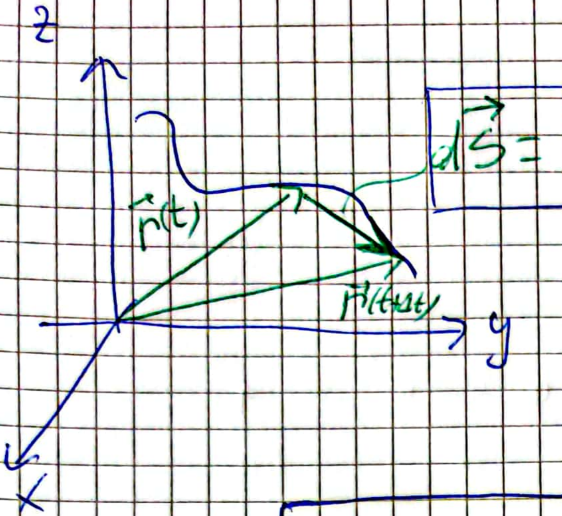
LAVORO DI UNA FORZA



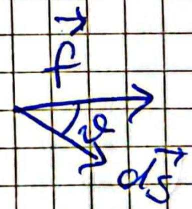
$$\boxed{d\vec{s} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}$$ VETTORE SPOSTAMENTO

$$\boxed{dL = \vec{f}\cdot d\vec{s}}$$ LAVORO ELEMENTARE

Unità di misura: $\boxed{N \cdot m = J}$ (Joule)

$$\boxed{L_{AB} = \int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{s}}$$ LAVORO DELLA FORZ $\vec{f}$ tra i punti A e B

NOTA



$$dL = \vec{f}\cdot d\vec{s} = f\,ds\cos\theta$$

massimo quando $\vec{f}$ e $d\vec{s}$ sono paralleli ($\theta = 0$)

minimo quando $\vec{f}$ e $d\vec{s}$ sono perpendicolari ($\theta = \pi/2$)

NOTA Se su un punto materiale agiscono più forze $\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i$:

$$L = \int_A^B \sum_i \vec{f}_i \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_A^B \vec{f}_i \cdot d\vec{s}.$$

Energia cinetica

$$\vec{f} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{f}\cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che per definizione:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \Rightarrow d\vec{s} = \vec{v}\,dt$$

quindi:

$$dL = \vec{f}\cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}\cdot \vec{v}\,dt}{dt} = m\,\vec{v}\cdot d\vec{v}.$$

Ora osserviamo che:

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2}d(v^2) = \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

quindi:

$$dL = \frac{1}{2}m\,d(v^2) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad L_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2.$$

Introduciamo

$$\boxed{K = \frac{mv^2}{2}}$$ ENERGIA CINETICA

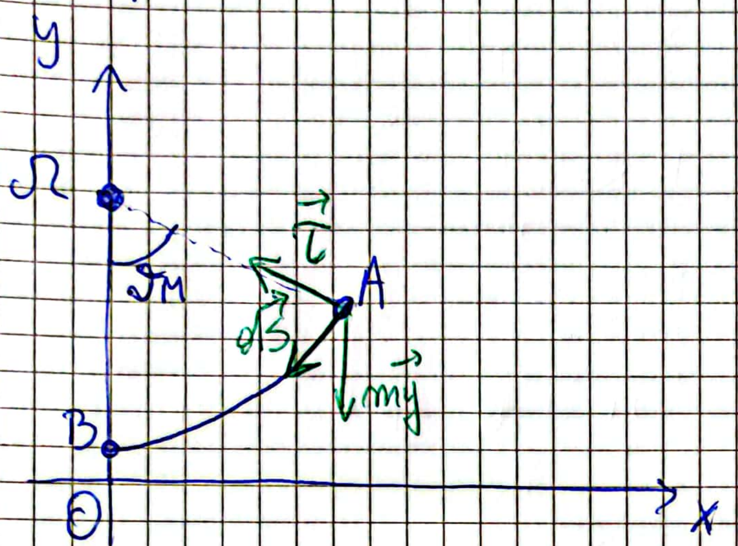
$$\boxed{L_{AB} = K_B - K_A}$$ Teorema del lavoro e dell'energia cinetica

- enunciato a parole -

Il teorema afferma che il lavoro compiuto da tutte le forze che agiscono su un corpo è uguale alla variazione della sua

Esempio Applicazione al moto del pendolo semplice.

- Usiamo il teorema del lavoro ed energia cinetica per calcolare la velocità con cui il punto materiale passa dalla posizione verticale.



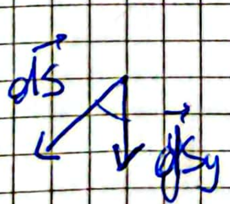
$$L_{AB} = \int_A^B (\vec{\tau} + m\vec{g}) \cdot d\vec{s}$$

$\vec{\tau} \perp d\vec{s}$ lungo tutta la traiettoria:

$$L_{AB} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s}$$

- Osserviamo che:

$$\vec{g} \cdot d\vec{s} = -g\, ds_y = -g\, dy$$



quindi:

$$L_{AB} = -mg \int_A^B dy = -mg(y_B - y_A)$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{AB} = mg(y_A - y_B)}$$

Quindi:

$$L_{AB} = mg(y_A - y_B) = K_B - \underset{\overset{\|}{0}}{K_A} = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{m} mg(y_B - y_A) = v_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 2g(y_B - y_A)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2g(y_B - y_A)}}$$

Notiamo che:

$$\left.\begin{aligned} y_B &= l \\ y_A &= l \cos\vartheta_M \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gl(1-\cos\vartheta_M)}} \quad \text{(Eq. 4)}$$

Per esempio, se $l = 10\,cm$ e $\vartheta_M = 45° = \pi/4$:

$$v_B = \sqrt{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2} \times 0.1\,m \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \simeq 0.76\,m/s$$

NOTA Non possiamo usare direttamente la:

$$\omega(t) = -\omega\vartheta_M \sin\omega t \Rightarrow v = -\omega l \vartheta_M \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \boxed{v_B = \omega l \vartheta_M = \sqrt{lg}\,\vartheta_M} \quad (**)$$

perché in generale $\vartheta_M \gg 1$. Notiamo però che se $\vartheta_M \ll 1$:

$$1 - \cos\vartheta_M \approx \frac{\vartheta_M^2}{2}$$

e dalla (Eq. A) abbiamo:

$$v_B \approx \vartheta_M \sqrt{gl}$$

in accordo con la (**).

NOTA

$$L_{AB} = mg(y_A - y_B)$$

L_{AB} dipende solo dalle posizioni iniziale e finale e non dalla traiettoria percorsa dal punto materiale.

- Campi di forze conservativi

Campo di forza: regione nella quale c'è forza diversa da zero

Diciamo che in una regione di spazio agisce un campo di forze se

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \qquad \text{con } \vec{r} \text{ all'interno della regione.}$$

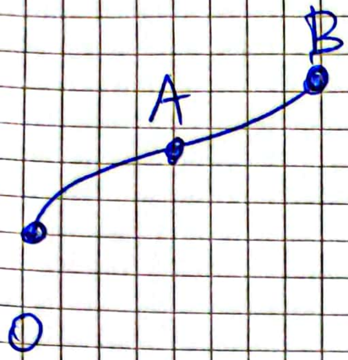
Un campo di forze si dice conservativo se

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = F(A,B)$$

ovvero, se L_{AB} dipende solo dai punti A e B e non dalla traiettoria.

Dimostriamo che se un campo di forze è conservativo allora

$$\boxed{L_{AB} = V(B) - V(A)} \qquad V = \text{potenziale}$$



Consideriamo un campo di forze conservativo:

$$L_{OA} = F(O, A) \qquad L_{OB} = F(O, B)$$

Dalla definizione di lavoro abbiamo che:

$$L_{OB} = L_{OA} + L_{AB} = F(O, B)$$

da cui:

$$L_{AB} = L_{OB} - L_{OA} = F(O,B) - F(O,A)$$

e se denotiamo con

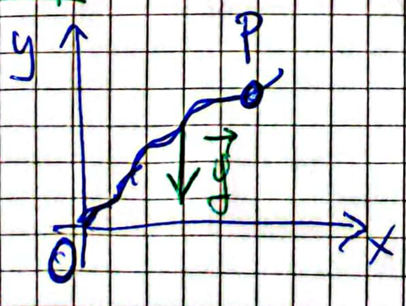
$$\boxed{V(P) = F(O,P)}$$

il lavoro per spostare il punto materiale da un punto di riferimento arbitrario, O, a P, abbiamo:

$$\boxed{L_{AB} = V(B) - V(A)}$$

Tipici punti di riferimento sono l'origine, oppure un punto all'infinito.

Esempio Potenziale della forza peso



$$V(P) = f(O,P) = \int_O^P \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_O^P m\vec{g} \cdot d\vec{s} = -mg \int_0^P dy = -mg y_P$$

$$\Rightarrow \boxed{V(P) = -mg\,y_P}$$ Potenziale della forza peso

Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Per un campo di forze conservativo:

$$L_{AB} = V(B) - V(A)$$

In generale:

$$L_{AB} = K_B - K_A$$

Abbiamo quindi, per il moto di un punto materiale in un campo conservativo:

$$K_B - K_A = V_B - V_A$$

ovvero:

$$K_B - V_B = K_A - V_A$$

Quindi, se un punto materiale si muove in un campo di forze conservative, abbiamo:

$$K - V = \text{costante}.$$

Per comodità introduciamo:

$$\boxed{U(P) = -V(P)}$$ Energia potenziale del campo conservativo

Inoltre, definiamo:

$$\boxed{E = K + U}$$ Energia meccanica

Abbiamo quindi dimostrato che per il moto in un campo di forze conservativo:

$$\boxed{E = \text{costante}}$$ Teorema di conservazione dell'energia meccanica

~~enun~~ - enuncialo a parole in classe -

Nel moto di un punto materiale in un campo di forze conservativo, l'energia meccanica del punto materiale è costante (l'energia si conserva).

NOTA

Per un campo di forze conservativo:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = V(B) - V(A)$$

$$\Rightarrow \quad dL = \vec{f} \cdot d\vec{s} = dV$$

ma sappiamo che:

$$dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

da cui:

$$\boxed{\vec{f} = \vec{\nabla} V}$$

Essendo $U = -V$ abbiamo:

$$\boxed{\vec{f} = -\vec{\nabla} U}$$

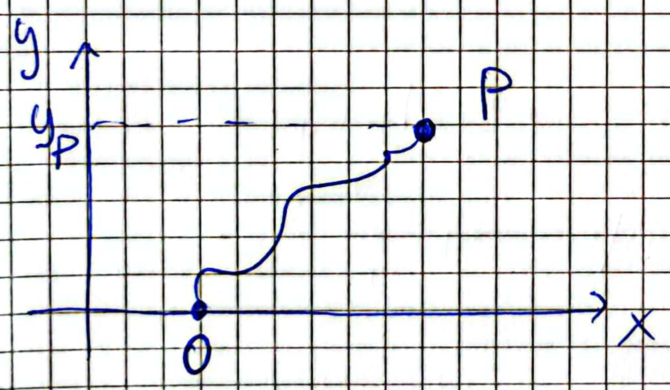
oppure, esplicitando le componenti cartesiane:

$$\begin{cases} f_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ f_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ f_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Relazione tra componenti della forza ed energia potenziale.

Queste saranno utili quando studieremo le posizioni di equilibrio.

Esempio: energia potenziale della forza peso



$L_{OP} = V(P) = -mgy_P$

calcolato prima

da cui:

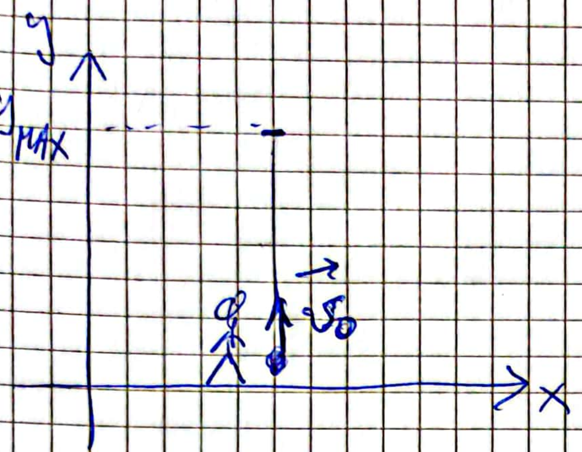
$$\boxed{U(P) = mgy_P}$$

L'energia meccanica di un punto materiale ~~xxx~~ nel campo della forza peso è dunque:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh}$$

h = distanza dal suolo

Esempio



Consideriamo il lancio di una palla in verticale, con velocità iniziale $\vec{v}_0$. Calcoliamo la quota massima, y_{MAX}, raggiunta dalla palla.

Usiamo il teorema di conservazione dell'energia:

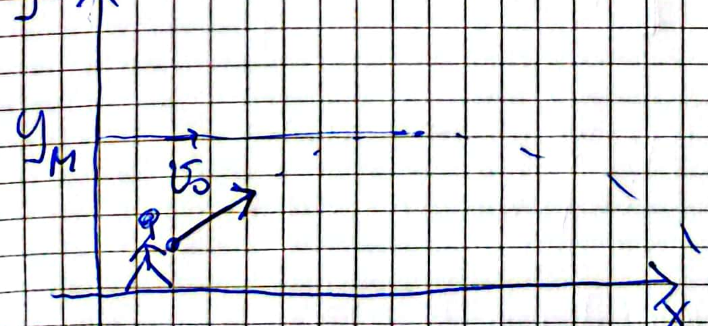
$$E_{in} = K_{in} + U_{in} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{(la quota iniziale è 0)}$$

$$E_{fin} = K_{fin} + U_{fin} = m g y_M \quad (\text{se } y = y_M \text{ la } \vec{v} = 0)$$

$$E_{in} = E_{fin} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = m g y_M \Rightarrow \boxed{y_M = \frac{v_0^2}{2g}}$$

NOTA y_M non dipende dalla massa della palla.

Esempio



Come nell'esempio precedente.

$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$

quindi:

$$\begin{cases} K_{in} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (v_{0x}^2 + v_{0y}^2) \\ U_{in} = 0 \end{cases}$$

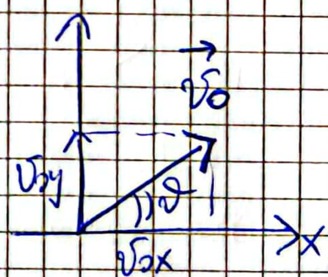
$$\begin{cases} K_{fin} = \frac{1}{2} m v_{0x}^2 \\ U_{fin} = mg\, y_M \end{cases}$$

Abbiamo usato il fatto che il moto nella direzione x è rettilineo e uniforme, per cui v_x è costante e uguale a v_{0x} ad ogni istante.

Conservazione energia meccanica:

$$K_{in} + U_{in} = K_{fin} + U_{fin} \Rightarrow \frac{1}{2} m (v_{0x}^2 + v_{0y}^2) = \frac{1}{2} m v_{0x}^2 + mg\, y_M$$

$$\Rightarrow y_M = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

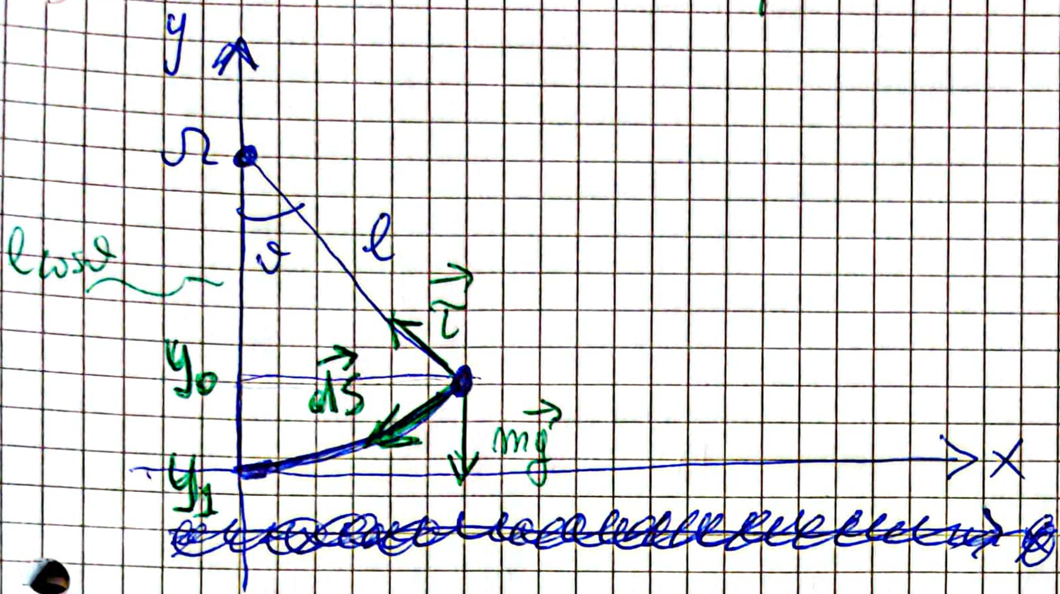


$v_{0y} = v_0 \sin\vartheta$

quindi:

$$\boxed{y_M = \frac{v_0^2 \sin^2\vartheta}{2g}}$$

Esempio: Conservazione dell'energia meccanica nel moto del pendolo semplice



Il lavoro compiuto da $\vec{\tau}$ è identicamente nullo perché $\vec{\tau} \cdot d\vec{s} = 0$ su tutta la traiettoria. Quindi, l'energia potenziale da considerare è solo quella della forza peso.

Quando $\vartheta = \vartheta_M$ la velocità della massa è zero, quindi:

$$E_{in} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{K_{in}}} + U_{in} = U_{in} = mgy_0$$

y_0 = quota iniziale

quando $\vartheta = \vartheta_M$ l'energia è solo potenziale.

Quando $\vartheta = 0$ la velocità della massa è massima:

$$E_{fin} = K_{fin} + U_{fin} = \frac{1}{2} m v^2 + mgy_1$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica otteniamo:

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg(y_0 - y_1).$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \to \text{en. pot. finale} = 0 \\ y_0 = \ell - \ell\cos\vartheta_M = \ell(1-\cos\vartheta_M) \end{cases}$$

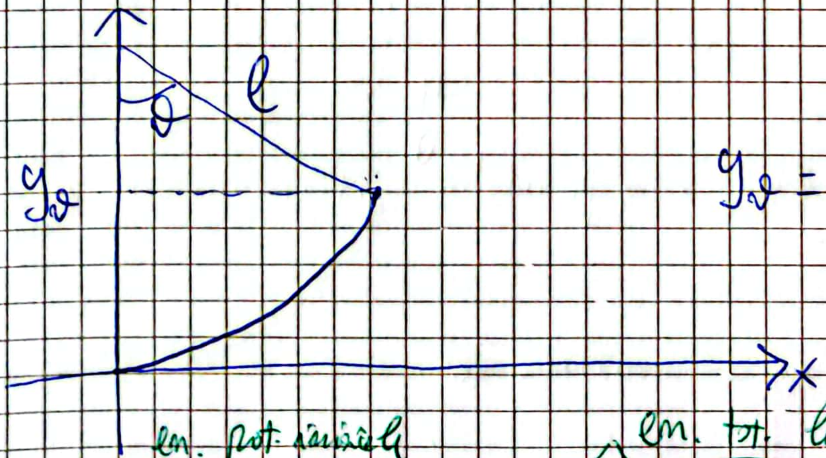
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \boxed{mg\ell(1-\cos\vartheta_M)} \to \text{en. potenziale iniziale}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = 2g\ell(1-\cos\vartheta_M)}$$

Notiamo che nel moto della massa m vi è conversione tra energia potenziale ed energia cinetica.

Più in generale:

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgy = \text{costante} = \underbrace{mg\ell(1-\cos\vartheta_M)}_{\substack{\text{en. pot. in } \vartheta = \vartheta_M \\ \text{dove } v = 0}}$$

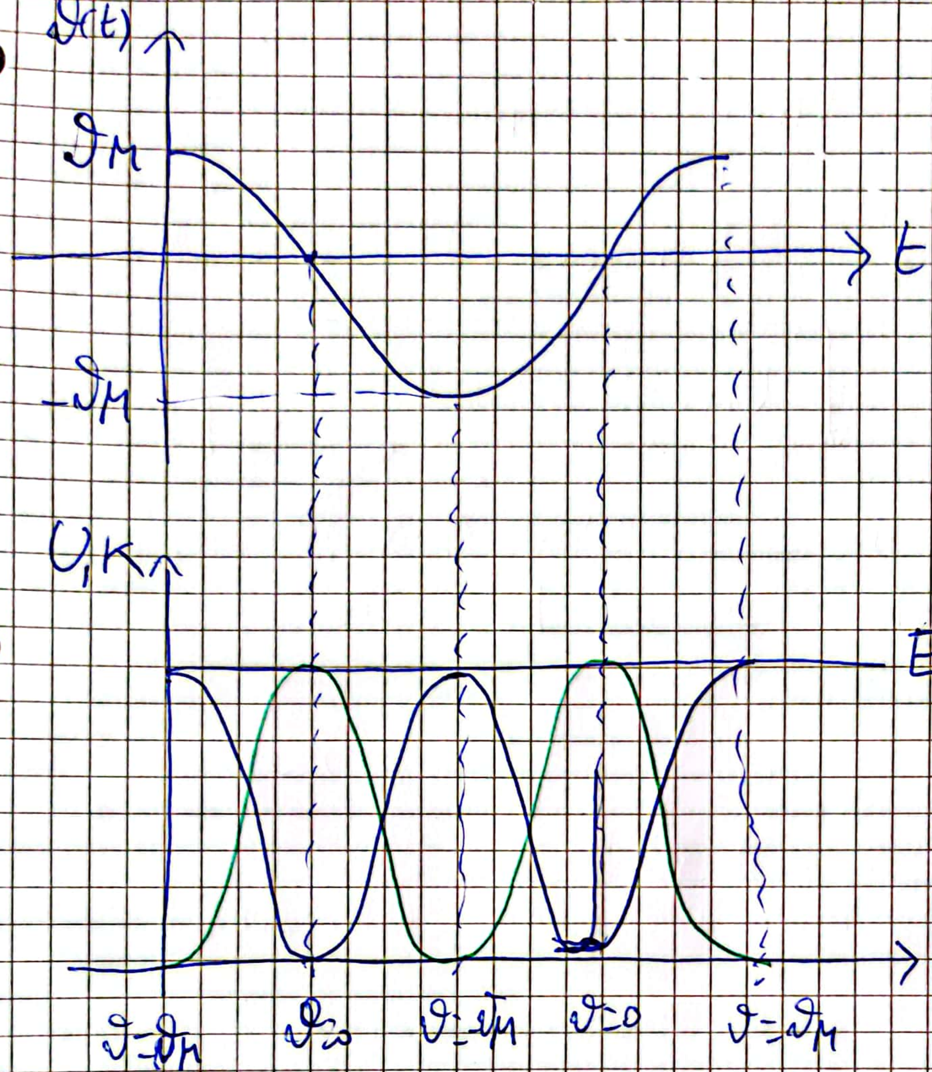


$$y_\vartheta = \ell - \ell\cos\vartheta = \ell(1-\cos\vartheta)$$

$$\boxed{\overbrace{mg\ell(1-\cos\vartheta_M)}^{\text{en. pot. iniziale}} = \overbrace{\frac{1}{2} m v^2 + mg\ell(1-\cos\vartheta)}^{\text{en. tot. lungo la traiettoria}}}$$ EN. TOT. lungo la traiettoria

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = 2g\ell(\cos\vartheta - \cos\vartheta_M)}$$ velocità lungo la traiettoria

Plot di U e K in funzione del tempo



NOTA: U+K costante

Energia meccanica in caso di forze non conservative

Supponiamo che su un punto materiale agiscano sia forze conservative che non conservative:

$$\vec{f} = \vec{f}_C + \vec{f}_{NC}$$

Allora:

$$L_{AB} = K_B - K_A = \int_A^B (\vec{f}_C + \vec{f}_{NC}) \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{f}_C \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{f}_{NC} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_A^B \vec{f}_C \cdot d\vec{s} = V(B) - V(A) = U(A) - U(B)$$

quindi:

$$K_B - K_A = U(A) - U(B) + \int_A^B \vec{f}_{NC} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow (K_B + U_B) - (K_A + U_A) = \int_A^B \vec{f}_{NC} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow E_B - E_A = \int_A^B \vec{f}_{NC} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_A^B \vec{f}_{NC} \cdot d\vec{s} = L_{AB}^{NC}$$ lavoro delle forze non conservative.

Quindi abbiamo:

$$\boxed{\Delta E = L_{AB}^{NC}}$$

Abbiamo dimostrato che in presenza di forze non conservative, la variazione di energia meccanica di un punto materiale è uguale al lavoro delle forze non conservative che agiscono sul punto materiale.

Condizioni di equilibrio

- EQUILIBRIO: ponendo in una posizione un punto materiale in quiete, questo rimane in quiete indefinitamente.

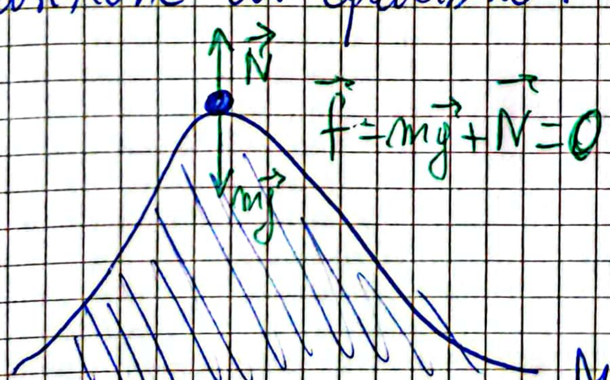
Ci chiediamo quali siano le $\boxed{\text{condizioni dinamiche}}$ di equilibrio: quali condizioni devono soddisfare le forze agenti su un punto materiale affinché questo sia in equilibrio.

- Ovviamente, affinché una posizione sia di equilibrio, è necessario che il risultante delle forze sul punto materiale in quella posizione sia nullo:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} = 0 \qquad (*)$$

Infatti, posto in una posizione un punto materiale in quiete, affinché questo rimanga in quiete deve essere $\vec{a} = 0$, e ciò si verifica solo se la $(*)$ è soddisfatta.

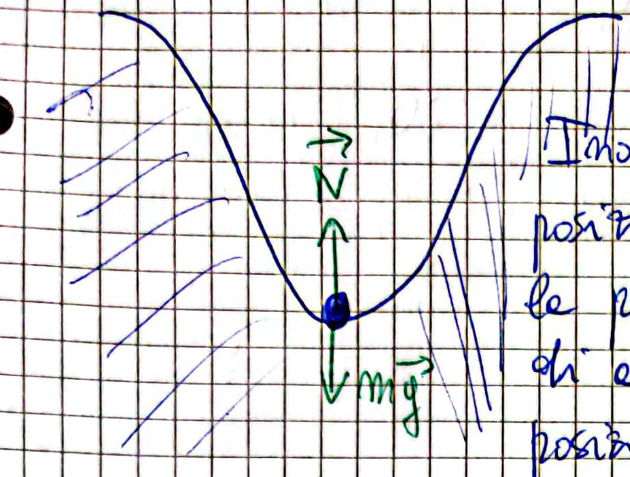
- La $(*)$ però non è sufficiente a caratterizzare completamente una posizione di equilibrio.



La cima della collina è un punto di equilibrio. Ma se spostiamo la palla, questa si allontana indefinitamente dalla cima.

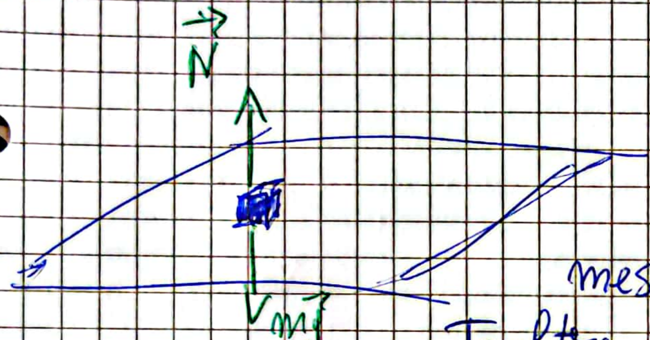
- EQUILIBRIO INSTABILE

EQUILIBRIO STABILE



La palla a valle è in equilibrio. Inoltre, se la allontaniamo dalla posizione a valle, la palla torna verso la posizione di equilibrio (in assenza di attrito, oscilla intorno alla posizione di equilibrio).

EQUILIBRIO INDIFFERENTE



La posizione in cui l'oggetto è messo sul tavolo è di equilibrio. Inoltre, dovunque lo spostiamo sul tavolo, l'oggetto rimane in equilibrio.

- Condizioni di equilibrio per campi di forze conservative.

Consideriamo per semplicità un moto unidimensionale lungo l'asse x, in un campo di forze conservativo. Allora

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Per quanto visto sopra, le posizioni di equilibrio corrispondono alla condizione

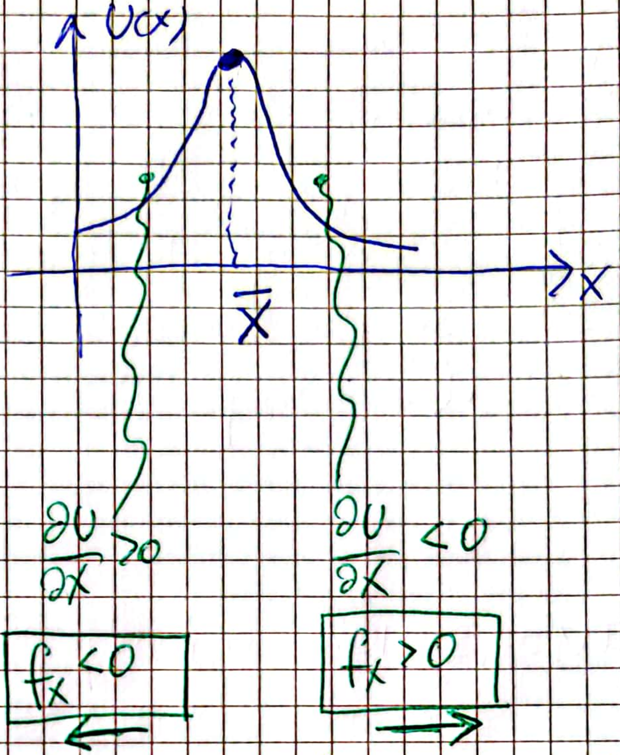
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Ovvero, le posizioni di equilibrio corrispondono ai punti stazionari del potenziale.

Possiamo avere tre tipi di punti stazionari di U.

- MASSIMO RELATIVO

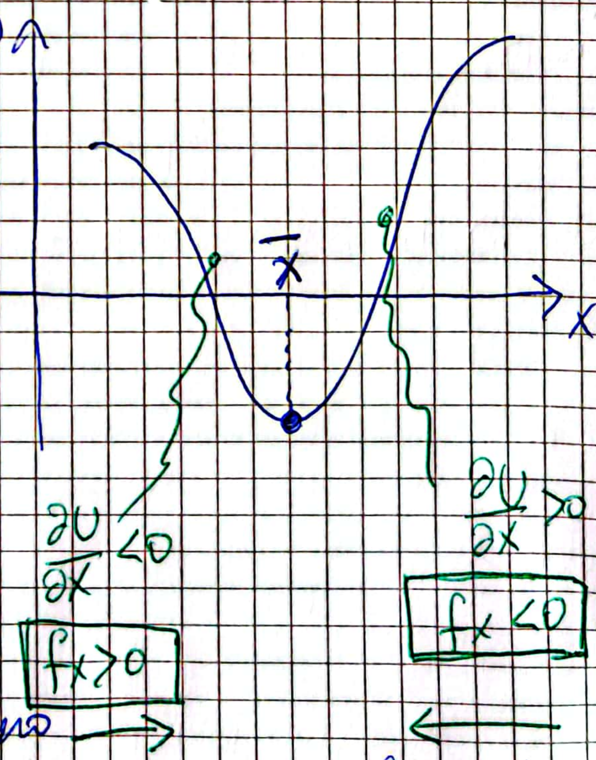
$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}=0$$



La forza nell'intorno di $\bar{x}$ tende ad allontanare il punto materiale da $\bar{x}$, in quanto le accelerazioni subite dal punto una volta allontanato da $\bar{x}$ sono nel verso di f_x. $\bar{x}$ è dunque un punto di equilibrio instabile.

- MINIMO RELATIVO

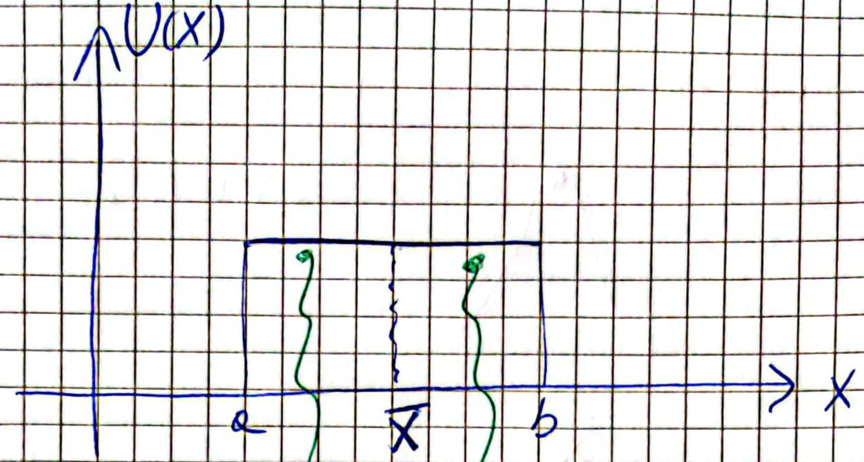
$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}=0$$



Spostando il punto materiale da $\bar{x}$, questo accelera nella direzione di $\bar{x}$. Le forze quindi richiamano il punto a $\bar{x}$. $\bar{x}$ è dunque posizione di equilibrio stabile.

U COSTANTE

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}=0$$



$$\frac{\partial U}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial U}{\partial x}=0$$

$$\boxed{f_x=0} \qquad \boxed{f_x=0}$$

La forza risultante è nulla in tutto l'intervallo (a,b), per cui spostando il punto da $\bar{x}$, questo non sentirà alcuna forza ed è quindi un punto di equilibrio indifferente.

Ricapitolando:

U MASSIMA	Equilibrio instabile
U MINIMA	Equilibrio stabile
U COSTANTE	Equilibrio indifferente

Esempio: forze intermolecolari

$$U(r)=A\left[\left(\frac{B}{r}\right)^{12}-\left(\frac{B}{r}\right)^{6}\right]$$

LENNARD-JONES

$B=3\times10^{-10}\ m$

Calcoliamo la posizione di equilibrio.

Condizione di equilibrio:

$$0 = \frac{dU}{dx} = A\left[-12B^{12}x^{-13} + 6B^{6}x^{-7}\right]$$

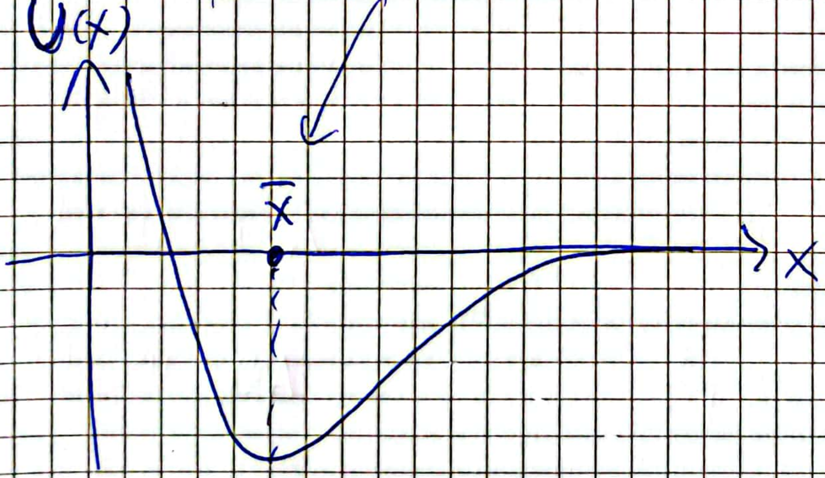
$$\Rightarrow -\frac{12B^{12}}{x^{13}} + \frac{6B^{6}}{x^{7}} = 0 \Rightarrow \frac{-12B^{12}+6B^{6}x^{6}}{x^{13}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6B^{6}}{x^{13}}\left(-2B^{6}+x^{6}\right) = 0 \Rightarrow x^{6} = 2B^{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2^{1/6}B}$$ posizione di equilibrio intermolecolare

Usando il valore di $B = 3\times10^{-10}\,m$ troviamo

$$\boxed{\bar{x} = 3.37\times10^{-10}\,m}$$



$x\to0$: domina $1/x^{12}$

$x\to\infty$: domina $1/x^{6}$

$$U(\bar{x}) = A\left[\left(\frac{B}{2^{1/6}B}\right)^{12} - \left(\frac{B}{2^{1/6}B}\right)^{6}\right] = A\left[\frac{1}{2^{2}} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= A\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{A}{4} \Rightarrow \boxed{U(\bar{x}) = -\frac{A}{4}}$$

Potenza

$$\boxed{W = \frac{dL}{dt}}$$

POTENZA
Lavoro per unità di tempo

Unità di misura : $\boxed{W = J/s}$ WATT

Osserviamo che

$$dL = \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

da cui

$$W = \frac{\vec{f} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = \vec{f} \cdot \vec{v}}$$

. Esempio Calcoliamo l'energia necessaria ad accelerare un'auto da 0 a 100 km/h.

$$L = \Delta K = \frac{1}{2} M v_{fin}^2 = \frac{1}{2} \times 1500\,kg \times \left(100 \frac{km}{h}\right)^2$$

$$= 750\,kg \times \left(100 \times \frac{1000\,m}{3600\,s}\right)^2 = 750\,kg \times (27.8)^2 \frac{m^2}{s^2}$$

$$\simeq 5.8 \times 10^5\,J$$

Calcoliamo ora l'energia necessaria ad accelerare la stessa auto ad una velocità $\boxed{v_{fin} = 0.1c}$

$$c = 3 \times 10^8 \, m/s$$

$$L = \Delta K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \times 1750 \, kg \times \left(0.3 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$\simeq 6.8 \times 10^{17} \, J$$

Questa stima mostra l'ordine di grandezza dell'energia richiesta per accelerare un veicolo a velocità utili per i viaggi interstellari. Noto quanto sia molto più alta dell'energia necessaria ad accelerare un'auto a velocità ordinarie. Questo mostra come un viaggio interstellare richiede uno sforzo tecnologico al momento fuori dalla portata della nostra civiltà.