TEHNICA DE PROGRAMARE "BACKTRACKING"

1. Prezentare generală

Tehnica de programare Backtracking este utilizată, de obicei, pentru determinarea tuturor soluţiilor unei probleme într-un mod progresiv, astfel încât să se evite generarea întregului spaţiu al soluţiilor problemei. Practic, soluţiile se construiesc componentă cu componentă şi se testează la fiecare pas validitatea lor (se verifică dacă sunt *soluţii parţiale*), iar în cazul în care se constată faptul că nu se poate obţine o soluţie a problemei plecând de la soluţia parţială curentă, aceasta este abandonată. Astfel, se evită o *rezolvare de tip forţă-brută* a problemei, adică generarea şi testarea tuturor soluţiilor posibile pentru a determina soluţiile problemei. Totuşi, complexitatea algoritmilor de tip Backtracking rămâne una ridicată, deoarece se va genera şi testa un procent semnificativ din întregul spaţiu al soluţiilor.

De exemplu, să considerăm problema generării tuturor permutărilor mulţimii $A = \{1,2,\dots,n\}$ pentru $n = 6$.

O rezolvare de tip forţă-brută presupune generarea tuturor posibilelor soluţii, adică a tuplurilor de forma $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ cu $p_1, \dots, p_6 \in \{1,2,\dots,6\}$, şi selectarea celor care sunt permutări, adică au toate valorile diferite între ele ($p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_6$). Se observă foarte uşor faptul că se vor genera şi testa $6^6 = 46656$ tupluri, din care doar $6! = 720$ vor fi permutări, deci eficienţa acestei metode este foarte mică - în jurul unui procent de 1.5%! Eficienţa scăzută a acestei metode este indusă de faptul că se generează multe tupluri inutile, care nu sunt sigur permutări. De exemplu, se vor genera toate tuplurile de forma $p = (1,1, p_3, p_4, p_5, p_6)$, adică $6^4 = 1296$ de tupluri inutile deoarece $p_1 = p_2$, deci, evident, aceste tupluri nu pot fi permutări!

O rezolvare de tip Backtracking presupune generare progresivă a soluţiilor, evitând generarea unor tupluri inutile, astfel (vom ţine cont de faptul că $p_1, \dots, p_6 \in \{1,2,\dots,6\}$):

- $p = (1)$ – este o soluţie parţială (componentele sale sunt diferite între ele, deci poate fi o permutare), dar nu este o soluţie a problemei (nu are 6 componente), astfel că trebuie să adăugăm cel puţin încă o componentă;
- $p = (1,1)$ – nu este o soluţie parţială (componentele sale sunt egale, deci nu vom obţine o permutare indiferent de ce valori vom adăuga în continuare), astfel că nu are sens să adăugăm încă o componentă, ci vom genera următorul tuplu tot cu două componente;
- $p = (1,2)$ – este o soluţie parţială, dar nu este o soluţie a problemei;
- $\left.\begin{matrix} p = (1,2,1) \\ p = (1,2,2) \end{matrix}\right\}$ – nu sunt soluţii parţiale;
- $p = (1,2,3)$ – este o soluţie parţială, dar nu este o soluţie a problemei;
- $\left.\begin{matrix} p = (1,2,3,1) \\ p = (1,2,3,2) \\ p = (1,2,3,3) \end{matrix}\right\}$ – nu sunt soluţii parţiale;
- $p = (1,2,3,4)$ – este o soluţie parţială, dar nu este o soluţie a problemei;

- $\left.\begin{matrix} p=(1,2,3,4,1) \\ p=(1,2,3,4,2) \\ p=(1,2,3,4,3) \\ p=(1,2,3,4,4) \end{matrix}\right\}$ – nu sunt soluţii parţiale;
- $p=(1,2,3,4,5)$ – este o soluţie parţială, dar nu este o soluţie a problemei;
- $\left.\begin{matrix} p=(1,2,3,4,5,1) \\ p=(1,2,3,4,5,2) \\ p=(1,2,3,4,5,3) \\ p=(1,2,3,4,5,4) \\ p=(1,2,3,4,5,5) \end{matrix}\right\}$ – nu sunt soluţii parţiale;
- $p=(1,2,3,4,5,6)$ – este o soluţie parţială care este şi soluţie a problemei, deci o memorăm sau o prelucrăm (de exemplu, o afişăm), după care vom încerca generarea următorul tuplu. Deoarece ultima componentă are valoarea 6 (ultima posibilă), înseamnă că am epuizat toate valorile posibile pentru aceasta, deci o vom elimina şi vom genera următorul tuplu format doar din 5 componente;
- $p=(1,2,3,4,6)$ – este o soluţie parţială, dar nu este o soluţie a problemei;
- $\left.\begin{matrix} p=(1,2,3,4,6,1) \\ p=(1,2,3,4,6,2) \\ p=(1,2,3,4,6,3) \\ p=(1,2,3,4,6,4) \end{matrix}\right\}$ – nu sunt soluţii parţiale;
- $p=(1,2,3,4,6,5)$ – este o soluţie parţială care este şi soluţie a problemei, deci o memorăm sau o prelucrăm, după care vom genera următorul tuplu;
- $p=(1,2,3,4,6,6)$ – nu este o soluţie parţială, dar ultima componentă are valoarea maxim posibilă 6, deci o vom elimina şi vom genera următorul tuplu format doar din 5 componente;
- $p=(1,2,3,4,6)$ – ultima componentă are valoarea maxim posibilă 6, deci o vom elimina şi vom genera următorul tuplu format doar din 4 componente;
- $p=(1,2,3,5)$ – este o soluţie parţială, dar nu este o soluţie a problemei;
- .....
- $p=(6,5,4,3,2,1)$ – este o soluţie parţială care este şi ultima soluţie a problemei, deci o memorăm sau o prelucrăm, după care vom încerca generarea următorului tuplu. Se observă cu uşurinţă faptul că, pe rând, nu vom mai găsi niciun tuplu convenabil, deci algoritmul se va termina.

Observaţie importantă: Determinarea exactă a complexităţii unui algoritm de tip Backtracking nu este simplă. Totuşi, plecând de la observaţia că un algoritm nu poate avea o complexitate mai mică decât citirea datelor de intrare şi/sau afişarea datelor de ieşire, de obicei, putem aproxima complexitatea unui astfel de algoritm prin numărul soluţiilor pe care el le afişează. De exemplu, algoritmul pentru generarea permutărilor de ordin n are complexitatea minimă egală cu $\mathcal{O}(n!)$, deoarece vor fi afişate $n!$ permutări. O astfel de complexitate este foarte mare, depăşind-o pe cea exponenţială!

2. Forma generală a unui algoritm de tip Backtracking

Vom începe prin a preciza faptul că majoritatea problemele de generare pot fi formalizate astfel: "*Fie mulțimile nevide* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *și un predicat* $P: A_1 \times \dots \times A_n \to \{0,1\}$. *Să se genereze toate tuplurile de forma* $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ *pentru care* $s_1 \in A_1, \dots, s_n \in A_n$ *și* $P(s_1, s_2, \dots, s_n) = 1$.". Practic, predicatul P cuantifică o proprietate pe care trebuie să o îndeplinească componentele tuplului S (o soluție a problemei) sub forma unei funcții de tip boolean (0 = *fals* și 1 = *adevărat*).

De exemplu, problema generării tuturor permutărilor poate fi formalizată în acest mod considerând $A_1 = \dots = A_n = \{1,2, \dots, n\}$ și $P(s_1, s_2, \dots, s_n) = (s_1 \neq s_2)\ AND\ (s_2 \neq s_3)\ AND \dots AND\ (s_{n-1} \neq s_n)$.

În continuare, vom prezenta câteva notații, definiții și observații:

- pentru orice componentă s_k vom nota cu min_k cea mai mică valoare posibilă a sa, iar cu max_k pe cea mai mare;
- într-un tuplu $(s_1, s_2, \dots, s_k)$, componenta s_k se numește *componentă curentă* (i.e., asupra sa se acționează în momentul respectiv);
- *condițiile de continuare* reprezintă condițiile pe care trebuie să le îndeplinească tuplul curent $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ astfel încât să aibă sens extinderea sa cu o nouă componentă s_{k+1} sau, altfel spus, există valori pe care le putem adăuga la el astfel încât să obținem o soluție $S = (s_1, \dots, s_n)$ a problemei;
- tuplul curent $(s_1, \dots, s_k)$ este o *soluție parțială* dacă îndeplinește condițiile de continuare;
- *condițiile de continuare* se deduc din predicatul P și sunt neapărat necesare, fără a fi întotdeauna și suficiente;
- orice *soluție* a problemei este implicit și soluție parțială, dar trebuie să mai îndeplinească și alte condiții suplimentare.

Folosind observațiile anterioare, forma generală a unui algoritm de tip Backtracking, implementat folosind o funcție recursivă este următoarea:

```
# k reprezintă indicele componentei curente s[k]
# dintr-o listă s indexată de la 1
def bkt(k):
    global s
    # parcurgem toate valorile posibile v pentru s[k]
    for v in range(mink, maxk+1):
        # atribuim componentei curente s[k] valoarea v
        s[k] = v

        # dacă s[1],…,s[k] este soluție parțială
        if s[1],…,s[k] este soluție parțială:
            # dacă s[1],…,s[k] este o soluție
            if s[1],…,s[k] este soluție:
                # prelucrăm soluția curentă s[1],…,s[k]
            else:
               # s[1],…,s[k] este soluție parțială, dar nu este
               # soluție, deci adăugăm o nouă componentă s[k + 1]
               bkt(k+1)
```

Referitor la algoritmul general de Backtracking prezentat mai sus trebuie făcute câteva observații:

- bucățile de cod scrise cu roșu trebuie particularizate pentru fiecare problemă;
- am considerat tabloul `s` indexat de la 1, ci nu de la 0, pentru a permite o scriere naturală a unor condiții în care se utilizează indicii tabloului;
- $\texttt{min}_k$ și $\texttt{max}_k$ se deduc din semnificația componentei `s[k]` a unei soluții;
- pentru a testa că `s[1],…,s[k]` este soluție vom ține cont de faptul că `s[1],…,s[k]` este soluție parțială, deci nu vom retesta condițiile de continuare, ci doar pe cele suplimentare lor;
- dacă `s[1],…,s[k]` nu este soluție parțială, atunci nu vom adăuga o nouă componentă `s[k+1]` prin apelul recursiv `bkt(k+1)`, deci instrucțiunea `for` va continua și componentei curente `s[k]` i se va atribui următoarea valoare posibilă `v`, dacă aceasta există, iar în cazul în care aceasta nu există, instrucțiunea `for` corespunzătoare componentei curente `s[k]` se va termina și, implicit, apelul funcției `bkt` corespunzător, deci se va reveni la componenta anterioară `s[k-1]`.

De exemplu, pentru a genera toate permutările de ordin n, observațiile de mai sus se particularizează, astfel:

- `s[k]` reprezintă un element al permutării, deci $\texttt{min}_k$ `= 1` și $\texttt{max}_k$ `= n`;
- `s[1],…,s[k-1],s[k]` este soluție parțială dacă valoarea componentei curente `s[k]` nu a mai fost utilizată anterior, adică `s[k]≠s[i]` pentru orice `i∈{1,2,…,k-1}`. Se observă faptul că această condiție este dedusă din predicatul P (care impune ca toate cele n valori `s[1],…,s[n]` dintr-o permutare de ordin n să fie distincte) și este neapărat necesară (dacă `s[1],…,s[k]` nu sunt distincte, atunci, indiferent de ce valori am atribui celorlalte `n-k` componente `s[k+1],…,s[n]` nu vom obține o permutare de ordin `n`), fără a fi și suficientă (dacă valorile `s[1],…,s[k]` sunt distincte nu înseamnă că ele formează o permutare de ordin `n`, ci trebuie impusă condiția suplimentară `k=n`);
- pentru a testa că `s[1],…,s[k]` este soluție vom ține cont de faptul că `s[1],…,s[k]` este soluție parțială, deci nu vom retesta condițiile de continuare (`s[k]≠s[i]` pentru orice `i∈{1,2,…,k-1}`), ci doar condiția suplimentară `k==n`.

Aplicând observațiile anterioare în forma generală a algoritmului de Backtracking, obținem următoarea implementare în limbajul Python a algoritmului de generare a tuturor permutărilor mulțimii $\{1,2,\dots,n\}$:

```
def bkt(k):
    global s, n

    for v in range(1, n+1):
        s[k] = v
        if s[k] not in s[:k]:
            if k == n:
                print(*s[1:], sep=",")
            else:
                bkt(k+1)
```

```
n = int(input("n = "))
# o soluție s va avea n elemente
s = [0]*(n+1)
print("Toate permutările de lungime " + str(n) + ":")
bkt(1)
```

Aşa cum am menţionat deja, complexitatea minimă a acestui algoritm este $\mathcal{O}(n!)$.

3. Probleme de generări combinatoriale

Pe lângă generarea permutărilor unei mulţimi, algoritmii de tip Backtracking mai pot fi utilizaţi şi pentru rezolvarea altor probleme de generări combinatoriale, cum ar fi generarea aranjamentelor sau a combinărilor unei mulţimi. În continuare, vom exemplifica algoritmii pe care îi vom prezenta pentru mulţimea $A = \{1,2, \dots, n\}$, deoarece elementele oricărei alte mulţimi cu n elemente pot fi accesate considerând elementele mulţimii A ca fiind indicii elementelor sale.

3.1. Generarea aranjamentelor

Aranjamentele cu m elemente ale unei mulţimi cu n elemente ($m \leq n$) reprezintă toate tuplurile care se pot forma utilizând m elemente distincte dintre cele n ale mulţimii. Numărul lor se notează cu A_n^m şi este dat de formula $\frac{n!}{(n-m)!}$. De exemplu, numărul aranjamentelor cu $m = 3$ elemente ale unei mulţimi cu $n = 5$ elemente este $A_5^3 = 60$, o parte a lor fiind: (1,2,3), (1,3,2), … , (3,2,1), … , (1,3,5), … , (5,3,1), … , (3,4,5), … , (5,4,3).

Se observă foarte uşor faptul că singura diferenţă faţă de generarea permutărilor o constituie lungimea unei soluţii, care în acest caz este m în loc de n. De fapt, pentru $m = n$, aranjamentele unei mulţimi sunt chiar permutările sale!

La fel ca şi în cazul generării permutărilor, putem aproxima complexitatea minimă a acestui algoritm prin numărul soluţiilor pe care le va afişa, deci prin $\mathcal{O}(A_n^m)$.

3.2. Generarea combinărilor

Combinările cu m elemente ale unei mulţimi cu n elemente ($m \leq n$) reprezintă toate submulţimile cu m elemente ale unei mulţimi cu n elemente. Numărul lor se notează cu C_n^m şi este dat de formula $\frac{n!}{m!(n-m)!}$. De exemplu, numărul tuturor submulţimilor cu $m = 3$ elemente ale unei mulţimi cu $n = 5$ elemente este $C_5^3 = 10$, toate aceste submulţimi fiind: $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}$ şi $\{3,4,5\}$.

Spre deosebire de tupluri, în care contează ordinea elementelor (de exemplu, tuplurile (1,2,3) şi (1,3,2) sunt considerate diferite), în cazul submulţimilor aceasta nu contează (de exemplu, submulţimile $\{1,2,3\}$ şi $\{3,1,2\}$ sunt considerate egale). Din acest motiv, trebuie să găsim o posibilitate de a evita prelucrarea unei soluţii care are aceleaşi elemente ca o altă soluţie generată anterior, dar în altă ordine. În acest sens, o variantă simplă, dar ineficientă, o reprezintă prelucrarea doar a soluţiilor care au elementele în ordine strict crescătoare, dar astfel vom încălca chiar principiul de bază al metodei Backtracking, acela de a evita generarea şi testarea unor tupluri inutile cât mai devreme posibil. O altă variantă o reprezintă generarea doar a soluţiilor cu elemente în ordine

strict crescătoare, această restricție putând fi impusă soluției curente în mai multe etape ale unui algoritm de tip Backtracking:

- *când testăm condițiile de continuare, verificând faptul că* `s[k]> s[k-1]` – această variantă este mai eficientă decât prima, dar, totuși se vor genera și testa multe tupluri inutile. De exemplu, pentru a extinde soluția parțială $(1, 3)$, se vor genera și testa inutil tuplurile (1,3,1), (1,3,2) și (1,3,3), deși este evident faptul că la tuplul $(1, 3)$ are sens să adăugăm doar o valoare cel puțin egală cu 4;
- *inițializând componenta curentă cu prima valoare strict mai mare decât componenta anterioară* ($\texttt{min}_k$ `= s[k-1]+1`) – este cea mai eficientă variantă posibilă, deoarece nu se generează și testează tupluri inutile și, mai mult, orice tuplu este soluție parțială (elementele sale sunt generate direct în ordine strict crescătoare, deci sunt distincte), ceea ce înseamnă că putem renunța la testarea condițiilor de continuare!

Astfel, vom obține următorul program eficient de tip Backtracking pentru generarea combinărilor:

```
def bkt(k):
    global n, m, sol, cnt

    for v in range(sol[k-1]+1, n+1):
        sol[k] = v
        if k == m:
            cnt += 1
            print(str(cnt).rjust(3) + ". ", end="")
            print(*sol[1:], sep=",")
        else:
            bkt(k+1)


n = int(input("n = "))
m = int(input("m = "))
# contor pentru soluțiile generate
cnt = 0
# o soluție va avea lungimea m
sol = [0] * (m+1)
print("Toate submulțimile cu ", m, "elemente ale unei mulțimi cu ",
      n, "elemente")
bkt(1)
```

Pentru `k=1`, variabila `v` din ciclul `for` va fi inițializată cu valoarea `s[0]+1`, respectiv chiar cu valoarea corectă `1`, deoarece `s[0]` are valoarea `0`.

La fel ca și în cazul generării permutărilor, putem aproxima complexitatea minimă a acestui algoritm prin numărul soluțiilor pe care le va afișa, deci prin $\mathcal{O}(C_n^m)$.

Problemele de generare prezentate pot fi utilizate și pentru a genera permutările/ aranjamentele/combinările unei colecții oarecare, considerând elementele mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ ca fiind pozițiile elementelor colecției respective!

De exemplu, pentru a genera toate anagramele distincte ale unui cuvânt, vom genera toate permutările de lungime egală cu lungimea cuvântului, pentru fiecare permutare vom reconstitui cuvântul asociat și îl vom salva într-o mulțime (i.e., colecție de tip `set`):

```
def bkt(k):
    global s, n, cuv, cuv_dist

    for v in range(1, n+1):
        s[k] = v
        if s[k] not in s[1:k]:
            if k == n:
                aux = "".join([cuv[s[i]-1] for i in range(1, n+1)])
                cuv_dist.add(aux)
            else:
               bkt(k+1)

cuv = input("Cuvantul: ")
n = len(cuv)
cuv_dist = set()
s = [0] * (n+1)
bkt(1)
print("Anagramele distincte ale cuvântului " + cuv + ": ")
print(*cuv_dist, sep="\n")
```

4. Descompunerea unui număr natural ca sumă de numere naturale nenule

Această problemă apare destul de des în practică, în diverse forme: împărțirea unui produs dintr-un depozit între mai multe magazine de desfacere, distribuirea unui sume de bani (un buget) între mai multe firme sau persoane fizice, partiționarea unui teren între mai mulți cumpărători etc.

De exemplu, numărul natural `n=4` poate fi descompus ca sumă de numere naturale nenule, astfel: `1+1+1+1`, `1+1+2`, `1+2+1`, `1+3`, `2+1+1`, `2+2`, `3+1` și 4. Restricția ca termenii sumei să fie numere naturale nenule este esențială, altfel problema ar avea o infinitate de soluții!

În cazul acestei probleme, observațiile de la forma generală a unui algoritm de tip Backtracking pot fi particularizate astfel :

- `s[k]` reprezintă un termen al sumei, deci $\texttt{min}_k=1$ și $\texttt{max}_k=\texttt{n-k+1}$ (în momentul în care componenta curentă este `s[k]`, celelalte `k-1` componente anterioare `s[1],…,s[k-1]` au, fiecare, cel puțin valoarea `1`, deci `s[k]` nu poate să depășească valoarea `n-(k-1)=n-k+1` deoarece atunci suma `s[1]+…+s[k]` ar fi strict mai mare decât `n`);
- soluțiile problemei nu mai au toate lungimi egale, ci ele variază de la `1` la `n`;
- `s[1],…,s[k]` este soluție parțială dacă `s[1]+…+s[k]<=n`. Se observă faptul că această condiție este dedusă din predicatul *P* (care impune `s[1]+…+s[k]=n`) și este neapărat necesară (dacă `s[1]+…+s[k]>n` atunci, indiferent de ce numere naturale nenule `s[k+1],s[k+2],…` am mai adăuga (inclusiv niciunul!), nu vom mai putea obține `s[1]+…+s[k]==n`), fără însă a fi și suficientă (dacă `s[1]+…+s[k]<=n` nu înseamnă obligatoriu că `s[1]+…+s[k]==n`);
- `s[1],…,s[k]` este soluție dacă `s[1]+…+s[k]==n`.

Aplicând observaţiile anterioare în forma generală a algoritmului de Backtracking, obţinem următoarea implementare a acestui algoritm în limbajul Python:

```
def bkt(k):
    global sol, n

    for v in range(1, n-k+2):
        sol[k] = v
        scrt = sum(sol[:k+1])
        if scrt <= n:
            if scrt == n:
                print(*sol[1: k+1], sep="+")
            else:
                bkt(k+1)


n = int(input("n = "))
sol = [0]*(n+1)
bkt(1)
```

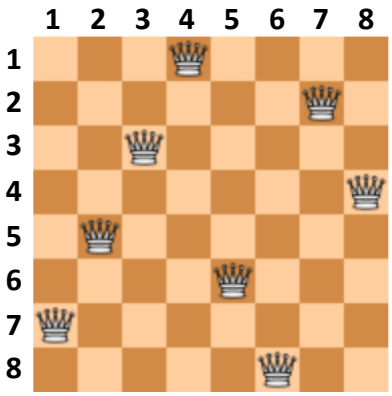
În practică, această problema apare în multe variante, câteva dintre ele fiind următoarele (în toate exemplele am considerat n=4):

- *descompuneri distincte* (care nu conţin aceiaşi termeni, dar în altă ordine): 1+1+1+1, 1+1+2, 1+3, 2+2 şi 4;
- *descompuneri cu termeni distincţi* (care nu conţin termeni egali): 1+3, 3+1 şi 4;
- *descompuneri distincte cu termeni distincţi*: 1+3 şi 4;
- *descompuneri ale căror lungimi verifică anumite condiţii* (de exemplu, descompuneri de lungime egală cu 3: 1+1+2, 1+2+1 şi 2+1+1);
- *descompuneri ale căror termeni verifică anumite condiţii* (de exemplu, descompuneri cu toţi termenii numere pare: 2+2 şi 4);
- *descompuneri care verifică simultan mai multe dintre condiţiile de mai sus*.

Complexitatea acestui algoritm poate fi estimată doar folosind cunoştinţe avansate de teoria numerelor pentru a aproxima numărul soluţiilor pe care le va afişa (https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_function_(number_theory)). Astfel, se poate demonstra faptul că acest algoritm are o complexitate de tip exponenţial (de exemplu, numărul $n = 1000$ are aproximativ $24061467864032622473692149727991 \approx 2.4 \times 10^{31}$ descompuneri distincte!).

5. Problema celor n regine

Fiind dată o tablă de şah de dimensiune $n \times n$, problema cere să se determine toate modurile în care pot fi plasate n regine pe tablă astfel încât oricare două să nu se atace între ele. Două regine se atacă pe tabla de şah dacă se află pe aceeaşi linie, coloană sau diagonală. De exemplu, pentru $n = 8$, o posibilă soluţie dintre cele 92 existente, este următoarea (sursa: https://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle):



Problema a fost formulată de către creatorul de probleme şahistice Max Bezzel în 1848 pentru $n = 8$. În 1850 Franz Nauck a publicat primele soluţii ale problemei şi a generalizat-o pentru orice număr natural $n \geq 4$ (pentru $n \leq 3$ problema nu are soluţii), ulterior ea fiind analizată de mai mulţi matematicieni (e.g., C. F. Gauss) şi informaticieni (e.g., E.W. Dijkstra) celebri. Problema poate fi rezolvată prin mai multe metode, astfel:

- considerând reginele numerotate de la 1 la n^2, generăm, pe rând, toate cele $C_{n^2}^n$ submulţimi formate n regine şi apoi le testăm (de exemplu, pentru $n = 8$ vom genera şi testa $C_{64}^8 = 4426165368$ submulţimi). Evident, această metodă de tip forţă-brută este foarte ineficientă, deoarece vom genera şi testa inutil foarte multe submulţimi care sigur nu pot fi soluţii (de exemplu, toate submulţimile care cuprind cel puţin două regine pe aceeaşi linie, coloană sau diagonală);
- observând faptul că pe o linie se poate poziţiona exact o regină, vom genera, pe rând, toate cele n^n tupluri conţinând coloanele pe care se află reginele de pe fiecare linie şi le vom testa (de exemplu, pentru $n = 8$ vom genera şi testa $8^8 = 16777216$ tupluri). Deşi această metodă, tot de tip forţă-brută, este de aproximativ 260 de ori mai rapidă decât precedenta, tot va genera şi testa inutil multe tupluri care nu pot fi soluţii (de exemplu, toate tuplurile care conţin cel puţin două valori egale, deoarece acest lucru înseamnă faptul că mai mult de două regine se află pe aceeaşi coloană, deci se atacă între ele);
- observând faptul că pe o linie şi o coloană se poate poziţiona exact o regină, vom genera, pe rând, utilizând metoda Backtracking, toate cele $n!$ permutări cu n elemente, testând la fiecare pas şi condiţia ca reginele să nu se atace pe diagonală (de exemplu, pentru $n = 8$ vom genera şi testa $8! = 40320$ permutări). Evident, această metodă este mult mai eficientă decât primele două, fiind de aproximativ 420 de ori mai rapidă decât a doua metodă şi de peste 110000 de ori decât prima!

În continuare, vom detalia puţin cea de-a treia variantă de rezolvare prezentată mai sus, bazată pe metoda Backtracking. Revenind la observaţiile generale de la metoda Backtracking, acestea se vor particulariza, astfel:

- `s[k]` reprezintă coloană pe care este poziţionată regina de pe linia `k`. De exemplu, soluţiei prezentate în figura de mai sus îi corespunde tuplul $s = (4,7,3,8,2,5,1,6)$;
- deoarece pe o linie `k` regina poate fi poziţionată pe orice coloană `s[k]` cuprinsă între `1` şi `n`, obţinem $\texttt{min}_k=1$ şi $\texttt{max}_k=\texttt{n}$;
- `s[1],…,s[k-1],s[k]` este soluţie parţială dacă regina curentă R_k`(k,s[k])`, adică regina aflată pe linia `k` şi coloana `s[k]`, nu se atacă pe coloană sau diagonală cu nicio regină anterior poziţionată pe o linie `i` şi o coloană `s[i]`, pentru orice `i`$\in$`{1,…,k-1}`.

Condiția referitoare la coloană se deduce imediat, respectiv trebuie ca `s[k]≠s[i]` pentru orice `i∈{1,2,…,k-1}`. Condiția referitoare la diagonală se poate deduce, de exemplu, astfel: regina $R_k(k, s[k])$ se atacă pe diagonală cu o altă regină $R_i(i, s[i])$ dacă și numai dacă dreapta R_kR_i este paralelă cu una dintre cele două diagonale ale tablei de șah. Două drepte sunt paralele dacă și numai dacă au pantele egale, iar cele două diagonale au pantele egale cu $\operatorname{tg} 45° = 1$ și $\operatorname{tg} 135° = -1$, deci panta dreptei R_kR_i trebuie să fie diferită de ± 1, deci $m_{R_kR_i} = \frac{s[k]-s[i]}{k-i} \neq \pm 1$. Aplicând funcția modul, obținem $\left|\frac{s[k]-s[i]}{k-i}\right| \neq 1$ sau, echivalent, $|s[k] - s[i]| \neq |k - i|$ pentru orice $i \in \{1,2, \dots, k-1\}$;

- pentru a testa că `s[1],…,s[k]` este soluție vom ține cont de faptul că `s[1],…,s[k]` este soluție parțială, deci nu vom retesta condițiile de continuare, ci doar condiția suplimentară `k==n`.

Practic, se observă faptul că problema celor n regine se reduce la generarea permutărilor de ordin n care verifică și condiția referitoare la diagonale, deci putem utiliza direct algoritmul de generare a permutărilor în care modificăm doar condiția de continuare, astfel:

```
if s[k] not in s[:k] and \
  True not in [abs(k - i) == abs(s[k] - s[i]) for i in range(1, k)]:
```

Complexitatea algoritmului de tip Backtracking de mai sus poate fi aproximată prin $\mathcal{O}(n!)$, fiind o variantă puțin modificată a algoritmului de generare a permutărilor de ordin n.

6. Problema plății unei sume folosind monede cu valori date

Considerând faptul că avem la dispoziție n monede cu valorile $v_1, v_2, \dots, v_n$ pe care putem să le folosim pentru a plăti o sumă P, trebuie să determinăm toate modalitățile în care putem realiza acest lucru (vom presupune faptul că avem la dispoziție un număr suficient de monede de fiecare tip).

Exemplu: Dacă avem la dispoziție $n = 3$ tipuri de monede cu valorile $v = (2\$, 3\$, 5\$)$, atunci putem să plătim suma $P = 12\$$ în următoarele 5 moduri: $4 \times 3\$$, $1 \times 2\$ + 2 \times 5\$$, $2 \times 2\$ + 1 \times 3\$ + 1 \times 5\$$, $3 \times 2\$ + 2 \times 3\$$ și $6 \times 2\$$.

Pentru a rezolva această problemă vom particulariza algoritmul generic de Bactracking, astfel:

- `s[k]` reprezintă numărul de monede cu valoarea `v[k]` utilizate pentru plata sumei `P`, deci obținem $\texttt{min}_k$=`0` și $\texttt{max}_k$=`P/v[k]`;
- `s[1],…,s[k-1],s[k]` este soluție parțială dacă suma curentă este cel mult egală cu suma de plată `P`, adică `s[1]*v[1]+…+s[k]*v[k]<=P`;
- `s[1],…,s[k]` este soluție dacă suma curentă este egală cu suma de plată `P`, adică `s[1]*v[1]+…+s[k]*v[k]==P` (se observă faptul că soluțiile au lungimi variabile, cuprinse între `1` și `n`);

- deoarece problema nu are întotdeauna soluție (de exemplu, dacă toate monedele date au valori pare și suma de plată este impară), vom adăuga o variabila `nrs` care să contorizeze numărul soluțiilor găsite, iar după terminarea algoritmului vom verifica dacă problema a avut cel puțin o soluție sau nu.

Observație: Deoarece $\texttt{min}_k\texttt{=0}$, înseamnă că tabloul s va conține, pe rând, valorile $(0), (0,0), \ldots, (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{\text{de } n \text{ ori}})$, pentru că, la fiecare pas, va fi verificată condiția de continuare de mai sus (`0*v[1]+...+0*v[k]=0<=P`). Din acest motiv, trebuie să limităm extinderea tabloului la mai mult de n elemente pentru a evita erorile accesare a memoriei, deci vom efectua apelul recursiv `bkt(k+1)` doar în cazul în care `k<n`!

În continuare prezentăm implementarea algoritmului în limbajul Python:

```
def bkt(k):
    global s, P, v, n

    # s[k] = numarul de monede cu valoarea v[k] utilizate
    for m in range(0, P // v[k] + 1):
        s[k] = m
        scrt = sum([s[i] * v[i] for i in range(k+1)])
        if scrt <= P:
            if scrt == P and k == n:
                for i in range(1, n+1):
                    if s[i] != 0:
                        print(s[i], "x", v[i], "$ + ", end="")
                print()
            else:
                if k < len(v[1:]):
                    bkt(k+1)


P = int(input("Suma de plată: "))
aux = [int(x) for x in input("Valorile monedelor: ").split()]
v = [0]
v.extend(aux)
n = len(v[1:])
s = [0]*(len(v))
print("Toate modalitățile de plată:")
bkt(1)
```

Observație: Deoarece $\texttt{min}_k\texttt{=0}$, înseamnă că tabloul s va conține, pe rând, valorile $(0), (0,0), \ldots, (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{\text{de } n \text{ ori}})$, pentru că, la fiecare pas, va fi verificată condiția de continuare de mai sus (`0*v[1]+...+0*v[k]=0<=P`). Din acest motiv, trebuie să limităm extinderea tabloului la mai mult de n elemente pentru a evita erorile accesare a memoriei, deci vom efectua apelul recursiv `bkt(k+1)` doar în cazul în care `k<n`!

Complexitatea acestui algoritmului poate fi aproximată prin numărul maxim de tupluri care pot fi generate şi testate, respectiv $\frac{P}{v_1} \cdot \frac{P}{v_2} \cdot \ldots \cdot \frac{P}{v_n}$. În cazul unor date de intrare "reale", putem presupune faptul ca valorile monedelor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt cel mult egale cu suma P (o monedă cu o valoare strict mai mare decât P este inutilă, deci ar putea fi eliminată din datele de intrare), astfel încât fiecare raport $\frac{P}{v_k}$ va fi mai mare sau egal decât 1. De fapt, în realitate, valorile monedelor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt mult mai mici decât suma de plată P, deci fiecare raport $\frac{P}{v_k}$ va fi, în general, mai mare sau egal decât 2, deci complexitatea algoritmului poate fi aproximată prin $\mathcal{O}(2^n)$.

Observaţie: Metoda Backtracking poate fi modificată astfel încât să fie utilizată şi pentru rezolvarea altor tipuri de probleme, în afara celor de generare a tuturor soluţiilor, astfel:

- *pentru probleme de numărare*: se generează toate soluţiile posibile şi se înlocuieşte secţiunea pentru afişarea unei soluţii cu o simplă incrementare a unui contor, iar după terminarea algoritmului se afişează valoarea contorului. Atenţie, de multe ori, problemele de numărare se pot rezolva mult mai eficient, fie utilizând o formulă matematică (de exemplu, numărul permutărilor p de ordin n fără puncte fixe, i.e. $p[k] \neq k, \forall k \in \{1, \ldots, n\}$, poate fi calculat folosind o formulă: https://en.wikipedia.org/wiki/Derangement), fie utilizând alte tehnici de programare (de exemplu, numărul modalităţilor de plată a unei sume folosind monede cu valori date se poate calcula cu un algoritm care utilizează metoda programării dinamice şi are complexitatea $\mathcal{O}(n^2)$: https://www.geeksforgeeks.org/coin-change-dp-7/).

- *pentru probleme de decizie*: într-o problemă de decizie ne interesează doar faptul că o problemă are soluţie sau nu (de exemplu, problema plăţii unei sume folosind monede cu valori date poate fi transformată într-o problemă de decizie, astfel: "*Să se verifice dacă o sumă de bani P poate fi plătită utilizând monede cu valorile* $v_1, v_2, \ldots, v_n$."), deci fie vom opri forţat algoritmul Backtracking în momentul în care găsim prima soluţie, fie acesta se va termina normal în cazul în care problema nu are soluţie. Şi în acest caz, de obicei, există algoritmi mai eficienţi, care utilizează alte tehnici de programare (de exemplu, pentru a verifica dacă o sumă de bani poate fi plătită folosind anumite monede se poate utiliza algoritmul menţionat anterior, având complexitatea $\mathcal{O}(n^2)$).

- *pentru probleme de optimizare*: într-o problemă de optimizare trebuie să găsim, de obicei, o singură soluţie care, în plus, minimizează sau maximizează o anumită expresie matematică (de exemplu, se poate cere determinarea unei modalităţi de plată a unei sume folosind un număr minim de monede cu valori date). În acest caz, vom genera toate soluţiile problemei şi vom reţine, într-o structură de date auxiliară, o soluţie optimă. În cazul acestor probleme există, de obicei, algoritmi mai eficienţi, care utilizează alte tehnici de programare, cum ar fi metoda Greedy sau metoda programării dinamice. De exemplu, pentru a determinarea o modalitate de plată a unei sume folosind un număr minim de monede, există un algoritm cu complexitatea $\mathcal{O}(n \cdot P)$ bazat pe metoda programării dinamice: https://www.geeksforgeeks.org/find-minimum-number-of-coins-that-make-a-change/.

În încheiere, precizăm faptul că, în soluţiile problemelor pe care le-am prezentat, am dorit să accentuăm aspecte generale prin care algoritmul generic de Backtracking poate

fi particularizat pentru a rezolva diverse tipuri de probleme, neinsistând asupra unor modalităţi particulare de optimizare a lor, cum ar fi găsirea unui interval de valori cât mai mic pentru o componentă a soluției (i.e., diferența max_k-min_k să fie minimă), utilizarea unor structuri de date auxiliare pentru a marca valorile deja utilizate (de exemplu, în algoritmul de generare a permutărilor se poate utiliza un vector de marcaje pentru a verifica direct dacă o anumită valoare a fost deja utilizată) sau actualizarea dinamică a unor valori necesare în verificarea condițiilor de continuare (de exemplu, în algoritmul pentru descompunerea unui număr natural ca sumă de numere naturale nenule se poate actualiza dinamic suma curentă, în momentele în care se adaugă la o soluție parţială o nouă componentă, se modifică valoarea componentei curente sau se renunţă la componenta curentă). Din punctul nostru de vedere, aceste optimizări complică destul de mult codul sursă şi nu sunt foarte utile, deoarece, oricum, algoritmii de tip Backtracking au un timp de executare acceptabil doar pentru dimensiuni mici ale datelor de intrare.