FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 2

1 Breviar

Pentru orice e şi orice Γ, notăm cu $e \vDash \Gamma$ (şi spunem că e **satisface** Γ sau e este **model** pentru Γ) dacă, pentru orice $\varphi \in \Gamma$, $e \vDash \varphi$. Pentru orice Γ, notăm cu $Mod(\Gamma)$ mulţimea modelelor lui Γ.
Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \Gamma$ şi **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \Gamma$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem că $e \not\vDash \Gamma$. O mulţime Γ se numeşte **finit satisfiabilă** dacă există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită satisfiabilă.
Pentru orice mulţime Γ de formule şi orice formulă φ, notăm $\Gamma \vDash \varphi$ (şi spunem că **din** Γ **se deduce semantic** φ sau că φ **este consecinţă semantică a lui** Γ) dacă pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \Gamma$ avem $e \vDash \varphi$. De asemenea, notăm $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ (şi citim **din** Γ **se deduce semantic finit** φ) faptul că există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \varphi$.
Pentru orice $v \in V$ şi $e : V \to \{0, 1\}$, vom defini

$$v^e := \begin{cases} v, & \text{dacă } e(v) = 1, \\ \neg v, & \text{dacă } e(v) = 0, \end{cases}$$

şi, clar, $e^+(v^e) = 1$.

2 Exerciţii

(S2.1) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;

(ii) $\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))$.

(S2.2) Să se găsească toate modelele fiecăreia dintre mulţimile de formule:

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

(S2.3) Fie $f : V \to \{0, 1\}$. Găsiţi Γ astfel încât $Mod(\Gamma) = \{f\}$.

(S2.4)

(i) Să se arate că mulţimea modelelor unei mulţimi satisfiabile şi finite de formule este infinită.

(ii) Găsiţi o mulţime (infinită) de formule cu proprietatea că nu există o mulţime finită de formule care să aibă exact aceleaşi modele.

(S2.5) Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ avem că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

(S2.6) Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

(V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

(V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$.