

# Analiză matematică

Chiş Codruţa



# Cuprins

<b>1</b>	<b>Serii numerice</b>	<b>5</b>
1.1	Definiții. Exemple . . . . .	5
1.2	Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi . . .	8
1.3	Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare . . .	16
1.4	Probleme propuse . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Serii de puteri</b>	<b>23</b>
2.1	Suma unei serii de puteri . . . . .	28
2.2	Operații cu serii de puteri . . . . .	29
2.3	Derivarea seriilor de puteri . . . . .	29
2.4	Integrarea seriilor de puteri . . . . .	30
2.5	Probleme propuse . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Formula lui Taylor</b>	<b>35</b>
3.1	Serii Taylor pentru funcții de două variabile . . . . .	38
3.2	Probleme propuse . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Noțiuni de topologie în <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>Funcții de mai multe variabile</b>	<b>45</b>
5.1	Definiții. Exemple . . . . .	45
5.2	Probleme propuse . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Limite. Continuitate</b>	<b>49</b>
6.1	Limita unei funcții într-un punct . . . . .	49
6.2	Continuitate . . . . .	51
6.3	Probleme propuse . . . . .	53

<b>7</b>	<b>Derivate parțiale</b>	<b>55</b>
7.1	Derivate parțiale de ordinul întâi . . . . .	55
7.2	Derivate parțiale de ordin superior . . . . .	57
7.3	Gradient. Diferențială . . . . .	59
7.3.1	Diferențierea funcțiilor compuse . . . . .	62
7.4	Hessiana unei funcții într-un punct . . . . .	64
7.5	Probleme propuse . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Extreme locale ale funcțiilor de mai multe variabile</b>	<b>67</b>
8.1	Extreme necondiționate . . . . .	68
8.2	Extreme condiționate . . . . .	71
8.3	Probleme propuse . . . . .	75
<b>9</b>	<b>Elemente de calcul integral</b>	<b>77</b>
9.1	Primitive . . . . .	77
9.1.1	Primitive reductibile la primitivele funcțiilor raționale	79
9.2	Funcții integrabile. Integrala definită . . . . .	80
9.3	Aplicații ale integralelor definite . . . . .	83
9.3.1	Aria subgraficului unei funcții continue și pozitive . .	83
9.3.2	Lungimea graficului unei funcții derivabile cu derivata continuă . . . . .	83
9.3.3	Volumul unui corp de rotație . . . . .	84
9.3.4	Aria suprafețelor de rotație . . . . .	84
9.3.5	Centre de greutate . . . . .	84
<b>10</b>	<b>Ecuatii diferențiale</b>	<b>87</b>
10.1	Introducere în teoria ecuațiilor diferențiale . . . . .	87
10.2	Ecuatii diferențiale de ordinul I . . . . .	89
10.2.1	Ecuatii cu variabile separabile . . . . .	89
10.2.2	Ecuatii diferențiale omogene . . . . .	92
10.2.3	Ecuatii diferențiale liniare de ordinul I . . . . .	93
10.2.4	Ecuatii diferențiale de tip Bernoulli . . . . .	95
10.3	Modele matematice ale creșterii populației . . . . .	97
10.3.1	Modelul lui Malthus . . . . .	97
10.3.2	Modelul lui Verhulst . . . . .	97

# 1

## Serii numerice

### 1.1 Definiții. Exemple

**Definiție.** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale și  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i, n \geq 1$ . Cuplul  $((a_n)_{n \geq 1}, (s_n)_{n \geq 1})$  se numește *serie numerică* și se notează  $\sum_{n \geq 1} a_n$  sau  $\sum_n a_n$  sau  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

- Elementul  $a_n$  se numește *termen general* al seriei, elementele șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  se numesc *termenii seriei*;
- elementele șirului  $(s_n)_{n \geq 1}$  se numesc *sumele parțiale* ale seriei, iar elementul  $s_n$  se numește *suma parțială de rang  $n$* .

**Definiție.** O serie de numere reale  $\sum_{n \geq 1} a_n$  se numește *convergentă* dacă șirul  $(s_n)_{n \geq 1}$  al sumelor parțiale este convergent; dacă șirul sumelor parțiale are limită, această limită se numește *suma seriei*, și scriem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \implies \sum_{n \geq 1} a_n = s.$$

În particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \implies \sum_{n \geq 1} a_n = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty \implies \sum_{n \geq 1} a_n = -\infty.$$

Dacă șirul sumelor parțiale nu are limită, atunci seria se numește *oscilantă*.

Dacă o serie este oscilantă sau are suma  $\pm\infty$ , ea se numește *divergentă*.

**Exemplu.** Dacă  $r \in \mathbf{R}$  este un număr real, seria  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  se numește *seria geometrică de rație  $r$* .

Fie  $r = 1$ . Atunci suma parțială de ordin  $n$  a seriei geometrice este

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1} = n + 1.$$

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) = \infty$ , seria  $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$  este divergentă.

Pentru  $r \neq 1$ , suma parțială de ordin  $n$  a seriei geometrice este

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

**Propoziție.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  o serie geometrică.

(i) Dacă  $|r| < 1$ , atunci seria geometrică este convergentă, cu suma

$$\frac{1}{1 - r}.$$

(ii) Dacă  $|r| \geq 1$ , atunci seria geometrică este divergentă.

**Demonstrație.** (i) Dacă  $|r| < 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ , astfel că  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-r}$ , deci seria este convergentă, cu suma  $\frac{1}{1-r}$ .

(ii) Dacă  $|r| > 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} |r|^{n+1} = \infty$ , deci suma este divergentă.

Dacă  $r = 1$ , am văzut mai sus că seria geometrică diverge.

Dacă  $r = -1$ , atunci șirul sumelor parțiale alternează între valorile 0 și 1, deci și această serie este divergentă.

**Exemplu.**  $1 - \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{2}{3})^n = \frac{1}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{3}{5}$ .

**Observație.** Uneori, așa cum am văzut și în exemplele de mai sus, primul termen al unei serii nu este neapărat  $a_1$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$  și  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  sunt exemple de asemenea serii. În al doilea caz, trebuie să începem cu  $n = 2$ , deoarece  $\frac{1}{\ln 1}$  nu este definit.

**Exemplu.** Putem scrie numărul  $\frac{1}{3}$  ca

$$\frac{1}{3} = 0,33333\dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$$

Această expresie este o serie, având termenul general  $a_n = \frac{3}{10^n}$ . Putem demonstra că această serie este convergentă:

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots &= \frac{3}{10} (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots) = \\ &= \frac{3}{10} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^k = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

De altfel, orice număr subunitar  $x$  poate fi gândit ca suma unei serii convergente, deoarece dacă  $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ , atunci

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

O **condiție necesară de convergență** a unei serii numerice este următoarea:

**Propoziție.** Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie convergentă de numere reale. Atunci șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este convergent la 0.

**Demonstrație.** Fie  $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Pentru două sume parțiale consecutive avem atunci

$$s_n = \sum_{k=1}^n (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n = s_{n-1} + a_n,$$

deci

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Rezultă atunci următoarea **condiție suficientă de divergență**:

**Corolar.** Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie de numere reale. Dacă șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  nu are limită sau are limită nenulă, atunci seria dată este divergentă.

**Observație.** Dacă  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este o serie pentru care  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , nu rezultă neapărat că seria dată este convergentă.

**Contraexemplu.** Seria armonică  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  este divergentă, cu suma  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty$ , în ciuda faptului că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ :

Să presupunem că seria dată ar fi convergentă cu suma  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = s$ . Fie

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Rezultă deci că  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . Dar

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_n = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

și obținem că

$$s_{2n} > \frac{1}{2} + s_n, \quad (\forall) n \geq 1.$$

Trecând la limită în ultima relație, obținem:

$$s \geq \frac{1}{2} + s,$$

ceea ce este absurd. Prin urmare presupunerea făcută nu poate fi adevărată, deci seria armonică este divergentă.

O proprietate importantă a seriilor convergente este următoarea:

**Propoziție.** Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  și  $\sum_{n \geq 1} b_n$  două serii convergente cu sumele  $s$ , respectiv  $t$ , și fie  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ . Atunci seria  $\sum_{n \geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n)$  este convergentă și are suma  $\alpha s + \beta t$ .

**Demonstrație.** Fie  $s_n$ , respectiv  $t_n$ , sumele parțială de rang  $n$  ale celor două serii. Atunci suma parțială de rang  $n$  a seriei  $\sum_{n \geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n)$  este  $\alpha s_n + \beta t_n$ , și avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha s_n + \beta t_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \alpha s + \beta t.$$

**Corolar.** Presupunem că seria  $\sum_{n \geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n)$  este convergentă pentru anumite constante  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$ . Atunci  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă dacă și numai dacă  $\sum_{n \geq 1} b_n$  este convergentă.

**Observație.** Din convergența seriei  $\sum_{n \geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n)$  nu rezultă însă convergența seriilor  $\sum_{n \geq 1} a_n$  și  $\sum_{n \geq 1} b_n$ .

**Contraexemplu.** Seria  $\sum_{n \geq 1} ((-1)^n + (-1)^{n+1})$  este convergentă, în timp ce seriile  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$  și  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1}$  sunt divergente.

## 1.2 Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

**Definiție.** Spunem că seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este cu termeni pozitivi dacă orice termen al să este pozitiv:  $a_n > 0$ ,  $(\forall) n \geq 1$ .

**Propoziție.** Șirul sumelor parțiale ale unei serii cu termeni pozitivi este strict crescător.

**Demonstrație.** Fie  $(s_n)_{n \geq 1}$  șirul sumelor parțiale ale unei serii cu termeni pozitivi  $\sum_{n \geq 1} a_n$ . Atunci

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \implies s_{n+1} > s_n, \forall n \geq 1,$$



## 1.2. CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI POZITIVI 9

deci șirul  $(s_n)$  este crescător.

**Corolar.** O serie cu termeni pozitivi are întotdeauna sumă (finită sau nu).

Câteva criterii pentru studiul seriilor cu termeni pozitivi sunt:

**C1)** Seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul  $(s_n)_{n \geq 1}$  al sumelor parțiale este mărginit.

**Demonstrație.** Șirul  $(s_n)$  al sumelor parțiale este monoton, astfel că el este convergent dacă și numai dacă este mărginit. Proprietatea enunțată rezultă atunci imediat.

### **C2) Primul criteriu al comparației.**

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$ ,  $\sum_{n \geq 1} b_n$  două serii de numere reale nenegative, astfel încât

$$(\exists) n_0 \in \mathbf{N} : a_n \leq b_n, (\forall) n \geq n_0.$$

Atunci au loc proprietățile:

(a)  $\sum_{n \geq 1} b_n$  convergentă  $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$  convergentă.

(b)  $\sum_{n \geq 1} a_n$  divergentă  $\implies \sum_{n \geq 1} b_n$  divergentă.

**Demonstrație.** Dacă notăm cu  $s_n$ , respectiv  $t_n$ , sumele parțiale de rang  $n$  ale seriilor  $\sum_{n \geq 1} a_n$  și  $\sum_{n \geq 1} b_n$ , atunci din inegalitatea din enunț rezultă că

$$s_n - s_{n_0} \leq t_n - t_{n_0}, (\forall) n \geq n_0.$$

(a) Dacă seria  $\sum_{n \geq 1} b_n$  este convergentă, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n < \infty$ , de unde rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = t_n + s_{n_0} - t_{n_0} < \infty$ , deci  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă.

(b) Dacă seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ , de unde rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s_n + t_{n_0} - s_{n_0} = \infty$ , deci  $\sum_{n \geq 1} b_n$  este divergentă.

**Exemplu.** Să studiem convergența sau divergența seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Deoarece  $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ ,  $(\forall) n \geq 1$ , și deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă, rezultă că  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  este divergentă.

**Exemplu.** Vom studia natura seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ .

Dacă  $n \geq 4$ , atunci  $n! \geq 2^n$ , deci  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$ . Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  este o serie geometrică, cu rația  $\frac{1}{2} < 1$ , ea este convergentă, de unde rezultă că

seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  este convergentă.

**Observație.** Dacă pentru un număr natural oarecare  $N$ , seria  $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$  este convergentă, atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă. De asemenea, dacă seria  $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$  este divergentă, atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă.  
**Adunarea unui număr finit de termeni la o serie nu afectează deci convergența sau divergența seriei.**

**Definiție.** Spunem că două serii de numere reale  $\sum_{n \geq 1} a_n$ ,  $\sum_{n \geq 1} b_n$  **au aceeași natură** dacă ambele sunt convergente sau ambele sunt divergente.

**Notăție.** Notăm acest lucru prin  $\sum_{n \geq 1} a_n \sim \sum_{n \geq 1} b_n$

### C3) Al doilea criteriu al comparației.

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$ ,  $\sum_{n \geq 1} b_n$  două serii de numere reale nenegative astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Atunci au loc următoarele:

- (a) Dacă  $0 < l < \infty$ , cele două serii au aceeași natură.
- (b) Dacă  $l = 0$  și  $\sum_{n \geq 1} b_n$  este convergentă, atunci  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă.
- (c) Dacă  $l = \infty$  și  $\sum_{n \geq 1} b_n$  este divergentă, atunci  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.

**Demonstrație.** (a) Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ , există un număr natural  $N$ , astfel încât  $\frac{a_n}{b_n} \in (l - \frac{l}{2}, l + \frac{l}{2})$ ,  $(\forall) n \geq N$ . Prin urmare au loc  $\frac{l}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3l}{2}b_n$ ,  $(\forall) n \geq N$ . Deoarece seria  $\sum_{n \geq 1} b_n$  are evident aceeași natură ca și seriile  $\sum_{n \geq 1} \frac{l}{2}b_n$  și  $\sum_{n \geq 1} \frac{3l}{2}b_n$ , pe baza primului criteriu de comparație rezultă afirmația din enunț.

(b) Dacă  $l = 0$ , atunci există un număr natural  $N$ , cu proprietatea că  $\frac{a_n}{b_n} < 1$ ,  $(\forall) n \geq N$ . Dar atunci  $a_n < b_n$ ,  $(\forall) n \geq N$ , de unde aplicând primul criteriu de comparație se obține proprietatea enunțată.

(c) Dacă  $l = \infty$ , atunci există un număr natural  $N$ , cu proprietatea că  $\frac{a_n}{b_n} > 1$ ,  $(\forall) n \geq N$ . Dar atunci  $a_n > b_n$ ,  $(\forall) n \geq N$ , de unde aplicând primul criteriu de comparație se obține proprietatea enunțată.

**Exemplu.** Vom arăta că  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2+1}$  este divergentă.

Fie  $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , deci seriile  $\sum_{n \geq 1} a_n$  și  $\sum_{n \geq 1} b_n$  au aceeași natură. Dar  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  este divergentă, deci și  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2+1}$  este divergentă.

**C4) Al treilea criteriu al comparației.**

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$ ,  $\sum_{n \geq 1} b_n$  două de numere reale nenegative, astfel încât :

$$(\exists)n_0 \in \mathbf{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, (\forall)n \geq n_0.$$

Atunci au loc proprietățile:

(a)  $\sum_{n \geq 1} b_n$  convergentă  $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$  convergentă.

(b)  $\sum_{n \geq 1} a_n$  divergentă  $\implies \sum_{n \geq 1} b_n$  divergentă.

**Demonstrație.** Inegalitatea

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, (\forall)n \geq n_0$$

poate fi transcrisă în forma

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}, (\forall)n \geq n_0,$$

de unde rezultă că  $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}, (\forall)n \geq n_0$ , adică

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} \leq \frac{b_n}{b_{n_0}}, (\forall)n \geq n_0.$$

Deoarece seriile  $\sum_{n \geq 1} a_n$  și  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{a_{n_0}}$ , respectiv  $\sum_{n \geq 1} b_n$  și  $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{b_{n_0}}$  au aceeași natură, din ultima inegalitate și primul criteriu de comparație rezultă afirmațiile din enunț.

**C5) Criteriul condensării.**

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie de numere reale pozitive, ai cărei termeni formează un șir descrescător, convergent către 0. Atunci seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  are aceeași natura ca și seria  $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$ .

**Demonstrație.** Deoarece șirul sumelor parțiale al seriei  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este monoton, seria este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit, sau, ceea ce este echivalent (datorită monotoniei), dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale are un subșir mărginit.

Deoarece șirul  $(a_n)$  este descrescător, avem inegalitățile

$$2^k a_{2^k} \geq s_{2^{k+1}} - s_{2^k} \geq 2^k a_{2^{k+1}}, \quad (\forall)k \in \mathbf{N}.$$

Adunând inegalitățile acestea pentru  $k = \overline{0, n-1}$ , obținem atunci

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} \geq s_{2^n} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k}, \quad (\forall)n \in \mathbf{N}.$$

Din primul criteriu de comparație deducem atunci că seriile  $\sum_{n \geq 1} a_n$  și  $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$  au aceeași natură.

### Aplicație(Seriile armonice generalizate).

Fie  $\alpha > 0$  un număr real pozitiv. Seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  se numește seria armonică generalizată de grad  $\alpha$ . Termenii ei sunt pozitivi și descresc către 0, astfel că putem folosi criteriul condensării pentru a studia convergența ei. Prin urmare

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \sim \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}.$$

Studiem acum seria  $\sum_{n \geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}$ . Avem

$$\sum_{n \geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

Aceasta este o serie geometrică, de rație  $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ . Ea este convergentă dacă și numai dacă rația este subunitară. Această condiție este în cazul nostru

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \iff 2^{\alpha-1} > 1 \iff \alpha - 1 > 0 \iff \alpha > 1.$$

Am obținut deci următorul rezultat:

$$\text{Seria armonică generalizată de grad } \alpha \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă,} & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă,} & \text{dacă } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

### C6) Criteriul rădăcinii(al lui Cauchy).

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie de numere reale pozitive și fie  $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$ . Atunci:

- (a) Dacă  $l < 1$ , seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă.
- (b) Dacă  $l > 1$ , seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.
- (c) Dacă  $l = 1$ , natura seriei  $\sum_{n \geq 1} a_n$  poate fi oricare.

**Demonstrație.** (a) Dacă  $l < 1$ , atunci există  $n_0 \in \mathbf{N}$  cu proprietatea că  $\sqrt[n]{a_n} < \frac{l+1}{2}$ ,  $(\forall) n \geq n_0$ . Dar atunci are loc

$$a_n < \left(\frac{l+1}{2}\right)^n, \quad (\forall) n \geq n_0.$$

Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$  este geometrică, cu rația subunitară, ea este o serie convergentă, și atunci din primul criteriu de comparație rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

(b) Dacă  $l > 1$ , atunci pentru orice  $n_0 \in \mathbf{N}$  fixat putem găsi  $n \in \mathbf{N}$  cu

## 1.2. CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI POZITIVI 13

$n \geq n_0$  astfel încât  $a_n > 1$ . Dar atunci nu putem avea  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Prin urmare, conform criteriului necesar de convergență, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nu este convergentă.

(c) Dacă  $l = 1$ , este suficient să indicăm două serii cu această proprietate, dintre care una să fie convergentă, iar cealaltă să fie divergentă. Considerăm seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Deoarece pentru orice funcție polinomială  $P$  cu coeficientul dominant pozitiv are loc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1,$$

rezultă că  $\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ , dar prima serie este divergentă, iar a doua convergentă.

În foarte multe situații este utilă următoarea

### C6') Variantă practică a criteriului rădăcinii

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie de numere reale pozitive astfel încât există limita  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ . Atunci:

- (a) Dacă  $l < 1$ , seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă.
- (b) Dacă  $l > 1$ , seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.
- (c) Dacă  $l = 1$ , natura seriei  $\sum_{n \geq 1} a_n$  poate fi oricare.

**Exemplu.**  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^\alpha}{2^n}$  este convergentă,  $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ .

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\frac{n^\alpha}{2^n}} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \implies \\ &\implies \sum_{n \geq 1} \frac{n^\alpha}{2^n} \text{ convergentă.} \end{aligned}$$

**Exemplu.**  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$  este convergentă.

Observăm în primul rând că seria începe de la  $n = 2$  deoarece  $\frac{1}{(\ln 1)^1}$  nu este definit.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0 < 1 \implies \\ &\implies \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n} \text{ convergentă.} \end{aligned}$$

### C7) Criteriul raportului (al lui d'Alembert).

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie de numere reale pozitive. Atunci:

(a) Dacă  $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă.

(b) Dacă  $(\exists) n_0 \in \mathbf{N}$ , astfel încât  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ,  $(\forall) n \geq n_0$  seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.

(c) Dacă  $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , natura seriei  $\sum_{n \geq 1} a_n$  poate fi oricare.

**Demonstrație.** (a) Dacă  $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , atunci există  $n_0 \in \mathbf{N}$  astfel încât  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{l+1}{2}$ ,  $(\forall) n \geq n_0$ . Dar atunci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{l+1}{2} = \frac{\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}, \quad (\forall) n \geq n_0.$$

Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$  este convergentă, din al treilea criteriu de convergență rezultă că seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă.

(b) Dacă  $(\exists) n_0 \in \mathbf{N}$ , astfel încât  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ,  $(\forall) n \geq n_0$ , atunci rezultă că  $a_n \geq a_{n_0}$ ,  $(\forall) n \geq n_0$ . Dar atunci nu putem avea  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Prin urmare, conform criteriului necesar de convergență, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nu este convergentă.

(c) Seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  au proprietatea că  $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ . Prima dintre ele este divergentă, iar a doua este convergentă.

Ca în cazul criteriului rădăcinii, și pentru criteriul raportului avem o

### C7') Variantă practică a criteriului raportului

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie de numere reale pozitive astfel încât există limita  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Atunci:

(a) Dacă  $l < 1$ , seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă.

(b) Dacă  $l > 1$ , seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.

(c) Dacă  $l = 1$ , natura seriei  $\sum_{n \geq 1} a_n$  poate fi oricare.

**Exemplu.** Arătăm că  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}$  este convergentă.

Cu notația  $a_n = \frac{n}{2^n}$ , avem

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n+1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \implies \\ &\implies \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} \text{ convergentă.} \end{aligned}$$

### C8) Criteriul lui Kummer.

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie de numere reale pozitive.

## 1.2. CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI POZITIVI 15

(a) Dacă există un șir  $(t_n)$  de numere pozitive, un număr  $r > 0$  și  $n_0 \in \mathbf{N}$  cu proprietatea că

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \geq r, \quad (\forall) n \geq n_0,$$

atunci seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă.

(b) Dacă există un șir  $(t_n)$  de numere pozitive cu proprietatea că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t_n}$  este divergentă și un număr natural  $n_0 \in \mathbf{N}$  cu proprietatea că

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \leq 0, \quad (\forall) n \geq n_0,$$

atunci seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.

**Demonstrație.** (a) Din inegalitatea  $t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \geq r$ , deducem că

$$ra_{n+1} \leq t_n a_n - t_{n+1} a_{n+1}, \quad (\forall) n \geq n_0,$$

de unde obținem șirul de inegalități

$$\begin{aligned} ra_{n_0+1} &\leq t_{n_0} a_{n_0} - t_{n_0+1} a_{n_0+1} \\ ra_{n_0+2} &\leq t_{n_0+1} a_{n_0+1} - t_{n_0+2} a_{n_0+2} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ ra_{n+1} &\leq t_n a_n - t_{n+1} a_{n+1}. \end{aligned}$$

Adunând aceste inegalități, obținem că

$$r(s_n - s_{n_0}) \leq t_{n_0} a_{n_0} - t_{n+1} a_{n+1} \leq t_{n_0} a_{n_0}, \quad (\forall) n \geq n_0,$$

deci

$$s_n \leq s_{n_0} + \frac{1}{r} t_{n_0} a_{n_0}, \quad (\forall) n \geq n_0,$$

adică șirul sumelor parțiale este mărginit, și cum el este și monoton crescător, este convergent. Seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este deci convergentă.

(b) Inegalitatea  $t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \leq 0$  este echivalentă cu  $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{t_{n+1}}{t_n}$  sau  $\frac{t_n}{t_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t_n}$  este divergentă, din al treilea criteriu de comparație rezultă că seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.

### C9) Criteriul lui Raabe și Duhamel.

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie de numere reale pozitive.

(a) Dacă există un număr  $\rho > 1$  și un număr natural  $n_0 \in \mathbf{N}$  astfel încât

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \rho, \quad (\forall) n \geq n_0,$$

atunci seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă.

(b) Dacă există un număr natural  $n_0 \in \mathbf{N}$  astfel încât

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad (\forall) n \geq n_0,$$

atunci seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.

**Demonstrație.** Aplicăm criteriul lui Kummer, considerând șirul  $t_n = n$ .

Putem scrie

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1.$$

(a) Notând  $r = \rho - 1$ , avem  $r > 0$  și este îndeplinită condiția

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \geq r, \quad (\forall) n \geq n_0,$$

care conform criteriului lui Kummer ne asigură convergența seriei date.

(b) Dacă  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad (\forall) n \geq n_0$ , atunci

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \leq 0, \quad (\forall) n \geq n_0,$$

și seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.

### Variantă practică a criteriului Raabe-Duhamel

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie de numere reale pozitive și să presupunem că există  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ . Atunci:

(a) Dacă  $l > 1$ , atunci seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă.

(b) Dacă  $l < 1$ , atunci seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.

(c) Dacă  $l = 1$ , natura seriei  $\sum_{n \geq 1} a_n$  poate fi oricare.

## 1.3 Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

**Definiție.** O serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  de numere reale se numește *serie absolut convergentă* dacă are proprietatea că seria  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  este convergentă. O serie convergentă  $\sum_{n \geq 1} a_n$  cu proprietatea că seria  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  este divergentă se numește *serie semiconvergentă*.



### 1.3. CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI OARECARE17

**Definiție.** Un șir  $(u_n)_{n \geq 1}$  se numește *șir fundamental* (sau *șir Cauchy*) dacă este satisfăcută următoarea condiție:

$$(\forall)\varepsilon > 0 \implies (\exists)n_\varepsilon : |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon, \quad (\forall)n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbf{N}.$$

Se poate demonstra că un șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă este fundamental. În cazul seriilor obținem atunci următorul criteriu de convergență:

#### C1) Criteriul lui Cauchy.

Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie de numere reale. Atunci  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este convergentă dacă și numai dacă

$$(\forall)\varepsilon > 0 \implies (\exists)n_\varepsilon \geq 1 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon, \quad (\forall)n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbf{N}.$$

**Corolar.** Orice serie absolut convergentă este convergentă.

**Corolar.** Printr-o permutare a termenilor unei serii absolut convergente se obține tot o serie absolut convergentă, având aceeași sumă.

#### C2) Criteriul lui Abel.

Dacă seria de numere reale  $\sum_{n \geq 1} a_n$  are șirul sumelor parțiale  $(s_n)_{n \geq 1}$  mărginit, iar  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  este un șir de numere pozitive descrescător la 0, atunci seria  $\sum_{n \geq 1} \alpha_n \cdot a_n$  este convergentă.

**Definiție.** O serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  se numește *serie alternantă* dacă are loc relația  $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ ,  $(\forall)n \geq 1$ . O asemenea serie se scrie

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} + \dots,$$

unde  $u_n > 0$ ,  $(\forall)n \geq 1$  sau  $u_n < 0$ ,  $(\forall)n \geq 1$ .

Pentru serii alternante are loc următorul criteriu de convergență:

#### C3) Criteriul lui Leibniz.

Fie  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$  o serie alternantă de numere reale. Dacă șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este monoton convergent la zero, atunci seria este convergentă.

**Exemplu.** Seria  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$  este convergentă, deoarece şirul  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  descreşte către zero.

CRITERII DE CONVERGENȚĂ

(Tabel recapitulativ)

Criterii	Descriere	Exemple și comentarii
Criteriul de convergență pentru seriile geometrice	Seria $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ este <ul style="list-style-type: none"> <li>• convergentă, cu suma <math>\frac{1}{1-r}</math> dacă <math> r  &lt; 1</math></li> <li>• divergentă dacă <math> r  \geq 1</math></li> </ul>	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, cu suma 2  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ este divergentă
Criteriul suficient de divergență	Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ nu converge la 0, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă.	Dacă $a_n \rightarrow 0$ atunci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ poate fi convergentă ( $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ) sau divergentă ( $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ )
Criteriul comparației	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dacă <math>0 \leq a_n \leq b_n, (\forall)n</math> (sau <math>\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, (\forall)n</math>) și <math>\sum_{n=0}^{\infty} b_n</math> este convergentă, atunci <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n</math> este convergentă.</li> <li>• Dacă <math>0 \leq b_n \leq a_n, (\forall)n</math> (sau <math>\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}, (\forall)n</math>) și <math>\sum_{n=0}^{\infty} b_n</math> este divergentă, atunci <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n</math> este divergentă.</li> </ul>	Nu este necesar ca $a_n \leq b_n$ (sau $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , etc.) pentru toți $n \in \mathbf{N}$ , ci doar pentru $n \geq N$ , unde $N \in \mathbf{N}$ este fixat (convergența sau divergența unei serii nu este afectată de valorile primilor câtorva termeni)
Criteriul de convergență pentru serii armonice generalizate	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă dacă $\alpha \leq 1$ convergentă dacă $\alpha > 1$ .	Seriile armonice generalizate se folosesc pentru studiul naturii unor serii cu ajutorul criteriilor de comparație

Criteriul comparației cu limită	<p>Dacă <math>a_n \geq 0, b_n \geq 0</math> și există <math>l &gt; 0</math> astfel încât</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l,$ <p>atunci seriile <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n</math> sunt fie</p> <p>ambele convergente, fie ambele divergente</p>	<p>Acest criteriu se folosește pentru a studia natura unei serii <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n</math> și putem găsi o serie <math>\sum_{n=0}^{\infty} b_n</math>, astfel încât</p> <p>(a) cunoaștem natura seriei <math>\sum_{n=0}^{\infty} b_n</math></p> <p>(b) Limita <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}</math> este ușor calculabilă</p>
Criteriul raportului (D'Alembert)	<p>Dacă <math>a_n &gt; 0</math> și</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$ <p>atunci <math>\sum_{n \geq 1} a_n</math> este</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• convergentă dacă <math>l &lt; 1</math> și</li> <li>• divergentă dacă <math>l &gt; 1</math>.</li> </ul>	<p>Dacă <math>l = 1</math>, atunci seria poate fi convergentă (<math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}</math>) sau divergentă (<math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}</math>).</p>
Criteriul rădăcinii (Cauchy)	<p>Dacă <math>a_n &gt; 0</math> și</p> $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n},$ <p>atunci <math>\sum_{n \geq 1} a_n</math> este</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• convergentă dacă <math>l &lt; 1</math> și</li> <li>• divergentă dacă <math>l &gt; 1</math>.</li> </ul>	<p>Dacă <math>l = 1</math>, atunci seria poate fi convergentă (<math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}</math>) sau divergentă (<math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}</math>).</p> <p>* Criteriul rădăcinii se aplică cel mai frecvent atunci când <math>a_n</math> este de forma <math>a_n = (\dots)^n</math> (<math>\sum \frac{1}{(\ln n)^n} = \sum (\frac{1}{\ln n})^n</math>)</p>
Criteriu pentru serii alternante (Leibniz)	<p>Seria <math>\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n</math>, cu <math>a_n \geq 0</math>, este convergentă dacă</p> <p>(i) <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0</math> și</p> <p>(ii) <math>(a_n)_{n \geq 1}</math> este descrescător</p>	<p>Dacă <math>a_n \not\rightarrow 0</math> seria este divergentă.</p> <p>Criteriul lui Leibniz se aplică <u>numai dacă</u> termenii seriei sunt cu semne alternante</p>
Criteriul convergenței absolute	<p>Dacă <math>\sum_{n \geq 1}  a_n </math> converge, atunci <math>\sum_{n \geq 1} a_n</math> converge absolut</p>	<p>Pentru studiul convergenței seriei <math>\sum_{n \geq 1}  a_n </math> se pot folosi criteriile de convergență pentru serii cu</p>

## 1.4 Probleme propuse

Calculați sumele următoarelor serii

1.  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n}$
2.  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n}$
3.  $\sum_{n \geq 0} \frac{100}{5^n}$
4.  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)}$
5.  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
6.  $\sum_{n \geq 2} \frac{2^{(n+3)}}{3^n}$
7.  $\sum_{n \geq 4} \frac{5^{(n-2)}}{6^{(n+1)}}$
8.  $\sum_{n \geq 0} \frac{5^n}{100}$
9.  $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n(n-1)}$
10.  $\sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n} \right)$

Studiați natura următoarelor serii

11.  $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n^2}$
12.  $\sum_{n \geq 1} \frac{r^n}{n^{r'}}, r \in (0, 1)$
13.  $\sum_{n \geq 1} \frac{r^n}{n^{r'}}, r \geq 1$
14.  $\sum_{n \geq 2} \frac{n!}{n^n}$
15.  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{(2n)!}$
16.  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^n}{n^5}$
17.  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^n}{n!}$
18.  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{10^k}$
19.  $\sum_{n \geq 2} \frac{n}{(\ln n)^n}$
20.  $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n + n}{n! + 2}$
21.  $\sum_{n \geq 1} \frac{4^n}{n^3}$
22.  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^3 + 1}$
23.  $\sum_{n \geq 1} \frac{3^{4n+5}}{n^n}$
24.  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 n!}{(2n)!}$
25.  $\sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{n^2 n!}$
26.  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{n!}{n^n} \right)^n$
27.  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{n^n}{n!} \right)^n$
28.  $\sum_{n \geq 2} \frac{e^n}{(\ln n)^n}$
29.  $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^n}{n^2}$
30.  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{n}{3n+2} \right)^n$

Aflați care dintre următoarele serii sunt convergente, absolut convergente,

respectiv divergente

$$31. \sum_{n \geq 1} (-1)^n \quad 32. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

$$33. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \quad 34. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$35. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n n}{\ln n} \quad 36. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

$$37. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{5n-4} \quad 38. \sum_{n \geq 1} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$39. \sum_{n \geq 0} \cos \frac{n\pi}{2} \quad 40. \sum_{n \geq 1} \frac{(-3)^n}{n!}$$

$$41. \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(-3)^n} \quad 42. \sum_{n \geq 1} \frac{(-2)^n}{n^2}$$

$$43. \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{(-2)^n} \quad 44. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$45. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1} \quad 46. \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\frac{n\pi}{6})}{n^2}$$

$$47. \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\frac{n\pi}{7})}{n^3} \quad 48. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (n+2)}{n(n+1)}$$

$$49. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n n(n+1)}{(n+2)^3} \quad 50. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n n(n+1)}{(n+2)^4}$$

$$51. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n 2^n}{n} \quad 52. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

$$53. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n^n}{n!} \quad 54. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+3}$$

$$55. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n (n^2+3)}{n^3+4}$$

## 2

# Serii de puteri

**Definiție.** Fie  $a$  un număr real oarecare și  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  un șir de numere. Numim *serie de puteri* (sau *serie Taylor*) *centrată în punctul  $a$ , cu coeficienții  $a_n$* , seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n,$$

în care numărul  $x \in \mathbf{R}$  reprezintă o variabilă.

**Exemplu.** Seriile următoare sunt câteva serii de puteri centrate în 0:

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \\ 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} + \dots \\ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

**Definiție.** Seriile de puteri centrate în punctul 0 se mai numesc și *serii MacLaurin*.

**Definiție.** (i) Spunem că o serie de puteri *converge* în punctul  $x$  dacă seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$  este convergentă. În caz contrar spunem că seria *diverge* în  $x$ .

(ii) Spunem că o serie de puteri *converge* pe o mulțime  $D$  dacă ea converge în orice punct  $x \in D$ .

**Exemplu.** Vom încerca să determinăm punctele  $x \in \mathbf{R}$  în care converge seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots$$

**Soluție.** Al  $n$ -lea termen al seriei este  $a_n = \frac{x^n}{3^n}$ . Aplicăm criteriul raportului pentru a studia convergența seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{3^n} \right|.$$

Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{x}{3} \right|.$$

Deducem că pentru  $x \in \mathbf{R}$  cu  $|x| < 3$ , seria inițială este absolut convergentă, iar dacă  $|x| > 3$ , deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty \neq 0$ , seria este divergentă. Să considerăm acum separat cazul când  $|x| = 3$ .

Pentru  $x = 3$ , seria inițială de puteri devine

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n,$$

care este evident divergentă.

Pentru  $x = -3$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n,$$

care diverge de asemenea.

Problema centrală în studiul seriilor de puteri este determinarea mulțimii numerelor reale pentru care seria este convergentă.

**Definiție.** Mulțimea

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbf{R} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ -convergentă} \right. \right\},$$

se numește *mulțimea de convergență* a seriei.

**Observație.** Oricare ar fi  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  o serie de puteri centrată în punctul  $a$ , are loc  $a \in \mathcal{K}$ , deoarece pentru  $x = a$ , seria de puteri devine

$$a_0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$$

Prin urmare,  $\mathcal{K}$  este o mulțime nevidă.

**Lemă.** (i) Dacă o serie de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  converge într-un punct  $t \in \mathbf{R}$ , atunci ea converge absolut în orice punct  $x \in \mathbf{R}$  cu  $|x-a| < |t-a|$ .



(ii) Dacă o serie de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  diverge într-un punct  $t \in \mathbf{R}$ , atunci ea diverge în orice punct  $x \in \mathbf{R}$  cu  $|x-a| > |t-a|$ .

**Demonstrație.** (i) Din criteriul necesar de convergență rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t-a)^n = 0$ . Prin urmare există  $n_0 \in \mathbf{N}$  cu proprietatea că  $|a_n(t-a)^n| < 1$ ,  $(\forall)n \geq n_0$ . Pentru  $n \geq n_0$  avem atunci că

$$|a_n(x-a)^n| = |a_n(t-a)^n| \cdot \left| \frac{(x-a)^n}{(t-a)^n} \right| = |a_n(t-a)^n| \cdot \left| \frac{x-a}{t-a} \right|^n < \left| \frac{x-a}{t-a} \right|^n.$$

Deoarece seria geometrică  $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x-a}{t-a} \right|^n$  de rație subunitară este convergentă, din primul criteriu al comparației și inegalitatea de mai sus rezultă că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  este absolut convergentă.

(ii) Dacă seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  ar fi convergentă, atunci ar rezulta, conform punctului (i), că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-a)^n$  ar fi absolut convergentă, și deci convergentă. Acest lucru ar contrazice însă ipoteza. Prin urmare, presupunerea că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  ar fi convergentă nu poate fi corectă, deci  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  este divergentă.

**Teorema I a lui Abel.** Pentru orice serie de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  există un număr  $R$ , cu  $0 \leq R \leq \infty$ , astfel încât

a) Seria este absolut convergentă pe intervalul deschis  $(a-R, a+R)$ .

b) Seria este divergentă pentru orice  $x$  cu  $|x-a| > R$ .

**Demonstrație.** Fie

$$R = \sup \left\{ |t-a| \in [0, \infty) \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-a)^n \text{ - convergentă} \right\}.$$

Din lema de mai sus rezultă că numărul  $R$  verifică toate afirmațiile din enunțul teoremei.

**Definiție.** Numărul  $R$  din enunțul teoremei de mai sus se numește *raza de convergență* a seriei de puteri, iar intervalul deschis  $I = (a-R, a+R)$  se numește *intervalul de convergență* al seriei de puteri.

**Observație.** Afirmația teoremei I a lui Abel se poate sintetiza în relația

$$(\exists) R \in [0, \infty] : (a-R, a+R) \subseteq \mathcal{K} \subseteq [a-R, a+R].$$

**Observație.** În cazul când  $R \in (0, \infty)$ , teorema lui Abel nu spune nimic despre convergența sau divergența seriei de puteri în capetele

$a - R$  și  $a + R$  ale intervalului de convergență. Convergența seriei de puteri în aceste puncte se studiază separat, folosind diverse criterii de convergență (cum ar fi criteriul necesar, criteriile de comparație, Raabe-Duhamel, Leibniz, ...).

Este utilă și următoarea

**Propoziție.** Dacă seria de puteri este absolut convergentă într-unul dintre capetele  $a - R$  sau  $a + R$  ale intervalului de convergență, atunci ea este absolut convergentă și în celălalt capăt.

**Demonstrație.** Avem că

$$|a_n(a - R - a)^n| = |a_n(-R)^n| = |a_n R^n| = |a_n(a + R - a)^n|,$$

de unde rezultă că afirmația propoziției este trivială.

Raza de convergență a unei serii de puteri este dată de

**Teorema lui Cauchy și Hadamard.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  o serie de puteri și  $R$  raza sa de convergență. Dacă notăm

$$\omega = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}, \text{ atunci } R = \frac{1}{\omega}.$$

(Folosim aici convențiile uzuale  $\frac{1}{0} = \infty$ ,  $\frac{1}{\infty} = 0$ .)

**Demonstrație.** Fie  $x \in \mathbf{R}$  un număr real oarecare. Atunci

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = |x-a| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-a|\omega.$$

(i) Dacă  $|x-a| < \frac{1}{\omega}$ , atunci

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} < 1,$$

de unde, conform criteriului rădăcinii, rezultă că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  este absolut convergentă.

(ii) Dacă  $|x-a| < \frac{1}{\omega}$ , atunci

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} > 1,$$

de unde rezultă că termenul general al seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  nu converge la 0, deci seria este divergentă.

Din cele demonstrate la (i) și (ii) obținem că numărul

$$R = \frac{1}{\omega}$$

este raza de convergență a seriei date.

**Exemplu.** 1) Pentru seria

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

avem  $\sqrt[n]{|a_n|} = 1, (\forall)n \geq 2$ , deci  $\omega = 1$ , și atunci  $R = 1$ .

2) Pentru

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}, \omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0, \text{ și } R = \infty.$$

Uneori raza de convergență poate fi găsită pe o cale ceva mai simplă:

**Propoziție.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$  o serie de puteri. Dacă există limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ , atunci

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

deci pentru raza de convergență  $R = \frac{1}{\omega}$  avem în acest caz

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

**Exemplu.** Determinăm mulțimea de convergență a seriei de puteri

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

Coeficientul termenului general al seriei date este  $a_n = \frac{1}{n}$ . Deoarece există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ , avem  $\omega = 1$ , deci  $R = 1$ . Intervalul de convergență este deci  $I = (-1, 1)$  și pentru mulțimea de convergență  $\mathcal{K}$  avem  $I \subseteq \mathcal{K} \subseteq [-1, 1]$ . Rămâne să mai studiem convergența seriei de puteri în capetele intervalului de convergență.

Pentru  $x = 1$ , seria de puteri devine seria armonică, care este divergentă. Deci  $1 \notin \mathcal{K}$ .

Pentru  $x = -1$ , seria de puteri devine o serie alternantă, pentru care modulele termenilor formează un șir descrescător, convergent la 0. Conform criteriului lui Leibniz, aceasta este o serie convergentă, deci rezultă că  $-1 \in \mathcal{K}$ . Am dedus astfel că mulțimea de convergență a seriei de puteri date este  $\mathcal{K} = [-1, 1)$ .

## 2.1 Suma unei serii de puteri

**Definiție.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  o serie de puteri și  $\mathcal{K}$  mulțimea sa de convergență. Pentru fiecare  $x \in \mathcal{K}$  să notăm

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

Am definit astfel o funcție  $\sigma : \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \sigma(x)$ . Funcția aceasta se numește *suma seriei de puteri*  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ .

**Observație.** Suma unei serii de puteri este o funcție definită numai pe mulțimea de convergență a seriei de puteri, deși funcțiile putere  $a_n(x-a)^n$  care sunt termenii seriei de puteri sunt definite pe întreaga mulțime  $\mathbf{R}$  a numerelor reale.

**Exemplu.** 1) Seria

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

are mulțimea de convergență este  $\mathcal{K} = (-1, 1)$ . Pentru orice  $x \in \mathcal{K}$ , seria corespunzătoare (care este o seria geometrică) are suma

$$\sigma(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Funcția  $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \frac{1}{1-x}$  este însă diferită de  $\sigma$ , deoarece are un alt domeniu de definiție.

Funcția sumă  $\sigma$  asociată unei serii de puteri are următoarele proprietăți:

**Propoziție.** Suma  $\sigma$  unei serii de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  este o funcție continuă pe intervalul de convergență.

**Teorema II a lui Abel.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  o serie de puteri și  $R$  raza sa de convergență. Dacă seria este convergentă în punctul  $a-R$  (sau în  $a+R$ ), atunci suma  $\sigma$  a seriei este continuă în acest punct.

**Observație.** Prin urmare, suma unei serii de puteri este o funcție continuă pe întregul ei domeniu de definiție.

## 2.2 Operații cu serii de puteri

**Propoziție.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$  două serii de puteri centrate într-un același punct  $a$ , și fie  $\alpha$  un număr real nenul oarecare. Dacă  $R_1$  și  $R_2$  sunt razele de convergență ale celor două serii, atunci:

1) raza de convergență  $R$  a seriei sumă  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n$  verifică inegalitatea

$$R \geq \inf(R_1, R_2).$$

2) raza de convergență a seriei

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n(x-a)^n$$

este  $R_1$ .

3) raza de convergență  $R'$  a seriei produs  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ , ai cărei coeficienți sunt dați prin

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

verifică inegalitatea

$$R' \geq \inf(R_1, R_2).$$

**Observație.** Mulțimea seriilor de puteri centrate într-un punct formează un spațiu vectorial în raport cu operațiile de adunare (1) și înmulțire cu scalari (2), respectiv un inel în raport cu operațiile de adunare (1) și înmulțire (3).

## 2.3 Derivarea seriilor de puteri

**Definiție.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  o serie de puteri:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

Seria care are ca termeni derivatele termenilor acestei serii,

$$a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1} + \dots$$

este de asemenea o serie de puteri, pe care o vom numi *seria derivatelor* seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ . Pentru cele două serii are loc atunci următoarea

proprietate:

**Propoziție.** Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  este o serie de puteri, având suma  $\sigma$ , atunci:

- 1) Seria derivatelor are aceeași rază de convergență.
- 2) Funcția  $\sigma$  este derivabilă pe intervalul de convergență, și derivata sa  $\sigma'$  coincide pe acest interval cu suma seriei derivatelor.

**Corolar.** O serie de puteri poate fi derivată ”termen cu termen”.

**Exemplu.** Seria derivatelor a seriei de puteri

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

este

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

Deoarece pentru suma primei serii de puteri avem

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad (\forall)x \in (-1, 1),$$

suma seriei derivatelor va fi

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad (\forall)x \in (-1, 1).$$

## 2.4 Integrarea seriilor de puteri

**Propoziție.** Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  este o serie de puteri, având suma  $\sigma$ , atunci:

- 1) Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$  este o serie de puteri cu aceeași rază de convergență.
- 2) Suma  $\xi$  a seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$  este o primitivă a funcției  $\sigma$ .

**Corolar.** O serie de puteri poate fi integrată ”termen cu termen”.

**Exemplu.** Considerăm seria de puteri

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

care este convergentă pentru  $x \in (-1, 1)$ . Suma ei este

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\forall)x \in (-1, 1).$$

Integrând termen cu termen în ultima relație, obținem

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad (\forall)x \in (-1, 1).$$

Deoarece pentru  $x = 1$ , seria  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$  este convergentă (conform criteriului lui Leibniz), din teorema a II-a a lui Abel deducem că

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg}(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg}(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

Am obținut deci identitatea

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots,$$

care a fost descoperită de Leibniz. Pentru demonstrația convergenței seriei din membrul drept, el a folosit pentru prima dată criteriul de convergență pentru serii alternante care astăzi îi poartă numele.

## 2.5 Probleme propuse

Determinați intervalele de convergență și domeniile de convergență ale următoarelor serii de puteri:

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$
6.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}$
7.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(2n+1)^2x^n$
8.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
9.  $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}x^n$
12.  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2}x^{n^2}$
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$
15.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n \ln(n)}$
16.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$
17.  $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^{n!}$
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1}n^n}$
19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n3^n}$
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}$
22.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n9^n}$
23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{2n}}{2n}$
24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$
25.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n$
26.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n4^n}$
27.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$
28.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$
29.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$
30.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$
31.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$
32.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-3)^n$

Prin derivare sau integrare, să se calculeze sumele seriilor de puteri:



- 33.**  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$   
**34.**  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$   
**35.**  $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$   
**36.**  $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$   
**37.**  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$   
**38.**  $1 - 3x^2 + 5x^4 - \dots + (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2} + \dots$   
**39.**  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots$

Găsiți sumele seriilor:

- 40.**  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots$   
**41.**  $x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots$   
**42.**  $1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1) \cdot 3^{n-1}} + \dots$   
**43.**  $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$



# 3

## Formula lui Taylor

**Definiție.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție, derivabilă de  $n$  ori într-un punct  $a \in I$ . Pentru fiecare  $x \in I$  putem atunci defini polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Polinomul  $T_n(x)$  se numește *polinomul Taylor de gradul  $n$  (sau de ordinul  $n$ )* asociat funcției  $f$  în punctul  $a$ .

**Definiție.** Dacă pentru fiecare  $x \in I$  notăm

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

atunci vom putea scrie

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

oricare ar fi  $x \in I$ . Această egalitate se numește *formula lui Taylor de ordinul  $n$  corespunzătoare funcției  $f$  în punctul  $a$* . Funcția  $R_n$  se numește *restul de ordinul  $n$  al formulei lui Taylor*.

**Observație.** Polinomul lui Taylor  $T_n(x)$  are proprietatea că

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad (\forall) k = \overline{0, n}.$$

**Corolar.** Restul de ordinul  $n$  al formulei lui Taylor este o funcție derivabilă de  $n$  ori în punctul  $a$  și

$$R_n^{(k)}(a) = 0, \quad (\forall) k = \overline{0, n}.$$

**Observație.** Pentru restul  $R_n$  de ordin  $n$  al formulei lui Taylor are loc proprietatea

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

**Propoziție.** Dacă  $f$  este derivabilă de  $n$  ori în punctul  $a \in I$ , atunci există o funcție  $\alpha(x)$  definită pe  $I$  astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 = \alpha(a)$$

și astfel ca pentru orice  $x \in I$  să avem

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \\ + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \alpha(x). \end{aligned}$$

În continuare vom presupune că  $f$  este derivabilă de  $n+1$  ori pe întreg intervalul  $I$ . Pentru restul de ordinul  $n$  al formulei lui Taylor vor fi atunci valabile următoarele formule:

1) Pentru orice număr natural  $p$ , cu  $1 \leq p \leq n+1$  există  $\xi$  cuprins între  $a$  și  $x$  astfel că

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi).$$

În această formă,  $R_n$  se numește *restul lui Schlömlich-Roche* pentru formula lui Taylor.

2) Dacă în formula de mai sus punem  $p = 1$ , obținem *restul lui Cauchy* pentru formula lui Taylor:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

3) Dacă în formula de la 1) luăm  $p = n+1$ , obținem *restul lui Lagrange* pentru formula lui Taylor

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

**Observație.** Punctul intermediar  $\xi$  depinde de  $a$ ,  $x$ ,  $n$  și  $p$ . Prin urmare, punctul  $\xi$  nu este neapărat același pentru cele trei formule de mai sus.

**Observație.** Deoarece  $\xi$  este cuprins între  $a$  și  $x$ , există un număr  $\theta$  (care depinde de asemenea de  $a$ ,  $x$ ,  $n$  și  $p$ ) astfel încât  $0 < \theta < 1$  și

$$\xi = a + \theta(x-a).$$

Dacă notăm  $h = x - a$ , atunci  $\xi = a + \theta h$ , și formula lui Taylor se va scrie

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n,$$

unde restul  $R_n$  poate avea una din formele:

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (\text{Schlömlich-Roche});$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (\text{Cauchy});$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (\text{Lagrange}).$$

**Exercițiu.** Scrieți formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 pentru următoarele funcții:

- 1)  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^x$ .
- 2)  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sin(x)$ .
- 3)  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, f(x) = \cos(x)$ .
- 4)  $f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln(1 + x)$ .

**Definiție.** Fie  $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție indefinit derivabilă într-un punct  $a \in I$ . Atunci putem considera seria următoare:

$$f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Această serie de puteri se numește *seria Taylor a funcției  $f$  în punctul  $a$* . Ea are o rază de convergență  $0 \leq R \leq \infty$ , o mulțime de convergență nevidă  $\mathcal{K}$  care conține cel puțin punctul  $a$ , și un interval de convergență  $(a - R, a + R) \subseteq \mathcal{K}$ . Pe mulțimea  $\mathcal{K}$  este definită funcția sumă  $T$  a acestei serii de puteri.

Sumele parțiale ale seriei Taylor a funcției  $f$  în punctul  $a$  sunt evident polinoamele Taylor asociate funcției  $f$  în punctul  $a$ . Deoarece pentru numere  $x$  aflate "aproape" de numărul  $a$ , polinoamele  $T_n(x)$  aproximează din ce în ce mai bine funcția  $f(x)$ , se pune întrebarea dacă vom putea scrie

$$f(x) = T(x), (\forall) x \in I \cap \mathcal{K}.$$

Răspunsul la această întrebare este dat de următoarea

**Teoremă.** Seria Taylor a funcției  $f$  în punctul  $a$  este convergentă într-un punct  $x \in I \cap \mathcal{K}$  către valoarea  $f(x)$  a funcției  $f$  în  $x$  dacă și numai dacă valorile în  $x$  ale resturilor  $R_n$  ale formulelor lui Taylor formează un șir  $(R_n(x))$  convergent către 0.

### 3.1 Serii Taylor pentru funcții de două variabile

Dezvoltarea în serie Taylor a unei funcții  $f(x, y)$  în jurul unui punct  $(a, b)$  are forma

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}]f(a, b) + \\ + \frac{1}{2!}[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}]^2 f(a, b) + \dots + \frac{1}{n!}[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}]^n f(a, b) + \dots,$$

unde

$$[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}]f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b),$$

$$[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}]^2 f(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x-a)^2 + \\ + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y-b)^2,$$

ș.a.m.d.

### 3.2 Probleme propuse

1. Arătați că

- i)  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, (\forall)x \in \mathbf{R}$
- ii)  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, (\forall)x \in \mathbf{R}$
- iii)  $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, (\forall)x \in \mathbf{R}$
- iv)  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, (\forall)x \in (-1, 1]$
- v)  $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, (\forall)x \in [-1, 1)$
- vi)  $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, (\forall)x \in (-1, 1)$

2. Determinați dezvoltările în serie MacLaurin ale următoarelor funcții, indicând și intervalele în care este valabilă fiecare dezvoltare:

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| i) $f(x) = a^x$ ;                     | ii) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ; |
| iii) $f(x) = \cos(x + a)$ ;           | iv) $f(x) = \sin^2(x)$ ;               |
| v) $f(x) = \ln(2 + x)$ ;              | vi) $f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2}$ ;    |
| vii) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$ ; | viii) $f(x) = \cos^2(x)$ ;             |
| ix) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ;        | x) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ;   |
| xi) $f(x) = ch(x)$ ;                  | xii) $f(x) = sh(x)$ ;                  |
| xiii) $f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$ ; | xiv) $f(x) = (1+x) \ln(1+x)$ ;         |
| xv) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ;  | xvi) $f(x) = \arctg(x)$ ;              |
| xvii) $f(x) = \arcsin(x)$ ;           | xviii) $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$ ;        |
| xix) $f(x) = (1+x)e^{-x}$ ;           | xx) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$ .           |

3. Scrieți primii trei termeni nenuli ai dezvoltărilor în serie MacLaurin ale următoarelor funcții:

$$\begin{aligned} i) f(x) &= tg(x); & ii) f(x) &= th(x); & iii) f(x) &= \ln(\cos(x)); \\ iv) f(x) &= e^{\cos(x)}; & v) f(x) &= e^{\sin(x)}. \end{aligned}$$

4. Dezvoltați funcția  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$  în serie de puteri ale lui  $x + 4$ .

5. Dezvoltați funcția  $f(x) = \ln(x)$  în serie de puteri ale lui  $x - 1$ .

6. Dezvoltați funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  în serie de puteri ale lui  $x - 1$ .

7. Dezvoltați funcția  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  în serie de puteri ale lui  $x + 1$ .

8. Dezvoltați funcția  $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$  în serie de puteri ale lui  $x + 4$ .

9. Dezvoltați funcția  $f(x) = \sqrt{x}$  în serie de puteri ale lui  $x + 2$ .

10. Dezvoltați funcția  $f(x) = \cos(x)$  în serie de puteri ale lui  $x - \frac{\pi}{2}$ .

11. Dezvoltați funcția  $f(x) = \ln(x)$  în serie de puteri ale lui  $\frac{1-x}{1+x}$ .

12. Dezvoltați funcția  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$  în serie de puteri ale lui  $\frac{x}{1+x}$ .

13. Folosind dezvoltarea funcției  $\arctg(x)$ , aflați numărul  $\pi$  cu o zecimală exactă.

**14.** Folosind dezvoltarea funcției  $e^x$ , aflați numărul  $e$  cu trei zecimale exacte.

**15.** Dezvoltați în serie de puteri ale lui  $x$  și  $y$  următoarele funcții:

i)  $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ , ii)  $f(x, y) = \ln(1 - x - y + xy)$ ,

iii)  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ , iv)  $f(x, y) = \arctg(\frac{x+y}{1-xy})$

v)  $f(x, y) = \frac{1-x+y}{1+x-y}$ .

**16.** Fie  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ . Dezvoltați  $f(x + h, y + k)$  în serie de puteri ale lui  $h$  și  $k$ .

**17.** Dezvoltați  $e^{x+y}$  în serie de puteri ale lui  $x - 2$  și  $y + 2$ .

**18.** Dezvoltați  $\sin(x + y)$  în serie de puteri ale lui  $x$  și  $y - \frac{\pi}{2}$ .

**19.** Scrieți formula lui Taylor de ordinul doi în punctul  $(0, 0)$  pentru următoarele funcții:

i)  $f(x, y) = e^x \cos(y)$ , ii)  $f(x, y) = (1 + x)^{1+y}$ .



## 4

# Noțiuni de topologie în $\mathbf{R}^n$

Spațiul vectorial  $\mathbf{R}^n$  are o structură de spațiu euclidian definită de produsul scalar și de norma asociată. Cu ajutorul normei se poate defini pe  $\mathbf{R}^n$  o distanță:

$$d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}, \quad d(X, Y) = \|X - Y\|, \quad (\forall) X, Y \in \mathbf{R}^n.$$

Proprietățile funcției distanță sunt:

- 1)  $d(X, Y) \geq 0$ ,  $(\forall) X, Y \in \mathbf{R}^n$ .
- 2)  $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$ .
- 3)  $d(X, Y) = d(Y, X)$ ,  $(\forall) X, Y \in \mathbf{R}^n$ .
- 4)  $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$ ,  $(\forall) X, Y, Z \in \mathbf{R}^n$ .

O funcție cu proprietățile funcției distanță de mai sus se mai numește și *metrică*, și spunem că  $(\mathbf{R}^n, d)$  este un *spațiu metric*.

**Definiție.** Fie  $X \in \mathbf{R}^n$  și  $r \in \mathbf{R}_+$ .

- *Bila deschisă de centru  $X$  și rază  $r$*  este mulțimea

$$B(X, r) = \{Y \in \mathbf{R}^n | d(X, Y) < r\}.$$

- *Bila închisă de centru  $X$  și rază  $r$*  este mulțimea

$$\overline{B}(X, r) = \{Y \in \mathbf{R}^n | d(X, Y) \leq r\}.$$

- *Sfera de centru  $X$  și rază  $r$*  este mulțimea

$$S(X, r) = \{Y \in \mathbf{R}^n | d(X, Y) = r\}.$$

**Definiție.** Fie  $X \in \mathbf{R}^n$  și  $V \subseteq \mathbf{R}^n$ .  $V$  se numește *vecinătate a lui  $X$*  dacă există  $r > 0$  cu proprietatea că  $B(X, r) \subseteq V$ . Mulțimea vecinătăților punctului  $X$  o vom nota cu  $\mathcal{V}(X)$ , iar dacă  $V$  este o vecinătate a lui  $X$ , vom scrie  $V \in \mathcal{V}(X)$ .

**Definiție.** O mulțime  $D \in \mathbf{R}^n$  se numește *mulțime deschisă* dacă este vecinătate pentru orice punct al său, i.e.

$$(\forall)X \in D \quad (\exists)r > 0 : \quad B(X, r) \subseteq D.$$

Vom nota cu  $\mathcal{D}$  mulțimea mulțimilor deschise incluse în  $\mathbf{R}^n$ .

- Complementarele mulțimilor deschise se numesc *mulțimi închise*.
- O mulțime *compactă* este o mulțime închisă și mărginită.

**Propoziție.** Mulțimile deschise incluse în  $\mathbf{R}^n$  au următoarele proprietăți:

- 1)  $\mathbf{R}^n, \emptyset \in \mathcal{D}$ .
- 2) Dacă  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ , atunci  $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$ .
- 3) Dacă  $(D_i)_{i \in I} \in \mathcal{D}$  este o familie oarecare de mulțimi deschise, atunci  $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{D}$ .

**Definiție.** O familie  $\mathcal{T}$  de submulțimi ale lui  $\mathbf{R}^n$  care satisface condițiile din propoziția de mai sus, se numește *topologie pe  $\mathbf{R}^n$* .

**Observație.** Mulțimea  $\mathcal{D}$  a mulțimilor deschise din  $\mathbf{R}^n$  formează deci o topologie pe  $\mathbf{R}^n$ .

**Definiție.** Perechea  $(\mathbf{R}^n, \mathcal{D})$  formează un *spațiu topologic*.

**Definiție.** Fie  $M \subseteq \mathbf{R}^n$  o submulțime oarecare a spațiului topologic  $(\mathbf{R}^n, \mathcal{D})$ .

- *Interiorul lui  $M$*  (notat  $Int(M)$ ) este cea mai mare mulțime deschisă conținută în  $M$ . Avem

$$Int(M) = \{X \in \mathbf{R}^n | M \in \mathcal{V}(X)\}.$$

- *Exteriorul lui  $M$*  (notat  $Ext(M)$ ) este interiorul mulțimii complementare lui  $M$  în  $\mathbf{R}^n$ :

$$Ext(M) = \{X \in \mathbf{R}^n | (\exists)r > 0 : B(X, r) \cap M = \emptyset\}.$$

- *Închiderea*(sau *aderența* lui  $M$ )(notată  $\overline{M}$ ) este cea mai mică mulțime închisă care conține  $M$  și este complementara exteriorului mulțimii  $M$ :

$$\begin{aligned}\overline{M} &= \{X \in \mathbf{R}^n | (\forall) r > 0 \implies B(X, r) \cap M \neq \emptyset\} = \\ &= \{X \in \mathbf{R}^n | (\forall) V \in \mathcal{V}(X) \implies B(X, r) \cap M \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

- *Mulțimea punctelor de acumulare a lui  $M$* (notată  $M'$ ) este

$$M' = \{X \in \mathbf{R}^n | (\forall) V \in \mathcal{V}(X) \implies B(X, r) \cap M \setminus \{X\} \neq \emptyset\}.$$

- *Frontiera lui  $M$* (notată  $Fr(M)$ ) constă din punctele aderente atât lui  $M$ , cât și complementarei lui  $M$ :

$$Fr(M) = \{X \in \mathbf{R}^n | (\forall) V \in \mathcal{V}(X) \implies B(X, r) \cap M \neq \emptyset \neq B(X, r) \setminus M\}.$$

- *Mulțimea punctelor izolate ale mulțimii  $M$* (notată  $Iz(M)$ ) constă din punctele aderente ale lui  $M$  care nu sunt puncte de acumulare:

$$Iz(M) = \overline{M} \setminus M'.$$



# 5

## Funcții de mai multe variabile

### 5.1 Definiții. Exemple

**Definiție.** Fie  $D \subseteq \mathbf{R}^n$  o submulțime a spațiului  $\mathbf{R}^n$ . O funcție  $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$  se numește *funcție (scalară) de  $n$  variabile*. Mulțimea  $D$  este *domeniul de definiție al lui  $f$* , notat  $Dom(f)$ , iar mulțimea  $\{f(X) | X \in D\}$  se numește *imagea funcției  $f$* , și o notăm  $Im(f)$ .

**Observație.** Uneori nu se indică domeniul de definiție al unei funcții, ci doar spațiul  $\mathbf{R}^n$  în care este inclus acesta. În acest caz se consideră de regulă că domeniul de definiție este domeniul maxim de definiție, pentru care au sens toate calculele care se fac pentru determinarea imaginii unui vector prin funcția a cărei lege de corespondență este indicată.

**Exemplu.** 1) Pentru funcția  $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

domeniul de definiție este  $\mathbf{R}^4$ , iar imagea este  $\mathbf{R}_+$ .

2) Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}$ , dată de legea de corespondență

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1}.$$

Domeniul de definiție nu este indicat, astfel că trebuie considerat ca fiind domeniul maxim de definiție al expresiei care definește legea de corespondență prin care este definită funcția. Astfel,

$$Dom(f) = \{X \in \mathbf{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 \neq 0\} =$$

$$= \{X \in \mathbf{R}^4 \mid d(X, 0) \neq 1\} = \mathbf{R}^4 \setminus S(0, 1).$$

Imagina funcției  $f$  este  $\mathbf{R} \setminus (-1, 0]$ .

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $n$  variabile. *Graficul funcției*  $f$  este mulțimea

$$G_f = \{(X, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid X \in D, x_{n+1} = f(X)\}.$$

**Exemplu.** Graficul funcției  $f : \overline{B}(0, 1) \subseteq \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $f(X) = \sqrt{1 - \|X\|^2}$  este semisfera ”superioară”  $S^+(0, 1) \subseteq \mathbf{R}^3$ .

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $n$  variabile și  $\alpha \in \mathbf{R}$ . *Linia de nivel*  $\alpha$  a lui  $f$  este mulțimea  $\mathcal{L}_\alpha(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) = X \in D, f(X) = \alpha\}$ . Ea se mai numește *preimaginea* (sau *imaginea inversă*) a lui  $\alpha$  și se mai notează și  $f^{-1}(\alpha)$ .

## 5.2 Probleme propuse

Determinați domeniile și imaginile funcțiilor următoare

$$1. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 2. f(x, y) = \sqrt{1 + x + y};$$

$$3. f(x, y) = \frac{x}{y}; \quad 4. f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2};$$

$$5. f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + 4y^2}; \quad 6. f(x, y) = \sin(x + y);$$

$$7. f(x, y) = e^x + e^y; \quad 8. f(x, y) = \frac{1}{(x^2 - y^2)^{3/2}};$$

$$9. f(x, y) = \tan(x - y); \quad 10. f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}};$$

$$11. f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}; \quad 12. f(x, y) = \sin^{-1}(x + y);$$

**13.**  $f(x, y) = \cos^{-1}(x - y);$

**14.**  $f(x, y) = \frac{y}{|x|};$

**15.**  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x + y};$

**16.**  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 - y^2);$

**17.**  $f(x, y) = \frac{x}{2y} + \frac{2y}{x};$

**18.**  $f(x, y, z) = x + y + z;$

**19.**  $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z};$

**20.**  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$

**21.**  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2 + z^2}};$

**22.**  $f(x, y, z) = \sqrt{-x^2 - y^2 - z^2};$

**23.**  $f(x, y, z) = \ln(x - 2y - 3z + 4);$

**24.**  $f(x, y, z) = \frac{xy}{z};$





# 6

## Limite. Continuitate

### 6.1 Limita unei funcții într-un punct

Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $n$  variabile,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D'$  un punct de acumulare al domeniului de definiție al funcției  $f$  și  $l \in \overline{\mathbf{R}}$ .

**Definiție.** Spunem că *funcția  $f$  are limita  $l$  în punctul  $A$*  dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l$  există o vecinătate  $V$  a lui  $A$  cu proprietatea că  $f(X) \in U, (\forall) X \in V \cap D \setminus \{A\}$ .

O formă echivalentă a definiției de mai sus este:

**Definiție.** *Funcția  $f$  are limita  $l$  în punctul  $A$*  dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l$  există  $\delta > 0$  astfel încât  $f(X) \in U, (\forall) X \in D, 0 < d(X, A) < \delta$ .

Dacă  $l \in \mathbf{R}$  este un număr finit, putem transcrie definițiile de mai sus în forma următoare:

**Definiție.** *Funcția  $f$  are limita  $l$  în punctul  $A$*  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$  astfel încât

$$|f(X) - l| < \varepsilon, (\forall) X \in D, 0 < d(X, A) < \delta.$$

**Observație.** Această ultimă variantă a definiției poartă și numele de ”criteriul  $\varepsilon - \delta$ ”.

În cazul când  $l = \infty$ , putem formula definiția în modul următor:

**Definiție.** *Funcția  $f$  are limita  $\infty$  în punctul  $A$*  dacă pentru orice  $M \in \mathbf{R}$  există  $\delta > 0$  astfel încât

$$f(X) > M, (\forall) X \in D, 0 < d(X, A) < \delta.$$

Asemănător, pentru  $l = -\infty$  avem

**Definiție.** Funcția  $f$  are limita  $-\infty$  în punctul  $A$  dacă pentru orice  $m \in \mathbf{R}$  există  $\delta > 0$  astfel încât

$$f(X) < m, (\forall) X \in D, 0 < d(X, A) < \delta.$$

**Exemplu.** Vom arăta că

$$\lim_{X \rightarrow (-4, 1, 0, 3)} (x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4) = 7.$$

**Soluție.** Fie  $\varepsilon > 0$  dat. Vom căuta să determinăm  $\delta > 0$  cu proprietatea că

$$|x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 7| < \varepsilon$$

dacă

$$0 < \sqrt{(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 + (x_4 - 3)^2} < \delta$$

Pentru aceasta, să observăm că putem folosi inegalitatea modulului și scrie:

$$\begin{aligned} |x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 7| &= |x_1 + 4 + 2x_2 - 2 - x_3 + 3x_4 - 9| \leq \\ &\leq |x_1 + 4| + |2x_2 - 2| + |x_3| + |3x_4 - 9| = |x_1 + 4| + 2|x_2 - 1| + |x_3 - 0| + 3|x_4 - 3|. \end{aligned}$$

Fiecare dintre numerele  $|x_1 + 4|$ ,  $|x_2 - 1|$ ,  $|x_3 - 0|$ ,  $|x_4 - 3|$  mai mic sau egal cu

$$\sqrt{(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 + (x_4 - 3)^2}.$$

Prin urmare, rezultă că

$$\begin{aligned} |x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 7| &\leq 7\sqrt{(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 + (x_4 - 3)^2} = \\ &= 7 \cdot d((x_1, x_2, x_3, x_4), (-4, 1, 0, 3)). \end{aligned}$$

Fie acum  $\delta = \frac{1}{7}\varepsilon$ . Dacă  $d(X, (-4, 1, 0, 3)) < \delta$ , atunci conform inegalității de mai sus are loc:

$$|f(X) - 7| = |x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 7| \leq 7\delta = 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

și deci

$$\lim_{X \rightarrow (-4, 1, 0, 3)} (x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4) = 7.$$

**Exemplu.** Vom arăta că pentru funcția

$$f : \mathbf{R}^5 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}$$

nu există  $\lim_{X \rightarrow 0} f(X)$ .

**Soluție.** Vom arăta acest lucru demonstrând că putem obține două valori diferite apropiindu-ne de 0 pe două căi diferite. Fie  $X \rightarrow 0$  cu  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$  și  $x_5 \rightarrow 0$ , adică ne apropiem de 0 de-a lungul axei  $Ox_5$ . Atunci avem

$$f(X) = \frac{x_5^2}{x_5^2} = 1,$$

astfel că

$$\lim_{(0,0,0,0,x_5) \rightarrow 0} f(X) = 1.$$

Fie acum  $X \rightarrow 0$  cu  $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$  și  $x_4 \rightarrow 0$ . Atunci

$$f(X) = \frac{-x_4^2}{x_4^2} = -1,$$

astfel că

$$\lim_{(0,0,0,x_4,0) \rightarrow 0} f(X) = -1.$$

Deoarece am obținut două rezultate diferite, deducem că limita nu poate exista.

**Observație.** Rețineți deci că limita unei funcții într-un punct, dacă există, este unică. Sau, cu alte cuvinte, dacă apropiindu-ne de punctul  $a$  în mai multe moduri obținem limite diferite, atunci funcția nu are limită în punctul  $A$ .

## 6.2 Continuitate

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $n$  variabile reale și  $A \in D$ . Spunem că *funcția  $f$  este continuă în punctul  $A$*  dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $f(A)$  există o vecinătate  $V$  a punctului  $A$  astfel încât  $f(X) \in U$ , pentru orice  $X \in V \cap D$ .

**Observație.** Dacă  $A$  este un punct izolat al mulțimii  $D$ , atunci există o vecinătate  $V$  a sa, astfel încât  $V \cap D = \{A\}$ . Dar atunci, pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $f(A)$  are loc  $f(X) \in U$ , pentru orice  $X \in V \cap D$  (deoarece  $A$  este singurul element din  $V \cap D$  și  $f(A)$  se află în orice vecinătate a sa). Înseamnă că orice funcție este continuă în orice punct izolat al domeniului său de definiție.

**Observație.** Dacă  $A \in D$  este însă un punct de acumulare al lui  $D$ , atunci

funcția  $f$  este continuă în  $A$  dacă și numai dacă  $f$  are limită în punctul  $A$  și această limită este egală cu  $f(A)$ .

**Exemplu.** Funcția  $f : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}$  definită prin  $f(0) = 0$  și

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}, \quad (\forall) X \neq 0$$

nu are limită în 0, prin urmare nu este continuă în 0.

Continuitatea într-un punct poate fi studiată și ea cu ajutorul unui ”criteriu  $\varepsilon - \delta$ ”, deoarece definiția continuității într-un punct este echivalentă cu următoarea:

**Definiție.** Funcția  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  este continuă într-un punct  $A \in D$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$  astfel încât

$$|f(X) - f(A)| < \varepsilon, \quad (\forall) X \in D, \quad d(X, A) < \delta.$$

**Definiție.** (i) Un *polinom*  $p(X) = p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  în variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  este o sumă finită de termeni (numiți monoame) de forma

$$\alpha x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n},$$

unde  $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbf{N}$ , iar  $\alpha \in \mathbf{R}$ . *Gradul unui monom* este suma  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ , iar *gradul unui polinom* este cel mai mare dintre gradele monoamele sale.

(ii) O *funcție rațională*  $r(X) = r(x_1, x_2, \dots, x_n)$  în variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  este o funcție care poate fi scrisă ca raportul dintre două polinoame:

$$r(X) = \frac{p(X)}{q(X)}.$$

**Propoziție.** (i) Orice polinom în  $n$  variabile este continuu în orice punct din  $\mathbf{R}^n$ .

(ii) Orice funcție rațională  $r = p/q$  este continuă în orice punct  $A \in \mathbf{R}^n$  cu proprietatea că  $q(A) \neq 0$ .

(iii) Dacă  $f$  și  $g$  sunt două funcții continue într-un punct  $A$  atunci  $f + g$  și  $fg$  sunt continue în  $A$ .

(iv) Dacă  $f$  și  $g$  sunt continue în  $A$  și  $g(A) \neq 0$ , atunci  $f/g$  este continuă în  $A$ .

(v) Dacă  $f$  este continuă în  $A$ , iar  $h$  este o funcție de o variabilă, care este continuă în punctul  $f(A)$ , atunci funcția compusă  $h \circ f$  este continuă în  $A$ .

**Exemplu.**  $p(X) = x_1^3 x_2^5 x_5^8 - 3x_1 x_2^4 x_4^2 + 5x_1^2 x_2^3 x_3^4 x_4^2 x_5$  este continuă în orice punct  $A$  din  $\mathbf{R}^5$ .

**Exemplu.**

$$r(X) = \frac{x_1^2 x_5 x_4^4 + x_1 x_2^2 x_3^3 x_5^5 - x_1^6 x_2 x_5^3}{x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 - 6}$$

este continuă în orice  $X \in \mathbf{R}^5$ , cu excepția acelor  $X$  care satisfac egalitatea

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 6.$$

**Observație.** O mulțime de vectori care verifică o egalitate ca cea de mai sus se numește hiperplan. În general, un hiperplan în  $\mathbf{R}^n$  este o mulțime de forma

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbf{R}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b\}$$

unde  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  sunt numere reale.

**Exemplu.** Funcția  $\sin(x_1^2 + 2x_1 x_4 - x_3^4 x_5^5)$  este continuă în orice  $a$  din  $\mathbf{R}^5$ , fiind o compusă a funcției continue de o variabilă  $\sin$  și a unei funcții continue.

## 6.3 Probleme propuse

Verificați cu ajutorul definiției valorile limitelor

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (3x + y) = 5 \qquad 2. \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-1)} (x - 7y) = 10$$

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (5,-2)} (ax + by) = 5a - 2b \qquad 4. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$5. \lim_{(x,y) \rightarrow (4,1)} (x^2 + 3y^2) = 19 \qquad 6. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x}{y} = 1$$

Arătați că următoarele limite nu există

$$7. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$$

$$8. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2}$$

$$9. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax^2+by}{cx^2+dy}, \quad a, b, c, d > 0 \quad 10. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+2xy+3yz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$11. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$$

Calculați limitele următoare

$$12. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$13. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$14. \lim_{(x,y) \rightarrow (-4,3)} \frac{1+xy}{1-xy}$$

$$15. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \ln(1 + e^{x+y})$$

$$16. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

$$17. \lim_{(x,y) \rightarrow (2,5)} sh\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$$

$$18. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0,0)} \frac{yx^2+z^3}{x^2+y^2+z^2} \quad 19. \lim_{(x,y) \rightarrow (4,1,3)} \ln(x - yz + 4x^3y^5z)$$

Studiați continuitatea funcțiilor următoare în origine.

$$20. f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ c & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$21. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ c & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$22. f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ c & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

# 7

## Derivate parțiale

### 7.1 Derivate parțiale de ordinul întâi

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  o funcție de  $n$  variabile, definită pe o mulțime deschisă  $D$  din  $\mathbf{R}^n$  și fie  $A \in D$  un punct fixat al domeniului de definiție. Spunem că *funcția  $f$  este derivabilă parțial în raport cu variabila  $x_i$  în punctul  $A$*  dacă există și este finită limita

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\Delta x_i}.$$

Atunci când există, limita de mai sus se notează cu  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ .

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  o funcție de  $n$  variabile și  $D_i$  o mulțime inclusă în domeniul  $D$  de definiție al funcției. Spunem că  *$f$  este derivabilă parțial în raport cu variabila  $x_i$  pe  $D_i$*  dacă  $f$  este derivabilă parțial în raport cu  $x_i$  în orice punct  $A \in D_i$ .

**Definiție.** *Derivata parțială a unei funcții  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  în raport cu variabila  $x_i$*  este funcția  $(\partial f / \partial x_i) : D_i \rightarrow \mathbf{R}$  definită de limita de mai sus pe mulțimea punctelor pe care  $f$  este derivabilă parțial în raport cu variabila  $x_i$ .

**Observație.** Din definiția derivatei parțiale în raport cu o variabilă se poate constata că ea se calculează fixând toate celelalte variabile constante (egale cu componentele corespunzătoare ale punctului în care se face calculul), apoi derivând după variabila respectivă. În consecință, atunci când calculăm derivate parțiale putem folosi regulile de derivare pentru funcții de o

variabilă.

**Observație.** Atenție! Chiar dacă pentru calculul unei derivate parțiale derivăm practic în raport cu o singură variabilă, fixând celelalte variabile, o derivată parțială este o funcție de  $n$  variabile.

**Exemplu.** Derivatele parțiale ale funcției  $f(X) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2x_3 - \frac{x_4}{x_1}$  sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 3x_2x_3 + \frac{x_4}{x_1^2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 3x_1x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2 + 3x_1x_3 \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = -\frac{1}{x_1}$$

**Notație.** Frecvent vom folosi în loc de  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  notația  $f_{x_i}$ , sau pentru simplitate  $f_i$ ; astfel derivatele parțiale din exemplul de mai sus se scriu  $f_{x_1} = f_1 = 2x_1 + 3x_2x_3 + \frac{x_4}{x_1^2}$ ,  $f_{x_2} = f_2 = -2x_2 + 3x_1x_3$ , ș.a.m.d.

**Observație.** Spre deosebire de cazul funcțiilor de o singură variabilă, o funcție care este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele nu este în mod necesar continuă în acel punct.

**Exemplu.** Fie  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Arătați că  $f_x$  și  $f_y$  există în punctul  $(0, 0)$ , dar că  $f$  nu este continuă în origine.

**Soluție.** Vom arăta în primul rând că nu există  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , deci  $f$  nu poate fi continuă în origine. În acest scop, vom considera întâi  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  cu  $y = x$ . Pentru acest caz avem atunci:

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2},$$

astfel că dacă ar exista  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , aceasta ar fi egală cu  $\frac{1}{2}$ . Să considerăm acum  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  cu  $y = -x$ . Atunci

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{-x^2}{x^2+x^2} = -\frac{1}{2},$$

de unde ar rezulta că  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  ar fi egală cu  $-\frac{1}{2}$ . Prin urmare limita nu poate exista și deci funcția  $f$  nu este continuă în origine. Pe de



altă parte avem

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(0+\Delta x) \cdot 0}{(0+\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Analog, obținem că  $f_y = 0$ . Astfel în punctul  $(0, 0)$  există ambele derivate parțiale  $f_x$  și  $f_y$ , chiar dacă funcția  $f$  nu este continuă în acest punct.

## 7.2 Derivate parțiale de ordin superior

Pentru funcții de o variabilă,  $y = f(x)$  derivatele de ordinul  $I$  și al  $II$ -lea sunt date de

$$y' = \frac{df}{dx} \quad \text{și} \quad y'' = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right).$$

Cu alte cuvinte, derivata de ordinul al doilea este derivata derivatei de ordinul întâi.

Asemănător, pentru o funcție de două variabile  $z = f(x, y)$ , putem deriva fiecare din "primele" derivate  $\partial f / \partial x$  și  $\partial f / \partial y$  în raport cu fiecare din variabilele  $x$  și  $y$ , obținând astfel patru *derivate parțiale de ordinul doi*:

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție de două variabile,  $z = f(x, y)$ , derivabilă parțial în raport cu ambele variabile pe  $D$ , astfel încât fiecare derivată parțială este de asemenea derivabilă parțial. Se pot obține atunci *derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției  $f$*  în următoarele moduri:

(i) Derivând de două ori în raport cu  $x$ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

(ii) Derivând întâi în raport cu  $x$  și apoi în raport cu  $y$ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

(iii) Derivând întâi în raport cu  $y$  și apoi în raport cu  $x$ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

(i) Derivând de două ori în raport cu  $y$ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

**Observație.** Derivatele parțiale  $\partial^2 f / \partial x \partial y$  și  $\partial^2 f / \partial y \partial x$  se numesc *derivate parțiale mixte de ordinul doi*.

**Observație.** În notația "fracționară", a calcula  $\partial^2 f / \partial x \partial y$  înseamnă a deriva întâi în raport cu variabila  $y$ , și apoi în raport cu  $x$ , adică derivăm în ordinea inversă apariției variabilelor la numitorul "raportului de derivare" (asemănător cu situația întâlnită la compunerea funcțiilor), spre deosebire de notația "indicială"  $f_{yx}$ , în care ordinea scrierii variabilelor corespunde ordinii în care efectuăm derivările parțiale.

**Exemplu.** Fie  $z = f(x, y) = x^3 y^2 - xy^5$ . Vom calcula derivatele parțiale de ordinul doi ale lui  $f$ .

**Soluție.** Avem  $f_x = 3x^2 y^2 - y^5$  și  $f_y = 2x^3 y - 5xy^4$ . Derivatele parțiale de ordinul al doilea sunt:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = 6xy^2 \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = 6x^2 y - 5y^4$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = 6x^2 y - 5y^4 \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = 2x^3 - 20xy^3.$$

Asemănător putem defini derivate de ordinul doi și în cazul unei funcții de  $n$  variabile:

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $n$  variabile, derivabilă parțial pe  $D$  în raport cu fiecare variabilă, astfel încât fiecare derivată parțială este la rândul ei derivabilă parțial. *Derivata parțială de ordinul doi în raport cu variabilele  $x_i$  și  $x_j$*  este atunci funcția

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = f_{x_i x_j}.$$

Adesea, pentru a simplifica notația, vom scrie  $f_{ij}$  în loc de  $f_{x_i x_j}$ .

**Observație.** În exemplul de mai sus am avut  $f_{xy} = f_{yx}$ . Acest lucru nu este întâmplător. Mai exact, are loc următoarea teoremă (proprietatea a fost observată de L.Euler care a enunțat în 1734 rezultatul, demonstrat mai târziu de către Schwarz):

**Teoremă. (Criteriul lui Schwarz)** Dacă  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  este o

funcție de  $n$  variabile, iar  $A \in D$  un punct din domeniul de definiție, în care  $f$ ,  $f_i$ ,  $f_j$ ,  $f_{ij}$  și  $f_{ji}$  sunt continue, atunci are loc egalitatea

$$f_{ij}(A) = f_{ji}(A).$$

**Corolar.** Dacă o funcție  $f$  admite derivate mixte continue, atunci aceste derivate mixte sunt egale.

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $n$  variabile. În mod analog celui în care am definit derivate parțiale de ordinul doi, se pot defini derivate parțiale de ordin  $t$  pentru orice număr  $t \in \mathbf{N}^*$ :

$$\frac{\partial^t f}{\partial x_{i_1}^{t_1} \partial x_{i_2}^{t_2} \dots \partial x_{i_k}^{t_k}}$$

unde  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbf{N}^*$  cu  $t_1 + t_2 + \dots + t_k = t$ , iar  $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ . Cum criteriul lui Schwarz se extinde în mod natural la derivate parțiale de orice ordin, vom scrie cel mai adesea pentru o derivată de ordin  $t$  mai simplu

$$\frac{\partial^t f}{\partial x_1^{t_1} \partial x_2^{t_2} \dots \partial x_n^{t_n}},$$

unde  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbf{N}$  cu  $t_1 + t_2 + \dots + t_n = t$ .

**Definiție.** O funcție  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  de  $n$  variabile se numește *funcție de clasă  $\mathcal{C}^k$  pe  $D$*  (și scriem  $f \in \mathcal{C}^k(D)$ ) dacă  $f$  admite derivate parțiale de ordinul  $k$  pe  $D$ , iar acestea sunt funcții continue pe  $D$ .

**Definiție.** O funcție  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  de  $n$  variabile se numește *funcție de clasă  $\mathcal{C}^\infty$  pe  $D$*  (și scriem  $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ ) dacă  $f$  este de clasă  $\mathcal{C}^k$  pe  $D$  pentru orice număr natural  $k$ .

**Observație.** Orice polinom de  $n$  variabile este o funcție de clasă  $\mathcal{C}^\infty$  pe  $\mathbf{R}^n$ .

## 7.3 Gradient. Diferențială

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $n$  variabile definită pe o mulțime deschisă  $D \subseteq \mathbf{R}^n$  și  $A \in D$  un punct al domeniului de definiție cu proprietatea că  $f$  este derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă în

punctul  $A$ . Vectorul notat  $\nabla f(A)$ , care are drept componente derivatele parțiale ale funcției  $f$  în punctul  $A$

$$\nabla f(A) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right)$$

se numește *gradientul lui  $f$  în punctul  $A$* . Dacă  $f$  este derivabilă parțial pe  $D$ , atunci *gradientul lui  $f$*  este funcția vectorială (i.e., cu domeniul de valori un spațiu vectorial)  $\nabla f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ , definită prin

$$\nabla f(X) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right), \quad (\forall) X \in D.$$

**Exemplu.** Fie  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(X) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2x_3 - \frac{x_4}{x_1}$ . Vom determina  $\nabla f$ .

**Soluție.** Conform definiției gradientului lui  $f$ , avem

$$\begin{aligned} \nabla f(X) &= (f_{x_1}(X), f_{x_2}(X), f_{x_3}(X), f_{x_4}(X)) = \\ &= (2x_1 + 3x_2x_3 + \frac{x_4}{x_1^2}, -2x_2 + 3x_1x_3, 3x_1x_2, -\frac{1}{x_1}). \end{aligned}$$

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $n$  variabile definită pe o mulțime deschisă  $D \subseteq \mathbf{R}^n$  și  $A \in D$  un punct al domeniului de definiție. Spunem că  $f$  este *diferențiabilă în punctul  $A$*  dacă există o aplicație liniară  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  și o funcție  $g : V_0 \rightarrow \mathbf{R}$ , unde  $V_0$  este o vecinătate a originii spațiului  $\mathbf{R}^n$ , astfel încât  $A + V_0 \subseteq D$ ,  $\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{g(\Delta X)}{\|\Delta X\|} = 0$  și are loc egalitatea

$$f(A + \Delta X) - f(A) = T(\Delta X) + g(\Delta X).$$

Dacă funcția  $f$  este diferențiabilă în punctul  $A$ , forma liniară  $T$  de mai sus se numește *diferențiala funcției  $f$  în punctul  $A$*  și se notează  $d_A f$ .

**Exemplu.** Orice formă liniară  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  este diferențiabilă în orice punct  $A \in \mathbf{R}^n$  și  $d_A f = f$ ,  $(\forall) A \in \mathbf{R}^n$ .

**Demonstrație.** Datorită aditivității formei liniare  $f$  are loc egalitatea

$$f(A + \Delta X) - f(A) = f(\Delta X) + 0,$$

astfel că este îndeplinită condiția din definiția de mai sus, cu  $T = f$  și  $g = 0$  (funcția constant nulă).

O formulă a diferențialei unei funcții este dată de următoarea

**Propoziție.** Fie  $f$  derivabilă parțial în raport cu toate variabilele pe o vecinătate a unui punct  $A$  al domeniului de definiție, astfel încât derivatele parțiale sunt continue în  $A$ . Atunci  $f$  este diferențiabilă în punctul  $A$  și

$$\begin{aligned} d_A f(H) &= (\nabla f(A), H) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot h_n, \quad (\forall) H \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

Am văzut ceva mai devreme că o funcție derivabilă parțial într-un punct nu este neapărat continuă în acel punct. Altfel stau lucrurile în cazul unei funcții diferențiabile într-un punct:

**Propoziție.** Dacă  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  este o funcție diferențiabilă în punctul  $A \in D$ , atunci  $f$  este continuă în acel punct.

**Demonstrație.** Trebuie să arătăm că  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$ . Deoarece  $f$  este diferențiabilă în  $A$ , are loc egalitatea

$$f(X) - f(A) = (\nabla f(A), X - A) + g(X - A).$$

Conform inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz, avem că

$$0 \leq |(\nabla f(A), X - A)| \leq \|\nabla f(A)\| \cdot \|X - A\|,$$

de unde rezultă că  $\lim_{X \rightarrow A} (\nabla f(A), X - A) = 0$ . De asemenea,

$$\lim_{X \rightarrow A} g(X - A) = \lim_{X \rightarrow A} \frac{g(X - A)}{\|X - A\|} \cdot \|X - A\| = 0.$$

Prin urmare,  $\lim_{X \rightarrow A} (f(X) - f(A)) = 0$ , de unde rezultă afirmația din enunț.

Alte proprietăți ale funcțiilor diferențiabile sunt date de următoarea

**Propoziție.** Fie  $f$  și  $g$  funcții de  $n$  variabile, diferențiabile pe o mulțime deschisă  $D \subseteq \mathbf{R}^n$ , iar  $\alpha \in \mathbf{R}$  un scalar oarecare. Atunci funcțiile  $f + g$  și  $\alpha f$  sunt diferențiabile pe  $D$  și au loc egalitățile

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g, \quad \nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f.$$

**Observație.** Din această propoziție deducem că mulțimea funcțiilor diferențiabile pe o mulțime deschisă are o structură de spațiu vectorial real.

### 7.3.1 Diferențierea funcțiilor compuse

Indicăm aici câteva formule care reprezintă analoagele pentru funcții de mai multe variabile ale formulei de derivare a unei funcții compuse cunoscute pentru funcții de o singură variabilă:

$$(f \circ g)'(t) = (f' \circ g)(t) \cdot g'(t).$$

**Propoziție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție diferențiabilă de  $n$  variabile și  $g_1, g_2, \dots, g_n : I \subseteq \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  funcții derivabile de o variabilă, cu proprietatea că

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \in D, \quad (\forall) t \in I.$$

Atunci funcția  $f \circ g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ , dată de  $(f \circ g)(t) = f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$  este o funcție derivabilă de o variabilă și are loc egalitatea

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t) &= (\nabla f(g(t)), g'(t)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) \cdot g'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t)) \cdot g'_2(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) \cdot g'_n(t), \quad (\forall) t \in I, \end{aligned}$$

unde  $g'(t) = (g'_1(t), g'_2(t), \dots, g'_n(t))$ .

**Exemplu.** Fie  $z = f(x, y) = xy^2$  și fie  $x = \cos t$  și  $y = \sin t$ . Atunci

$$\begin{aligned} z &= z(t) \quad \text{și} \quad z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t) = \\ &= y^2(-\sin t) + 2xy(\cos t) = (\sin^2 t)(-\sin t) + 2(\cos t)(\sin t)(\cos t) = \\ &= 2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t. \end{aligned}$$

**Propoziție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție diferențiabilă de  $n$  variabile și  $g_1, g_2, \dots, g_n : G \subseteq \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$  funcții diferențiabile de  $m$  variabile, cu proprietatea că

$$g(Y) = (g_1(Y), g_2(Y), \dots, g_n(Y)) \in D, \quad (\forall) Y \in G.$$

Atunci funcția  $h = f \circ g : G \longrightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $h(Y) = (f \circ g)(Y) = f(g_1(Y), g_2(Y), \dots, g_n(Y))$  este o funcție diferențiabilă de  $m$  variabile și au loc egalitățile

$$\frac{\partial h}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial g_n}{\partial y_j}, \quad (\forall) j = \overline{1, m}.$$

**Exemplu.** Fie  $z = f(x, y) = \sin xy^2$ . Dacă  $x = \frac{r}{s}$  și  $y = e^{r-s}$ , să se calculeze  $\frac{\partial z}{\partial r}$  și  $\frac{\partial z}{\partial s}$ .

**Soluție.** Ținând cont de formulele de mai sus, putem scrie

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = (y^2 \cos xy^2) \cdot \frac{1}{s} + (2xy \cos xy^2) \cdot e^{r-s} = \\ &= \frac{e^{2(r-s)}}{s} \cos \left( \frac{r}{s} e^{2(r-s)} \right) + \frac{2r e^{2(r-s)}}{s} \cos \left( \frac{r}{s} e^{2(r-s)} \right) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (y^2 \cos xy^2) \cdot \left( -\frac{r}{s^2} \right) + (2xy \cos xy^2) \cdot (-e^{r-s}) = \\ &= -\frac{r e^{2(r-s)}}{s^2} \cos \left( \frac{r}{s} e^{2(r-s)} \right) - \frac{2r e^{2(r-s)}}{s} \cos \left( \frac{r}{s} e^{2(r-s)} \right). \end{aligned}$$

**Definiție.** Fie  $X, Y \in \mathbf{R}^n$ . Segmentul  $[X, Y]$  care unește  $X$  și  $Y$  este mulțimea

$$[X, Y] = \{V \in \mathbf{R}^n \mid (\exists)t \in [0, 1] : V = tX + (1-t)Y\}.$$

**Observație.**  $X = 1X + (1-1)Y \in [X, Y]$  și  $Y = 0X + (1-0)Y \in [X, Y]$ .

Putem formula acum o extindere a teoremei creșterilor finite a lui Lagrange

**Propoziție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție diferențiabilă pe  $D$  și  $X, Y \in D$  cu proprietatea că  $[X, Y] \subseteq D$ . Atunci există un punct  $C \in [X, Y]$  cu proprietatea că

$$f(Y) - f(X) = (\nabla f(C), Y - X).$$

**Demonstrație.** Fie  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  definită prin  $g(t) = f(X + t(Y - X)) = (f \circ h)(t)$ , unde  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $h(t) = X + t(Y - X)$ . Atunci  $h(t) = X + t(Y - X) \in [X, Y]$ ,  $(\forall)t \in [0, 1]$ ,  $g(0) = f(X)$ ,  $g(1) = f(Y)$  și  $g$  este o funcție derivabilă. Aplicând teorema lui Lagrange pentru funcția  $g$ , rezultă că există  $t_0 \in (0, 1)$  cu proprietatea că

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)(1 - 0) = g'(t_0).$$

Dar

$$g'(t) = (\nabla f(h(t)), h'(t)) = (\nabla f(h(t)), Y - X),$$

astfel că pentru  $C = h(t_0)$  obținem

$$f(Y) - f(X) = g(1) - g(0) = g'(t_0) = (\nabla f(h(t_0)), Y - X) = (\nabla f(C), Y - X).$$

Afirmația este deci demonstrată.

## 7.4 Hessiana unei funcții într-un punct

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $n$  variabile derivabilă parțial de două ori în raport cu fiecare variabilă pe mulțimea deschisă  $D \subseteq \mathbf{R}^n$  și  $A \in D$  un punct al domeniului de definiție al lui  $f$ . *Matricea hessiană a funcției  $f$  în punctul  $A$*  este matricea

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(A) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(A) \end{pmatrix}$$

**Observație.** Dacă derivatele parțiale mixte ale funcției  $f$  sunt continue, din criteriul lui Schwarz rezultă că matricea hessiană a funcției  $f$  este simetrică.

**Exemplu.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$$

și  $A = (2, 2, 5)$ . Vom determina matricea hessiană a funcției  $f$  în punctul  $A$ .

**Soluție.** Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + 2y + 3z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x + 2y + 3z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{x + 2y + 3z}.$$

Derivatele de ordinul al doilea sunt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+2y+3z)^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{(x+2y+3z)^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{3}{(x+2y+3z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{2}{(x+2y+3z)^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{4}{(x+2y+3z)^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{6}{(x+2y+3z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\frac{3}{(x+2y+3z)^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -\frac{6}{(x+2y+3z)^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{9}{(x+2y+3z)^2}$$



Astfel că matricea hessiană a funcției  $f$  în punctul  $A = (2, 2, 5)$  este

$$H_f(2, 2, 5) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{441} & -\frac{2}{441} & -\frac{3}{441} \\ -\frac{2}{441} & -\frac{4}{441} & -\frac{6}{441} \\ -\frac{3}{441} & -\frac{6}{441} & -\frac{9}{441} \end{pmatrix}$$

**Definiție.** Forma pătratică care are drept coeficienți elementele matricei hessiene  $H_f(A)$  ale unei funcții  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  de  $n$  variabile într-un punct  $A \in D$  se numește *forma hessiană asociată funcției  $f$  în punctul  $A$* .

Vom nota cu  $h_{f,A}$  această formă pătratică

$$\begin{aligned} h_{f,A}(z_1, z_2, \dots, z_n) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A)z_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A)z_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(A)z_n^2 + \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A)z_1 z_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(A)z_1 z_3 + \dots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(A)z_1 z_n + \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(A)z_2 z_3 + \dots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(A)z_{n-1} z_n \end{aligned}$$

(Am presupus aici că derivatele mixte sunt egale, așa cum este cazul aproape întotdeauna.)

**Exemplu.** Pentru cazul funcției  $f : D \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$ , pentru care am determinat mai sus matricea hessiană în punctul  $A = (2, 2, 5)$ , forma hessiană în același punct este

$$-\frac{1}{441}(z_1^2 + 4z_2^2 + 9z_3^2 + 4z_1 z_2 + 6z_1 z_3 + 12z_2 z_3).$$

## 7.5 Probleme propuse

Calculați  $\partial z / \partial x$  și  $\partial z / \partial y$  pentru funcțiile următoare

1.  $z = x^2 y$
2.  $z = xy^2$
3.  $z = 3e^{xy^3}$
4.  $z = \sin(x^2 + y^3)$
5.  $z = 4x/y^5$
6.  $z = e^{yt}g(x)$
7.  $z = \ln(x^3 y^5 - 2)$
8.  $z = \sqrt{xy + 2y^3}$
9.  $z = (x + 5y \sin x)^{4/3}$

Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcțiilor următoare în punctele indicate:

10.  $f(x, y, z) = xyz,$  în  $(2, 3, 4)$

11.  $f(x, y, z) = \sqrt{x + 2y + 3z}$  în  $(2, -1, 3)$

12.  $f(x, y, z) = \frac{x-y}{z}$  în  $(-3, -1, 2)$

13.  $f(x, y, z) = \sin(x^2 - y^2 + z)$  în  $(0, 1, 0)$

14.  $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$  în  $(2, 2, 5)$

15.  $f(x, y, z) = tg \frac{xy}{z}$  în  $(1, 2, -2)$

16.  $f(x, y, z) = \frac{y^3 - z^5}{x^2 y + z}$  în  $(4, 0, 1)$

17.  $f(x, y, z) = e^{xy}(ch(z) - sh(z))$  în  $(2, 3, 0)$

18.  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  în  $(a, b, c)$

19. Costurile de producție ale unui fabricant pentru a produce  $x$  unități din produsul  $A$  și  $y$  unități din produsul  $B$  este dat de

$$C(x, y) = \frac{50}{2+x} + \frac{125}{(3+y)^2}.$$

Calculați costul marginal al fiecărui produs.

20. Venitul realizat de același fabricant este dat de

$$V(x, y) = \ln(1 + 50x + 75y) + \sqrt{1 + 40x + 125y}.$$

Calculați venitul marginal realizat cu fiecare produs.

## 8

# Extreme locale ale funcțiilor de mai multe variabile

Orice funcție continuă definită pe o mulțime compacte are următoarea proprietate remarcabilă:

**Teorema lui Weierstrass** Fie  $f : K \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă având drept domeniu de definiție o mulțime compactă  $K \subseteq \mathbf{R}^n$ . Atunci există două puncte  $X_1, X_2 \in K$  și două numere reale  $m, M \in \mathbf{R}$  cu proprietatea că

$$m = f(X_1) \leq f(X) \leq f(X_2) = M, \quad (\forall) X \in K.$$

**Definiție.** Numerele reale  $m$  și  $M$  poartă numele de *minim global*, respectiv *maxim global* al funcției  $f$ , iar punctele  $X_1$  și  $X_2$  în care se ating aceste valori se numesc *punct de minim global*, respectiv *punct de maxim global*.

**Definiție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $n$  variabile și  $A \in D$  un punct al domeniului de definiție. Punctul  $A$  se numește *punct de maxim(minim) local al funcției  $f$*  dacă există o vecinătate  $V$  a sa cu proprietatea că

$$f(X) \leq f(A) \text{ (resp. } f(X) \geq f(A)), \quad (\forall) X \in V \cap D.$$

Valoarea  $f(A)$  a funcției  $f$  în punctul  $A$  se numește *maxim local* (respectiv *minim local*) al funcției  $f$ .

Valorile minime sau maxime (locale sau globale) ale unei funcții se numesc *extreme* ale funcției, iar punctele în care se ating aceste valori se numesc

puncte de extrem.

## 8.1 Extreme locale necondiționate ale funcțiilor diferențiabile

**Propoziție.** Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție diferențiabilă de  $n$  variabile definită pe mulțimea deschisă  $D \subseteq \mathbf{R}^n$  și  $A \in D$  un punct de extrem local. Atunci

$$\nabla f(A) = 0.$$

**Demonstrație.** Fie  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  și  $h_i : I_i \longrightarrow \mathbf{R}$  funcția definită prin  $h_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$  pe un interval  $I_i$  cu proprietatea că  $a_i \in I_i$  și  $(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \in D$ ,  $(\forall)x \in I_i$ . Conform enunțului, rezultă că  $h_i$  este derivabilă pe  $I_i$  și  $a_i$  este un punct de extrem local pentru funcția  $h_i$ . Conform teoremei lui Fermat, avem atunci

$$h'_i(a_i) = 0.$$

dar din definiția lui  $h_i$  rezultă că

$$h'_i(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A).$$

Prin urmare, obținem că

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0, \quad (\forall)i = \overline{1, n},$$

adică  $\nabla f(A) = 0$ .

**Definiție.** Un punct  $A$  se numește *punct critic al unei funcții  $f$*  dacă  $f$  este diferențiabilă în  $A$  și  $\nabla f(A) = 0$ .

**Observație.** Din propoziția de mai sus avem că orice punct de extrem local al unei funcții diferențiabile este un punct critic. Reciproca nu este în general adevărată, adică nu orice punct critic este neapărat un punct de extrem.

**Exemplu.** Fie  $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y) = 1 + x^2 + 3y^2$ . Atunci  $\nabla f(x, y) = (2x, 6y)$ , astfel că singurul punct critic al funcției  $f$  este  $(0, 0)$ , care este

evident un punct de minim local(și chiar global).

**Exemplu.** Fie  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y) = 1 - x^2 - 3y^2$ . Atunci  $\nabla f(x, y) = (-2x, -6y)$ , care se anulează numai pentru  $(0, 0)$ , care este un punct de maxim local(și chiar global).

**Exemplu.** Fie  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Avem  $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ , deci singurul punct critic este  $(0, 0)$ . Acesta însă nu este nici punct de maxim local, deoarece în orice vecinătate a sa se găsesc puncte  $(x, y)$  cu  $|x| > |y|$ , pentru care  $f(x, y) > 0$ , nici punct de minim local, căci orice vecinătate a sa conține puncte  $(x, y)$  cu  $|x| < |y|$ , pentru care  $f(x, y) < 0$ .

**Definiție.** Un punct critic al unei funcții derivabile  $f$  care nu este punct de extrem local al funcției  $f$ , se numește *punct-șa al lui  $f$* .

Pentru a recunoaște care dintre punctele critice ale unei funcții sunt puncte de extrem local, vom utiliza polinoamele de aproximare ale lui Taylor:

Fie  $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție diferențiabilă de  $n$  variabile, definită pe mulțimea deschisă  $D$ , și fie  $A \in D$  un punct critic al lui  $f$ . Conform teoremei lui Taylor, într-o vecinătate  $V \subseteq D$  a punctului  $A$  putem scrie

$$f(X) = T_2(f; A)(X) + R_2(f; A)(X), \quad (\forall) X \in V,$$

unde  $T_2(f; A)(X)$  este polinomul Taylor de ordinul 2 asociat funcției  $f$  în jurul punctului  $A$ , iar  $R_2(f; A)(X)$  este restul formulei lui Taylor de ordinul 2, despre care știm că

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{R_2(f; A)(X)}{\|X - A\|^2} = 0.$$

Polinomul Taylor de ordinul 2 asociat lui  $f$  în jurul lui  $A$  este

$$\begin{aligned} T_2(f; A)(X) = & f(A) + \frac{\partial f(A)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f(A)}{\partial x_n}(x_n - a_n) + \\ & + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_1^2}(x_1 - a_1)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_n^2}(x_n - a_n)^2 + \\ & + 2 \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \dots + 2 \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(x_{n-1} - a_{n-1})(x_n - a_n) \end{aligned}$$

Cu notațiile și definițiile din paragraful precedent putem scrie

$$T_2(f; A)(X) = f(A) + (\nabla f(A), X - A) + h_{f,A}(X - A).$$

Ținând cont de faptul că  $A$  este un punct critic, din formula lui Taylor deducem următoarea aproximare, valabilă într-o vecinătate a punctului critic  $A$ :

$$f(X) \approx f(A) + h_{f,A}(X - A),$$

sau

$$f(X) - f(A) \approx h_{f,A}(X - A).$$

Deducem că un punct critic este

- punct de minim, dacă hessiana  $h_{f,A}$  este pozitiv definită.
- punct de maxim, dacă hessiana  $h_{f,A}$  este negativ definită.
- punct-șa, dacă hessiana  $h_{f,A}$  este nedefinită.

În celelalte situații, când hessiana este semidefinită, punctul critic poate fi de oricare din cele trei tipuri (minim, maxim, punct-șa).

**Exemplu.** Fie  $f(x, y) = 2x^3 - 24xy + 16y^3$ . Vom determina natura punctelor critice ale lui  $f$ .

**Soluție.** Gradientul lui  $f$  este  $\nabla f(x, y) = (6x^2 - 24y, -24x + 48y^2)$ , astfel că punctele critice ale lui  $f$  sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x^2 - 4y = 0 \\ x - 2y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y^4 - 4y = 0 \\ x = 2y^2 \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem sunt  $(0, 0)$  și  $(2, 1)$ . Matricea hessiană a funcției  $f$  într-un punct oarecare  $(x, y)$  este

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & -24 \\ -24 & 96y \end{pmatrix}$$

Forma hessiană este atunci

$$h_{f;(x,y)}(z_1, z_2) = 12xz_1^2 + 96yz_2^2 - 48z_1z_2.$$

Pentru punctul critic  $(0, 0)$ , forma hessiană este

$$h_{f;(0,0)}(z_1, z_2) = -48z_1z_2,$$

$$h_{f;(2,1)}(z_1, z_2) = 24z_1^2 + 96z_2^2 - 48z_1z_2 = 24((z_1 - z_2)^2 + 3z_2^2),$$

Etapele pe care le parcurgem deci când dorim să determinăm punctele de extrem local ale unei funcții diferentiabile definite pe o mulțime deschisă, sunt:

- Calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi și de ordinul doi.
- Determinăm punctele critice.
- Pentru fiecare punct critic în parte construim forma hessiană asociată funcției în acel punct și studiem definirea (pozitivă, negativă sau "non"), studiu din care deducem dacă punctul critic este un punct de extrem local (minim sau maxim) sau un punct-șa.

## 8.2 Extreme locale condiționate. Regula multiplicatorilor lui Lagrange

În probleme de optimizare căutăm de multe ori să determinăm valori extreme (locale sau globale) a unei funcții ale cărei variabile nu sunt "libere", ci condiționate de anumite restricții:

$$\left\{ \begin{array}{l} max(min)[f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)] \\ g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ ..... \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

**Propoziție.** Fie  $f, g_1, \dots, g_m : D \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  funcții diferențiabile de  $n$  variabile, și  $A \in D_r = \{X \in D | g_j(X) = 0, (\forall) j = \overline{1, m}\}$ . Dacă punctul





- Pentru fiecare soluție  $(A, \mu)$  a sistemului de mai sus, studiem semnul pe care îl poate lua forma pătratică

ale cărei variabile nu sunt libere, ci verifică condițiile

(corespunzătoare faptului că vrem să comparăm valoarea funcției  $f$  în punctul  $A$  doar cu valori ale lui  $f$  în puncte dintr-o vecinătate a lui  $A$  care se găsesc în mulțimea  $D_r$ ). Aceste condiții se pot transcrie sub forma

[illegible]

• În funcție de rezultatul obținut, vom putea deduce natura punctului critic  $A \in D_r$ :

- dacă forma pătratică este pozitiv definită, atunci  $A$  este un punct de minim local condiționat.
- dacă forma pătratică este negativ definită, atunci  $A$  este un punct de maxim local condiționat.
- dacă forma pătratică este nedefinită, atunci  $A$  nu este punct de extrem local condiționat.

**Exemplu.** Fie  $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , și fie  $g_1, g_2 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ ,  $g_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3 - 2$ ,  $g_2(x_1, x_2, x_3) =$

$x_1 - x_2 - 3x_3 - 4$ . Vom încerca să determinăm punctele de extrem local ale lui  $f$  în raport cu condițiile  $g_1(x) = 0$  și  $g_2(x) = 0$ .

**Soluție.** • În primul rând construim funcția lui Lagrange

$$L : \mathbf{R}^5 \longrightarrow \mathbf{R}, \quad L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \\ - \lambda_1(2x_1 + x_2 + x_3 - 2) - \lambda_2(x_1 - x_2 - 3x_3 - 4).$$

• Derivatele parțiale ale funcției lui Lagrange sunt

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(2x_1 + x_2 + x_3 - 2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(x_1 - x_2 - 3x_3 - 4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - \lambda_1 + 3\lambda_2$$

iar cele de ordinul doi sunt

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 0,$$

• Sistemul asociat este

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ 2x_3 - \lambda_1 + 3\lambda_2 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2 & = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4 & = 0 \end{cases}$$

Soluția acestui sistem este  $\left(\frac{44}{31}, \frac{1}{31}, \frac{-27}{31}; \frac{30}{31}, \frac{28}{31}\right)$ , deci avem un singur punct critic,  $a = \left(\frac{44}{31}, \frac{1}{31}, \frac{-27}{31}\right)$ , și corespunzător valorile multiplicatorilor sunt  $\mu = \left(\frac{30}{31}, \frac{28}{31}\right)$ .

• Forma pătratică asociată este

$$h_{f;a;\mu}(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 + 2z_2^2 + 2z_3^2,$$

iar variabilele  $z_1, z_2, z_3$  satisfac condițiile

$$d_A(g_1)(z_1, z_2, z_3) = 0 \quad \text{și} \quad d_A(g_2)(z_1, z_2, z_3) = 0,$$

adică sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 - z_2 - 3z_3 = 0 \end{cases}$$

cu soluția  $z_1 = \frac{2}{3}z_3$ ,  $z_2 = -\frac{7}{3}z_3$ ,  $z_3 \in \mathbf{R}$ .

• Forma pătratică  $h_{f;A;\mu}$  se poate scrie atunci ca o formă pătratică de o singură variabilă (i.e., o funcție de gradul II):  $h(z_3) = \frac{124}{9}z_3^2$ , care este evident pozitiv definită, astfel că punctul  $A = \left(\frac{44}{31}, \frac{1}{31}, \frac{-27}{31}\right)$  este un punct de minim local condiționat.

## 8.3 Probleme propuse

Determinați punctele de extrem local și valorile extreme locale corespunzătoare ale următoarelor funcții (domeniul de definiție se presupune că este cel maxim posibil):

1.  $f(x, y) = 7x^2 - 8xy + 3y^2 + 1$
2.  $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy$
3.  $f(x, y) = xy^2 + x^2y - 3xy$
4.  $f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y$
5.  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
6.  $f(x, y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$
7.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11$
8.  $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} (x > 0, y > 0, z > 0)$ .

Determinați punctele de extrem condiționat ale funcțiilor următoare

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| 9. $f(x, y) = xy$              | dacă $x + y = 1$                            |
| 10. $f(x, y) = x + 2y$         | dacă $x^2 + y^2 = 5$                        |
| 11. $f(x, y) = x^2 + y^2$      | dacă $3x + 2y = 6$                          |
| 12. $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ | dacă $x^2 + y^2 + z^2 = 9$                  |
| 13. $f(x, y, z) = xy^2z^3$     | dacă $x + y + z = 12 (x > 0, y > 0, z > 0)$ |
| 14. $f(x, y, z) = xyz$         | dacă $x + y + z = 5, xy + xz + yz = 8$      |



# 9

## Elemente de calcul integral

### 9.1 Primitive

**Definiție.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție definită pe un interval  $I \subseteq \mathbf{R}$ . Spunem că  $f$  **admite primitive pe**  $I$  dacă există o funcție  $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ , astfel încât

a)  $F$  este derivabilă pe  $I$ ;

b)  $F'(x) = f(x)$ ,  $(\forall)x \in I$ .

Funcția  $F$  se numește **o primitivă a funcției**  $f$ .

**Propoziție.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție care admite primitive pe  $I$ . Dacă  $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbf{R}$  sunt două primitive ale lui  $f$ , atunci există o constantă  $C \in \mathbf{R}$  cu proprietatea că  $F_2(x) = F_1(x) + C$ ,  $(\forall)x \in I$ .

**Definiție.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție care admite primitive. Mulțimea primitivelor lui  $f$  se numește **integrala nedefinită a funcției**  $f$ , notată

$$\int f(x) dx$$

Notând cu  $\mathcal{C}$  mulțimea funcțiilor constante definite pe  $I$ , dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$ , atunci

$$\int f(x) dx = F + \mathcal{C}.$$

**Propoziție.** O funcție care admite primitive are proprietatea lui Darboux.

**Propoziție.** O funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval.

**Propoziție.** Dacă  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$  sunt funcții care admit primitive, iar  $\lambda \in \mathbf{R}$ , atunci  $f + g$  și  $\lambda \cdot f$  sunt funcții care admit primitive. Pentru

acestea,

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx, \\ \int (\lambda \cdot f(x)) dx &= \lambda \cdot \int f(x) dx. \end{aligned}$$

**Propoziție. (formula de integrare prin părți)** Dacă  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$  sunt funcții derivabile cu derivate continue, atunci funcțiile  $f'g$  și  $fg'$  admit primitive pe  $I$  și

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

**Teoremă. (prima metodă de schimbare de variabilă)** Fie  $I, J \subseteq \mathbf{R}$  două intervale și  $\phi : I \rightarrow J$ ,  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții cu proprietățile:

- a)  $\phi$  este derivabilă pe  $I$ ;
- b)  $f$  admite primitive pe  $J$ .

Atunci funcția  $(f \circ \phi) \cdot \phi'$  admite primitve pe  $I$ , iar dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$ , atunci  $F \circ \phi$  este o primitivă a lui  $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ , astfel că

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = F(\phi(x)) + \mathcal{C}.$$

**Observație.** În aplicarea primei metode de schimbare de variabilă distingem:

- o funcție de integrat  $h : I \rightarrow \mathbf{R}$ ;
- se caută două funcții cu proprietățile din teorema de mai sus, astfel încât  $h(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$ ,  $(\forall)x \in I$ ;
- se caută o primitivă  $F$  a lui  $f$ ;
- se determină o primitivă  $H$  a funcției  $h$  prin  $H = F \circ \phi$ :

$$\int h(x) dx = \int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = F(\phi(x)) + \mathcal{C}.$$

**Teoremă. (a doua metodă de schimbare de variabilă)** Fie  $I, J \subseteq \mathbf{R}$  două intervale și  $\phi : I \rightarrow J$ ,  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții cu proprietățile:

- a)  $\phi$  este bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă;
- b) funcția  $h = (f \circ \phi) \cdot \phi'$  admite primitive.

Atunci funcția  $f$  admite primitive, iar dacă  $H$  este o primitivă a lui  $h$ , atunci  $H \circ \phi^{-1}$  este o primitivă a lui  $f$ , astfel că

$$\int f(x) dx = H(\phi^{-1}(x)) + \mathcal{C}.$$

**Observație.** În aplicarea celei de-a doua metode de schimbare de variabilă distingem:

- funcția de integrat  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ ;
- se caută  $\phi : I \rightarrow J$ , bijectivă, derivabilă și cu derivata nenulă;
- se construiește funcția  $h(t) = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ ;
- se caută o primitivă  $H$  a funcției  $h$ ;
- se obține o primitivă  $F$  a funcției  $f$  prin  $F = H \circ \phi^{-1}$ .

$$\int f(x) dx = \int h(\phi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\phi'(\phi(x))} dx = H(\phi^{-1}(x)) + C.$$

### 9.1.1 Primitive reductibile la primitivele funcțiilor raționale

În acest paragraf, prin  $R(x, y, z, \dots)$  vom înțelege o funcție rațională în variabilele  $x, y, z, \dots$ .

#### Integrale de forma $\int R(x, x^{r_1}, x^{r_2}, \dots) dx$

Dacă  $r_1 = \frac{p_1}{q_1}, r_2 = \frac{p_2}{q_2}, \dots \in \mathbf{Q}$ , iar  $n = c.m.m.m.c.$  al numerelor naturale  $q_1, q_2, \dots$ , se face substituția  $x = t^n$ .

#### Integrale de forma $\int R(e^{\lambda x}) dx, \lambda \in \mathbf{R}^*$

Se face substituția  $e^{\lambda x} = t$ .

#### Integrale de forma $\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \dots) dx$

Dacă  $n = c.m.m.m.c.$  al numerelor naturale  $n_1, n_2, \dots$ , se face substituția  $\sqrt[n]{ax+b} = t$ .

#### Integrale de forma $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$

Se face substituția  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \iff \frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ .

#### Integrale de forma $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$

Se face una dintre **substituțiile lui Euler**: i) Dacă  $a > 0$ , alegem  $t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$ .

ii) Dacă  $c > 0$  și  $0 \notin I$ , alegem  $t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}}{x}$ .

iii) Dacă  $b^2 - 4ac > 0$ ,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  și  $x_1 \notin I$ , alegem  $t = \sqrt{a \frac{x-x_2}{x-x_1}}$ .

De asemenea, se pot folosi **substituții trigonometrice**:

- i) Pentru  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ , alegem  $x = a \sin(t)$  sau  $x = a \cos(t)$ .
- ii) Pentru  $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ , alegem  $x = a \tan(t)$ .
- iii) Pentru  $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ , alegem  $x = a \sec(t)$ .

**Integrale de forma  $\int x^m(ax^n + b)^p dx$ , cu  $m, n, p \in \mathbf{Q}$**

Se face una dintre **substituțiile lui Cebîșev**:

- i) Dacă  $p \in \mathbf{Z}$  și  $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$ , alegem  $t = (x^n)^{\frac{1}{s}}$ .
- ii) Dacă  $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$  și  $p = \frac{r}{s}$ , alegem  $t = (ax^n + b)^{\frac{1}{s}}$ .
- iii) Dacă  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$  și  $p = \frac{r}{s}$ , alegem  $t = (a + bx^{-n})^{\frac{1}{s}}$ .

**Integrale de forma  $\int R(\sin(x), \cos(x)) dx$**

- i) Dacă  $R(-\sin(x), \cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x))$ , alegem  $t = \cos(x)$ .
- ii) Dacă  $R(\sin(x), -\cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x))$ , alegem  $t = \sin(x)$ .
- iii) Dacă  $R(-\sin(x), -\cos(x)) = R(\sin(x), \cos(x))$ , alegem  $t = \tan(x)$ .
- iv) În celelalte cazuri se poate folosi substituția  $t = \tan(x)$ .

## 9.2 Funcții integrabile. Integrala definită

**Definiție.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție, definită pe un interval  $[a, b]$ ,  $\Delta = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b)$  o diviziune a intervalului, iar  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  un sistem de puncte intermediare (i.e.  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $(\forall) i = \overline{1, n}$ ). **Suma Riemann** asociată funcției  $f$ , diviziunii  $\Delta$  și sistemului de puncte intermediare  $\xi$  este numărul real

$$\sigma_{\Delta}(f; \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

**Definiție.** O funcție  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  se numește **funcție integrabilă Riemann** dacă există un număr  $I \in \mathbf{R}$  astfel încât pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\eta_{\varepsilon} > 0$  cu proprietatea că pentru orice diviziune  $\Delta = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b)$  cu norma  $\|\Delta\| = \max_{i=\overline{1, n}}(x_i - x_{i-1}) < \eta_{\varepsilon}$  și orice sistem de puncte intermediare  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , cu  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $(\forall) i =$



$\overline{1, n}$  are loc inegalitatea  $|\sigma_{\Delta}(f; \xi) - I| < \varepsilon$ . În acest caz, numărul  $I$  se numește **integrala definită a funcției  $f$  pe intervalul  $[a, b]$**  și se notează

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

**Observație.** Pentru o funcție integrabilă Riemann  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , integrala  $I = \int_a^b f(x) dx$  este unic determinată.

**Observație.** Orice funcție integrabilă Riemann pe un interval este mărginită.

**Teoremă.** O funcție  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este integrabilă Riemann dacă și numai dacă pentru orice șir de diviziuni  $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ ,  $\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{l_n}^n = b)$  cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$  și orice sisteme de puncte intermediare asociate acestora  $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_{l_n}^n)$ , cu  $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ , atunci șirul sumelor Riemann corespunzătoare  $(\sigma_{\Delta_n}(f; \xi^n))_n$  este convergent. În acest caz limitele tuturor acestor șiruri coincid, iar dacă  $I \in \mathbf{R}$  este limita lor comună, atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sigma_{\Delta_n}(f; \xi^n) = I.$$

**Definiție.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  și  $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$ . Pentru fiecare  $i \in \overline{1, n}$ , notăm  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$  și  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ . **Suma inferioară Darboux asociată funcției  $f$  și diviziunii  $\Delta$**  este numărul  $s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ . **Suma superioară Darboux asociată funcției  $f$  și diviziunii  $\Delta$**  este numărul  $S_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ .

**Teoremă.** O funcție mărginită  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este integrabilă Riemann dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\eta_{\varepsilon} > 0$  cu proprietatea că pentru orice diviziune  $\Delta$  a intervalului  $[a, b]$  cu  $\|\Delta\| < \eta_{\varepsilon}$  are loc inegalitatea  $S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$ .

**Teoremă.** Orice funcție monotonă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este integrabilă.

**Teoremă.** Orice funcție continuă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este integrabilă.

**Teoremă. (Leibniz-Newton)** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție integrabilă Riemann care admite primitive, iar  $F$  este o primitivă a sa, atunci

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Propoziție. (liniaritatea integralei)** Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sunt două funcții integrabile, iar  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , atunci funcția  $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$  este integrabilă

și

$$\int_a^b (\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx + \mu \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

**Propoziție. (aditivitatea integralei)** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție integrabilă Riemann, iar  $c \in (a, b)$ , atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Corolar.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție integrabilă Riemann, atunci

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= 0; \\ \int_b^a f(x) dx &= - \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

**Propoziție.** Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sunt două funcții integrabile, cu proprietatea că  $f(x) \leq g(x)$ ,  $(\forall)x \in [a, b]$ , atunci

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**Teorema de medie** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție continuă, atunci există  $c \in (a, b)$ , astfel încât

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

**Teorema de existență a primitivelor pentru funcțiile continue** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție continuă,  $x_0 \in [a, b]$  și  $y_0 \in \mathbf{R}$ , atunci funcția  $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0$$

este o primitivă a funcției  $f$ , pentru care  $F(x_0) = y_0$ .

**Propoziție. (formula de integrare prin părți)** Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sunt două funcții derivabile, cu derivatele continue, atunci

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = (f(x) \cdot g(x))|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx,$$

unde  $(f(x) \cdot g(x))|_a^b = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$ .

**Propoziție. (formula de schimbare de variabilă(I))** Fie  $h : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție cu proprietatea că există două funcții  $\phi : [a, b] \rightarrow I$  și  $f :$

$I \longrightarrow \mathbf{R}$ , astfel încât  $\phi$  este derivabilă cu derivata continuă,  $f$  continuă, iar pentru orice  $x \in [a, b]$ ,  $h(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$ . Atunci

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt.$$

**Propoziție. (formula de schimbare de variabilă(II))** Fie  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și  $\phi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$  o funcție bijectivă și derivabilă, cu derivata nemulă. Atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt.$$

## 9.3 Aplicații ale integralelor definite

### 9.3.1 Aria subgraficului unei funcții continue și pozitive

**Definiție.** Fie  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă, cu  $f(x) \geq 0$ ,  $(\forall)x \in [a, b]$ . Mulțimea

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

se numește **subgraficul funcției  $f$** .

**Propoziție.** Fie  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă, cu  $f(x) \geq 0$ ,  $(\forall)x \in [a, b]$ . Atunci

$$Aria(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

**Corolar.** Dacă  $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$  sunt două funcții continue, cu  $g(x) \leq f(x)$ ,  $(\forall)x \in [a, b]$ , iar

$$\Gamma_{g,f} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \in [a, b], g(x) \leq y \leq f(x)\},$$

atunci

$$Aria(\Gamma_{g,f}) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

### 9.3.2 Lungimea graficului unei funcții derivabile cu derivata continuă

**Propoziție.** Fie  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție derivabilă cu derivata continuă. Lungimea graficului funcției  $f$  este atunci

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

### 9.3.3 Volumul unui corp de rotație

**Definiție.** Fie  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă, cu  $f(x) \geq 0$ ,  $(\forall)x \in [a, b]$ . Mulțimea

$$C_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

se numește **corp de rotație generat prin rotirea aubgraficului funcției  $f$  în jurul axei  $Ox$** .

**Propoziție.** Fie  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă, cu  $f(x) \geq 0$ ,  $(\forall)x \in [a, b]$ . Atunci volumul corpului de rotație  $C_f$  este

$$Vol(C_f) = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

### 9.3.4 Aria suprafețelor de rotație

**Definiție.** Fie  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^+$  o funcție derivabilă cu derivata continuă. Suprafața de rotație generată de rotirea graficului funcției  $f$  în jurul axei  $Ox$  este mulțimea

$$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} = f(x)\}.$$

**Propoziție.** Fie  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^+$  o funcție derivabilă cu derivata continuă. Aria suprafeței de rotație  $S_f$  este

$$Aria(S_f) = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

### 9.3.5 Centre de greutate

Def O placă plană  $P$  se numește **omogenă** dacă există o constantă  $\rho > 0$ , numită **densitate superficială**, astfel încât masa oricărei porțiuni  $A \subseteq P$  a plăcii  $P$  să fie dată de  $m(A) = \rho \cdot Aria(A)$ .

**Propoziție.** Dacă  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sunt plăci plane omogene cu aceeași densitate superficială și având interioarele disjuncte două câte două, de centre de greutate  $G_i(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , atunci reuniunea plăcilor are centrul de greutate  $G$  cu coordonatele date de

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot Aria(P_i)}{\sum_{i=1}^n Aria(P_i)}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot Aria(P_i)}{\sum_{i=1}^n Aria(P_i)}.$$

**Propoziție.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă, cu  $f(x) \geq 0$ ,  $(\forall)x \in [a, b]$ . Atunci placa plană omogenă  $P_f$  reprezentată prin subgraficul  $\Gamma_f$  al funcției  $f$  are centrul de greutate  $G$  cu coordonatele date de

$$x_G = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx}, \quad y_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b f^2(x) \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx}.$$

**Propoziție.** Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții continue, cu proprietatea că  $g(x) \leq f(x)$ ,  $(\forall)x \in [a, b]$ . Placa omogenă  $P_{g,f}$  reprezentată de mulțimea  $\Gamma_{g,f}$  are atunci coordonatele centrului de greutate date de

$$x_G = \frac{\int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) \, dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx}, \quad y_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) \, dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx}.$$



# 10

## Ecuații diferențiale

### 10.1 Introducere în teoria ecuațiilor diferențiale

Fenomenele din natură și societate au adesea un pronunțat caracter dinamic, ele fiind procese evolutive în timp conform unor legi proprii. Exemple de asemenea fenomene pot fi evoluția unui grup biologic sau social, precum și o reacție chimică.

Studiul unui asemenea proces evolutiv presupune urmărirea unui număr de parametri care caracterizează procesul sau fenomenul respectiv. În limbaj matematic, acest grup de parametri reprezintă starea sistemului sau a procesului și formează un grup de funcții dependente de timp. De exemplu, starea unei populații poate fi descrisă prin numărul de indivizi din care este compusă. Starea unei reacții chimice poate fi dată, după caz, de temperatura sau concentrația uneia sau mai multor substanțe care participă la reacție.

Starea sistemului apare relativ rar ca o funcție explicită de timp, ci, mult mai adesea, ca soluție a unei anumite ecuații care descrie o lege ce guvernează fenomenul respectiv.

Modelarea matematică a unui fenomen dinamic revine la stabilirea acestor ecuații, care sunt în majoritatea cazurilor ecuații diferențiale.

**Definiție.** Se numește **ecuație diferențială de ordinul I** o ecuație de forma

$$F(x, y, y') = 0, \quad (10.1)$$

unde  $F : D \subseteq \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$  este o funcție,  $x \in I = (a, b) \subseteq \mathbf{R}$  este variabila independentă,  $y = y(x)$  este funcția necunoscută, iar  $y' = y'(x)$  este derivata de ordinul I a funcției necunoscute.

**Observație.** Relația (10.1) se numește **forma generală(implicită)** a ecuației diferențiale.

**Definiție.** Dacă ecuația (10.1) se poate transcrie în forma

$$y' = f(x, y), \quad (10.2)$$

atunci aceasta se numește **forma explicită(sau normală)** a ecuației diferențiale.

**Definiție.** Se numește **soluție(sau integrală)** a ecuației diferențiale (10.1) sau (10.2) o funcție  $y = y(x)$ ,  $y : I \subseteq \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ , derivabilă pe  $I$  pentru care

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad (\forall)x \in I.$$

**Definiție.** Se numește **soluție generală(sau integrală generală)** a ecuației diferențiale (10.1) o familie de funcții  $\{\phi(x; C) | C \in \mathbf{R}\}$  pentru care

$$F(x, \phi(x; C), \phi'(x; C)) = 0, \quad (\forall)x \in I, C \in \mathbf{R}.$$

**Definiție.** Se numește **soluție particulară** a ecuației diferențiale (10.1) o funcție  $y = \phi_1(x)$  care se obține din soluția generală dând o valoare particulară constantei reale  $C$ .

**Definiție.** O soluție a ecuației diferențiale, care nu se poate obține prin particularizarea constantei dintr-o soluție generală, se numește **soluție singulară**.

**Observație.** A rezolva sau a integra o ecuație diferențială înseamnă determinarea tuturor funcțiilor  $y = y(x)$  care verifică, pentru  $x$  dintr-o anumită mulțime o relație de forma (10.1).

**Definiție.** Graficul unei soluții  $y = y(x)$  a ecuației se numește **curbă integrală** a ecuației date.

**Definiție.** Prin **problema Cauchy** atașată unei ecuații (10.1) se înțelege problema determinării acelei soluții ale ecuației care verifică o egalitate de forma

$$y(x_0) = y_0, \quad (10.3)$$



unde  $x_0 \in I$ , iar  $y_0 \in \mathbf{R}$  sunt fixate. Relația (10.3) se numește **condiție inițială**.

**Observație.** O problemă Cauchy constă deci dintr-o ecuație diferențială și o condiție inițială:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (10.4)$$

**Teoremă.** Fie ecuația diferențială  $y' = f(x, y)$ , unde  $f : D \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ . Dacă  $f$  satisface condițiile

(i)  $f$  este continuă pe  $D$ ;

(ii)  $f$  admite derivata parțială  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continuă pe  $D$ ,

atunci există un interval  $(x_0 - h, x_0 + h)$  și o funcție unică  $y = y(x)$  definită pe acest interval, care să fie soluție a problemei Cauchy.

**Observație.** Din punct de vedere geometric, rezolvarea problemei Cauchy revine la determinarea unei curbe integrale a ecuației care să treacă prin  $(x_0, y_0)$

**Observație.** Dacă  $y = \phi(x; C)$  este o soluție generală a ecuației diferențiale, atunci problema Cauchy se poate rezolva dacă există  $C \in \mathbf{R}$  cu proprietatea că  $y_0 = \phi(x_0; C)$ .

## 10.2 Ecuații diferențiale de ordinul I

Primele ecuații diferențiale de ordinul I au fost rezolvate în secolul XVII, odată cu apariția calculului integral:

$$y' = f(x) \quad , \quad x \in I, \quad (10.5)$$

unde  $f : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție continuă. Soluția acestei ecuații este

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

### 10.2.1 Ecuații cu variabile separabile

**Definiție.** Se numește **ecuație cu variabile separabile** o ecuație de forma

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad (10.6)$$

unde  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  și  $g : (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$  sunt funcții continue, iar  $g$  nu se anulează în nici un punct din intervalul  $(c, d)$  ( $a, b, c, d \in \overline{\mathbf{R}}$ ).

**Observație.** Funcția  $g$  fiind continuă și nenulă, păstrează semn constant pe intervalul  $(c, d)$ . Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că  $g > 0$  pe  $(c, d)$  (în caz contrar, înlocuim  $f$  și  $g$  cu  $-f$ , respectiv  $-g$ ). Fie  $y = y(x)$ ,  $y : (a, b) \rightarrow (c, d)$ , o soluție a ecuației (10.6). Atunci putem "separa variabilele":

$$y' = f(x) \cdot g(y) \iff \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), (\forall)x \in (a, b).$$

Deoarece  $f$  este continuă,  $f$  și fie  $F : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  o primitivă a sa. De asemenea, fie  $G : (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$  o primitivă a funcției  $\frac{1}{g}$ . Rezultă că  $G' = \frac{1}{g}$ ,  $G \circ y : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  este derivabilă și

$$(G \circ y)'(x) = G'(y(x)) \cdot y'(x) = \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) = f(x), (\forall)x \in (a, b),$$

astfel că  $(G \circ y)' = f$ . Dar atunci  $(G \circ y)' = F'$ , astfel că există o constantă reală  $C \in \mathbf{R}$  cu proprietatea că  $G \circ y = F + C$ . Rezultă că

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C), (\forall)x \in I \subseteq (a, b). \quad (10.7)$$

Reciproc, fie  $y = y(x)$  de forma (10.7). Atunci

$$\begin{aligned} y'(x) &= (G^{-1}(F(x) + C))' = (G^{-1})'(F(x) + C) \cdot (F(x) + C)' = \\ &= \frac{1}{G'(G^{-1}(F(x) + C))} \cdot F'(x) = \frac{1}{G'(y(x))} \cdot f(x) = \frac{f(x)}{(\frac{1}{g})(y(x))} = \\ &= f(x) \cdot g(y(x)), \end{aligned}$$

astfel că  $y = y(x)$  este soluție a ecuației (10.6). Am demonstrat astfel următoarea

**Propoziție.** Fie  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  și  $g : (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții continue cu  $g \neq 0$  pe  $(c, d)$ . Atunci ecuația cu variabile separabile

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

are soluția generală

$$y = y(x), \quad y(x) = G^{-1}(F(x) + C), (\forall)x \in I \subseteq (a, b),$$

unde  $F : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  este o primitivă a funcției  $f$ ,  $G : (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$  este o primitivă a funcției  $\frac{1}{g}$ , iar  $C \in \mathbf{R}$  este o constantă reală.

**Observație.** Când avem de rezolvat o ecuație diferențială cu variabile separabile, de forma  $y' = f(x) \cdot g(y)$ , procedăm astfel:

- 1) separăm variabilele:  $\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$ .
- 2) integrăm și obținem  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$ , egalitate care este echivalentă cu  $G \circ y = F + C$ ,  $C \in \mathbf{R}$ .
- 3) Scriem soluția generală

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C), \quad C \in \mathbf{R}.$$

- 4) Dacă avem date și condiții inițiale, i.e. avem de rezolvat problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

soluția se obține considerând în soluția generală  $C = G(y_0) - F(x_0)$ , sau, echivalent rezolvând în raport cu  $y = y(x)$  ecuația

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(s) ds. \quad (10.8)$$

**Exemplu.** 1) Să considerăm ecuația  $y' = 2x \cdot (1 + y^2)$ . Pentru a o rezolva, separăm în primul rând variabilele:

$$\frac{y'}{1 + y^2} = 2x.$$

Prin integrare, avem că

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int 2x dx,$$

de unde, ținând cont de

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctg(y) + C \quad \text{și} \quad \int 2x dx = x^2 + C,$$

obținem că

$$\arctg(y(x)) = x^2 + C, \quad \text{cu } C \in \mathbf{R}.$$

Soluția generală a ecuației date este atunci

$$y(x) = tg(x^2 + C), \quad C \in \mathbf{R}.$$

- 2) Să considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x \cdot y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Determinăm soluția generală a ecuației diferențiale din cadrul sistemului:

$$\begin{aligned} y' = 2x \cdot y &\iff \frac{y'}{y} = 2x \implies \int \frac{dy}{y} = \int 2x \, dx \iff \\ &\iff \ln(|y|) = x^2 + C, \, C \in \mathbf{R} \iff y = \pm e^{x^2+C}, \, C \in \mathbf{R} \\ &\iff y = \pm e^C \cdot e^{x^2}, \, C \in \mathbf{R} \iff y(x) = K \cdot e^{x^2}, \, K = \pm e^C \in \mathbf{R}^*. \end{aligned}$$

Pentru a rezolva problema Cauchy, determinăm constanta nenulă  $K$  astfel încât să fie verificată condiția inițială  $y(1) = 2$ :

$$y(1) = 2 \iff K \cdot e^{1^2} = 2 \iff K \cdot e = 2 \iff K = \frac{2}{e}.$$

Obținem astfel soluția

$$y(x) = \frac{2}{e} \cdot e^{x^2} = 2e^{x^2-1}.$$

**Observație.** Am fi putut rezolva problema Cauchy și direct, fără să mai scriem soluția generală a ecuației diferențiale, folosind egalitatea integralelor definite:

$$\begin{aligned} \int_2^{y(x)} \frac{dt}{t} &= \int_1^x 2s \, ds \iff \ln(y(x)) - \ln(2) = x^2 - 1^2 \iff \\ &\iff \ln(y(x)) = \ln(2) + x^2 - 1 \iff y(x) = e^{\ln(2)+x^2-1} \iff \\ &\iff y(x) = 2e^{x^2-1}. \end{aligned}$$

### 10.2.2 Ecuații diferențiale omogene

**Definiție.** O ecuație diferențială se numește **ecuație diferențială omogenă** dacă poate fi adusă la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (10.9)$$

Pentru a rezolva ecuația se consideră funcția auxiliară

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}. \quad (10.10)$$

Din relația de mai sus obținem succesiv:

$$y(x) = x \cdot z(x) \implies y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x).$$

Înlocuind în relația (10.9), ținând cont de (10.10), obținem atunci ecuația  $z(x) + x \cdot z'(x) = f(z(x))$ , sau, echivalent,

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}, \quad (10.11)$$

care este o ecuație cu variabile separabile. Rezolvând această ecuație se găsesc soluțiile  $z = z(x)$ , care ne permit, cu ajutorul relației (10.10) să scriem soluțiile ecuației omogene (10.9):

$$y = y(x) = x \cdot z(x).$$

**Exemplu.** Să considerăm ecuația  $2xyy' = x^2 + 3y^2$ . Împărțind ecuația prin  $x^2$  se obține

$$\begin{aligned} \frac{2xyy'}{x^2} = 1 + \frac{3y^2}{x^2} &\iff 2\frac{y}{x} \cdot y' = 1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 \iff \\ &\iff y' = \frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}, \end{aligned}$$

care reprezintă o ecuație diferențială omogenă. Cu notația  $z(x) = \frac{y(x)}{x}$  obținem ecuația cu variabile separabile

$$z' = \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{1+3z^2}{2z} - z \right).$$

Pentru rezolvarea acesteia scriem succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{2z \cdot z'}{1+z^2} = \frac{1}{x} &\implies \int \frac{2z}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx \iff \\ &\iff \ln(1+z^2) = \ln(|x|) + C, C \in \mathbf{R} \iff 1+z^2 = e^{\ln(|x|)+C}, C \in \mathbf{R} \iff \\ &\iff z^2 = \pm x \cdot e^C - 1, C \in \mathbf{R} \iff z = \pm \sqrt{K \cdot x - 1}, K = \pm e^C \in \mathbf{R}^*. \end{aligned}$$

Putem scrie atunci soluția ecuației inițiale:

$$y(x) = \pm \sqrt{K \cdot x - 1}, \quad K \in \mathbf{R}^*.$$

Dacă în plus am avea și o condiție inițială, ca de exemplu  $y(1) = 2$ , determinăm constanta  $K$  încât să fie verificată această condiție:

$$\begin{aligned} \pm 1 \cdot \sqrt{K \cdot 1 - 1} = 2 &\implies \sqrt{K - 1} = 2 \iff K - 1 = 4 \iff \\ &\iff K = 5. \end{aligned}$$

Soluția problemei Cauchy este atunci

$$y(x) = x\sqrt{5x - 1}.$$

### 10.2.3 Ecuații diferențiale liniare de ordinul I

**Definiție.** O ecuație diferențială de forma

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x), \quad (10.12)$$

în care  $P, Q : I \subseteq \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  sunt două funcții continue, se numește **ecuație diferențială liniară de ordinul I**.

**Observație.** Denumirea provine de la faptul că atât funcția necunoscută  $y$ , cât și derivata sa  $y'$  apar numai la puterea întâi.

**Observație.** Dacă  $Q(x) = 0$ , ecuația se numește **ecuație liniară omogenă de ordinul I**, în caz contrar ea numindu-se **ecuație liniară neomogenă de ordinul I**.

Pentru rezolvarea ecuației (10.12) vom folosi **metoda variației constantelor**:

- 1) Vom determina soluția generală  $y = \phi(x; C)$  a ecuației omogene  $y' + P(x) \cdot y = 0$ , după care
- 2) Vom înlocui constanta  $C$  cu o funcție  $C(x)$ , pe care o vom determina în așa fel încât funcția  $y = \phi(x; C(x))$  să fie soluție a ecuației neomogene  $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ .

Fie deci ecuația omogenă

$$y' + P(x) \cdot y = 0.$$

Aceasta este o ecuație cu variabile separabile, pentru care putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned} y' = -P(x) \cdot y &\iff \frac{y'}{y} = -P(x) \implies \int \frac{dy}{y} = -\int P(x) dx \implies \\ &\implies \ln(|y|) = -\int P(x) dx + C, C \in \mathbf{R} \iff \\ &\iff y(x) = \pm e^C \cdot e^{-\int P(x) dx}, C \in \mathbf{R} \iff \\ &\iff y(x) = K \cdot e^{-\int P(x) dx}, K = \pm e^C \in \mathbf{R}^* \end{aligned}$$

Pentru ecuația neomogenă căutăm acum o soluție de forma

$$y(x) = K(x) \cdot e^{-\int P(x) dx},$$

prin "variarea constantei"  $K$ . Pentru funcția  $y$  de mai sus avem

$$y'(x) = K'(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} + K(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \cdot (-P(x)).$$

Înlocuind în ecuația (10.12) obținem

$$\begin{aligned} &K'(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} + K(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \cdot (-P(x)) + \\ &+ K(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \cdot P(x) = Q(x) \iff \\ &\iff K'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} \implies \\ &\implies K(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + K_1, K_1 \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Obținem atunci soluția generală a ecuației (10.12):

$$y(x) = \left( \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + K_1 \right) \cdot e^{-\int P(x) dx}, K_1 \in \mathbf{R}.$$

**Exemplu.** Să considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2xy = x^3 \\ y(0) = \frac{e-1}{2} \end{cases}$$

Ecuația diferențială din cadrul problemei este una liniară de ordinul I, cu  $P(x) = 2x$  și  $Q(x) = x^3$ . Soluția sa generală va fi de forma

$$y(x) = \left( \int x^3 \cdot e^{\int 2x dx} dx + K \right) \cdot e^{-\int 2x dx}, K \in \mathbf{R}.$$

Avem

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

și

$$\begin{aligned} \int x^3 \cdot e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int x^2 \cdot (2x \cdot e^{x^2}) dx = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot (e^{x^2})' dx = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 \cdot e^{x^2} - \int (x^2)' \cdot e^{x^2} dx) = \frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} (x^2 - 1), \end{aligned}$$

astfel că

$$y(x) = \left( \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} (x^2 - 1) + K \right) \cdot e^{-x^2} = \frac{1}{2} (x^2 - 1) + K \cdot e^{-x^2}, K \in \mathbf{R}.$$

Determinăm acum constanta  $K \in \mathbf{R}$ , astfel încât să fie verificată condiția inițială  $y(0) = \frac{e-1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) + K \cdot e^0 = \frac{e-1}{2} \iff K = \frac{e}{2},$$

și soluția problemei Cauchy este

$$y(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 1) + \frac{e}{2} \cdot e^{-x^2} = \frac{1}{2} (x^2 - 1 + e^{1-x^2}).$$

### 10.2.4 Ecuații diferențiale de tip Bernoulli

**Definiție.** O ecuație diferențială de forma

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^\alpha, \quad (10.13)$$

în care  $P, Q : I \subseteq \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  sunt două funcții continue, cu  $Q$  neidentic nulă, iar  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ , se numește ecuație diferențială de tip Bernoulli.

**Observație.** Valorile exceptate ale exponentului  $\alpha$  corespund unor ecuații liniare de ordinul I (omogenă pentru  $\alpha = 1$ , respectiv neomogenă pentru  $\alpha = 0$ ).

Pentru rezolvarea ecuației (10.13), împărțim ecuația prin  $y^\alpha$ , obținând

$$y' \cdot y^{-\alpha} + P(x) \cdot y^{1-\alpha} = Q(x),$$

sau, echivalent,

$$(1 - \alpha)y' \cdot y^{-\alpha} + (1 - \alpha)P(x) \cdot y^{1-\alpha} = (1 - \alpha)Q(x),$$

Considerăm funcția auxiliară  $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$ , pentru care  $z' = (1 - \alpha)y'y^{-\alpha}$ . Înlocuind în relația de mai sus, avem că

$$z' + (1 - \alpha)P(x) \cdot z = (1 - \alpha)Q(x),$$

care este o ecuație liniară de ordinul I în raport cu funcția necunoscută  $z = z(x)$ . Rezolvând această ecuație, din soluția sa  $z = z(x)$  putem obține o soluție  $y = y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  a ecuației de tip Bernoulli inițiale.

**Exemplu.** Să considerăm ecuația diferențială

$$y' + 4xy = x\sqrt{y}.$$

Aceasta este o ecuație de tip Bernoulli, în care  $P(x) = 4x$ ,  $Q(x) = x$ , iar  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Pentru  $z = z(x) = y(x)^{1-\alpha} = \sqrt{y(x)}$  obținem atunci ecuația liniară

$$z' + 2xz = \frac{x}{2},$$

a cărei soluție generală are forma

$$z(x) = \left( \int \frac{x}{2} \cdot e^{\int 2x dx} + K \right) \cdot e^{-\int 2x dx}, \quad K \in \mathbf{R}.$$

Obținem

$$z(x) = \left( \frac{1}{4} \cdot e^{x^2} + K \right) \cdot e^{-x^2} = \frac{1}{4} + K \cdot e^{-x^2}.$$

Prin urmare,

$$y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}} = (z(x))^2 = \left( \frac{1}{4} + K \cdot e^{-x^2} \right)^2, \quad K \in \mathbf{R}.$$



## 10.3 Modele matematice ale creșterii populației

Dacă  $p(t)$  este populația unei anumite specii dintr-un anumit areal la un moment  $t$ , iar  $d(p, t)$  este diferența dintre rata natalității și cea a mortalității, atunci în ipoteza că populația este izolată (i.e. nu au loc emigrări și imigrări), viteza de creștere a populației va fi

$$p'(t) = d(p, t).$$

### 10.3.1 Modelul lui Malthus

Un model simplificat de creștere, propus de Malthus, presupune că această viteză de creștere este proporțională cu  $p$ :

$$p'(t) = \alpha \cdot p(t) \quad , \text{ cu } \alpha \in \mathbf{R}, \text{ constant.}$$

Considerând că într-un moment  $t_0$ , populația este  $p_0$ , obținem o problemă Cauchy:

$$\begin{cases} p'(t) = \alpha \cdot p(t) \\ p(t_0) = p_0 \end{cases}$$

Soluția acestei probleme se obține separând variabilele  $t$  și  $p$ , și integrând:

$$\begin{aligned} \frac{p'(t)}{p(t)} = \alpha &\implies \int_{p_0}^{p(t)} \frac{dp}{p} = \int_{t_0}^t \alpha ds \iff \\ \iff \ln(p(t)) - \ln(p_0) &= \alpha(t - t_0) \iff \ln(p(t)) = \ln(p_0) + \alpha(t - t_0) \iff \\ \iff p(t) &= p_0 \cdot e^{\alpha(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Ultima relație reprezintă **legea malthusiană de creștere a populației**.

### 10.3.2 Modelul lui Verhulst

Un alt model, mai realist, a fost propus de biologul olandez Verhulst în 1837. Modelul său ia în considerare și interacțiunile dintre indivizii unei specii (mai exact, efectul inhibitor al aglomerării). El a considerat o ecuație de forma

$$p'(t) = \alpha \cdot p(t) - \beta \cdot p^2(t),$$

în care  $\alpha, \beta > 0$  sunt constante, cu  $\beta$  foarte mică în comparație cu  $\alpha$ . Considerând că la un moment  $t_0$ , populație este  $p_0$ , se obține problema Cauchy

$$\begin{cases} p'(t) = \alpha \cdot p(t) - \beta \cdot p^2(t) \\ p(t_0) = p_0 \end{cases}$$

Ecuția diferențială din cadrul problemei,

$$p' - \alpha \cdot p = -\beta \cdot p^2,$$

este o ecuație Bernoulli cu coeficienți constanți  $P(t) = -\alpha$  și  $Q(t) = -\beta$ , de exponent  $e = 2$ . Trecând la funcția auxiliară  $z = z(t)$ ,  $z = p^{1-e} = p^{1-2} = \frac{1}{p}$ , obținem ecuația liniară neomogenă cu coeficienți constanți

$$z' + (1 - e)P(t) \cdot z = (1 - e)Q(t) \iff z' + \alpha \cdot z = \beta,$$

pentru care soluția generală este dată de

$$\begin{aligned} z(t) &= \left( \int \beta \cdot e^{\int \alpha dt} dt + K \right) \cdot e^{-\int \alpha dt} = \left( \int \beta \cdot e^{\alpha t} dt + K \right) \cdot e^{-\alpha t} = \\ &= \left( \frac{\beta}{\alpha} \cdot e^{\alpha t} + K \right) \cdot e^{-\alpha t} = \frac{\beta}{\alpha} + K \cdot e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Folosind condiția inițială  $p(t_0) = p_0$ , rezultă că  $z(t_0) = \frac{1}{p_0}$ , astfel că

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} + K \cdot e^{-\alpha t_0} &= \frac{1}{p_0} \implies \\ \implies K &= \left( \frac{1}{p_0} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot e^{\alpha t_0} = \frac{1}{\alpha p_0} \cdot (\alpha - \beta p_0) \cdot e^{\alpha t_0} \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha p_0} \cdot (\alpha - \beta p_0) \cdot e^{\alpha t_0} \cdot e^{-\alpha t} = \\ &= \frac{1}{\alpha p_0} \cdot \left( \beta p_0 + (\alpha - \beta p_0) \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \right) \end{aligned}$$

și obținem legea lui Verhulst:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{z(t)} = \frac{\alpha p_0}{\beta p_0 + (\alpha - \beta p_0) \cdot e^{-\alpha(t-t_0)}} = \\ &= \frac{\alpha p_0 \cdot e^{\alpha(t-t_0)}}{\beta p_0 \cdot e^{\alpha(t-t_0)} + (\alpha - \beta p_0)} \end{aligned}$$

# Bibliografie

- [1] **Angel,A.R., Porter,S.R.**, *A Survey of Mathematics with Applications*, Addison-Wesley, New York, 1997
- [2] **Batschelet,E.**, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971
- [3] **Creț,F.**, *Elemente de Modelare și Matematici Speciale*, Editura MIRTON, Timișoara, 2000
- [4] **Creț,F., Otiman,P.**, *Elemente de Matematici aplicate în economia agroalimentară*, Editura Agroprint, Timișoara, 2002
- [5] **Creț,F., Rujescu,C., Boldea,M., Rotariu,L., Ivan,M.**, *Elemente de Matematici Speciale, teorie și aplicații*, Editura MIRTON, Timișoara, 2000
- [6] **M.Craioveanu, I.D.Albu** *Geometrie afină și euclidiană*, Editura Facla, Timișoara, 1982.
- [7] **G.Chidioșan, D.Criveanu, Gh.David, M.Popa** *Culegere de Probleme–Matematici și Cercetări operaționale*, Tipografia Universității din Timișoara, Timișoara, 1990.
- [8] **J.Curwin, R.Slater** *Quantitative Methods for Bussiness Decisions*, Chapman & Hall, London, 1994.
- [9] **B.Demidovich** *Problems in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow, 1976.
- [10] **D.K.Faddeev, I.S.Sominskii** *Culegere de probleme de algebră superioară*, Editura Tehnică, București, 1954.

- [11] **D.Flondor, N.Donciu** *Algebră și Analiză matematică–culegere de probleme*, Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
- [12] **Garfunkel,S., Moore,D.S.**, *Introduction to Contemporary Mathematics*, W.H.Freeman & Co, New York, 1988
- [13] **S.I.Grossman** *Multivariable Calculus, Linear Algebra, and Differential Equations*, Harcourt Brace Jovanovich, 1986.
- [14] **Iaglom,A.M., Iaglom,I.M.**, *Probleme nelementare tratate elementar*, Editura Tehnică, București, 1983
- [15] **Ion D.Ion, N.Radu** *Algebră*, Editura didactică și pedagogică, București, 1991.
- [16] **Gh.Ivan** *Inițiere în Algebra liniară*, Tipografia Universității din Timișoara, Timișoara, 1993.
- [17] **Mihoc, M.** *Matematici aplicate în economie(Algebră liniară)*, Tipografia Universității "Babeș-Bolyai" din Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 1995.
- [18] **Miller,C.D., Heeren,V.E., Hornsby,E.J.**, *Mathematical Ideas*, Scott, Foresman & Co, London, 1990
- [19] **Muja,A., Diatcu,E.**, *Matematica pentru economiști*, Editura Victor, București, 1999
- [20] **M.Nicolescu, N.Diculeanu, S.Marcus** *Analiză Matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1971.
- [21] **Orman,G.V.**, *Capitole de matematici aplicate*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 1999
- [22] **I.P.Popescu** *Geometrie afină și euclidiană*, Editura Facla, Timișoara, 1984.
- [23] **Popescu,O., Raischi,C., Bădin,V., Butescu,V., Firică,O., Toma,M., Woinaroski,S.**, *Matematici aplicate în economie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993

- [24] **M.Postnikov** *Linear Algebra and Differential Geometry ("Lecture Notes in Geometry"-Semester II)*, Editura Mir, Moscova, 1982.
- [25] **I.Purcaru** *Matematici generale și elemente de optimizare*, Editura Economică, București, 1997.
- [26] **Pusztai,A., Ardelean,Gh.,** *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, Ghid de utilizare*, Editura tehnică, București, 1994
- [27] **Rus,I.A., Iancu,C.,** *Modelare matematică*, Casa de editură TRANSILVANIA PRESS, Cluj-Napoca, 2000
- [28] **Șabac,I.Gh.,** *Matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965
- [29] **P.Stanciu, D.Criveanu, Gh.David, W.Fuchs** *Matematici aplicate în economie*, Editura Facla, Timișoara, 1981.
- [30] **Tan,S.T.,** *College Mathematics, for the managerial and social sciences*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1983
- [31] **A.Thuizat, G.Girault** *Algèbre linéaire et applications*, Collection Durrande, Paris, 1977.
- [32] **C.Udriște, C.Radu, C.Dicu, O.Mălăncioiu** *Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura didactică și pedagogică, București, 1981.
- [33] **Vasiliu,D.P., Vasiliu,A.M.D.,** *Metode cantitative în probleme economice*, Editura "Tribuna economică", București, 2000
- [34] **Vogel,A.,** *Funktionentafeln und statistische Tabellen*, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, 1979
- [35] **Waner,S., Costenoble,S.R.,** *Finite Mathematics applied to the real world*, Harper Collins College Publishers, New York, 1996