Variabili aleatorie discrete

martedì 12 settembre 2023 09:17

Distribuzione binomiale

Descrive un fenomeno che avviene secondo uno schema successo - insuccesso in cui si ripetono n prove indipendenti con due soli esiti

Es: Lancio di una stessa moneta n volte

Valutiamo la distribuzione di probabilità

Siano: n numero di prove

K numero di successi $(\Rightarrow K = 0, 1, 2, \dots, n)$

p probabilità di successo nella singola prova

$q = 1 - p$ prob. di insuccesso nella singola prova

X v.a. che conta i successi

$p(k) = P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ prob. da valutare

Introduciamo gli eventi

A_k = " si verifica un successo alla prova k-esima "

A = " si verificano k successi nelle prime k prove e $n-k$ insuccessi nelle rimanenti $n-k$ prove "

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \dots \cap A_n^c)$$

$$= P(A_1) P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k) \cdot P(A_{k+1}^c) \cdot \dots \cdot P(A_n^c)$$

(perché gli A_k sono indipendenti)

$$= \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{k \text{ volte}} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot \dots \cdot (1-p)}_{n-k \text{ volte}}$$

$$= p^k (1-p)^{n-k}$$

Per calcolare $p(k)$ osserviamo che occorre moltiplicare $P(A)$ per il numero di modi in cui si possono distribuire i k successi nelle n prove.

Ora che l'ordine è ininfluente.

$\Rightarrow$ Questo numero è pari al numero di combinazioni, cioè $\binom{n}{k}$

Es: $n = 4$, $k = 3$

TTTC
TTCT
TCTT
CTTT

$\}$ 4

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1} = 4$$

$$\Rightarrow \quad p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$\boxed{\text{Def}}$ Diremo che una v.a. X segue una <u>legge binomiale</u> di parametri n e p e scriveremo $X \sim B(n,p)$ se ha densità

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Def}}$ Il caso particolare $B(1, p)$ prende il nome di <u>legge di Bernoulli</u>

Os Se introduciamo le n v.a. $X_i \sim B(1,p)$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se successo alla } i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e X = "numero di successi in n prove"

$$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Os che le X_i sono indipendenti perché le prove sono indipendenti

Calcoliamo media e varianza

Media

Consideriamo $X \sim B(1, p)$

$$E[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1)$$
$$= 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1)$$
$$= 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

Se $X \sim B(n,p) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \sim B(1,p)$

$$\Rightarrow E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Varianza

Considero $X \sim B(1, p)$

$VAR(X) = E[X^2] - E[X]^2$

$E[X^2] = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) = p$

$\Rightarrow VAR(X) = p - p^2 = p(1-p)$

Se $X \sim B(n, p) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \sim B(1, p)$
indipendenti

$\Rightarrow VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) = n\, p(1-p)$

Esercizio

Una ditta produce lampadine, di cui il 5% risulta difettoso, e le vende in confezioni da quattro.

1) Qual è la probabilità che in una confezione ci sia una sola lampadina difettosa?

2) Qual è la probabilità che in una confezione ci siano al più due pezzi difettosi

3) Se ogni scatola contiene 40 pezzi, quanti pezzi difettosi conterrebbe in media?

Prendendo a caso una lampadina la probabilità che sia guasta è

$p = \frac{5}{100} = 0.05$

Assumiamo che la difettosità di una lampadina non dipenda dalle altre.

Provare le quattro lampadine di una confezione equivale ad effettuare 4 prove ripetute e indipendenti.

Sia X la v.a. che conta il numero di lampadine difettose

$\Rightarrow X \sim B(4, 0.05)$

1) $P(X=1) = p(1) = \binom{4}{1} \cdot 0.05 \cdot 0.95^3 = 0.1715$

2) $P(0 \leq X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) =$

$= \binom{4}{0} \cdot 0.95^4 + \binom{4}{1} 0.05 \cdot 0.95^3 + \binom{4}{2} 0.05^2 \, 0.95^2$

$= 0.995$

3) Se $n = 40$ e $p = 0.05$

$\Rightarrow E[X] = 40 \cdot 0.05 = 2$

(Si vede anche il codice Python)

Distribuzione ipergeometrica

Viene utilizzata in situazioni del tipo estrazioni da un'urna senza rimpiazzo.

L'estrazione è influenzata da quelle precedenti

$\Rightarrow$ le singole estrazioni non sono indipendenti

Consideriamo un'urna contenente
b palline bianche uguali
r palline rosse uguali
Se ne estraggono a caso $n \leq b+r$ senza rimpiazzo

Sia X la v.a. che conta il numero di palline bianche estratte

Determiniamo la legge, cioè $p(k) = P(X=k)$, $0 \leq k \leq b$

In quanti modi si possono scegliere k palline delle b bianche? $\binom{b}{k}$

In quanti modi si possono scegliere $n-k$ palline delle r rosse? $\binom{r}{n-k}$

In quanti modi si possono scegliere n palline delle $b+r$ totali? $\binom{b+r}{n}$

$$\Rightarrow p(k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, b$$

Inoltre $p(x) = 0 \quad \forall x \neq 0, 1, \dots, b$

$\Rightarrow p(x)$ costituisce la <u>distribuzione ipergeometrica</u>

Media e varianza

Si può calcolare che

$$E[X] = n \frac{b}{b+r}$$

$$VAR(X) = n \frac{br}{(b+r)^2} \frac{b+r-n}{b+r-1}$$

Esercizio

La memoria di un computer è composta da 30 hard disk ognuno dei quali contiene 100 file. Un programma dovrà accedere a 28 di questi file (tutti diversi).

1) Qual è la probabilità che non ci siano file provenienti dall'hard disk n. 1?

2) Qual è la probabilità del punto 1) nel caso in cui i file possono ripetersi?

---

1) Il problema segue lo schema successo - insuccesso senza rimpiazzo.

Consideriamo successo la scelta di un file dell'HDD n.1, insuccesso la scelta di uno degli altri HDD.

Sia X la v.a. che conta il numero di file provenienti dall'HDD n. 1.

$\Rightarrow X$ segue una legge ipergeometrica

$b = 100$ file dell'HDD n. 1

$r = (30-1) \cdot 100 = 2900$ file degli altri HDD

$n = 28$ prove ripetute

$$\Rightarrow p_1 = P(X=0) = p(0) = \frac{\binom{100}{0}\binom{2900}{28}}{\binom{3000}{28}} \approx 0.385$$

2) Se invece i file fossero scelti a caso con possibilità di ripetizione

$\Rightarrow X$ segue una legge binomiale $B\left(28, \frac{1}{30}\right)$

$$\Rightarrow p_2 = P(X=0) = \binom{28}{0}\left(\frac{1}{30}\right)^0\left(1-\frac{1}{30}\right)^{28} \approx 0.387$$

Distribuzione geometrica

$\boxed{\text{Def}}$ Una v.a. X segue una legge geometrica di parametro p, con $0<p<1$, se ha densità

$$p(x) = \begin{cases} p(1-p)^x & \text{se } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In tal caso scriveremo $X \sim G(p)$

Oss

$p(x)$ è effettivamente una distribuzione

Infatti:

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = p\,\frac{1}{1-(1-p)}$$

somma della serie geometrica di ragione $1-p$

$$= p\,\frac{1}{p} = 1$$

Oss

La distribuzione geometrica ha un legame con quella binomiale.

Sia T la v.a. che rappresenta il "tempo" di primo successo, cioè il numero di tentativi necessari affinché avvenga il primo successo.

Stabiliamo la legge di T

Sia $X^{(k)} \sim B(k,p) \quad \forall k\in\mathbb{N}$

$$P(T>k) = P(X^{(k)}=0) = \binom{k}{0}p^0(1-p)^k = (1-p)^k$$

il numero di tentativi necessari è maggiore di k

In k tentativi si hanno 0 successi

Oss che

$$\underbrace{P(T>k-1)}_{=(1-p)^{k-1}} = P((T=k)\cup(T>k)) = P(T=k)+P(T>k)$$

$$\Rightarrow p(T=k) = P(T>k-1) - P(T>k)$$
$$= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = (1-p)^{k-1}(1-1+p)$$
$$= p(1-p)^{k-1}$$
$$\parallel$$
$$P(X=k-1)$$ per def. di distrib. geometrica

$$\Rightarrow T-1 = X$$, cioè $T-1 \sim G(p)$

<u>Proprietà</u>

La legge geometrica gode della proprietà di mancanza di memoria.

Sia $X \sim G(p)$

$$\Rightarrow P(X=k+m \mid X \geq k) = P(X=m) \quad \forall k, m \in \mathbb{N}$$

<u>Dim</u>

$$P(X \geq k) = \sum_{r=k}^{\infty} p(1-p)^r = p\left[(1-p)^k + (1-p)^{k+1} + (1-p)^{k+2} + \dots\right]$$
$$= p(1-p)^k \sum_{r=0}^{\infty} (1-p)^r = (1-p)^k \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} p(1-p)^r}_{=1} = (1-p)^k$$

$1 \leftarrow$ perché è una distribuzione

Per il T. di Bayes

$$P(X=k+m \mid X \geq k) = \frac{P(X=k+m, X \geq k)}{P(X \geq k)}$$
$$= \frac{P(X=k+m)}{P(X \geq k)} = \frac{p(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k} = p(1-p)^m = P(X=m)$$

<u>Oss</u>

Applichiamo tale proprietà al tempo di primo successo T

$$P(T = k+m \mid T > k) = P(T-1 = k+m-1 \mid T-1 \geq k)$$

$$= P(X = k+m-1 \mid X \geq k) = P(X = m-1)$$

$$= P(T-1 = m-1) = P(T = m)$$

Media e varianza

Sia $X \sim G(p)$, $\quad 0<p<1$

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p(1-p)^k$$

$$= p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \qquad (*)$$

Consideriamo la serie di funzioni

$\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k$ che è una serie di potenze convergente per $0<p<1$

$\Rightarrow$ È possibile derivare termine a termine

$$\frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dp}\left[(1-p)^k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} -k(1-p)^{k-1}$$

Inoltre, abbiamo visto che

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{d}{dp} \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow (*) = -p(1-p)\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = -p(1-p)\frac{d}{dp}\frac{1}{p}$$

$$= -\cancel{p}(1-p)\left(-\frac{1}{p^{\cancel{2}}}\right) = \frac{1-p}{p}$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1-p}{p}$$

Sappiamo che $VAR(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1+k-1)\, p(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\, p(k) + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\, p(k)$$

$$= E[X] + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\, p(1-p)^k$$

$$= E[X] + p(1-p)^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}$$

$$= E[X] + p(1-p)^2 \frac{d^2}{dp^2}\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k$$

$$= E[X] + p(1-p)^2 \frac{d^2}{dp^2}\frac{1}{p}$$

$$= \frac{1-p}{p} + \cancel{p}(1-p)^2 \frac{2}{p^{\cancel{3}2}} = \frac{p(1-p) + 2(1-p)^2}{p^2}$$

$$= \frac{p - p^2 + 2 + 2p^2 - 4p}{p^2} = \frac{2 - 3p + p^2}{p^2}$$

$$\Rightarrow VAR(X) = \frac{2-3p+p^2}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{2-3p\cancel{+p^2}-1\cancel{-p^2}+2p}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Calcoliamo media e varianza per la v.a. T (tempo di primo successo)

$$E[T] = E[1+X] = E[1] + E[X]$$
$$= 1 + \frac{1-p}{p} = \frac{\cancel{p}+1-\cancel{p}}{p} = \frac{1}{p}$$

$$VAR(T) = VAR(1+X) = VAR(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Esercizio

Lancio di un dado non truccato

1) Qual è la probabilità che esca 6 per la prima volta esattamente al terzo lancio?

2) Sapendo che nei primi 3 lanci non si è avuto alcun 6, qual è la probabilità che esca 6 per la prima volta al quinto tentativo?

Il dado è non truccato $\Rightarrow p = \frac{1}{6}$

1) $P(T=3) = \frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-1} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$

2) $P(T=5 \mid T>3) = P(T=3+2 \mid T>3)$

$= P(T=2) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{2-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

Distribuzione di Poisson

Def Una v.a. segue una <u>legge di Poisson</u> di parametro $\lambda > 0$ se ha densità

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} & \text{se } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In tal caso scriveremo $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

Oss

Si tratta di una densità

Infatti:

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{sviluppo in serie di MacLaurin dell'esponenziale}} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Oss

La distribuzione di Poisson è una approssimazione della binomiale quando $n \gg 1$ e $0 < p \ll 1$

Infatti, sia $\lambda = np$ e $X \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

$$\Rightarrow P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{n^k (n-k)!} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Oss che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=e^{-\lambda} \quad , \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ k \text{ fissato}}}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{k}(n-k)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k \text{ volte}}}=1$$

$\Rightarrow$ Per $n\to\infty$

$$P(X=k)\longrightarrow\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}$$

$\Rightarrow$ La distribuzione di Poisson si utilizza quando in uno schema successo - insuccesso si ha un alto numero di prove con una probabilità bassa di successo in ogni singola prova.

Media e varianza

Sia $X\sim \text{Pois}(\lambda)$, $\lambda>0$

$$E[X]=\sum_{x\in\mathbb{R}}x\,p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\cancel{k}\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{\cancel{k!}\,(k-1)!}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

$$VAR(X)=E[X^2]-(E[X])^2$$

$$E[X^2]=\sum_{k=0}^{\infty}k^2p(k)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}k(1+k-1)\frac{\lambda^{k}}{k!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^{k}}{k!}+e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\cancel{k(k-1)}\frac{\lambda^{k}}{\cancel{k!}\,(k-2)!}$$

$$= E[X] + \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

$$= \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow \mathrm{VAR}(X) = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$$

<u>Proprietà</u>

Siano X, Y v.a. indipendenti, $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Pois}(\mu)$

$\lambda, \mu > 0$

Proviamo che $X + Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda + \mu)$

<u>Dim</u>

Sia $p_X(k)$ la distribuzione di X

$p_Y(k)$ la distribuzione di Y

$$\Rightarrow p_{X+Y}(k) = \sum_{r=0}^{\infty} p_X(r)\, p_Y(k-r), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ma $p_Y(k-r) = 0$ se $k - r < 0$ $(\Leftrightarrow r > k)$

$$\Rightarrow p_{X+Y}(k) = \sum_{r=0}^{k} p_X(r)\, p_Y(k-r)$$

$$= \sum_{r=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-r}}{(k-r)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!(k-r)!} \lambda^r \mu^{k-r} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda+\mu)^k$$

↑ sviluppo della potenza di un binomio

Esercizio

In un libro di 500 pagine sono distribuiti a caso 300 errori di stampa.
Qual è la probabilità che una data pagina contenga almeno due errori?

— — — —

La legge seguita è quella binomiale $B(n,p)$

$n = 300$

$p = \frac{1}{500}$

Poniamo $\lambda = np = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$ e approssimiamo con $Pois(\lambda)$

$$\Rightarrow P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$
$$= 1 - e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} - e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}$$
$$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \approx 0,122$$

Legge multinomiale

È una generalizzazione della legge binomiale
Consideriamo n prove ripetute ed indipendenti con m possibili esiti.
Siano q_1 prob. che si abbia l'esito 1
q_2 prob. che si abbia l'esito 2
$\vdots$
q_m prob. che si abbia l'esito m

con la condizione $\sum_{k=1}^{m} q_k = 1$

Sia Y_k la v.a. che conta quante volte si è verificato il risultato k-esimo nelle n prove, con $k = 1, 2, .., m$

$\Rightarrow Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ è una v.a. m-dimensionale che tiene conto contemporaneamente di tutti gli esiti

Calcoliamo la legge

Sia $w = (w_1, w_2, .., w_m)$, $w_k \in \{0, 1, 2, .., n\}$
$\sum_{k=1}^{m} w_k = n$

$\Rightarrow P(Y = w) = P(Y_1 = w_1, Y_2 = w_2, .., Y_m = w_m)$

Fissato un preciso ordine di uscita dei risultati si ha che la probabilità di tale evento è
$q_1^{w_1} q_2^{w_2} \cdots q_m^{w_m}$

Ora che gli w_k successi si possono distribuire in un numero di modi pari al numero di partizioni di un insieme di n elementi t.c.
il primo insieme della partizione abbia w_1 elementi,
il secondo insieme della partizione abbia w_2 elementi,
⋮
l'm-esimo insieme della partizione abbia w_m elementi

$\Rightarrow$ Questo numero è $\dfrac{m!}{w_1!\, w_2! \cdots w_m!}$

$$\Rightarrow P(Y = w) = \frac{m!}{w_1!\, w_2! \cdots w_m!}\, q_1^{w_1}\, q_2^{w_2} \cdots q_m^{w_m}$$

che viene detta <u>legge multinomiale</u> e si indica con $B(m, q_1, q_2, \dots, q_m)$

<u>Oss</u>

Nel caso $m = 2$ si ottiene la legge binomiale con $q_1 = p$, $q_2 = 1 - p$

<u>Oss</u>

Consideriamo una v.a. X di legge multinomiale $B(1, p_1, p_2, \dots, p_m)$ t.c. $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ su un insieme Ω di m possibili esiti $\Omega = \{1, 2, \dots, m\}$

$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

$\Rightarrow$ Se $t < 1 \Rightarrow P(X \leq t) = 0$

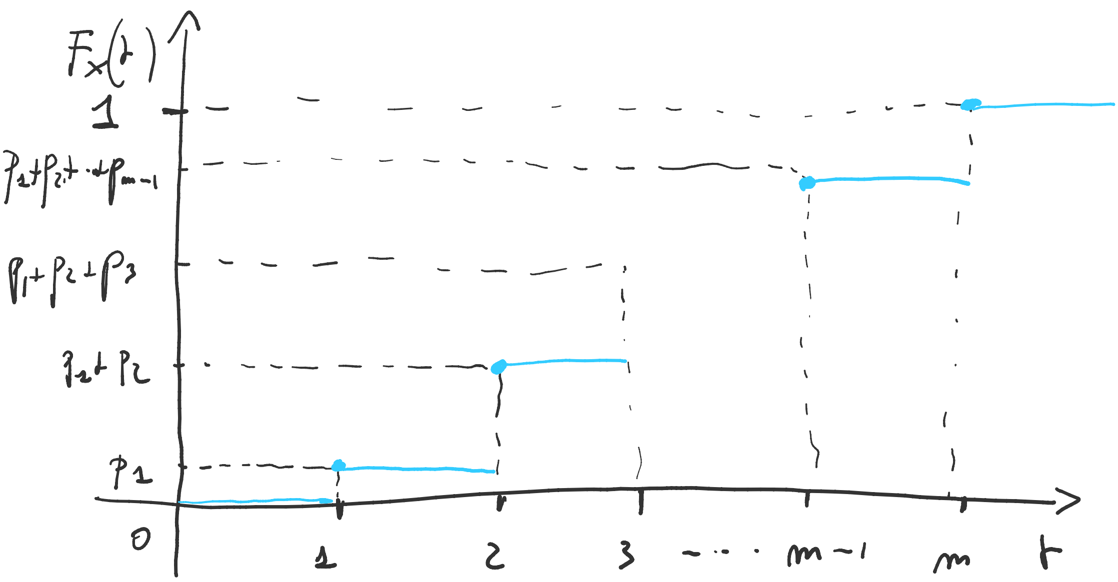
Se $1 \leq t < 2 \Rightarrow P(X \leq t) = P(X = 1) = p_1$

Se $2 \leq t < 3 \Rightarrow P(X \leq t) = P(X = 1) + P(X = 2) = p_1 + p_2$

$\vdots$

Se $t \geq m \Rightarrow P(X \leq t) = \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 1 \\ p_1 & \text{se} \quad 1 \leq t < 2 \\ p_1 + p_2 & \text{se} \quad 2 \leq t < 3 \\ \vdots & \vdots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} & \text{se} \quad m-1 \leq t < m \\ 1 & \text{se} \quad t \geq m \end{cases}$$



<u>Esercizio</u>

Calcolare la probabilità che, lanciando un dado non truccato quattro volte, esce tre volte 6 e una volta 2.

Il fenomeno segue una legge multinomiale $B\left(4, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

$$\Rightarrow P\left(Y = (0,1,0,0,0,3)\right) = \frac{4!}{0!\,1!\,0!\,0!\,0!\,3!} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$= \frac{4!}{3!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{4}{6^4}$$