# 随机微分方程介绍

张恒

2018 年 4 月 16 日

# 大纲

- 基本概念：
  随机过程、布朗运动、Ito 积分、SDE...
- SDE 的数值解
- SDE 的参数估计

**例**：我们在某一时段对某一地区成人的身高和体重（X, Y）进行随机抽样，可得出

$$Z = (X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_1^2)$$

$$Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

这是某时段所考查随机变量的概率分布，如果每隔 *10* 年在同一地区做同样的随机抽样，得：

$$Z(\omega, 0) = (X(\omega, 0), Y(\omega, 0)) \sim N(\mu_{01}, \mu_{02}, \rho_0, \sigma_{01}^2, \sigma_{02}^2)$$

第 1 个 10 年：$Z(\omega, 1) = (X(\omega, 1), Y(\omega, 1)) \sim N(\mu_{11}, \mu_{12}, \rho_1, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2)$
第 2 个 10 年：$Z(\omega, 2) = (X(\omega, 2), Y(\omega, 2)) \sim N(\mu_{21}, \mu_{22}, \rho_2, \sigma_{21}^2, \sigma_{22}^2)$
……
第 t 个 10 年：$Z(\omega, t) = (X(\omega, t), Y(\omega, t)) \sim N(\mu_{t1}, \mu_{t2}, \rho_t, \sigma_{t1}^2, \sigma_{t2}^2)$
$t = 0, 1, 2...$
因此 $\{Z(\omega, t) = (X(t), Y(t)) : t \geq 0\}$ 表示的就是身高和体重这两个随机变量在不同时段的情况。

# 随机过程

**定义 (随机过程)**

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间，另设集合 T 为一指标集合，如果对于所有 $t \in T$，均有一随机变量 $X(t, \omega)$ 定义于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$，则集合 $\{X(t, \omega) | t \in T\}$ 为一随机过程

- 对于固定的 $\omega$, 比如 $\varpi$, $\{X(t, \varpi), t \geq 0\}$ 被称为**路径（path）**或**轨迹（trajectory）**
- 对于固定的 t，比如 $\bar{t}$，集合 $\{X(\bar{t}, \omega), \omega \in \Omega\}$ 是时刻 $\bar{t}$ 在该随机过程中的状态集，$X(\bar{t}, \omega)$ 也就是时刻 $\bar{t}$ 的随机变量

# 布朗运动

## 标准布朗运动的数学性质.

设连续时间随机过程 $W_t : 0 \le t < T$ 是 $[0, T)$ 上的标准布朗运动，

- $W_0 = 0$
- **独立增量性**：对于有限个时刻 $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$，随机变量

$$W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

  是独立的
- **正态性**：对任意的 $0 \le s < t < T$，$W_t - W_s$ 服从均值为 0，方差为 t-s 的正态分布

□

# 随机微分方程

一般的随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = h[X(t), t] + g[X(t), t]R(t)$$

形式上

$$R(t) = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

其中记号 $\mathrm{d}W(t) = R(t)\mathrm{d}t$，$B(\omega, t)$ 是维纳过程
对上式求积分，得：

$$X(t) - X(0) = \int_0^t h[s, X(s)]\mathrm{d}s + \int_0^t g[s, X(s)]\mathrm{d}B$$

第一个积分是普通微积分的，第二个积分是维纳过程的随机函数的积分
布朗运动：$\mathrm{d}X_t = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t$
几何布朗运动：$\mathrm{d}X_t = \mu X_t\mathrm{d}t + \sigma X_t\mathrm{d}W_t$

# 随机积分的求解

与普通微积分的牛顿莱布尼茨公式采用分区间近似求和相同，随机微积分中也是用分片的常数函数来近似 $g[s, X(s)]$，即

$$\int_0^t g[s, X(s)]\mathrm{d}B \approx \sum_{i=0}^{n-1} g_i[s, X(s)]\mathrm{d}B_i = \sum_{i=0}^{n-1} g_i[s, X(s)][B(t_{i+1})-B(t_i)], s \in [t_{i+1}, t_i]$$

其中 s 的取值有两种：

- 在区间左端点 $t_i$ 取值

  $$g_i[s, X(s)] = G[t_i, X(t_i)]$$

  相应的随机积分

  $$\int_0^t g[s, X(s, \omega)]\mathrm{d}B(\omega, t)$$

  称为 Ito 积分
- 在区间端点取值求平均

  $$g_i[s, X(s)] = \frac{g[t_i, X(t_i)] + g[t_{i+1}, X(t_{i+1})]}{2}$$

  相应的随机积分

  $$\int_0^t g[s, X(\omega, s)]\ \mathrm{d}B(\omega, t)$$

  称为 Stratonovich 积分

设 $g[t, B(t)] = B(t)$, 则在 Ito 积分中：

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t B(s)\mathrm{d}B && (1)\\
&\approx -\sum_{i=0}^{n-1} B_i(B_i - B_{i+1}) && (2)\\
&= -[B_0^2 - B_0 B_1 + B_0^2 - B_0 B_1 + \ldots + B_{n-1}^2 - B_{n-1}B_n] && (3)\\
&= -\frac{1}{2}[B_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(B_{i+1} - B_i)^2 - B_n^2] = \frac{1}{2}(B_t^2 - B_0^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta B_i^2 && (4)
\end{aligned}
$$

在 Stratonovich 积分中：

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^t B(s)\,\mathrm{d}B \approx \sum_{i=0} n - 1\frac{1}{2}[B(t_{i+1}) + B(t_i)][B(t_{i+1}) - B(t_i)] && (5)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0} n - 1[B^2(t_{i+1}) - B^2(t_i)] && (6)\\
&= \frac{1}{2}[B^2(t_1) - B^2(t_0) + B^2(t_2) - B^2(t_1) + \ldots + B^2(t_n) - B^2(t_{n-1})] && (7)\\
&= \frac{1}{2}[B^2(t_n) - B^2(t_0)] = \frac{1}{2}B^2(t) && (8)
\end{aligned}
$$

# Ito 公式

普通微积分中，若 X 连续可微，则

$$X(t) - X(0) = \sum_{i=1}^{n}[X(t_i) - X(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} X'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_0^t X'(s)\mathrm{d}s$$

将 t 替换成 $B_t$，此时 $\xi_i$ 是介于 $B_{i-1}$ 和 $B_i$ 之间的点，$\xi_i$ 在区间不同位置的取值会影响积分值，Ito 将取 $\xi_i$ 为左端点进行求和，这就需要将泰勒公式多展开一阶 $X(B_{t_j}) - X(B_{t_{j-1}}) = X'(B_{t_{j-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + \frac{1}{2}X''(\xi_j)(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2$
右端第一项求和，得

$$\sum_{j=1}^{n} X'(B_{t_{j-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \to \int_0^t X'(B_s)\mathrm{d}B_s$$

右端第二项求和，

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}X''(\xi_j)(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \to \frac{1}{2}\int_0^t X''(B_s)\mathrm{d}s$$

即 $X(B_t) = X(B_0) + \int_0^t X'(B_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t X''(B_s)\mathrm{d}s$
微分形式：$\mathrm{d}X(B_t) = X'(B_t)\mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}F''(B_t)\mathrm{d}t$

假设 X(t) 满足几何布朗运动的 SDE：

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t$$

如何解出 X(t)?
设 $Y(t) = lnX(t)$，则 $\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{X}$，$\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} = -\frac{1}{X^2}$，由 Ito 公式得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y &= \frac{\partial Y}{\partial X}\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}(\mathrm{X}_t)^2 && (9)\\
&= \frac{1}{X}(\mu X \mathrm{d}W) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{X^2})\sigma^2 X^2 \mathrm{d}t && (10)\\
&= \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W - \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{d}t && (11)\\
&= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W && (12)\\
& && (13)
\end{aligned}$$

则 Y(t) 是布朗运动，因此

$$Y(t) = Y(t_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - t_0) + \sigma(W(t) - Wt_0) \tag{14}$$

$$X(t) = exp(Y(t)) \tag{15}$$

$$= X(t_0)exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0))] \tag{16}$$

# SDE 的数值解

并不是所有的 SDE 都能解出显式解，更多的 SDE 只能通过迭代式求数值解，求 SDE 数值解的过程也就是模拟出解的路径。

**Euler 格式.**

$$X_{i+1} = X_i + \mu(t_i, X_i)(t_{i+1-t_i}) + \sigma(t_i, X_i)(W_{i+1} - W_i)$$

□

**Milstein 格式.**

$$X_{i+1} = X_i + \mu(t_i, X_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, X_i)(W_{i+1} - W_i) \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}\sigma(t_i, X_i)\sigma_y(t_i, X_i)\{(W_{i+1} - W_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)\} \tag{18}$$

□

其中

$$W_{i+1} - W_i = \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, i = 0, 1, ..., n-1$$

而 $Z_1, ..., Z_n$ 是相互独立的标准正态随机变量

- 极大似然估计

以布朗运动 $\mathrm{d}X_t = \mu(X_t;\theta)\mathrm{d}t + \sigma(X_t;\theta)\mathrm{d}W_t$ 为例假设 $x_0, \ldots, x_N$ 是 $X(t)$ 在均匀离散时刻 $t_i = \Delta t$ 的观测，其中 $i = 0, 1, \ldots, N, \Delta t = T/N.$
令 $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1;\theta})$ 是从 $(t_{k-1}, xk-1)$ 到 $(t_k, x_k)$ 的传递概率密度，
假设初始状态的概率密度为 $p_0(_0|\theta)$，似然函数为：

$$f(\theta) = p_0(x_0|\theta)\prod_{k=1}^{N} p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1};\theta)$$

考虑 SDE 的 Euler 近似，有

$$X(t_k) = x_{k-1} + \mu(t_{k-1}, x_{k-1};\theta)\Delta t + \sigma(t_{k-1}, x_{k-1};\theta)\sqrt{\Delta t}\eta_k$$

其中 $\eta_k \sim N(0,1)$。因此

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1};\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k}} exp(-\frac{(x_k-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2})$$

- 实例：种群动力学

考虑美洲鹤 1939-1985 年的种群数据，假设 t 时刻种群大小 X(t) 满足 SDE：

$$dX(t) = \theta_1 X(t)dt + \theta_2 \sqrt{X(t)}dW(t), X(0) = 18$$