FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 1

1 Breviar

1.1 Numărabilitate

Corolarul 1.10. Fie A o mulţime numărabilă şi B o mulţime nevidă cel mult numărabilă. Atunci $A \times B$ şi $A \cup B$ sunt numărabile.

Propoziţia 1.13.

(i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi cel mult numărabile este mulţime cel mult numărabilă.

(ii) Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabilă.

(iii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabil.

1.2 Logica propoziţională

Fie φ, $\psi \in Form$.
Pentru orice $e : V \to \{0,1\}$, notăm cu $e \vDash \varphi$ (şi spunem că e **satisface** φ sau e este **model** pentru φ) dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notăm cu $\vDash \varphi$ (şi spunem că φ este **tautologie**) dacă pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ avem că $e \vDash \varphi$. Spunem că φ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \varphi$ şi **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \varphi$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ avem că $e \nvDash \varphi$. Notăm $\varphi \vDash \psi$ (şi spunem că **din** φ **se deduce semantic** ψ sau că ψ **este consecinţă semantică a lui** φ) dacă pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \varphi$ avem $e \vDash \psi$. Notăm cu $\varphi \sim \psi$ dacă pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ avem $e \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $e \vDash \psi$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi)$.

2 Exerciţii

(S1.1)

(i) Demonstraţi că mulţimea $Expr$ a expresiilor logicii propoziţionale este numărabilă.

(ii) Demonstraţi că mulţimea $Form$ a formulelor logicii propoziţionale este numărabilă.

(S1.2) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \vDash (\varphi \to \psi)$;

(ii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$.

(S1.3) Să se găsească câte un model pentru fiecare dintre formulele:

(i) $v_0 \to v_2$;

(ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

(S1.4) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ, $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă φ este tautologie.

(S1.5) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice φ, $\psi \in Form$, $\vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ şi $\vDash \psi$;

(ii) pentru orice φ, $\psi \in Form$, $\vDash \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ sau $\vDash \psi$.