Cognome e Nome: ______________________ ______________________ **Matricola:** ______________________

Esame di Strutture Discrete
6 Settembre 2021
Soluzioni

Prima parte

1. Dati un insieme U ed una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$, quali condizioni deve verificare $\mathcal{F}$ per poter essere definita "una partizione di U" ?

   Risposta: *La famiglia $\mathcal{F}$ deve verificare le seguenti condizioni*

   - *Gli elementi di $\mathcal{F}$ devono coprire esattamente U, ovvero per ogni $X \in \mathcal{F}$, $X \subseteq U$ ed in particolare $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = U$*
   - *Gli elementi di $\mathcal{F}$ sono a due a due disgiunti, ovvero per ogni $X, Y \in \mathcal{F}$ deve essere $X \cap Y = \emptyset$*

2. Dimostrare che $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

   Risposta: *Per dimostrare l'uguaglianza dei 2 insiemi dimostriamo le 2 inclusioni*

   - $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$ *: sia $x \in (A \cup B)^C$ allora dalla definizione di insieme complemento abbiamo che $x \notin (A \cup B)$. Se x non appartiene all'unione di A e B non appartiene ad entrambi i 2 insiemi, ossia $x \notin A$ e $x \notin B$ cioè $x \in A^C$ e $x \in B^C$ e quindi $x \in A^C \cap B^C$*
   - $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$ *: sia $x \in A^C \cap B^C$ allora dalla definizione di intersezione $x \in A^C$ e $x \in B^C$ e quindi $x \notin A$ e $x \notin B$. Dalla definizione di unione abbiamo allora che $x \notin A \cup B$ e quindi $x \in (A \cup B)^C$.*

Seconda parte

3. Sia $n > 1$ un numero dispari. Dimostrare, utilizzando la formula generale per il calcolo della funzione di Eulero, che $\phi(2 \cdot n) = \phi(n)$.

   Risposta: *Se consideriamo la fattorizzazione di n abbiamo*

   $$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$$

   dove nessuno dei numeri primi è uguale a 2 dal momento che n è dispari. La fattorizzazione di $2n$ è allora

   $$2n = 2 \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}.$$

   Dalla formula generale per il calcolo della funzione di Eulero abbiamo che

   $$\phi(n) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \cdot (p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \cdot \ldots \cdot (p_m^{k_m} - p_m^{k_m-1}) = \phi(n)$$

   Quindi,

   $$\phi(2n) = (2^1 - 2^0) \cdot (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \cdot (p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \cdot \ldots \cdot (p_m^{k_m} - p_m^{k_m-1}) = 1 \cdot \phi(n)$$

4. Calcolare l'inverso modulare di 77 modulo 17.

   Risposta: *Dal momento che $77^{\phi(17)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 17)$ l'inverso modulare di 77 modulo 17 è $77^{\phi(17)-1} (\mathrm{mod}\ 17)$. Più semplicemente, visto che $77 \bmod 17 \equiv (77 \bmod 17) \bmod 17$ abbiamo che l'inverso modulare di 77 modulo 17 è uguale all'inverso modulare di $77 \bmod 17 = 9$. Quindi, visto che $9 \cdot 2 = 18$ e $18 \bmod 17 = 1$ l'inverso modulare di 77 modulo 17 è uguale all'inverso modulare di 9 modulo 17 ed è uguale a 2.*

Terza parte

5. All'appello di Strutture Discrete si presentano 40 studenti tutti provenienti dalle province di Catania, Siracusa, Messina e Ragusa. Dimostrare che se il numero di studenti della provincia di Catania è inferiore a 10 allora ci sono almeno 11 studenti tutti provenienti da una delle altre 3 province.

   Risposta: *Se il numero di studenti provenienti dalla provincia di Catania è inferiore a 10 allora ci sono almeno 31 studenti provenienti dalle altre 3 province. Per il Pigeonhole Principle almeno 11 studenti proverranno tutti da una di queste 3 province.*

6. Il 70% degli studenti del primo anno di Informatica hanno frequentato le lezioni di Strutture Discrete. La probabilità che uno studente superi l'esame di Strutture Discrete e ne acquisisca i crediti entro settembre è 80% per gli studenti che hanno frequentato e del 30% per quelli che non hanno frequentato le lezioni. Calcolare

   - qual è la probabilità che uno studente superi l'esame entro settembre;
   - qual è la probabilità che uno studente abbia frequentato le lezioni dato che ha superato l?esame entro settembre.

   Denotate nella risposta con S l'evento "lo studente supera l'esame entro settembre" e con F l'evento "lo studente ha frequentato le lezioni". Quindi, calcolate $P(S)$ e $P(F|S)$.

   Risposta: *Riflettiamo con un esempio: 100 studenti, 70 frequentano e 30 non frequentano. 52.5 frequentanti superano, 9 non frequentanti superano. $P(S) = 0.615$. $P(F|S) = 52.5/61.5 = 0.853$.*
   Formalmente, visto il dato statistico, abbiamo che $P(F) = 0.7$ e quindi $P(\neg F) = 1 - P(F) = 0.3$ Sappiamo inoltre che

   $$P(S|F) = 0.75 \text{ e } P(S|\neg F) = 0.3$$

   L'evento S possiamo vederlo come unione di due eventi mutuamente esclusivi

   $$S = (S \wedge F) \vee (S \wedge \neg F)$$

   Quindi,

   $$P(S) = P(S \wedge F) + P(S \wedge \neg F)$$

   e utilizzando la definizione di probabilità condizionata abbiamo

   $$P(S \wedge F) = P(S|F)P(F) = 0.75 \cdot 0.7 = 0.525 \text{ e } P(S \wedge \neg F) = P(S|\neg F)P(\neg F) = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09$$

   Quindi, $P(S) = 0.525 + 0.09 = 0.615$. Infine

   $$P(F|S) = \frac{P(S|F)P(F)}{P(S)} = \frac{0.75 \cdot 0.7}{0.65} = \frac{0.525}{0.615} = .853$$

Quarta parte

7. Dare la definizione di grafo regolare e dire cosa possiamo dire sul numero di vertici di un grafo regolare di grado dispari.

   Risposta: *Un grafo si dice regolare se tutti i suoi vertici hanno lo stesso grado. Se il grado r del grafo è dispari, dal momento che la somma di tutti i gradi dei vertici è uguale al doppio del numero degli archi, otteniamo*

   $$|V| \cdot r = 2|E| \text{ e quindi } |V| = 2\frac{|E|}{r}$$

   ossia il grafo ha un numero pari di vertici.

8. Definire formalmente il concetto di isomorfismo tra grafi.

   Risposta: *Due grafi, sia entrambi orientati che entrambi non orientati, $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ si dicono isomorfi se esiste una applicazione biunivoca f dall'insieme dei vertici V_1 nell?insieme dei vertici V_2 tale che $(f(u), f(v))$ è un arco di E_2 se e solo se (u, v) è un arco di E_1.*