Cognome e Nome: ____________________ ____________________ **Matricola:** ____________________

Esame di Strutture Discrete

14 Luglio 2021

Soluzioni

Prima parte

1. Data la formula $(p \wedge \neg q) \Rightarrow (q \vee r)$, quale dei seguenti assegnamenti di valore alle variabili proposizionali p, q, r non soddisfa la formula?

   A. $p = T, q = T, r = T$

   B. $p = T, q = F, r = F$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

   C. $p = F, q = T, r = F$

   D. la formula è sempre soddisfatta

   Giustificazione: *La formula data è un'implicazione quindi è falsa in un solo caso, ovvero quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa. Nello specifico, quando* $p \wedge \neg q$ *è vero e* $q \vee r$ *è falso.* $p = T, q = F$ *rende vera la premessa* $p \wedge \neg q$ *mentre* $q = F, r = F$ *rende falsa la conseguenza.*

2. Quali delle seguenti formule è una tautologia?

   A. $\neg(p \wedge \neg p)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

   B. $\neg(p \vee \neg p)$

   C. $\neg(p \rightarrow \neg p)$

   D. Nessuna delle formule precedenti è una tautologia

   Giustificazione: *La formula* $p \wedge \neg p$ *ossia il "principio di non contraddizione" è sempre falsa, e quindi la sua negazione* $\neg p \vee p$*, ossia "la legge del terzo escluso", è sempre vera.*

3. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, quanti sono gli elementi della famiglia $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

   A. 13

   B. 14 **(RISPOSTA CORRETTA)**

   C. 15

   D. 16

   Giustificazione: $\mathcal{P}(A)$ *e* $\mathcal{P}(B)$ *hanno entrambi* 8 *elementi. La loro intersezione non è vuota perché hanno in comune gli insiemi* $\{3\}$ *e* $\emptyset$*. Quinsi la loro unione ha* $16 - 2 = 14$ *elementi.*

4. Data la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$, quanti sono gli elementi della chiusura rispetto all'intersezione di $\mathcal{A}$?

   A. 4

   B. 5

   C. 6 **(RISPOSTA CORRETTA)**

   D. 7

   Giustificazione: *Nella chiusura rispetto all'intersezione della famiglia data ci sono tutti e* 3 *gli insiemi della famiglia ed inoltre* $\{2\} = \{1, 2\} \cap \{2, 3\}$, $\{3\} = \{3, 4\} \cap \{2, 3\}$, *e* $\emptyset = \{1, 2\} \cap \{3, 4\}$.

5. Sia A un insieme non vuoto, e sia R una relazione binaria definita su A. La relazione R si dice anti-simmetrica se

   A. per ogni $x \in A$, $R(x, x)$ è falso;

   B. per ogni $x, y \in A$, **se** $R(x, y)$ **e** $R(y, x)$ **sono entrambe vere, allora** $x = y$**; (RISPOSTA CORRETTA)**

   C. per ogni $x, y \in A$, se $R(x, y)$ è vera allora $R(y, x)$ è falsa;

   D. per ogni $x, y, z \in A$, se $R(x, y)$ e $R(y, z)$ sono entrambe vere, allora $z = y$.

   Giustificazione: *Vedi definizione di relazione anti-simmetrica*

Seconda parte

6. Il principio di induzione afferma che data una proprietà $P(n)$ sui numeri naturali, tale proprietà è vera per ogni numero n se è vera $P(0)$ ed inoltre, per ogni n

   A. è vera $P(n + 1)$ **quando è vera** $P(n)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

   B. sono vere $P(n)$ e $P(n + 1)$

   C. è vera $P(n + 1)$

   D. Nessuna delle precedenti

   Giustificazione: *Vedi definizione del principio di induzione*

7. Utilizzando l'algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD tra 561 e 45 abbiamo

   A. $MCD(561, 45) = MCD(45, 34)$

   B. $MCD(561, 45) = MCD(45, 33)$

   C. $MCD(561, 45) = MCD(45, 21)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

   D. $MCD(561, 45) = MCD(45, 12)$

   Giustificazione: *Nel compito d'esame la risposta C riportava un errore di stampa* $MCD(561, 45) = MCD(45, 22)$ *La risposta corretta è* $MCD(561, 45) = MCD(45, 21)$ *perché* $541 \bmod 45 = 21$.

8. Per quali delle seguenti coppie (n, m) non esiste l'inverso di $n \bmod m$?

   A. $(121, 55)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

   B. $(72, 55)$

   C. $(121, 72)$

   D. Per nessuna di tali coppie di valori

   Giustificazione: *L'inverso modulare esiste se e solo se i* 2 *numeri sono coprimi.* $121 = 11^2$ *e* $55 = 5 \cdot 11$ *quindi non sono coprimi e l'inverso non esiste. Il numero* $72 = 2^3 \cdot 3^2$ *e quindi è coprimo sia con* 55 *che con* 121.

9. Calcolare $145^{145} \bmod 13$

   A. 2 **(RISPOSTA CORRETTA)**

   B. 6

   C. 8

   D. 10

Giustificazione: *Notiamo che* $145 \bmod 13 = 2$, $\phi(13) = 12$, $145 \bmod 12 = 1$.

10. Quale numero tra $104, 105, 140, 145$ ha un valore di ϕ diverso dagli altri 3?
    - A. 104
    - B. 105
    - C. 140
    - **D.** 145 **(RISPOSTA CORRETTA)**

    Giustificazione: $\phi(104) = \phi(105) = \phi(140) = 48$, *mentre* $\phi(145) = 112$.

Terza parte

11. Questo test contiene 20 domande con 4 possibili risposte per ogni domanda. Quante sono le possibili sequenze di risposte che si possono dare?
    - A. 2^{20}
    - B. 2^{30}
    - **C.** 2^{40} **(RISPOSTA CORRETTA)**
    - D. 2^{50}

    Giustificazione: 4 *risposte possibili per ogni domanda quindi, regola del prodotto,* 4^{20}

12. Dato l'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ quanti sono i sottoinsiemi di 5 elementi che contengono almeno un numero primo?
    - A. 240
    - B. 242
    - C. 244
    - **D.** 246 **(RISPOSTA CORRETTA)**

    Giustificazione: *Tutti i sottoinsiemi di cardinalità* 5 *di un insieme di* 10 *elementi sono* $\binom{10}{5} = 252$. *I numeri primi dell'insieme sono* 4 *ovvero* $2, 3, 5, 7$. *Quindi, i sottoinsiemi di cardinalità* 5 *che non contengono alcuno dei primi sono* $\binom{6}{5} = 6$. *Tutti gli altri, ovvero* 246 *contengono almeno* 1 *primo.*

13. Lanciamo tre pedoni sopra una scacchiera 4×4 con, ovviamente, metà caselle nere e metà bianche. Assumendo che ogni pedone cada interamente dentro una casella della scacchiera, e non cada dentro una casella dove era caduto precedentemente un altro pedone, qual è la probabilità che tutti e tre i pedoni cadano dentro una casella bianca?
    - **A.** $\frac{1}{10}$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
    - B. $\frac{1}{12}$
    - C. $\frac{1}{14}$
    - D. $\frac{1}{16}$

    Giustificazione: *Le caselle della mini-scacchiera sono* 16, 8 *bianche e* 8 *nere. Il primo pedone lanciato cade su una casella bianca con probabilità* $\frac{8}{16}$. *Il secondo con probabilità* $\frac{7}{15}$ *ed il terzo con probabilità* $\frac{6}{14}$. *I tre eventi sono indipendenti e quindi la probabilità che si verifichino tutti e tre è data dal prodotto:* $\frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} = \frac{1}{10}$.

14. Lanciamo 2 dati. Qual è la probabilità che la somma dei 2 valori ottenuti sia un numero primo?
    - A. $\frac{3}{12}$
    - **B.** $\frac{5}{12}$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
    - C. $\frac{3}{18}$
    - D. $\frac{5}{18}$

    Giustificazione: *I casi totali sono ovviamente* 36. *I casi in cui la somma è un numero primo sono i seguenti* 15*:*

    $$(1,1), (1,2), (1,4), (1,6), (2,1),$$
    $$(2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1),$$
    $$(4,3), (5,2), (5,6), (6,1), (6,5)$$

    Quindi $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

15. Per la lotteria di Ferragosto vengono venduti 4500 biglietti. Io ne ho comprati a sufficienza per avere probabilità $\frac{1}{15}$ di vincere. Quanti ne ho comprati?
    - A. 250
    - **B.** 300 **(RISPOSTA CORRETTA)**
    - C. 350
    - D. 400

    Giustificazione: *Semplice calcolo: se* x *è il numero dei biglietti comprati allora* $\frac{x}{4500} = \frac{1}{15}$. *Quindi* $x = 4500 \cdot \frac{1}{15} = 300$.

Quarta parte

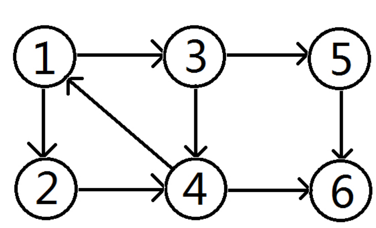
16. Dato un grafo orientato G, quale delle seguenti affermazioni è vera?
    - A. La somma dei gradi in uscita dei vertici è uguale alla somma dei gradi in entrata.
    - B. La somma totale di tutti i gradi, in entrata ed uscita, è uguale al doppio del numero degli archi.
    - **C. Entrambe le affermazioni precedenti sono vere; (RISPOSTA CORRETTA)**
    - D. Tutte le affermazioni precedenti sono false

    Giustificazione: *Controllare la definizione di grafo orientato e di grado dei vertici.*

17. Quanti archi ha un grafo orientato completo con 10 vertici?
    - A. 100
    - **B.** 90 **(RISPOSTA CORRETTA)**
    - C. 60
    - D. 45

    Giustificazione: *Per ogni coppia ordinata di vertici* (i, j) *c'è un arco, quindi* $10 \cdot 9 = 90$. *Per chiarire, il vertice* 1 *ha un arco in uscita verso tutti gli altri* 9 *vertici. Il vertice* 2 *ha un arco in uscita verso tutti gli altri* 9 *vertici, etc.*

GRAFO G



18. Dato il grafo G in figura, quante sono le sue componenti fortemente connesse?

A. 1

B. 2

C. 3 **(RISPOSTA CORRETTA)**

D. 4

Giustificazione: *I vertici* $1, 2, 3, 4$ *sono in un unica componente fortemente connessa. I vertici* 5 *e* 6 *sono, ognuno per conto proprio, una componente fortemente connessa.*

19. Dato il grafo G, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

 A. Il grafo non è aciclico, ma è possibile eliminare un solo arco per renderlo aciclico. (RISPOSTA CORRETTA)

 B. Il grafo possiede un un cammino hamiltoniano. (RISPOSTA CORRETTA)

 C. Il grafo è colorabile con 2 colori, utilizzando l'algoritmo greedy.

 D. Tutte le affermazioni precedenti sono false

Giustificazione: *Se eliminiamo l'arco* $(4, 1)$ *il grafo diventa aciclico. Il grafo possiede un ciclo di lunghezza* 3 *e di sicuro non è colorabile con* 2 *colori. Ricordiamo che la colorabilità per un grafo orientato è definita come la colorabilità per lo stesso grafo quando si ignora l'orientamento degli archi. Il grafo non ha un "ciclo" hamiltoniano ma la domanda parla di cammino e quindi la risposta è si, c'è un cammino hamiltoniano:* $2-4-1-3-5-6$

20. Dato il grafo G, quale delle seguenti è la sua matrice di adiacenza?

 A. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

 B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

 C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

 D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Giustificazione: *Il vertice* 1 *ha* 2 *archi in uscita verso i vertici* 2 *e* 3. *Solo le matrici* C *e* D *verificano tale proprietà. Il vertice* 4 *ha* 2 *archi in uscita verso i vertici* 1 *e* 6. *Solo la matrice* D *verifica tale proprietà.*

DOMANDE EXTRA:

A queste domande rispondano, in alternativa alle domande 1 e 2, **SOLO** gli studenti immatricolati l'anno accademico scorso, che decidono di portare il programma dell'anno scorso.

21. Dati 3 insiemi A, B, C e supponendo che $A \setminus C = B \setminus C$ allora deve necessariamente essere vero che

 A. $A \cap B = C$

 B. $A = B$

 C. $A \subseteq B$ oppure $B \subseteq A$

 D. tutte le affermazioni precedenti sono false (RISPOSTA CORRETTA)

Giustificazione: *Considera gli insiemi* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ *e* $C = \{3, 4\}$. $A \setminus C = B \setminus C = \{1, 2\}$ *però*

- $A \cap B = \{1, 2\} \neq C$
- $A \neq B$
- A *non è un sottoinsieme di* B *e* B *non è un sottoinsieme di* A.

22. La congettura Union-Closed afferma che se una famiglia di insiemi è chiusa rispetto all'unione allora

 A. Esiste un insieme della famiglia contenuto in almeno la metà degli insiemi della famiglia

 B. Esiste un elemento che appartiene ad almeno la metà degli insiemi della famiglia (RISPOSTA CORRETTA)

 C. Esiste un insieme della famiglia contenuto in tutti gli insiemi della famiglia

 D. Esiste un elemento che appartiene a tutti gli insiemi della famiglia

Giustificazione: *Controllare la definizione della congettura.*