

Logică Matematică și Computațională

Anul I, Semestrul I 2022/2023

Laurențiu Leuștean

Pagina web: <http://cs.unibuc.ro/~lleustean/>

1

PRELIMINARII

2

Operații cu mulțimi

Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$A \cup B = \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

$$C_T A = T \setminus A = \{x \in T \mid x \notin A\}$$

Notații: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ este mulțimea numerelor naturale;
 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; \mathbb{Z} este mulțimea numerelor întregi; \mathbb{R} este mulțimea numerelor reale; \mathbb{Q} este mulțimea numerelor raționale.

Mulțimea părților lui T se notează 2^T sau $\mathcal{P}(T)$. Așadar,
 $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.

3

Operații cu mulțimi

Notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b (care sunt **componentele** lui (a, b)).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$;
 $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale dacă $a = c$ și $b = d$.

Definiție

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

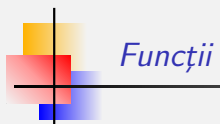
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

4



Funcții

Fie A și B mulțimi și $f : A \rightarrow B$ o funcție.

Spunem că $f : A \rightarrow B$ este **definită pe A cu valori în B** , A se numește **domeniul de definiție** al funcției f și B se numește **domeniul valorilor** sau **codomeniul** lui f .

Fie $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- ▶ $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este **imaginea directă** a lui X prin f ; $f(A)$ este **imaginea** lui f .
- ▶ $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ este **imaginea inversă** a lui Y prin f .
- ▶ Fie $f|_X : X \rightarrow B$, $f|_X(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Funcția $f|_X$ este **restricția** lui f la X .

Mulțimea funcțiilor de la A la B se notează **$\text{Fun}(A, B)$** sau **B^A** .

5



Funcții

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție.

- ▶ f este **injectivă** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- ▶ f este **surjectivă** dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- ▶ f este **bijectivă** dacă f este injectivă și surjectivă.

Funcția identică a lui A : $1_A : A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$.

Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ două funcții. **Compunerea** lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

6



Funcții

$f : A \rightarrow B$ este **inversabilă** dacă există $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

f este bijectivă dacă f este inversabilă.

Observație

- Pentru orice mulțime A , $\text{Fun}(\emptyset, A)$ are un singur element, **funcția vidă**.
- Pentru orice mulțime nevidă A , $\text{Fun}(A, \emptyset) = \emptyset$.

Definiția 1.1

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. **Funcția caracteristică** a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

7



Echipotență

Definiția 1.2

Spunem că A este **echipotentă** cu B dacă există o bijecție $f : A \rightarrow B$. **Notăție**: $A \sim B$.

Propoziția 1.3

Pentru orice mulțimi A, B, C , avem

- $A \sim A$;
- Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$.
- Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

Dem.: Exercițiu.

Observație

Prin urmare, A este echipotentă cu B dacă B este echipotentă cu A . De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.

8

Următorul rezultat este fundamental.

Teorema 1.4 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie A și B două mulțimi astfel încât există $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.

Definiția 1.5

O mulțime A se numește **finită** dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. A este echipotentă cu $\{1, \dots, n\}$.

Numărul elementelor unei mulțimi finite A se notează $|A|$ și se mai numește și **cardinalul** lui A .

Definiția 1.6

O mulțime care nu este finită se numește **infinită**.

9

Definiția 1.7

O mulțime A este **numărabilă** dacă este echipotentă cu \mathbb{N} .

O mulțime finită sau numărabilă se numește **cel mult numărabilă**.

Exemple de mulțimi numărabile: \mathbb{N} , \mathbb{N}^* , \mathbb{Z} , $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, \mathbb{Q} .

Teorema Cantor

\mathbb{R} , $2^{\mathbb{N}}$ nu sunt mulțimi numărabile.

Se poate demonstra că

Propoziția 1.8

\mathbb{R} este echipotentă cu $2^{\mathbb{N}}$.

10

Propoziția 1.9

- (i) Orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.
- (ii) Orice submulțime a unei mulțimi numărabile este cel mult numărabilă.
- (iii) O mulțime A este cel mult numărabilă dacă există o funcție injectivă de la A la o mulțime numărabilă.
- (iv) Produsul cartezian a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabil.
- (v) Reuniunea a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Corolar 1.10

Fie A o mulțime numărabilă și B o mulțime nevidă cel mult numărabilă. Atunci $A \times B$ și $A \cup B$ sunt numărabile.

11

Numerele cardinale sau **cardinalele** sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Pentru orice mulțime A , **cardinalul** lui A (sau **numărul cardinal** al lui A) este un obiect $|A|$ asociat lui A a.î. sunt satisfăcute următoarele:

- $|A|$ este unic determinat de A .
- pentru orice mulțimi A , B , avem că $|A| = |B|$ dacă $A \sim B$.

Această definiție nu specifică natura obiectului $|A|$ asociat unei mulțimi A .

Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.

12

Un posibil răspuns este:

definim $|A|$ ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipotente cu A .

Un alt răspuns este definiția lui von Neumann din teoria axiomatică a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime A , $|A|$ este tot o mulțime.

- ▶ Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele **transfinite** sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- ▶ $|\mathbb{N}|$ se notează \aleph_0 (se citește **alef zero**).
- ▶ $|\mathbb{R}|$ se notează \mathfrak{c} și se mai numește și **puterea continuumului**.
- ▶ O mulțime A este numărabilă dacă $|A| = \aleph_0$.
- ▶ $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$.
- ▶ $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

13

Fie I o mulțime nevidă.

Definiția 1.11

Fie A o mulțime. O **familie** de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \rightarrow A$. Notăm cu $(a_i)_{i \in I}$ familia $f : I \rightarrow A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie și $(a_i)_i$ sau (a_i) atunci când I este dedusă din context.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i , obținem o **familie (indexată) de mulțimi** $(A_i)_{i \in I}$.

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T . Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i \in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid \text{există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$

14

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi.

Definiția 1.12

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i \in I}$ se definește astfel:

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\}$$

$$= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.$$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \dots, n\}$ și $A_1, \dots, A_n \subseteq T$.

- ▶ $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \dots, x_n)$, un **n -tuplu (ordonat)**
- ▶ $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$ și $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i$
- ▶ $\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_n$

15

Propoziția 1.13

- Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este mulțime cel mult numărabilă.
- Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabilă.
- Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabil.

16

Definiția 1.14

O **relație n-ară** între A_1, \dots, A_n este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^n A_i$.

O relație n-ară pe A este o submulțime a lui A^n . Dacă R este relație n-ară, spunem că n este **aritatea** lui R .

Definiția 1.15

O **relație binară** între A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

O relație binară pe A este o submulțime a lui $A^2 = A \times A$.

Exemple

- ▶ relația de divizibilitate pe \mathbb{N} :
 $= \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$
- ▶ relația de ordine strictă pe \mathbb{N} :
 $< = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$

17

Fie A o mulțime nevidă și R o relație binară pe A .

Notăție: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiția 1.16

- ▶ R este **reflexivă** dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **ireflexivă** dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **simetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx .
- ▶ R este **antisimetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$,
 xRy și yRx implică $x = y$.
- ▶ R este **tranzitivă** dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
 xRy și yRz implică xRz .
- ▶ R este **totală** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx .

18

Fie A o mulțime nevidă și R o relație binară pe A .

Definiția 1.17

R este **relație de echivalență** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Definiția 1.18

R este relație de

- ▶ **ordine parțială** dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ▶ **ordine strictă** dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ▶ **ordine totală** dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notății: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu \leq , iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

19

LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

20

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**, despre care se poate argumenta în principiu că sunt **adevărate** sau **false**.

Propoziții declarative

- ▶ Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- ▶ Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- ▶ Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- ▶ Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- ▶ Andrei este deștept.
- ▶ Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- ▶ Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- ▶ Pleacă!

21

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm p, q, r, \dots sau p_1, p_2, p_3, \dots

Exemple: p =Numărul 2 este par. q =Mâine plouă. r =Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate $\varphi, \psi, \chi, \dots$) folosind conectorii logici \neg (negația), \rightarrow (implicația), \vee (disjuncția), \wedge (conjuncția), \leftrightarrow (echivalența).

Exemple:

- $\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.
- $p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.
- $p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.
- $p \rightarrow q$ = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.
- $p \leftrightarrow q$ = Numărul 2 este par **dacă și numai dacă** mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).

Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

22

Exemplu:

Fie propoziția:

φ =Azi este vineri, deci avem curs de logică.

Considerăm propozițiile atomice

p =Azi este vineri. q =Avem curs de logică.

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ =Azi este vineri și nu avem curs de logică.

23

Exemplu:

Fie propoziția:

φ =Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.

Considerăm propozițiile atomice

- p = Trenul întârzie.
- q = Sunt taxiuri la gară.
- r = Ion întârzie la întâlnire.

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q ? **q este adevărată.**

24

Definiția 2.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de **variabile**;
- ▶ conectori logici: \neg (se citește **non**), \rightarrow (se citește **implică**)
- ▶ paranteze: $(,)$.

- Mulțimea **Sim** a **simbolurilor** lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \dots$

25

Definiția 2.2

Mulțimea **Expr** a **expresiilor** lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ . Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui LP de lungime n .
- ▶ Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:

$(((((v_7, v_1 \neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2, ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))), (\neg(v_1 \rightarrow v_2))).$

26

Operația de bază pentru expresii este **concatenarea**: dacă

$\varphi = \varphi_0 \dots \varphi_{k-1}$ și $\psi = \psi_0 \dots \psi_{l-1}$ sunt expresii, atunci concatenarea lor, notată $\varphi\psi$, este expresia $\varphi_0 \dots \varphi_{k-1}\psi_0 \dots \psi_{l-1}$.

Definiția 2.3

Fie $\theta = \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in Sim$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește **(i,j)-subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este **(i,j)-subexpresia** lui θ .

27

Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 2.4

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Notații: Mulțimea formulelor se notează **Form**. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \dots$

- ▶ Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- ▶ $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

28

Exemple:

- ▶ $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- ▶ $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziția 2.5

Mulțimea *Form* a formulelor lui LP este numărabilă.

Dem.: Exercițiu.

29

Propoziția 2.6 (Principiul inducției pe formule)

Fie **P** o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea **P**.
- (1) Pentru orice formulă φ , dacă φ are proprietatea **P**, atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea **P**.
- (2) Pentru orice formule φ, ψ , dacă φ și ψ au proprietatea **P**, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea **P**.

Atunci orice formulă φ are proprietatea **P**.

Dem.: Pentru orice formulă φ , notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ . Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea **P**.

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

30

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea **P**.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- ▶ $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea **P**, conform (0).
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea **P**. Aplicând ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea **P**.
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea **P**. Rezultă din (2) că φ are proprietatea **P**.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea **P**. □

31

Propoziția 2.7 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶ $V \subseteq \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la \neg , adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la \rightarrow , adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = \text{Form}$.

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ , φ are proprietatea **P** ddacă $\varphi \in \Gamma$.

Conform definiției lui Γ , rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 2.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea **P**, deci orice formulă φ este în Γ . Așadar, $\Gamma = \text{Form}$. □

32

Definiția 2.8

Fie φ o formulă a lui LP. O **subformulă** a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ .

Notăție: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $\text{SubForm}(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$. Atunci

$$\text{SubForm}(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \rightarrow v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

Conectorii derivați \vee (se citește **sau**), \wedge (se citește **și**), \leftrightarrow (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$\begin{aligned}(\varphi \vee \psi) &:= ((\neg \varphi) \rightarrow \psi) \\(\varphi \wedge \psi) &:= (\neg(\varphi \rightarrow (\neg \psi))) \\(\varphi \leftrightarrow \psi) &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).\end{aligned}$$

Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg \varphi, \varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
 - \neg are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
 - \wedge, \vee au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg \psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

Propoziția 2.9 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_{\neg} : A \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Form} \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

- (R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.
- (R1) $F(\neg \varphi) = G_{\neg}(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ .
- (R2) $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ .

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da **definiții recursive** ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : \text{Form} \rightarrow \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ , $c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ .

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned}c(v) &= 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v \\c(\neg \varphi) &= c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi \\c(\varphi \rightarrow \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi.\end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \rightarrow A$, $G_0(v) = 0$,

$$\begin{aligned}G_{\neg} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad G_{\neg}(n) = n + 1, \\G_{\rightarrow} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad G_{\rightarrow}(m, n) = m + n + 1.\end{aligned}$$

Notatie:

Pentru orice formulă φ , notăm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ .

Observație

Mulțimea $Var(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.

37

SEMANTICA LP

38

Tabele de adevăr

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr: **1** pentru **adevărat** și **0** pentru **fals**. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0, 1\}$ folosind **tabelele de adevăr**.

$$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$$\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$.

39

Tabele de adevăr

Operațiile $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ și $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0, 1\}$, $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Dem.: Exercițiu.

40

Definiția 2.10

O **evaluare** (sau **interpretare**) este o funcție $e : V \rightarrow \{0, 1\}$.

Teorema 2.11

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ există o unică funcție

$$e^+ : \text{Form} \rightarrow \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- ▶ $e^+(v) = e(v)$ pentru orice $v \in V$.
- ▶ $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \text{Form}$,
- ▶ $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in \text{Form}$.

Dem.: Aplicăm Principiul recursiei pe formule (Propoziția 2.9) cu $A = \{0, 1\}$, $G_0 = e$, $G_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_{\neg}(p) = \neg p$ și $G_{\rightarrow} : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_{\rightarrow}(p, q) = p \rightarrow q$. □

41

Propoziția 2.12

Dacă $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ ,

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \vee \psi) &= e^+(\varphi) \vee e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi). \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

42

Propoziția 2.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,

φ are proprietatea **P** dacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- ▶ $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.

43

Propoziția 2.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- ▶ $\varphi = \neg\psi$ și ψ satisface **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**.

44

Propoziția 2.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ și ψ, χ satisfac **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\psi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$ și $\text{Var}(\chi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi)$ și pentru orice $v \in \text{Var}(\chi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ și χ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**. □

45

Fie φ o formulă.

Definiția 2.14

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. **Notăție:** $e \models \varphi$.
- φ este **satisfiabilă** dacă admite un model.
- Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.
- φ este **tautologie** dacă orice evaluare este model al lui φ . **Notăție:** $\models \varphi$.

Notăție: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $\text{Mod}(\varphi)$.

Propoziția 2.15

- (i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.
- (ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Dem.: Exercițiu.

46

Metoda tabelului

Fie φ o formulă arbitrară și $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \dots, e(x_k)$, conform Propoziției 2.13.

Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2, \dots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	...	x_k	... subformule ale lui φ ...	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$...	$e'_1(x_k)$...	$e_1^+(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$...	$e'_2(x_k)$...	$e_2^+(\varphi)$
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$...	$e'_{2^k}(x_k)$...	$e_{2^k}^+(\varphi)$

Pentru orice i , $e_i^+(\varphi)$ se definește similar cu Teorema 2.11.

φ este tautologie ddacă $e_i^+(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \dots, 2^k\}$.

47

Metoda tabelului

Exemplu:

Fie

$$\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

$$\text{Var}(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

v_1	v_2	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)$	φ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

48

Definiția 2.16

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- ▶ φ este **consecință semantică** a lui ψ dacă $\text{Mod}(\psi) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$. **Notăție:** $\psi \models \varphi$.
- ▶ φ și ψ sunt (**logic**) **echivalente** dacă $\text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi)$. **Notăție:** $\varphi \sim \psi$.

Observație

Relația \sim este o relație de echivalență pe mulțimea Form a formulelor lui LP .

Propoziția 2.17

Fie φ, ψ formule. Atunci

- (i) $\psi \models \varphi$ ddacă $\models \psi \rightarrow \varphi$.
- (ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Dem.: Exercițiu.

49

Propoziția 2.18

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

- terțul exclus** $\models \varphi \vee \neg\varphi$ (1)
- modus ponens** $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi$ (2)
- afirmarea concluziei** $\psi \models \varphi \rightarrow \psi$ (3)
- contradicția** $\models \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (4)
- dubla negație** $\varphi \sim \neg\neg\varphi$ (5)
- contrapoziția** $\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (6)
- negarea premisei** $\neg\varphi \models \varphi \rightarrow \psi$ (7)
- modus tollens** $\neg\psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \neg\varphi$ (8)
- tranzitivitatea implicației** $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$ (9)

50

legile lui de Morgan $\varphi \vee \psi \sim \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (10)

$\varphi \wedge \psi \sim \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (11)

exportarea și importarea $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ (12)

idempotența $\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$ (13)

slăbirea $\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ (14)

comutativitatea $\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$ (15)

asociativitatea $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ (16)

$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$ (17)

absorbția $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$ (18)

$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$ (19)

distributivitatea $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ (20)

$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ (21)

51

$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$ (22)

$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi)$ (23)

$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$ (24)

$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$ (25)

$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ (26)

$\neg\varphi \sim \varphi \rightarrow \neg\varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (27)

$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ (28)

$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$ (29)

$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi$ (30)

$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ (31)

$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (32)

$\models \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$ (33)

$\models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ (34)

Dem.: Exercițiu.

52

Exemplu de demonstrație

Demonstrăm (1): $\models \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$. Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- ▶ $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- ▶ $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.

53

\top și \perp

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație

$v_0 \rightarrow v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Exercițiu.

Notății

Notăm $v_0 \rightarrow v_0$ cu \top și o numim **adevăru**. Notăm $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ cu \perp și o numim **falsul**.

- ▶ φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- ▶ φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \perp$.

54

Substituția

Definiția 2.19

Pentru orice formule φ, χ, χ' , definim

$\varphi_\chi(\chi') :=$ expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui χ cu χ' .

$\varphi_\chi(\chi')$ se numește **substituția lui χ cu χ' în φ** . Spunem și că $\varphi_\chi(\chi')$ este o **instanță de substituție** a lui φ .

- ▶ $\varphi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.
- ▶ $\varphi_\varphi(\chi') = \varphi$.
- ▶ Dacă χ nu este subformulă a lui φ , atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$.

Exemple:

Fie $\varphi = (v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow v_2)$.

- ▶ $\chi = v_1 \rightarrow v_2, \chi' = v_4. \quad \varphi_\chi(\chi') = v_4 \rightarrow \neg v_4$
- ▶ $\chi = v_1, \chi' = \neg\neg v_2. \quad \varphi_\chi(\chi') = (\neg\neg v_2 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(\neg\neg v_2 \rightarrow v_2)$
- ▶ $\chi = v_1 \rightarrow v_2, \chi' = v_4 \vee v_1. \quad \varphi_\chi(\chi') = (v_4 \vee v_1) \rightarrow \neg(v_4 \vee v_1)$

55

Substituția

Propoziția 2.20

Pentru orice formule φ, χ, χ' ,

$\chi \sim \chi'$ implică $\varphi \sim \varphi_\chi(\chi')$.

Propoziția 2.21

Pentru orice formule φ, ψ, χ și orice variabilă $v \in V$,

- ▶ $\varphi \sim \psi$ implică $\varphi_v(\chi) \sim \psi_v(\chi)$.
- ▶ Dacă φ este tautologie atunci și $\varphi_v(\chi)$ este tautologie.
- ▶ Dacă φ este nesatisfiabilă, atunci și $\varphi_v(\chi)$ este nesatisfiabilă.

56

Notatii

Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$. Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$

$$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- ▶ $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.
- ▶ $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.

Propoziția 2.22

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$,

- ▶ $e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ dacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **orice** $i \in \{1, \dots, n\}$.
- ▶ $e^+(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = 1$ dacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **un** $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.23

$$\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n$$

$$\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$$

Dem.: Exercițiu.

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 2.24

- ▶ O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).
Notăție: $e \models \Gamma$.
- ▶ Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- ▶ Γ este **finit satisfiabilă** dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.
- ▶ Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

Notății: Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.
Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

- ▶ $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$.

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 2.25

O formulă φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$.
Notăție: $\Gamma \models \varphi$.
Dacă φ **nu** este consecință semantică a lui Γ , scriem $\Gamma \not\models \varphi$.

Notăm cu $Cn(\Gamma)$ mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ .
Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Definiția 2.26

- ▶ Δ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$.
Notăție: $\Gamma \models \Delta$.
- ▶ Γ și Δ sunt **(logic) echivalente** dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$.
Notăție: $\Gamma \sim \Delta$.

Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

Observație

- ▶ $\psi \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \{\varphi\}$.
- ▶ $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 2.27

- ▶ $Mod(\emptyset) = \{0, 1\}^V$, adică orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.
- ▶ $Cn(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \models \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

61

Propoziția 2.28

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$.

- (i) Dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.
- (ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ddacă $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
- (iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ ddacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.29

Fie Γ o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă φ .
- (iii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ .
- (iv) $\Gamma \models \perp$.

Dem.: Exercițiu ușor.

62

Propoziția 2.30

Fie Γ o mulțime de formule.

- (i) $\Gamma \models \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \neg\varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- (iii) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre $\Gamma \cup \{\varphi\}$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

Dem.:

- (i) Avem că $\Gamma \not\models \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma$ și $e \not\models \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma$ și $e \models \neg\varphi \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.
- (ii) Similar.
- (iii) Fie e un model al lui Γ . Dacă $e \models \varphi$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $e \not\models \varphi$, deci $e \models \neg\varphi$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. □

63

Propoziția 2.31

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

- (i) $\Gamma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$.
- (ii) $\Gamma \models \psi$ ddacă $\models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$.
- (iii) Γ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$ este tautologie.
- (iv) Dacă $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ este o altă mulțime finită de formule, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
 - (a) $\Gamma \sim \Delta$.
 - (b) $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \sim \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$.

Dem.: Exercițiu.

64

Teorema de compacitate - versiunea 1

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 2

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă dacă Γ nu este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 3

Pentru orice mulțime Γ de formule și pentru orice formulă φ , $\Gamma \models \varphi$ dacă există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \models \varphi$.

Propoziția 2.32

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Dem.: Exercițiu.

65

Lema 2.33

Fie Γ finit satisfiabilă. Atunci există un șir $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ în $\{0, 1\}$ care satisface, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

P_n Orice submulțime finită Δ a lui Γ are un model $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu proprietatea că $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Teorema 2.34 (Teorema de compacitate)

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Dem.: " \Leftarrow " Presupunem că Γ este finit satisfiabilă. Definim

$$\bar{e} : V \rightarrow \{0, 1\}, \quad \bar{e}(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde (ε_n) este șirul construit în Lema 2.33. Demonstrăm că \bar{e} este model al lui Γ . Fie $\varphi \in \Gamma$ arbitrară și fie $k \in \mathbb{N}$ a.î.

$\text{Var}(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. Avem că $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ este o submulțime finită a lui Γ .

66

Theorem 2.34 (Teorema de compacitate)

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Dem.: (continuare)

Aplicând proprietatea **P_k** , obținem un model e al lui φ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Atunci $\bar{e}(v) = e(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{Var}(\varphi)$. Din Propoziția 2.13 rezultă că $\bar{e}^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $\bar{e} \models \varphi$.

Prin urmare, \bar{e} este model al lui Γ , deci Γ este satisfiabilă.

" \Rightarrow " Evident.

□

67

FORMA NORMALĂ CONJUNCTIVĂ / DISJUNCTIVĂ

68

Definiția 2.35

Un **literal** este o

- ▶ variabilă (în care caz spunem că este **literal pozitiv**) sau
- ▶ negația unei variabile (în care caz spunem că este **literal negativ**).

Exemple: v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi; $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Convenție: $\bigvee_{i=1}^1 \varphi_i = \varphi_1$ și $\bigwedge_{i=1}^1 \varphi_i = \varphi_1$.

Definiția 2.36

O formulă φ este în **formă normală disjunctivă (FND)** dacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar, φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

69

Definiția 2.37

O formulă φ este în **formă normală conjunctivă (FNC)** dacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.

Așadar, φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Exemple

- ▶ $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- ▶ $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- ▶ $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- ▶ $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- ▶ $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC

70

Notăție: Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Propoziția 2.38

- Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg \varphi \sim \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.
- Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg \varphi \sim \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.

Dem.: Exercițiu.

71

Exemplu: Arătați că $\models v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_1 \wedge v_2)$.

v_1	v_2	$v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_1 \wedge v_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Acest tabel definește o funcție $F : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$

ε_1	ε_2	$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

72

Funcția asociată unei formule

Fie φ o formulă și $\text{Var}(\varphi) = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}\}$, unde $n \geq 1$ și $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

Fie $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$. Definim $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} : \text{Var}(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(v_{i_k}) = \varepsilon_k \text{ pentru orice } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Definim $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \in \{0, 1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) := e^+(\varphi),$$

unde $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este orice evaluare care extinde $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$, adică, $e(v_{i_k}) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(v_{i_k}) = \varepsilon_k$ pentru orice $k \in \{1, \dots, n\}$.

Conform Propoziției 2.13, definiția nu este ambiguă.

Definiția 2.39

Funcția asociată lui φ este $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \text{ pentru orice } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n.$$

Așadar, F_φ este funcția definită de tabela de adevăr pentru φ .

73

Funcția asociată unei formule

Propoziția 2.40

(i) Fie φ o formulă. Atunci

(a) $\models \varphi$ dacă F_φ este funcția constantă 1.

(b) φ este nesatisfiabilă dacă F_φ este funcția constantă 0.

(ii) Fie φ, ψ două formule astfel încât $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$. Atunci

(a) $\varphi \models \psi$ dacă $F_\varphi \leq F_\psi$.

(b) $\varphi \sim \psi$ dacă $F_\varphi = F_\psi$.

(iii) Există formule diferite φ, ψ a.î. $F_\varphi = F_\psi$.

74

Caracterizarea funcțiilor booleene

Definiția 2.41

O **funcție booleană** este o funcție $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, unde $n \geq 1$. Spunem că n este **numărul variabilelor** lui F .

Exemplu: Pentru orice formulă φ , F_φ este funcție Booleană cu n variabile, unde $n = |\text{Var}(\varphi)|$.

Teorema 2.42

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă φ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0$ pentru orice $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$,

luăm $\varphi := \bigvee_{i=1}^n (v_i \wedge \neg v_i)$. Avem că $\text{Var}(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$, așadar,

$F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Cum $v_i \wedge \neg v_i$ este nesatisfiabilă pentru orice i , rezultă că φ este de asemenea nesatisfiabilă. Deci, F_φ este funcția constantă 0.

75

Caracterizarea funcțiilor booleene

Altcumva, mulțimea

$$T := H^{-1}(1) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1\}$$

este nevidă.

Considerăm formula

$$\varphi := \bigvee_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in T} \left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} v_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg v_i \right).$$

Deoarece $\text{Var}(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$, avem că $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Se demonstrează că $H = F_\varphi$ (exercițiu suplimentar). □

76



Teorema 2.43

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ o funcție booleană arbitrară.

Atunci există o formulă ψ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1$ pentru orice $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, atunci luăm

$$\psi := \bigwedge_{i=1}^n (v_i \vee \neg v_i).$$

Altcumva, mulțimea

$$F := H^{-1}(0) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0\}$$

este nevidă.

Considerăm formula $\psi := \bigwedge_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in F} \left(\bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg v_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} v_i \right)$.

Se demonstrează că $H = F_\psi$ (**exercițiu suplimentar**).

□