Cognome e Nome: ______________________ ______________________ **Matricola:** ______________________

Esame di Strutture Discrete
23 Giugno 2021
Soluzioni

Prima parte

1. Date le variabili proposizionali p, q, r con valori $p = F, q = T, r = T$ quale delle seguenti formule non è soddisfatta?
   A. $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg p)$
   B. $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee \neg p)$
   C. $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee p)$
   D. $(p \vee q) \Rightarrow (\neg r \wedge p)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

   Giustificazione: *$p \vee q$ è vera perché q è vera. $\neg r \wedge p$ è falsa. Quindi abbiamo $T \Rightarrow F$ che è falso. Per le risposte A,B,C abbiamo*
   - *A: $p \vee q$ è vera, $r \wedge \neg p$ è vera. Quindi abbiamo $T \Rightarrow T$ che è vero.*
   - *B: $p \wedge q$ è falsa, $r \vee \neg p$ è vera. Quindi abbiamo $F \Rightarrow T$ che è vero*
   - *C: $p \wedge q$ è falsa, $\neg r \vee p$ è falsa. Quindi abbiamo $F \Rightarrow F$ che è vero*

2. Se neghiamo la formula $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$ otteniamo:
   A. $\neg p \wedge \neg q$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   B. $\neg p \vee \neg q$
   C. $p \wedge q$
   D. $p \vee q$

   Giustificazione: *$(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$ è equivalente a $\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee q)$. Negando, otteniamo $(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \vee q)$. Quindi, $(\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$. Ossia $\neg p \wedge \neg q$.*

3. La cardinalità della differenza simmetrica di 2 insiemi $|\Delta(A, B)|$ è uguale a
   A. $|A| - |B|$
   B. $|A| + |B| - |A \cap B|$
   C. $|A| + |B| - 2|A \cap B|$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   D. $|A| + |B| - 2|A \cup B|$

   Giustificazione: $\Delta(A, B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. *Dal momento che $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ abbiamo che $|\Delta(A, B)| = |A \setminus B| + |B \setminus A|$. Infine, notiamo che $|A \setminus B| = |A| \setminus |A \cap B|$ e $|B \setminus A| = |B| \setminus |A \cap B|$.*

4. Sia A un insieme non vuoto, e sia R la relazione definita su $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ come $R(X, Y)$ è vera se e solo se $X \cap Y \neq \emptyset$. Tale relazione è
   A. una relazione di equivalenza;
   B. riflessiva e transitiva ma non simmetrica;
   C. riflessiva e simmetrica ma non transitiva; (RISPOSTA CORRETTA)
   D. tutte le precedenti affermazioni sono false.

   Giustificazione: *La relazione non è transitiva. Per esempio, consideriamo gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{5, 6, 7\}$. Chiaramente $R(A, B), R(B, C)$ ma non $R(A, C)$.*

5. Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ quanti sono gli elementi della famiglia

$$\mathcal{P}(A) \setminus (\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \cup \mathcal{P}(\{3, 4, 5, 6\}))$$

   A. 36 **(RISPOSTA CORRETTA)**
   B. 37
   C. 38
   D. 39

   Giustificazione: *$\mathcal{P}(A)$ contiene $2^6 = 64$ elementi. Sottraendo gli elementi di $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}$, che sono 16 ne rimangono 48. A questi dobbiamo sottrarre gli elementi di $\mathcal{P}(\{3, 4, 5, 6\})$ che non sono anche elementi di $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}$ e quindi già sottratti. Gli elementi di $\mathcal{P}(\{3, 4, 5, 6\}) \cap \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\} = \mathcal{P}(\{3, 4\})$ sono 4. Quindi, ai 48 rimasti ne dobbiamo sottrarre ancora $16 - 4 = 12$. Ottenendo come risultato finale 36.*

Seconda parte

6. Dati $a, b, c \in \mathbb{Z}$, quali delle seguenti proprietà della divisibilità non è vera?
   A. Se $a \mid b$ allora $a \mid (b + c)$ (RISPOSTA CORRETTA)
   B. Se $a \mid b$ allora $a \mid bc$.
   C. Se $a \mid b$ e $b \mid c$ allora $a \mid c$.
   D. Sono tutte vere.

   Giustificazione: *Semplice esempio: $a = 3, b = 6, c = 4$. Ovviamente $3 \mid 6$ ma $3 \nmid 10$.*

7. Per quale valore di x la congruenza $x \equiv 3 (\bmod\ 11)$ non è vera?
   A. 245
   B. 344
   C. 443
   D. 543 **(RISPOSTA CORRETTA)**

   Giustificazione: *Sottraiamo 3 ad ognuno dei 4 numeri, ed otteniamo $242, 341, 440, 540$. Utilizzando il criterio di divisibilità per 11 notiamo che solo 540 non è divisibile per 11.*

8. $81^{91} \bmod 7$ è uguale a
   A. 4 **(RISPOSTA CORRETTA)**
   B. 5
   C. 6
   D. Nessuno dei valori precedenti

Giustificazione: $81 \mod 7 = 4$ *quindi* $81^{91} \equiv 4^{91} \mod 7$.
$4^{91} \mod 7 \equiv 4^{91 \bmod \phi(7)} \equiv 4^{91 \bmod 6}$ *e* $91 \mod 6 = 1$.
Quindi, $81^{91} \equiv 4 \mod 7$.

9. Qual è l'inverso di 350 modulo 19?

   A. 9

   B. 10

   C. 11

   D. 12 **(RISPOSTA CORRETTA)**

   Giustificazione: $350 = 18 \cdot 19 + 8 = 342 + 8$. *Quindi, calcoliamo l'inverso di* $8 \mod 19$. $8 \cdot 12 = 96$ *e* $96 = 5 \cdot 19 + 1$.

10. Per quale dei seguenti numeri primi p, il numero $\frac{p+1}{2} \cdot p$ è un numero perfetto?

    A. $p = 7$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

    B. 11

    C. 13

    D. Per tutti e 3 i numeri primi dati.

    Giustificazione: *Per il teorema di Eulero (e di Euclide) tutti i numeri perfetti sono della forma* $2^{n-1}(2^n - 1)$ *dove* $2^n - 1$ *è un primo. L'unico primo di questa forma è* $7 = 2^3 - 1$ *e quindi* $(2^3 - 1) \cdot \frac{8}{2} = 28$ *è perfetto.*

Terza parte

11. Quanti sono i numeri a 4 cifre tali che il prodotto di tali 4 cifre sia uguale a 420?

    A. 24

    B. 30

    C. 48 **(RISPOSTA CORRETTA)**

    D. 52

    Giustificazione: $420 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ *oppure* $420 = 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7$. *Non ci sono altri gruppi di* 4 *cifre il cui prodotto è* 420. *Le permutazioni del primo gruppo sono* $4! = 24$ *esattamente come quelle del secondo gruppo.*

12. Dato l'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ quanti sono i sottoinsiemi di 5 elementi che contengono almeno un numero pari?

    A. 220

    B. 231

    C. 241

    D. 251 **(RISPOSTA CORRETTA)**

    Giustificazione: *C'è un solo sottoinsieme di* 5 *elementi che non contiene un numero pari, quello fatto dai* 5 *numeri dispari. Il numero totale di sottoinsiemi di cardinalità* 5 *è* $\binom{10}{5} = 252$.

13. All'esame scritto di Strutture Discrete, uno studente risponde correttamente a 6 domande, ad altre 6 domande risponde a caso dopo però avere correttamente eliminato 2 delle possibili 4 risposte, mentre alle rimanenti 8 domande risponde totalmente a caso. Qual è il numero di risposte corrette che si aspetta di avere dato?

    A. 10

    B. 11 **(RISPOSTA CORRETTA)**

    C. 12

    D. 13

    Giustificazione: *Rispondendo a caso al gruppo di domande dove solo* 2 *risposte possibili sono rimaste, il numero atteso di risposte esatte è* 3. *Rispondendo totalmente a caso al gruppo finale di* 8 *domande, il numero atteso di risposte esatte è* 2. *A queste* 5 *aggiungiamo le* 6 *risposte giuste.*

14. In un urna ci sono 3 palline rosse, 3 bianche e 4 verdi, qual è la probabilità che estraendone 3 a caso, senza reinserimento, ci siano almeno 2 palline dello stesso colore?

    A. $\frac{4}{10}$

    B. $\frac{5}{10}$

    C. $\frac{6}{10}$

    D. $\frac{7}{10}$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

    Giustificazione: *La probabilità che ci siano almeno* 2 *palline dello stesso colore è* $1 - x$ *dove* x *è la probabilità che le tre palline estratte siano tutte di colore diverso. Quindi, calcoliamo*

    $$x = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

    e $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

15. Su 100 esami di Strutture Discrete, 26 hanno ottenuto il voto massimo. Gli studenti che hanno sostenuto l'esame erano per il 70% ragazzi e per il 30% ragazze. Il 20% dei ragazzi ha ottenuto il voto massimo, mentre per le ragazze è il 40%. Quali sono le probabilità che preso un esame a caso con il voto massimo, sia l'esame di una ragazza (x) o di un ragazzo (y) ?

    A. $x = \frac{5}{13}, y = \frac{8}{13}$

    B. $x = \frac{6}{13}, y = \frac{7}{13}$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

    C. $x = \frac{7}{13}, y = \frac{6}{13}$

    D. Nessuna delle risposte date è corretta.

    Giustificazione: *Soluzione semplice. I ragazzi sono* 70 *e se il* 20% *di loro ha ottenuto il voto massimo, vuole dire che* 14 *ragazzi hanno ottenuto il voto massimo. Le ragazze sono* 30 *e se il* 40% *di loro ha ottenuto il voto massimo, vuole dire che* 12 *ragazze hanno ottenuto il voto massimo. Preso a caso un esame tra questi* 26 *la probabilità che sia di un ragazzo è* $y = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$ *e di una ragazza è* $x = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$

Quarta parte

16. Dato un grafo orientato G, quale delle seguenti affermazioni è vera?

    A. Se tutti i vertici del grafo hanno grado in uscita maggiore di zero, il grafo possiede un ciclo;

    B. Se tutti i vertici del grafo hanno grado in entrata maggiore di zero, il grafo possiede un ciclo;

C. **Entrambe le affermazioni precedenti sono vere;(RISPOSTA CORRETTA)**

D. Tutte le affermazioni precedenti sono false

Giustificazione: *Proprietà viste a lezione. Controlla i lucidi del corso.*

17. Quale delle seguenti affermazioni riguardo all'isomorfismo di due grafi è vera?

A. Due grafi sono isomorfi se hanno lo stesso numero di vertici;

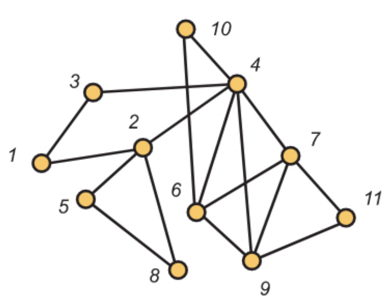
B. Due grafi sono isomorfi se hanno lo stesso numero di archi;

C. Due grafi sono isomorfi se hanno lo stesso numero di vertici e lo stesso numero di archi;

D. **Tutte le affermazioni precedenti sono false (RISPOSTA CORRETTA)**

Giustificazione: *E' vero che* 2 *grafi isomorfi hanno lo stesso numero di vertici e lo stesso numero di archi. Ma non è vero il viceversa. Per esempio, il gravo con* 4 *vertici* a, b, c, d *e* 3 *archi* $(a, b), (a, c), (a, d)$ *non è isomorfo al grafo con stessi vertici, stesso numero di archi ma nello specifico gli archi sono* $(a, b), (b, c), (c, d)$.

GRAFO G



18. Dato il grafo G in figura, il grafo è planare, anche se è disegnato come se non lo fosse. Dato un qualunque disegno senza intersezioni degli archi, quante facce ci sono?

A. 6

B. 7

C. **8 (RISPOSTA CORRETTA)**

D. 9

Giustificazione: *Vale la formula di Eulero* $v - e + f = 2$ *ed in questo caso* $v = 11$ *ed* $e = 17$.

19. Dato il grafo G, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A. Il grafo è planare quindi $\chi(G) = 4$.

B. **Il grafo possiede un sottografo isomorfo a K_4 quindi $\chi(G) = 4$. (RISPOSTA CORRETTA)**

C. Il grafo possiede un un ciclo di lunghezza 3 quindi $\chi(G) = 3$.

D. Il grafo è colorabile con 3 colori, utilizzando l'algoritmo greedy.

Giustificazione: *Per ogni grafo planare* G *si ha* $\chi(G) \leq 4$. *Potrebbe anche essere minore di* 4. *Il sottografo composto dai vertici* $4, 6, 7, 9$ *è un grafo completo, quindi, in questo caso,* 4 *colori sono necessari.*

20. Dato il grafo G, quanti archi possiamo ancora aggiungere, mantenendolo planare, per renderlo massimale?

A. 7

B. 8

C. 9

D. **10 (RISPOSTA CORRETTA)**

Giustificazione: *Come detto a lezione, ogni grafo planare massimale con* v *vertici ha esattamente* $3v?6$ *archi. I vertici sono* 11 *e quindi* $33 - 6 = 27$, *e possiamo aggiungerne ancora* 10.

DOMANDE EXTRA:

A queste domande rispondano, in alternativa alle domande 1 e 2, **SOLO** gli studenti immatricolati l'anno accademico scorso, che decidono di portare il programma dell'anno scorso.

21. Dato 3 insiemi A, B, C ed i loro complementi A^C, B^C, C^C,

A. **se $A = B \cup C$ allora $A^C = B^C \cap C^C$ (RISPOSTA CORRETTA)**

B. se $A = B \cup C$ allora $A^C = B^C \cup C^C$

C. se $A = B \cap C$ allora $A^C = B^C \cap C^C$

D. tutte le affermazioni precedenti sono false

Giustificazione: *Dimostriamo l'uguaglianza. Se* $x \in A^C$ *allora* $x \notin A = B \cup C$ *e quindi* $x \notin B$ *e* $x \notin C$, *ossia* $x \in B^C$ *e* $x \in C^C$. *Se* $x \in B^C \cap C^C$ *allora* $x \in B^C$ *e* $x \in C^C$. *Quindi,* $x \notin B$ *and* $x \notin C$ *da cui si ha che* $x \notin B \cup C = A$ *e quindi* $x \in A^C$.

22. Un preordine è una relazione binaria che gode delle proprietà

A. Riflessiva e simmetrica

B. **Riflessiva e transitiva (RISPOSTA CORRETTA)**

C. Simmetrica e transitiva

D. Solo la proprietà transitiva

Giustificazione: *Controlla la definizione.*