Esercitazione Test scritto di Strutture Discrete (6CFU)
Giugno 2021 **Soluzioni**

Ecco le soluzioni alle domande del test di esercitazione. Ci sono 2 domande, nello specifico la 1 e la 14 dove nessuna delle risposte proposte è corretta. Mia distrazione, nella prima ho dimenticato di cambiare la risposta D nella classica "nessuna delle risposte precedenti è corretta", la quale risposta doveva essere quella corretta. Nella domanda 14 ho invece inserito le risposte di una domanda (molto simile) dell'esame del 23 che ho preparato in contemporanea con il test di esercitazione. Ovviamente, mi tocca rimuovere quella domanda dal test d'esame.

In ogni caso, qui vi descrivo la soluzione corretta.

Strutture Discrete:

Test di Esercitazione: risposte ai quesiti
Giugno 2021

Prima parte

1. La formula $(a \vee b) \Rightarrow c$ è equivalente a
   A. $\neg a \vee \neg b \vee \neg c$
   B. $(\neg a \wedge c) \vee (\neg b \wedge c)$
   C. $(\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c)$
   D. $a \vee b \vee \neg c$

   NESSUNA RISPOSTA CORRETTA. Giustificazione: *La risposta d) doveva essere* ***Nessuna delle precedenti*** *e quindi doveva essere la risposta corretta. Perché nessuna risposta, tra quelle date, è corretta?*
   La formula è un'implicazione. Quindi è vera se la premessa è falsa ossia $(a \vee b)$ falsa, oppure se è vera la conseguenza ossia c vera. Quindi, è logicamente equivalente a $\neg(a \vee b) \vee c$ che a sua volta, utilizzando De Morgan, è equivalente a $(\neg a \wedge \neg b) \vee c$. Distribuendo otteniamo $(\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$.
   La formula data è quindi vera quando è vera c indipendentemente dal valore delle altre 2. Oppure, nel caso c sia falsa, quando anche a e b sono false.
   Invece, le risposte A), B), C) sono false quando tutte e 3 le variabili booleane sono vere. La risposta D) è falsa quando c è vera, e a e b sono false.

2. Se trasformiamo in CNF la seguente formula in DNF $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ otteniamo:
   A. $(\neg b \vee c) \wedge (\neg c \vee b)$
   B. $(\neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee a)$
   C. $a \wedge (\neg c \vee b)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   D. $a \wedge (\neg b \vee c)$

   Giustificazione: *Applichiamo la regola di trasformazione da DNF in CNF. Dobbiamo prendere in tutti i modi possibili un letterale da ognuna delle 3 congiunzioni ed ottenere quindi 27 clausole. Cominciamo prendendo a dalla prima, ne abbiamo 9*

   $(a \vee a \vee a)$ *sempl.:* a
   $(a \vee a \vee \neg b)$ *sempl.:* $a \vee \neg b$
   $(a \vee a \vee \neg c)$ *sempl.:* $a \vee \neg c$
   $(a \vee b \vee a)$ *sempl.:* $a \vee b$
   $(a \vee b \vee \neg b)$ *sempl.:* $a \vee true \equiv true$
   $(a \vee b \vee \neg c)$
   $(a \vee \neg c \vee a)$ *sempl.:* $a \vee \neg c$
   $(a \vee \neg c \vee \neg b)$
   $(a \vee \neg c \vee \neg c)$ *sempl.:* $a \vee \neg c$

   che dobbiamo congiungere. Dal momento che la congiunzione impone che tutte le clausole devono essere vere, quelle "true" le possiamo eliminare, e possiamo eliminare tutte quelle che contengono a perché a deve essere vera per la prima clausola. Rimane quindi solo la clausola a.
   Continuiamo prendendo b dalla prima, ne abbiamo altre 9

   $(b \vee a \vee a)$ *sempl.:* $a \vee b$
   $(b \vee a \vee \neg b)$ *sempl.:* $true$
   $(b \vee a \vee \neg c)$
   $(b \vee b \vee a)$ *sempl.:* $a \vee b$
   $(b \vee b \vee \neg b)$ *sempl.:* $true$
   $(b \vee b \vee \neg c)$ *sempl.:* $b \vee \neg c$
   $(b \vee \neg c \vee a)$
   $(b \vee \neg c \vee \neg b)$ *sempl.:* $true$
   $(b \vee \neg c \vee \neg c)$ *sempl.:* $b \vee \neg c$

   che dobbiamo congiungere tra di loro e alla clausola a ottenuta prima. Eliminando, come prima, le clausole che contengono a e quelle "true" rimane la clausola $b \vee \neg c$. Quindi, dopo queste prime 2 parti, abbiamo $a \wedge (b \vee \neg c)$. Terminiamo prendendo c dalla prima congiunzione, ed abbiamo

   $(c \vee a \vee a)$ *sempl.:* $a \vee c$
   $(c \vee a \vee \neg b)$
   $(c \vee a \vee \neg c)$ *sempl.:* $true$
   $(c \vee b \vee a)$
   $(c \vee b \vee \neg b)$ *sempl.:* $true$
   $(c \vee b \vee \neg c)$ *sempl.:* $true$
   $(c \vee \neg c \vee a)$ *sempl.:* $true$
   $(c \vee \neg c \vee \neg b)$ *sempl.:* $true$
   $(c \vee \neg c \vee \neg c)$ *sempl.:* $true$

   che, semplificando come sopra, non ci fa aggiungere altre clausole.

3. $C \setminus (A \cup B)$ **NON** è uguale a
   A. $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
   B. $(C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   C. $(C \setminus A) \setminus B$
   D. $(C \setminus B) \setminus A$

   Giustificazione: *Ricordiamo che 2 insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi. Dal momento che dobbiamo verificare una diseguaglianza, andiamo con un esempio. Prendiamo $C = \{1,2,3,4\}, A = \{1,2\}, B = \{3,4\}$. Si ha $C \setminus A = \{3,4\}$ e $C \setminus B = \{1,2\}$. Quindi, $(C \setminus A) \cup (C \setminus B) = C$ mentre $C \setminus (A \cup B) = \emptyset$.*
   Notate inoltre che

   - $(C \setminus A) \cap (C \setminus B) = \emptyset$
   - $(C \setminus A) \setminus B = \{3,4\} \setminus B = \emptyset$
   - $(C \setminus B) \setminus A = \{1,2\} \setminus A = \emptyset$

4. Siano dati 2 insiemi A, B e sia R una relazione definita su $A \times B$. Tale relazione è una "funzione" da A in B se,

A. $\forall x \in A, \forall y \in B$ si ha $(x, y) \in R$

B. $\exists x \in A, \exists y \in B$ tale $(x, y) \in R$

C. $\forall y \in B$, esiste un solo $x \in A$ tale che $(x, y) \in R$

D. $\forall x \in A$, **esiste un solo** $y \in B$ **tale che** $(x, y) \in R$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

Giustificazione: *Definizione di funzione. Ad ogni elemento del dominio, corrisponde un solo elemento del codominio.*

5. Sia data la seguente famiglia di 4 insiemi

$$\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}\}$$

Se la chiudiamo rispetto all'unione, quanti insiemi avrà la famiglia ottenuta?

A. 7

B. 8

C. 9 **(RISPOSTA CORRETTA)**

D. 10

Giustificazione: *Chiudiamo l'insieme dato rispetto all'unione. Dobbiamo aggiungere ai suoi elementi, tutti gli insiemi ottenuti da unioni: Quindi:*

- $\{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$
- $\{2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$
- $\{2, 3\} \cup \{2, 5\} = \{2, 3, 5\}$
- $\{4, 5\} \cup \{2, 5\} = \{2, 4, 5\}$

Seconda parte

6. Quanto vale $-121 \bmod 15$?

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14 **(RISPOSTA CORRETTA)**

Giustificazione: $15 \cdot (-8) = -120$ *che è più grande di* -121 *quindi calcoliamo* $15 \cdot (-9) = -135$ *da cui otteniamo* $-121 = 15 \cdot (-9) + 14$.
Utilizzando il teorema della divisione con tutti i casi per a/b *agiamo in questo modo*

- *calcoliamo* $121/15$ *e otteniamo* $121 = 15 \cdot 8 + 1$ *quindi* $q = 8$ *e* $r = 1$.
- *Siamo nel secondo caso, cioè dividendo negativo e divisore positivo, quindi la regola ci dice* $q' = -q - 1 = -8 - 1 = -9$ *e* $r' = b - r = 15 - 1 = 14$

7. L'assioma del buon ordinamento afferma che se A è un qualunque insieme non vuoto di numeri naturali, allora

A. esiste $a \in A$ **tale che** $a \leq b$ **per ogni** $b \in A$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

B. esiste $a \in A$ tale che $a \geq b$ per ogni $b \in A$

C. esiste $a \in A$ tale che $a \leq b$ per ogni b numero naturale

D. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

Giustificazione: *Vedi definizione dell'Assioma.*

8. Quali dei seguenti è un numero primo?

A. 223 **(RISPOSTA CORRETTA)**

B. 203

C. 187

D. 91

Giustificazione: *Il massimo intero minore o uguale della radice quadrata di* 223 *è* 14. *Dobbiamo quindi verificare, velocemente, se* 223 *è divisibile per* $2, 3, 5, 7, 11$.

- *per* 2 *no, perché dispari;*
- *per* 3 *no, perché la somma delle sue cifre è* 7 *e non è un multiplo di* 3;
- *per* 5 *no, perché non termina con* 0 *o* 5;
- *per* 7 *no, perché* $22 - 2 \cdot 3 = 16$ *non è un multiplo di* 7;
- *per* 11 *no, perché la somma delle cifre di posto dispari è* 5 *e quella delle cifre di posto pari è* 2.

Notate anche che

- 203 *è divisibile per* 7 *perché* $20 - 2 \cdot 3 = 14$ *che è un multiplo di* 7; $203 = 7 \cdot 29$.
- 187 *è divisibile per* 11 *perché la somma delle cifre di posto dispari è* 8 *e quella delle cifre di posto pari è pure* 8; $187 = 11 \cdot 17$.
- 91 *è divisibile per* 7 *perché* $9 - 2 \cdot 1 = 7$ *che è un multiplo di* 7; $91 = 7 \cdot 13$.

9. Quanto vale $\phi(132)$?

A. 40 **(RISPOSTA CORRETTA)**

B. 42

C. 45

D. 48

Giustificazione: $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, *quindi* $\phi(132) = 2 \cdot 2 \cdot 10 = 40$.

10. Qual è l'inverso di 250 modulo 13?

A. 5

B. 7

C. 9 **(RISPOSTA CORRETTA)**

D. 11

Giustificazione: $250 \bmod 13 = 3$ *e quindi* $3 \cdot 9 (\bmod 13) = 27 \bmod 13 = 1$.

Terza parte

11. Come conseguenza del Teorema Binomiale si ha che $\sum_{k=0}^{20} \binom{n}{k} 2^k$ è uguale a

A. 3^{20} **(RISPOSTA CORRETTA)**

B. 2^{30}

C. $20 \cdot 2^{20}$

D. $(2^{20})^2$

Giustificazione: *Avevo già detto che la formula giusta era $\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^k$. Quindi, abbiamo*

$$3^{20} = (2+1)^{20} = \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^k \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^k$$

12. Prendiamo 20 numeri interi positivi a caso. Quali delle seguenti affermazioni è vera
    A. Ci sono almeno 5 numeri che sono congrui modulo 5
    B. Ci sono almeno 4 numeri che sono congrui modulo 4 (RISPOSTA CORRETTA)
    C. Entrambe le affermazioni precedenti sono vere
    D. Tutte le affermazioni precedenti sono false

    Giustificazione: *I resti modulo 4 sono 4. Quindi, presi 20 numeri e calcolando i resti della divisione per 4 è possibile che 12 di essi siano suddivisi in egual numero tra i 4 gruppi. Ma i rimanenti 8 di sicuro andranno a formare almeno un gruppo di 4 (Pidgeon Hole Principle).*
    Se prendiamo invece 20 numeri e consideriamo i resti modulo 5 (che sono 5) è possibile che i 20 numeri siano suddivisi in gruppi di ugual numero 4 tra i 5 gruppi diversi. Esempio, prendete tutti i numeri da 1 a 20.

    - $1, 6, 11, 16$ *vanno nel gruppo* 1.
    - $2, 7, 12, 17$ *vanno nel gruppo* 2.
    - $3, 8, 13, 18$ *vanno nel gruppo* 3.
    - $4, 9, 14, 19$ *vanno nel gruppo* 4.
    - $5, 10, 15, 20$ *vanno nel gruppo* 0.

13. All'esame scritto di Strutture Discrete si presentato 10 studenti, 6 dei quali residenti in provincia di Catania. Se superano l'esame in 3 qual è la probabilità che a superarlo siano stati solo gli studenti non residenti in provincia di Catania?
    A. $\frac{4}{10}$
    B. $\frac{2}{15}$
    C. $\frac{1}{30}$ (RISPOSTA CORRETTA)
    D. $\frac{1}{40}$

    Giustificazione: *Numero di casi possibili $\binom{10}{3} = 120$. Numero di casi favorevoli $\binom{4}{3} = 4$. Quindi, $\frac{4}{120} = \frac{1}{30}$*

14. In un urna ci sono 2 palline rosse, 3 bianche e 4 verdi e 5 blue, qual è la probabilità che estraendone 4 a caso, senza reinserimento, le palline siano tutte di colore diverso?
    A. $\frac{3}{61}$
    B. $\frac{4}{71}$
    C. $\frac{5}{81}$
    D. $\frac{6}{91}$

    NESSUNA RISPOSTA CORRETTA. Giustificazione: *Numero di casi possibili, ovvero tutti i modi possibili di estrarre 4 palline senza reinserimento da un'urna che ne contiene 14 sono $\binom{14}{4} = 1001$. Numero di casi favorevoli si calcola contando in quanti modi posso scegliere una pallina da ognuno degli insiemi di 4 colori, e moltiplicando tali valore. Ossia*

    $$\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{1}$$

    e quindi $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Quindi, la risposta corretta è $\frac{120}{1001}$.

15. Il 60% degli studenti di Informatica, che sono il 5% degli studenti di UNICT, conosce il Teorema di Bayes, mentre solo il 10% degli studenti totali di UNICT lo conosce. Qual è la probabilità che uno studente scelto a caso e che conosce il Teorema di Bayes sia uno studente di Informatica?
    A. $\frac{2}{10}$
    B. $\frac{3}{10}$ (RISPOSTA CORRETTA)
    C. $\frac{4}{10}$
    D. $\frac{5}{10}$

    Giustificazione: *Se B è l'evento "studente che conosce il Teorema di Bayes", I è l'evento "studente di Informatica", abbiamo*

    $$P(B|I) = 60/100, P(I) = 5/100, \quad P(B) = 10/100$$

    quindi, applicando il Teorema di Bayes

    $$P(I|B) = P(B|I)P(I)/P(B) = \frac{\frac{60}{100}\frac{5}{100}}{\frac{10}{100}}$$

    ossia

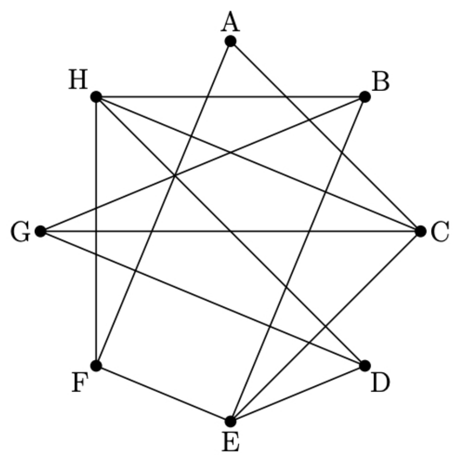
    $$\frac{\frac{60}{100}\cdot 5}{10} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

Quarta parte

16. Quale delle seguenti affermazioni è vera ?
    A. Ogni sottografo di un grafo connesso è connesso
    B. Ogni sottografo di un grafo completo è completo
    C. Un grafo Hamiltoniano è connesso (RISPOSTA CORRETTA)
    D. Tutte le affermazioni precedenti sono false

    Giustificazione: *Dalla definizione di grafo Hamiltoniano sappiamo che esiste un ciclo che passa per tutti i vertici una ed una sola volta. Tale ciclo, che coinvolge tutti i vertici, implica la connessione del grafo.*
    Le risposte A e B sono palesemente false. Nel primo caso basta prendere un sottografo con solo 2 vertici non connessi da un arco, mentre nel secondo caso, basta prendere il sottografo, ottenuto dal grafo di partenza, a cui abbiamo tolto un arco.

GRAFO G



17. Dato il grafo G in figura, quanti archi bisogna aggiungere per avere un circuito euleriano?
    A. 0 il grafo è euleriano
    B. 1
    C. 2 **(RISPOSTA CORRETTA)**
    D. 3

    Giustificazione: *Ci sono nel grafo* 4 *vertici di grado dispari,* B, D*,* F *e* G*. Se aggiungiamo gli archi* (B, D) *e* (F, G) *tutti i vertici hanno grado pari.*

18. Dato il grafo G, quali delle seguenti affermazioni è vera?
    A. Il grafo è planare
    B. Il grafo non è planare perché possiede un sottografo isomorfo a $K_{3,3}$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
    C. Il grafo non è planare perché possiede un sottografo omeomorfo a K_5
    D. Tutte le affermazioni precedenti sono false

    Giustificazione: *Il sottografo indotto dai vertici* $\{B, C, D, E, G, H\}$ *è un* $K_{3,3}$*. Le due partizioni sono* $\{B, C, D\}$ *e* $\{E, G, H\}$*. Nessun vertice ha grado* 5 *e quindi, di sicuro, non può avere un sottografo omeomorfo a* K_5

19. Dato il grafo G, il teorema di Brooks (versione forte) ci dice che possiamo colorarlo utilizzando al più
    A. 3 colori
    B. 4 **colori (RISPOSTA CORRETTA)**
    C. 5 colori
    D. Non si può applicare il Teorema di Brooks nella sua versione forte

    Giustificazione: *Visto che il grafo non è completo e non è un ciclo semplice con un numero dispari di vertici, allora si può applicare il Teorema di Brooks nella sua versione forte e dedurre che* $\chi(G) \leq 4$ *con* 4 *grado del vertice di grado massimo.*

20. Dato il grafo G, qual è il numero minimo di archi da eliminare per renderlo aciclico, mantenendolo però connesso?
    A. 8
    B. 7
    C. 6 **(RISPOSTA CORRETTA)**
    D. 5

    Giustificazione: *Il grafo* G *ha* 8 *vertici e* 13 *archi. Un grafo connesso e aciclico con* 8 *vertici ha esattamente* 7 *archi. Quindi, bisogna toglierne di sicuro* 6.