Chapter-3运输问题TransportationProblem

问题引入

如图所示，Ai表示产地，Bj表示销地，表中元素代表Ai—>Bj的单位运价，产量销量如表所示。

问题：应如何调运可使总运输费用最小?

运价	B1	B2	B3	产量
A1	6	4	6	200
A2	6	5	5	300
销量	150	150	200	

Solution：

	B1	B2	B3	产量
A1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	200
A2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	300
销量	150	150	200	

$$\min z = 6x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \\ x_{11} + x_{21} = 150 \\ x_{12} + x_{22} = 150 \\ x_{13} + x_{23} = 200 \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

通用模型

产销平衡表和单位运价表

产销平衡表和单位运价表可以合二为一。

产地 \ 销地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$					
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2		b_n	

数学模型

1. 产销平衡

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=S_i & i=1,2,\dots,m\\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}=d_j & j=1,2,\dots,m\\ X_{ij}\geq 0\end{cases}$$

2. 产大于销

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\leq S_i & i=1,2,\dots,m\\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}=d_j & j=1,2,\dots,m\\ X_{ij}\geq 0\end{cases}$$

3. 产小于销

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=S_i & i=1,2,\dots,m\\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}\leq d_j & j=1,2,\dots,m\\ X_{ij}\geq 0\end{cases}$$

这就是运输问题的数学模型。它包含$m\times n$个变量，$(m+n)$个约束方程。其系数矩阵的结构比较松散，且特殊。

表上作业法

单纯形法可以解决运输问题，但是可以使用基于单纯形法的表上作业法，求解效率更高。该方法可分为三步：

1. 第一步：求出初始基可行解（初始运调方案），即在产销平衡表中给出m+n-1个数字格。（最小元素法，Vogel法）
2. 第二步：求非基变量（空格）的检验数并判断是否得到最优解。若已得最优解，停止计算，否则转第三步。（闭回路法，位势法）

3. 第三步：换基，对原运量进行调整得到新的基可行解，转入第二步（闭回路法）

第一步：求出初始基可行解

最小元素法

所谓最小元素，是指作业表中的最小运价Cij。即先给最小运价那格安排运量，然后花去该运价所在行或列；直到求出初始方案为止。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	4 3	3 10	7
A_2	3 1	9	1 2	8	4
A_3	7	6 4	10	3 5	9
销量	3	6	5	6	

如图所示，最小元素法操作的过程如下：

1. 最小运价为1，用A2为B1调运，4大于3，划去B1列，4剩余1
2. 最小运价为2，用A2为B3调运，1小于5，划去A2行，5剩余4
3. 最小运价为3，用A1为B3调用，7大于4，划去B3列，7剩余3
4. 最小运价为4，用A3为B2调运，9大于6，划去B2列，9剩余3
5. 最小运价为5，用A3为B4调运，3小于6，划去A3行，6剩余3
6. 最小运价为10，用A1为B4调运，7大于3，填入3

Vogel法

元素差额法对最小元素法进行了改进，考虑到产地到销地的最小运价和次小运价之间的差额，如果差额很大，就选最小运价先调运，否则会增加总运费。

Vogel法给出的初始解比最小元素法更接近最优解。

计算步骤如下：

1. 对每行每列的运价 C_{ij} 分别计算两最小元素之差 (取正值), 将“行差”记于表右侧，“列差” 基于表下端
2. 在所有行差、列差中选一最大差额, 若有几个同时最大, 则可任选其中之一
3. 在最大差额所在行（列）中选一最小运价, 若有几个同时最小,则可任选其一。
4. 在所确定的最小运价格子内, 确定基变量数值并画圈, 然后划去所在的行或列, 具体做法同最小元素法
5. 对剩余未划去的行列重复上述步骤，但当只剩下最后一行(列)时, 不在计算行 (列) 差, 而直接按最小元素法分配运量并划去相应的行或列。

单位运价 销地/产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	3	10	7	0
A_2	1	9	2	8	4	1
A_3	7	4 6	10	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	1	3		

单位运价 销地/产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	3	10	7	0
A_2	1	9	2	8	4	1
A_3	7	4 6	10	5 3	9	2
销量	3	6	5	6		
列差额	2	—	1	3		

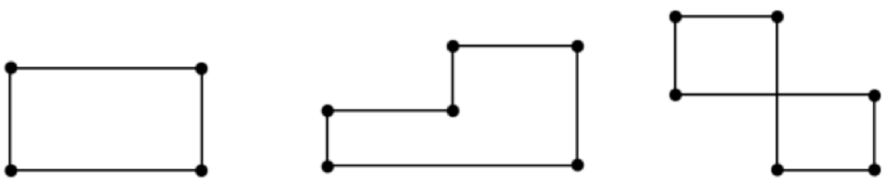
单位运价 销地/产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	3	10	7	0
A_2	1 3	9	2	8	4	1
A_3	7	4 6	10	5 3	9	
销量	3	6	5	6		
列差额	2	—	1	2		

单位运价 销地/产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	3 5	10 2	7	7
A_2	1 3	9	2	8 1	4	6
A_3	7	4 6	10	5 3	9	
销量	3	6	5	6		
列差额	—	—	1	2		

第二步：最优解的判别（计算检验数）

闭回路法

闭回路是以某空格为起点。用水平或垂直线向前划，当碰到一数字格时可以转90°后，继续前进，直到回到起始空格为止。闭回路如下图的(a),(b),(c)等所示。



(a) (b) (c)

假设初始基可行解如下所示。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	4 3	3 10	7
A_2	3 1	9	1 2	8	4
A_3	7	6 4	10	3 5	9
销量	3	6	5	6	

在已给出初始解的表中，可从任一空格如(A1，B1)出发，若A1的产品调运1吨给B1。为了保持产销平衡，就要依次调整：(A1，B3)处减少1吨，(A2，B3)处增加1吨，(A2，B1)处减少1吨，即构成了以空格为起点，其他为数字格的闭回路。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	(+1) 3	11	(-1) 4 3	3 10	7
A_2	(-1) 3 1	9	(+1) 1 2	8	4
A_3	7	6 4	10	3 5	9
销量	3	6	5	6	

调整的方案会让运费增加(+1) *3+(-1) *1+(+1) *2+(-1) *3 = 1元，所以(A1, B1)的检验数为1

当所有检验数中还有负数的时候（意味着还可以通过换基使得运费减少），就说明当前的解还不是最优解。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4 1	12 2	4 10	11 6	16
A_2	2 8	10	3 2	9	10
A_3	8	5 14	11	6 8	22
销量	8	14	12	14	48

$$\sigma_{12} = 12 - 11 + 6 - 5 = 2$$

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4 (1)	12 (2)	4 10	11 6	16
A_2	2 8	10 (1)	3 2	9	10
A_3	8	5 14	11	6 8	22
销量	8	14	12	14	48

$$\sigma_{22}=10-3+4-11+6-5=1$$

位势法

计算行位势和列位势

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3	11	3 4	10 3	0
A_2	1 3	9	2 1	8	-1
A_3	7	4 6	10	5 3	-5
v_j	2	9	3	10	

令u_1=0

u_2+ v_3=2

u_3+ v_4=5

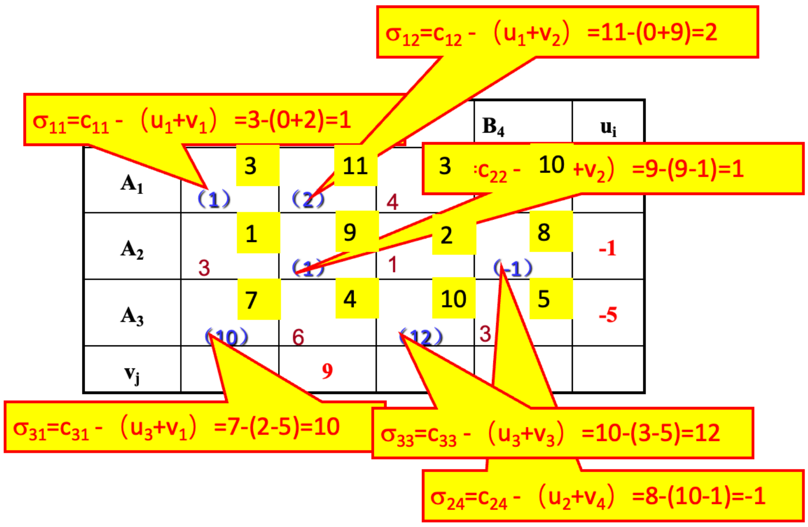
u_2+v_1=1

u_3+v_2=4

u_1+v_3=3

u_1+ v_4 =10

计算检验数



解的改进

1. 确定换入基的变量：

   当在表中空格处出现负检验数时，表明未得最优解。若有两个和两个以上的负检验数时，一般选其中最小的负检验数，以它对应的空格为调入格。即以它对应的非基变量为换入量。

2. 确定换出基的变量：

   以进基变量xik为起点的闭回路中，标有负号的最小运量作为调整量θ，θ对应的基变量为出基变量，并打上“×”以示换出作为非基变量。

(2，4)为调入格。以此格为出发点，作一闭回路，按顺序对每个顶点标记+1、-1, (2，4)格的调入量θ是选择闭回路上具有(-1)的数字格中的最小者。即θ=min(1,3)=1(其原理与单纯形法中按θ规划来确定换出变量相同)。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4（+1）	3（-1）	7
A_2	3		1（-1）	（+1）	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

调整步骤为：在进基变量的闭回路中标有正号的变量加上调整量θ，标有负号的变量减去调整量θ，其余变量不变，得到一组新的基可行解。然后求所有非基变量的检验数重新检验。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

如图，(2, 4):0+1=1, (2, 3):1-1=0, (1, 3):4+1=5, (1, 4):3-1=2

	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1	3 (0)	11 (2)	3 5	10 2	0
A_2	1 3	9 (2)	2 (1)	8 1	-2
A_3	7 (9)	4 6	10 (12)	5 3	-5
Vj	3	9	3	10	

再用闭回路法或位势法求各空格的检验数，表中的所有检验数都非负，则当前方案为最优方案，此时最小总运费：

Z =(1×3)+(4×6)+(3×5)+(2×10)+(1×8)+(3×5)＝85元

表上作业法补充说明

1. 若运输问题的某一基可行解有多个非基变量的检验数为负，在继续迭代时，取它们中任一变量为换入变量均可使目标函数值得到改善，但通常取 $\sigma_{\mathrm{ij}}<0$ 中最小者对应的变量为换入变量。
2. 无穷多最优解产销平衡的运输问题必定存最优解。如果非基变量的 $\sigma_{\mathrm{ij}}=0$, 则该问题有无穷多最优解。
3. 退化解:

   ※表格中一般要有 $(\mathrm{m}+\mathrm{n}-1)$ 个数字格。但有时在分配运量时则需要同时划去一行和一列, 这时需要补一个 0 , 以保证有 $(m+n-1)$个数字格作为基变量。一般可在划去的行和列的任意空格处加一个 0 即可。(通常选一个单位运价最小的空格)

   ※利用进基变量的闭回路对解进行调整时, 标有负号的最小运量 (超过 2 个最小值) 作为调整量 θ, 选择任意一个最小运量对应的基变量作为出基变量, 并打上“ X ”以示作为非基变量。当出现退化解后, 可能在某闭回路上有标记为 (-1) 的取值为 0 的数字格, 这时应取调整量 $=0$.

4. 产销不平衡转化成产销平衡:

   求下列表中极小化运输问题的最优解。

	B1	B2	B3	B4	a_i
A1	5	9	2	3	60
A2	--	4	7	8	40
A3	3	6	4	2	30
A4	4	8	10	11	50
b_j	20	60	35	45	180 / 160

   表中A2不可达B1，用一个很大的正数M表示运价C21。虚设一个销量为b5=180-160=20，Ci5=0，i=1,2,3,4，表的右边增添一列，得到新的运价表。

	B1	*B2*	*B3*	*B4*	*B5*	a_i
A1	5	9	2	3	0	60
A2	M	4	7	8	0	40
A3	3	6	4	2	0	30
A4	4	8	10	11	0	50
b_j	20	60	35	45	20	180

5. 求极大值问题

   将极大化问题转化为极小化问题。设极大化问题的运价表为 C, 用一个较大的数 $M\ (M\geq\max\{c_{ij}\})$ 去减每一个 c_{ij} 得到矩阵 C', 其中 $C'=(M-c_{ij})\geq 0$, 将 C' 作为极小化问题的运价表，用表上用业法求出最优解。

   下列矩阵C是Ai(I=1，2，3)到Bj的吨公里利润,运输部门如何安排运输方案使总利润最大。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	2	5	8	9
A_2	9	10	7	10
A_3	6	5	4	12
销量	8	14	9	

M取10

销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	8	5	2	9
A_2	1	0	3	10
A_3	4	5	6	12
销量	8	14	9	

小结

- 表上作业法
  1. 每一步骤如何操作
  2. 和单纯形法类别，检验数，调整方法原理
- 建模思路
  1. 供需关系——产地销地
  2. 产销不平衡处理