细菌觅食算法报告

刘子旋，学号3150104437，计算机学院大三

2018 年 5 月 14 日

目录

1　基本概念

1.1　随机过程

随机过程的定义如下：

随机过程定义：设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$为一概率空间，另设集合T为一指标集合，如果对于所有$t \in T$，均有一随机变量 $X(t,\omega)$定义于概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$，则集合$\{X(t,\omega)|t \in T\}$为一随机过程。

其中，对于固定的ω, 比如ϖ, $\{X(t,\varpi), t \geq 0\}$被称为**路径（path）**或**轨迹（trajectory）**；对于固定的t，比如$\bar{t}$，集合$\{X(\bar{t},\omega), \omega \in \Omega\}$是时刻$\bar{t}$在该随机过程中的状态集，$X(\bar{t},\omega)$也就是时刻$\bar{t}$的随机变量。

对于这个定义，我们可以通过下例来帮助理解：

例：我们在某一时段对某一地区成人的身高和体重（X, Y）进行随机抽样，可得出

$$Z = (X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_1^2)$$

$$Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

这是某时段所考查随机变量的概率分布，如果*每隔10年*在同一地区做同样的随机抽样，得：

$$Z(\omega,0) = (X(\omega,0), Y(\omega,0)) \sim N(\mu_{01}, \mu_{02}, \rho_0, \sigma_{01}^2, \sigma_{02}^2)$$

第1个10年：$Z(\omega,1) = (X(\omega,1), Y(\omega,1)) \sim N(\mu_{11}, \mu_{12}, \rho_1, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2)$

第2个10年：$Z(\omega,2) = (X(\omega,2), Y(\omega,2)) \sim N(\mu_{21}, \mu_{22}, \rho_2, \sigma_{21}^2, \sigma_{22}^2)$

......

第t个10年：$Z(\omega,t) = (X(\omega,t), Y(\omega,t)) \sim N(\mu_{t1}, \mu_{t2}, \rho_t, \sigma_{t1}^2, \sigma_{t2}^2)$ $t = 0, 1, 2...$

因此$\{Z(\omega,t) = (X(t), Y(t)) : t \geq 0\}$表示的就是身高和体重这两个随机变量在不同时段的情况，而$Z(\omega,t)$就是一个随机过程。

1.2　布朗运动

布朗运动又被称为维纳过程，原指苏格兰生物学家R. Brown与1827年在显微镜下发现的花粉颗粒的不规则运动。以前都认为布朗运动的数学定义是爱因斯坦首先与1905年提出的，但其实早在1900年Bachelier就在他的

博士论文中提出了布朗运动，并把布朗运动运载股票价格的研究。标准布朗运动的数学性质有以下几点：

标准布朗运动的数学性质设连续时间随机过程$W_t : 0 \leq t < T$ 是$[0,T)$上的标准布朗运动，

- $W_0 = 0$
- **独立增量性**：对于有限个时刻$0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n < T$，随机变量

$$W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

  是独立的

- **正态性**：对任意的$0 \leq s < t < T$，$W_t - W_s$服从均值为0，方差为t-s的正态分布

1.3 随机微分方程

这一节，我们将介绍一类简单的随机微分方程。随机积分在应用中往往是在 Stratonovich 微积分意义的。此微积分的设计其基本的规则与标准微积分中的相同，如链规则和分部积分法。虽然操作的规则是相同的结论仍是非常不同的。Stratonovich 随机积分可以约化到 Itō 积分，数学上的标准的随机微分方程理论可以用于Stratonovich 随机微分方程。此外，Stratonovich 积分更适合的随机微积分在流形上的推广。很少随机积分可以解析形式解决的，随机数值积分因此是随机积分应用的重要问题。各种数值逼近收敛到 Stratonovich 积分，使其在随机微分方程中有重要地位。但是，最广泛使用的 Langevin 方程数值解的 Eule 格式却要求使用最广泛要求 Itō 形式的方程。

考虑一般的随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = h[X(t), t] + g[X(t), t]R(t)$$

其中

$$\overline{R(t)} = 0, \overline{R(t)R(t')} = 2D\delta(t - t')$$

噪声$R(t)$的每个δ函数跳跃引起$U(t)$的跳跃。这是多重噪声的非线性 Langevin 方程，它可能是一个非线性方程，并据说有乘性噪声(multiplicative noise)，

因涨落力量$R(t)$是乘以未知量的函数$R(t)$。相比之下， Langevin 方程有加性噪声(additive noise)，因为涨落系数与未知量无关。如前所述，形式上

$$R(t) = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

其中记号$\mathrm{d}W(t) = R(t)\mathrm{d}t$，$B(\omega, t)$是维纳过程, 增量

$$B(\omega, t) = B(\omega, t + \Delta t) - B(\omega, t)$$

是齐次和正态的。

非线性 Langevin 方程必须解释为积分方程

$$X(t) - X(0) = \int_0^t h[s, X(s)]\mathrm{d}s + \int_0^t g[s, X(s)]\mathrm{d}B$$

第一个积分是通常意义的，第二个积分是关于随机函数关于 Wiener 过程的积分。使得随机积分有意义的办法就是用分片常数函数近似$g[s, X(s)]$，即

$$\int_0^t g[s, X(s)]\mathrm{d}B \approx \sum_{i=0}^{n-1} g_i[s, X(s)]\mathrm{d}B_i = \sum_{i=0}^{n-1} g_i[s, X(s)][B(t_{i+1}) - B(t_i)], s \in [t_{i+1}, t_i]$$

其中$t_{i i=0} * n$是区间$[0, t]$的一个划分，然后考虑当区间$t_i - t_{i-1}$的最大值趋于 0 时和式的极限。 $g_i[s, X(s)], s \in [t_{i+1}, t_i]$的取值有两种选择：

- 在区间左端点t_i取值

  $$g_i[s, X(s) = G[t_i, X(t_i)]$$

  相应的随机积分

  $$\int_0^t g[s, X(s, \omega)]\mathrm{d}B(\omega, t)$$

  称为Ito积分

- 在区间端点取值求平均

  $$g_i[s, X(s)] = \frac{g[t_i, X(t_i)] + g[t_{i+1}, X(t_{i+1})]}{2}$$

  相应的随机积分

  $$\int_0^t g[s, X(\omega, s)] \,\text{¸}\mathrm{d}B(\omega, t)$$

  称为Stratonovich积分

要注意的是，与普通积分中取分片区间任意一点积分结果仍然不变不同的是，在随机积分中，s的取值不同，最后的积分结果也会不同。

2 随机微分方程的解

如果随机微分方程的漂移项μ和扩散项σ满足以下条件：

- **全局Lipschitz条件：** 对于所有的$x, y \in R$和$t \in [0, T]$，存在常数$K < +\infty$使得

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| < K|x - y|$$

- **线性增长条件：** 对于所有的$x \in R$和$t \in [0, T]$，存在常数$C < +\infty$使得

$$|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| < C(1 + |x|)$$

则随机微分方程存在唯一的、连续的强解使得：

$$E\{\int_0^T |X_t|^2 \mathrm{d}t\} < \infty$$

对于布朗运动$\mathrm{d}X_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$，在给定初值$X_{t_0}$的条件下，可以求出方程的解为

$$X_t = X_{t_0} + \mu(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t_0})$$

对于几何布朗运动$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t$，在给定初值$X_{t_0}$的条件下，可以求出方程的解为

$$X_t = X(t_0) exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0))]$$

不过并不是所有的随机微分方程都能解出显式解的，更多的随机微分方程只能通过迭代式求出数值解，也就是不断拟合解的路径来求数值解。通常有两种方式来对数值解进行拟合：

- **Euler格式：**

$$X_{i+1} = X_i + \mu(t_i, X_i)(t_{i+1-t_i}) + \sigma(t_i, X_i)(W_{i+1} - W_i)$$

- **Milstein格式：**

$$X_{i+1} = X_i + \mu(t_i, X_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, X_i)(W_{i+1} - W_i) \quad (1)$$
$$\frac{1}{2}\sigma(t_i, X_i)\sigma_y(t_i, X_i)\{(W_{i+1} - W_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)\} \quad (2)$$

其中

$$W_{i+1} - W_i = \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, i = 0, 1, ..., n-1$$

而$Z_1, ..., Z_n$是相互独立的标准正态随机变量。

3 随机微分方程的参数估计

这一节我们介绍一种随机微分方程的参数估计方法：极大似然估计。

考虑下面的随机微分方程：

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t;\theta)\mathrm{d}t + \sigma(X_t;\theta)\mathrm{d}W_t$$

其中$\theta \in \Theta \subset R^p$是p维参数，$\theta_0$是参数的真实值。函数$\mu : R \times \Theta \to R$和$\sigma : R \times \Theta \to (0, \infty)$是已知的，并且使随机微分方程的解存在。如果我们观测到该随机微分方程解的一条轨迹的离散采样$\{X_n, n \in N\}$，用这些数据来估计参数θ，得到参数的估计为$\hat{\theta}$。

假设$x_0, ..., x_N$是$X(t)$在均匀离散时刻$t_i = \Delta t$的观测，其中$i = 0, 1, ..., N, \Delta t = T/N.$

令$p(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1;\theta})$是从$(t_{k-1}, xk-1)$到$(t_k, x_k)$的传递概率密度，

假设初始状态的概率密度为$p_0(_0|\theta)$，似然函数为：

$$f(\theta) = p_0(x_0|\theta)\prod_{k=1}^{N} p(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1};\theta)$$

考虑SDE的Euler近似，有

$$X(t_k) = x_{k-1} + \mu(t_{k-1}, x_{k-1};\theta)\Delta t + \sigma(t_{k-1}, x_{k-1};\theta)\sqrt{\Delta t}\eta_k$$

其中$\eta_k \sim N(0,1)$。因此

$$p(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1};\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k}} exp(-\frac{(x_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2})$$

其中$\mu_k = x_{k-1} + \mu(t_{k-1}, x_{k-1};\theta), \sigma_k = \sigma(t_{k-1}, x_{k-1};\theta)\sqrt{\Delta t}$

当然，对于随机微分方程的参数估计还有高阶矩法、期望方差法等方法，这里就不一一介绍了。