Cognome e Nome: ______________________ ______________________ **Matricola:** ______________________

Esame di Strutture Discrete
17 Febbraio 2021
Soluzioni

Prima parte

1. La formula $\neg(p \Rightarrow q)$ è equivalente a
   A. $\neg p \vee \neg q$
   B. $\neg p \wedge \neg q$
   C. $p \vee \neg q$
   D. $p \wedge \neg q$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

   Giustificazione: *L'implicazione è $p \Rightarrow q$ è logicamente equivalente (è la sua definizione) alla disgiunzione $\neg p \vee q$. Dobbiamo allora negare la disgiunzione e lo facciamo applicando la regola di De Morgan e ricordando che la doppia negazione si elimina*

$$\neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q)$$

2. Se trasformiamo in Forma Normale Disgiuntiva la formula $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ otteniamo:
   A. $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$
   B. $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$
   C. $(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   D. $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)$

   Giustificazione: *Eliminiamo le implicazioni sostituendole con le disgiunzioni equivalenti ed otteniamo*

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$$

   Distribuiamo la disgiunzione ed otteniamo

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$$

   La congiunzione $(q \wedge \neg q)$ è ovviamente equivalente a F e si può eliminare.

3. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$ quali delle seguenti affermazioni riguardo a $pow(A) \setminus pow(B)$ è vera?
   A. $pow(A) \setminus pow(B) = pow(\{1, 4\})$
   B. $|pow(A) \setminus pow(B)| = 4$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   C. $|pow(A) \setminus pow(B)| = 2$
   D. Le precedenti affermazioni sono tutte false

   Giustificazione: *Calcolando i 2 insiemi potenza abbiamo*

$$\begin{aligned} pow(A) &= \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\\ &\quad\ \{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\},\emptyset\} \\ pow(B) &= \{\{2,3,4\},\{2,3\},\{2,4\},\\ &\quad\ \{3,4\},\{2\},\{3\},\{4\},\emptyset\} \end{aligned}$$

   Quindi $pow(A) \setminus pow(B)$ è uguale a

$$\{\ \{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{1\}\}$$

4. Sia data la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ quanti elementi avrà la chiusura di $\mathcal{A}$ rispetto all'unione?
   A. 7 **(RISPOSTA CORRETTA)**
   B. 8
   C. 16
   D. 64

   Giustificazione: *La chiusura rispetto all'unione contiene i 3 insiemi da cui partiamo e tutti gli insiemi ottenibili da unioni di 2 o più di tali insiemi. Quindi, contiene*

$$\begin{gathered} \{1,2\},\{3,4\},\{5,6\} \\ \{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\} \\ \{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\} \end{gathered}$$

5. Una relazione binaria R definita su un insieme U si dice antisimmetrica se per ogni $x, y \in U$
   A. se $R(x, y)$ è vero, allora $R(y, x)$ è falso
   B. se $R(x, y)$ è vero e $R(y, x)$ è pure vero, allora $x = y$ (RISPOSTA CORRETTA)
   C. se $R(x, x)$ è vero, allora $R(y, y)$ è vero
   D. se $R(x, y)$ è falso, allora $R(y, x)$ è vero

   Giustificazione: *Controlla la definizione di relazione antisimmetrica.*

Seconda parte

6. L'algoritmo di Euclide ci dice che $MCD(153, 72)$ è uguale a
   A. $MCD(153, 12)$
   B. $MCD(72, 18)$
   C. $MCD(72, 9)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   D. $MCD(36, 9)$

   Giustificazione: *Ad ogni passo, l'algoritmo di Euclide ci dice che se $a \geq b$ e $b > 0$ allora*

$$MCD(a, b) = MCD(b, a \bmod b)$$

   Nel nostro caso $153 \bmod 72 = 9$ *poiché* $153 = 2 \cdot 72 + 9$.

7. Considerato che 671 è il prodotto dei due numeri primi 61 e 11 allora $\phi(671)$ è uguale a
   A. 670
   B. 610
   C. 600 **(RISPOSTA CORRETTA)**

D. 160

Giustificazione: *Ricordiamo che se* p *è primo* $\phi(p) = p - 1$ *e ricordiamo anche che se* $n = p_1 \cdot p_2$ *con* p_1 *e* p_2 *primi, allora* $\phi(n) = \phi(p_1) \cdot \phi(p_2) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1)$ *quindi nel nostro caso* $60 \cdot 10 = 600$.

8. 31^{33} è congruo a

A. $1 \bmod 32$

B. $11 \bmod 32$

C. $15 \bmod 32$

D. $31 \bmod 32$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

Giustificazione: 31 *e* 32 *sono coprimi, e quindi*

$$31^{33} \equiv 31^{33 \bmod \phi(32)} \bmod 32$$

Inoltre, $32 = 2^5$ *quindi* $\phi(32) = 2^5 - 2^4 = 16$. *Allora,* $33 \bmod \phi(32) = 33 \bmod 16 = 1$. *E dal momento che* $31 \bmod 32 = 31$ *abbiamo che* $31^1 \equiv 31 \bmod 32$

9. Senza calcolare il risultato dei prodotti, quale dei seguenti è un numero perfetto ?

A. $255 \cdot 128$

B. $127 \cdot 64$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

C. $63 \cdot 32$

D. Nessuno dei 3 prodotti è un numero perfetto.

Giustificazione: *Sappiamo che (Euclide) se* $2^p - 1$ *è primo allora* $(2^p - 1) \cdot 2^{p-1}$ *è perfetto. Sappiamo anche che (Eulero) tutti i numeri perfetti (pari) sono di tale forma. Quindi, le risposte a e c sono sbagliate perché* 255 *(divisibile per* 5*) e* 63 *(divisible per* 3*) non sono primi.* $127 = 2^7 - 1$ *è invece primo e quindi la risposa b è corretta.*

10. Quale dei seguenti interi non appare nella traiettoria di Collatz di 9

A. 54 **(RISPOSTA CORRETTA)**

B. 34

C. 26

D. 22

Giustificazione: *La sequenza di Collatz del numero* 9 *è*

$$28, 14, 7, \boldsymbol{22}, 11, \boldsymbol{34}$$
$$17, 52, \boldsymbol{26}, 13, 40, 20$$
$$10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$$

L'unico dei 4 *numeri che non appare nella sequenza è* 54.

Terza parte

11. Quale delle seguenti uguaglianze è vera?

A. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k-2}$

B. $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

C. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

D. $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$

Giustificazione: *Basta ricordare una delle proprietà fondamentali dei coefficienti binomiali. Se non la si ricorda, basta ricordare la definizione*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Quindi

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

e

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

Sommando, abbiamo

$$\frac{k \cdot (n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!}$$

e quest'ultima uguaglianza dimostra che la c è la risposta corretta.

12. Dati 2 insiemi A e B entrambi di cardinalità 4, quante sono le funzioni iniettive diverse da A a B?

A. 4

B. 8

C. 16

D. 24 **(RISPOSTA CORRETTA)**

Giustificazione: *Il numero delle applicazioni iniettive di* A *in* B *è dato dal numero di disposizioni semplici, in questo caso di* 4 *elementi di classe* 4*, ovvero* $D_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ *ovvero* $4! = 24$.

13. Due amici giocano a dadi. Ognuno lancia il dado. Se i 2 lanci danno risultato uguale, non vince nessuno. Altrimenti vince chi ottiene il risultato più alto. Qual è la probabilità di vincere?

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{5}{12}$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

D. $\frac{8}{25}$

Giustificazione: *Il numero dei casi totali è ovviamente* 36. *In* 6 *di questi casi, i* 2 *lanci danno risultato uguale e non vince nessuno. I rimanenti* 30 *casi danno risultati diversi e, ovviamente, nella metà dei casi vince un giocatore, nell'altra metà vince l'altro giocatore. Quindi, per un giocatore la probabilità di vincere è* $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. *Un altro modo per calcolare tale probabilità è il seguente: ragioniamo dal punto di vista del giocatore A che gioca contro il giocatore B*

- *se lanciando il dado A ottiene* 6 *vince in* 5 *casi su* 6*, ossia non vince nell'unico caso in cui anche B ottiene* 6

- *se lanciando il dado A ottiene* 5 *vince in* 4 *casi su* 6*, ossia non vince nel caso in cui anche B ottiene* 5*, oppure B ottiene* 6
- *se lanciando il dado A ottiene* 4 *vince in* 3 *casi su* 6
- *se lanciando il dado A ottiene* 3 *vince in* 2 *casi su* 6
- *se lanciando il dado A ottiene* 2 *vince in* 1 *caso su* 6.

Quindi, il numero dei casi che vedono A vincitore è $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

14. Un dado ha sulle 6 facce i valori $2, 4, 8, 16, 32, 64$. Lanciando il dado, qual è il valore atteso?

A. 12

B. 21 **(RISPOSTA CORRETTA)**

C. 24

D. 36

Giustificazione: *Il valore atteso si ottiene ognuno dei valori della variabile casuale moltiplicato per la probabilità che si abbia quel valore. Nel nostro caso si moltiplica ognuno dei valori* $2, 4, 8, 16, 32, 64$ *per* $\frac{1}{6}$ *e si calcola la somma*

$$\frac{1}{6}(2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) = \frac{126}{6} = 21.$$

15. Tra chi possiede un portatile, solo una persona su 10 è un informatico e solo una persona su 20 ha un portatile Linux. Tra gli informatici, 4 su 10 posseggono un portatile Linux. Giovanni ha un portatile Linux. Qual è la probabilità che Giovanni sia un informatico?

A. $\frac{5}{12}$

B. $\frac{6}{10}$

C. $\frac{7}{12}$

D. $\frac{8}{10}$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

Giustificazione: *Per risolvere questo problema utilizziamo la regola di Bayes*

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

L'universo dei casi possibili è l'insieme di chi possiede un portatile. Sia A *l'evento: "la persona possiede un portatile Linux"; sia* B *l'evento: "la persona che possiede il portatile è un informatico". Quindi,* $P(B) = \frac{1}{10}$ *e* $P(A) = \frac{1}{20}$*. Tra gli informatici,* 4 *su* 10 *posseggono un portatile Linux, quindi* $P(A|B) = \frac{4}{10}$*. Se Giovanni ha un portatile Linux, per la regola di Bayes, la probabilità che Giovanni sia un informatico è*

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10}\frac{1}{10}}{\frac{1}{20}} = \frac{8}{10}$$

Quarta parte

16. Un grafo, connesso e planare con 20 archi, ha lo stesso numero di vertici e di facce. Quanti vertici ha?

A. 9

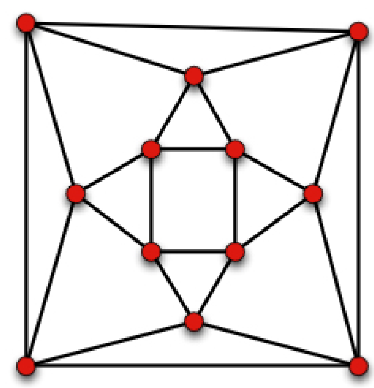
B. 10

C. 11 **(RISPOSTA CORRETTA)**

D. Non è possibile calcolarlo a priori.

Giustificazione: *Per la formula di Eulero* $v - e + f = 2$*. Se* $e = 20$ *e* $v = f$ *abbiamo* $2v = 22$ *e quindi* $v = 11$.

17. Dato il grafo in figura



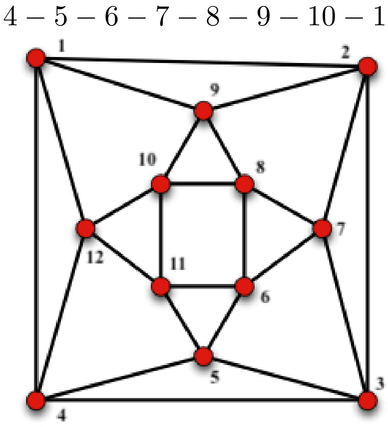
A. il grafo non è euleriano né hamiltoniano

B. il grafo è euleriano ma non hamiltoniano

C. il grafo non è euleriano ma è hamiltoniano

D. il grafo è sia euleriano che hamiltoniano (RISPOSTA CORRETTA)

Giustificazione: *Il grafo è euleriano perché tutti i vertici hanno grado pari. Il grafo è anche hamiltoniano, come mostrato nella figura che segue, numerando i vertici e mostrando il ciclo hamiltoniano* $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 1$.



18. Dato il grafo della domanda precendente, quanti archi possiamo e dobbiamo ancora aggiungere per renderlo un grafo planare massimale?

A. 6 **(RISPOSTA CORRETTA)**

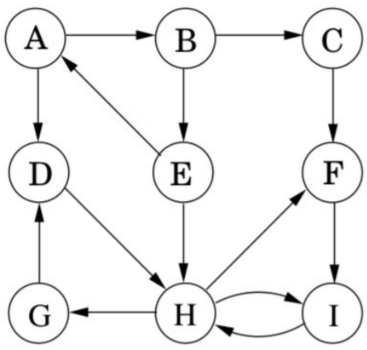
B. 5

C. 4

D. 3

Giustificazione: *Un grafo planare massimale è tale che tutte le sue facce, inclusa quella esterna, sono definite da tre archi. Quindi, un grafo planare massimale con* v *vertici ha esattamente* $3v - 6$ *archi. Il grafo in questione ha* 12 *vertici quindi se fosse* *massimale avrebbe* 30 *archi. Di archi, però, ne ha solo* 24*. Quindi ne possiamo, e dobbiamo, aggiungere ancora* 6 *per renderlo massimale. Infatti, dobbiamo aggiungere gli archi (cfr. il grafo con i vertici numerati):* $(1,10),(2,8),(3,6),(4,11)$ *e poi uno tra* $(8,11)$ *e* $(6,10)$ *ed un altro tra* $(1,3)$ *e* $(2,4)$.

19. Dato il grafo orientato in figura, quante sono le sue componenti fortemente connesse?



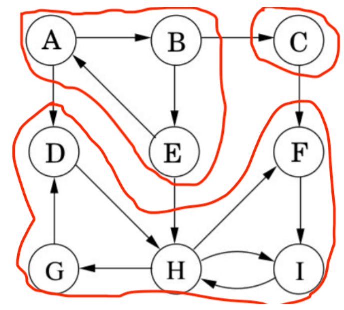
A. 3 **(RISPOSTA CORRETTA)**

B. 4

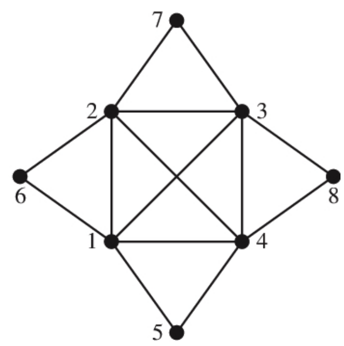
C. 5

D. 6

Giustificazione: *Il grafo possiede* 3 *componenti fortemente connesse, vedi grafo in figura. Notate che per ogni coppia di vertici* u *e* v *in una componente fortemente connessa, esiste un cammino da* u *a* v *ed un cammino da* v *ad* u*. La proprietà è banalmente vera per la componente connessa che possiede un solo vertice.*



20. Dato il grafo in figura, qual è il suo numero cromatico?



A. 3

B. 4 **(RISPOSTA CORRETTA)**

C. 5

D. 6

Giustificazione: *Il sottografo indotto dai vertici* $1,2,3,4$ *è un* K_4 *quindi servono almeno* 4 *colori. Poi, diamo al* 5 *il colore del* 2*, al* 6 *il colore del* 3*, al* 7 *il colore del* 4*, e al* 8 *il colore del* 1 *e ci accorgiamo che* 4 *colori sono non solo necessari ma anche sufficienti.*