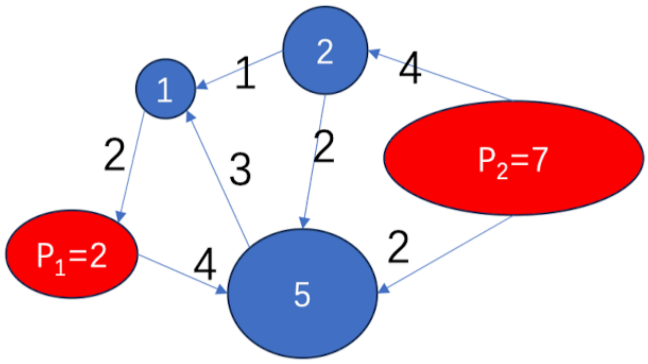
Chapter-9网络流算法的应用

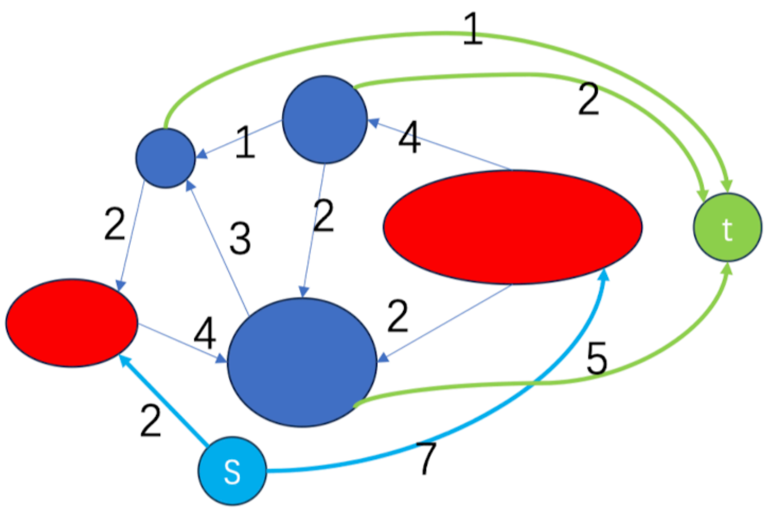
Circulation-demand问题

考虑一个地区的交通网络。城市 i 的需求量为 $\mathrm{d_i}$，工厂 j 有一个最大供应量 $\mathrm{p_j}$。每条路有一个容量。可以理解为电力传输/消耗品传输，如何安排生成量及运输使得每个城市的需求均被满足?



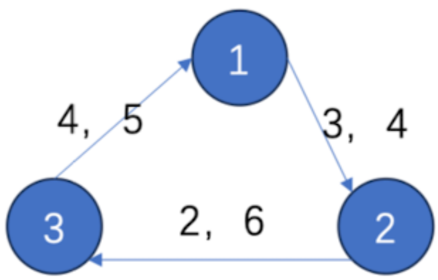
如上图所示，红色节点是工厂，蓝色节点是城市。

解法：构图G'，s 到工厂 j 连一条边, 容量为 p_j。城市 i 向汇点 t, 连一条边, 容量为 $\mathrm{d_i}$。有一个circulation $\Leftrightarrow$ 求出G'的最大流为$\sum d_i$

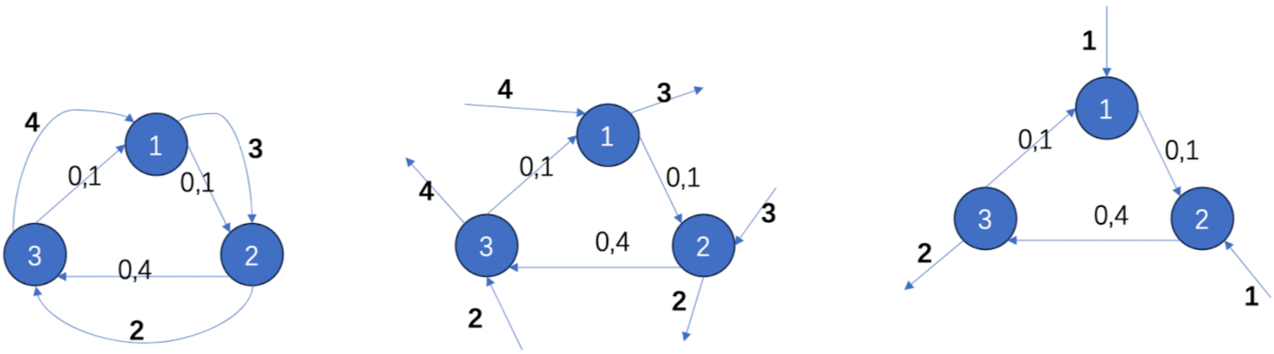


有上下界的可行流问题

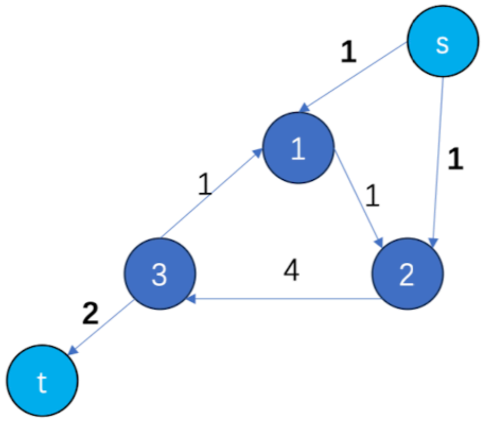
给定一个有向图，假定每条边有一个容量上界和容量下界，如何找到一个可行流f?



转换为circulation-demand问题



只有流入的作为“工厂”，只有流出的作为“城市”



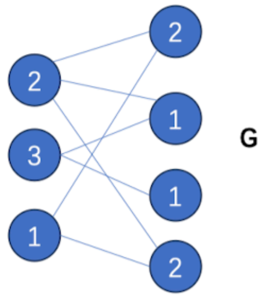
二分图的最小权覆盖集&最大权独立集

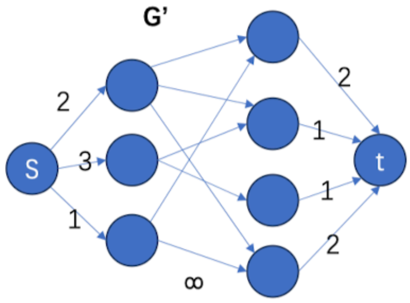
二分图 G， 每个点 v 有权值 $w(v)$ （可假定都是非负）找最小权覆盖集（点覆盖边）

- 说明：本题的等价问题是找最大权独立集
- 说明：最小点覆盖是本题的特殊情况（权值均为 1 ）

构图G‘

1. 增加源点 s, 连接 s 到 X中所有点, 边权是相应点的点权
2. 增加汇点 t, 连接 Y中所有点到 t, 边权是相应点的点权
3. 对原图中的边，将边权定位无穷大 ∞ 。



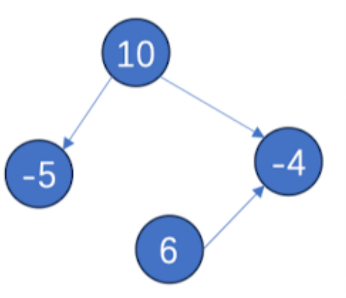


定理：G的最小点权覆盖⇔ G'的最小割（最大流）

有依赖的物品选择问题——最大权闭合图问题

有一堆物品，每个物品用一个顶点 v 表示, 有一个权值 $w(v)$ （可能为负）。物品之间存在依赖关系；用弧表示；(i,j) 表示 选i 就必须 选 j 。（允许有环）

问题：如何找一个物品集合，符合物品间依赖关系，且总权值最大？即如何求 G 的最大权的闭合子图A (closure: A出发的边会回到A)

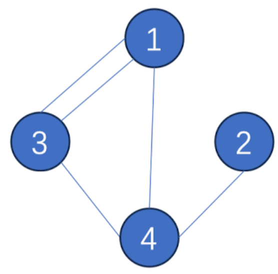


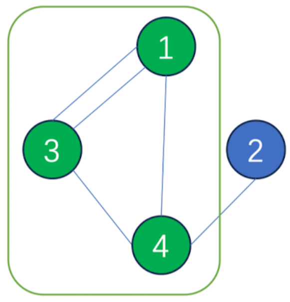
寻找最亲密的小团体——最大密度子图问题

对于无向图 $G=(E,V)$ 的每个顶点子集 $X\subseteq V$,

- 令 $E(X)$ 表示 G 中连接 X中顶点的所有边的集合。
- 将 $(\mathrm{X},\mathrm{E}(\mathrm{X})$)称作是 G 的一个诱导子图。也叫做生成子图。（下简称子图）。
- 定义 $|E(X)|/|X|$ 为该子图的密度。

问题：寻找密度最大的子图。$\mathrm{Max}\,|E(X)|/|X|:X\subseteq \vee$。


1
3
2
4


1
3
2
4