per cento (invece che di 20 K) in ciascuna temperatura. (d) Che conclusione generale può trarre da questi calcoli?

- 19.18** Supponiamo che la temperatura media del combustibile brucia in una centrale termoelettrica a vapore sia 1500 K e che quella dell'acqua di raffreddamento di lago sia di 300 K. (a) Qual è il limite superiore per il rendimento delle macchine termiche che funzionano queste temperature? (b) Il rendimento globale di una centrale a vapore reale è attorno al 40 per cento. Spiegher perché questo dato differisce dalla risposta alla parte

- 19.19** Si è ipotizzata una macchina termica capace di generare elettricità operando tra la temperatura della superficie dell'oceano e quella delle profondità oceaniche. Supponiamo che queste temperature siano di circa 2° e circa 10 °C, rispettivamente. (a) Stimare il rendimento di una simile macchina. (b) Se si vuole ricavare una potenza di 2 MW, con quale ritmo il calore deve essere estratto dall'acqua in superficie? (c) Quanti metri cubi d'acqua di superficie devono essere trattati al secondo per calore deve essere ottenuto abbassandone la temperatura di 1 °C?

- 19.20** La temperatura interna di una casa è di 20 °C e quella esterna è di -5 °C; stima i requisiti di potenza per il compressore di una pompa di calore usata per fornire calore all'interno della casa a un ritmo di 20 kW. La stima effettuata è per eccesso o per difetto? Spiega.

- 19.21** Stima i requisiti di potenza per il compressore di una pompa di calore usata per raffreddare l'interno di un casa a un ritmo di 20 kW. Ipotizza valori ragionevoli la temperatura interna e quella esterna. La tua stima è per eccesso o per difetto? Spiega.

- 19.22** Considera la seguente affermazione di un venditore: «Questa pompa di calore è in grado di fornire alla tua abitazione calore a un ritmo di 40 000 Btu/h, utilizzando soltanto 1 kW di potenza elettrica. Tali cifre presuppongono una temperatura interna di 70 °F e un temperatura esterna di 20 °F.» Compreresti questa pompa di calore? Motiva la tua risposta con dei calcoli.

Paragrafo 19.6 L'entropia

- 19.23** Una quantità di calore Q viene ceduta reversibilmente isotermicamente a un sistema a temperatura T . (a) Determinare un'espressione per la variazione di entropia del sistema. (b) Qual è il valore di ΔS se $Q = 30$ J e $T = 300$ K?

- 19.24** Una mole di He è inizialmente in uno stato definito da $p_i = 101$ kPa, $V_i = 22.4$ l. Il gas subisce un'espansione isobara reversibile che ne fa raddoppiare il volume. Determinare le variazioni (a) della temperatura

- (b) dell'energia interna, (c) dell'entropia di questo gas (perfetto). (d) Riesaminare le risposte date, supponendo che il medesimo stato finale venga raggiunto tramite una trasformazione *irreversibile* che parte dallo stesso stato iniziale.
- 19.25** Determinare la differenza di entropia tra la fase liquida e la fase di vapore di 1.0 kg di H_2O a 100 °C. Quale fase ha l'entropia più alta?
- 19.26** Supponiamo che 4200 J di calore vengano estratti in una trasformazione isobara reversibile da 50 g di H_2O liquida inizialmente a 300 K. (a) Qual è la temperatura finale dell'acqua? (b) Calcolare la variazione di entropia dell'acqua. (c) Spiegare perché la risposta alla parte (b) può anche essere ottenuta approssimativamente dalla divisione $-4200 \text{ J}/300 \text{ K} = -14 \text{ J/K}$.
- 19.27** Lo stato iniziale di un sistema composito corrisponde a 250 g di ghiaccio a 0.0 °C e 950 g di acqua liquida a 85 °C. Le due componenti vengono mescolate in un recipiente isolato e raggiungono l'equilibrio. Si trascurino gli scambi di energia con l'ambiente. (a) Qual è la temperatura finale dell'acqua? (b) Qual è la variazione di entropia di ciascuna delle due parti del sistema? (c) Qual è la variazione di entropia dell'intero sistema? (d) Questa trasformazione è reversibile o irreversibile? Spiega.

Paragrafo 19.7 L'entropia e il secondo principio

- 19.28** Si consideri il flusso in regime stazionario di 400 J di calore da una sorgente a 150 °C a una a 75 °C. Si calcolino le variazioni di entropia (a) della sorgente a temperatura minore, (b) della sorgente a temperatura maggiore, (c) dell'universo.
- 19.29** In una macchina termica reale, la quantità di calore Q_C viene trasferita attraverso una differenza finita di temperatura ΔT da una sorgente a temperatura T_C al fluido di lavoro a temperatura $T_C - \Delta T$. (a) Dimostrare che la variazione di entropia dell'universo in seguito a questo processo irreversibile è positiva. (b) Dimostrare che c'è un aumento dell'entropia dell'universo anche in corrispondenza del trasferimento di calore attraverso una

differenza di temperatura ΔT all'altra sorgente. (c) Che cosa si può dire della variazione di entropia dell'universo per ogni ciclo di una macchina termica reale?

- 19.30** Dimostrare che la variazione di entropia dell'universo è (a) nulla in corrispondenza di una trasformazione adiabatica reversibile e (b) positiva in corrispondenza di una trasformazione adiabatica irreversibile.
- 19.31** Una mole di aria ($\gamma = 1.4$) si trova inizialmente nello stato definito da $p_i = 210 \text{ kPa}$, $V_i = 24 \text{ l}$. Il gas subisce una trasformazione irreversibile che lo porta allo stato finale definito da $p_f = 146 \text{ kPa}$, $V_f = 31 \text{ l}$. (a) Usare la trasformazione reversibile rappresentata nella Figura 19.18 per determinare la differenza di entropia tra questi due stati, trattando l'aria come un gas perfetto. Che cosa si può dire del valore della variazione di entropia (b) dell'aria e (c) dell'universo per effetto della trasformazione irreversibile effettiva?

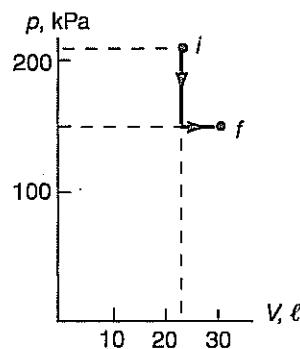


Figura 19.18 Esercizio 19.31

- 19.32** Una centrale elettrica geotermica sfrutta il vapore acqueo fornito dalla Terra a 400 K e utilizza acqua di raffreddamento a 300 K. (a) Qual è il valore massimo del rendimento? (b) Supponiamo che il rendimento effettivo sia del 18 per cento e che la centrale generi energia elettrica con una potenza di 200 MW. Quanta disponibilità di lavoro è persa ogni giorno? (c) Quanta entropia (ΔS_{univ}) viene creata ogni giorno?

PROBLEMI

- 19.1** Una macchina di Carnot opera tra due sorgenti a temperature T_C e T_F , scambiando le quantità di calore Q_C e Q_F . Determinare, per ciascuna delle quattro fasi del ciclo, un'espressione della variazione di entropia del fluido di lavoro.
- 19.2** Il ciclo di una macchina termica può essere utilmente rappresentato su un diagramma $T-S$ con T in ordinata e S in ascissa (vedi Figura 19.19). (a) Rappresentare un ciclo

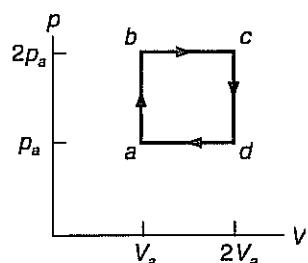


Figura 19.19 Problema 19.2

di Carnot che funziona come macchina termica (come quello del problema precedente) su un diagramma $T-S$. (b) Qual è l'interpretazione dell'area sottostante ciascuna trasformazione isoterma nel diagramma? (c) Qual è l'interpretazione dell'area racchiusa dal ciclo?

- 19.3** Si dimostri la seconda parte del teorema di Carnot, cioè che nessuna macchina che operi tra due date temperature può avere un rendimento maggiore di quello di una macchina reversibile funzionante tra le stesse temperature. Si proceda ammettendo che una macchina irreversibile abbia un rendimento maggiore di una reversibile, e poi dimostrandone che questa ipotesi porta a una violazione del secondo principio. Perché non si possono scambiare i ruoli delle due macchine, come nella dimostrazione della prima parte del teorema di Carnot?
- 19.4** Supponiamo che il calore smaltito da una macchina venga usato per alimentare un'altra macchina, come mostra schematicamente la Figura 19.20. La prima macchina opera tra le temperature T_C e T_f con un

rendimento η , mentre la seconda opera tra le temperature T_I e T_F con un rendimento η' . Il rendimento totale è $\eta_{\text{tot}} = (W + W')/Q_C$. (a) Dimostrare che $\eta_{\text{tot}} = \eta + (1 - \eta)\eta'$. (b) Supponendo che entrambe le macchine siano reversibili dimostrare che $\eta_{\text{tot}} = 1 - T_F/T_C$.

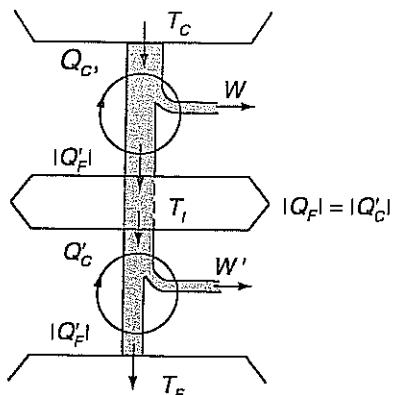


Figura 19.20 Problema 19.4

- 19.5 Il motore a benzina e il ciclo Otto.** Un'utile approssimazione del ciclo del motore a combustione interna a benzina è fornita da un ciclo idealizzato noto come *ciclo Otto*, che è rappresentato nella Figura 19.21. Il fluido di lavoro in un motore a benzina reale è essenzialmente aria miscelata con una piccola quantità di vapore di benzina. Nel ciclo Otto il fluido di lavoro è aria e la stessa aria viene riutilizzata ripetutamente. Partendo dal punto *a* nel diagramma *p-V*, l'aria viene compressa adiabaticamente, in corrispondenza della corsa di compressione, dal volume V_1 al volume V_2 nel punto *b*.

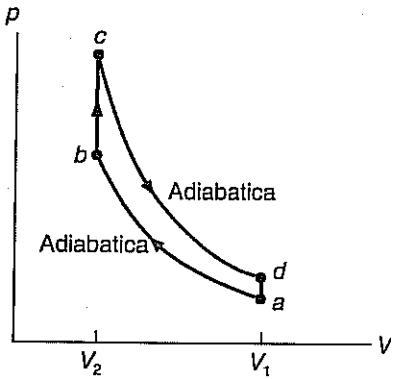


Figura 19.21 Problema 19.5: Il ciclo Otto approssima il funzionamento di un motore a combustione interna. In questa figura il rapporto di compressione $r = 3$.

Il rapporto di compressione $r = V_1/V_2$ caratterizza il motore ed è determinato dal moto del pistone nel cilindro. La pressione aumenta a volume costante da *b* a *c*, in corrispondenza della rapida combustione del carburante che viene acceso da una scintilla. Segue un'espansione adiabatica da *c* a *d*, che corrisponde alla fase utile, e infine la pressione si riduce a volume costante da *d* ad *a*, completando il ciclo. La fase di aspirazione e quella di scarico del motore a benzina non vengono rappresentate nel ciclo Otto. (a) Dimostrare che il rendimento del ciclo Otto è dato, in funzione del rapporto di compressione, da

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

(b) Il rapporto di compressione in un tipico motore automobile è circa $r = 8$ e $\gamma = 1.4$ per l'aria. Calcolare il rendimento del ciclo Otto in questo caso. Il rendimento di un motore reale si aggira attorno al 20 per cento.

- 19.6 Il motore Diesel e il ciclo ad aria standard.** Il funzionamento di un motore Diesel può essere approssimato dal *ciclo Diesel ad aria standard*, rappresentato schematicamente nella Figura 19.22. La compressione adiabatica *ab* corrisponde alla fase di compressione dell'aria. Questa fase è caratterizzata dal rapporto di compressione $r_C = V_a/V_b$. L'espansione isobara *bc* corrisponde alla combustione del carburante iniettato ed è seguita dall'espansione adiabatica *cd*, un rapporto di espansione $r_E = V_d/V_c$. La trasformazione isocora *da* completa il ciclo. (a) Dimostrare che il rendimento del ciclo diesel ad aria standard è dato da

$$\eta = 1 - \frac{r_E^{-\gamma} - r_C^{-\gamma}}{\gamma(r_E^{-1} - r_C^{-1})}$$

- (b) Stimare il rendimento di un motore Diesel con $r_C = 15$ e $r_E = 5$, ammettendo che sia $\gamma = 1.4$. C'è da aspettarsi che un motore Diesel reale abbia questo rendimento? Spiega.

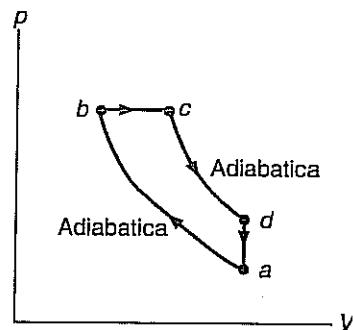


Figura 19.22 Problema 19.6: Il ciclo Diesel ad aria standard

- 19.7** Una macchina irreversibile opera tra due sorgenti alla temperature $T_C = 550$ K e $T_F = 350$ K, con un rendimento del 25 per cento. In ogni ciclo, la quantità di calore $Q_C = 1200$ J viene sottratta alla sorgente a temperatura T_C e fornita al fluido di lavoro nella macchina. La quantità di calore $|Q_F|$ viene ceduta da macchina alla sorgente a temperatura T_F . (a) Determinare la variazione di entropia dell'universo per ogni ciclo di funzionamento. (b) Quanto lavoro in più potrebbe compiere una macchina reversibile operante tra queste sorgenti che assorbisse in ogni ciclo la stessa quantità di calore? (c) Dimostrare che, per ogni ciclo, la quantità di lavoro che si rende indisponibile a causa del processo irreversibile è pari a $T_F \Delta S_{\text{univ}}$.

- 19.8** Un sistema subisce una trasformazione reversibile infinitesima con $dW = p dV$. (a) Dimostrare che il *primo principio della termodinamica* può essere scritto per questa trasformazione,

$$T dS = dU + pdV$$

- (b) Qual è la corrispondente forma integrale per una trasformazione reversibile? (c) L'una o l'altra di queste espressioni sono valide per una trasformazione irreversibile? Spiega.

19.9

Si determini per 1.0 mol di He la differenza di entropia tra lo stato con $V = 22 \text{ l}$, $T = 280 \text{ K}$ e lo stato con $V = 44 \text{ l}$, $T = 1120 \text{ K}$. Si tratti l'He come un gas perfetto.

19.10

Il fluido di lavoro di una macchina che funziona lungo il ciclo rappresentato nella Figura 19.23 è un gas perfetto. Si determini il rendimento di questo ciclo in funzione delle temperature T_C e T_F e dei volumi V_1 e V_2 . Si noti che in tutte e quattro le trasformazioni che compongono il ciclo si hanno scambi di calore. Questa macchina è una versione idealizzata del motore Stirling (irreversibile).

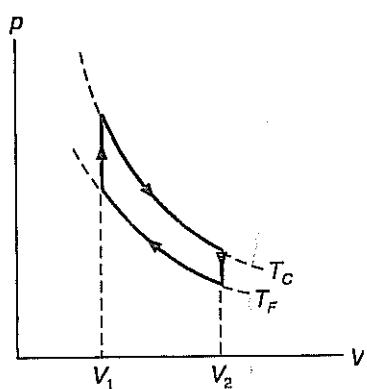
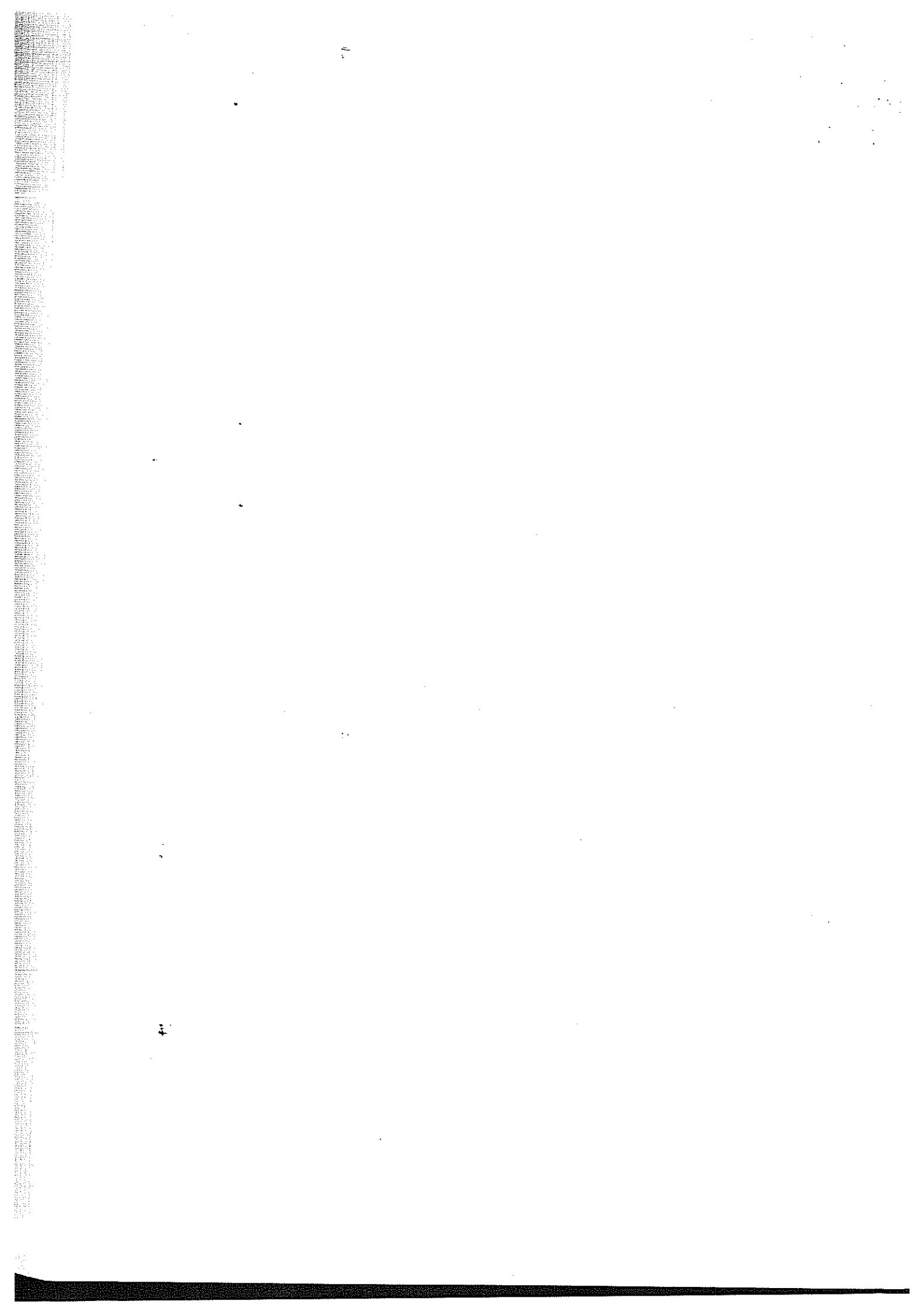


Figura 19.23 Problema 19.10.



APPENDICE

A

CALCOLO DIFFERENZIALE

La derivata di $y = f(x)$ è definita come il limite della pendenza $\Delta y / \Delta x$ della curva che rappresenta y in funzione di x :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Alcune regole di derivazione

Somma di funzioni

$$\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

Prodotto di funzioni

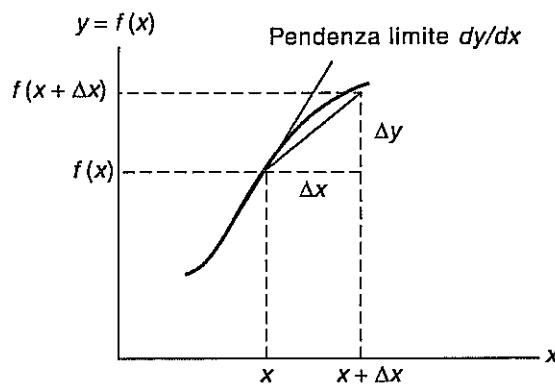
$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}$$

Quoziente di funzioni

$$\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g df/dx - f dg/dx}{g^2}$$

Funzione di funzione. Se $y = f(x)$ e $x = g(z)$, allora

$$\frac{df(x)}{dz} = \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dz}$$



Derivate di alcune particolari funzioni (a e n sono costanti):

$$\frac{da}{dx} = 0$$

$$\frac{d(ax^n)}{dx} = nax^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} ax = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \cos ax = -a \sin ax$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} ax = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \tan ax = a \sec^2 ax$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} ax = \frac{a}{1 + a^2 x^2}$$

$$\frac{d}{dx} a^{nx} = na^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$$

Infinitesimi

Si dice che una funzione $f(x)$ è infinitesima per $x \rightarrow a$ se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Ne discerne che $(x - a)$ è infinitesimo quando $x \rightarrow a$ ed è detto *infinitesimo del primo ordine* di ordine principale) in quanto è il termine di confronto per gli infinitesimi a esso collegati. Una funzione $f(x)$ è detta *infinitesimo di ordine n* rispetto all'infinitesimo ordine principale $(x - a)$ se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = c$ dove c è una quantità finita e non nulla.

Differenziali di funzioni a una variabile

Si abbia una funzione $f(x)$ derivabile in un certo intervallo di variabilità di x . La differenza fra il rapporto incrementale e la derivata di tale funzione tende a zero per l'incremento Δx che tende a zero: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{df}{dx} \right) = 0$. Si può allora scrivere che $\Delta f - \frac{df}{dx} \Delta x$ è un infinitesimo per Δx che tende a zero. $\frac{df}{dx} \Delta x$ è detto il differenziale della funzione $f(x)$ e si indica con df . Se $f(x) = x$, allora $\frac{df}{dx} = 1$ e il suo differenziale è $df \equiv dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Quindi l'incremento della variabile è uguale al suo differenziale. Allora il differenziale di una funzione si può scrivere

$$df = \frac{df}{dx} dx$$

Funzioni a due o più variabili

Si dice che si ha una funzione f a n variabili quando a ogni n -tupla di valori attribuiti a queste corrisponde uno e un solo valore di f . In tre dimensioni si ha che le grandezze fisiche sono funzioni della posizione, cioè delle coordinate dei punti nello spazio; allora la funzione che esprime i valori di una grandezza si può scrivere $f = f(x, y, z)$; se poi la grandezza dipende anche dal tempo avremo una funzione a quattro variabili.

Derivate parziali

Consideriamo una funzione a due o più variabili. Se si vuole conoscere la variazione della funzione quando varia una delle sue variabili occorre introdurre il concetto di derivata parziale. Vediamo come si definiscono le derivate parziali considerando un' funzione di due variabili $f(x, y)$. Se tale funzione è continua per tutti i valori x, y in un certo campo di definizione, e attribuiamo un valore fisso alla variabile y , $y = y_0$ definiamo la derivata parziale della funzione rispetto a x , e la indichiamo con $\frac{\partial f}{\partial x}$, il limite per $\Delta x \rightarrow 0$, se esiste, del rapporto incrementale

$$\frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$$

cioè

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$$

Analogamente si definisce la derivata parziale rispetto a y e a tutte le variabili se la funzione ha molte variabili.

In pratica le derivate parziali valutano il tasso di variazione di una funzione quando varia una sola delle variabili.

Differenziale totale

Se si ha una funzione di più variabili $f(x, y, z)$ e si vuol calcolare di quanto varia quando le sue variabili variano tutte di quantità infinitesime (si ricordi che l'incremento di una variabile è il suo differenziale dx), si dovranno sommare tutte le variazioni parziali (per esempio $\frac{\partial f}{\partial x} dx$ è la variazione parziale quando varia solo la variabile x di una quantità dx). Generalizzando il procedimento usato per una funzione a una variabile si trova che la variazione totale, ammesso che la funzione ammetta derivate parziali (e almeno una sia continua), è il *differenziale totale* della funzione. Per una funzione a tre variabili $f(x, y, z)$, il differenziale totale è

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Se si ha una forma differenziale lineare del tipo

$$Adx + Bdy + Cdz$$

ci si può chiedere se essa è il differenziale di una funzione $f(x, y, z)$, cioè se esiste una funzione $f(x, y, z)$ tale che il suo differenziale sia proprio la forma precedente: $df = Adx + Bdy + Cdz$. Se ciò accade si dice che la forma differenziale è un *differenziale esatto* e ovviamente si ha che $A = \frac{\partial f}{\partial x}$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}$ e $C = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Le condizioni affinché ciò accada sono che $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$, $\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}$ e $\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}$ e che il campo di definizione delle tre funzioni A , B e C sia semplicemente connesso.

Gradiente, divergenza e rotore

Definiamo queste tre nuove operazioni in coordinate cartesiane.

Gradiente. Si abbia una grandezza fisica scalare $U(x, y, z)$, definita in una certa regione di spazio, cioè un campo scalare; si definisce gradiente di tale campo e si indica con $\text{grad } U$ il vettore

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

Tale vettore è definito in modo tale per cui

$$\text{grad } U \cdot d\mathbf{r} = dU$$

cioè il prodotto scalare del gradiente di un campo scalare per lo spostamento elementare fornisce il differenziale totale del campo. Dal punto di vista fisico, tale nuovo vettore dà una misura di quanto rapidamente varia una grandezza scalare U lungo una direzione e, in pratica, individua la direzione di massima variazione della funzione.

Divergenza. Si abbia una grandezza vettoriale $\mathbf{V}(x, y, z)$ definita in una certa regione di spazio, cioè un campo vettoriale; si definisce divergenza di tale campo e si indica

con $\operatorname{div} \mathbf{V}$ lo scalare

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Rotore. Si abbia un campo vettoriale $\mathbf{V}(x, y, z)$; definiamo rotore o rotazionale di \mathbf{V} campo e lo indichiamo con $\operatorname{rot} \mathbf{V}$ il vettore

$$\left(\frac{\partial V_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial V_z(x, y, z)}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ \left(\frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

L'operatore Nabla. Alcune operazioni si possono rappresentare facendo uso del concetto di *operatore*: è un ente simbolico che opera sulle funzioni a cui viene applicato.

Per esempio $\frac{d}{dt}$ è un operatore scalare che quando viene applicato a una funzione $f(t)$ ne fa la derivata rispetto a t : $\frac{df}{dt}$. Esistono operatori scalari e operatori vettoriali. Nell'esempio precedente $\frac{d}{dt}$ è un operatore scalare. Gli operatori vettoriali hanno componenti che sono operatori scalari. Un importante operatore vettoriale è il *Nabla* che è quell'operatore vettoriale che ha $\frac{\partial}{\partial x}$ per componente lungo x , $\frac{\partial}{\partial y}$ per componente lungo y e $\frac{\partial}{\partial z}$ per componente lungo z , e si indica con il simbolo ∇ :

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Essendo un operatore vettoriale si applica facendo uso delle operazioni fra vettori e a sume significati operativi diversi a seconda di come lo si applica. Si trova immediatamente che le tre operazioni di gradiente, divergenza e rotore sono, rispettivamente, prodotto del Nabla con uno scalare, il prodotto scalare del Nabla con un vettore e prodotto vettoriale del Nabla con un vettore:

$$\nabla U \equiv \operatorname{grad} U$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} \equiv \operatorname{div} \mathbf{V}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{V}$$

APPENDICE B

COSTANTI FONDAMENTALI

Valori delle costanti fisiche fondamentali aggiornati al 1986

Grandezza	Simbolo	Valore	Unità di misura	Incertezza relativa, ppm
Velocità della luce nel vuoto	c	299 792 458	m s^{-1}	(Esatto)
Temperatura del punto triplo	T_t	273.16	K	(Esatto)
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	N A^{-2}	
		- 12.566 370 614...	10^{-7} N A^{-2}	(Esatto)
Costante dielettrica del vuoto, $1/\mu_0 c^2$	ϵ_0	8.854 187 817...	$10^{-12} \text{ F m}^{-1}$	(Esatto)
Costante di gravitazione di Newton	G	6.672 59(85)	$10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	128
Costante di Planck	h	6.626 075 5(40)	10^{-34} J s	0.60
$h/2\pi$		1.054 572 66(63)	10^{-34} J s	0.60
Carica elementare	e	1.602 177 33(49)	10^{-19} C	0.30
Quanto di flusso magnetico, $h/2e$	Φ_0	2.067 834 61(61)	10^{-15} Wb	0.30
Massa dell'elettrone	m_e	9.109 389 7(54)	10^{-31} kg	0.59
Massa del protone	m_p	1.672 623 1(10)	10^{-27} kg	0.59
Rapporto tra massa del protone e massa dell'elettrone	m_p/m_e	1 836.152 701(37)		0.020
Massa del neutrone	m_n	1.674 928 6(10)	10^{-27} kg	0.59
Lunghezza d'onda Compton, $h/m_e c$	λ_c	2.426 310 58(22)	10^{-12} m	0.089
Costante di struttura fine, $\mu_0 c e^2 / 2h$	α	7.297 353 08(33)	10^{-3}	0.045
Inverso della costante di struttura fine	α^{-1}	137.035 989 5(61)		0.045
Costante di Rydberg, $m_e c \alpha^2 / 2h$	R_y	10 973 731.534(13)	m^{-1}	0.0012
Numero di Avogadro	N_A, L	6.022 136 7(36)	10^{23} mol^{-1}	0.59
Costante di Faraday, $N_A e$	F	96 485.309(29)	C mol^{-1}	0.30
Costante dei gas	R	8.314 510(70)	$\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$	8.4
Costante di Boltzmann, R/N_A	k	1.380 658(12)	$10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	8.5
Costante di Stefan-Boltzmann, $(\pi^2/60)k^4 \sigma c^2$	σ	5.670 51(19)	$10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	34
Elettronvolt, $(e/C)J = [e]J$	eV	1.602 177 33(49)	10^{-19} J	0.30
Unità di massa atomica (unificata), 1 u = $m_u = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C})$	u	1.660 540 2(10)	10^{-27} kg	0.59

Da E. Richard Cohen, B.N. Taylor, *Reviews of Modern Physics*, vol. 59, n. 4, October 1987, p. 1139.

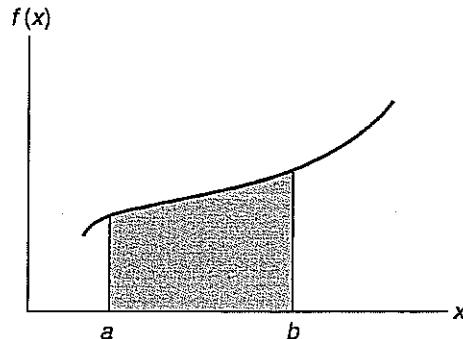
CALCOLO INTEGRALE ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI

L'integrale I della funzione $f(x)$ tra i limiti a e b si scrive

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

ed è pari all'area compresa tra la curva $f(x)$, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$, come si vede nella figura più sotto. Il teorema fondamentale del calcolo integrale stabilisce che il limite superiore è una variabile w ,

$$\begin{aligned} I(w) &= \int_a^w f(x)dx \\ \frac{d}{dw} I(w) &= \frac{d}{dw} \int_a^w f(x)dx = f(w) \end{aligned}$$



Quindi l'integrazione è da considerare l'operazione inversa della derivazione. L'integrale indefinito $I(x)$ di $f(x)$ è la funzione la cui derivata è $f(x)$; per esempio, l'integrale indefinito di $ax^2 + bx + c$ è $\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}bx^2 + cx + d$. $I(x)$ viene chiamata una primitiva di $f(x)$, cioè la primitiva di una funzione $f(x)$ è quella funzione quando viene derivata rispetto a x , dà la $f(x)$ stessa. Ovvivamente esistono infinite primitive della stessa funzione: tutte quelle che differiscono da $I(x)$ per una costante arbitraria. Infatti la derivata di $I(x)$ è $f(x)$ e la derivata di $(I(x) + c)$ è sempre $f(x)$.

Alcune regole generali per il calcolo degli integrali indefiniti (f , g , u e v sono funzioni; a , b e c sono costanti):

$$\int dx = x + c$$

$$\int \frac{d[f(x)]}{dx} dx = f(x) + c$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

$$\int u dx = uv - \int v du$$

Esiste il **teorema fondamentale del calcolo integrale** che lega gli integrali definiti agli integrali indefiniti: l'integrale definito di una funzione $f(x)$ è uguale alla differenza dei valori che una qualunque primitiva di tale funzione assume negli estremi di integrazione.

Seguono una tavola di integrali indefiniti e una tavola di integrali definiti. A ogni integrale indefinito va aggiunta una costante arbitraria. a, b e n rappresentano delle costanti.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{Integrali indefiniti.}$$

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} \quad (\text{purché } n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{b}}{a} x \right) \quad (\text{purché } ab > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{|ab|}} \ln \left(\frac{a-x\sqrt{|ab|}}{a+x\sqrt{|ab|}} \right) \quad (\text{purché } ab < 0)$$

$$\int \frac{x dx}{(a+bx^2)} = -\frac{1}{2b(n-1)(a+bx^2)^{n-1}} \quad (\text{purché } n \neq 1)$$

$$\int \frac{x dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \ln(a+bx^2)$$

Siano $u = \sqrt{a+cx^2}$, $I = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(x\sqrt{c} + u)$ se $c > 0$
 $= \frac{1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1} \left(x\sqrt{\frac{-c}{a}} \right)$ se $c < 0$ e $a > 0$

allora $\int u dx = \frac{1}{2} (xu + aI)$

$$\int \frac{dx}{u} = I$$

$$\int x u dx = \frac{u^3}{3c}$$

$$\int \frac{x dx}{u} = \frac{u}{c}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int \frac{dx}{a + be^{ax}} = \frac{x}{a} - \frac{\ln(a + be^{ax})}{an}$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{\cos ax}{a}$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int \tan ax \, dx = -\frac{\ln(\cos ax)}{a}$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \tan^2 ax \, dx = \frac{\tan ax}{a} - x$$

$$\int \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\int \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2)$$

Integrali definiti.

$$(a > 0) \quad \int_0^\infty e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \, dx = n! a^{-n-1}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + e^{ax}} = \frac{\ln 2}{a}$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} \, dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Equazioni differenziali.

Si dice *equazione differenziale ordinaria* un'equazione che ha come incognita una funzione di una sola variabile x , $f(x)$, e che contiene sia la funzione sia le sue derivate rispetto a x . Formalmente si può scrivere

$$F(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \dots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}) = 0.$$

Si chiama *ordine dell'equazione differenziale* l'ordine massimo della derivata che vi compare.

Per esempio

$$\frac{df}{dx} = Ax, \text{ con } A \text{ costante,}$$

è un'equazione del primo ordine (f è l'incognita e x la variabile)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \text{ con } k \text{ costante positiva,}$$

è un'equazione del secondo ordine (qui x è l'incognita e t la variabile)

Poiché l'operazione inversa della derivazione è l'integrazione, le soluzioni delle equazioni differenziali si chiamano integrali.

Si dice *integrale particolare* della equazione differenziale ogni funzione che soddisfi l'equazione stessa, mentre l'*integrale generale* di una equazione differenziale di ordine n è una funzione di x e di n costanti arbitrarie che soddisfi l'equazione qualunque sia il valore delle n costanti, $f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Nel primo dei due esempi si deve trovare semplicemente quella funzione f che deriva rispetto a x dà Ax ; ciò significa che si deve trovare la primitiva di Ax , quindi una soluzione particolare è $I(x) = \int Ax dx = \frac{1}{2} Ax^2$ e l'integrale generale è $(I(x) + C)$, dove C è una costante. Per il secondo esempio la soluzione è un poco più complicata e la soluzione generale conterrà due costanti arbitrarie.

In generale, per un'equazione differenziale di ordine n , i valori delle n costanti arbitrarie sono definiti in maniera univoca dalla conoscenza dei valori della funzione incognita e delle sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima per un valore assegnato della variabile x (problema di Cauchy o del valore iniziale).

Esempio fisico: è nota la velocità di un punto materiale, sia $\mathbf{v} = 12\mathbf{i}$, si debba trovare la posizione del punto; dal punto di vista fisico il problema è ovviamente indeterminato, in quanto non sappiamo da dove parte il punto; dal punto di vista matematico, essendo $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i}$, l'equazione differenziale che descrive il moto è

$$\frac{dx}{dt} = 12$$

che ha come integrale generale la primitiva di 12 più una costante, cioè $x = 12t + C$, cioè infinite soluzioni; il valore della costante C si ottiene dalla conoscenza della x al tempo $t = 0$ (per esempio, se per $t = 0$ si ha $x = 0$, allora $C = 0$); fisicamente ciò equivale a dire: se sappiamo da dove si parte e a che velocità si va, sappiamo dove ci troviamo in ogni istante.

Di particolare interesse sono le *equazioni differenziali lineari*: ossia le equazioni che contengono la funzione incognita f e le sue derivate in forma lineare. Esempi di notevole importanza per la fisica classica sono

$$1) \text{ lineare del primo ordine } \frac{df(x)}{dx} + A(x)f(x) + B(x) = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$2) \text{ lineare del secondo ordine } \frac{d^2f(x)}{dx^2} + C(x)\frac{df(x)}{dx} + D(x)f(x) + E(x) = 0 \quad (\text{C.2})$$

Se A, B, C, D ed E sono delle costanti, le equazioni si dicono a *coefficients costanti*;

luzione generale di una equazione non omogenea si ottiene sommando una soluzione particolare dell'equazione alla soluzione generale della omogenea associata.

Vediamo le soluzioni delle due precedenti equazioni lineari.

1) Lineare del primo ordine: l'omogenea associata è

$$\frac{df(x)}{dx} + A(x)f(x) = 0$$

e la sua soluzione generale si ottiene scrivendola (separazione delle variabili) $\frac{df(x)}{f(x)} = A(x)dx$, da cui integrando ambo i membri

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int A(x)dx \Rightarrow \ln f(x) = \int A(x)dx + K \Rightarrow f(x) = He^{\int A(x)dx}$$

con $H = e^K$. Si può dimostrare che l'integrale generale della non omogenea è

$$f(x) = e^{-\int A(x)dx} \left[\int B(x)e^{-\int A(x)dx} dx + C' \right]$$

2) Lineare del secondo ordine: l'omogenea associata è

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + C(x)\frac{df(x)}{dx} + D(x)f(x) = 0.$$

Si dimostra che, nel caso di $C(x)$ e $D(x)$ costanti, le equazioni di questo tipo sono soddisfatte da una funzione del tipo $f(x) = e^{-\lambda x}$. Sostituendo nella equazione omogenea si trova immediatamente che l'equazione è soddisfatta per i valori di λ che sono soluzioni dell'equazione (chiamata *equazione caratteristica*) $\lambda^2 + C\lambda + D = 0$. A seconda delle soluzioni di tale equazione algebrica di secondo grado, si hanno diverse soluzioni per l'equazione differenziale omogenea:

a) per il discriminante $d = C^2 - 4D = 0$ si hanno due soluzioni coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ dell'equazione caratteristica, quindi

$$f(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x} \quad (C.3)$$

b) per $d > 0$ si hanno due soluzioni reali λ_1 e λ_2 e quindi

$$f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (C.4)$$

c) per $d < 0$ si hanno due soluzioni complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ e quindi

$$f(x) = e^{\alpha x} C_1 \cos(\beta x + C_2) \quad (C.5)$$

In tutti questi casi C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie che vengono definite dalla conoscenza dei valori iniziali della $f(x)$ e della sua derivata prima.

Equazioni differenziali del primo ordine facilmente risolubili sono quelle dette equazioni a variabili separabili cioè del tipo

$$\frac{df}{dx} = G(f)H(x)$$

che, sotto opportune condizioni di regolarità delle funzioni, si possono scrivere come

$$\frac{df}{G(f)} = H(x)dx, \text{ che si può integrare ricercando le primitive di } \frac{1}{G(f)} \text{ e di } H(x).$$

Desideriamo far notare che le equazioni che descrivono il moto dei corpi sono equazioni differenziali del secondo ed eventualmente del primo ordine. Per esempio il secondo principio della dinamica per un punto materiale, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, si può scrivere come l'insieme di tre equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\Sigma F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \Sigma F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad \Sigma F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

A titolo di esempio, supponiamo che su una particella di massa m sia applicata una forza $\mathbf{F} = -kxi$ con k costante maggiore di zero, cioè di tipo elastico; allora il secondo principio della dinamica ci dice che la particella subirà un'accelerazione tale che $-kxi = ma$; quindi $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$, cioè è della forma (C.2) con $C(x) = 0$ e $E(x) = 0$, quindi la soluzione sarà del tipo (C.5) con $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (per ricavare queste ultime relazioni basta scrivere l'equazione caratteristica e trovare i due valori di λ), cioè

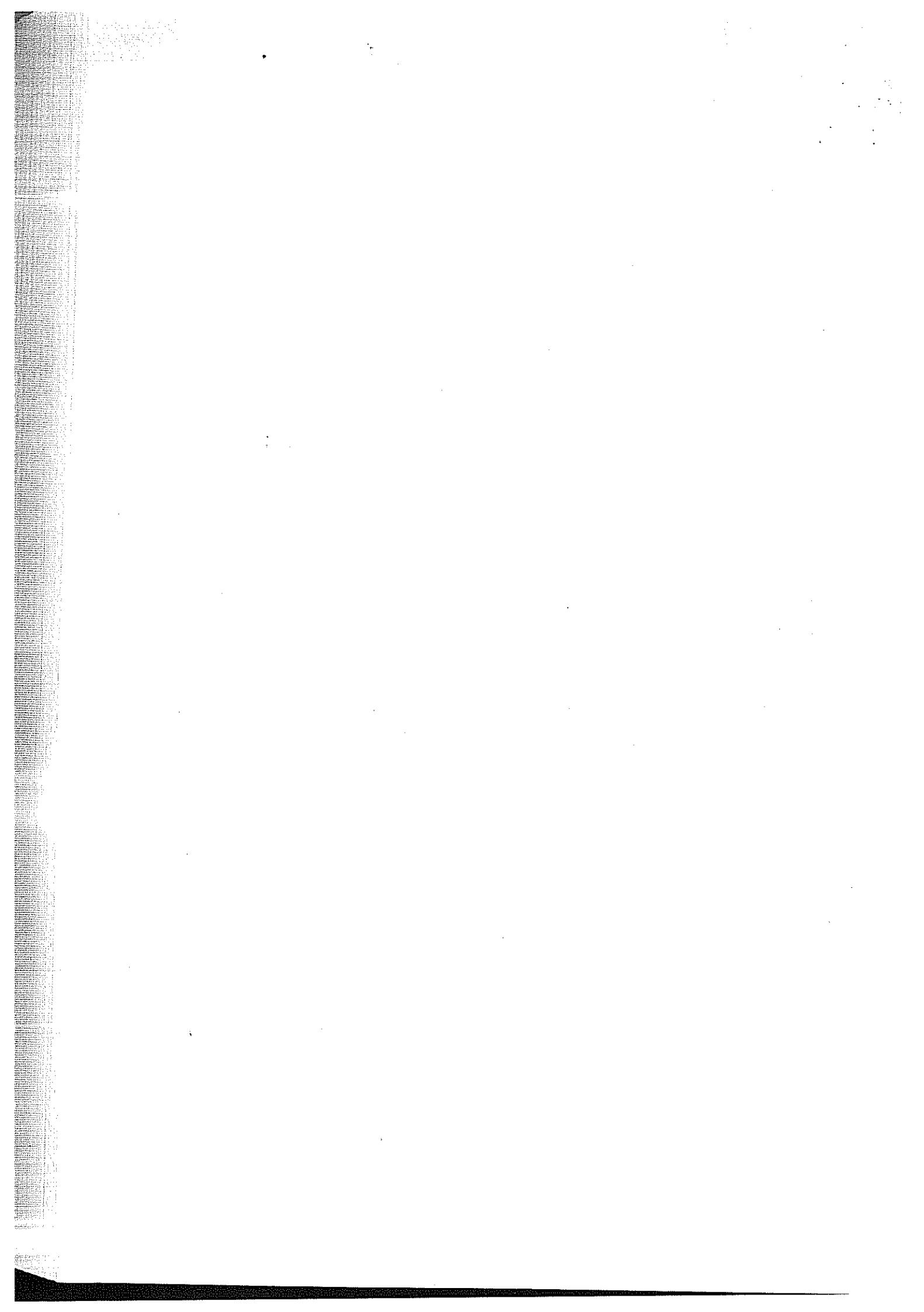
$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\right)$$

Se oltre alla forza elastica precedente è presente anche un attrito schematizzabile con una forza proporzionale alla velocità con direzione quella del vettore velocità e verso ad esso opposto (cioè $\mathbf{F}_{attr} = -hv$ con h costante maggiore di zero), supponendo che il moto avvenga sull'asse x , l'equazione differenziale che esprime il secondo principio della dinamica è:

$$-kx - h \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dx^2}$$

La soluzione sarà sempre del tipo (C.5); si tratta solo di trovare i valori di α e β risolvendo l'equazione caratteristica. È possibile così trovare la soluzione e il tipo di moto che compie la particella.

Nel caso di funzioni a più variabili, le derivate di tali funzioni possono essere fatte rispetto a una delle variabili, cioè sono derivate parziali. Allora esisteranno delle equazioni differenziali, che sono chiamate equazioni alle derivate parziali: sono relazioni che legano una funzione, le sue variabili indipendenti e alcune delle sue derivate parziali.



A P P E N D I C E

D

APPROSSIMAZIONI MATEMATICHE E FORMULE

Sviluppi in serie di alcune funzioni

$$(1+x)^n = +nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots \quad |x| < 1$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad \theta \text{ in rad}$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \quad \theta \text{ in rad}$$

$$\tan \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{2}{15}\theta^5 + \dots \quad \theta \text{ in rad}$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots \quad |x| < 1, \text{ angolo in rad}$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad x^2 < 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots \quad x^2 > 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad x < 1$$

G APPENDICE

SOLUZIONI DI ALCUNI ESERCIZI E PROBLEMI

Capitolo 1

Esercizi

- 1.1 Si.
1.3 $[\text{massa}][\text{lunghezza}]^2/[\text{tempo}]^2$.
1.5 $b = 1, c = -1, d = 1$.
1.7 $0.2778 \text{ (m/s)/(km/h)}$.
1.9 4.5 m/s^2 .
1.11 $62.4 \text{ libbre-massa/piedi}^3$.
1.13 1007.7 s .
1.15 7.69×10^{17} .
1.17 (a) 1.0100; (b) 1.0005; (c) in prossimità dello zero la nostra regola vale, ma in prossimità di 90° il numero delle cifre significative di $\sin x$ è maggiore di quello di x .

Capitolo 2

Esercizi

- 2.1 (a) 2.2 m; (b) 2.2 m; (c) 3.7 m.
2.7 (a) \mathbf{d} ed \mathbf{e} opposti; (b) \mathbf{d} ed \mathbf{e} paralleli, (c) \mathbf{d} ed \mathbf{e} opposti; (d) \mathbf{d} ed \mathbf{e} perpendicolari.
2.9 (b) 58 mm, 22° ; (c) 54 mm, 22 mm.
2.11 (a) $-260 \text{ m}, 220 \text{ m}$; (b) $260 \text{ m}, -220 \text{ m}$; (c) $-260 \text{ m}, 220 \text{ m}, 35 \text{ m}$.
2.13 (a) $\sqrt{x^2 + y^2}$; (b) $(x/r)\mathbf{i} + (y/r)\mathbf{j}$.
2.15 (a) $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; (b) $5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; (c) $-5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; (d) $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
2.19 (a) 1.9 km, 80° a nord del punto cardinale est.
2.21 (a) $(25 \text{ mm}, 0), (18 \text{ mm}, 18 \text{ mm}), (0, 25 \text{ mm}), (-18 \text{ mm}, 18 \text{ mm})$,
 $(-25 \text{ mm}, 0), (-18 \text{ mm}, -18 \text{ mm}), (0, -25 \text{ mm}), (18 \text{ mm}, -18 \text{ mm})$;
(b) (a: 61 mm, 45°), (b: 66 mm, 112°), (c: 47 mm, 160°).
2.23 170° .
2.25 (b) 180° ; (c) 0.

Problemi

- 2.1 (c) $F_x = F \cos \alpha, F_y = F \cos \beta, F_z = F \cos \gamma$.
2.3 (a) 90° ; (b) 60° ; (c) 180° ; (d) 0° .
2.5 (b) $x/r, y/r, z/r; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Capitolo 3

Esercizi

- 3.1 (a) -16 m ; (b) 37 m ; (c) $(-16 \text{ m})\mathbf{i}$; (d) $(37 \text{ m})\mathbf{i}$; (e) $(53 \text{ m})\mathbf{i}$.
3.3 (a) Per esempio, $x(2.0 \text{ s}) = 40 \text{ mm}$; (b) 153 mm; (c) $(-49 \text{ mm})\mathbf{i}$.
3.5 (a) $0.3048 \text{ (m/s)/(ft/s)}$; (b) 82 ft/s.
3.7 (a) 500 s; (b) 9 minuti-luce.
3.9 200 m.

- 3.11** (a) 29 m/s; (b) 26 m/s.
3.13 (a) 0.87 m/s; (b) 1.3 m/s; (c) 1.7 m/s; (d) 2.0 m/s; (e) 2.5 m/s.
3.15 4×10^4 m/s.
3.17 (a) $x(t) = 0.03 \text{ m} + (1.3 \text{ m/s})t$; (b) $x(t) = 0.95 \text{ m} - (1.3 \text{ m/s})t$.
3.19 (a) 0.9 m/s^2 ; (b) -0.9 m/s^2 .
3.21 (a) -0.17 m/s^2 ; (b) 0.21 m/s^2 ; (c) 0.25 m/s^2 .
3.23 (a) $a_x(t) = 4.2 \text{ m/s}^2 - (9.6 \text{ m/s}^3)t$; (b) -35 m/s^2 ; (c) 4.2 m/s^2 .
3.25 3.6 m/s.
3.27 (a) $x(t) = 15 \text{ m} + (2.2 \text{ m/s})t$; (b) 77 m; (c) 16 s.
3.29 (a) $v_x(t) = (3.6 \text{ m/s}^2)t$; (b) 86 m/s; (c) $x(t) = (1.8 \text{ m/s}^2)t^2$.
3.31 (a) 12 m/s; (b) 16 m/s.
3.33 1.8 m/s^2 .
3.35 (a) 1.65; (b) 2.3 s.
3.37 4.2 s.
3.39 $2 \times 10^5 \text{ m/s}^2$.
3.41 (a) 3.0 m; (b) 2.9 m/s; (c) 3.2 m/s^2 ; (d) $x(t) = 3.0 \text{ m} + (2.9 \text{ m/s})t + (1.6 \text{ m/s}^2)t^2$.
3.43 0.64 g.
3.45 10 m/s^2 .
3.47 (a) $h_m = 9.1 \text{ m}$, $t_m = 1.2 \text{ s}$; (b) 0.71 s e 1.7 s; (c) 7.8 m e 7.8 m.
3.49 10 m/s.

Problemi

- 3.1** (a) 11.5 m/s; (b) 2.6 s; (c) 7.4 s; (d) 4.4 m/s^2 .
3.3 (a) 7.8 s; (b) 140 m; (c) 36 m/s.
3.5 1.6 km.

Capitolo 4**Esercizi**

- 4.1** (a) $\mathbf{r} = (31.8 \text{ m})\mathbf{i} + (31.8 \text{ m})\mathbf{j}$; (b) $\Delta\mathbf{r} = -(45.0 \text{ m})\mathbf{i} + (45.0 \text{ m})\mathbf{j}$;
(c) 70.7 m.
4.3 (a) $\bar{\mathbf{v}} = -(1.34 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.34 \text{ m/s})\mathbf{j}$; (b) $\bar{\mathbf{v}} = -(1.45 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.45 \text{ m/s})\mathbf{j}$.
4.5 (a) $\mathbf{v} = (11.5 \text{ m/s})\mathbf{j}$; (b) $\mathbf{a} = (0.88 \text{ m/s})\mathbf{j}$; (c) $\mathbf{v} = (16 \text{ m/s})\mathbf{i} + (16 \text{ m/s})\mathbf{j}$;
 $\bar{\mathbf{a}} = (1.7 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1.7 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$.
4.7 (a) $\mathbf{v} = (3.5 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.1 \text{ m/s})\mathbf{j}$.
4.9 (a) $v_0 = 14 \text{ m/s}$; (b) $v_v = 7.8 \text{ m/s}$.
4.11 (a) $a_x = 1.7 \text{ m/s}^2$, $a_y = -0.47 \text{ m/s}^2$, $v_x = (1.7 \text{ m/s}^2)t$, $v_y = -(0.47 \text{ m/s}^2)t$,
 $x = (0.87 \text{ m/s}^2)t^2$, $y = -(0.23 \text{ m/s}^2)t^2$; (b) $a_x = 1.81 \text{ m/s}^2$, $a_y = 0$,
 $v_x = (1.81 \text{ m/s}^2)t$, $v_y = 0$, $x = (0.905 \text{ m/s}^2)t^2$, $y = 0$.
4.13 $v_x = 17 \text{ m/s}$, $v_y = 32 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)t$, $x = (17 \text{ m/s})t$,
 $y = (32 \text{ m/s})t - (4.9 \text{ m/s}^2)t^2$.
4.15 16 m/s.
4.17 (a) 13° ; (b) 77° .
4.19 (a) 5.1 s; (b) 130 m; (c) 140 m.
4.21 $v_0 = 28 \text{ m/s}$, $\theta_0 = 45^\circ$.
4.23 (a) 1.6 m/s^2 ; (b) 2.9 m/s^2 .
4.25 (a) 23 m/s verso nordest; (b) 23 m/s verso sudovest;
(c) $\mathbf{a}_D = (2.6 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (2.6 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_H = -(1.3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1.3 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$.
4.27 (a) 5.5 m/s; (b) 31 m/s.
4.29 (a) $3.37 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 = 3.44 \times 10^{-3} \text{ g}$; (b) $5.9 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2 = 6.1 \times 10^{-4} \text{ g}$;
(c) $2.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2 = 2.2 \times 10^{-11} \text{ g}$.
4.31 (b) 14 m/s².
4.33 (a) 6 m/s; (b) 6 m/s verso sud; (c) 6 m/s; (d) 6 m/s verso nord.
4.35 4.3 m/s in una direzione 11° a nord del punto cardinale est.
4.37 (a) $\mathbf{v}_{TA} = -(2.3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (7.5 \text{ m/s})\mathbf{j}$; (b) 4.0 min;
(c) $\mathbf{v}_{TA} = -(4.6 \text{ m/s})\mathbf{i} + (6.3 \text{ m/s})\mathbf{j}$, 4.8 min.

Problemi

- 4.1** (e) $\mathbf{v} = - (1.49 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.49 \text{ m/s})\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = - (6.95 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (6.95 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$; (f) moto circolare uniforme.
- 4.3** (b) 38° , (c) 76° ; (d) $h_m = R_m/4$.
- 4.5** 130 m.
- 4.9** (b) $(0.900)v^2/R$; (c) $(0.974)v^2/R$; (d) $(0.996)v^2/R$; (e) $(1.000)v^2/R$; (f) $1/2$.
- 4.11** 3.8 m/s^2 .
- 4.13** (a) 108 s; (b) 87 s; (c) il percorso parallelo alla corrente ha richiesto 21 s in più
- 4.15** 70 m/s.
- 4.17** (a) 8.4 m/s; (b) 13 m/s.
- 4.19** (b) $v_x = v - v \cos(\nu t/R)$, $v_y = v \sin(\nu t/R)$; (c) $a_x = (v^2/R) \sin(\nu t/R)$, $a_y = (v^2/R) \cos(\nu t/R)$.

Capitolo 5**Esercizi**

- 5.1** 4.9 sl.
- 5.3** (a) 14 kN; (b) 630 ton.
- 5.5** (a) $F_1 = 6.6 \text{ N}$; $F_2 = 13.0 \text{ N}$; (b) $\theta_1 = 111^\circ$, $\theta_2 = -49^\circ$; (d) $|\Sigma \mathbf{F}| = 7.1 \text{ N}$, $\theta = 31^\circ$.
- 5.7** 300 N, 19° a est del punto cardinale nord.
- 5.9** (b) $\mathbf{F}_{\text{aria}} = 720 \text{ N}$ verso l'alto, $\mathbf{F}_t = 720 \text{ N}$ verso il basso.
- 5.11** 1.8 kN.
- 5.13** (a) 10 N; (b) 10^{-21} s .
- 5.15** 50 N.
- 5.17** 2 kN.
- 5.19** (a) $7 \times 10^{28} \text{ N}$; (b) $3.5 \times 10^{22} \text{ N}$.
- 5.21** 1.24 kg.
- 5.23** (a) $\mathbf{F}_{12} = (4 \text{ N})\mathbf{i}$, $\mathbf{F}_{21} = - (4 \text{ N})\mathbf{i}$; (b) $\mathbf{F}_{12} = (8 \text{ N})\mathbf{i}$, $\mathbf{F}_{21} = - (8 \text{ N})\mathbf{i}$.
- 5.25** 13 m/s^2 .
- 5.27** (a) $8.9 \times 10^{-30} \text{ N}$.
- 5.29** (a) 970 N; (b) 520 N; (c) 750 N.
- 5.31** 1.7 s.
- 5.33** (b) 270 N verso l'alto; (c) 4.2 m/s^2 ; (d) 3.5 m.
- 5.35** (a) 21 N; (b) 6.5 N.
- 5.37** (a) 2.5 mN; (b) 7.2 mN.
- 5.39** (b) 1.5 N; (c) 15 N.

Problemi

- 5.1** $6.5 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$.
- 5.3** (b) 16 kg.
- 5.5** 7.6 m/s^2 .
- 5.7** $F_{T1} = 10 \text{ N}$, $F_{T2} = 6 \text{ N}$, $F_{T3} = 4 \text{ N}$.
- 5.11** 9.5 m.

Capitolo 6**Esercizi**

- 6.1** (a) 310 N; (b) 190 N; (c) zero.
- 6.3** (a) 180 N; (b) 160 N.
- 6.5** (a) 1.1; (b) 0.75.
- 6.7** Sì, $v = 30 \text{ m/s}$.
- 6.9** 11 m.
- 6.11** (c) $F_N = 310 \text{ N}$, $F_c = 370 \text{ N}$.
- 6.13** 4.2 m/s^2 .
- 6.15** (a) 77 N; (b) 71 N.
- 6.17** 83 N.
- 6.19** 0.25 m/s^2 .

- 6.21** 0.061 m/s^2 .
6.23 12° .
6.25 1.1 km.
6.27 (a) 3.7 m/s^2 ; (b) 3.3 kN ; (c) 8.6 kN ; (d) 9.2 kN ; (e) 21° .
6.29 0.11.
6.31 (a) $v_m = \sqrt{gR}$; (b) 3.1 m/s .
6.33 (a) 1.0 kN ; (b) 6.7 m/s ; (c) 6.6 s .
6.35 (a) 12.8 m/s^2 ; (b) 5.2 Mm .
6.37 (a) 1.5 N verso l'esterno; (b) 13° .

Problemi

- 6.3** $F_{a,\min} = \frac{mg}{\mu_s} \left(1 + \frac{m}{M} \right)$
6.5 (c) 290 N ; (d) 35° ; (e) 350 N .
6.7 33 m.
6.9 (a) 0.64 m/s^2 ; (b) 46 N .

Capitolo 7**Esercizi**

- 7.3** (a) $2.72 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$; (b) $4.01 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$; (c) $4.0 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$; (d) è una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza.
7.5 $1.3 \times 10^{-10} \text{ N}$.
7.7 0.64 m.
7.9 20 Mm.
7.11 (a) $1.80 \times 10^{15} \text{ N}$; (b) $41.8 \times 10^{15} \text{ N}$; (c) $8.69 \times 10^{15} \text{ N}$.
7.13 Vedi Tabella 7-1.
7.15 (a) $1.984 \times 10^{-29} \text{ C/kg}$; (b) 39.5 C.
7.17 259 Mm, 0.175 per cento.
7.19 432 Mm.
7.21 3.18×10^{-5} .
7.23 $F = \sqrt{3} Gm^2/a^2$.
7.25 9.75 m/s^2 .
7.27 0.003.
7.29 (a) 3.7 N/kg ; (b) 260 N .
7.31 $\mathbf{g} = (2.2 \times 10^{-11} \text{ N/kg})\mathbf{i} - (5.5 \times 10^{-11} \text{ N/kg})\mathbf{j}$.
7.33 $r^3/T^2 = 3.21 \times 10^{15} \text{ m}^3/\text{s}^2$.
7.35 Vedi Tabella 7.1.

Problemi

- 7.1** (a) $G \approx 14 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ (errato per un fattore maggiore di 2); (b) $5.51 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.
7.3 (a) $2.908 \times 10^{25} \text{ kg}$; (b) $8.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$; (c) 21.3 N/kg ; (d) 17.8 N .
7.5 (a) $x_n = x_c/(1 + \sqrt{m_c/m_b})$; (b) $x_n = 2 \text{ m}$.

Capitolo 8**Esercizi**

- 8.1** (a) 40 N , verso l'alto; (b) 80 J .
8.5 (a) -15 J ; (b) 0.030.
8.9 (a) 3 J; (b) 87° .
8.13 (a) 21 J ; (b) $F_{\min} = 0$, $F_{\max} = 290 \text{ N}$.
8.17 $C(1z_f - 1z_i)$.
8.21 (a) 22 J ; (b) 0.
8.23 (a) 86 kJ ; (b) 170 kJ .
8.25 11 m/s.

- 8.27** (a) -2.9 J ; (b) 0.050 J ; (c) 4.6 N ; (d) 0 .
8.29 (a) -5.8 J ; (b) 12 m/s .
8.31 4.8 m/s .
8.33 210 J .
8.35 410 N .
8.37 (a) 2100 hp ; (b) 690 kN ; (c) 2.1 MN .

Problemi

- 8.1** (a) -160 J ; (b) -100 J ; (c) 0 ; (d) -60 J ; (e) 1.4 m .
8.3 0 .
8.5 (a) 14 kJ ; (b) -14 kJ ; (c) 1.0 kW ; (d) 1.2 kW ; (e) 0.5 kW .
8.7 (a) 4.7 m/s ; (b) 42 N .

Capitolo 9**Esercizi**

- 9.1** (a) 54 J ; (b) 54 J ; (c) 10 m .
9.3 (a) 0.21 m ; (b) 11 m/s ; (c) 0.18 m .
9.5 4.2 MN/m .
9.7 (a) 3.5 kJ ; (b) no; (c) 9.6 m/s .
9.9 (a) 60 J ; (b) 4.9 m/s ; (c) 4.2 m/s .
9.11 (a) 2.0 m ; (b) 200 J ; (c) 1.0 m ; (d) 100 N .
9.13 (a) $0.18 \times 10^{-20} \text{ J}$; (b) -0.067 nm .
9.15 (a) -2 kJ ; (b) 2 kJ ; (c) 0 .
9.17 (a) $-(3 \text{ N})(x_f - x_i) - (4 \text{ N})(y_f - y_i)$; (b) $-(3 \text{ N})x - (4 \text{ N})y$; (c) -48 J ; (d) 0 .
9.19 (a) 87 J ; (b) 26 m/s ; (c) 44 J .
9.21 (a) 1.1 m/s ; (b) $mg(3 - 2 \cos 30^\circ)$.
9.23 $\sqrt{3} \text{ gr}$.
9.25 (a) 2.7 J se y è misurata a partire dalla posizione iniziale sul bancone; (b) 8.6 kN/m ; (c) 6.2 m .
9.27 (a) -4200 J .
9.29 (a) 6 kJ .
9.31 (a) $0.05 mg \approx 500 \text{ N}$; (b) 10 kW .
9.33 (a) $\Delta K = -59 \text{ J}$, $\Delta U = 45 \text{ J}$, $\Delta E_{\text{int}} = 14 \text{ J}$.
9.35 (a) $-1.7 \times 10^{11} \text{ J}$; (b) $8.5 \times 10^{10} \text{ J}$; (c) $-8.5 \times 10^{10} \text{ J}$; (d) l'energia cinetica.
9.37 (a) $-3.8 \times 10^{32} \text{ J}$; (b) $2.3 \times 10^{32} \text{ J}$.
9.39 (a) 7.0 km/s ; (b) 7.5 km/s .

Problemi

- 9.1** (a) 0.19 m ; (b) 7.7 m/s .
9.3 (a) $U = mg y + 1/2ky^2$; (b) $F_y = -mg - ky$.
9.7 (b) $\sqrt{2ghm_1/(m_1 + m_2)}$.

Capitolo 10**Esercizi**

- 10.1** $x_{cm} = 1.1 \text{ m}$, $y_{cm} = 0.79 \text{ m}$.
10.3 $x_{cm} = 25 \text{ mm}$, $y_{cm} = 25 \text{ mm}$.
10.5 $x_{cm} = 0$, $y_{cm} = 0$, $z_{cm} = 3R/8$.
10.7 0.50 m/s .
10.9 1.2 m/s^2 in una direzione discendente lungo il piano inclinato.
10.11 (a) La gravità e le tensioni agenti sulle due masse; (b) 0.34 m sopra la massa di 2.5 kg ; (c) 0.98 m/s^2 .
10.13 $1.78 \times 10^{29} \text{ kg m/s}$; perpendicolare alla congiungente Terra-Sole.
10.15 $1.4 \times 10^5 \text{ kg m/s}$, verso sudest.
10.17 (a) 4.02 m/s ; (b) 29.3 J .
10.19 0.23 m/s .

- 10.21** m_2/m_1 .
10.23 9.0×10^4 N.
10.25 600 proiettili/minuto.
10.27 0.68 m/s, -1.4×10^4 J.
10.29 $(-0.17 \text{ m/s})\mathbf{i} + (-0.24 \text{ m/s})\mathbf{j}$; $(0.29 \text{ m/s}, 54.7^\circ)$.
10.31 9.1 s.
10.33 5.0 m/s.
10.35 1.2×10^5 m/s.
10.37 420 m/s.
10.39 $v_A = 5.4$ m/s (verso ovest), $v_B = 3.1$ m/s (verso est).
10.43 18 km/h, 79° a sud del punto cardinale est.
10.47 (a) $\Delta P = 20$ kg m/s (se il sistema è formato dall'autobotte e dall'acqua che vi rimane); (b) 20 N.
10.49 (a) 1.1 kN, a 9.5° dalla direzione di ingresso verso la direzione di uscita; (b) 9.5 kN.
10.51 (a) 20 N; (b) 10^4 s; (c) 100 kg.

Problemi

- 10.7** (a) 2×10^{-5} mm; (b) la gravità e la tensione della corda. Sono presenti rilevanti forze interne.

Capitolo 11**Esercizi**

- 11.1** (a) 7.8 N m, in senso orario; (b) 0; (c) 7.8 N m, in senso antiorario; (d) 0.
11.3 (a) 200 N; (b) 200 N m, ammettendo che il braccio della forza sia lungo 1 m.
11.5 (a) a 20.9 cm; (b) 14 N.
11.7 400 N.
11.9 (a) 0 verticale, 24 kN orizzontale, 31 kN tensione; (b) lungo l'asta verso destra.
11.11 (a) 10 kN sulle anteriori, 40 kN sulle posteriori; (b) 36 kN.
11.13 280 N orizzontale, 310 N tensione, 350 N verticale.
11.15 (a) $0.81 F_t$; (b) $0.33 F_t$ orizzontale verso sinistra, $0.19 F_t$ verticale verso l'alto;
(c) verso il centro del disco.
11.17 (a) $F_a/\sqrt{2}$ tensione, $\frac{1}{2} F_a$ attrito, $\frac{1}{2} F_a$ normale.
11.19 $x = 0.56$ m, $y = 3.44$ m rispetto al perno.
11.21 45° .
11.23 $(369 \text{ N m})\mathbf{i} + (224 \text{ N m})\mathbf{j} + (660 \text{ N m})\mathbf{k}$.
11.25 1 m³.
11.27 (b) $\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

Problemi

- 11.1** 6.0 m.
11.3 $\frac{1}{2} F_t$, $\mu_s \geq 1/2$.
11.5 (a) 150 N sull'asse di sinistra, 130 N sull'asse di destra; (b) 120 N;
(c) 120 N a 15° dall'orizzontale.
11.7 (a) 27 kN tensione, $P_x = 27$ kN, $P_y = 17$ kN; (b) 12 kN tensione,
 $P_x = 11$ kN, $P_y = 21$ kN.
11.11 10^{-9} N m.

Capitolo 12**Esercizi**

- 12.1** (a) 2.1 rad; (b) 120° ; (c) 0.33 giri.
12.3 (a) 0.51 m; (b) 0.51 m.
12.5 2.6×10^9 m.
12.7 8.2 rad/s.
12.9 (a) $r_1 = r_2 = \pi/4$; (b) -10 rad/s; (c) 19 rad/s; (d) -6.2 rad.

12.11 $\theta(t) = -(3.5 \text{ rad/s})t$.

12.13 (a) $\alpha_z = -2.2 \text{ rad/s}^2$; (b) $\theta(t) = (5.8 \text{ rad/s})t - (1.1 \text{ rad/s}^2)t^2$; (c) $t_q = 2.6 \text{ s}$, verso nord prima di t_q , verso sud dopo t_q ; (e) $\omega_z^2 = (5.8 \text{ rad/s})^2 - (4.4 \text{ rad/s}^2)\theta$

12.15 (a) $\omega_z(t) = -(1.4 \text{ rad/s}^2)t$; (b) $\theta(t) = -(0.7 \text{ rad/s}^2)t^2$; (c) $\omega_z^2 = -(2.7 \text{ rad/s}^2)$

12.17 9.7 mm/s.

12.19 (a) $|a_t| = 0.25 \text{ m/s}^2$, $|a_R| = 0.16 \text{ m/s}^2$; (b) $v = 0.48 \text{ m/s}$, $a = 0.30 \text{ m/s}^2$.

12.21 (a) $(ML^2)(T^{-2}) = ML^2 T^{-2}$; (b) $(\text{kg m}^2)(\text{s}^{-2}) = \text{kg}(\text{m/s})^2 = \text{J}$.

12.23 0.34 kg m².

12.25 (a) 20 kg m²; (b) 9 kg m²; (c) 29 kg m².

12.27 34 kg m².

12.29 $Ma^2/6$.

12.31 $13Mr_0^2/20$.

12.33 (a) 4.1 rad/s; (b) 2.8 m/s.

12.35 (a) 3.9 m/s; (b) 41 rad/s.

12.37 5 J, 1/2.

Problemi

12.1 (a) $\alpha_z = 2.6 \text{ rad/s}^2$, $\omega_{z0} = -5.1 \text{ rad/s}$; (b) $\omega_z = -5.1 \text{ rad/s} + (2.6 \text{ rad/s}^2)t$, $\theta = -(5.1 \text{ rad/s})t + (1.3 \text{ rad/s}^2)t^2$.

12.3 $K_{\text{orbit}} = 2.7 \times 10^{33} \text{ J}$, $K_{\text{rotaz}} = 2.6 \times 10^{29} \text{ J}$.

12.5 (b) $v = \sqrt{2gh/(1 + K^2/R^2)}$.

12.7 $I = MR^2/4$.

12.9 $6.0 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$.

12.11 (a) $v = \sqrt{2gh/[1 + (M/2m)]}$; (b) $\omega = (1/R_0) \sqrt{2gh/[1 + (M/2m)]}$.

12.13 (a) $(2.5 \text{ rad/s})\mathbf{k}$; (b) $-(1.8 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$; (c) $-(32 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (9.8 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$.

Capitolo 13

Esercizi

13.1 (a) $6.10 \times 10^6 \text{ kg m}^2/\text{s}$, verso il basso; (b) $6.10 \times 10^6 \text{ kg m}^2/\text{s}$, verso il basso.

13.3 $(100 \text{ kg m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.

13.5 $-(0.25 \text{ kg m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.

13.7 $-(2.4 \text{ kg m}^2/\text{s})\mathbf{i} + (1.6 \text{ kg m}^2/\text{s})\mathbf{j} - (6.1 \text{ kg m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.

13.11 $3.3 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2/\text{s}$, verso il basso.

13.13 $\alpha_z = 120 \text{ rad/s}^2$, $\omega_z = (120 \text{ rad/s}^2)t$, $\theta = \theta_0 + (60 \text{ rad/s}^2)t^2$.

13.15 (a) $\alpha = 64 \text{ rad/s}^2$; (b) 30 rad/s^2 .

13.17 0.016 kg m^2 .

13.19 (a) $m_c g/[m_c + m_b + (I_0/R_0)^2]$; (b) $m_b m_c g/[m_c + m_b + (I_0/R_0)^2]$; (c) $m_c g[m_b + (I_0/R_0)^2]/[m_c + m_b + (I_0/R_0)^2]$.

13.21 720 N.

13.25 0.19 m/s.

13.27 (a) 42 rad/s; (b) $K_f - K_i = 350 \text{ J}$.

13.29 (c) $\omega = mD(v_i + v_f)/(Ma^2/3)$; (d) 4.7 rad/s.

13.31 (b) 27 N.

13.33 (a) $2v/D$; (b) $\Delta K = 0$.

Problemi

13.3 $h = 2r_0/5$.

13.7 $h = 27R_0/10$.

13.11 (b) $W = -1/2mv_i^2(1 - R_i^2/R_f^2)$.

13.15 (b) $Mg\sqrt{1 + [M^4g^2D^6/(I_s\omega_s)^4]}$; (c) $\tan^{-1}[M^2gD^3/(I_s\omega_s)^2]$.

Capitolo 14

Esercizi

14.1 1.1 s, 0.92 Hz.

- 14.3** (a) $x(t) = (0.063 \text{ m}) \cos [(4.1 \text{ rad/s})t]$,
 $v_x(t) = -(0.26 \text{ m/s}) \sin [(4.1 \text{ rad/s})t]$,
 $a_x(t) = -(1.1 \text{ m/s}^2) \cos [(4.1 \text{ rad/s})t]$,
(b) $x(1.7 \text{ s}) = 0.049 \text{ m}$, $v_x(1.7 \text{ s}) = -0.16 \text{ m/s}$, $a_x(1.7 \text{ s}) = -0.82 \text{ m/s}^2$.
- 14.5** (a) $\omega = 7.1 \text{ rad/s}$, $A = 0.25 \text{ m}$, $\nu = 1.1 \text{ Hz}$, $T = 0.88 \text{ s}$, $\phi = \pi \text{ rad}$;
(b) $x(t) = -(0.25 \text{ m}) \cos [(7.1 \text{ rad/s})t]$, $a_x(t) = (13 \text{ m/s}^2) \cos [(7.1 \text{ rad/s})t]$;
(c) $x(0.25 \text{ s}) = 0.051 \text{ m}$, $v_x(0.25 \text{ s}) = 1.8 \text{ m/s}$, $a_x(0.25 \text{ s}) = -2.6 \text{ m/s}^2$.
- 14.7** (a) $x(t) = (0.29 \text{ m}) \cos [(6.7 \text{ rad/s})t + \pi/2]$,
 $v_x(t) = -(1.9 \text{ m/s}) \sin [(6.7 \text{ rad/s})t + \pi/2]$,
 $a_x(t) = -(13 \text{ m/s}^2) \cos [(6.7 \text{ rad/s})t + \pi/2]$;
(b) $x(0.54 \text{ s}) = 0.13 \text{ m}$, $v_x(0.54 \text{ s}) = 1.7 \text{ m/s}$, $a_x(0.54 \text{ s}) = -5.9 \text{ m/s}^2$.
- 14.9** $A = 0.49 \text{ m}$, $v_{\max} = 1.3 \text{ m/s}$, $a_{\max} = 3.4 \text{ m/s}^2$.
- 14.11** (a) 7.2 rad/s ; (b) 1.1 Hz ; (c) 0.88 s .
- 14.13** 32 N/m .
- 14.15** 0.34 kg .
- 14.17** 0.083 J .
- 14.19** (a) $U = (24 \text{ mJ}) \cos^2[(6.5 \text{ rad/s})t]$; (b) $K = (24 \text{ mJ}) \sin^2[(6.5 \text{ rad/s})t]$.
- 14.21** (a) 0.047 m ; (b) 0.33 m/s ; (c) 0.32 m/s ; (d) 0.030 m .
- 14.23** (a) 1.67 kg ; (b) 19.3 N/m .
- 14.25** (a) 1.00 J ; (b) 1.38 J ; (c) in $y = 0$, 0.39 m/s ; (d) 1.2 J .
- 14.27** (a) 3 s ; (b) 0.3 Hz , 0.4 m/s .
- 14.29** (a) 1.6 s ; (b) 1.5 s .
- 14.31** (a) $2.65 \times 10^{-5} \text{ N m}$; (b) 284 rad/s^2 .
- 14.33** (a) 2.1 s ; (b) 0.13 mJ .
- 14.35** $x = (150 \text{ mm}) \cos [(3.5 \text{ rad/s})t]$, $v_x = -(0.52 \text{ m/s}) \sin [(3.5 \text{ rad/s})t]$,
 $a_x = -(1.8 \text{ m/s}^2) \cos [(3.5 \text{ rad/s})t]$.
- 14.37** (b) $L \sin \theta$, $\sqrt{g/(L \sin \theta)}$.
- 14.39** (a) Dopo altri 2.4 min ; (b) $4.8 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.
- 14.41** (a) $1.2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$; (b) $9:31$.
- 14.47** (a) 9.3 mm ; (b) $\tan^{-1}(-4.0) = -1.3 \text{ rad}$ [$+\pi$] = 1.8 rad ; (c) 11 mm per $\omega_E = \omega$.

Problemi

- 14.1** $T/6$.
- 14.3** (a) 0.09 s ; (b) 0.11 s ; (c) 0.16 s .
- 14.7** 0.75 s .

14.9 (a) $P(t) = -\frac{F_0^2 \omega_E}{m \sqrt{(\omega_E^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_E^2}} \cos \omega_E t \sin(\omega_E t - \phi_E)$

Capitolo 15**Esercizi**

- 15.1** 1.33 MPa .
- 15.3** (a) 34 kPa ; (b) 30 kPa .
- 15.5** (a) 1.21×10^5 ; (b) 154 nm .
- 15.7** (a) 8.4×10^{-7} ; (b) $8.4 \times 10^{-7} \text{ rad}$; (c) $0.43 \mu\text{m}$.
- 15.9** $1.98 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$.
- 15.11** (a) $1.01 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$; (b) $11.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.
- 15.13** 98 MPa .
- 15.15** 37.1 kPa .
- 15.17** 27 N .
- 15.19** 1050 m^3 .
- 15.23** 1.00129 .
- 15.25** (a) $3.3 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, $6.7 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$; (b) 3.4 m/s ; (c) 71 kPa .
- 15.29** -2.5 kPa .
- 15.31** (a) 7.7 m/s ; (b) $0.19 \text{ m}^3/\text{s}$; (c) $1.8 \times 10^4 \text{ Pa}$, $2.3 \times 10^4 \text{ Pa}$.
- 15.33** 0.32 N .
- 15.35** 0.544 m^3 .

Problemi

- 15.1** (a) 4.8 kg; (b) $6.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$; (c) 0.47 mm.
- 15.3** $(\rho_s - \rho_0)/(\rho - \rho_0)$.
- 15.5** 1.06 km, 2.6 km.
- 15.7** $80h_1$.
- 15.9** 42 min.
- 15.11** (b) 12.3° .

Capitolo 16**Esercizi**

- 16.1** 10^6 anni.
- 16.3** (a) 0.282 m; (b) 8.03 kN.
- 16.5** (a) 3650 Pa; (b) 77.1 K.
- 16.7** (a) $17.9 \text{ mm}_{\text{Hg}}$; (b) $17.9 \text{ mm}_{\text{Hg}}$; (c) $20.4 \text{ mm}_{\text{Hg}}$.
- 16.9** 35°C .
- 16.11** (a) -40° ; (b) 575 K; (c) 0; (d) nessuna.
- 16.13** (a) 9.997 mm; (b) 0.03%; (c) 30 mm.
- 16.15** (a) -22°C ; (b) no.
- 16.17** (a) $-2.8 \times 10^{-5} \text{ s}$; (b) 2.4 s avanti.
- 16.19** 280 mm.
- 16.23** 600 W.
- 16.25** (a) $1700 \text{ }^\circ\text{C/m}$; (b) $0.070 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$; (c) isolante.
- 16.27** (a) 3800 Btu/h; (b) 0.77; (c) $0.14 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$.
- 16.31** (a) 45 W; (b) 160 kJ.
- 16.33** (a) 70 MW/m^2 ; (b) 500 W/m^2 ; (c) 100 W/m^2 ; (d) $5 \mu\text{W/m}^2$.

Problemi

- 16.5** (a) 86 W; (b) $T = 140 \text{ }^\circ\text{C} - (124 \text{ }^\circ\text{C}) \ln(r/12 \text{ mm})$; (d) $-6.2 \times 10^3 \text{ }^\circ\text{C/m}$.
- 16.9** $T = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{L} x$

Capitolo 17**Esercizi**

- 17.1** (a) 2/3.
- 17.3** (a) $3.3 \times 10^{-3} \text{ mol}$; (b) 0.49 kPa.
- 17.5** $0.0823 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
- 17.7** $2.7 \times 10^{25} \text{ molecole/m}^3$.
- 17.9** 30 J.
- 17.11** (a) $24 \text{ }^\circ\text{C}$; (b) 11 kJ.
- 17.13** 1.1 kg.
- 17.15** (a) $58.1 \text{ }^\circ\text{C}$.
- 17.17** (a) 8.08 kJ; (b) -8.08 kJ .
- 17.19** (a) 60 kJ; (b) -55 kJ ; (c) 5 kJ.
- 17.21** (a) $1/2(p_i + p_f)(V_f - V_i)$.
- 17.23** (a) 3.1 kJ; (b) 120 kPa; (c) 1100 K, 940 K.
- 17.25** (a) 9 kJ; (b) 21 kJ; (c) 25 kJ.
- 17.27** (a) 6.0 kJ; (b) 9.0 kJ; (c) 15.0 kJ.
- 17.29** 7.53 kJ.

Problemi

- 17.1** (a) $20.7 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} + (0.0123 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-2})T$; (c) 13 kJ.
- 17.3** (a) $1/p$; (b) $\frac{1 - b/V}{p - a/V^2 + 2ab/V^3}$

Capitolo 18

Esercizi

- 18.1 (a) 298 m/s; (b) $1.01 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}^2$; (c) $\langle v \rangle^2 = 0.89 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}^2$.
- 18.5 500.
- 18.9 (a) 520 m/s; (b) 480 m/s; (c) 410 m/s; (d) $6.2 \times 10^{-21} \text{ J}$.
- 18.11 (a) 1.2; (b) 0.8; (c) 2.3.
- 18.13 (a) 0.01 eV; (b) 0.04 eV; (c) 0.8 eV.
- 18.15 (a) $\langle v_x \rangle = 80 \text{ km/h}$, $\langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$; (b) $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$.
- 18.17 (a) 6.0 kJ.
- 18.19 (a) 6.0 kJ, 0; (b) $29.4 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$; (c) 8.4 kJ, 2.4 kJ.
- 18.21 (a) $23.1 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
- 18.23 1.7, 1.4, 1.3.
- 18.25 (a) 0, approssimativamente; (b) -1.1 kJ.
- 18.27 (a) 160 kPa; (b) 330 K, 250 K.
- 18.29 $T_f/V_i = T_f/V_f$ per una trasformazione isobara.
- 18.31 (a) 1.3 kJ; (b) 1.3 kJ; (c) 1.3 kJ.
- 18.37 (a) 260 m/s; (b) 280 m/s; (c) 250 m/s.
- 18.39 0.80, 0.74.

Problemi

- 18.3 (a) 940 m/s; (b) 1×10^{-87} ($v_i = 1.1 \times 10^4 \text{ m/s}$); (c) sì.
- 18.5 (a) $5 \times 10^{-46} \text{ kg m}^2$; (b) $3 \times 10^{12} \text{ rad/s}$.

Capitolo 19

Esercizi

- 19.1 (a) 120 J; (b) 320 J; (c) 0.
- 19.3 (a) 0.28; (b) 1600 J; (c) 67 kW, 49 kW, 18 kW.
- 19.5 (a) 272 K, 544 K, 1088 K, 544 K; (b) 14.7 kJ; (c) 2.3 kJ; (d) 12.4 kJ; (e) 15 per cento.
- 19.7 (a) 170 J; (b) 2.1.
- 19.9 (a) 7.7 kW; (b) 4.2 kW; (c) 455 lire.
- 19.13 (a) $|Q_F|/|Q_C| = 0.732$; (b) 9.15 mJ; (c) no.
- 19.17 (a) $\Delta\eta = +0.05$; (b) 0.04; (c) 0.08, 0.07.
- 19.19 (a) 5 per cento; (b) 40 MW; (c) $10 \text{ m}^3/\text{s}$.
- 19.21 1 kW.
- 19.23 (a) Q/T ; (b) 0.1 J/K.
- 19.25 6.1 kJ/K.
- 19.27 (a) 51 °C; (b) $\Delta S_{250} = 490 \text{ J/K}$, $\Delta S_{950} = -400 \text{ J/K}$; (c) 90 J/K; (d) irreversibile.
- 19.31 (a) -0.1 J/K; (b) -0.1 J/K; (c) maggiore di 0.1 J/K.

Problemi

- 19.1 Q_C/T_C , 0, $-|Q_F|/T_F$, 0.
- 19.7 (a) 0.40 J/K; (b) 140 J in più.
- 19.9 23 J/K.

Capitolo 20

Esercizi

- 20.1 (a) 1.1 m/s; (b) 1 mm; (c) 0.7 mm.
- 20.3 (b) $h = 10.0 \text{ mm}$, $w = 2.00 \text{ m}$.
- 20.7 1 e 2.
- 20.9 (a) 6.8 mm; (b) 1.47 rad/m; (c) 4.18 rad/s; (d) 2.84 m/s; (e) 4.27 m; (f) 0.665 Hz; (g) 1.50 s; (h) +i; (i) -2.2 mm.
- 20.11 (a) $v_x = -(28 \text{ mm/s}) \cos [(1.47 \text{ rad/m})x - (4.18 \text{ rad/s})t]$; (b) $a_x = -(120 \text{ mm/s}^2) \sin [(1.47 \text{ rad/m})x - (4.18 \text{ rad/s})t]$; (c) 28 mm/s;

- (d) 120 mm/s^2 ; (e) 27 mm/s ; (f) 38 mm/s^2 ; (g) verso l'alto.
- 20.13** (a) $(0.010) \cos [(1.47 \text{ rad/m})x - (4.18 \text{ rad/s})t]$;
 (b) $-(0.015 \text{ m}^{-1}) \sin [(1.47 \text{ rad/m})x - (4.18 \text{ rad/s})t]$; (c) -9.4×10^{-3} ;
 (d) $4.8 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$; (e) verso l'alto.
- 20.15** Da 4×10^{14} a $7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$.
- 20.17** Da 16.5 mm a 16.5 m .
- 20.19** (a) $y = (17 \text{ mm}) \sin [(5.3 \text{ rad/m})x + (19 \text{ rad/s})t]$; (b) 3.6 m/s ;
 (c) 0.32 m/s ; (d) 6.1 m/s^2 ; (e) 0.090 ; (f) 0.48 m^{-1} .
- 20.21** (a) $A: 4.0 \text{ m/s}, B: 0, C: -4.0 \text{ m/s}, D: -2.8 \text{ m/s}, E: 0$;
 (b) $A: 0, B: 640 \text{ m/s}^2, C: 0, D: -450 \text{ m/s}^2, E: -640 \text{ m/s}^2$;
 (c) $A: 0.087, B: 0, C: -0.087, D: -0.061, E: 0$;
 (d) $A: 0, B: 0.30 \text{ m}^{-1}, C: 0, D: -0.21 \text{ m}^{-1}, E: 0.30 \text{ m}^{-1}$.
- 20.23** 1200 m/s .
- 20.27** 100 N .
- 20.29** $A: 21 \text{ W}, B: 0, C: 21 \text{ W}, D: 11 \text{ W}, E: 0$.
- 20.33** 600 W .
- 20.35** 0.49 W/m^2 .
- 20.36** (a) 1.3 kHz ; (b) $8.0 \times 10^3 \text{ rad/s}$; (c) 8.4 m^{-1} ;
 (d) $(5.0 \mu\text{m}) \cos [(8.4 \text{ rad/m})x - (8.0 \times 10^3 \text{ rad/s})t]$.
- 20.38** 330 m/s .
- 20.40** (a) $1.1 \times 10^3 \text{ m/s}$; (b) $2.0 \times 10^3 \text{ m/s}$.
- 20.42** 0.2 s .
- 20.44** (a) $5.1 \times 10^3 \text{ m/s}$; (b) $3.5 \times 10^3 \text{ m/s}$; (c) $5.1 \times 10^3 \text{ m/s}$.
- 20.46** (a) $3.9 \times 10^3 \text{ m/s}$; (b) $1.5 \times 10^3 \text{ m/s}$.
- 20.48** (a) 0.16 Pa ; (b) $1.7 \times 10^{-11} \text{ m}$; (c) $2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa}, 1.0 \times 10^{-9} \text{ m}$.
- 20.50** (a) 466 Hz ; (b) 880 Hz .
- 20.52** 73 nW/m^2 .
- 20.54** (a) 3; (b) 6; (c) 10; (d) 13; (e) 17; (f) 20; (g) 60.

Indice analitico

A

Accelerazione 35, 56
– angolare, 248
– centripeta, 64, 66, 111
– di Coriolis, 69
– di gravità, 43
– tangenziale, 66
Ambiente, 81

B

Baricentro, 231
Barometro, 335
Bilancia di torsione di Cavendish, 130
Boltzmann
– costante di, 416
Boyle
– legge di, 378
Braccio di una forza, 223
Brahe Tycho, 137

C

Caduta libera, 43
Calore, 365
– specifico, 381, 392
– latente, 381, 383
Caloria, 383
Campo
– di forza, 177
– di forza conservativo, 178
– gravitazionale, 135
– scalare, 23
– vettoriale, 23
Capacità termica
– di un solido, 412
– dei gas perfetti, 409, 411
– molare, 382, 400
Carnot
– ciclo di, 433
– macchina di, 434
– teorema di, 434
Cavallo vapore, 160
Cavendish
– bilancia di, 130
Celsius
– grado, 360
– scala, 362
Centro di gravità, 231
Centro di massa, 195
– moto del, 197
Chilogramo, 4
Chilowattora (kWh), 161
Ciclo, 394
– di Carnot, 433
– di Otto, 450
Cifre significative, 9
Cinematica, 29
Circuitaltazione, 176
Clausius
– diseguaglianza di, 440
– enunciato del secondo principio della termodinamica secondo, 432
Coefficiente
– di attrito cinetico, 104
– di attrito statico, 105
– di attrito volvente, 106
– di conducibilità termica, 367
– di dilatazione termica, 363
– di protezione, 403
Conduzione del calore, 365, 366
Conservazione
– dell'energia meccanica, 178

– dell'energia meccanica per un sistema di corpi, 282
– del momento angolare, 284
– della quantità di moto, 201
Convezione, 366, 370
Copernico Nicolò, 138
Corpo rigido, 221
Costante
– di Stefan-Boltzmann, 370
– della molla, 151
– universale dei gas, 378
Costante di gravitazione, 129

D

Decibel, 473
Deformazione
– da trazione, 328
– da compressione, 329
– da taglio, 329
Densità, 80, 331
– relativa, 331
Diagramma p-V, 374
Dilatazione termica, 363
Dimensioni delle grandezze fisiche, 7
Dinamica, 29

E

Ebolizione
– punto di, 360
Energia
– cinetica di rotazione, 253
– cinetica, 155, 156, 157
– dell'oscillatore armonico, 307
– di legame, 185
– di un'onda, 464
– interna di un gas perfetto, 406
– interna, 182, 356, 388
– legge di conservazione della, 167, 182
– meccanica totale, 282
– meccanica, 169
– per un sistema di corpi, 280, 281
– potenziale elastica, 171, 177
– potenziale gravitazionale, 168, 171
– potenziale, 168, 170
– totale, 182
Entalpia, 356, 394
Entropia, 438, 439, 440
Equazione
– cardinale della meccanica, 269, 274
– di Bernoulli, 338, 342
– di continuità, 340
– di stato, 377
– di stato dei gas perfetti, 378
– di van der Waals
Equilibrio, 175
– chimico, 380
– condizioni per l', 225
– instabile, 175
– meccanico, 380
– rotatorio, 222
– stabile, 175
– statico dei corpi rigidi, 221, 226
– termico, 357, 380
– traslatorio, 221
– termodinamico, 380
Equipartizione dell'energia, 407
Errore, 1, 10
Fenomeno libero, 392

F

Fahrenheit
– scala, 362
Fase, 301
Fase, 327
– solida, 327
– liquida, 327
– gassosa, 327
Fluido, 332
– viscoso, 345
– newtoniano, 345
Flusso
– laminare, 346
– linea di, 339
– tubo di, 340
Forza 79, 80
– apparente, 115
– campo di, 177
– centrale, 186, 287
– centrifuga, 115
– centripeta, 111
– conservativa, 167, 175, 176
– definizione dinamica della, 86
– di attrito cinetico, 104
– di attrito statico, 105
– di attrito, 104
– di contatto, 104
– di Coriolis, 115
– esterna, 198
– frenante, 109
– gravitazionale, 80, 125
– impulso di una, 204
– inerziale, 115
– interna, 182, 198
– momento di una, 223
– non conservativa, 180
– normale, 104
– peso apparente, 91
– peso, 90
– viscosa, 109
Freccia del tempo, 444
Frequenza, 302
Funzione di distribuzione, 417
Funzione di stato, 388
Fusione
– punto di, 360

G

Gas perfetto (o ideale), 361
Giroscopio, 288
Gittata, 61
Gradiente, 24, 177
– dell'energia, 177
– termico, 367
Grado
– Celsius, 360
– Kelvin, 360
– Rankine, 362
Grado di libertà, 243
Grandezze
– scalari, 13
– vettoriali, 13

H

Hooke, legge di, 329
Horsepower (hp), 160
Huggens-Steiner, 257