Cognome e Nome: ____________________ ____________________ **Matricola:** ____________________

Esame di Strutture Discrete
10 Dicembre 2021
SOLUZIONI

Prima parte

1. Trasformare la seguente formula, in forma normale disgiuntiva:

$$(a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$$

Risposta: *La formula in CNF ha* 3 *clausole, ognuna con* 3 *letterali. Applichiamo la proprietà distributiva costruendo congiunzione fatte da* 3 *letterali (uno per ogni clausola) presi in tutti i modi possibile dalle* 3 *clausole iniziali. In totale, saranno* $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. *Eliminiamo tutte le congiunzioni che contengono una contraddizione (esempio* $a \wedge \neg a$*) e semplifichiamo quello che contengono più di una volta lo stesso letterale. Infine, se alcune congiunzioni appaiono più di una volta, eliminiamo le ripetizioni. Se data una cong Inizialmente abbiamo*

$$\begin{aligned}
&(a \wedge \neg a \wedge a) \vee (a \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee \\
&(a \wedge b \wedge a) \vee (a \wedge b \wedge \neg b) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee \\
&(a \wedge \neg c \wedge a) \vee (a \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg c \wedge \neg c) \vee \\
&(b \wedge \neg a \wedge a) \vee (b \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee \\
&(b \wedge b \wedge a) \vee (b \wedge b \wedge \neg b) \vee (b \wedge b \wedge \neg c) \vee \\
&(b \wedge \neg c \wedge a) \vee (b \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c \wedge \neg c) \vee \\
&(c \wedge \neg a \wedge a) \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee \\
&(c \wedge b \wedge a) \vee (c \wedge b \wedge \neg b) \vee (c \wedge b \wedge \neg c) \vee \\
&(c \wedge \neg c \wedge a) \vee (c \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (c \wedge \neg c \wedge \neg c)
\end{aligned}$$

Eliminiamo le congiunzioni che contengono una contraddizione. Rimangono

$$\begin{aligned}
&(a \wedge b \wedge a) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg c \wedge a) \vee (a \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg c \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee \\
&(b \wedge b \wedge a) \vee (b \wedge b \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c \wedge a) \vee (b \wedge \neg c \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (c \wedge b \wedge a)
\end{aligned}$$

Semplifichiamo le congiunzioni che contengono più di un'occorrenza dello stesso letterale

$$\begin{aligned}
&(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee \\
&(b \wedge a) \vee (b \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c \wedge a) \vee (b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (c \wedge b \wedge a)
\end{aligned}$$

Eliminiamo le ripetizioni di congiunzioni ed otteniamo

$$\begin{aligned}
&(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee \\
&(b \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c \wedge a) \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (c \wedge b \wedge a)
\end{aligned}$$

Infine, una ulteriore semplificazione (ottimizzazione) si può fare eliminando le congiunzioni che sono sotto-congiunzioni di altre. Per esempio, se prendiamo $(a \wedge b)$ *e* $(a \wedge b \wedge \neg c)$*, gli assegnamenti che verificano il secondo congiunto verificano anche il primo. Quindi, gli assegnamenti che verificano* $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$ *sono quelli che verificano* $(a \wedge b)$. *Possiamo allora eliminare anche* $(a \wedge b \wedge \neg c)$. *Dopo queste semplificazioni finali, otteniamo*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg b)$$

2. Dimostrare che $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

Risposta: *Per dimostrare l'uguaglianza dei due insiemi, dimostriamo che hanno gli stessi elementi.*

- *Se* $x \in A \setminus (A \setminus B)$ *allora* $x \in A$ *e* $x \notin A \setminus B$. *Se* $x \notin A \setminus B$ *allora o* $x \notin A$, *ma ciò non è possibile visto che abbiamo appena detto che* $x \in A$, *oppure* $x \in A$ *e* $x \in B$. *Quindi,* $x \in A \cap B$.
- *Viceversa, supponiamo che* $x \in A \cap B$, *quindi* $x \in A$ *e* $x \in B$ *e quindi* $x \notin A \setminus B$. *Ma, se* $x \in A$ *e* $x \notin A \setminus B$ *allora* $x \in A \setminus (A \setminus B)$.

Seconda parte

3. Calcolare l'inverso modulare di $19 \mod 13$

Risposta: *Come prima cosa, verifichiamo che dal momento che* 19 *e* 13 *sono primi (e quindi coprimi), l'inverso modulare esiste. Dal momento che* $19 \bmod 13 = 6$ *l'inverso modulare di* $19 \mod 13$ *è uguale all'inverso modulare di* $6 \bmod 13$. *Con un semplice calcolo che ci porta a moltiplicare* 6 *per tutti i resti non nulli di una divisione per* 13 *ossia* $1, 2, \ldots, 11, 12$, *possiamo subito vedere che* $6 \cdot 11 = 66$ *e* $66 = 13 \cdot 5 + 1$

e quindi l'inverso è 11. *Calcoliamolo usando il teorema di Eulero* $6^{\phi(13)} \equiv 1 \bmod 13$. *Quindi, dal momento che* $\phi(13) = 12$ *l'inverso è* $6^{11} \bmod 13$. *Calcoliamolo:*

$$6^{11} \equiv (6^2)^5 \cdot 6 \equiv (36 \bmod 13)^5 \cdot 6 \equiv 10^5 \cdot 6 \equiv (10^2)^2 \cdot 10 \cdot 6 \equiv$$
$$(100 \bmod 13)^2 \cdot (60 \bmod 13) \equiv 9^2 \cdot 8 \equiv (81 \bmod 13) \cdot 8 \equiv 3 \cdot 8 \equiv 24 \equiv 11 \bmod 13$$

4. Dimostrare per induzione su n che
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Risposta: *Dimostriamo il caso base:* $n = 1$. *Per* $n = 1$ *abbiamo* $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$. *Quindi, il caso base è dimostrato.*

Supponiamo adesso che la proprietà sia vera per n *e dimostriamola per* $n+1$, *ossia dimostriamo che*
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Abbiamo
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Per l'ipotesi induttiva abbiamo che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ *e quindi*
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Terza parte

5. Riguardo ai 33 studenti prenotati per l'esame di oggi, possiamo dire che

- Almeno 2 studenti sono nati lo stesso giorno del mese?
- Almeno 2 studenti sono nati lo stesso mese dell'anno?
- Almeno 2 studenti sono nati lo stesso giorno e lo stesso mese dell'anno?

Risposta: *Applichiamo il Pidgeon Hole Principle:*

- *I giorni del mese sono (al massimo) 31, quindi almeno* 2 *dei* 33 *studenti sono nati lo stesso giorno.*
- *I mesi dell'anno sono* 12 *e quindi almeno* 2 *dei* 33 *studenti (in effetti almeno* 3*) sono nati nello stesso mese.*

Il Pidgeon Hole Principle non si può applicare al terzo caso perché i giorni dell'anno sono 365 *e quindi, in questo caso, la risposte è no.*

6. Abbiamo un gruppo di 15 studenti, 8 dei quali nati in Italia e gli altri 7 nati all'estero. Se scegliamo 3 studenti a caso, qual è la probabilità che nel gruppo di 3 studenti ci sia almeno 1 studente nato in Italia ed almeno 1 nato all'estero?

Risposta: *Il numero totale di gruppi di* 3 *studenti è dato dal coefficiente binomiale* $\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6} = 35 \cdot 13 = 455$. *I gruppi di* 3 *studenti interamente formati da studenti nati in Italia sono* $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$. *I gruppi di* 3 *studenti interamente formati da studenti nati all'estero sono* $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$. *Quindi, il totale di gruppi di studenti che rappresentano "eventi negativi" nel nostro caso è dato dalla somma* $56 + 35 = 91$. *Ne segue che il totale di gruppi di studenti che rappresentano "eventi positivi" nel nostro caso è dato da* $455 - 91 = 364$. *Allora, la probabilità richiesta è* $\frac{364}{455} = \frac{52}{65} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Quarta parte

7. Dare la definizione formale di isomorfismo tra grafi.

Risposta: *Dai lucidi delle lezioni, abbiamo la seguente definizione:*

Due grafi, sia entrambi orientati che entrambi non orientati, $G1 = (V1, E1)$ *e* $G2 = (V2, E2)$ *si dicono isomorfi se esiste una applicazione biunivoca* f *dall?insieme dei vertici* $V1$ *nell?insieme dei vertici* $V2$ *tale che* $(f(u), f(v))$ *è un arco di* $E2$ *se e solo se* (u, v) *è un arco di* $E1$. *La biiezione* f *è detta isomorfismo.*

8. Dato un grafo orientato G dimostrare che se il grado in uscita di ogni vertice è maggiore di zero allora il grafo possiede un ciclo.

Risposta: *Tale proprietà è stata dimostrata a lezione, come semplice applicazione del Pidgeon Hole Principle, e si trova nei lucidi delle lezioni.*