分解定理

时侠圣 (11710009)

2018 年 5 月 12 日

1 背景

多说站在食物链顶端的动物们，例如狮子、老虎等主要靠视觉来搜寻猎物，和靠气味觅食（大白鲨）不同，视觉不存在所谓的梯度差，看不见就是看不见，没有动物具有透视眼。所以觅食策略对于狮子老虎这样的陆地动物是很重要的。在不知道猎物位置的情况下，布朗运动或许是最自然的方法了。布朗运动是一个随机过程，它的步长服从正态分布。离散版的布朗运动叫做随机游走（Random walk）, 它的步长和方向都是离散的。尽管布朗运动和随机游走是两个概念，也各自发展出了一套不同的理论，但两者的数学本质是一样的。如下布朗运动的轨迹图。

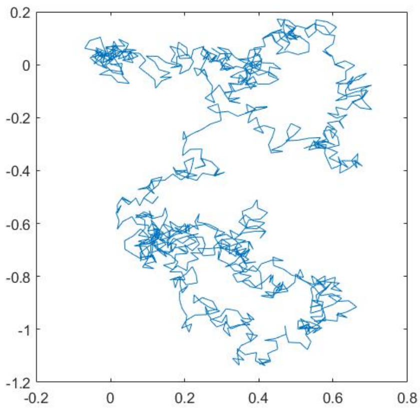

图 1: 布朗运动轨迹图

在物理学家眼里，布朗运动可以用郎之万方程来描述：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) + F^{'}(t). \tag{1}$$

其中 $f(t)$ 分成两部分，一部分为阻力 $-\alpha v$; 一部分为随机作用力 $F(t)$。粘滞阻力仍来自介质分子对颗粒的碰撞，将颗粒看作半径为 a 的小球，在粘滞系数为 η 的流体中运动，则有 $\alpha = 6\pi\eta a$。

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x}(t) + \eta(t). \tag{2}$$

其中 $\eta(t)$ 是均值为 0，方差为常数的随机过程。更确切地讲，是白噪声过程。

因此郎之万方程本质上就是考虑了随机误差的牛顿第二定律，这样的方程又叫做随机微分方程（Stochastic Differential Equation）。尽管郎之万是第一个提出随机过程的人，但作为物理学家，他更关心这些方程是否符合实际物理现象，而不关心数学上的严谨性。因此这种模型并没有立即受到数据家的重视。

到了二十世纪中叶，日本数学家伊藤清和苏联数学家 Stratonovich 先后使用概率论的方法，把随机微分方程发展成严谨的数学概念。尽管如此，但两人对随机微分方程定义各有不同，这也显示了随机性和确定性的本质差异。此外，随机微分方程多用于对一些多样化现象进行建模，比如不停变动的股票价格、部分物理现象如热扰动等。

如果捕食者像无头苍蝇一样漫无目的的做布朗运动，真的能很有效的地寻到到猎物吗？在数学上可以证明，布朗运动和分子自由扩散一样，单位速度的分子在时间 t 内平均只有 $\sqrt{t}$ 的位移量。捕食者若采用此种策略，可能需要踏遍千山万水才能成功了。

那么有没有比布朗运动更高效的搜索方法呢？一组巴西物理学家于 1999 年提出了一个设想，认为“莱维飞行”比布朗运动有更高的搜索效率，因此自然会偏向与采用“莱维飞行”捕食的生物。

2 莱维分布

莱维分布（Levy Distribution）是由 P.Levy 在 19 世纪 30 年代提出的一类分布，这种分布有两个参数：α 和 γ。参数 $\gamma > 0$，参数 α 用于控制分布的形状，且满足 $0 < \alpha \leq 2$。事实上当 $\gamma = 1$ 时，莱维分布就转换为柯西

分布，而当 $\gamma = 2$ 时，莱维分布则为正态分布。莱维分布的概率密度函数为

$$L_{\alpha,\gamma} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\gamma q^\alpha} cos(qy)dq, y \in \mathcal{R}. \tag{3}$$

上述积分很难积，因此现有的莱维分布基本上使用数值方法计算。设 x, y 是两个独立同分布的随机变量，且均为标准正态分布，令随机变量 v 满足：

$$v = \frac{x}{\sqrt{y}} \tag{4}$$

则随机变量 $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为

$$z_n = \frac{1}{\alpha\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} v_j \tag{5}$$

在概率论中，我们可以用特征函数来描述一个随机变量。此时，我们有如下重要定理。

定理 1(莱维 -辛钦公式)：莱维过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的特征函数（傅里叶变换）表达如下：

$$\phi_X(\theta)(t) := E[e^{i\theta X(t)}] = \exp(t(ai\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathcal{R}\setminus\{0\}} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I_{|x|<1}) \prod(dx))). \tag{6}$$

这个定理的证明比较复杂，依赖于测度论中的一系列结果。收敛于莱维分布。现在提供一个 matlab 例子。轨迹如下：随机变量 X 是无限可分

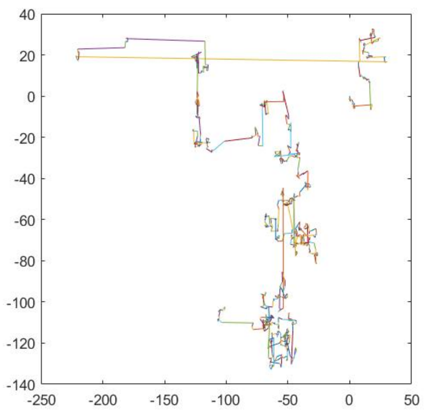

图 2: Levy 分布轨迹图

的，除非它的该率分布 p_x 是无限可分的，例如，$X = Y_1^{(n)} + ... + Y_n^{(n)}$,

其中 $Y_1^{(n)},...,Y_n^{(n)}$ 是独立同分布。那么 X 的特征函数可以写成 $\Phi_X(u)=(\Phi_{Y_1^{(n)}}(u))^n$。莱维过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是一种随机过程，它满足的条件比布朗运动宽松：

1.$X(0)$ 几乎处处为 0；

2. 独立增量性；

3. 稳定增量性；

4. 样本轨道右连续。

连续的布朗运动和离散的泊松过程都是莱维过程的特例。因此可以大胆猜测，莱维过程就是带“跳跃”的布朗运动。正是这些不连续性的“跳跃”给予莱维过程“重尾”的特性。

独立增量：设 $X(t)$ 是一个连续时间上的随机过程。也就是说，对于任何固定的 $t\geq 0$，$X(t)$ 是一个随机变量。过程的增量为差值 $X(s)-X(t)$。独立增量意味着对于任意时间 $s>t>u>v, X(s)-X(t)$ 与 $X(u)-X(v)$ 相互独立。

稳定增量： 如果增量 $X(s)-X(t)$ 的分布只依赖于时间间隔 $s-t$，则称增量是稳定的。例如对于维纳过程，增量 $X(s)-X(t)$ 服从均值为 0，方差为 $s-t$ 的正态分布。对于泊松过程，增量 $X(s)-X(t)$ 服从指数为 $s-t$ 的泊松分布。

3 分解定理

在给出莱维 -伊藤分解定理之前，我们给出如下定义和推论。

定义 1： 莱维可测是满足如下条件的 $\mathbf{R}^d\backslash\{0\}$ 上的测度 v, 使得

$$\int(|y|^2\wedge 1)v(dy)<\infty. \tag{7}$$

其中 $|y|^2\wedge 1=\begin{cases} 1, & |x|>1 \\ y^2, & |x|\leq 1 \end{cases}$

定义函数 $X:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 是 Cadlag 过程，即 X 是右连续左极限存在。令 $\Delta X(t)=X(t)-X(t-)$(由于左极限的存在) 且定义如下泊松随机测度

$$N(t,A)=\sharp\{\Delta X(s)\in A:s\in[0,t]\}. \tag{8}$$

那么有如下结论：

$(1)N(1,B_\varepsilon^c(0))<\infty$.

(2)$N(1,\mathbf{R}\backslash\{0\})$ 是可数的。

令 A 是有下界的，i.e., $0 \notin \overline{A}$. 那么 $N(t,A), t \geq 0$ 是泊松过程且强度为 $\mu(A) = \mathbf{E}[N(1,A)]$. 很明显有结论 $\mu(A) < \infty$ 不管 A 是否有下界。所以测度 μ 是 $\sigma-$ 有限的。

推论 1： (1) 对任意的 $t > 0, \omega \in \Omega, N(t,\cdot)(\omega)$ 在 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d\backslash\{0\})$ 上是计数可测的。

(2) 对于任意的有下界的 A,$N(t,A), t \geq 0$ 是泊松过程且具有如下强度 $\mu(A) = \mathbf{E}[N(1,A)]$.

(3) 补 $\tilde{N}(t,A) = N(t,A) - t\mu(A)$ 是值鞅可测的。对于有下界的 A, $\tilde{N}(t,A)$ 是一个鞅。

令 $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 是波莱尔可测函数，A 有下界，那么对任意 $t > 0, \omega \in \Omega$, 我们定义如下关于 f 泊松积分通过一个随机有限和。

$$\int_A f(x)N(t,dx)(\omega) = \sum_{x\in A} f(x)N(t,\{x\})(\omega). \tag{9}$$

定理 2： 令 A 有下界，则

(1) 对任意的 $\int_A f(x)N(t,dx), t \geq 0$ 是复合泊松过程，带有如下特征函数：

$$\mathbf{E}[exp\{iu\cdot\int_A f(x)N(t,dx)\}] = exp\{t\int_A (e^{iu\cdot x} - 1)\mu_f(dx)\}. \tag{10}$$

其中 $u \in \mathbf{R}^d, \mu_f = \mu \circ f^{-1}$.

(2) 如果有 $f \in L^1(A,\mu_A)$，那么有

$$\mathbf{E}[\int_A f(x)N(t,dx)] = t\int_A f(x)\mu(dx). \tag{11}$$

(3) 如果有 $f \in L^2(A,\mu_A)$，那么有

$$Var[|\int_A f(x)N(t,dx)|] = t\int_A |f(x)|^2\mu(dx). \tag{12}$$

从定理 2 可以看出，如果 $f \in L^1(A,\mu_A)$，一个泊松积分也许不一定全都有有限期望。对于此，我们定义如下补泊松积分：

$$\int_A f(x)\tilde{N}(t,dx) = \int_A f(x)N(t,dx) - t\int_A f(x)\mu(dx). \tag{13}$$

则有如下结论：

(1) $\int_A f(x)\tilde{N}(t,dx), t \geq 0$ 是一个鞅。

(2) 特征函数：

$$\mathbf{E}[exp\{iu\cdot\int_A f(x)\tilde{N}(t,dx)\}] = exp\{t\int_A (e^{iu\cdot x} - 1 - iu\cdot x)\mu_f(dx)\}. \quad (14)$$

其中 $u\in\mathbf{R}^d, \mu_f = \mu\circ f^{-1}$.

(3) 如果有 $f\in L^2(A,\mu_A)$，那么有

$$Var[|\int_A f(x)\tilde{N}(t,dx)|] = t\int_A |f(x)|^2\mu(dx). \quad (15)$$

对于有下界的 A 和任意的 $t>0$，$\int_A xN(t,dx)\sum_{0\le u\le t}\Delta X(u)1_A(\Delta X(u))$ 是集合 A 中不超过时间 t 的所有跳变值和。由于轨迹 X 是 Cadlag, 所以上述是个有限随机和。特别地，$\int_{|x|\ge 1} xN(t,dx)$is 所有大于 1 的跳变之和。也就是说是一个带有有限次扰动的复合泊松过程。相反地，也可以证明 $X(t)-\int_{|x|\ge 1} xN(t,dx)$ 带有有限次有次序动作的莱维过程。但是也许有无界扰动。所以我们可以定义

$$b = \mathbf{E}[X(1) - \int_{|x|\ge 1} xN(1,dx)]. \quad (16)$$

现在把关注度放在小跳变上来。引入 $M(t,A) = \int_A f(x)\tilde{N}(t,dx)$. 令 $A_m = \{x : \frac{1}{m+1} < |x| \le 1\}$. 可以证明在 L^2 里，当 $m\to\infty$ 时，我们有 $M(t,A_m)\to\int_{|x|<1} x\tilde{N}(t,dx)$。所以 $\int_{|x|<1} x\tilde{N}(t,dx)$ 是一个鞅。取极限得

$$\mathbf{E}[exp\{iu\cdot\int_A x\tilde{N}(t,dx)\}] = exp\{t\int_A (e^{iu\cdot x} - 1 - iu\cdot x)\mu(dx)\}. \quad (17)$$

最后考虑如下随机过程

$$W_A(t) = X(t) - bt - \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t,dx) - \int_{|x|\ge 1} xN(t,dx). \quad (18)$$

那么随机过程 $W_A(t)$ 是带有连续采样路径的中心鞅。利用布朗运动的莱维特征化，我们有 $W_A(t)$ 就是协方差为 A 的布朗运动。

X 是莱维过程。那么存在 $b\in\mathbf{R}^d$, 协方差为 A 的布朗运动 $W_A(t)$,$\mathbf{R}^+\times\{\mathbf{R}^d\backslash\{0\}\}$ 独立的泊松随机测度 N 使得下式成立：

$$X(t) = bt + W_A(t) + \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t,dx) + \int_{|x|\ge 1} xN(t,dx). \quad (19)$$

其中平方可积鞅 (L^2-鞅)$\int_{|x|<1} x\tilde{N}(t,dx)$ 是所有小跳变的补和。上述跳变是以 1 为界的，可以推广至任意实数 $R>0$，我们有

$$X(t) = b_R t + W_A(t) + \int_{|x|<R} x\tilde{N}(t,dx) + \int_{|x|\ge R} xN(t,dx). \quad (20)$$

其中 $b_R = \mathbf{E}[X(1) - \int_{|x|\geq R} xN(1,dx)]$. 可以计算如下：

(1) 如果 $1 < R < \infty$, 有 $b_R = b + \int_{1\leq |x|x<R} x\mu(dx)$.

(2) 如果 $0 < R < 1$, 有 $b_R = b - \int_{R\leq |x|x<1} x\mu(dx)$.

是否可以去除上届约束 R 呢？此时我们有

$$X(t) = b_\infty t + W_A(t) + \int_{|x|\geq 0} x\tilde{N}(t,dx). \tag{21}$$

结论是可以的，如果我们有 $\mathbf{E}[X(1)] < \infty$。此时，我们有 $b_\infty = \mathbf{E}[X(1)] < \infty$.

同时，我们也可用通俗的语言表述上述定理。

定理 2(莱维 -伊藤分解)：每个莱维过程 $\{X(t), t\geq 0\}$ 都可以分解为 $\{S(t), t\geq 0\}$,$\{Y(t), t\geq 0\}$ 和 $\{Z(t), t\geq 0\}$ 三个子过程，其中：

1.$S(t)$ 是维纳过程（就是布朗运动，莱维过程的连续部分）；

2.$Y(t)$ 是复合泊松过程（刻画了较极端的“跳跃”现象）；

3.$Z(t)$ 是平方可积的离散鞅（刻画了较小的“跳跃”现象）。