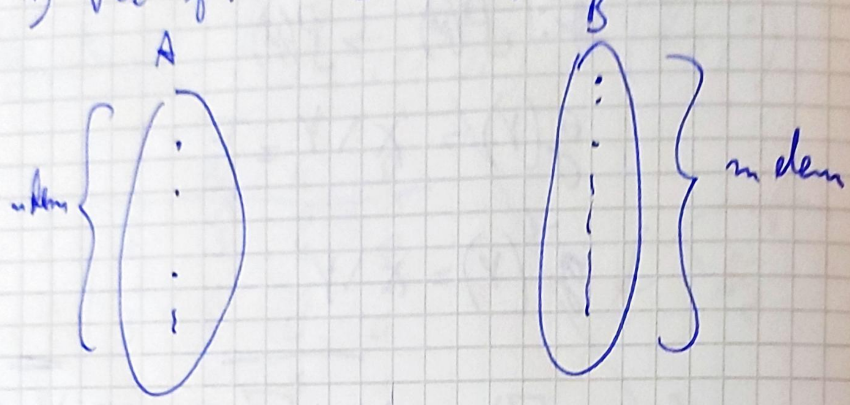
Seminar 4

Fie A, B finite, $|A| = n$, $|B| = m$

1) Nr $f : A \to B$ este egal cu m^n



$\to \underbrace{m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ ori}}$ funcții

2) Nr funcțiilor injective de la A la B $= \begin{cases} 0, & m < n \\ A_m^n, & m \geq n \end{cases}$

3) Nr fct strict↑ de la A la B $= \begin{cases} 0, & m < n \\ C_m^n, & m \geq n \end{cases}$

4) Nr fct crescătoare de la A la B $= \begin{cases} 0, & m = 0 \\ C_{m+n-1}^n, & m \geq 1 \end{cases}$

$f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ cresc.

$\Updownarrow$

$g : \{1 \ldots n\} \to \{1 \ldots m+n-1\}$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ f(1) & f(2)+1 & & f(n-1)+n-2 & f(n)+n-1 \end{pmatrix} \to$ strict cresc.

Reciproc, $g: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+m-1\}$ s.t. ↑

$f: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ s.t. ↑

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ g(1) & g(2)-1 & & g(n)-n+1 \end{pmatrix}$$

↓ crescător

...

$A_1 \ldots A_n$ mulțimi finite,

Atunci $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

(Principiul includerii și al excluderii)

Dem

Pentru $n=2$ $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

Pp pentru n adevărat $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \to n+1$

$|(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| -$

$- |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| =$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

$$+ |A_{n+1}| - \cancel{\left|\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right|} + \sum_{1\le i<j\le n} |(A_i \cap \dots \cap A_{n+1}) \cap$$

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap \dots \cap A_{n+1}|$$

$$\cap (A_j \cap \dots \cap A_{n+1})| - \dots (-1)^{n+1} |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap \dots \cap (A_n \cap A_{n+1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<l\le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \dots$$

$$\dots (-1)^{n+2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}|$$

Nr funcții surjective de la A la B

5) $f : \{1, 2 \dots n\} \to \{1, 2 \dots n\}$

$\forall i \in \{\overline{1, m}\}$ $A_i = \{ f : \{1 \dots n\} \to \{1 \dots m\} \mid i \notin \operatorname{Im} f\}$

f nu este surj $\Leftrightarrow f \in (A_1 \cup \dots \cup A_m)$

$\Downarrow$

nr funct. nesurj este $|A_1 \cup \dots \cup A_m|$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| -$$

$$-\sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$$

$\vdots$

$$(-1)^{m+1}|A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_m| = \sum_{i=1}^{n}(m-1)^n - \sum_{1\le i<j\le n}(m-2)^n$$

$$(-1)^m \sum 1^n$$

$$(-1)^{m+1}\cdot 0 =$$

$$= (m-1)^n \cdot C_m^1 - (m-2)^n C_m^2 \ldots (-1)^m \cdot 1^n \cdot C_m^{m-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1} C_m^i (m-1)^n \Rightarrow$$ nr fct surj este $m^n -$

$$- \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1} \cdot C_m^i (m-i)^n = \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^n C_m^i \cdot (-1)^i$$

Calculăm nr. permutări din σ cu cel puțin un punct fix

Nr perm. $\sigma \in S_n$ pt care $\exists i \in \overline{1 \ldots n}$ a.i. $\sigma(i) = i$

$$A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\},\ i = \overline{1,n}$$

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| \ldots$$

$$(-1)^{n+1}|A_1\cap \dots \cap A_n| = \sum_{i=1}^{n}(n-1)! - \sum_{1\le i<j\le n}(n-2)!$$

$$(-1)^{n+1}\cdot 1! = C_n^1 (n-1)! - C_n^2 (n-2)! + \dots (-1)^{n+1} C_n^n \cdot 1! =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} C_n^i (n-i)!$$

Temă: Nr. permutărilor $\sigma \in S_n$ pt care $\exists$ și este unic un $i \in \overline{1,n}$ a.î. că $\sigma(i)=i$ → care au exact un punct fix

$\sigma \in A_i$, $\sigma \notin A_j$ $\forall j \neq i$

$\sigma \in \bigcup_{i=1} \left(A_i \setminus \bigcup_{j\neq i} A_j\right)$

Pentru o mulțime oarecare M urm. af. sunt echiv.:

1) M infinită

2) $\exists f: M \to M$ funcție inj care nu este surj

3) $\exists g: M \to M$ funcție surj care nu este inj

2) ⇒ 1) și 3) ⇒ 1) rez. din probl. anterioară

1) ⇒ 2) M infinită ⇒ $\exists \{x_1, \dots x_n \dots\} \subseteq M$

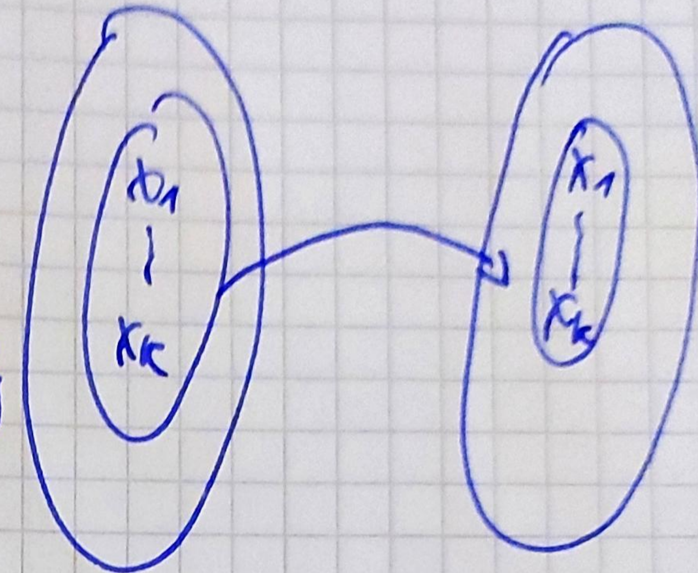
$(\forall k)\ M \setminus \{x_1 \dots x_k\} \neq \emptyset$)

$\Downarrow$

$\exists x_{k+1}$

Iau $f : M \to M$

$$f(x) = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{dacă } x = x_k \\ x, & \text{dacă } x \notin \{x_1, x_2, \dots\} \end{cases}$$



$x_1 \notin \operatorname{Im} f \Rightarrow f$ nu este surjectivă, dar este injectivă

3) $\Rightarrow$ 1) Temă (aceeași idee)