# Logică Matematică și Computațională

Anul I, Semestrul I 2022/2023

Laurențiu Leuștean

Pagina web: http://cs.unibuc.ro/~lleustean/

# PRELIMINARII

# Operații cu mulțimi

Fie $A$, $B$, $T$ mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \\
A \cap B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\} \\
A \setminus B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\} \\
C_T A &= T \setminus A = \{x \in T \mid x \notin A\}
\end{aligned}$$

Notații: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ este mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Z}$ este mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor reale; $\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor raționale.

Mulțimea părților lui $T$ se notează $2^T$ sau $\mathcal{P}(T)$. Așadar, $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \,|\, A \subseteq T\}$.

Notăm cu $(a, b)$ perechea ordonată formată din $a$ și $b$ (care sunt componentele lui $(a, b)$).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$; $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate $(a, b)$ și $(c, d)$ sunt egale ddacă $a = c$ și $b = d$.

### *Definiție*

Produsul cartezian a două mulțimi $A$ și $B$ este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

## *Funcții*

Fie $A$ și $B$ mulțimi și $f : A \to B$ o funcție.
Spunem că $f : A \to B$ este definită pe $A$ cu valori în $B$, $A$ se numește domeniul de definiție al funcției $f$ și $B$ se numește domeniul valorilor sau codomeniul lui $f$.

Fie $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este imaginea directă a lui $X$ prin $f$; $f(A)$ este imaginea lui $f$.
- $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ este imaginea inversă a lui $Y$ prin $f$.
- Fie $f|_X : X \to B$, $f|_X(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Funcția $f|_X$ este restricția lui $f$ la $X$.

Mulțimea funcțiilor de la $A$ la $B$ se notează $Fun(A, B)$ sau $B^A$.

## *Funcții*

Fie $f : A \to B$ o funcție.

- $f$ este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- $f$ este surjectivă dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- $f$ este bijectivă dacă $f$ este injectivă și surjectivă.

Funcția identică a lui $A$: $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$.

Fie $f : A \to B$ și $g : B \to C$ două funcții. Compunerea lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

$f : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

$f$ este bijectivă ddacă $f$ este inversabilă.

### *Observație*

*(i)* Pentru orice mulțime $A$, $Fun(\emptyset, A)$ are un singur element, funcția vidă.

*(ii)* Pentru orice mulțime nevidă $A$, $Fun(A, \emptyset) = \emptyset$.

### *Definiția 1.1*

*Fie $A, T$ mulțimi a.î. $A \subseteq T$. Funcția caracteristică a lui $A$ în raport cu $T$ este definită astfel:*

$$\chi_A : T \to \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{dacă } x \in A \\ 0, & \textit{dacă } x \notin A \end{cases}$$

### Definiția 1.2

*Spunem că $A$ este echipotentă cu $B$ dacă există o bijecție $f : A \to B$. Notație: $A \sim B$.*

### Propoziția 1.3

*Pentru orice mulțimi $A$, $B$, $C$, avem*

(i) $A \sim A$;

(ii) Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$.

(iii) Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

**Dem.:** Exercițiu.

### Observație

Prin urmare, $A$ este echipotentă cu $B$ ddacă $B$ este echipotentă cu $A$. De aceea, spunem de obicei că $A$ și $B$ sunt echipotente.

## *Echipotență*

Următorul rezultat este fundamental.

### *Teorema 1.4 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)*

*Fie $A$ și $B$ două mulțimi astfel încât există $f : A \to B$ și $g : B \to A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.*

### *Definiția 1.5*

*O mulțime $A$ se numește finită dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $A$ este echipotentă cu $\{1, \ldots, n\}$.*
*Numărul elementelor unei mulțimi finite $A$ se notează $|A|$ și se mai numește și cardinalul lui $A$.*

### *Definiția 1.6*

*O mulțime care nu este finită se numește infinită.*

## Mulțimi (cel mult) numărabile

*Definiția 1.7*

*O mulțime $A$ este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.*
*O mulțime finită sau numărabilă se numește cel mult numărabilă.*

Exemple de mulțimi numărabile: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$.

*Teorema Cantor*

$\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$ nu sunt mulțimi numărabile.

Se poate demonstra că

*Propoziția 1.8*

*$\mathbb{R}$ este echipotentă cu $2^{\mathbb{N}}$.*

# Mulțimi (cel mult) numărabile

## Propoziția 1.9

(i) *Orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.*

(ii) *Orice submulțime a unei mulțimi numărabile este cel mult numărabilă.*

(iii) *O mulțime $A$ este cel mult numărabilă ddacă există o funcție injectivă de la $A$ la o mulțime numărabilă.*

(iv) *Produsul cartezian a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabil.*

(v) *Reuniunea a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.*

## Corolar 1.10

*Fie $A$ o mulțime numărabilă și $B$ o mulțime nevidă cel mult numărabilă. Atunci $A \times B$ și $A \cup B$ sunt numărabile.*

# Cardinale

Numerele cardinale sau cardinalele sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Pentru orice mulțime $A$, cardinalul lui $A$ (sau numărul cardinal al lui $A$) este un obiect $|A|$ asociat lui $A$ a.î. sunt satisfăcute următoarele:

- $|A|$ este unic determinat de $A$.
- pentru orice mulțimi $A$, $B$, avem că $|A| = |B|$ ddacă $A \sim B$.

Această definiție nu specifică natura obiectului $|A|$ asociat unei mulțimi $A$.
Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.

## Cardinale

Un posibil răspuns este:

definim $|A|$ ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipotente cu $A$.

Un alt răspuns este definiția lui von Neumann din teoria axiomatică a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime $A$, $|A|$ este tot o mulțime.

- Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele transfinite sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- $|\mathbb{N}|$ se notează $\aleph_0$ (se citește alef zero).
- $|\mathbb{R}|$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și puterea continuumului.
- O mulțime $A$ este numărabilă ddacă $|A| = \aleph_0$.
- $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$.
- $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

# Familii de mulțimi

Fie $I$ o mulțime nevidă.

## Definiția 1.11

*Fie $A$ o mulțime. O familie de elemente din $A$ indexată de $I$ este o funcție $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i\in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie și $(a_i)_i$ sau $(a_i)$ atunci când $I$ este dedusă din context.*

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime $A_i$, obținem o familie (indexată) de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$.

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi $T$. Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i\in I}$ sunt definite astfel:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} A_i &= \{x \in T \mid \text{ există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}\\ \bigcap_{i\in I} A_i &= \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}\end{aligned}$$

## Familii de mulțimi

Fie $I$ o mulțime nevidă și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi.

### Definiția 1.12

*Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se definește astfel:*

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} A_i &= \left\{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\right\}\\ &= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.\end{aligned}$$

Fie $n$ număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \ldots, n\}$ și $A_1$, ..., $A_n \subseteq T$.

- $(x_i)_{i\in I} = (x_1, \ldots, x_n)$, un $n$-tuplu (ordonat)
- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $\displaystyle\prod_{i\in I} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

*Propoziția 1.13*

(i) *Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este mulțime cel mult numărabilă.*

(ii) *Reuniunea unui număr finit ($\geq 2$) de mulțimi numărabile este numărabilă.*

(iii) *Produsul cartezian al unui număr finit ($\geq 2$) de mulțimi numărabile este numărabil.*

### Definiția 1.14

*O relație n-ară între $A_1, \ldots, A_n$ este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$.*
*O relație n-ară pe $A$ este o submulțime a lui $A^n$. Dacă $R$ este relație n-ară, spunem că $n$ este aritatea lui $R$.*

### Definiția 1.15

*O relație binară între $A$ și $B$ este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.*
*O relație binară pe $A$ este o submulțime a lui $A^2 = A \times A$.*

**Exemple**

- relația de divizibilitate pe $\mathbb{N}$:
  $| = \{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$
- relația de ordine strictă pe $\mathbb{N}$:
  $< = \{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$

## *Relații binare*

Fie $A$ o mulțime nevidă și $R$ o relație binară pe $A$.
Notație: Scriem $xRy$ în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

*Definiția 1.16*

- *$R$ este reflexivă dacă $xRx$ pentru orice $x \in A$.*
- *$R$ este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.*
- *$R$ este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, $xRy$ implică $yRx$.*
- *$R$ este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,*
  $$xRy \text{ și } yRx \text{ implică } x = y.$$
- *$R$ este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,*
  $$xRy \text{ și } yRz \text{ implică } xRz.$$
- *$R$ este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, $xRy$ sau $yRx$.*

Fie $A$ o mulțime nevidă și $R$ o relație binară pe $A$.

### *Definiția 1.17*

*$R$ este relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.*

### *Definiția 1.18*

*$R$ este relație de*

- *ordine parțială dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.*
- *ordine strictă dacă este ireflexivă și tranzitivă.*
- *ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.*

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu $\leq$, iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

# LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

## *Logica propozițională - informal*

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe propoziții sau enunțuri declarative, despre care se poate argumenta în principiu că sunt adevărate sau false.

### *Propoziții declarative*

- Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- Orice număr natural par $> 2$ este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- Andrei este deștept.
- Marțienilor le place pizza.

### *Propoziții care nu sunt declarative*

- Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- Pleacă!

Considerăm anumite propoziții ca fiind atomice și le notăm
$p, q, r, \ldots$ sau $p_1, p_2, p_3, \ldots$.
Exemple: $p$=Numărul 2 este par. $q$=Mâine plouă. $r$=Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate $\varphi$, $\psi$, $\chi$, $\cdots$) folosind conectorii logici $\neg$ (negația), $\rightarrow$ (implicația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\leftrightarrow$ (echivalența).

*Exemple:*

| | | |
|---|---|---|
| $\neg p$ | = | Numărul 2 nu este par. |
| $p \vee q$ | = | Numărul 2 este par sau mâine plouă. |
| $p \wedge q$ | = | Numărul 2 este par și mâine plouă. |
| $p \rightarrow q$ | = | Dacă numărul 2 este par, atunci mâine plouă. |
| $p \leftrightarrow q$ | = | Numărul 2 este par dacă și numai dacă mâine plouă. |

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele ( , ).
Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

*Exemplu:*

Fie propoziția:

$\varphi$=*Azi este vineri, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

$p$=*Azi este vineri.* $q$=*Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$=*Azi este vineri și nu avem curs de logică.*

*Exemplu:*

Fie propoziția:

$\varphi$=*Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

$p$ = *Trenul întârzie.*

$q$ = *Sunt taxiuri la gară.*

$r$ = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \to r$.

Presupunem că $\varphi, p$ sunt adevărate și $r$ este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre $q$? $q$ este adevărată.