Seminar 1

(1) $A = \{3n-2 \mid n \in \mathbb{N}\}$

$B = \{1003-2m \mid m \in \mathbb{N}\}$

Fie $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A,\ x \in B \Leftrightarrow \exists\, n, m \in \mathbb{N}$

a.î. $x = 3n-2$

$x = 1003-2m$

Deci $3n-2 = 1003-2m \Leftrightarrow 3n+2m = 1005$

Obs $3 \mid 3n$; $3 \mid 1005 \Rightarrow 3 \mid 2m$ Deci $3 \mid m$

Deci $m = 3m'$; $m' \in \mathbb{Z}$

$3n + 6m' = 1005 \quad | :3$

$n + 2m' = 335$ De unde obs. că $\begin{cases} 0 \le m' \le 167 \\ n = 335 - 2m' \end{cases}$

Deci $A \cap B = \{1003 - 6m' \mid 0 \le m' \le 167\} \subset \mathbb{Z}$

① $ax + by = c$; $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$

Ecuația are soluții în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \iff \underbrace{(A, B)}_{\text{c.m.m.d.c.}(A,B)} \mid c$

implicația directă

"$\Rightarrow$" Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ soluție $\iff ax_0 + by_0 = c$

$(a, b) \mid a$, $(a, b) \mid b \Rightarrow (a, b) \mid ax_0 + by_0 = c$

implicația inversă

"$\Leftarrow$" $(a, b) \mid c$

Notăm $(a, b) = d \Rightarrow a = da'$ cu $(a', b') = 1$

$b = db'$

$\Rightarrow d \mid c \Rightarrow c = dc'$, $c' \in \mathbb{Z}$

Deci $da'x + db'y = dc' \mid d$

$a'x + b'y = c'$

$(a', b') = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z}$ a.î. $ua' + vb' = 1 \mid c'$

$\Rightarrow a'uc' + b'vc' = c' \mid \cdot d$

$auc' + bvc' = c$

Deci $(a c', b c')$ sol. a ecuației

(3) $281x - 133y = 3$

Determinați o soluție pentru această ecuație

$281 / 133 = 2 \text{ r } 15 \Rightarrow 15 = 281 - 2 \cdot 133$

$133 / 15 = 8 \text{ r } 13 \Rightarrow 13 = 133 - 8 \cdot 15 = 133 - 8(281 - 2 \cdot 133)$
$= -8 \cdot 281 + 17 \cdot 133$

$15 / 13 = 1 \text{ r } 2 \Rightarrow 2 = 15 - 1 \cdot 13 = \underbrace{15}_{281 - 2 \cdot 133} + 8 \cdot 281 - 17 \cdot 133$

$13 / 2 = 6 \text{ r } 1$

$2 / \boxed{1} = 2 \text{ r } 0$

$9 \cdot 281 - 19 \cdot 133$

Deci $(281, 133) = 1 \mid 3 \Rightarrow$ ecuația are sol

$1 = 13 - 2 \cdot 6 = -8 \cdot 281 + 17 \cdot 133 - 6(9 \cdot 281 - 19 \cdot 133) = -62 \cdot 281 + 131 \cdot 133$

$\Rightarrow -62 \cdot 281 + 131 \cdot 133 = 1 \mid \cdot 3$

$-186 \cdot 281 + 393 \cdot 133 = 3 \Rightarrow x = -186$
$y = -393$

Dem. formală

(4) $ax + by = c$

$a, b \in \mathbb{Z}^*$

$d = (a, b) \wedge d \mid c$

$a = d a'$
$b = d b'$ cu $(a', b') = 1$

$c = d c'$

Deci $a' x + b' y = c'$

Considerăm (x_0, y_0) soluție particulară

Dacă (x, y) este o altă soluție a ecuației $\Rightarrow a'x_0 + b'y_0 = c' = a'x + b'y$

$\Rightarrow a'(x_0 - x) = b'(y - y_0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a' \mid b'(y - y_0) \\ (a', b') = 1 \end{array}\right\} a' \mid y - y_0$

$\Downarrow$

$\exists t \in \mathbb{Z}$ a.î. $y - y_0 = a't$

$\Rightarrow (x_0 - x) = b' \cdot t \Rightarrow (x, y) = (x_0 - b't, y_0 + a't)$

$281x - 133y = 3$

$\left.\begin{array}{l} x = -186 + 133t \\ y = -393 + 281t \end{array}\right\}$ cu $t \in \mathbb{Z}$ (soluția generală a ecuației)

⑤ $A = \{3n - 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $B = \{1003 - 2m \mid m \in \mathbb{Z}\}$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 3n - 2 \\ x = 1003 - 2m \end{array}$ $n, m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3n - 2 = 1003 - 2m \Leftrightarrow$

$3n + 2m = 1005$

$1 = 3 - 2 \mid \cdot 1005$

$\Rightarrow 3 \cdot 1005 - 2 \cdot 1005 = 1005$

Deci $n_0 = 1005$

$m_0 = -1005$

Și $\begin{array}{l} n = 1005 - 2t \\ m = -1005 + 3t \end{array}$, $t \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow A\cap B = \{3(1005-2t)-2 \mid t\in\mathbb{Z}\}$$
$$= \{-6t+3013 \mid t\in\mathbb{Z}\} = \{6t+1 \mid t\in\mathbb{Z}\}$$

⑥ $M = \left\{x\in\mathbb{Q} \mid x = \frac{n^2+3}{n^2+n},\ n\in\{1 \dots 50\}\right\}$

$\text{Card}(M) = ?$

Fie $n, m \in \{1 \dots 50\}$ a.î. $n\neq m \Rightarrow \frac{n^2+3}{n^2+n} = \frac{m^2+3}{m^2+m}$

Deci $(n^2+3)(m^2+m) = (m^2+3)(n^2+n)$

$$\cancel{n^2m^2} + n^2m + 3m^2 + 3m = \cancel{m^2n^2} + m^2n + 3n^2 + 3n \Rightarrow$$
$$mn(n-m) + 3(m^2-n^2) + 3(m-n) =$$
$$= mn(n-m) + 3(m-n)(m+n) + 3(m-n) =$$
$$= (m-n)(-mn+3(m+n)+3) = 0$$

Deci $m=n$ sau $-mn+3(m+n)+3=0$

Deci $mn-3(m+n)-3=0$

$$m(n-3)-3(n-3)=12$$
$$(m-3)(n-3)=12$$

Avem soluțiile
$$\boxed{\begin{array}{l} n=4 \Rightarrow m=15 \\ n=5 \Rightarrow m=9 \\ n=6 \Rightarrow m=7 \end{array}}$$
$n=7 \Rightarrow m=6$

} și se repetă

Deci card$(A)=47$