Estudo dos polígonos: Definição, classificação, soma dos ângulos internos e externos, diagonais

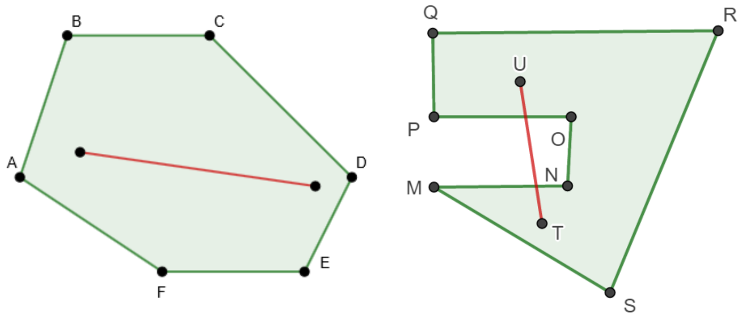
Teoria

Definição

Polígono é uma linha fechada formada pela união de segmentos de reta, de modo que os segmentos se encontrem dois a dois em uma única extremidade comum e que não se cruzem no mesmo plano.

Polígonos convexos e não-convexos (côncavo)

O polígono $ABCDEF$ é chamado de convexo se, ao tomarmos dois pontos quaisquer na região limitada pelo polígono, o segmento de reta que os une sempre estará inteiramente contido nesta região. Uma outra maneira de visualizar se um polígono é convexo ou não, é pelas suas diagonais: se uma diagonal passar por fora do polígono, então ele é não é convexo, sendo chamado então de côncavo.

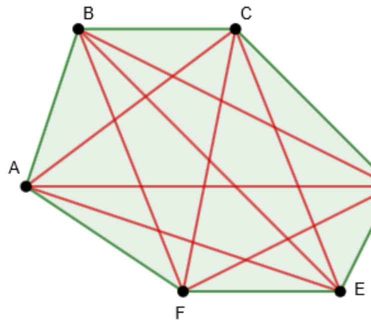


O polígono $ABCDEF$ é convexo, uma vez que traçando qualquer segmento como extremidades em seu interior, o segmento estará inteiramente contido no interior do polígono.

O polígono $MNOPQRS$ é não-convexo, uma vez que o segmento $\underline{UT}$, apesar de ter vértices no interior no polígono possui um trecho que é externo ao mesmo.

Elementos de um polígono convexo

Um polígono convexo tem alguns elementos importantes a ser estudados como: vértices, lados, diagonais, ângulos internos e ângulos externos.



Vértices

São os pontos A, B, C, D, E e F. Cada um deles é comum às extremidades de exatamente dois segmentos que formam o polígono.

Lados

São os segmentos de reta $\underline{AB}, \underline{BC}, \underline{CD}, \underline{DE}, \underline{EF}$ e $\underline{FA}$.

Diagonais

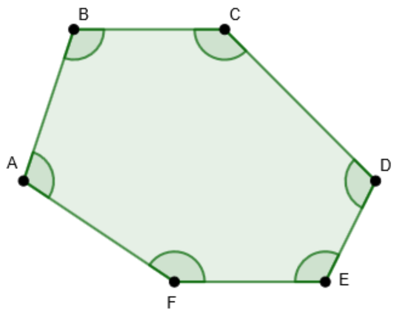
São os segmentos de reta que ligam um vértice a outro não consecutivo a ele: $\underline{AC}, \underline{AD}, \underline{AE}, \underline{BD}, \underline{BE}, \underline{BF}, \underline{CE}, \underline{CF}$ e $\underline{DF}$.

Para encontrar o número de diagonais que um polígono possui, usamos a fórmula:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ângulos Internos

São formados por dois lados consecutivos contidos na região interna do polígono. São ângulos internos desse polígono: $A\hat{B}C$ ou $\hat{B}$, $B\hat{C}D$ ou $\hat{C}$, $C\hat{D}E$ ou $\hat{D}$, $D\hat{E}F$ ou $\hat{E}$, $E\hat{F}A$ ou $\hat{F}$ e $F\hat{A}B$ ou $\hat{A}$.



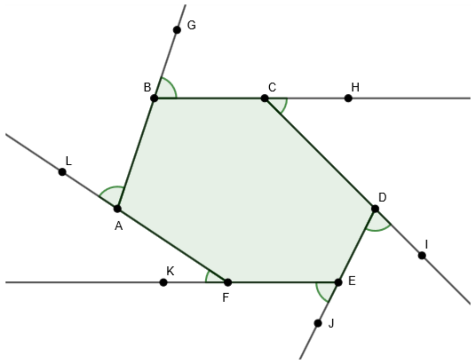
A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada pela fórmula:

$$S_i = 180°(n-2)$$

Onde n é o número de lados do polígono.

Ângulos Externos

São os ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do seu lado consecutivo.



A soma dos ângulos externos é sempre $360°$, qualquer que seja o polígono convexo.

$$S_e = 360°$$

Nome dos polígonos quanto ao número de lados

Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Polígonos Regulares

Um polígono regular é aquele que todos os lados possuem mesmo comprimento (equilátero) e que todos os ângulos internos possuem a mesma medida (equiângulo). Por essas características, eles possuem duas fórmulas específicas:

- Medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados:

Se a soma dos ângulos internos é $S_i = 180°(n-2)$ e todos esses ângulos possuem mesma medida, cada ângulo interno terá:

$$a_i = \frac{180°(n-2)}{n}$$

- Medida do ângulo externo de um polígono regular de n lados:

Se a soma dos ângulos externos é $S_e = 360°$ e todos esses ângulos possuem mesma medida, cada ângulo externo terá:

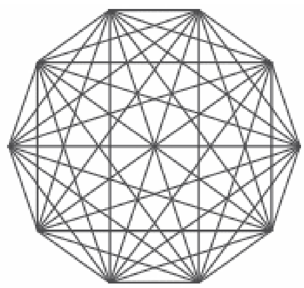
$$a_e = \frac{360°}{n}$$

Exercícios

1. A medida mais próxima de cada ângulo externo do heptágono regular da moeda de $R\$0,25$ é:

a) $60°$
b) $45°$
c) $36°$
d) $83°$
e) $51°$

2. "Há uns dez anos, um aluno, cujo nome infelizmente não recordo, apareceu na escola com algumas peças de seu artesanato. Trabalhando com madeira, pregos e linhas de várias cores, em compunhas paisagens, figuras humanas e motivos geométricos. Foi a primeira vez que vi esse tipo de artesanato. Depois disso, vi muitos outros trabalhos na mesma linha (sem trocadilho!). Certo dia, folheando um livro, vi o desenho de um decágono regular e suas diagonais."

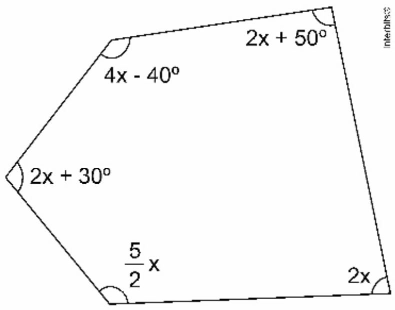


Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/7/8.htm>. Acesso em: 04 maio 2019 (adaptado).

Observe que, no decágono que ilustra o texto acima, o aluno citado usou vários pedaços de linha para compor os lados e as diagonais do polígono. Cada lado e cada diagonal foi construído com, exatamente, um pedaço de linha. A quantidade de pedaços de linha usados para formar as diagonais do decágono é

a) 50
b) 70
c) 25
d) 40
e) 35

3. O valor de x no pentágono abaixo é igual a:

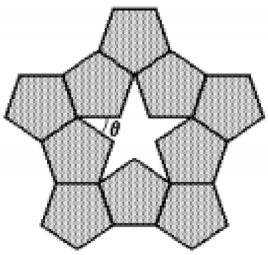


a) $25°$
b) $40°$
c) $250°$
d) $540°$
e) $1.000°$

4. Um robô, caminhando em linha reta, parte de um ponto A em direção a um ponto B, que distam entre si cinco metros. Ao chegar ao ponto B, gira novamente $60°$ à esquerda e caminha mais cinco metros, repetindo o movimento e o giro até retornar ao ponto de origem. O percurso do robô formará um polígono regular de

a) 10 lados.
b) 9 lados.
c) 8 lados.
d) 7 lados.
e) 6 lados.

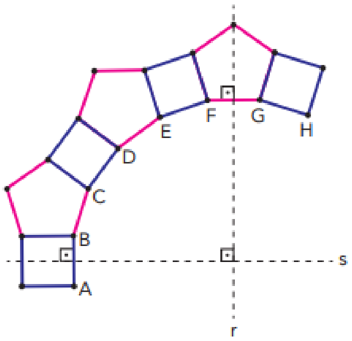
5. Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura.



Nestas condições, o ângulo θ mede:

a) $108°$.
b) $72°$.
c) $54°$.
d) $36°$.
e) $18°$.

6. Três pentágonos regulares congruentes e quatro quadrados são unidos pelos lados conforme ilustra a figura a seguir.



Acrescentam-se outros pentágonos e quadrados, alternadamente adjacentes, até se completar o polígono regular $ABCDEFGH\ldots A$, que possui dois eixos de simetria indicados pelas retas r e s. Se as retas perpendiculares r e s são mediatrizes dos lados AB e FG, o número de lados do polígono $ABCDEFGH\ldots A$ é igual a:

a) 18
b) 20
c) 24
d) 30
e) 36

7. Alguns polígonos regulares, quando postos juntos, preenchem o plano, isto é, não deixam folga, espaço entre si. Por outro lado, outras combinações de polígonos não preenchem o plano.
A seguir, exemplos desse fato: a Figura 1, formada por hexágonos regulares, preenche o plano; a Figura 2, formada por pentágonos e hexágonos regulares, não preenche o plano.

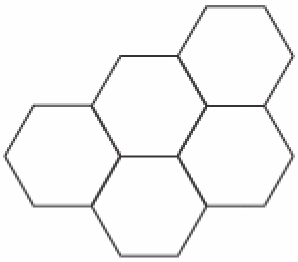


Figura 1

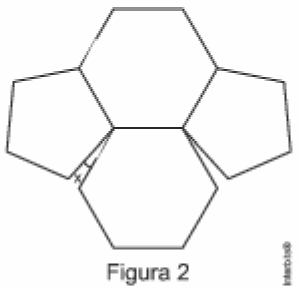
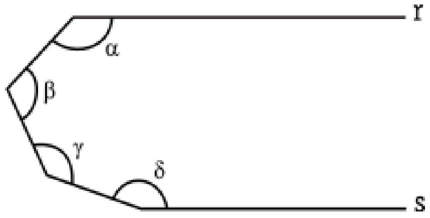


Figura 2

Na Figura 2, a medida do ângulo x é igual a
a) 14°
b) 12°
c) 10°
d) 8°
e) 6°

8. Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. A soma $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ das medidas dos ângulos indicados na figura é:



a) $180°$.

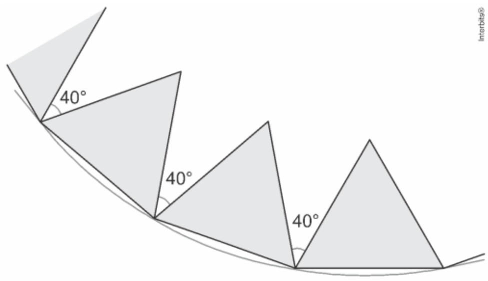
b) $270°$.

c) $360°$.

d) $480°$.

e) $540°$.

9. Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura abaixo.



Se o desenho estivesse completo, ele seria um polígono regular composto por triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um círculo, e formando um ângulo de $40°$ como indicado na figura.
Quando a figura estiver completa, o número de triângulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é

a) 10.

b) 12.

c) 14.

d) 16.

e) 18.

10. Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

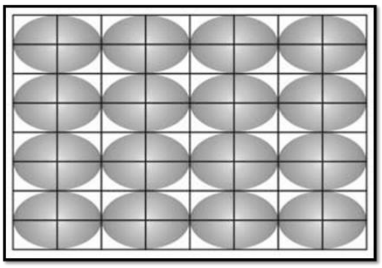


Figura1:Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

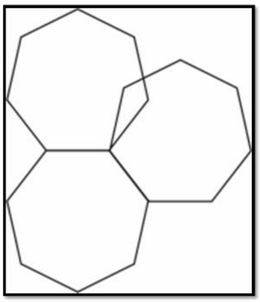
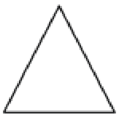
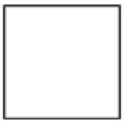
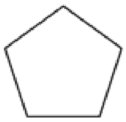
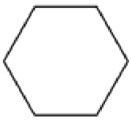
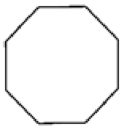
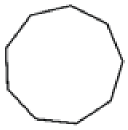


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono
Figura			
Ângulo interno	60°	90°	108°

Nome	Hexágono	Octágono	Eneágono
Figura			
Ângulo interno	120°	135°	140°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

a) triângulo.

b) quadrado.

c) pentágono.

d) hexágono.

e) eneágono.

Se liga!

Sua específica exatas e quer continuar estudando esse assunto?
Clique **aqui** para fazer uma lista de exercícios extras.

Gabaritos

1. E

Usaremos a fórmula do ângulo interno de um polígono regular:

$$a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n} = \frac{(7 - 2) \cdot 180}{7} = \frac{5 \cdot 180}{7} \cong 128{,}5°$$

Por fim, temos que o ângulo externo é o suplemento do ângulo interno. Então, o ângulo externo valerá $180° - 128{,}5° = 51{,}5°$

2. E

Calculando o número de diagonais do decágono:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2} = \frac{10 \cdot (10 - 3)}{2} = 35$$

3. B

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo pode ser calculada por meio da fórmula a seguir, onde n é o número de lados do polígono.

$$S_i = 180° \cdot (n - 2)$$

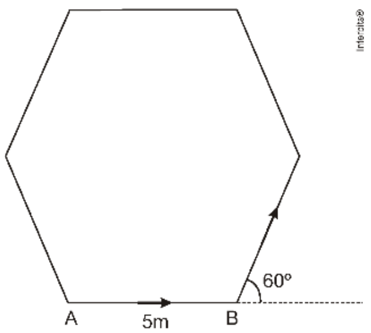
Ou seja, a soma dos ângulos internos de um pentágono será

$$S_i = 180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot (5 - 2) = 180° \cdot 3 \rightarrow S_i = 540°$$

Assim, sabendo que a soma dos ângulos internos do pentágono é $540°$, podemos escrever que:

$$540 = 2x + 30 + \frac{5}{2}x + 2x + 2x + 50 + 4x - 40540 = 10x + \frac{5}{2}x + 40 \rightarrow 1000 = 25x \rightarrow x = 40°$$

4. E



O trajeto do robô será um polígono regular de lado $5\,m$ e ângulo externo $60°$. Como $360° : 6 = 60°$ (usamos a fórmula de ângulo externo de um polígono regular), concluímos que o polígono pedido possui 6 lados.

5. D

Pela figura, temos que soma dos 3 ângulos internos dos pentágonos com o ângulo θ é igual a $360°$ (uma volta completa). Logo, temos que descobrir a medida dos ângulos internos de um pentágono regular.

A fórmula da medida dos ângulos internos de um polígono regular é:

$$S_i = \frac{180° \cdot (n - 2)}{n}$$

Onde n é a quantidade de lados do polígono.

Desse modo, cada um dos pentágonos terá soma dos ângulos internos igual a:

$$S_i = \frac{180° \cdot (5 - 2)}{5}$$

$$S_i = \frac{180° \cdot 3}{5} = \frac{540°}{5} = 108°$$

Agora, como a soma desses 3 ângulos de medida $108°$ com o ângulo θ deve ser $360°$, temos que:

$$108° + 108° + 108° + \theta = 360°$$

$$324° + \theta = 360°$$

$$\theta = 360° - 324°$$

$$\theta = 36°$$

6. B

A questão nos diz que o polígono regular $ABCDEFGH\ldots A$ possui dois eixos de simetria. A saber, as retas r e s. Por isso, podemos afirmar que o quadrante mostrado no desenho representa $\frac{1}{4}$ do polígono.

Contando os lados, vemos que, neste quadrante, temos 5 lados. Multiplicando por 4, por serem 4 quadrantes, temos como resultado 20. Ou seja, o polígono possui 20 lados.

7. B

Calculando a medida do ângulo do interno do pentágono regular:

$$a_i = \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180°(5-2)}{5} = \frac{180° \cdot 3}{5} = 108°$$

Calculando a medida do ângulo interno do hexágono regular:

$$a_i = \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180°(6-2)}{6} = \frac{180° \cdot 4}{6} = 108$$

Portanto:

$$x + 108° + 2 \cdot 120° = 360° \rightarrow x = 12°$$

8. E

Trace uma reta perpendicular à r e s. Dessa forma, temos formado um hexágono. Determinemos, então, a soma de seus ângulos internos:

$S_i = 180°(n - 2)$

$S_i = 180°(6 - 2)$

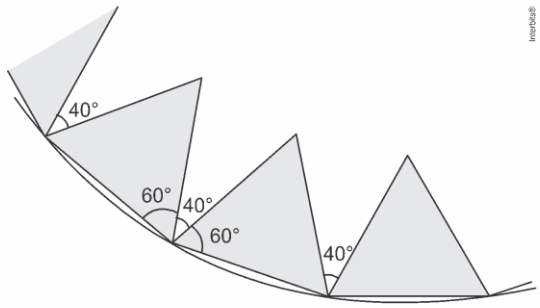
$S_i = 720°$

Portanto,

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + 90° + 90° = 720°$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 540°$

9. E



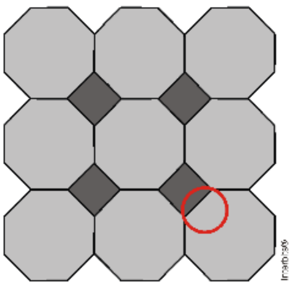
A medida de cada um dos ângulos internos do polígono será $60° + 60° + 40° = 160°$.

Portanto, cada um de seus ângulos externos será de $20°$. Admitindo que n é o número de lados do polígono regular, podemos escrever:

$$\frac{360°}{n} = 20° \rightarrow n = \frac{360°}{20°} \rightarrow n = 18$$

Logo, o número de triângulos será igual ao número de lados, ou seja 18.

10. B



Cada ângulo interno do octógono regular mede $135°$ e cada ângulo interno do quadrado mede $90°$.

Somando, verificamos que $135° + 135° + 90° = 360°$. Portanto, o polígono pedido é o quadrado.