

Seminar 0x03

Cristian Rusu

1 Scopul seminarului

În acest seminar vom rezolva niște probleme care implică:

- înmulțirea și împărțirea numerelor întregi;
- reprezentarea în virgulă mobilă a numerelor reale;
- operații cu numere reprezentate în virgulă mobilă.

2 Exerciții

1. Realizați operațiile de înmulțire între următoarele numere naturale scrise în reprezentarea binară:

(a) 1110×0011

(f) 011110×110011

(b) 1101×0101

(g) 111000×000111

(c) 0010×1101

(h) 101010×010101

(d) 1010×1101

(i) 11110000×00001111

(e) 101010×001111

(j) 10000001×11100011

2. Realizați din nou operațiile de la exercițiul anterior dar considerând că numerele date sunt întregi, scrise în complement față de doi.

3. În multe situații avem nevoie să efectuăm operații cu operanzi speciali. Dat un număr natural a , considerați următoarele exemple și descrieți modalități simplificate de a realiza:

(a) $a \times 2$

(f) $a \times 7$

(b) $a \times 16$

(g) $a \div 8$

(c) $a \times 3$

(h) $a \bmod 16$

(d) $a \times 5$

(i) $a \times 17$

(e) $a \times 6$

(j) $a \times 72$

4. Ce se întâmplă cu operațiile din exercițiul anterior dacă a este un număr întreg?

5. Realizați operațiile de împărțire între următoarele numere naturale scrise în reprezentarea binară

(a) $101010 \div 10$

(f) $00001111 \div 111$

(b) $010101 \div 10$

(g) $11110000 \div 111$

(c) $100100100 \div 100$

(h) $01101110 \div 110$

(d) $111010101 \div 11$

(i) $11101010 \div 1010$

(e) $001110010 \div 11$

(j) $11111111 \div 1011$

6. Realizați din nou operațiile de la exercițiul anterior dar considerând că numerele date sunt întregi, scrise în complement față de doi.

7. Reamintim în Anexa 1 structura unui număr reprezentat în formatul IEEE 754 Floating Point. Reprezentați următoarele numere în acest format:

- | | |
|----------|----------------|
| (a) 0 | (f) -1313.3125 |
| (b) 1.0 | (g) 0.1015625 |
| (c) -1.0 | (h) 39887.5625 |
| (d) 2.0 | (i) 0.33 |
| (e) 0.67 | (j) 3.14 |

8. Se dă un număr a reprezentat în formatul IEEE 754 FP. Realizați, folosind cât mai multe operații logice pe biți, următoarele operații:

- | | |
|---------------------------------|---|
| (a) calculați $\text{abs}(a)$; | (d) înmulțiți a cu 16; |
| (b) schimbați semnul lui a ; | (e) fie b un alt număr în formatul IEEE 754 FP, realizați $a \times b$ și realizați $a + b$. |
| (c) împărțiți a la 4; | |

9. Următoarele numere sunt în formatul IEEE 754 FP, găsiți valorile lor zecimale:

- | | |
|----------------|----------------|
| (a) 0xFFFFFFFF | (f) 0xbe580000 |
| (b) 0x0000FFFF | (g) 0xa3358000 |
| (c) 0xFFFF0000 | (h) 0x76650000 |
| (d) 0xDEADBEEF | (i) 0xFEEDC0DE |
| (e) 0x44361000 | (j) 0xC00010FF |

10. În formatul IEEE 754 FP zero este reprezentat cu 32 de biți setați la zero. Aceasta este o convenție, care ar fi defapt valoarea reprezentată cu 32 de biți zero în formatul IEEE 754 FP?

11. Sunt date două numere în formatul IEEE 754 FP, realizați operația de adunare în următoarele cazuri:

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| (a) $7988747653.0 + 1.0$ | (f) $-13.3334 + 8.6667$ |
| (b) $3.14 + 2.72$ | (g) $0.3185 + 0.3676$ |
| (c) $3.14 - 2.72$ | (h) $0.1 + 0.2$ |
| (d) $-3.14 + 2.72$ | (i) $0.2 + 0.3$ |
| (e) $47.0 + 52.99$ | (j) $0.1 - 0.2$ |

12. Când discutăm despre implementarea cu circuite digitale, operația de împărțire este mult mai lentă decât operațiile de adunare și înmulțire. Găsiți metode rapide de împărțire în următoarele cazuri:

- | | |
|-----------------|-------------------|
| (a) $a \div 8$ | (f) $a \div 60$ |
| (b) $a \div 19$ | (g) $a \div 100$ |
| (c) $a \div 30$ | (h) $a \div 256$ |
| (d) $a \div 10$ | (i) $a \div 3.14$ |
| (e) $a \div 24$ | (j) $a \div 2.72$ |

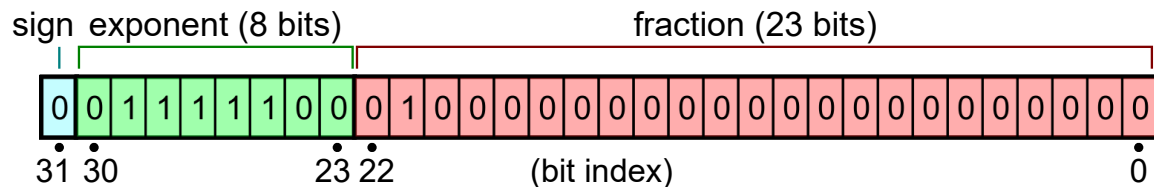
13. Răspundeți la următoarele întrebări despre formatul IEEE 754 FP:
- (a) câte numere distincte se pot reprezenta cu acest format?
 - (b) câte numere distincte în intervalul 2^{-5} și 2^{-4} se pot reprezenta cu acest format?
 - (c) câte numere distincte în intervalul 2^{13} și 2^{14} se pot reprezenta cu acest format?
 - (d) câte numere distincte în intervalul 2^{47} și 2^{49} se pot reprezenta cu acest format?
14. Se dă un număr a în formatul IEEE 754 Floating Point. Calculați $[a]$, parte întreagă de a .
15. Știm că $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$. Scrieți un program care calculează această serie iar pentru fiecare sumă intermediară afișați pe ecran valoarea curentă (zecimal și hexazecimal).
16. Avem un array doar cu valori pozitive în formatul IEEE 754 FP. Array-ul este foarte lung (conține $N > 10^6$ elemente) și știm despre elemente că au valori foarte mici ($\ll 1$) sau foarte mari ($\gg 10^9$), iar majoritatea are valori foarte mici. Avem nevoie să calculăm suma elementelor din array. Ce probleme pot apărea în această situație? Propuneți soluții.
17. Vrem să calculăm $\sum_{i=1}^{30000} \frac{1}{i^2}$ folosind doar tipul de date float (single precision). Calculați seria adunând elementele în ordine ($i = 1, \dots, 30000$) și apoi invers ($i = 30000, \dots, 1$) – pentru că operația de adunare este comutativă, rezultatul ar trebui să fie identic. Sunt cele două rezultate identice? Care este limita sumei atunci când sumăm nu 30000 de termeni ci un număr infinit de termeni de tipul $\frac{1}{i^2}$? Explicați rezultatele obținute.
18. Considerăm din nou formatul IEEE 754 FP. Răspundeți la următoarele întrebări:
- (a) care este cel mai mic/mare număr care se poate reprezenta?
 - (b) care este cel mai mic număr pozitiv care se poate reprezenta?
 - (c) care este cel mai mare număr mai mic decât 1.0 care se poate reprezenta?
 - (d) care este cel mai mic număr mai mare decât 1.0 care se poate reprezenta?
 - (e) care este numărul cel mai apropiat de π care se poate reprezenta?
 - (f) care este numărul cel mai apropiat de e care se poate reprezenta?
 - (g) care este numărul cel mai apropiat de φ care se poate reprezenta?
19. În 1991, în timpul războiului din Golf (operațiunea “Furtună în deșert”) sistemul de apărare Patriot al U.S. nu a reușit să intercepteze o rachetă SCUD a forțelor armate Irakiene. Intern, sistemul american avea o operație aritmetică unde făcea conversia din timp discret (număr întreg) în timp real (secunde, număr real) înmulțind timpul discret cu 0.1 (pentru a obține numărul de secunde). Sistemul avea 0.1 aproximat pe 24 de biți astfel

$$(0.1)_{10} \approx (0.00011001100110011001100)_2.$$

Cerințe:

- (a) calculați aproximarea binară de mai sus;
 - (b) care este diferența dintre valoarea calculată și 0.1;
 - (c) care este eroarea (de timp) după 100 de ore de operare;
 - (d) care este eroarea dacă reprezentăm 0.1 în formatul IEEE 754 FP?
 - (e) dacă rachetele SCUD pot atinge o viteză MACH 5, care este distanța pe care racheta o poate parcurge în timpul eroare calculat?
 - (f) ce faceți ca să corectați problema?
20. Fie a un număr întreg pe 8 biți, găsiți proceduri eficiente pentru calculul:
- (a) 1^a , $(-1)^a$, 2^a , $(-2)^a$, 4^a și $(-4)^a$;
 - (b) a^p , pentru orice p număr natural (hint: gândiți-vă la cazul special a^{15}).

Anexa 1



Un exemplu de reprezentare în formatul IEEE 754 Floating Point (sursa: wikipedia).