Cognome e Nome: ____________________ ____________________ **Matricola:** ____________________

Esame di Strutture Discrete
10 Dicembre 2021
Rispondere a tutte le domande.
Giustificare le soluzioni agli esercizi proposti, mostrando i calcoli fatti.

Prima parte

1. Dimostrare che le due formule :

   1
   $$(\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$$

   2
   $$(\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$$

   sono logicamente equivalenti.
   Risposta: Per dimostrare che sono logicamente equivalenti è sufficiente dimostrare, utilizzando le tavole della verità, che i valori delle due formule sono sempre gli stessi per tutte e 8 le possibili combinazioni delle 3 variabili proposizionali a, b, c (ricordiamo 0 falso e 1 vero).

Formula 1

a	b	c	$(\neg a \vee b \vee c)$	$(\neg b \vee c)$	$(a \vee \neg b \vee \neg c)$	$F1$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Formula 2

a	b	c	$(\neg a \vee c)$	$(\neg b \vee c)$	$(a \vee \neg b \vee \neg c)$	$F2$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

2. Dimostrare che l'operatore $\Delta(A, B)$ che restituisce la differenza simmetrica di due insiemi A e B gode della proprietà associativa.
   Risposta: Per dimostrare la proprietà associativa bisogna dimostrare, dati 3 insiemi A, B e C l'uguaglianza tra i 2 insiemi: $\Delta(\Delta(A, B), C) = \Delta(A, \Delta(B, C))$. Ricordiamo che per ogni A e B $\Delta(A, B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ e quindi per ogni A, B, C abbiamo

   $$\Delta(\Delta(A, B), C) = (\Delta(A, B) \cup C) \setminus (\Delta(A, B) \cap C) = [(A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup C] \setminus [(A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C]$$

   Analogamente,

   $$\Delta(A, \Delta(B, C)) = (A \cup \Delta(B, C)) \setminus (A \cap \Delta(B, C)) = [A \cup ((B \cup C) \setminus (B \cap C))] \setminus [A \cap ((B \cup C) \setminus (B \cap C))]$$

   Dobbiamo dimostrare per ogni x che $x \in [(A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup C] \setminus [(A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C]$ se e solo se $x \in [A \cup ((B \cup C) \setminus (B \cap C))] \setminus [A \cap ((B \cup C) \setminus (B \cap C))]$. Dato un generico elemento x analizziamo i possibili 8 casi per x di valore di verità dell'appartenenza $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$

Appartenenza di x

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in \Delta(A,B)$	$x \in \Delta(\Delta(A,B),C)$	$x \in \Delta(B,C)$	$x \in \Delta(A,\Delta(B,C))$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

Seconda parte

3. Verificare che $11^{13} \bmod 17 = 17^{13} \bmod 11$
Risposta: Calcoliamo

$$11^{13} \equiv (11^2)^6 \cdot 11 \equiv ((-6)^2)^6 \cdot 11 \equiv (36)^6 \cdot 11 \equiv 2^6 \cdot 11 \equiv 64 \cdot 11 \equiv 13 \cdot 11 \equiv (-4) \cdot (-6) \equiv 24 \bmod 17 = 7$$

e

$$17^{13} \equiv (6)^{13} \cdot ((6)^2)^6 \cdot 6 \equiv (36)^6 \cdot 6 \equiv 3^6 \cdot 6 \equiv (3^3)^2 \cdot 6 \equiv 5^2 \cdot 6 \equiv 25 \cdot 6 \equiv 3 \cdot 6 = 18 \bmod 11 = 7$$

4. Dato $n = 10q + r$ con $r = n \bmod 10$, dimostrare che n è divisibile per 7 se e solo se $q - 2r$ è divisibile per 7.
Risposta: Confronta i lucidi del corso.

Terza parte

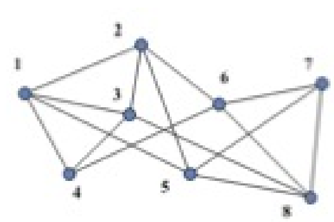
5. In un'urna ci sono 9 palline colorate: 2 rosse, 3 verdi e 4 bianche. Se estraiamo 3 palline senza reinserimento, qual è la probabilità di poter formare la bandiera italiana, ovvero di estrarre 1 pallina per ognuno dei 3 colori?
Risposta: Ci sono 9 palline, quindi il numero totale di possibili estrazioni senza reinserimento è $\binom{9}{3} = \frac{9\cdot8\cdot7}{3!} = 84$. Quanti sono i casi in cui abbiamo 3 palline di colore diverso? Tanti quanti sono i modi di scegliere una sola pallina per ognuno dei 3 colori, ovviamente, moltiplicati tra loro (regola del prodotto). Quindi, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{1} = 24$. La probabilità di avere 3 palline di colore diverso è $\frac{24}{82} = \frac{2}{7}$. Un modo diverso di arrivare alla stessa conclusione è il seguente. Le 3 palline di colore diverso si possono estrarre in 6 ordini diversi RVB, RBV, VRB, VBR, BRV, BVR. La probabilità di avere l'estrazione ordinata RVB è $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{21}$. La stesso numero si trova per ognuno degli altri casi, quindi in totale abbiamo di nuovo $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

6. Enunciare e dimostrare il Teorema della Probabilità Totale.

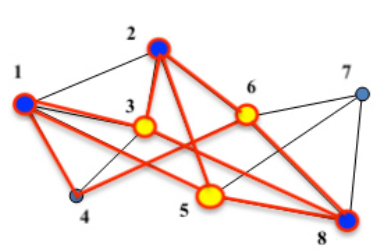
Risposta: Confronta i lucidi del corso.

Quarta parte

7. Dato il grafo in figura



dimostrare che il grafo non è planare identificando un suo sottogrofo omeomorfo a $K_{3,3}$.
Risposta: Il sottografo omeomorfo a $K_{3,3}$ è quello evidenziato in figura. I due sottoinsiemi da 3 vertici sono $V_1 = \{1,2,8\}$ e $V_2 = \{3,5,6\}$. Si noti come l'arco $(1,6)$ è ottenuto con il cammino semplice $1-4-6$.



8. Il grafo in figura possiede un ciclo euleriano o un cammino euleriano? Possiede un cammino hamiltoniano?
Risposta: Il grafo non possiede un ciclo euleriano perché non tutti i suoi vertici hanno grado pari. Però

possiede un cammino euleriano dove i 2 vertici di grado dispari, 4 e 7 sono il primo e l'ultimo vertice del cammino.

Il grafo è hamiltoniano, il seguente è un ciclo hamiltoniano: $7 - 5 - 2 - 3 - 1 - 4 - 6 - 8 - 7$.