

Quadriláteros notáveis

Teoria

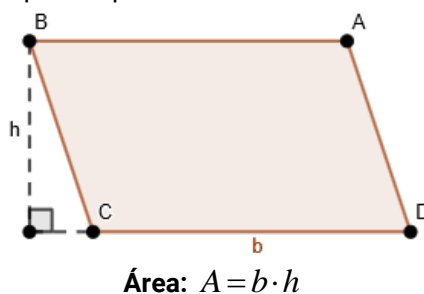
Quadriláteros são polígonos de 4 lados e que possuem certas características especiais:

- Soma dos ângulos internos é igual a 360° ;
- Possuem apenas duas diagonais.

Aqui, estudaremos o paralelogramo.

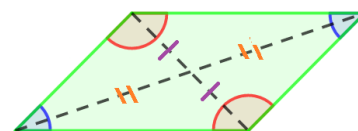
Paralelogramo

É o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.



Propriedades:

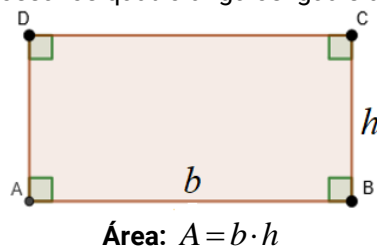
- Os lados opostos são congruentes, assim como os ângulos opostos.
- Os ângulos adjacentes são suplementares.
- As diagonais se cruzam em seus pontos médios.



Abaixo, veremos tipos especiais de paralelogramos: retângulo, quadrado e losango.

Retângulo

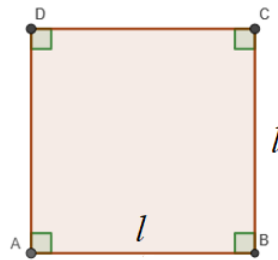
É o quadrilátero equiângulo, ou seja, possui os quatro ângulos iguais a 90° .



Propriedade: uma propriedade interessante do retângulo é que suas diagonais têm o mesmo comprimento, ou seja, $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Quadrado

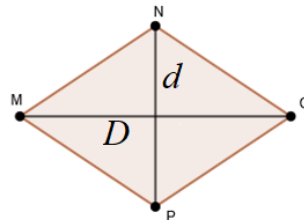
É um quadrilátero regular, ou seja, possui os quatro lados e os quatro ângulos iguais.



Área do quadrado: $A = l^2$

Losango

É o quadrilátero equilátero, ou seja, possui os quatro lados iguais.



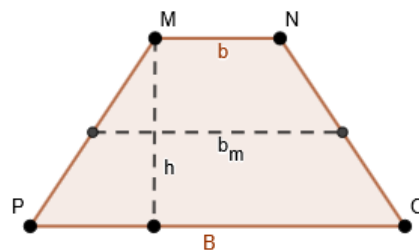
Sendo D a diagonal maior e d a diagonal menor, temos que

$$\text{Área: } A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Propriedade: suas diagonais são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos, dividindo o losango em quatro triângulos retângulos.

Trapézio

É um quadrilátero que possui apenas dois lados paralelos, que são chamados de bases. As laterais não são paralelas.

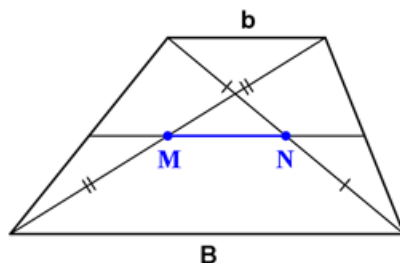


A base média de um trapézio pode ser calculada por meio da semi-soma de suas bases, ou seja, $B_m = \frac{B+b}{2}$

$$\text{Área: } A = B_m \cdot h = \frac{(B+b)h}{2}$$

Mediana de Euler

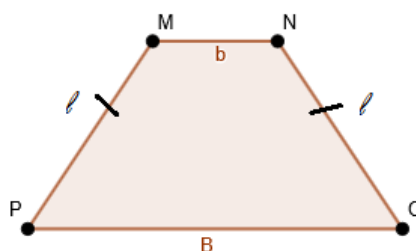
Mediana de Euler é o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio e fica localizada sobre sua base média, conforme é mostrado no desenho:



Sua medida é expressa pela fórmula $\frac{B-b}{2}$.

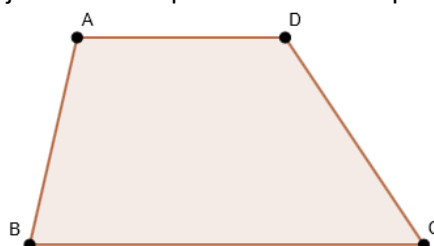
Existem 3 tipos de trapézios:

- **Trapézio isósceles:** é aquele cujos lados não paralelos são congruentes.

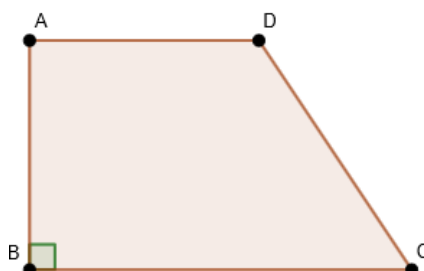


Propriedade: os ângulos de cada base também são congruentes.

- **Trapézio escaleno:** é aquele cujos lados não paralelos têm comprimentos distintos.



- **Trapézio retângulo:** é aquele em que uma das laterais é perpendicular às bases.



Exercícios

1. Os ângulos internos de um quadrilátero medem $3x-45$, $2x+10$, $2x+15$ e $x+20$ graus. O menor ângulo mede:
 - a) 90°
 - b) 65°
 - c) 45°
 - d) 105°
 - e) 80°

2. Considere as afirmações:
 - I. Todo retângulo é um paralelogramo.
 - II. Todo o quadrado é um retângulo.
 - III. Todo o losango é um quadrado.
 Associe a cada uma delas a letra V , se for verdadeira ou F , caso seja falsa. Na ordem apresentada temos:
 - a) $F F F$
 - b) $F F V$
 - c) $V F F$
 - d) $V V F$
 - e) $F V F$

3. Diariamente, uma residência consome 20160 Wh . Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm por 8 cm . Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

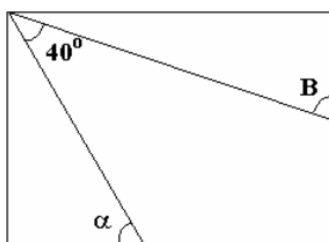
Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

 - a) Retirar 16 células.
 - b) Retirar 40 células.
 - c) Acrescentar 5 células.
 - d) Acrescentar 20 células.
 - e) Acrescentar 40 células.

4. Em um paralelogramo, as medidas de dois ângulos internos consecutivos estão na razão 1: 3. O ângulo menor desse paralelogramo mede

a) 45°
 b) 50°
 c) 55°
 d) 60°
 e) 65°

5. No retângulo a seguir, o valor, em graus, de $\alpha + \beta$ é:



a) 50
 b) 90
 c) 120
 d) 130
 e) 220

6. A figura representa um trapézio isósceles $ABCD$ com $AD = BC = 4 \text{ cm}$. M é o ponto médio de \overline{AD} e o ângulo $B\hat{M}C$ é reto.

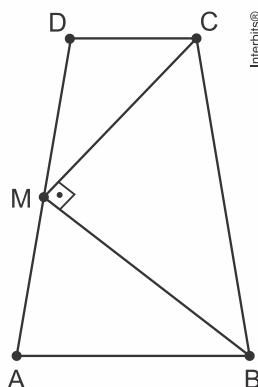


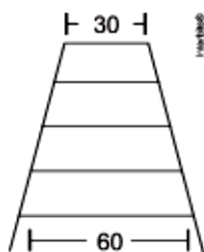
Figura fora de escala

O perímetro do trapézio $ABCD$, em cm , é igual a

a) 8
 b) 10
 c) 12
 d) 14
 e) 15

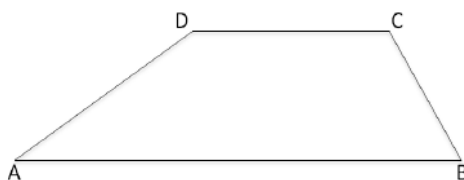
7. As bases de um trapézio medem 80 cm e 60 cm , com altura 40 cm . A uma distância de 10 cm da base maior traça-se uma paralela às bases, determinando dois trapézios. Qual a área do maior deles?
- 775 cm^2
 - 1.550 cm^2
 - 2.025 cm^2
 - 2.800 cm^2
 - 4.050 cm^2

8. Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm , conforme a figura.



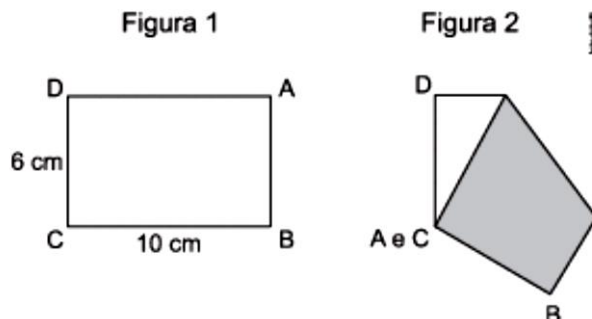
Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm , deve ser:

- 144
 - 180
 - 210
 - 225
 - 240
9. No trapézio $ABCD$, o ângulo ADC tem o dobro da medida do ângulo ABC e os lados paralelos AB e CD valem respectivamente $50,6\text{ m}$ e $33,8\text{ m}$.
A medida do lado AD é:



- $33,8\text{ m}$
- $25,3\text{ m}$
- $18,5\text{ m}$
- $16,8\text{ m}$
- $15,6\text{ m}$

10. Os lados de uma folha retangular $ABCD$ de papel medem 10 cm e 6 cm , como indica a figura 1. Essa folha, que é branca de um dos lados e cinza do outro, será dobrada perfeitamente de tal forma que o vértice A irá coincidir com o vértice C , como mostra a figura 2.



A área do trapézio cinza indicado na figura 2, em cm^2 , é igual a

- a) 23
- b) 30
- c) 25
- d) 40
- e) 45

Se liga!

Sua específica é exatas e quer continuar estudando esse assunto?
Clique [aqui](#) para fazer uma lista de exercícios extras.

Gabaritos

1. B

$$3x - 45^\circ + 2x + 10^\circ + 2x + 15^\circ + x + 20^\circ = 360^\circ$$

$$3x + 2x + 2x + x = 360 + 45 - 10 - 15 - 20$$

$$8x = 360$$

$$x = 45$$

$$3x - 45^\circ = 3 \cdot (45) - 45 = 135 - 45 = 90^\circ$$

$$2x + 10^\circ = 2(45) + 10 = 90 + 10 = 100^\circ$$

$$2x + 15^\circ = 2(45) + 15 = 90 + 15 = 105^\circ$$

$$x + 20^\circ = 45 + 20 = 65^\circ$$

2. D

I e II – VERDADEIRO. Paralelogramo é todo quadrilátero que tem dois pares de lados opostos paralelos.

III – FALSO. Todo losango tem 2 ângulos maiores que 90° e dois menores que 90° , e no quadrado todos os ângulos tem 90° .

3. A

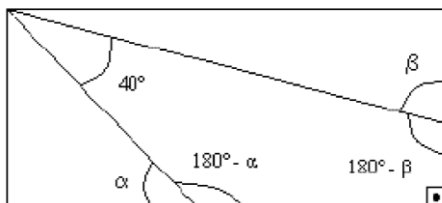
A cada retângulo de dimensões 6 cm x 8 cm, temos uma diagonal de 10 cm. Assim, por dia, cada célula produz $10 \cdot 24 = 240$ Wh e 100 células produzem $100 \times 240 = 24000$ Wh. Desse modo, temos 3840 Wh a mais que o consumo inicial, logo, percebemos que $3840 \text{ Wh} / 240 \text{ Wh} = 16$. Assim, devemos retirar 16 células.

4. A

Se os ângulos estão em uma razão 1:3, significa que um é o triplo do outro. Assim, sejam x e $3x$ os ângulos internos consecutivos. Como sabemos, eles são complementares, ou seja $x + 3x = 180^\circ$. Resolvendo a equação, encontramos $x = 45^\circ$.

5. D

Observe a figura:



Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual a 360° , podemos dizer que:

$$40 + 180 - \alpha + 90 + 180 - \beta = 360$$

$$130 - \alpha - \beta = 0$$

$$\alpha + \beta = 130^\circ.$$

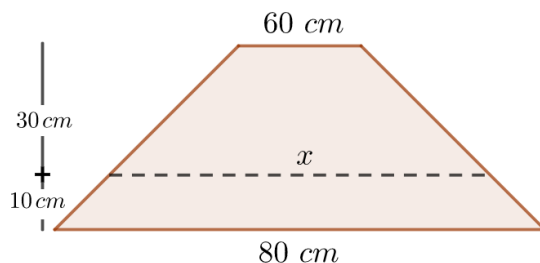
6. C

Seja N o ponto do segmento BC tal que MN é paralelo a AB. Logo, MN é a base média do trapézio ABCD e, portanto, segue que $\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$. Além disso, MN é a mediana relativa à hipotenusa BC do triângulo BMC. Daí, vem $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2} = 2 \text{ cm}$.

Em consequência, podemos afirmar que o perímetro do trapézio ABCD é igual a 12 cm.

7. C

Façamos um esboço do que é dito no enunciado:



O trapézio original foi dividido em outros dois trapézios, um superior e um inferior. Temos que a área de cada um desses trapézios é:

$$Trap_{original} = \left(\frac{60 + 80}{2} \right) \cdot 40 = 2.800 \text{ cm}^2$$

$$Trap_{superior} = \left(\frac{60 + x}{2} \right) \cdot 30 = (60 + x) \cdot 15 = 900 + 15x$$

$$Trap_{inferior} = \left(\frac{80 + x}{2} \right) \cdot 10 = (80 + x) \cdot 5 = 400 + 5x$$

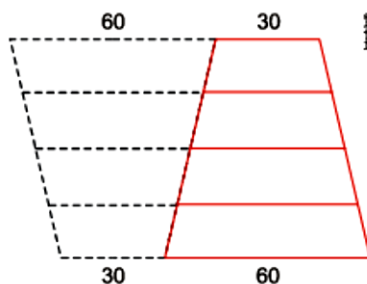
Como a área do trapézio original é resultado da soma entre os trapézios superior e inferior, vale que:

$$900 + 15x + 400 + 5x = 2800 \rightarrow 1300 + 20x = 2800 \rightarrow 20x = 1500 \rightarrow x = 75 \text{ cm}$$

Logo, as áreas do trapézio superior e inferior valem respectivamente $900 + 15 \cdot 75 = 2.025 \text{ cm}^2$ e $2800 - 2025 = 775 \text{ cm}^2$. Portanto, a maior dessas áreas é igual a 2.025 cm^2 .

8. D

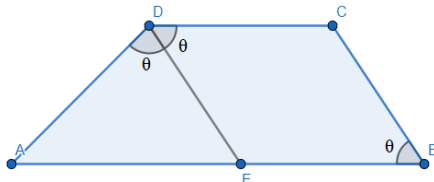
Duplicando a figura dada, como na figura a seguir, podemos observar 5 degraus de 90 cm cada.



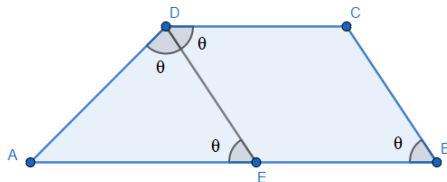
Como temos cinco degraus e cada um mede 90 cm , a soma dos comprimentos dos degraus da escada é $5 \cdot \frac{90}{2} = 225\text{ cm}$ (dividimos por 2 pois duplicamos a figura original). Portanto, será necessária uma peça linear de no mínimo 225 cm .

9. D

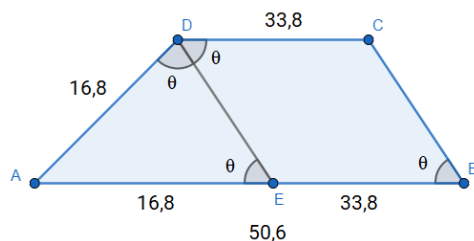
Traçando a bissetriz DE do ângulo ADC , temos:



Podemos observar que o quadrilátero $BCDE$ é um paralelogramo, por apresentar ângulos opostos congruentes. Assim, DE é paralelo a BC e os ângulos ADE e CBE são correspondente, ou seja, congruentes.

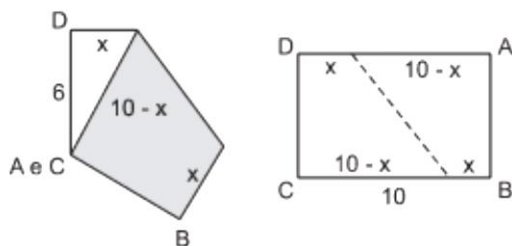


Por fim, concluímos que o triângulo ADE é isósceles, ou seja, $AE = AD = 16,8\text{ m}$:



10. B

Abrindo-se novamente a folha de papel, tem-se:



Assim, pode-se escrever:

$$\left. \begin{array}{l} B_{\text{maior}} = 10 - x \\ b_{\text{menor}} = x \end{array} \right\} S = \frac{(10 - x + x) \cdot 6}{2} = \frac{60}{2} = 30$$