$\Sigma = \{a, b, c \quad , z\}$ $\quad \Sigma = \{0, 1\}$

$\Sigma = \{A, B, C\}$

stringhe (o parole) su Σ

$x = 001111$ $\quad y = abbac$

$2^n \quad n^{|\Sigma|} \quad |\Sigma| = k \quad \cancel{\sum |\Sigma|^n} \quad \sum_{n=0} k^n$

ε epsilon ⟶ parola vuota

Def. Dato un alfabeto Σ, ~~una stringa su Σ~~ l'insieme delle stringhe su Σ ~~si~~ indica con Σ^* ed è così definito:

- $\varepsilon \in \Sigma^*$

$\forall a \in \Sigma,\ x \in \Sigma^* \qquad xa \in \Sigma^*$

Es: $\Sigma = \{0, 1, 2\}$

01

- $\varepsilon \in \Sigma^*$
- $0 \in \Sigma$ $\qquad \varepsilon 0 \in \Sigma^*$
- $0 \in \Sigma^*$
- $1 \in \Sigma$ $\qquad 01 \in \Sigma^*$

01 $\quad$ 10

$\varepsilon x = x$

$x \varepsilon = x$

$(\Sigma \subseteq \Sigma^*)$

$x \varepsilon = x$

$\Sigma = \{0, 1, 2\}$

$\forall a \in \Sigma, \quad a \in \Sigma^*$

$\Sigma \not\subseteq \Sigma^*$?

$a \in \Sigma, \quad \varepsilon \in \Sigma^*$

$\varepsilon a = a \in \Sigma^*$

$01 \in \Sigma^* \qquad 01 \notin \Sigma \qquad \varepsilon \in \Sigma^* \qquad \varepsilon \notin \Sigma$

$\cancel{\{0, 1\} \in \Sigma^*} \qquad 0 \in \Sigma^*$

$1 \in \Sigma^*$

$\{0, 1\} \subseteq \Sigma^*$

$\{0, 1\} \qquad 01$

Concatenazione fra stringhe

Siano $x, y \in \Sigma^*$, la concatenazione fra x e y, si indica con $x \cdot y$ ed è così definita

$x \cdot y = xy$

- L'operazione è interna
- $\exists$ l'elemento neutro $\qquad \varepsilon$

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad$ MONOIDE LIBERO

$= \quad \varepsilon \cdot x = x \cdot \varepsilon \cdot \qquad$ sì

$$\boxed{x \cdot y = y \cdot x \qquad \forall\, x, y \in \Sigma^*}$$

$x = 00$ $\qquad$ $x \cdot y = y \cdot x$

$y = 11$ $\qquad$ $0011 \neq 1100$

$x = 00$, $y = 0$ $\qquad$ $x \cdot y = y \cdot x$

Def: Sia Σ alfabeto, si definisce <u>linguaggio formale</u> ogni sottoinsieme di Σ^*.

$\Sigma_1 = \{0, 1\}$ $\qquad$ $\Sigma_2 = \{a, b\}$ $\qquad$ $\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$001 \in \Sigma_1^*$ $\qquad$ $ab \in \Sigma_2^*$

$001ab \notin \Sigma_1^*, \Sigma_2^*, \Sigma_1^* \cap \Sigma_2^*,$

$001ab \in \Sigma_3^* = (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$

$\emptyset$ è un linguaggio $\leadsto \Lambda$

$\{\varepsilon\} \neq \emptyset$

$\Sigma = \{a, b\}$ $\qquad$ $L = \{a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$

$abb \leadsto |abb| = 3$

Def: La lunghezza di una stringa $x \in \Sigma^*$ si indica con $|x|$ ed è così definita

- $|\varepsilon| = 0$
- $|xa| = |x| + 1$ $\qquad$ $x \in \Sigma^*$ $a \in \Sigma$

OPERAZIONI FRA LINGUAGGI

OPERAZIONI FRA LINGUAGGI

$\cup, \cap, \quad \Sigma^* \setminus L \simeq L^c \simeq \bar{L}$

CONCATENAZIONE

Def: Dati due linguaggi L_1, L_2 la concatenazione di L_1 ed L_2 si denota con $L_1 \cdot L_2$ ed è così definita

$$L_1 \cdot L_2 = \{ x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in L_1, \; x_2 \in L_2 \}$$

$L_1 = \{a, ab\} \qquad L_2 = \{bb, ba\}$

$L_1 \cdot L_2 = \{ abbb, abba, aba, abba \}$

$|L_1 \cdot L_2| = |L_1| + |L_2|$? NO

$L_1 = \{a, ab, aba\} \qquad L_2 = \{bb, ba\}$

$L_1 = \{a, ab\} \qquad L_2 = \{a, \cancel{ba}\}$

$aa, aba, aba, abba \in L_1 L_2$

$L_1 \cdot L_2 \ni a \; ba$

$L_1 \cdot L_2 \ni ab \cdot a$

$|L_1 \cdot L_2| = 3$

$L_1 = \{a\} \qquad L_2 = \{b, bb, bbb, \ldots\} = \{ b^n / n \geq 1 \}$

" $|L_1 \cdot L_2|$ è infinito " ?

$x \in \Sigma^*, \quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots \cdot x}_{n\text{-volte}}$

$x^0 = \varepsilon$

Def: Sia $x \in \Sigma^*$, la potenza ennesima di x, con $n \geq 0$, è così definita

- $x^0 = \varepsilon$
- $x^{n+1} = x \cdot x^n \quad \forall\, n \geq 0$

$L_1 \cdot L_2$

$L_1 \subseteq \Sigma_1^*$, $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$

$L_1 \cdot L_2 \subseteq (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$

$L_1 = \{a, ab\} \qquad \Sigma_1 = \{a, b\} \qquad L_1 \subseteq \Sigma_1^*$

$L_2 = \{00, 10\} \qquad \Sigma_2 = \{0, 1\} \qquad L_2 \subseteq \Sigma_2^*$

$L_1 \cdot L_2 = \{a00, ab00, a10, ab10\}$

$L_1 \cdot L_2$ è un linguaggio su $\{a, b, 0, 1\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$L_1 \cdot L_2 \subseteq (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$

$L_1 \subseteq \Sigma_1^* \qquad L_2 = \Lambda$

$L_1 \cdot L_2 = \cancel{L_1}\ \{\varepsilon\}\ \Lambda$

$\Lambda = \{\varepsilon\}$? no

$L_1 \cdot L_2 = \{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$

$L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$? Se $L_2 = \{\varepsilon\}$ allora

$L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$

Ip. $L_2 = \{\varepsilon\}$

TESI $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$

<u>Dim</u>: $\forall x \in L_1$, si ha $x \in L_1 \cdot L_2$

Poichè $\varepsilon \in L_2$ $x = \underset{L_1}{\underset{\cap}{x}} \cdot \underset{L_2}{\underset{\cap}{\varepsilon}} \in L_1 \cdot L_2$

$L_1 = L_1 \cdot L_2$

$L_1 \not\subseteq L_1 \cdot L_2$

In generale $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$? no

Se L_2 contiene ε allora $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$

Se $L_2 = \{\varepsilon\}$ allora $L_1 = L_1 \cdot L_2$

<u>Def</u>: Sia $L \subseteq \Sigma^*$. La potenza ennesima di L, si denota con L^n ed è così definita

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^{n+1} = L \cdot L^n \quad \forall n \geq 0$

$L = \{ab, bbb\}$

$L^3 = L^{2+1} = L \cdot L^2 = L \cdot \{abab, abbbb, bbbab, bbbbbb\} =$

$L^2 = L^{1+1} = L \cdot L^1 = L \cdot L = \{abab, abbbb, bbbab, bbbbbb\}$

$L^2 = L^{1+1} = L \cdot L^1 = L \cdot L = \{abab, abbbb, bbbab, bbbbbb\}$

$L^1 = L^{0+1} = L \cdot L^0 = L \cdot \{\varepsilon\} = L$

$\leadsto \{abababab, abababbb, \underbrace{ab}\,\underbrace{bbb}\,\underbrace{ab} \ldots \}$

$L \leadsto L^n$ $\qquad\qquad L_1 \cdot L_2$

CHIUSURA di KLEENE

Def: Sia $L \subseteq \Sigma^*$. La chiusura riflessiva di KLEENE di L si denota con L^* ed è così definita

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

$L = \{a\}$

$L^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$

$L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots$

L^* è infinito?

Se $L = \{\varepsilon\}$ allora $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots =$

$= \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} \cup \ldots = \{\varepsilon\}$

Se $L = \Lambda$ allora $L^* = \{\varepsilon\}$

$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots = \{\varepsilon\} \cup \Lambda \cup \Lambda \ldots = \{\varepsilon\}$

$\varepsilon \in L^*$?

Σ^* $\qquad\qquad L = \Sigma$

Def: Dato $L \subseteq \Sigma^*$, la chiusura non riflessiva, si denota con L^+ ed è così definita:

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n$$

Dato $L \subseteq \Sigma^*$, $\varepsilon \in L^+$?

Se $\varepsilon \in L \Rightarrow \varepsilon \in L^+$

Se $\varepsilon \notin L \Rightarrow \varepsilon \notin L^+$