随机微分方程

张恒 21721261

2018 年 5 月 14 日

1　基本概念

1.1　随机过程

随机过程的定义如下:

随机过程定义: 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, 另设集合 T 为一指标集合, 如果对于所有 $t \in T$，均有一随机变量 $X(t, \omega)$ 定义于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$，则集合 $\{X(t, \omega) | t \in T\}$ 为一随机过程。

其中，对于固定的 ω, 比如 $\overline{\omega}$, $\{X(t, \overline{\omega}), t \geq 0\}$ 被称为**路径（path）**或**轨迹（trajectory）**；对于固定的 t，比如 $\bar{t}$，集合 $\{X(\bar{t}, \omega), \omega \in \Omega\}$ 是时刻 $\bar{t}$ 在该随机过程中的状态集，$X(\bar{t}, \omega)$ 也就是时刻 $\bar{t}$ 的随机变量。

对于这个定义，我们可以通过下例来帮助理解:

例: 我们在某一时段对某一地区成人的身高和体重（X, Y）进行随机抽样，可得出

$$Z = (X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_1^2)$$

$$Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

这是某时段所考查随机变量的概率分布，如果*每隔 10 年*在同一地区做同样的随机抽样，得:

$$Z(\omega, 0) = (X(\omega, 0), Y(\omega, 0)) \sim N(\mu_{01}, \mu_{02}, \rho_0, \sigma_{01}^2, \sigma_{02}^2)$$

第 1 个 10 年: $Z(\omega, 1) = (X(\omega, 1), Y(\omega, 1)) \sim N(\mu_{11}, \mu_{12}, \rho_1, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2)$

第 2 个 10 年: $Z(\omega, 2) = (X(\omega, 2), Y(\omega, 2)) \sim N(\mu_{21}, \mu_{22}, \rho_2, \sigma_{21}^2, \sigma_{22}^2)$

......

第 t 个 10 年: $Z(\omega, t) = (X(\omega, t), Y(\omega, t)) \sim N(\mu_{t1}, \mu_{t2}, \rho_t, \sigma_{t1}^2, \sigma_{t2}^2)$ $t = 0, 1, 2...$

因此 $\{Z(\omega, t) = (X(t), Y(t)) : t \geq 0\}$ 表示的就是身高和体重这两个随机变量在不同时段的情况，而 $Z(\omega, t)$ 就是一个随机过程。

1.2　布朗运动

布朗运动又被称为维纳过程，原指苏格兰生物学家 R. Brown 与 1827 年在显微镜下发现的花粉颗粒的不规则运动。以前都认为布朗运动的数学定义是爱因斯坦首先与 1905 年提出的，但其实早在 1900 年 Bachelier 就在

他的博士论文中提出了布朗运动，并把布朗运动运载股票价格的研究。标准布朗运动的数学性质有以下几点：

标准布朗运动的数学性质设连续时间随机过程 $W_t : 0 \leq t < T$ 是 $[0,T)$ 上的标准布朗运动，

- $W_0 = 0$
- **独立增量性**： 对于有限个时刻 $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n < T$，随机变量

  $$W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

  是独立的
- **正态性**： 对任意的 $0 \leq s < t < T$，$W_t - W_s$ 服从均值为 0，方差为 t-s 的正态分布

1.3 随机微分方程

这一节，我们将介绍一类简单的随机微分方程。随机积分在应用中往往是在 Stratonovich 微积分意义的。此微积分的设计其基本的规则与标准微积分中的相同，如链规则和分部积分法。虽然操作的规则是相同的结论仍是非常不同的。Stratonovich 随机积分可以约化到 Itō 积分，数学上的标准的随机微分方程理论可以用于 Stratonovich 随机微分方程。此外，Stratonovich 积分更适合的随机微积分在流形上的推广。很少随机积分可以解析形式解决的，随机数值积分因此是随机积分应用的重要问题。各种数值逼近收敛到 Stratonovich 积分，使其在随机微分方程中有重要地位。但是，最广泛使用的 Langevin 方程数值解的 Eule 格式却要求使用最广泛要求 Itō 形式的方程。

考虑一般的随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = h[X(t), t] + g[X(t), t]R(t)$$

其中

$$\overline{R(t)} = 0, \overline{R(t)R(t')} = 2D\delta(t - t')$$

噪声 $R(t)$ 的每个 δ 函数跳跃引起 $U(t)$ 的跳跃。这是多重噪声的非线性 Langevin 方程，它可能是一个非线性方程，并据说有乘性噪声 (multiplicative noise)，因涨落力量 $R(t)$ 是乘以未知量的函数 $R(t)$。相比之下，Langevin

方程有加性噪声 (additive noise)，因为涨落系数与未知量无关。如前所述，形式上

$$R(t) = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

其中记号 $\mathrm{d}W(t) = R(t)\mathrm{d}t$，$B(\omega, t)$ 是维纳过程, 增量

$$B(\omega, t) = B(\omega, t + \Delta t) - B(\omega, t)$$

是齐次和正态的。

非线性 Langevin 方程必须解释为积分方程

$$X(t) - X(0) = \int_0^t h[s, X(s)]\mathrm{d}s + \int_0^t g[s, X(s)]\mathrm{d}B$$

第一个积分是通常意义的，第二个积分是关于随机函数关于 Wiener 过程的积分。使得随机积分有意义的办法就是用分片常数函数近似 $g[s, X(s)]$，即

$$\int_0^t g[s, X(s)]\mathrm{d}B \approx \sum_{i=0}^{n-1} g_i[s, X(s)]\mathrm{d}B_i = \sum_{i=0}^{n-1} g_i[s, X(s)][B(t_{i+1}) - B(t_i)], s \in [t_{i+1}, t_i]$$

其中 $t_{i i=0} * n$ 是区间 $[0, t]$ 的一个划分，然后考虑当区间 $t_i - t_{i-1}$ 的最大值趋于 0 时和式的极限。$g_i[s, X(s)], s \in [t_{i+1}, t_i]$ 的取值有两种选择：

- 在区间左端点 t_i 取值

  $$g_i[s, X(s) = G[t_i, X(t_i)]$$

  相应的随机积分

  $$\int_0^t g[s, X(s, \omega)]\mathrm{d}B(\omega, t)$$

  称为 Ito 积分

- 在区间端点取值求平均

  $$g_i[s, X(s)] = \frac{g[t_i, X(t_i)] + g[t_{i+1}, X(t_{i+1})]}{2}$$

  相应的随机积分

  $$\int_0^t g[s, X(\omega, s)]\ \mathrm{d}B(\omega, t)$$

  称为 Stratonovich 积分

要注意的是，与普通积分中取分片区间任意一点积分结果仍然不变不同的是，在随机积分中，s 的取值不同，最后的积分结果也会不同。

2 随机微分方程的解

如果随机微分方程的漂移项 μ 和扩散项 σ 满足以下条件:

- **全局 Lipschitz 条件**: 对于所有的 $x, y \in R$ 和 $t \in [0, T]$，存在常数 $K < +\infty$ 使得

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| < K|x-y|$$

- **线性增长条件**: 对于所有的 $x \in R$ 和 $t \in [0, T]$，存在常数 $C < +\infty$ 使得

$$|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| < C(1+|x|)$$

则随机微分方程存在唯一的、连续的强解使得:

$$E\{\int_0^T |X_t|^2 \mathrm{d}t\} < \infty$$

对于布朗运动 $\mathrm{d}X_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$，在给定初值 X_{t_0} 的条件下，可以求出方程的解为

$$X_t = X_{t_0} + \mu(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t_0})$$

对于几何布朗运动 $\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t$，在给定初值 X_{t_0} 的条件下，可以求出方程的解为

$$X_t = X(t_0) exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0))]$$

不过并不是所有的随机微分方程都能解出显式解的，更多的随机微分方程只能通过迭代式求出数值解，也就是不断拟合解的路径来求数值解。通常有两种方式来对数值解进行拟合:

- **Euler 格式**:

$$X_{i+1} = X_i + \mu(t_i, X_i)(t_{i+1-t_i}) + \sigma(t_i, X_i)(W_{i+1} - W_i)$$

- **Milstein 格式**:

$$X_{i+1} = X_i + \mu(t_i, X_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, X_i)(W_{i+1} - W_i) \quad (1)$$
$$\frac{1}{2}\sigma(t_i, X_i)\sigma_y(t_i, X_i)\{(W_{i+1} - W_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)\} \quad (2)$$

其中

$$W_{i+1} - W_i = \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, i = 0, 1, ..., n-1$$

而 $Z_1, ..., Z_n$ 是相互独立的标准正态随机变量。

3 随机微分方程的参数估计

这一节我们介绍一种随机微分方程的参数估计方法：极大似然估计。

考虑下面的随机微分方程：

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t;\theta)\mathrm{d}t + \sigma(X_t;\theta)\mathrm{d}W_t$$

其中 $\theta \in \Theta \subset R^p$ 是 p 维参数，θ_0 是参数的真实值。函数 $\mu : R \times \Theta \to R$ 和 $\sigma : R \times \Theta \to (0,\infty)$ 是已知的，并且使随机微分方程的解存在。如果我们观测到该随机微分方程解的一条轨迹的离散采样 $\{X_n, n \in N\}$，用这些数据来估计参数 θ，得到参数的估计为 $\hat{\theta}$。

假设 $x_0, ..., x_N$ 是 $X(t)$ 在均匀离散时刻 $t_i = \Delta t$ 的观测，其中 $i = 0, 1, ..., N, \Delta t = T/N$.

令 $p(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1;\theta})$ 是从 $(t_{k-1}, xk-1)$ 到 (t_k, x_k) 的传递概率密度，

假设初始状态的概率密度为 $p_0(_0|\theta)$，似然函数为：

$$f(\theta) = p_0(x_0|\theta)\prod_{k=1}^{N} p(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1};\theta)$$

考虑 SDE 的 Euler 近似，有

$$X(t_k) = x_{k-1} + \mu(t_{k-1}, x_{k-1};\theta)\Delta t + \sigma(t_{k-1}, x_{k-1};\theta)\sqrt{\Delta t}\eta_k$$

其中 $\eta_k \sim N(0,1)$。因此

$$p(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1};\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k}} exp(-\frac{(x_k-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2})$$

其中 $\mu_k = x_{k-1} + \mu(t_{k-1}, x_{k-1};\theta), \sigma_k = \sigma(t_{k-1}, x_{k-1};\theta)\sqrt{\Delta t}$

当然，对于随机微分方程的参数估计还有高阶矩法、期望方差法等方法，这里就不一一介绍了。