# Metodi Matematici e Statistici

Dr. Giovanni Nastasi
giovanni.nastasi@unict.it

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Catania, Italy

**CdS in Informatica**
**A.A. 2023-2024**

# Test di ipotesi

# Introduzione

Supponiamo di avere una popolazione e che una sua caratteristica sia descritta da una v.a. $X$ di densità $f^{\theta}(x)$ dipendente dal parametro $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Di $\theta$ si possono dare stime puntuali o intervallari come visto in precedenza.

**Esempio.** La densità della distribuzione normale dipende dai parametri $\mu$ (media) e $sigma$ (deviazione standard). Quindi in quel caso $\theta = (\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^2$.

**Definizione.** Una ipotesi statistica è una asserzione sul parametro $\theta$ della popolazione o su una sua funzione $\psi(\theta)$.

Si vuole delineare una procedura statistica che consenta di avallare o respingere ipotesi entro una prefissata probabilità di sbagliarsi.

# Introduzione

Supponiamo, per semplicità, che $\theta$ sia un parametro scalare $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$.

Si considera una partizione $\Theta_0$, $\Theta_1$ di $\Theta$.

Si formula una ipotesi $H_0$ detta **ipotesi nulla**

$$H_0 \ : \quad \theta \in \Theta_0$$

e una ipotesi $H_1$ detta **ipotesi alternativa**

$$H_1 \ : \quad \theta \in \Theta_1.$$

Se $\Theta_0$ è costituito da un solo elemento, l'ipotesi nulla si dice **semplice**.

L'idea di fondo del test è quella di stabilire un criterio per rigettare l'ipotesi nulla a favore di quella alternativa.

**Osservazione.** Il ruolo di $H_0$ e $H_1$ non è simmetrico. Il test si considera significativo se si rigetta $H_0$ a favore di $H_1$. Se non si riesce a rigettare $H_0$ non si conclude che $H_0$ è vera ma che non si hanno elementi sufficienti a rigettarla.

# Test di ipotesi

Per eseguire un test statistico:

- si considera un campione $X_1, X_2, \ldots, X_n$ di rango $n$ e densità $f^\theta(x)$;
- si introduce una statistica $\gamma(X_1, X2, \ldots, X_n)$ e si stabilisce un sottoinsieme $C_R$ (detto regione critica) dell'insieme delle immagini di $\gamma$;
- si rifiuta $H_0$ se $\gamma(X_1, X2, \ldots, X_n) \in C_R$ altrimenti non si rifiuta $H_0$.

**Esempio.** Si vuole testare l'ipotesi che una data moneta non sia equilibrata.

Si considerano $n$ lanci ciascuno caratterizzato da un v.a. $X_i \sim B(1, p)$ con $p$ incognita. Quindi $\theta = p \in [0, 1] = \Theta$ e

$$f^\theta(x) = \begin{cases} \theta^x (1-\theta)^{1-x} & \text{per } x = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le due ipotesi saranno

$$H_0 \, : \, \theta = \theta_0 = \frac{1}{2}, \qquad H_1 \, : \, \theta \neq \theta_0.$$

# Test di ipotesi

**Esempio (continuo).** In base a quanto detto sopra $\Theta_0 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ e $\Theta_1 = [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Se si rigetta $H_0$ allora si avalla $H_1$ cioè che la moneta non è equilibrata.
Intuitivamente siamo portati a rigettare $H_0$ se si hanno troppi o troppo pochi successi.

**Osservazione.** La decisione sulla veridicità delle ipotesi si basa su di un campione e non sull'intera popolazione, pertanto si possono trarre delle conclusioni errate.

Nell'esempio della moneta non equilibrata, si potrebbe registrare un campione con un numero di teste prossimo a quello di croci. Ciò avrebbe condotto a non rigettare $H_0$ pur essendo quest'ultima falsa.

Per contro si potrebbe avere una moneta equilibrata ma il campione considerato potrebbe presentare un forte squilibrio tra numero di successi e insuccessi portando al rigetto dell'ipotesi nulla.

Pertanto le conclusioni di un test di ipotesi sono necessariamente affette da errori statistici.

# Test di ipotesi

Quantifichiamo questi errori.

**Definizione.** Dicesi **errore di primo tipo** o **di prima specie** il rifiuto a torto di $H_0$, cioè il rifiuto dell'ipotesi nulla quando essa è vera. Esso vale

$$\alpha(\theta) = P^{\theta}\left(\gamma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C_R \,|\, \theta \in \Theta_0\right),$$

cioè è la probabilità che la statistica dia un valore nella zona di rigetto noto che il parametro appartenga a $\Theta_0$.

**Definizione.** Dicesi **livello di significativià** del test il valore

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta).$$

**Osservazione.** Nel caso di ipotesi nulla semplice l'errore di primo tipo e il livello di significatività coincidono.

# Test di ipotesi

**Definizione.** Non rigettare $H_0$ a torto, cioè quando è falsa, dicesi **errore di secondo tipo** o **di seconda specie**. Esso vale

$$\beta(\theta) = P^{\theta}\left(\gamma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \notin C_R \,|\, \theta \in \Theta_1\right),$$

cioè è la probabilità che la statistica dia un valore che non stia nella zona di rigetto noto che il parametro appartenga a $\Theta_1$.

**Definizione.** Dicesi potenza di un test la funzione

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \alpha(\theta) & \text{se } \theta \in \Theta_0 \\ 1 - \beta(\theta) & \text{se } \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

**Osservazione.** $\pi(\theta)$ coincide con l'errore di primo tipo se $H_0$ è vera mentre coincide con la probabilità di non commettere un errore di secondo tipo se $H_0$ è falsa.

**Osservazione.** Spesso viene data una definizione più operativa di potenza come *la probabilità di rigettare giustamente l'ipotesi nulla quando è vera l'ipotesi alternativa*, considerando cioè solo la seconda eventualità.

# Test di ipotesi

In un test ideale $\pi(\theta) = 0$ se $\theta \in \Theta_0$ e $\pi(\theta) = 1$ se $\theta \in \Theta_1$. Nella pratica si cerca di avere $\alpha$ piccolo e $\beta$ vicino a uno. Livelli ritenuti accettabili nella pratica sono $\alpha = 0.01$ e $\alpha = 0.05$.

**Definizione.** Dicesi p-value (livello di confidenza) il più piccolo livello di significatività per cui il dato campionario porta al rigetto dell'ipotesi nulla.

# Test sulla media

Supponiamo di avere un campione $X_1, X_2, \ldots, X_n$ di leggi normali o che si possa applicare l'approssimazione normale. Siano $\mu$ e $\sigma^2$ rispettivamente la media e la varianza di ciascuna $X_i$. Vogliamo delineare un procedura sistematica per testare una ipotesi sul valore di $\mu$.

L'ipotesi nulla si presenta sotto la forma semplice

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

mentre l'ipotesi alternativa può assumere una delle seguenti forme

$$\begin{aligned} H_1 &: \mu \neq \mu_0 && \text{test bilatero} \\ H_1 &: \mu < \mu_0 && \text{test unilatero a sinistra} \\ H_1 &: \mu > \mu_0 && \text{test unilatero a destra} \end{aligned}$$

Si distinguono due casi a seconda che la varianza $\sigma^2$ sia nota oppure no.

# Test sulla media con varianza nota (o Z test)

Se $\sigma^2$ è nota, sotto le ipotesi assunte si ha che la variabile

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

segue approssimativamente una $N(0,1)$.

Sia $\alpha \in ]0,1[$ il livello di significatività del test, ovvero l'errore di prima specie (inevitabile) che lo sperimentatore decide di accollarsi.

Occorre stabilire una zona di rigetto per le tre forme di ipotesi alternativa.

# Test sulla media con varianza nota (o Z test)

**Test bilatero**.

Si è portati a rigettare $H_0$ se la media campionaria fornisce una stima di $\mu$ di gran lunga diversa da quella ipotizzata $\mu_0$, cioè la zona di rigetto è del tipo

$$\bar{X}_n < \mu_0 - \delta \qquad \text{oppure} \qquad \bar{X}_n > \mu_0 + \delta.$$

Per determinare $\delta$ imponiamo che

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \delta \,|\, \mu = \mu_0) = \alpha.$$

Passando alla variabile normale standardizzata si ha

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| > \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha.$$

Se poniamo $Z_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ si ha che

$$P\left(|Z_0| > \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = \phi_{1-\alpha/2}$$

# Test sulla media con varianza nota (o Z test)

Pertanto la zona di rigetto è data da

$$\bar{X}_n < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2} \qquad \text{oppure} \qquad \bar{X}_n > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}$$

**Test unilatero a sinistra.**

Si rigetta se $\bar{X}_n$ è sensibilmente inferiore al valore $\mu_0$. Ragionando in modo analogo al caso precedente, si ottine la zona di rigetto data da

$$Z_0 < \phi_\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bar{X}_n < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_\alpha.$$

**Test unilatero a destra.**

Si rigetta se $\bar{X}_n$ è sensibilmente superiore al valore $\mu_0$. Ragionando in modo analogo al caso precedente, si ottine la zona di rigetto data da

$$Z_0 > \phi_{1-\alpha} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bar{X}_n > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha}.$$

# Test sulla media con varianza nota (o Z test)

**p-value.**

Per quanto riguarda il p-value, si osservi che esso è il più piccolo $\alpha$ per cui i dati sono significativi cioè portano al rigetto di $H_0$. Nel caso bilatero, bisogna determinare $\alpha$ imponendo che

$$|Z_0| = \phi_{1-\alpha/2} \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(|Z_0|) = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 2(1 - \Phi(|Z_0|))$$

Nel caso unilatero a sinistra, bisogna determinare $\alpha$ imponendo che

$$Z_0 = \phi_\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(Z_0) = \alpha$$

Nel caso unilatero a destra, bisogna determinare $\alpha$ imponendo che

$$Z_0 = \phi_{1-\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 - \Phi(Z_0) = \alpha$$

Riassumendo, per il test sulla media con varianza nota si ha

$$\text{p-value} = \begin{cases} 2(1 - \Phi(|Z_0|)) & \text{nel test bilatero} \\ \Phi(Z_0) & \text{nel test unilatero a sinistra} \\ 1 - \Phi(Z_0) & \text{nel test unilatero a destra} \end{cases}$$

# Test sulla media con varianza nota (o Z test)

**Errore di secondo tipo.**

Sia $H_0$ falsa e sia $\mu^* = \mu_0 + \delta$ con $\delta \in \mathbb{R}$, cioè $\mu^*$ rappresenta il valore vero della media.

Quindi la variabile

$$Z^* = \frac{\bar{X}_n - \mu^*}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\bar{X}_n - \mu_0 - \delta}{\sigma}\sqrt{n}$$

segue approssimativamente una $N(0,1)$.

Pertanto, considerando il caso bilatero,

$$\beta(\delta) = P(-\phi_{1-\alpha/2} \leq Z_0 \leq \phi_{1-\alpha/2}) = P\left(-\phi_{1-\alpha/2} - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq Z^* \leq \phi_{1-\alpha/2} - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi\left(\phi_{1-\alpha/2} - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\phi_{1-\alpha/2} - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

# Test sulla media con varianza nota (o Z test)

**Errore di secondo tipo.**

Per $\alpha$ assegnato, se si richiede che per un determinato $\delta$ si debba avere una potenza $1-\beta$ allora si può determinare una opportuna dimensione campionaria.

Osservando che, per la legge del $3\sigma$, se

$$-\phi_{1-\alpha/2} - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq -3 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi\left(-\phi_{1-\alpha/2} - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \approx 0.$$

Allora

$$\beta(\delta) \approx \Phi\left(\phi_{1-\alpha/2} - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \phi_{1-\alpha/2} - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \approx \phi_\beta$$

da cui

$$n = (\phi_{1-\alpha/2} + \phi_{1-\beta})^2\frac{\sigma^2}{\delta^2}.$$

# Test sulla media con varianza nota (o Z test)

**Errore di secondo tipo.**

Per quanto riguarda il test unilatero a sinistra, si ha

$$\beta(\delta) = P\left(\phi_\alpha - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu^*}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 1 - \Phi\left(\phi_\alpha - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

In questo caso, fissato $\alpha$ e $\delta$, l'opportuna dimensione campionaria è data da

$$n = (\phi_\alpha + \phi_\beta)^2\frac{\sigma^2}{\delta^2}.$$

Per quanto riguarda il test unilatero a destra, si ha

$$\beta(\delta) = P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu^*}{\sigma}\sqrt{n} \leq \phi_{1-\alpha} - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\phi_{1-\alpha} - \delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

In questo caso, fissato $\alpha$ e $\delta$, l'opportuna dimensione campionaria è data da

$$n = (\phi_\alpha + \phi_\beta)^2\frac{\sigma^2}{\delta^2}.$$

# Esercizio

Le specifiche tecniche per la velocità di combustione di un propellente richiedono che deve essere di 50 cm/s. Sappiamo che la deviazione standard è di 2 cm/s. Si effettuano 24 misurazioni

$$51., 50.2, 49.5, 48.7, 50.2, 50.5, 49.6, 51.1, 50.6, 49.1, 53.1, 50.4,$$
$$49.3, 48.9, 50.3, 51.8, 51.3, 48.5, 49.3, 55.1, 53.1, 52.5, 55.1, 50.6$$

Si può rigettare l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5%? E se invece si richiedesse l'1%? Calcolare infine il p-value.

Supponiamo che lo sperimentatore voglia impostare il test in modo che la reale velocità di combustione media differisca da 50 cm/s per al più 1 cm/s. Si vuole inoltre che il test affermerà questo fatto (cioè rigetterà $H_0 : \mu = 50$) con una probabilità del 90% e un livello di significatività del 5%. Determinare la dimensione campionaria.

# Test sulla media con varianza ignota (o $t$ test)

In questo caso si stima $\sigma^2$ con $S^2$. Si ha che la variabile

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S}\sqrt{n}$$

segue una legge $t$ di Student a $n-1$ gradi di libertà.

Procedendo come nel caso con varianza nota si ottengono le seguenti zone di rigetto

| | |
|---|---|
| $\lvert T_0\rvert > t_{1-\alpha/2}(n-1)$ | test bilatero |
| $T_0 < t_\alpha(n-1)$ | test unilatero a sinistra |
| $T_0 > t_{1-\alpha}(n-1)$ | test unilatero a destra |

con $T_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S}\sqrt{n}$.

# Test sulla media con varianza ignota (o $t$ test)

Per il p-value si ha

$$\text{p-value} = \begin{cases} 2(1 - F_T(|T_0|)) & \text{test bilatero} \\ F_T(T_0) & \text{test unilatero a sinistra} \\ 1 - F_T(T_0) & \text{test unilatero a destra} \end{cases}$$

ove $F_T$ denota la funzione di ripartizione della legge $t$ di Student a $n-1$ gradi di libertà.

# Esercizio

Si vuole testare ad un livello di significatività $\alpha = 0.05$ se il carico di rottura di un materiale supera 10 MPa, tenendo presente che 22 prove hanno fornito i seguenti risultati

19.8 18.5 17.6 16.7 15.8

15.4 14.1 13.6 11.9 11.4

11.4 8.8 7.5 15.4 15.4

19.5 14.9 12.7 11.9 11.4

10.1 7.9

Calcolare inoltre il p-value.

# Test sulla media

**Osservazione.** Se la popolazione non è distribuita in modo normale è necessario richiedere un campione di numerosità $\geq 30$. Infatti, in questo caso per il teorema del limite centrale vale l'approssimazione normale. Pertanto si può procedere ad effettuare il test sulla media come nel caso della popolazione normalmente distribuita.

# Test sulla varianza

Si consideri un campione $X_1, X_2, \dots, X_n$ di leggi normali o per cui sia valida l'approssimazione normale. Siano $\mu$ e $\sigma^2$ rispettivamente la media e la varianza di ciascuna $X_i$. Vogliamo testare una ipotesi sul valore di $\sigma^2$.

L'ipotesi nulla si presenta sotto la forma semplice

$$H_0 \,:\, \sigma^2 = \sigma_0^2$$

mentre l'ipotesi alternativa può assumere una delle seguenti forme

$$\begin{aligned} H_1 \,&:\, \sigma^2 \neq \sigma_0^2 && \text{test bilatero} \\ H_1 \,&:\, \sigma^2 < \sigma_0^2 && \text{test unilatero a sinistra} \\ H_1 \,&:\, \sigma^2 > \sigma_0^2 && \text{test unilatero a destra} \end{aligned}$$

Introduciamo lo stimatore $S^2$ e ricordiamo che

$$W = \frac{S^2}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1).$$

# Test sulla varianza

Se $H_0$ è vera allora

$$W_0 = \frac{S^2}{\sigma_0^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$$

Procedendo come per l'inferenza sulla media, si ottengono le seguenti zone di rigetto:

| | | |
|---|---|---|
| $W_0 < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ oppure $W_0 > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ | | test bilatero |
| $W_0 < \chi^2_{\alpha}(n-1)$ | | test unilatero a sinistra |
| $W_0 > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ | | test unilatero a destra |

# Esercizio

Un macchinario riempie automaticamente delle bottiglie. Da un campione di 20 misurazioni si ottengono i seguenti valori (in litri)

$$2.05,\ 2.04,\ 1.98,\ 1.96,\ 2.03,\ 2.01,\ 1.97,\ 1.99,\ 2.01,\ 2.05$$
$$1.96,\ 1.95,\ 2.04,\ 2.01,\ 1.97,\ 1.96,\ 2.02,\ 2.04,\ 1.98,\ 1.94$$

Se la deviazione standard fosse superiore a 0.05 litri, la proporzione di bottiglie sotto o sovrariempite sarebbe non accettabile.

I dati del campione contengono prove che suggeriscono che il produttore abbia un problema con le bottiglie riempite troppo o troppo poco? Utilizzare $\alpha = 0.05$ e assumere che il volume di riempimento abbia una distribuzione normale.

# Test sulla proporzione

Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione di leggi di Bernoulli $B(1, p)$.

Formuliamo l'ipotesi nulla in forma semplice

$$H_0 \; : \; p = p_0$$

mentre l'ipotesi alternativa può assumere una delle seguenti forme

$$\begin{aligned} H_1 \; &: \; p \neq p_0 && \text{test bilatero} \\ H_1 \; &: \; p < p_0 && \text{test unilatero a sinistra} \\ H_1 \; &: \; p > p_0 && \text{test unilatero a destra} \end{aligned}$$

Se $np_0 \geq 5$ e $n(1 - p_0) \geq 5$ allora si può ritenere valida l'approssimazione normale e si ha che

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \sqrt{n} \sim N(0, 1).$$

# Test sulla proporzione

Si ottengono le seguenti zone di rigetto

$$
\begin{array}{ll}
|Z_0| > \phi_{1-\alpha/2} & \text{test bilatero} \\
Z_0 < \phi_\alpha & \text{test unilatero a sinistra} \\
Z_0 > \phi_{1-\alpha} & \text{test unilatero a destra}
\end{array}
$$

Sia $p^* \neq p_0$ il valore vero. Fissato il valore di $\alpha$, è possibile ottenere la numerosità del campione per avere un errore di secondo tipo pari a $\beta$. Nel caso unilatero (sia a sinistra che a destra) si può dimostrare che

$$
n = \left( \frac{\phi_\beta \sqrt{p^*(1-p^*)} + \phi_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)}}{p_0 - p^*} \right)^2 .
$$

# Esercizio

In una catena di produzione si vuole mantenere il numero di pezzi difettosi al di sotto del 5%. Si analizza un campione di 200 pezzi e si trovano 4 pezzi difettosi.

- Si può asserire ad un livello di significatività $\alpha = 0.05$ che la produzione rispetta le aspettative?
- Supponendo che il valore vero sia $p^* = 0.03$ e supponendo che il costruttore voglia accettare un valore dell'errore di secondo tipo $\beta = 0.1$, quale ampiezza dovrebbe avere il campione?

# Test sulla media per coppie di popolazioni

Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione estratto dalla popolazione 1 e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ un campione estratto dalla popolazione 2. Supponiamo che i due campioni siano tra di loro indipendenti e che seguano leggi normali oppure che per ciascuno di essi sia valida l'approssimazione normale. Siano $\mu_1$ e $\mu_2$ le medie dei due campioni e $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ le rispettive varianze (che supponiamo note).

Ci si chiede se la differenza tra le medie delle due popoazioni sia significativa.

Vogliamo testare l'ipotesi nulla

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

contro le ipotesi alternative

$$\begin{aligned} H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 && \text{test bilatero} \\ H_1 &: \mu_1 < \mu_2 && \text{test unilatero a sinistra} \\ H_1 &: \mu_1 > \mu_2 && \text{test unilatero a destra} \end{aligned}$$

# Test sulla media per coppie di popolazioni

In questo caso lo stimatore della differenza $\mu_1 - \mu_2$ è dato da $\bar{X}_n - \bar{Y}_m$.
Calcoliamo il suo valore atteso e la sua varianza.

$$E[\bar{X}_n - \bar{Y}_m] = E[\bar{X}_n] - E[\bar{Y}_m] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} E[Y_j] = \frac{n\mu_1}{n} - \frac{m\mu_2}{m} = \mu_1 - \mu_2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{VAR}(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) &= \mathrm{VAR}(\bar{X}_n) + \mathrm{VAR}(\bar{Y}_m) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{VAR}(X_i) + \frac{1}{m^2}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{VAR}(Y_j) \\ &= \frac{n\sigma_1^2}{n^2} + \frac{m\sigma_2^2}{m^2} = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\end{aligned}$$

Pertanto si ha che

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

# Test sulla media per coppie di popolazioni

Se vale l'ipotesi nulla si ha che

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

ottenendo le seguenti zone di rigetto

| | |
|---|---|
| $\lvert Z_0\rvert > \phi_{1-\alpha/2}$ | test bilatero |
| $Z_0 < \phi_{\alpha}$ | test unilatero a sinistra |
| $Z_0 > \phi_{1-\alpha}$ | test unilatero a destra |

# Test sulla media per coppie di popolazioni

Inoltre si ottengono anche gli intervalli di confidenza.
Nel caso bilatero si ha

$$\bar{X}_n - \bar{Y}_m - \phi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X}_n - \bar{Y}_m + \phi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}.$$

Nel caso unilatero a sinistra si ha

$$\mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X}_n - \bar{Y}_m - \phi_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}.$$

Nel caso unilatero a destra si ha

$$\mu_1 - \mu_2 \geq \bar{X}_n - \bar{Y}_m - \phi_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}.$$

# Esercizio

Si vogliono confrontare due tipi di preparati per pittura. Ci si aspetta un diverso tempo di essiccamento. Si può supporre che la deviazione standard del tempo di essiccamento per ciascun tipo di essiccamento sia 8 minuti. 10 pareti vengono tinteggiate con il trattamento 1 e altrettamente pareti con il trattamento 2. Si rilevano le medie campionare $\bar{X} = 121$ minuti e $\bar{Y} = 112$ minuti. Si può trarre la conclusione che il tempo di essiccamento del campione 1 sia maggiore di quello del campione 2 assumendo $\alpha = 0.05$?
Calcolare l'intervallo di confidenza per la differenza dei tempi medi di essiccamento.

# Test $t$ per dati accoppiati

Un caso particolare di test per coppie di popolazioni si ha quando i dati sono accoppiati, cioè il campione si presenta nella forma $(X_i, Y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Supponiamo che le osservazioni $X_i$ provengano da una popolazione distribuita in modo normale con media $\mu_1$ e varianza $\sigma_1^2$ e che le osservazioni $Y_i$ provengano da una popolazione distribuita in modo normale con media $\mu_2$ e varianza $\sigma_2^2$.

Definiamo le differenze tra le osservazioni $D_i = X_i - Y_i$. Assumiamo che le differenze siano distribuite in modo normale con media $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ e varianza $\sigma_D^2$.

Vogliamo testare l'ipotesi nulla

$$H_0 : \mu_D = 0$$

contro le ipotesi alternative

$$\begin{aligned} H_1 &: \mu_D \neq 0 && \text{test bilatero} \\ H_1 &: \mu_D < 0 && \text{test unilatero a sinistra} \\ H_1 &: \mu_D > 0 && \text{test unilatero a destra} \end{aligned}$$

# Test $t$ per dati accoppiati

Si ha che

$$T_0 = \frac{\bar{D}_n}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1),$$

ove $\bar{D}_n$ e $S$ sono rispettivamente la media campionaria e la deviazione standard empirica delle differenze $D_i$ delle osservazioni.

Si ottengono le seguenti zone di rigetto

| | |
|---|---|
| $\lvert T_0\rvert > t_{1-\alpha/2}(n-1)$ | test bilatero |
| $T_0 < t_\alpha(n-1)$ | test unilatero a sinistra |
| $T_0 > t_{1-\alpha}(n-1)$ | test unilatero a destra |

# Esercizio

Quindici adulti di età compresa tra 35 e 50 anni parecipano ad uno studio per valutare gli effetti di dieta alimentare ed esercizio fisico sul livello di colesterolo nel sangue. In ogni individuo il livello di colesterolo è stato misurato inizialmente e tre mesi dopo la dieta e l'allenamento. Con un livello di significatività $\alpha = 0.05$, è possibile avallare l'ipotesi che dieta ed esercizio fisico portino a ridurre il livello medio di colesterolo?

| **Blood Cholesterol Level** | | |
|---|---|---|
| Subject | Before | After |
| 1 | 265 | 229 |
| 2 | 240 | 231 |
| 3 | 258 | 227 |
| 4 | 295 | 240 |
| 5 | 251 | 238 |
| 6 | 245 | 241 |
| 7 | 287 | 234 |
| 8 | 314 | 256 |
| 9 | 260 | 247 |
| 10 | 279 | 239 |
| 11 | 283 | 246 |
| 12 | 240 | 218 |
| 13 | 238 | 219 |
| 14 | 225 | 226 |
| 15 | 247 | 233 |

# Test del chi-quadro

Sia $X_1, X_2, \dots, X_n$ un campione di leggi multinomiali.
Supponiamo che $X_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e sia $\theta = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ il corrispondente vettore di probabilità, cioè

$$p_k = P(X_i = a_k), \qquad \forall k = 1, 2, \dots, m, \; \forall i = 1, 2, \dots, n$$

con $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$.

Si vuole testare l'ipotesi nulla

$$H_0 \, : \, \theta = \theta_0 = \left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_m^{(0)}\right)$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 \, : \, \theta \neq \theta_0.$$

Si osservi che nel case vettoriale non ha senso considerare i casi di tipo unilatero.

# Test del chi-quadro

Sia $N_k$ il numero di volte che si è verificato il risultato $a_k$ nel campionamento considerato. Si ha che $\sum_{k=1}^{m} N_k = n$. Definiamo le probabilità empiriche

$$\bar{p}_k = \frac{N_k}{n}, \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, m.$$

**Teorema (di Pearson).** Se vale l'ipotesi nulla $\theta = \theta_0$ scritta in precedenza allora la variabile aleatoria

$$T_n = n \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(\bar{p}_k - p_k^{(0)}\right)^2}{p_k^{(0)}}$$

soddisfa

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = T \sim \chi^2(m-1).$$

# Test del chi-quadro

**Dimostrazione.** Daremo la dimostrazione solo nel caso $m = 2$.
In questo caso avremo $p_1 = p \in ]0, 1[$ e $p_2 = 1 - p$. Quindi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ è un campione di leggi multinomiali tale che $X_i \in \{a_1, a_2\}$ e $\theta = (p, 1 - p)$.
Se vale l'ipotesi nulla $\theta = \theta_0 = (p_0, 1 - p_0)$ e quindi

$$T_n = n \left[ \frac{(\bar{p} - p_0)^2}{p_0} + \frac{(1 - \bar{p} - (1 - p_0))^2}{1 - p_0} \right] = n(\bar{p} - p_0)^2 \left[ \frac{1}{p_0} + \frac{1}{1 - p_0} \right] = n \frac{(\bar{p} - p_0)^2}{p_0(1 - p_0)}.$$

Posto

$$Z_0 = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \sqrt{n}$$

si ha $T_n = Z_0^2$ e per la legge dei grandi numeri $Z_0$ tende per $n \to +\infty$ a una v.a. di legge $N(0, 1)$.
Quindi per $n \to +\infty$ la v.a. $T_n$ tende a una legge $\chi^2(1)$.

# Test del chi-quadro

Da un punto di vista pratico, si ritiene valida l'approssimazione normale se $np_k^{(0)} \geq 5$ per ogni $k = 1, 2, \dots, m$.

Per stabilire la zona di rigetto osserviamo che se $H_0$ fosse falsa allora per almeno un indice, fissiamo $\bar{k}$, si avrebbe $\theta_{\bar{k}} \neq p_{\bar{k}}^{(0)}$ e di conseguenza

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty.$$

Pertanto siamo portati a rigettare $H_0$ se $T_n$ risulta grande. Più in dettaglio, fissato $\alpha \in ]0, 1[$, si rigetta $H_0$ se risulta

$$T_n > \chi^2_{1-\alpha}(m-1).$$

**Osservazione.** La v.a. $T_n$ può essere scritta anche in termini di frequenze assolute $N_k$ rilevate e frequenze assolute attese $E_k = np_k^{(0)}$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{(N_k - E_k)^2}{E_k}.$$

# Esercizio

Si vuole testare se un dado sia equilibrato o meno ad un livello di significatività $\alpha = 0.05$. Si effettuano 100 lanci, registrando i risultati riportati nella seguente tabella.

| faccia | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_i$ | 20 | 7 | 12 | 18 | 20 | 23 |

Dopo aver aumentato la dimensione campionaria, si registrano i risultati riportati nella seguente tabella. Si ripeta il test di cui sopra con i nuovi dati.

| faccia | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_i$ | 388 | 322 | 314 | 316 | 344 | 316 |

Si ripeta quest'ultimo test con $\alpha = 0.01$.

# Adattamento ai dati di una legge teorica di probabilità

Consideriamo il problema di avallare o meno se dei dati seguano una legge di funzione di ripartizione $F_X(t) : \mathbb{R} \to [0,1]$.

Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione di rango $n$.
Suddividiamo l'insieme $\mathbb{R}$, mediante i quantili della nostra legge, in $m$ sottointervalli equiprobabili

$$I_1 = ]-\infty, q_{1/m}], \qquad I_2 = ]q_{1/m}, q_{2/m}], \qquad \ldots \qquad I_m = ]q_{(m-1)/m}, +\infty[.$$

Vogliamo testare l'ipotesi nulla

$$H_0 \ : \text{ i dati seguono una legge con f.r. } F_X$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 \ : \text{ i dati non seguono una legge con f.r. } F_X$$

# Adattamento ai dati di una legge teorica di probabilità

Se l'ipotesi nulla è vera allora

$$P(X_i \in I_k) = \frac{1}{m}, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, m.$$

Introduciamo la v.a. multinomiale $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ con $Y_k$ che conta il numero di volte che si è rilevato nel campione un valore appartenente all'intervallo $I_k$.

In questo modo, il problema si trasforma in un test del chi-quadro standard con

$$\theta_0 = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots \frac{1}{m}\right), \qquad \text{e} \qquad \bar{p}_k = \frac{N_k}{n},$$

dove $N_k$ rappresenta il valore di $Y_k$ per $k = 1, 2, \ldots, m$.

# Adattamento ai dati di una legge teorica di probabilità

**Osservazione.** Se si conosce solo la tipologia della legge ma non i valori dei parametri o di alcuni di essi, i parametri incogniti devono essere stimati dai dati. Si dimostra che continua a valere il teorema di Pearson ma questa volta

$$T_n \sim \chi^2(m - r - 1)$$

ove $r < m - 1$ è il numero di parametri stimati.

**Esempio.** Nel caso in cui la legge ipotizzata sia una $N(0, 1)$, gli intervalli si determinano con i quantili $\phi_\alpha$, cioè

$$I_1 = ]-\infty, \phi_{1/m}], \qquad I_2 = ]\phi_{1/m}, \phi_{2/m}], \qquad \ldots \qquad I_m = ]\phi_{(m-1)/m}, +\infty[$$

e $m$ si sceglie in modo che $n/m \geq 5$.

# Adattamento ai dati di una legge teorica di probabilità

Consideriamo adesso il caso in cui la distribuzione teorica sia discreta e siano

$$p_i = P(X = i), \qquad i = 0, 1, \ldots, m$$

le probabilità teoriche.

In questo caso si effettua il test del chi-quadro sulle probabilità empiriche.

# Esercizio

Si può adattare una distribuzione di Poisson ai dati della seguente tabella?

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $N_i$ | 584 | 398 | 165 | 35 | 15 |

# Test del chi-quadro di indipendenza

Supponiamo di avere un campione di $n$ coppie $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ con le $X_i$ a valori nell'insieme finito $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e le $Y_j$ a valori nell'insieme finito $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$.

Vogliamo testare se $X_i$ e $Y_i$ sono indipendenti.

Per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, supponiamo che $\pi$ sia la densità congiunta teorica della coppia $(X_i, Y_i)$, cioè

$$\pi_{hk} = P(X_i = a_h, Y_i = b_k), \qquad \forall h = 1, 2, \dots, m, \forall k = 1, 2, \dots, r,$$

supponiamo che $p$ sia la densità marginale teorica delle $X_i$, cioè

$$p_h = P(X_i = a_h), \qquad \forall h = 1, 2, \dots, m$$

e supponiamo che $q$ sia la densità marginale teorica delle $Y_i$, cioè

$$q_k = P(Y_i = b_k), \qquad \forall k = 1, 2, \dots, r.$$

# Test del chi-quadro di indipendenza

Vogliamo testare l'ipotesi nulla

$$H_0 \ : \ \text{le } X_i \text{ e le } Y_i \text{ sono idipendenti} \qquad (\text{cioè } \pi_{hk} = p_h q_k)$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 \ : \ \text{le } X_i \text{ e le } Y_i \text{ non sono idipendenti} \qquad (\text{cioè } \pi_{hk} \neq p_h q_k)$$

Calcoliamo le probabilità empiriche.

Siano $N_h^{(X)}$ il numero di indici $i$ tali che $X_i = a_h$ e $N_k^{(Y)}$ il numero di indici $i$ tali che $Y_i = b_k$. Sia inoltre $N_{hk}$ il numero di indici $i$ tali che $(X_i, Y_i) = (a_h, b_k)$.

Le probabilità empiriche sono date da

$$\bar{p}_h = \frac{N_h^{(X)}}{n}, \qquad \bar{q}_k = \frac{N_k^{(Y)}}{n}, \qquad \bar{\pi}_{hk} = \frac{N_{hk}}{n}.$$

# Test del chi-quadro di indipendenza

Si dimostra che

$$T_n = n \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} \frac{(\bar{p}_h \bar{q}_k - \bar{\pi}_{hk})^2}{\bar{\pi}_{hk}}$$

converge in legge per $n \to +\infty$ a una v.a. $T \sim \chi^2((m-1)(r-1))$.

Pertanto ad un livello di significatività $\alpha \in (0,1)$, la zona di rigetto è data da

$$T_n > \chi^2_{1-\alpha}((m-1)(r-1)).$$

# Esercizio

Si vuole testare se un antibiotico è efficace. Si considerano 170 pazienti. I dati ottenuti sono stati raccolti nella tabella seguente, detta tabella di contingenza,

| | pazienti guariti | pazienti non guariti | |
|---|---|---|---|
| pazienti non trattati | 44 | 10 | 54 |
| pazienti trattati | 81 | 35 | 116 |
| | 125 | 45 | |

I due effetti, trattamento e guarigione, sono indipendenti? Si usi $\alpha = 0.05$.

# Test non parametrici

# Introduzione

Molte delle procedure di test di ipotesi e di stima degli intervalli di confidenza viste fino ad ora sono basate sull'assunzione che i dati provengano da una popolazione normalmente distribuita.

Tradizionalmente queste procedure vengono chiamate test parametrici perché esse sono basate su una particolare famiglia di distribuzioni dipendenti da uno o più parametri.

Adesso invece parleremo di procedure chiamate test non parametrici che di norma non richiedono ipotesi sulla distribuzione del campione.

Un vantaggio dei test non parametrici è che i dati possono essere anche qualitativi.

# Test della mediana

Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione estratto da una popolazione e sia $\tilde{\mu}$ la mediana della popolazione.

Vogliamo testare l'ipotesi nulla

$$H_0 \, : \, \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$$

contro le ipotesi alternative

$$\begin{aligned} H_1 \, &: \, \tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0 \qquad && \text{test bilatero} \\ H_1 \, &: \, \tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0 \qquad && \text{test unilatero a sinistra} \\ H_1 \, &: \, \tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0 \qquad && \text{test unilatero a destra} \end{aligned}$$

Calcoliamo le differenze $X_i - \tilde{\mu}_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$

Se l'ipotesi nulla fosse vera ciascuna differenza avrebbe la stessa probabilità di essere positiva o negativa.

# Test della mediana

Consideriamo prima il **caso unilatero a sinistra**.

Si osserva quindi che il numero teorico di differenze positive $R^+$ segue una binomiale $B(n, 1/2)$.

Sia $r^+$ il numero di differenze positive ottenuto dalle osservazioni.

Si rigetta $H_0$ in favore di $H_1$ se la proporzione di differenze positive è sufficentemente minore di $1/2$. Quindi il p-value è

$$\text{p-value} = P(R^+ \leq r^+),$$

con $R^+ \sim B(n, 1/2)$.

Pertanto se il p-value è minore o uguale ad un prefissato livello di significatività $\alpha \in ]0,1[$ allora si rigetta $H_0$ in favore di $H_1$.

# Test della mediana

Consideriamo adesso il **caso unilatero a destra**.

*Possiamo decidere di seguire sempre il numero di differenze positive.*

Si osserva quindi che il numero teorico di differenze positive $R^+$ segue una binomiale $B(n, 1/2)$.

Sia $r^+$ il numero di differenze positive ottenuto dalle osservazioni.

Si rigetta $H_0$ in favore di $H_1$ se la proporzione di differenze positive è sufficentemente maggiore di $1/2$. Quindi il p-value è

$$\text{p-value} = P(R^+ \geq r^+),$$

con $R^+ \sim B(n, 1/2)$.

Pertanto se il p-value è minore o uguale ad un prefissato livello di significatività $\alpha \in ]0, 1[$ allora si rigetta $H_0$ in favore di $H_1$.

# Test della mediana

Consideriamo infine il **caso bilatero**.

Si rigetta $H_0$ in favore di $H_1$ se la proporzione di differenze positive è sufficentemente diversa da $1/2$ (quindi maggiore o minore).

Pertanto, se $r^+ < n/2$ allora il p-value è

$$\text{p-value} = 2P(R^+ \leq r^+),$$

con $R^+ \sim B(n, 1/2)$.

Se invece $r^+ > n/2$ allora il p-value è

$$\text{p-value} = 2P(R^+ \geq r^+),$$

con $R^+ \sim B(n, 1/2)$.

Pertanto se il p-value è minore o uguale ad un prefissato livello di significatività $\alpha \in ]0, 1[$ allora si rigetta $H_0$ in favore di $H_1$.

# Esercizio

Un motore a reazione è formato legando insieme un propellente di accensione e un propellente di sostegno all'interno di un alloggiamento metallico. La resistenza al taglio del legame tra i due tipi di propellente è una caratteristica importante.

Vogliamo testare l'ipotesi che la mediana della resistenza al taglio sia 2000 psi con una significatività $\alpha = 0.05$.

I dati sono riportati nel file Dataset_motore.dat.

# Test di Kruskal-Wallis

Il test di Kruskal-Wallis è un metodo non parametrico per verificare l'uguaglianza delle mediane di diversi gruppi. Si utilizza per verificare che tali gruppi provengano da una stessa popolazione (o da popolazioni con uguale mediana).

Supponiamo di avere $m$ campioni, ciascuno composto da $n_i$ osservazioni con $i = 1, 2, \dots, m$.

Sia $N$ il numero totale di osservazioni, cioè

$$N = \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Indichiamo con $Y_{ij}$ la $j$-esima osservazione del campione $i$-esimo, quindi

$$Y_{ij}, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \qquad j = 1, 2, \dots, n_i.$$

Ordiniamo le osservazioni dalla più piccola alla più grande assegnando a ciascuna un *rango* crescente: la più piccola avrà rango 1, la più grande avrà rango $N$. Sia $R_{ij}$ il rango di $Y_{ij}$.

# Test di Kruskal-Wallis

In generale i campioni potrebbero provenire da distribuzioni diverse. Indichiamo con $\mu_i$ la mediana di ciascuna popolazione con $i = 1, 2, \ldots, m$.

Vogliamo testare l'ipotesi nulla

$$H_0 \,:\, \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 \,:\, \exists\, k, l \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ tali che } \mu_k \neq \mu_l.$$

Se l'ipotesi nulla fosse vera le $N$ osservazioni proverrebbero dalla stessa popolazione (o da popolazioni con la stessa distribuzione). Quindi ci aspetteremmo che i ranghi siano distribuiti equamente tra i campioni.

# Test di Kruskal-Wallis

Se l'ipotesi nulla è vera la probabilità che la generica osservazione $Y_{ij}$ assuma rango $R_{ij}$ è uniforme e pari a $1/N$, pertanto

$$E[R_{ij}] = \sum_{k=1}^{N} kP(R_{ij} = k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$\mathrm{VAR}(R_{ij}) = \sum_{k=1}^{N} k^2 P(R_{ij} = k) - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{N^2-1}{12}$$

Sia $\bar{R}_i$ la media dei ranghi dell'$i$-esimo campione, cioè

$$\bar{R}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}.$$

Pertanto, per un lemma visto in precedenza

$$E[\bar{R}_i] = \frac{N+1}{2}, \qquad \mathrm{VAR}(\bar{R}_i) = \frac{N^2-1}{12}\frac{1}{n_i}.$$

# Test di Kruskal-Wallis

Il test di Kruskal-Wallis misura il grado a cui i ranghi medi osservati $\bar{R}_i$ differiscono dai loro valori attesi $\frac{N+1}{2}$. Se questa differenza è grande si rigetta l'ipotesi nulla. Si considera la statistica

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{m} n_i \left( \bar{R}_i - \frac{N+1}{2} \right)^2$$

e si rigetta $H_0$ se $H \geq \chi^2_\alpha(m-1)$, ove $\alpha \in ]0,1[$ è il livello di significatività.

Questa procedura è giustificata per campioni che soddisfano una tra le condizioni

$$\begin{array}{llll} m = 3, & \text{and} & n_i \geq 6, & \text{for } i = 1,2,3 \\ m > 3, & \text{and} & n_i \geq 5, & \text{for } i = 1,2,\ldots,m \end{array}$$

# Test di Kruskal-Wallis

In presenza di dati ripetuti si assegna un rango medio a ciascuno di essi. In questo caso si utilizza la statistica

$$H = \frac{1}{S^2}\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{R_i^2}{n_i} - \frac{N(N+1)^2}{4}\right]$$

ove $R_i = n_i\bar{R}_i = \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}$ e

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}^2 - \frac{N(N+1)^2}{4}\right]$$

Se il numero di dati ripetuti è basso si può utilizzare ancora la prima statistica.

# Esercizio

In un esperimento si confrontano quattro diverse tecniche di mescolamento per il cemento e si misura la resistenza alla trazione. Si può affermare che la tecnica di mescolamento influisca sulla resistenza alla trazione? Si usi $\alpha = 0.05$.

| Mixing Technique | Tensile Strength (lb/in.$^2$) | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3129 | 3000 | 2865 | 2890 |
| 2 | 3200 | 3000 | 2975 | 3150 |
| 3 | 2800 | 2900 | 2985 | 3050 |
| 4 | 2600 | 2700 | 2600 | 2765 |

# Riferimenti bibliografici


1. V. Romano, Metodi matematici per i corsi di ingegneria, Città Studi, 2018.
2. P. Baldi, Calcolo delle probabilità e statistica, Mc Graw-Hill, Milano, 1992.
3. R. Scozzafava, Incertezza e probabilità, Zanichelli, 2001.
4. D. C. Montgomery, G. C. Runger, Applied statistics and probability for engineers, 7th Edition, J. Wiley, 2018.