20.10.2022

Seminar 3

1) $\rho = \{(\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b}) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

Este ρ funcție?

Nu, deoarece perechea $(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}) \in \rho$

dar și perechea $(\frac{2}{4}, \frac{3}{4}) \in \rho$

Dar $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, deci pentru aceeași valoare a avem

mai multe b => imposibil

2) $\rho = \{(\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b}) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (a,b) = 1)$

Este ρ funcție?

Nu, deoarece perechea $(\frac{-1}{2}, 0) \in \rho$ și

$(\frac{1}{-2}, -1) \in \rho$

3) $\rho = \{\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (a,b) = 1$ și $\underline{b \in \mathbb{N}}\}$

Este ρ funcție?

Da, dacă $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ și $\left.\begin{array}{l} a, a' \in \mathbb{Z} \\ b, b' \in \mathbb{N}^* \\ (a,b) = 1 \\ (a',b') = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a+1}{b} = \frac{a'+1}{b}$

$ab' = a'b \Rightarrow a \mid a'b$ dar $(a,b)=1$

Deci $a \mid a'$

$\Rightarrow a' \mid ab'$ dar $(a',b')=1 \Rightarrow a' \mid a$

Dar și $a \mid a'$

$\left.\begin{array}{l} a' \mid a \\ a \mid a' \end{array}\right\} \Rightarrow a = \pm a'$, $b, b' \in \mathbb{N}^*$

$\Downarrow$

$aa' \geq 0$

$a = a'$

$\Downarrow$

$b = b'$

Dacă $a = a' = 0 \Rightarrow b = b' = 1$

Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a+1}{b}$ $(\forall) a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$, $(a,b)=1$

Este f inj? dar surj?

Fie $a, a' \in \mathbb{Z}$, $b, b' \in \mathbb{N}^*$ $\Big|$ $(a,b)=1$, $(a',b')=1$ și $f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{a'}{b'}\right)$ ~~$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$~~

$\Rightarrow \frac{a+1}{b} = \frac{a'+1}{b'} \Leftrightarrow (a+1)b' = (a'+1)b$

$a=1$ $\quad a'=3$ $\Rightarrow f$ nu este inj.
$b=2$ $\quad b'=4$

Surj

$\frac{3}{4} = \frac{a+1}{b}$; $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ $(a,b)=1$

$\Rightarrow 3b = 4(a+1) \Rightarrow 3 \mid (a+1) \Rightarrow a = 3k-1$; $k \in \mathbb{Z}$

$b = 4k$

$\exists k \in \mathbb{Z}$ a.î. $(3k-1, 4k) = 1$?

Dacă $k=2 \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5+1}{8}$

În general

$\forall m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(m,n)=1$ $\exists$ $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$

cu $(a,b) = 1$ a.î. $\frac{m}{n} = \frac{a+1}{b}$

$$\left.\begin{array}{l} mb = n(a+1) \\ (m,n)=1 \end{array}\right| \Rightarrow m \mid a+1 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } a = km-1$$

$\Rightarrow mb = m(kn)$

Dacă $m=0 \Rightarrow n=1 \Rightarrow \frac{0}{1} = \frac{-1+1}{2}$ ✓

Dacă $m \neq 0 \Rightarrow b = kn$

$\exists k \in \mathbb{Z}$ a.î. $(km-1, kn) = 1$?

Considerăm $k = mn$

Dacă $\exists p$ prim a.î. $\begin{cases} p \mid km-1 \\ p \mid kn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \mid m^2n-1 \\ p \mid mn^2 \end{cases}$

$\Rightarrow p \mid m$ sau $p \mid n \Rightarrow p \mid mn$

$mn(m^2n$

Deci f | 1 X

④ $\emptyset \neq M \supseteq A, B \quad f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1) f inj $\Leftrightarrow A \cup B = M$

" $\Leftarrow$ " $A \cup B = M \Rightarrow f$ inj

$X, Y \subset M$ a.î. $f(X) = f(Y)$

$\Leftrightarrow (X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$

$\Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$

și

$X \cap B = Y \cap B$

$\Rightarrow (X \cap A) \cup (X \cap B)$

$\shortparallel$

$(Y \cap A) \cup (Y \cap B)$

$\Rightarrow X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$

$\Rightarrow X \cap M = Y \cap M$

$\Rightarrow X = Y \Rightarrow \underline{f \text{ inj}}$

" $\Rightarrow$ " f inj $\Rightarrow A \cup B = M$

(MRA) $A \cup B \subset M \Rightarrow \exists x \in M, x \notin A \cup B$

$f(\{x\}) = (\emptyset, \emptyset)$, (deoarece $x \notin A \wedge x \notin B$)

f inj $\quad f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$

$\Rightarrow \{x\} = \emptyset$ X

ii) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f$ surj

"$\Rightarrow$" $X \subseteq M$

Pp prin RA că $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A \cap B$

$(\emptyset, \{x\}) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

f surj $\Rightarrow \exists X \subseteq M$ a.î.

$f(X) = (\emptyset, \{x\}) \Leftrightarrow X \cap A = \emptyset$ (1)

$X \cap B = \{x\}$ (2)

$(1) \Rightarrow x \notin A$

$(2) \Rightarrow x \in B$

$x \in A \cap B$

"$\Leftarrow$" $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f$ surj

Fie $X \subset A$ și $Y \subset B$, $X, Y \subset M$

și $Z = X \cup Y \subset M$

$f(Z) = (Z \cap A, Z \cap B) = ((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B)$

$= ((X \cap A) \cup (Y \cap A), (X \cap B) \cup (Y \cap B)) =$

$Y \cap A \subseteq A \cap B = \emptyset$, $X \cap B \subseteq A \cap B = \emptyset$

$= (X \cap A, Y \cap B) = (X, Y)$

$X \subseteq A$, $Y \subseteq B$

5. $f : \mathbb{N} \to (0,1)$

$f(n) = \{2^n \cdot \sqrt{3}\}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Este f injectivă?

$f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$

Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(m)$

$\{2^n \sqrt{3}\} = \{2^m \sqrt{3}\} \Leftrightarrow$

$2^n \sqrt{3} - [2^n \sqrt{3}] = 2^m \sqrt{3} - [2^m \sqrt{3}]$

$\underbrace{(2^n - 2^n)\sqrt{3}}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{[2^n \sqrt{3}] - [2^m \sqrt{3}]}_{\in \mathbb{Z}}$

$\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 2^n - 2^n = 0 \Rightarrow n = m$

$\Downarrow$

f inj