Chapter-6最大匹配问题&Hall's Thm

匹配&最大匹配

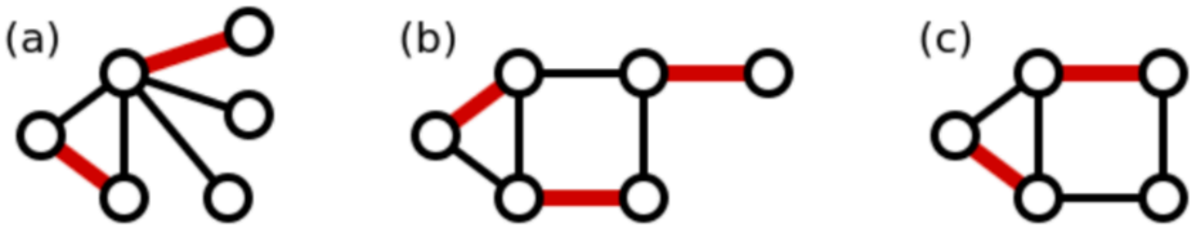
给定无向图G = (V, E)，若M ⊆ E，且M中的边的顶点各不相同，则M叫做一个匹配

如图所示的三种情况都为各自图中的一个匹配。

极大匹配是指无法通过增加未包括在内的边来扩大的匹配。这意味着，如果你试图向极大匹配中添加任何其他边，新加入的边都会与现有匹配中的至少一条边共享一个顶点，从而违反了匹配的定义。

所以上图中的三种情况都属于极大匹配。

图 G 的一个最大匹配是另一个概念, 指边数最多的匹配。**最大匹配可能有不止一个, 但最大匹配的边数是确定的, 并且不可能超过图中顶点数的一半。**这是因为一个匹配中的一条边对应一对 (两个) 顶点, 而不同边所对应的两对顶点是完全不同的, 否则它们就是相邻的两条边了。最大匹配中的顶点数称为图的 “配对数”, 一般记作 $\nu(G)$ 。最大匹配显然都是极大匹配, 但极大匹配不一定是最大匹配。以下三幅图是最大匹配的例子。可以看出, 在左起第一幅图中, 最大匹配的顶点数是 4 , 但在上面的极大匹配的例子中, 存在着只有 1 条边的极大匹配。左起第二幅图中也是一样, 最大匹配的顶点数是 6 , 但在上面的极大匹配的例子中, 存在着只有 2 条边的极大匹配。左起第三幅图则是一个 “最大匹配必然是极大匹配”的例子。



图*G*的一个**完美匹配**（*Perfect Match*）是一个包括了图*G*中原来的所有顶点的匹配，是最大匹配的一种。一般来说，最大匹配不一定使用了原图的所有顶点，因此配对数小于等于原图的顶点数目，比如说上面左起第一和第三幅图。而第二幅图则是一个完美匹配的例子。完美匹配有时也叫做全局匹配或完全匹配。完美匹配同时也是一个原图的最小边数的边覆盖（即是用最少的边包括所有顶点的子图）

增广轨

在一个图中，假设已经有了一个匹配（即一些不相交的边集合）。增广轨是一条交替路径，这条路径的起点和终点都是未匹配的顶点（即这两个顶点不是现有匹配中任何边的一部分），并且路径上的边交替地属于匹配内和匹配外。如果在一个匹配中找到了一条增广轨，那么可以通过“翻转”这条路径上的匹配状态（即将匹配中的边变为非匹配的，将非匹配的边变为匹配中的）来增加匹配中的边的数量。这意味着原来的匹配不是最大匹配。

用数学语言的表示如下：

设 $M \subseteq E$ 是 G 上的一个匹配。增广轨 (P) 的定义如下：

1. P 是 G 中的一条简单路径, 即路径上的顶点不重复。
2. 设 P 的顶点序列为 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 。那么 v_1 和 v_k （即 P 的起点和终点）都是未匹配的点。
3. P 上的边交替地属于匹配内和匹配外，且第一条边是未匹配的边。

增广轨的存在表明当前匹配 M 不是最大匹配。通过"翻转"增广轨 P 上边的匹配状态，可以得到一个更大的匹配。

Thm 1 M有增广轨⇔M不是最大匹配

证明分为两部分：

1. If a matching M is maximum, then there is no augmenting path relative to the matching M :

   Assume there is an augmenting path P relative to the maximum matching M. The augmenting path P will have one more edge not in M than edges in M. A new matching M' can be created by combining the edges of M that are not in P with the edges of P that are not in M. This results in M' having one more edge than M, contradicting the assumption that M is a maximum matching.
2. If there is no augmenting path relative to the matching M, then the matching M is maximum:

   Assume there is a matching M' with a greater number of edges than M. Consider the symmetric difference $Q = M \oplus M'$, which will consist of paths and cycles. Since M' has more edges than M, there must be at least one path in Q with more edges from M' than M. Such a path, being alternating, will have unsaturated initial and final vertices with respect to M, making it an augmenting path for M, contradicting the initial assumption.

二分图的最大匹配算法

算法框架：

1. 令M为一个空匹配
2. 不断寻找M得增广轨并用它来增广
3. 直到M无增广轨时，M为最大匹配

如何找一条增广轨?

定义交错轨，起点为G中未匹配的点，经过的边交替地属于匹配内和匹配外，且第一条边是未匹配的边，**但不要求终点是X未匹配的点**，所以增广轨为特殊的交错轨，因为要求终点是Y中未匹配的点。

求出交错轨可达的全部点的集合，若该集合中包含Y中未匹配的点，则找到一条增广轨。

Thm 2 Hall's Thm（最大匹配的一个重要定理）

Hall's 定理（也称为Hall's Marriage Theorem）是图论中关于二分图最大匹配的一个重要定理。它提供了一个必要且充分的条件, 用于判断一个二分图是否存在完美匹配 （perfect matching），即是否可以找到一个匹配来覆盖图中的每一个顶点。

Hall's 定理的陈述:

设 $G=(X,Y,E)$ 是一个二分图，其中 X 和 Y 是顶点集合， E 是边集合。Hall's 定理指出, 存在一个 X 到 Y 的完美匹配（**或者说G有|X|的匹配，即X中的点都在匹配中**）的充分必要条件是：对于 X 中的任意子集 S,其邻接顶点集 $N(S)$ 的大小至少与 S 一样大。用数学表达即：

$$\forall S \subseteq X, |N(S)| \geq |S| \tag{1}$$

这里, $N(S)$ 表示与 S 中顶点相邻的所有顶点的集合。

定理的直观解释：

这个定理可以用“婚姻”问题来类比：如果 X 和 Y 分别代表两个不同的群体（比如男士和女士）， 那么要让每个男士都找到一个女士结婚（即完美匹配）， 必须满足：对于任意一组男士, 知道的女士的数量至少和这组男士的数量一样多。如果有任何一组男士认识的女士人数少于这组男士的数量, 那么这组男士中至少有一个人找不到配偶。

练习

1. 证明二分图每个顶点的度数都为k，则一定有完美匹配
2. Latin方

请利用最大匹配算法，来填完如下 Latin 矩阵的最后 3 行。
你只需要说明倒数第 3 行 与 倒数第 2 行是如何构图的。

1 2 3 4 5 6

2 3 4 5 6 1

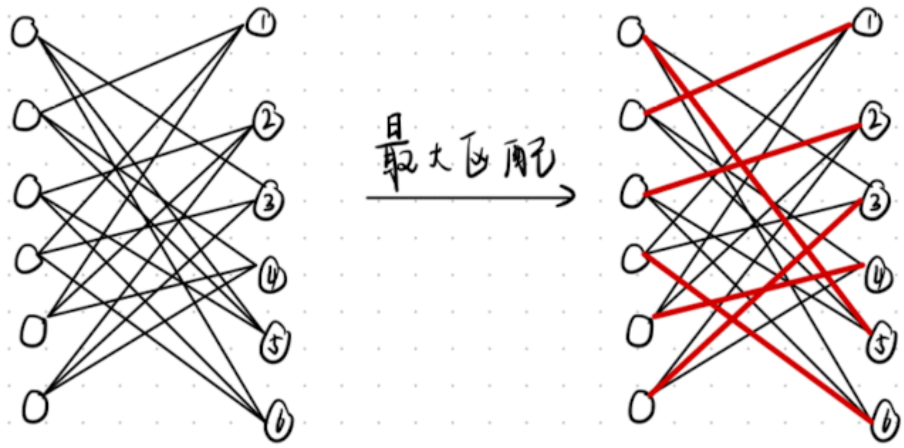
4 6 1 2 3 5

? ? ? ? ? ?

? ? ? ? ? ?

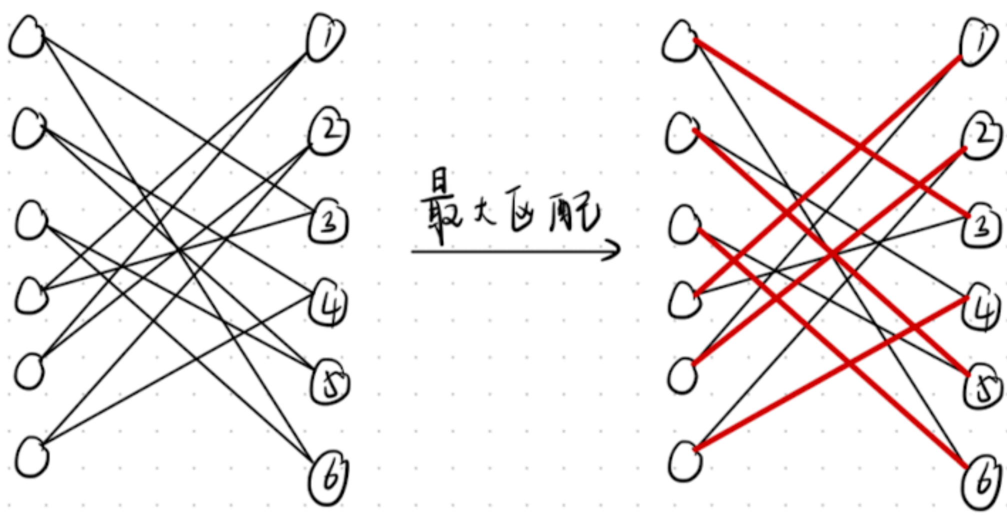
? ? ? ? ? ?

倒数第三行构图：



所以填入 5，1，2，6，4，3

倒数第二行构图



所以填入 3，5，6，1，2，4

最后一行就应填入 6，4，5，3，1，2

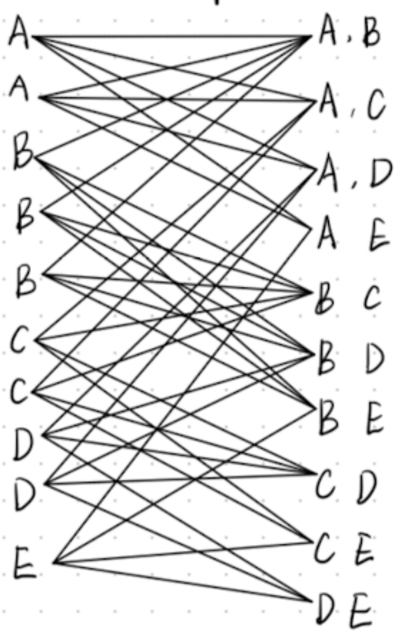
3. 循环赛中，胜负场次的可能性

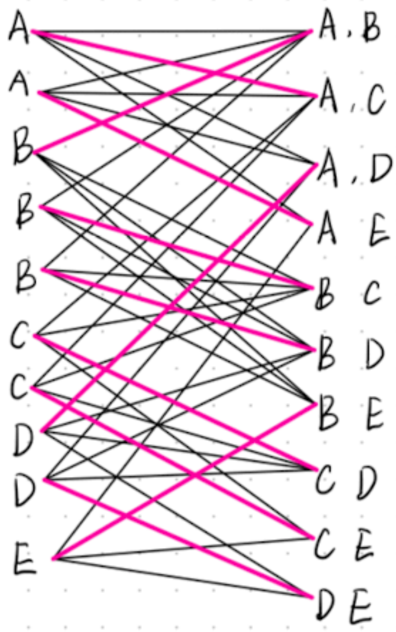
已知在某次循环赛中，选手 ABCDE 分别赢了 2 3 2 2 1 场。
请利用最大匹配算法，找出一种可能的胜负关系图。
需要指出是如何构图。然后画出图中最大匹配。最后再画出对应的胜负关系图。

$C_5^2=10$ 场比赛

其中 A胜两场，B胜三场，C胜两场 D胜两场 E胜一场

构图如下所示





找出该图的一个完美匹配

最终 得到胜负关系如下

(A, B)	B 胜
(A, C)	A 胜
(A, D)	D 胜
(A, E)	A 胜
(B, C)	B 胜
(B, D)	B 胜
(B, E)	E 胜
(C, D)	C 胜
(C, E)	C 胜

(D, E)　D 胜