Chapter-5整数线性规划 IntegerLinearPrograming

整数线性规划问题的提出

该问题属于是线性规划，但是要求部分决策变量或全部决策变量取整数。分类有以下几种：

1. 纯整数线性规划
2. 混合整数线性规划
3. 0-1整数线性规划

整数规划的数学模型可以表示为以下：

$$
\begin{aligned}
&\max(\min) z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{s.t.} \begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (=,\ \text{or}\ \geq) b_i, i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geq 0, j=1,2,\cdots,n \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in Z\end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

例：设整数规划问题如下：

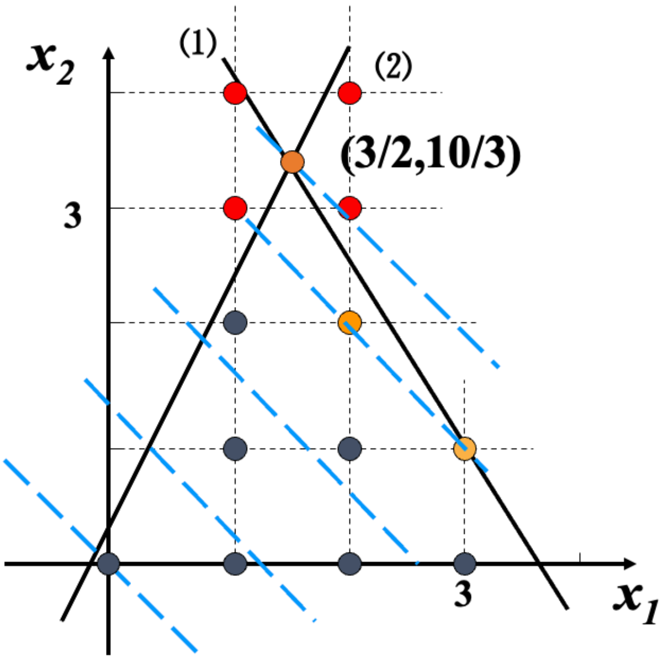
$$
\max Z = x_1 + x_2
$$
$$
\begin{cases}14x_1 + 9x_2 \leq 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且为整数}\end{cases}
$$

先写出松弛问题，即不考虑整数约束

$$
\max Z = x_1 + x_2
$$
$$
\begin{cases}14x_1 + 9x_2 \leq 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0\end{cases}
$$

用图解法求出最优解为：x1 = 3/2, x2 = 10/3，且有Z = 29/6

在可行域中找出所有的整数点，然后分别求目标函数值，最终(2,2),(3,1)点的目标函数值最大，即为Z=4。



IP和LP的联系：

(1)如果LP的最优值在其可行域T的某个顶点上达到,则相应的IP最优值,在T中去掉不含整数点的区域后的T*中的整数点上达到.

(2)对于求最大化(最小化)问题,LP最优解对应的目标函数值,是相应的IP最优解对应的目标函数值的上界(下界).

求解方法

1. 分支定界法
2. 割平面法
3. 隐枚举法
    1. 分支隐枚举
    2. 过滤隐枚举

分支定界法

步骤如下：

1. 求整数规划的松弛问题最优解;

   若松弛问题的最优解满足整数要求, 得到整数规划的最优解, 否则转下一步;

2. 分支与定界:
   任意选一个非整数解的变量xi, 在松弛问题中加上约束:

$xi \leq [xi]$ 和 $xi \geq [xi]+1$

组成两个新的松弛问题，称为分枝。新的松弛问题具有特征: 当原问题是求最大值时，目标值是分枝问题的上界; 当原问题是求最小值时，目标值是分枝问题的下界。

检查所有分枝的解及目标函数值，若某分枝的解是整数并且目标函数值大于 (max)等于其它分枝的目标值，则将其它分枝剪去不再计算, 若还存在非整数解并且目标值大于(max)整数解的目标值, 需要继续分枝, 再检查, 直到得到最优解。

一些原则：

序号	分支问题1	分支问题2	说明
1	无可行解	无可行解	原问题无可行解
2	无可行解	整数解	此整数解为最优解
3	无可行解	非整数解	对问题2继续分支
4	整数解	整数解	较优的为最优解
5	整数解，优于问题2	非整数解	问题1为最优解
6	整数解	非整数解，优于问题1	问题1停止分支，继续对问题2分支
7	非整数解	非整数解	继续分支,较优的先分

Gomory割平面法

如果是多维决策变量的话，分支定界就显得很麻烦，所以用割平面法解决。

步骤如下：

1. 求出当前松弛问题的最优单纯形表：

	$c_j \rightarrow$		3	-1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_1	$1\frac{6}{7}$	1	0	1/7	0	2/7
-1	x_2	$1\frac{2}{7}$	0	1	-2/7	0	3/7
0	x_4	$4\frac{3}{7}$	0	0	-3/7	1	22/7
	$\sigma_j = c_j - z_j$		0	0	-5/7	0	-3/7

b都是非整数，所以需要构造约束方程。

约束方程构造的原则是：选择非整数部分最大的b，上表为1又6/7，构造如下方程：

$$\sum_{j \in K} (-f_{i_0,j}) x_j \leq -f_{i_0} \tag{2}$$

其中 $f_{i_0,j}$ 是非基变量的小数部分，而 f_{i_0} 是基变量取值的小数部分

构造方程如下：

$$-\frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_5 \leq -\frac{6}{7} \tag{3}$$

加入松弛变量

$$-\frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_5 + x_6 = -\frac{6}{7} \tag{4}$$

得到表：

	$c_j \rightarrow$		3	-1	0	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_1	$1\frac{6}{7}$	1	0	1/7	0	2/7	0
-1	x_2	$1\frac{2}{7}$	0	1	-2/7	1	3/7	0
0	x_4	$4\frac{3}{7}$	0	0	-3/7	0	22/7	0
0	x_6	$-\frac{6}{7}$	0	0	-1/7	0	-2/7	1
	$\sigma_j = c_j - z_j$		0	0	-5/7	0	-3/7	0
	θ_j		-	-	5	-	3/2	-

由于有b小于0，所以用对偶单纯形法进行求解，获得新的最优单纯形表

如果得到的所有b都是整数，则说明当前已经是最优解，否则继续构造方程进行迭代。

0-1规划

0-1变量通常用于表示系统是否处于某状态，表示的是逻辑关系。

解决0-1规划问题有两种方法，一种是过滤隐枚举法，一种是分支隐枚举法

过滤隐枚举法

[例]已知整数规划模型为

目标函数 $\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$

约束条件 $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$

$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$4x_2 + x_3 \leq 6$

x_1, x_2, x_3 为 0 或 1

先用试探法求出一个可行解，例如（x1,x2,x3）= （1，0，0）是一个可行解，z=3。因为是求极大值问题，所以目标值小于3的解不用检验是否满足约束条件，所以现在可以加入一个过滤条件

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \tag{5}$$

该式称为过滤条件(Filtering Constraint), 凡是排列组合所得的目标 $z < 3$ 者全被滤掉，故称过滤隐枚举法。

组合点 (x_1, x_2, x_3)	条件					满足约束吗?	z值
	(z)	①	②	③	④		
(0,0,0)	0					×	
(0,0,1)	5	-1	1	0	1	√	5
(0,1,0)	-2					×	
(0,1,1)	3	1	5			×	
(1,0,0)	3	1	1	1	0	√	3
(1,0,1)	8	0	2	1	1	√	8
(1,1,0)	1					×	
(1,1,1)	6	2	6			×	

过滤隐枚举法可以改进，对于目标下界取为3，凡是大于3的组合全进行约束检验。实际可在运算中加以修改，应以到目前为止出现的最大可行解目标值作为以后运算的过滤条件。

指派问题

匈牙利法

步骤：

1. 变换系数矩阵，增加0元素
2. 试指派（找独立0元素）
3. 额外处理

① 对没有◎的行打“√”；
② 对已打“√” 的行中所有含Ø元素的列打“√” ；
③ 再对打有“√”的列中含◎ 元素的行打“√” ；
④ 重复①、②直到得不出新的打√号的行、列为止；
⑤ 对没有打√号的行画横线，有打√号的列画纵线，这就得到覆盖所有0元素的最少直线数 l 。

4. 变换矩阵以增加0元素
5. 试指派