Metodi Matematici e Statistici

Dr. Giovanni Nastasi
giovanni.nastasi@unict.it

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Catania, Italy

CdS in Informatica
A.A. 2023-2024

Catene di Markov

Introduzione

I processi stocastici sono ampiamente usati per modellizzare sistemi e fenomeni in cui appaiono variabili casuali. La teoria dei processi stocastici è basata sulla teoria della probabilità.

Una delle differenze più importanti tra modelli i deterministici e quelli stocastici è che i modelli deterministici predicono i risultati fornendo valori netti, mentre quelli stocastici forniscono la probabilità dei risultati predetti.

I processi stocastici hanno molte applicazioni in discipline come la fisica (dinamica di un gas, simulazioni di fenomeni quantistici, modellizzazione di materiali semiconduttori), la biologia (modelli di crescita di batteri, modelli epidemici), l'informatica (crittografia), la finanza (fluttuazioni dei mercati finanziari), ecc.

Processi stocastici

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e sia T un insieme di indici totalmente ordinato (tipicamente $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ o loro sottoinsiemi).

Un **processo stocastico** è una famiglia di variabili aleatorie definite in $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dipendenti da un parametro $t \in T$, cioè un insieme del tipo

$$\left\{X(t) \, : \, t \in T\right\}.$$

Spesso si utilizza la notazione X_t e il processo stocastico si indica con $(X_t)_{t\in T}$.
L'insieme T è detto insieme dei tempi in quanto nei processi stocastici solitamente l'indice rappresenta il tempo. I processi stocastici si possono pensare come variabili aleatorie che evolvono nel tempo.

Se T è finito o numerabile allora il processo si dice **a tempi discreti** altrimenti **a tempo continuo**.

Se X_t è una variabile aleatoria discreta per ogni $t \in T$ allora $(X_t)_{t\in T}$ è detto processo **discreto** altrimenti **continuo**.

Catene di Markov a tempi discreti

Consideriamo un processo stocastico a tempi discreti $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove le variabili aleatorie X_n sono discrete e a valori in un insieme E, detto **insieme degli stati**. Senza perdita di generalità possiamo fissare l'attenzione su due casi: $E = \mathbb{N}$ oppure $E = \{1, 2, \ldots, N\}$.

Definizione. Si dice che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una **catena di Markov** a tempi discreti se gode della proprietà di assenza di memoria (detta anche proprietà di Markov), cioè

$$P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) =: p_{ij}(n).$$

La catena è detta **omogenea** nel tempo se $p_{ij}(n)$ non dipende da n. Si può definire la matrice $P = (p_{ij})$ detta **matrice di transizione**.

La matrice di transizione P gode delle seguenti proprietà.

- $p_{ij} \geq 0$ per ogni $i, j \in E$.
- Per ogni riga $i \in E$, si ha che $\sum_{j\in E} p_{ij} = 1$ (P è detta *matrice stocastica*).
  Infatti, $\sum_{j\in E} p_{ij} = P\left(X_{n+1} \in E \,|\, X_n = i\right) = 1$.

Matrice di transizione a m passi

Sia

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = j \,|\, X_n = i).$$

Si definisce la matrice di transizione a m passi, cioè $P^{(m)} = (p_{ij}^{(m)})$.
Abbiamo che

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(m)} &= \frac{P(X_{n+m} = j,\, X_n = i)}{P(X_n = i)} = \sum_{h \in E} \frac{P(X_{n+m} = j,\, X_{n+m-1} = h,\, X_n = i)}{P(X_n = i)} \\
&= \sum_{h \in E} \frac{P(X_{n+m} = j,\, X_{n+m-1} = h,\, X_n = i)}{P(X_{n+m-1} = h,\, X_n = i)} \frac{P(X_{n+m-1} = h,\, X_n = i)}{P(X_n = i)} \\
&= \sum_{h \in E} P(X_{n+m} = j \,|\, X_{n+m-1} = h,\, X_n = i) p_{ih}^{(m-1)} = \sum_{h \in E} p_{hj} p_{ih}^{(m-1)},
\end{aligned}$$

cioè $P^{(m)} = P^{(m-1)} P$ e iterando

$$P^{(m)} = P^m \qquad \text{(equazione di Chapman-Kolmogorov).}$$

Se v è la distribuzione di X_0, allora la distribuzione di X_n è data da vP^n.

Classificazione degli stati

Siano $i, j \in E$.

- Diremo che lo stato i **comunica** con lo stato j, e indichiamo $i \to j$, se esiste $n > 0$ tale che $p_{ij}^{(n)} > 0$ (altrimenti scriviamo $i \nrightarrow j$).
- Diremo che un sottoinsieme $C \subset E$ è una **classe chiusa** se gli stati di C non comunicano con gli stati del complementare di C.
- Diremo che una classe chiusa C è **irriducibile** se tutti i suoi stati comunicano tra loro.
- Se uno stato costituisce da solo una classe irriducibile esso si dirà **assorbente**.
- Diremo che una catena di Markov è **irriducibile** se tutti gli stati comunicano tra loro (ovvero se E è l'unica classe irriducibile).

Proprietà transitiva. Se $i \to j$ e $j \to h$ allora $i \to h$. Infatti, per ipotesi esistono $n, m > 0$ tali che

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \qquad \text{e} \qquad p_{jh}^{(m)} > 0.$$

Quindi

$$p_{ih}^{(n+m)} = (P^n P^m)_{ih} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kh}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jh}^{(m)} > 0.$$

Classificazione degli stati

Stabilire se uno stato i comunica con un altro stato j è un'operazione che faremo spesso.

Per ogni $j \in E$ sia τ_j il primo istante (a partire dal tempo 1) in cui la catena visita lo stato j. Quindi non conta la posizione iniziale. τ_j può assumera anche valore $+\infty$.

Sia ρ_{ij} la probabilità che la catena visiti prima o poi lo stato j partendo da i.

Uno stato si dice **transitorio** se $\rho_{ii} < 1$, **ricorrente** se invece $\rho_{ii} = 1$. In altre parole, se uno stato è transitorio allora con probabilità strettamente positiva la catena che parte da i non torna più in i.

Proprietà. Se E è finito, uno stato i è transitorio se e solo se esiste uno stato j tale che $i \to j$ ma $j \nrightarrow i$.

Distribuzioni stazionarie

Una distribuzione di probabilità stazionaria rappresenta un punto di "equilibrio" della catena di Markov, cioè è una distribuzione di probabilità che rimane fissa nel tempo.

Supponiamo che E sia finito.
Definizione. Sia (X_n) una catena di Markov a tempi discreti su E, avente P come matrice di transizione. Un vettore di probabilità v si dice **stazionario** se

$$v = vP.$$

Osservazione. Un vettore di probabilità è un vettore con componenti non negative e tali che la loro somma sia 1.

Osservazione. Risolvere l'equazione vettoriale $v = vP$ è equivalente a risolvere il sistema lineare

$$v_j = \sum_{i \in E} v_i p_{ij}, \qquad \forall j \in E.$$

Distribuzioni stazionarie

Definizione. Una distribuzione di probabilità π su E si dice **reversibile** se

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \qquad \forall i, j \in E.$$

Proprietà. Se π è una distribuzione reversibile allora è stazionaria.

Dimostrazione. Per ogni $j \in E$, si ha che

$$(\pi P)_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in E} \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_{i \in E} p_{ji} = \pi_j,$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che P è una matrice stocastica.

Teorema di Markov-Kakutani. Una matrice di transizione P su un insieme finito di stati E ha almeno una distribuzione stazionaria.

Distribuzioni stazionarie

In generale, ci sono esempi di matrici di transizione che hanno più di una distribuzione stazionaria.

Definizione. Una matrice di transizione P si dice **regolare** se esiste un intero $m > 0$ tale che

$$p_{ij}^{(m)} > 0, \qquad \forall i, j \in E.$$

Una catena di Markov si dice regolare se la sua matrice di transizione è regolare.

Osservazione. Si noti che le definizioni di catena irriducibile e regolare non sono uguali. Infatti, una catena è irriducibile se per ogni $i, j \in E$ esiste $m > 0$ tale che $p_{ij}^{(m)} > 0$. Questo valore di m dipende però dalla coppia i, j. Invece la catena è regolare se si può scegliere m che vada bene per tutte le coppie $i, j \in E$.

Teorema di Markov. Una matrice di transizione regolare P su un insieme finito di stati E ha un'unica distribuzione stazionaria π e per di più si ha, per ogni $j \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Distribuzioni stazionarie

Osservazione. Supponiamo di avere una catena di Markov con distribuzione iniziale v, cioè X_0 ha distribuzione v. Di conseguenza, la distribuzione di X_n è vP^n. Pertanto si ha

$$P(X_n = j) = (vP^n)_j = \sum_{i \in E} v_i p_{ij}^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \sum_{i \in E} v_i \pi_j = \pi_j,$$

cioè, qualunque sia la distribuzione iniziale, X_n converge in legge alla distribuzione stazionaria π.

Risulta quindi importante stabilire quando una catena è regolare.

Criterio di regolarità. Se una catena finita è irriducibile e per di più esiste $h \in E$ tale che $p_{hh} > 0$ allora la catena è regolare.

Proprietà. Se P è una matrice di transizione irriducibile su un insieme E finito, allora essa ha un'unica distribuzione stazionaria.

Distribuzioni stazionarie

Come si determina una distribuzione stazionaria?

Osservazione. Sia A una matrice $n \times n$. Si dice che v è autovettore di A se esiste uno scalare λ tale che

$$Av = \lambda v.$$

In alcuni contesti, gli autovettori così definiti si chiamano autovettori destri. Si osservi che v è un vettore colonna. Infatti, si dice che w è un autovettore sinistro di A se esiste uno scalare μ tale che

$$wA = \mu w,$$

ove w è un vettore riga. Prendendo la trasposta di quest'ultima relazione si ha

$$(wA)^T = \mu w^T \qquad \Longrightarrow \qquad A^T w^T = \mu w^T.$$

Confrontando quest'ultima relazione con la prima si osserva che gli autovettori sinistri di A sono gli autovettori (destri) di A^T.

Distribuzioni stazionarie

Come si determina una distribuzione stazionaria?

Primo metodo.

Abbiamo visto che un vettore di probabilità v si dice stazionario se

$$v = vP.$$

Questa relazione è soddisfatta dagli autovettori sinistri di P corrispondenti all'autovalore 1.

Distribuzioni stazionarie

Come si determina una distribuzione stazionaria?

Secondo metodo.

Si simula la catena di Markov mediante il metodo Monte Carlo.

Sia P la matrice di transizione e n la sua dimensione. Sia F il vettore delle frequenza di realizzazione degli stati di E. All'inizio si pone F uguale al vettore nullo di dimensione n.

1. Si genera un intero random j_0 compreso tra 1 e n e si pone $F(j_0) = 1$.
2. Si genera un intero j_k con distribuzione multinomiale $B(1, p)$ ove p è il vettore di probabilità dato dalla j_{k-1}-esima riga di P. Si aggiorna $F(j_k)$ sommandovi 1.
3. Si ripete il punto 2 un numero molto grande di volte N.

La distribuzione stazionaria v si ottiene ponendo

$$v = \frac{F}{N}.$$

Esercizio

Data la matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

dimostrare che ha un'unica distribuzione stazionaria π e determinarla sia analiticamente che con il metodo Monte Carlo confrontando infine i risultati.

Catene di nascita e di morte

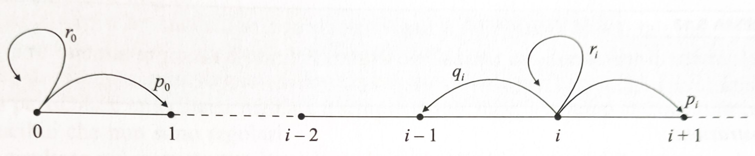
Consideriamo la catena su $E = \{0, 1, \dots, m\}$ definita nel modo seguente.

Si tratta di una catena in cui ad ogni transizione si può fare al più un passo a sinitra o uno a destra oppure restare dove si è. Più precisamente, se ci si trova in i, $0 < i < m$,

$$\begin{cases} q_i & \text{è la probabilità di fare un passo a sinistra} \\ r_i & \text{è la probabilità di rimanere in } i \\ p_i & \text{è la probabilità di fare un passo a destra} \end{cases}$$

con $q_i, r_i, p_i, \geq 0$ e $q_i + r_i + p_i = 1$ per ogni $i = 0, 1, \dots, m$. Inoltre se $i = 0$ non sarà possibile fare un passo a sinistra e se $i = m$ non sarà possibile fare un passo a destra.

La situazione è schematizzata nella figura seguente.



Catene di nascita e di morte

La matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & & \cdots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & q_n & r_n & p_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & \cdots & 0 & q_{m-1} & r_{m-1} & p_{m-1} \\ 0 & & \cdots & & 0 & q_m & r_m \end{pmatrix}$$

P ha una struttura tridiagonale. Si chiamano **catene di nascita e morte**.

Se i numeri $p_0, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_m$ sono strettamente positivi allora tutti gli stati comunicano tra loro e la catena è irriducibile.

Passeggiata aleatoria su un grafo

Sia G un grafo ed E l'insieme dei suoi vertici.
Dato un vertice $i \in E$ sia k_i il numero di vertici di E adiacenti a i, cioè il numero di vertici che sono connessi a i da uno spigolo.
Su E si può considerare la catena di Markov associata alla matrice di transizione P di elementi

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{k_i} & \text{se } j \text{ è adiacente a } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Intuitivamente si tratta della catena di Markov nella quale ad ogni istante si passa dal vertice i ad un vertice j scelto a caso tra quelli adiacenti a i. Per questa ragione si parla di **passeggiata aleatoria su un grafo**.

Passeggiata aleatoria su un grafo

Proprietà. Sia $k = \sum_{i \in E} k_i$. La distribuzione $v_i = \frac{k_i}{k}$ è stazionaria per P. Infatti v è reversibile, perché se i e j sono adiacenti si ha

$$v_i p_{ij} = \frac{k_i}{k} \frac{1}{k_i} = \frac{1}{k}$$

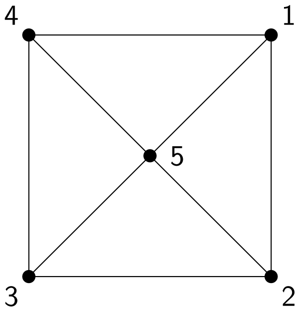
e 0 altrimenti. Inoltre la quantità di destra è simmetrica rispetto a ij, pertanto v è reversibile e quindi stazionaria.

Osservazione. Se il grafo è connesso allora tutti gli stati comunicano tra noro e la catena è irriducibile. Poichè l'insieme degli stati è finito allora la catena ha un'unica distribuzione stazionaria.

Osservazione. Se il grafo è connesso e per di più esiste almeno un vertice connesso a se stesso con uno spigolo allora la catena è regolare per il criterio di regolarità.

Esercizio

Consideriamo la passeggiata aleatoria sul grafo della figura seguente.



Determinare la matrice di transizione della catena di Markov associata, dimostrare che la catena è regolare e determinare la distribuzione invariante sia analiticamente che con il metodo Monte Carlo.

Catene di Markov con stati numerabili

Prendiamo adesso in esame le catene di Markov il cui insieme degli stati E non sia necessariamente finito ma si può avere una infinità numerabile di stati.

Passeggiata aleatoria. Sia $E = \mathbb{Z}$ e supponiamo che un individuo si trovi nella posizione $x = 0$. A intervalli di tempo regolari $\tau > 0$ egli può compiere un passo a destra con probabilità $p \in]0, 1[$ oppure un passo a sinistra con probabilità $q = 1 - p$. Sia $h > 0$ l'ampiezza del passo spaziale. Supponiamo che l'individuo compia N passi.

Osserviamo che la probabilità di compiere un passo non è influenzata dai passi precedenti, pertanto si tratta di una catena di Markov con stati numerabili.

Indichiamo con $p(x, t)$ la probabilità che l'individuo si trovi in $x = mh$, per qualche $m \in \mathbb{Z}$ al tempo $t = N\tau$. Sia k un intero non negativo $0 \leq k \leq N$. La probabilità che l'individuo abbia compiuto k passi a destra dall'origine segue la distribuzione binomiale, cioè vale

$$\binom{N}{k} p^k q^{N-k}.$$

Catene di Markov con stati numerabili

Osserviamo che la posizione m è data dal numero di passi a destra meno il numero di passi a sinistra, cioè

$$m = k - (N - k) = 2k - N.$$

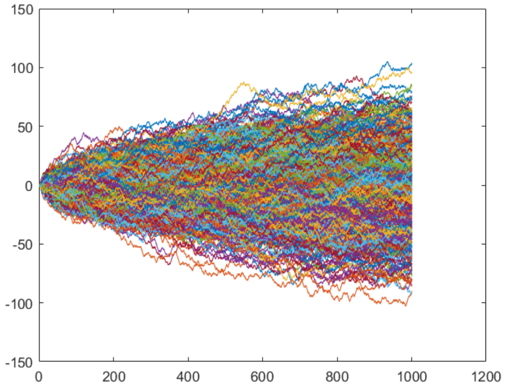
Quindi la probabilità $p(x, t)$ è data da

$$p(x,t) = p(mh, N\tau) = \binom{N}{(N+m)/2} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}},$$

ove $(N + m)/2$ è intero, altrimenti la probabilità è zero.

Infatti, se N è pari le posizioni possibili sono solo quelle di posto m pari, invece se N è dispari sono consentite solo le posizioni di posto dispari. Quindi la somma $N + m$ sarà sempre pari.

Catene di Markov con stati numerabili



Realizzazioni di una passeggiata aleatoria con $p = q = 1/2$.

Nel caso simmetrico, cioè $p = q = 1/2$, si può dimostrare che per $h \to 0^+$ e $\tau \to 0^+$ con $\frac{h^2}{\tau} = 2D =$ costante, si ha che

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Quindi per ogni t fissato, la distribuzione delle posizioni segue approssimativamente una distribuzione normale $N(0, 2Dt)$.

Catene di Markov a tempo continuo

Consideriamo un processo stocastico a tempo continuo $(X_t)_{t\geq 0}$. L'insieme degli stati E può essere sia finito che numerabile.

Definizione. Si dice che $(X_t)_{t\geq 0}$ è una **catena di Markov** a tempo continuo se gode della proprietà di assenza di memoria, cioè per ogni n-upla di tempi $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ e per ogni n-upla di stati $i_1, i_2, \ldots, i_n \in E$ si ha che

$$P(X_{t_n} = i_n \,|\, X_{t_1} = i_1,\, X_{t_2} = i_2,\, \ldots,\, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = P(X_{t_n} = i_n \,|\, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}).$$

Definizione. Sia $(X_t)_{t\geq 0}$ una catena di Markov a tempo continuo. Essa si dice omogenea se

$$P(X_{t+s} = j \,|\, X_s = i) = P(X_t = j \,|\, X_0 = i)$$

per ogni $i, j \in E$. In tal caso, le funzioni

$$p_{ij}(t) = P(X_t = j \,|\, X_0 = i)$$

costituiscono gli elementi della **matrice di transizione** in un intervallo di tempo di ampiezza t.

Catene di Markov a tempo continuo

Nel seguito si prenderanno in esame solo processi omogenei.

Se inizialmente, per $t = 0$, il processo si trova nello stato i_0, cioè $X_0 = i_0$, indichiamo con $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ gli istanti aleatori, che supponiamo discreti, in cui si verificano i cambiamenti di stato. Allora le variabili aleatorie

$$T_1 = \tau_1, \qquad T_2 = \tau_2 - \tau_1, \qquad \ldots, \qquad T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$$

costituiscono un processo stocastico continuo a parametro discreto detto **processo dei tempi di attesa** relativo al processo di Markov X_t.

Supponiamo che nell'intervallo di tempo $[0, s]$ il processo X_t non lasci lo stato i_0. Qual è la probabilità che ciò non avvenga neanche nell'intervallo $(s, s+t)$?

$$P(T_1 > s + t \,|\, T_1 > s) = P(X_{t+s} = i_0 \,|\, X_s = i_0) = P(X_t = i_0 \,|\, X_0 = i_0) = P(T_1 > t),$$

poiché X_t è omogeneo.

Catene di Markov a tempo continuo

Possiamo generalizzare ottenendo

$$P(T_n > s + t \,|\, T_n > s) = P(T_n > t)$$

per ogni $s, t \geq 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si osserva quindi che le variabili aleatorie T_n godono della proprietà di assenza di memoria e quindi seguono una distribuzione esponenziale, cioè $T_n \sim \mathrm{EXP}(\lambda_n)$, per qualche $\lambda_n > 0$.

Teorema. Sia $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ il processo dei tempi di attesa di un processo di Markov omogeneo a parametro continuo $(X_t)_{t \geq 0}$ con $T_n \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ per ogni n e per un certo $\lambda > 0$. Se $N(t)$ è, per ogni $t \geq 0$, il numero aleatorio che conta i cambiamenti di stato di $X(t)$ nell'intervallo di tempo $[0, t]$ si ha

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

cioè $N(t)$ ha distribuzione di Poisson con valor medio λt.

Generazione di numeri pseudo-casuali con distribuzione di Poisson

Adesso siamo pronti per poter generare numeri pseudo-casuali con distribuzione di Poisson.

Sia $\lambda > 0$.

Generiamo una successione di numeri pseudo-casuali con distribuzione esponenziale di parametro λ,

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \sim \mathrm{EXP}(\lambda).$$

Allora, per quanto appena visto, il numero di cambiamenti di stato nell'intervallo di tempo $[0, 1]$ segue una distribuzione di Poisson di parametro λ.

Quindi occorre contare quanti cambiamenti di stato sono avvenuti, cioè calcolare la somma $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_k$ finché essa non superi 1. Il numero $k - 1$ rappresenta il numero pseudo-casuale con distribuzione di Poisson cercato.

Catene di nascita e di morte a tempo continuo

Una catena di nascita e di morte a tempo continuo è un processo di Markov a tempo continuo. Sia i_0 il numero di individui all'istante $t = 0$. Ad ogni cambiamento di stato il numero di individui può aumentare o diminuire di una unità. Sia $\lambda > 0$ il tasso di nascita e $\mu > 0$ quello di morte. In un piccolo intervallo di tempo Δt la probabilità di transizione è data da

$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} \lambda i \Delta t + o(\Delta t) & j = i + 1 \\ \mu i \Delta t + o(\Delta t) & j = i - 1 \\ 1 - (\lambda + \mu) i \Delta t + o(\Delta t) & j = i \\ o(\Delta t) & j \neq i - 1, i, i + 1 \end{cases}$$

Quindi p_{ij} rappresenta la probabilità di passare da un numero di individui i a un numero j nell'intervallo Δt.

Catene di nascita e di morte a tempo continuo

Come è possibile simulare una catena di questo tipo?

Osservando le probabilità di transizione si ha che, se al tempo t il numero di individui è pari ad i, il tempo in cui avviene un cambiamento di stato ha distribuzione $\mathrm{EXP}((\lambda+\mu)i)$.

Una volta stabilito il tempo in cui si ha un cambiamento di stato con distribuzione binomiale si ha una nascita con probabilità $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ oppure una morte con probabilità $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Si itera la procedura fintantoché non si raggiunge un tempo prefissato.

Riferimenti bibliografici

1. V. Romano, Metodi matematici per i corsi di ingegneria, Città Studi, 2018.
2. P. Baldi, Calcolo delle probabilità e statistica, Mc Graw-Hill, Milano, 1992.
3. R. Scozzafava, Incertezza e probabilità, Zanichelli, 2001.
4. D. C. Montgomery, G. C. Runger, Applied statistics and probability for engineers, 7th Edition, J. Wiley, 2018.