Cognome e Nome: ____________________ ____________________ **Matricola:** ____________________

Esame di Strutture Discrete
19 Febbraio 2021
Soluzioni

Prima parte

1. Quale delle seguenti assegnazioni di verità alle variabili proposizionali p, q, r soddisfa la seguente formula?

$$(p \vee q) \Rightarrow \neg r$$

   A. $p = F, q = T, r = T$
   B. $p = T, q = F, r = T$
   C. $p = T, q = T, r = F$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   D. $p = T, q = T, r = T$

   Giustificazione: *La formula è un'implicazione. Quindi è vera se la premessa è falsa ($(p \vee q)$ falsa) oppure è vera la conseguenza ($\neg r$ vera, ossia r falsa). Prendendo i valori della risposta c, notiamo che $(p \vee q)$ è vera e $\neg r$ è vera. Quindi la risposta c soddisfa la formula. Per completezza, vediamo le altre risposte:*

   - *risposta a: $p = F, q = T, r = T$. La premessa $(p \vee q)$ è vera, ma la conseguenza è falsa. Quindi, la formula non è soddisfatta.*
   - *risposta b: $p = F, q = T, r = T$. Come nel caso della risposta a, la premessa $(p \vee q)$ è vera, ma la conseguenza è falsa. Quindi, la formula non è soddisfatta.*
   - *risposta d: $p = F, q = T, r = T$. Anche in questo caso, come nei casi a e b, la premessa $(p \vee q)$ è vera, ma la conseguenza è falsa.*

2. Se trasformiamo in Forma Normale Congiuntiva la formula $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ otteniamo:

   A. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   B. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
   C. $p \wedge q$
   D. $\neg p \wedge \neg q$

   Giustificazione: *Distribuiamo la congiunzione e otteniamo*

$$(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)$$

   Le clausole $(\neg p \vee p)$ e $(\neg q \vee q)$ sono sempre vere e quindi si possono eliminare.

3. Se A e B sono 2 insiemi distinti tali che $|A| = 5$, $|B| = 4$ e $|A \cap B| = 3$ allora

   A. $|A \Delta B| = 1$
   B. $|A \Delta B| = 2$
   C. $|A \Delta B| = 3$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   D. $|A \Delta B| = 4$

   Giustificazione: *Ricordiamo che la differenza simmetrica $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Quindi, nel nostro caso, se ad A togliamo gli elementi di B, ne togliamo tanti quanti ne hanno in comune, ossia 3. Analogamente, se a B togliamo gli elementi di A gliene togliamo 3. Allora, $|A \setminus B| = 2$ e $|B \setminus A| = 1$. Infine, dal momento che $A \setminus B$ e $B \setminus A$ sono disgiunti, la loro unione ha esattamente 3 elementi.*

4. Se $A = \{1\}$, denotato con $B = pow(A)$ e con $C = pow(B)$ quali delle seguenti è falsa

   A. $\emptyset \in C$
   B. $\{\emptyset\} \in C$
   C. $\{1\} \in C$ **(RISPOSTA CORRETTA)**
   D. $\{\{1\}\} \in C$

   Giustificazione: *Calcoliamo i 2 insiemi potenza:*

   - $B = pow(\{1\}) = \{\{1\}, \emptyset\}$
   - $C = pow(B) = \{\ \{\{1\}, \emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

   Quindi $\{1\} \notin C$.

5. Un elemento M di un insieme ordinato U con relazione d'ordine $R(x, y)$ si dice massimale se per

   A. per ogni $x \in U$ si ha $R(x, M)$;
   B. non esiste $x \in U$ tale che $R(M, x)$; (RISPOSTA CORRETTA)
   C. per ogni $x \in U$ e $y \in U$ se $R(x, y)$ allora $R(y, M)$
   D. Tutte le precedenti affermazioni sono false

   Giustificazione: *Controlla la definizione di elemento massimale e la differenza con la definizione di elemento massimo.*

Seconda parte

6. Il principio di induzione afferma che se P è un'affermazione riguardante i numeri naturali tale $P(0)$ è vera, allora $P(n)$ è vera per ogni n se

   A. $P(n + 1)$ è vera se è vera $P(n)$ per ogni numero naturale n
   B. fissato comunque un numero n allora P è vera per tutti i numeri che precedono n

C. le affermazioni precedenti sono equivalenti (RISPOSTA CORRETTA)

D. tutte le affermazioni precedenti sono false

Giustificazione: *Le risposte a e b rappresentano le* 2 *definizioni equivalenti del principio di induzione, più specificamente del passo induttivo.*

7. Il resto della divisione $-33 : 7$ è uguale a

A. 2 **(RISPOSTA CORRETTA)**

B. 3

C. 4

D. 5

Giustificazione: *Se utilizziamo il Teorema della Divisione tra interi, secondo caso, procediamo in questo modo:*

- *calcoliamo la divisione* $33 : 7$ *ed otteniamo* $q = 4$ *e* $r = 5$.
- *Quindi, per* $-33 : 7$ *abbiamo* $q' = -q - 1 = -5$ *e* $r' = 7 - 5 = 2$.

In maniera più intuitiva, il multiplo di 7 *più grande che non supera* -33 *è* -35 *al quale dobbiamo aggiungere* 2 *per ottenere* -33. *Quindi, la risposta corretta è la a.*

8. $17^{18} \cdot 19^{18}$ è congruo a

A. $1 \bmod 5$

B. $2 \bmod 5$

C. $3 \bmod 5$

D. $4 \bmod 5$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

Giustificazione: *Osserviamo subito che*

$$17^{18} \equiv (17 \bmod 5)^{18 \bmod \phi(5)} \bmod 5$$

$$19^{18} \equiv (19 \bmod 5)^{18 \bmod \phi(5)} \bmod 5.$$

Quindi,

$$17^{18} \equiv 2^2 \equiv 4 \bmod 5$$

$$19^{18} \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 1 \bmod 5.$$

Quindi, $17^{18} \cdot 19^{18}$ *è congruo a* $4 \cdot 1 \equiv 4 \bmod 5$. *Per chi si diverte a fare le moltiplicazioni, c'è un altro metodo:*

$$17^{18} \cdot 19^{18} = (17 \cdot 19)^{18} = 323^{18}$$

Dal momento che $323 \bmod 5 = 3$ *dobbiamo calcolare* $3^{18} \bmod 5$ *oppure, semplificando,*

$$3^{18 \bmod \phi(5)} \bmod 5$$

ovvero

$$3^2 \equiv 9 \equiv 4 \bmod 5.$$

9. L'inverso di 5 modulo 21 è

A. 2

B. 12

C. 17 **(RISPOSTA CORRETTA)**

D. 20

Giustificazione: 5 *e* $21 = 3 \cdot 7$ *sono coprimi, quindi l'inverso di* 5 *modulo* 21 *esiste. Dal momento che* $\phi(21) = \phi(3) \cdot \phi(7) = 2 \cdot 6 = 12$, *tale inverso sarà*

$$5^{11} \bmod 21.$$

Abbiamo

$$5^{11} = (5^2)^5 \cdot 5 \equiv 4^5 \cdot 5 \equiv 2^{10} \cdot 5 \bmod 21$$

Continuando i nostri calcoli, abbiamo

$$2^{10} \cdot 5 \equiv (2^5)^2 \cdot 5 \equiv (32 \bmod 21)^2 \cdot 5 \equiv 11^2 \cdot 5 \bmod 21$$

Quindi,

$$(121 \bmod 21) \cdot 5 \equiv 16 \cdot 5 \equiv 80 \equiv 17 \bmod 21$$

Piccola nota: avendo 4 *possibili risposte, è sufficiente verificare le* 4 *risposte:*

- $2 \cdot 5 \equiv 10 \bmod 21$ *quindi la risposta a non è corretta;*
- $12 \cdot 5 \equiv 60 \equiv 18 \bmod 21$ *quindi la risposta b non è corretta;*
- $20 \cdot 5 \equiv 100 \equiv 16 \bmod 21$ *quindi la risposta d non è corretta;*
- $17 \cdot 5 \equiv 85 \equiv 1 \bmod 21$ *e quindi la c è l'unica risposta corretta.*

10. Sia n un intero positivo e $\rho(n)$ la sua radice numerica, allora

A. $n \equiv \rho(n) \bmod 10$

B. $n \equiv \rho(n) \bmod 9$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

C. $n \equiv 1 \bmod \rho(n)$

D. $\rho(n) \equiv 9 \bmod n$

Giustificazione: *Abbiamo introdotto il concetto di radice numerica ed enunciato il teorema che ci dice che ogni numero è congruente alla somma delle sue cifre, e quindi alla sua radice numerica, modulo* 9. *Quindi, la risposta corretta è la b.*

Terza parte

11. Se usiamo solo i numeri primi $2, 3, 5, 7$ quanti numeri a 3 cifre, senza ripetizione, possiamo ottenere?

A. 4

B. 12

C. 16

D. 24 **(RISPOSTA CORRETTA)**

Giustificazione: *Disposizioni semplici:* 4 *possibilità per la prima cifra,* 3 *per la seconda e* 2 *per la terza. Quindi,* 24.

12. Da un'urna contenente 20 palline, numerate da 1 a 20, ne scegliamo 6 a caso senza reimmissione. Qual è la probabilità che la differenza tra due delle palline scelte sia un multiplo di 5?

   A. $\frac{3}{10}$

   B. $\frac{1}{2}$

   C. $\frac{3}{5}$

   D. 1 **(RISPOSTA CORRETTA)**

   Giustificazione: *Per il "Pigeonhole Principle", scelti* 6 *numeri a caso, almeno* 2 *di essi avranno lo stesso resto quando divisi per* 5*. Quindi, la loro differenza sarà un multiplo di* 5*. Ciò implica che scelti* 6 *numeri a caso, la probabilità che la differenza tra due di essi sia un multiplo di* 5 *è* 1*, ovvero è un evento certo.*

13. Da un'urna contenente 2 palline rosse, 3 palline verdi e 2 palline bianche, ne scegliamo 2 a caso senza reimmissione. Qual è la probabilità che nessuna delle 2 palline estratta sia bianca?

   A. $\frac{10}{21}$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

   B. $\frac{21}{25}$

   C. $\frac{25}{30}$

   D. $\frac{25}{40}$

   Giustificazione: *Il numero totale di possibili coppie di palline è* $\binom{7}{2} = 21$*. Il numero totale di coppie di palline rosse o verdi è* $\binom{5}{2} = 10$*. Quindi, la risposta esatta è la a.*

14. Se due eventi A e B sono indipendenti allora

   A. $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$

   B. $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

   C. $P(A) = P(B)$

   D. $P(A \vee B) = 1$

   Giustificazione: *Controlla la definizione di eventi indipendenti.*

15. Comprando con 1 euro un biglietto del "gratta e vinci", si ha una probabilità di 1 su 100.000 di vincere 1000 euro. Qual è il numero atteso di biglietti da comprare per poter vincere?

   A. 100

   B. 1000

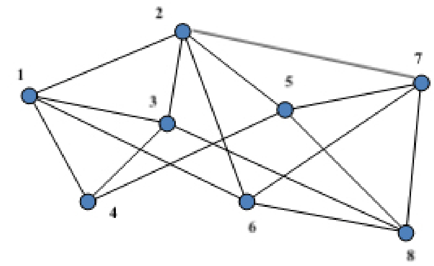
   C. 100.000 **(RISPOSTA CORRETTA)**

   D. Non è possibile calcolarlo a priori.

   Giustificazione: *Per la prova di Bernoulli, il valore atteso del numero di tentativi da fare per ottenere un successo è l'inverso della probabilità di successo. Quindi, la risposta corretta è la c.*

Quarta parte

16. Considera il grafo in figura. Considerati il numero dei vertici 8 ed il numero degli archi del grafo 16, possiamo dire che



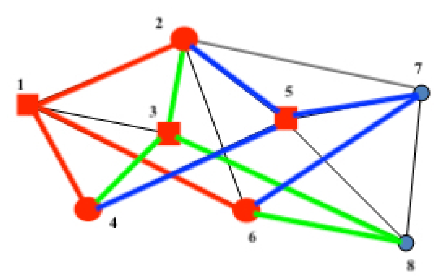
   A. Il grafo è planare

   B. Il grafo sicuramente non è planare

   C. visto che ci sono cicli di lunghezza 3 il grafo è planare

   D. Non è possibile decidere solo sulla base di questi criteri (RISPOSTA CORRETTA)

   Giustificazione: *Abbiamo visto* 2 *criteri, necessari e non sufficienti per la planarità di un grafo. Nessuno dei due si può usare in questo caso, perché il numero degli archi del grafo è inferiore a* 18 *e ci sono cicli di lunghezza* 3*. Quindi la risposta corretta è la d. Nello specifico, comunque, il grafo non è planare, il la figura sottostante mostra un sottografo omeomorfo a* $K_{3,3}$*, dove abbiamo i vertici* $1, 3, 5$ *e i vertici* $2, 4, 6$ *che formano le due partizioni del* $K_{3,3}$.



17. Se, nel grafo di cui sopra, eliminiamo i vertici 2 e 3, il sottografo indotto

   A. Possiede 8 **archi ed è connesso (RISPOSTA CORRETTA)**

   B. Possiede 8 archi ma non è connesso

   C. Possiede 7 archi ed è connesso

   D. Possiede 7 archi ma non è connesso

   Giustificazione: *I vertici* 2 *e* 3 *hanno rispettivamente grado* 5 *e* 4*. Però sono connessi da un arco. Quindi, rimuovendo i due vertici rimuoviamo in effetti* 8 *archi. Quindi, le risposte c e d sono errate. Infine, è semplice verificare che la rimozione dei* 2 *vertici non disconnette il grafo. In particolare, rimane nel grafo il cammino* $1-4-5-7-6-8$ *che connette tutti i nodi del grafo.*

18. Utilizzando l'algoritmo greedy per la colorazione del grafo della domanda precedente e l'ordine dei vertici dato dal loro numero,

quindi $1-2-3-4-5-6-7-8$, quanti colori ci serviranno?

A. 2

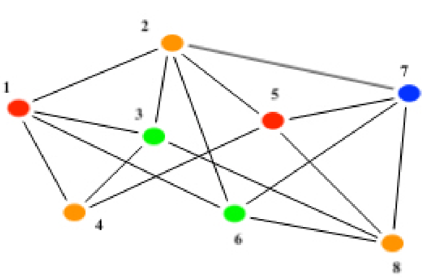
B. 3

C. 4 **(RISPOSTA CORRETTA)**

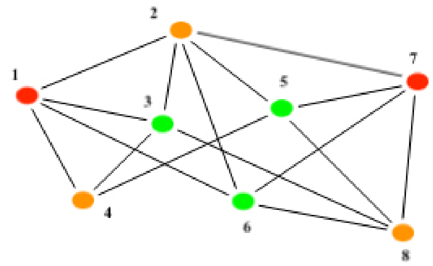
D. 5

Giustificazione: *La colorazione del grafo è presentato nella figura sotto. Supponiamo di usare, nell'ordine, i colori rosso, arancione, verde, blu.*

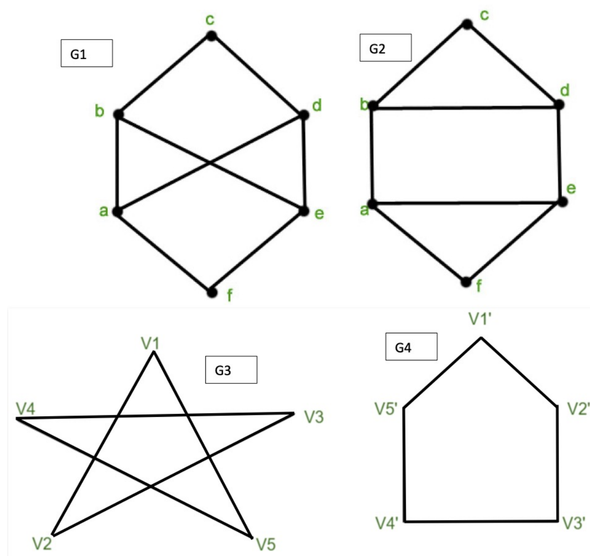
1. *Partiamo con il vertice* 1 *e lo coloriamo rosso.*
2. *Il vertice* 2 *non possiamo colorarlo di rosso e quindi lo coloriamo arancione.*
3. *Il vertice* 3 *non possiamo colorarlo né rosso, né arancione e lo coloriamo di verde.*
4. *Il vertice* 4 *(scelta greedy) può essere colorato con uno dei* 3 *colori usati, in questo caso, non potendo utilizzare il primo, utilizziamo il secondo, ovvero l'arancione.*
5. *Il vertice* 5 *(scelta greedy) può essere colorato con uno dei* 3 *colori usati, l'algoritmo greedy sceglie il primo dei colori usati, ovvero il rosso.*
6. *Il vertice* 6 *(scelta greedy) può essere colorato con uno dei* 3 *colori usati, in questo caso, non potendo utilizzare né il primo né il secondo, utilizziamo il terzo, ovvero il verde.*
7. *Il vertice* 7 *non può essere colorato né di rosso, né arancione, né di verde. Quindi, serve un quarto colore, blue.*
8. *Infine, il vertice* 8 *si può colorare con il primo colore disponibile, ovvero arancione.*



Notiamo che una diversa sequenza, ovvero $1-2-3-4-7-5-6-8$, *avrebbe prodotto una colorazione con soli* 3 *colori.*



19. Considera i grafi in figura. Qual è la coppia di grafi isomorfi?



A. $G1, G2$

B. $G3, G4$ **(RISPOSTA CORRETTA)**

C. Sono entrambe coppie di grafi isomorfi

D. Nessuna delle 2 è una coppia di grafi isomorfi

Giustificazione: *I grafi* $G1$ *e* $G2$ *non sono isomorfi. Infatti, il grafo* $G2$ *possiede un ciclo di lunghezza* 3 *mentre il grafo* $G1$ *non possiede alcun ciclo di lunghezza* 3. *I grafi* $G3$ *e* G *sono isomorfi. Questa è la funzione:* $f(V1) = V1', f(V2) = V2', f(V3) = V3', f(V4) = V4', f(V5) = V5'$.

20. Un grafo connesso e aciclico con 12 vertici ha

A. 10 archi

B. 11 **archi (RISPOSTA CORRETTA)**

C. 12 archi

D. 13 archi

Giustificazione: *Controlla la definizione e le proprietà di un grafo connesso e aciclico.*