觅食算法

May 15, 2018

目录

分解定理

觅食策略

多说站在食物链顶端的动物们，例如狮子、老虎等主要靠视觉来搜寻猎物，和靠气味觅食（大白鲨）不同，视觉不存在所谓的梯度差，看不见就是看不见，没有动物具有透视眼。所以觅食策略对于狮子老虎这样的陆地动物是很重要的。在不知道猎物位置的情况下，布朗运动或许是最自然的方法了。布朗运动是一个随机过程，它的步长服从正态分布。

离散版的布朗运动叫做随机游走（Random walk），它的步长和方向都是离散的。尽管布朗运动和随机游走是两个概念，也各自发展出了一套不同的理论，但两者的数学本质是一样的。

布朗运动轨迹

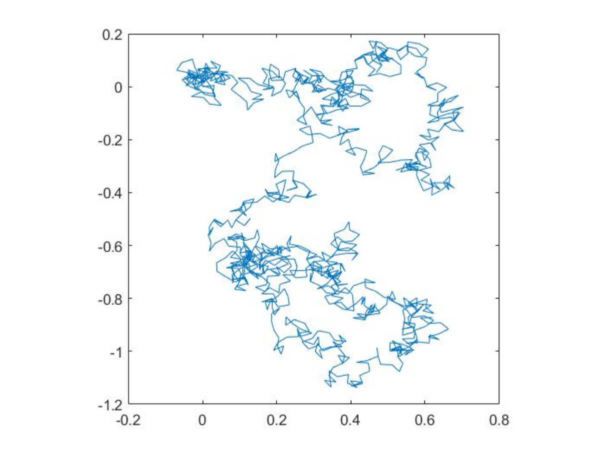

Figure 1: 布朗运动轨迹图

现在提供一个布朗运动的轨迹图。

觅食策略

在物理学家眼里，布朗运动可以用郎之万方程（Langevin Equation。提出人保罗 · 郎之万是法国物理学家，居里夫人丈夫皮埃尔 · 居里的博士生，并且后来给皮埃尔 · 居里戴了绿帽子）来描述：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) + F'(t). \tag{1}$$

其中 $f(t)$ 分成两部分，一部分为阻力 $-\alpha v$; 一部分为随机作用力 $F(t)$。粘滞阻力仍来自介质分子对颗粒的碰撞，将颗粒看作半径为 a 的小球，在粘滞系数为 η 的流体中运动，则有 $\alpha = 6\pi\eta a$。

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x}(t) + \eta(t). \tag{2}$$

其中 $\eta(t)$ 是均值为 0，方差为常数的随机过程。更确切地讲，是白噪声过程。

觅食策略

因此郎之万方程本质上就是考虑了随机误差的牛顿第二定律，这样的方程又叫做随机微分方程（Stochastic Differential Equation）。尽管郎之万是第一个提出随机过程的人，但作为物理学家，他更关心这些方程是否符合实际物理现象，而不关心数学上的严谨性。因此这种模型并没有立即受到数据家的重视。

到了二十世纪中叶，日本数学家伊藤清和苏联数学家 Stratonovich 先后使用概率论的方法，把随机微分方程发展成严谨的数学概念。尽管如此，但两人对随机微分方程定义各有不同，这也显示了随机性和确定性的本质差异。此外，随机微分方程多用于对一些多样化现象进行建模，比如不停变动的股票价格、部分物理现象如热扰动等。

觅食策略

如果捕食者像无头苍蝇一样漫无目的的做布朗运动，真的能很有效的地寻到到猎物吗？在数学上可以证明，布朗运动和分子自由扩散一样，单位速度的分子在时间 t 内平均只有 $\sqrt{t}$ 的位移量。捕食者若采用此种策略，可能需要踏遍千山万水才能成功了。

那么有没有比布朗运动更高效的搜索方法呢？一组巴西物理学家于 1999 年提出了一个设想，认为“莱维飞行”比布朗运动有更高的搜索效率，因此自然会偏向与采用“莱维飞行”捕食的生物。

莱维分布

莱维分布（Levy Distribution）是由 P.Levy 在 19 世纪 30 年代提出的一类分布，这种分布有两个参数：α 和 γ。参数 $\gamma > 0$，参数 α 用于控制分布的形状，且满足 $0 < \alpha \leq 2$。事实上当 $\gamma = 1$ 时，莱维分布就转换为柯西分布，而当 $\gamma = 2$ 时，莱维分布则为正态分布。莱维分布的概率密度函数为

$$L_{\alpha,\gamma} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\gamma q^{\alpha}} cos(qy)dq, y \in \mathcal{R}. \tag{3}$$

上述积分很难积，因此现有的莱维分布基本上使用数值方法计算。设 x, y 是两个独立同分布的随机变量，且均为标准正态分布，令随机变量 v 满足：

$$v = \frac{x}{\sqrt{y}} \tag{4}$$

则随机变量 $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为

$$z_n = \frac{1}{\alpha\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} v_j \tag{5}$$

收敛于莱维分布。

现在提供一个 matlab 例子。轨迹如下：

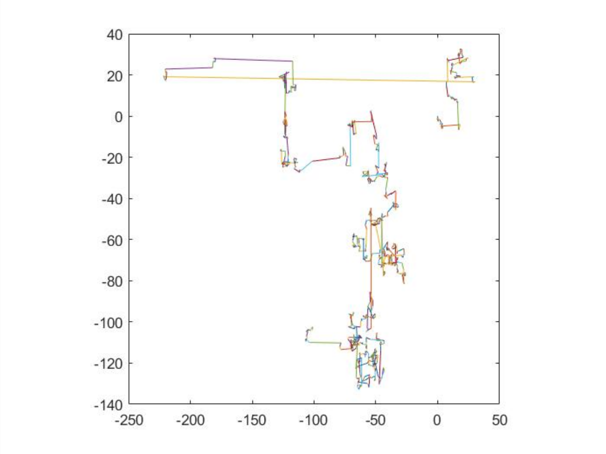

Figure 2: Levy 分布轨迹图

莱维过程

莱维过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一种随机过程，它满足的条件比布朗运动宽松：

1.$X(0)$ 几乎处处为 0；

2. 独立增量性；

3. 稳定增量性；

4. 样本轨道右连续。

连续的布朗运动和离散的泊松过程都是莱维过程的特例。因此可以大胆猜测，莱维过程就是带“跳跃”的布朗运动。正是这些不连续性的“跳跃”给予莱维过程“重尾”的特性。

莱维过程

独立增量：

设 $X(t)$ 是一个连续时间上的随机过程。也就是说，对于任何固定的 $t \geq 0$，$X(t)$ 是一个随机变量。过程的增量为差值 $X(s) - X(t)$。独立增量意味着对于任意时间 $s > t > u > v, X(s) - X(t)$ 与 $X(u) - X(v)$ 相互独立。

稳定增量：

如果增量 $X(s) - X(t)$ 的分布只依赖于时间间隔 $s - t$，则称增量是稳定的。例如对于维纳过程，增量 $X(s) - X(t)$ 服从均值为 0，方差为 $s - t$ 的正态分布。对于泊松过程，增量 $X(s) - X(t)$ 服从指数为 $s - t$ 的泊松分布。

莱维过程

定理 1(莱维 -辛钦公式)：莱维过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的特征函数（傅里叶变换）表达如下：

$$\phi_X(\theta)(t) := E[e^{i\theta X(t)}] = \exp(t(ai\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathcal{R}\setminus\{0\}} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I_{|x|<1}) \prod(dx))). \tag{6}$$

这个定理的证明比较复杂，依赖于测度论中的一系列结果。

定理 2(莱维 -伊藤分解)：每个莱维过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 都可以分解为 $\{S(t), t \geq 0\}$,$\{Y(t), t \geq 0\}$ 和 $\{Z(t), t \geq 0\}$ 三个子过程，其中：

1.$S(t)$ 是维纳过程（就是布朗运动，莱维过程的连续部分）；

2.$Y(t)$ 是复合泊松过程（刻画了较极端的“跳跃”现象）；

3.$Z(t)$ 是平方可积的离散鞅（刻画了较小的“跳跃”现象）。

随机变量 (r.v.)$X \sim \mu$ 的特征函数是映射 $\Phi : \mathbf{R}^d \to \mathbb{C}$，定义如下

$$\Phi(u) = \mathbb{E}(e^{iu \cdot X}) = \int_{R^d} e^{iu \cdot y} \mu(dy). \tag{7}$$

随机变量 X 是无限可分的，除非它的该率分布 p_x 是无限可分的，例如，$X = Y_1^{(n)} + ... + Y_n^{(n)}$, 其中 $Y_1^{(n)}, ..., Y_n^{(n)}$ 是独立同分布。那么 X 的特征函数可以写成 $\Phi_X(u) = (\Phi_{Y_1^{(n)}}(u))^n$.

定义 1：

莱维可测是满足如下条件的 $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ 上的测度 v, 使得

$$\int (|y|^2 \wedge 1) v(dy) < \infty. \tag{8}$$

其中 $|y|^2 \wedge 1 = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & |x| > 1 \\ y^2, & |x| \leq 1 \end{array} \right.$

Levy-Ito decomposition

定义函数 $X : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ 是 Cadlag 过程，即 X 是右连续左极限存在。令 $\Delta X(t) = X(t) - X(t-)$(由于左极限的存在) 且定义如下泊松随机测度

$$N(t, A) = \sharp\{\Delta X(s) \in A : s \in [0, t]\}. \tag{9}$$

那么有如下结论：

(1)$N(1, B_\varepsilon^c(0)) < \infty$.

(2)$N(1, \mathbf{R}\backslash\{0\})$ 是可数的。

令 A 是有下界的，i.e., $0 \notin \overline{A}$. 那么 $N(t, A), t \geq 0$ 是泊松过程且强度为 $\mu(A) = \mathbf{E}[N(1, A)]$. 很明显有结论 $\mu(A) < \infty$ 不管 A 是否有下界。所以测度 μ 是 $\sigma-$ 有限的。

推论 1： (1) 对任意的 $t>0,\omega\in\Omega, N(t,\cdot)(\omega)$ 在 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d\backslash\{0\})$ 上是计数可测的。

(2) 对于任意的有下界的 A,$N(t,A),t\geq 0$ 是泊松过程且具有如下强度 $\mu(A)=\mathbf{E}[N(1,A)]$.

(3) 补 $\tilde{N}(t,A)=N(t,A)-t\mu(A)$ 是值鞅可测的。对于有下界的 A, $\tilde{N}(t,A)$ 是一个鞅。

令 $f:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ 是波莱尔可测函数，A 有下界，那么对任意 $t>0,\omega\in\Omega$, 我们定义如下关于 f 泊松积分通过一个随机有限和。

$$\int_A f(x)N(t,dx)(\omega)=\sum_{x\in A}f(x)N(t,\{x\})(\omega). \tag{10}$$

定理 2：令 A 有下界，则

(1) 对任意的 $\int_A f(x)N(t,dx), t \geq 0$ 是复合泊松过程，带有如下特征函数：

$$\mathbf{E}[exp\{iu \cdot \int_A f(x)N(t,dx)\}] = exp\{t\int_A (e^{iu\cdot x} - 1)\mu_f(dx)\}. \tag{11}$$

其中 $u \in \mathbf{R}^d, \mu_f = \mu \circ f^{-1}$.

(2) 如果有 $f \in L^1(A, \mu_A)$，那么有

$$\mathbf{E}[\int_A f(x)N(t,dx)] = t\int_A f(x)\mu(dx). \tag{12}$$

(3) 如果有 $f \in L^2(A, \mu_A)$，那么有

$$Var[|\int_A f(x)N(t,dx)|] = t\int_A |f(x)|^2\mu(dx). \tag{13}$$

Levy-Ito decomposition

从定理 2 可以看出，如果 $f \in L^1(A, \mu_A)$，一个泊松积分也许不一定全都有有限期望。对于此，我们定义如下补泊松积分：

$$\int_A f(x)\tilde{N}(t, dx) = \int_A f(x)N(t, dx) - t\int_A f(x)\mu(dx). \tag{14}$$

则有如下结论：

(1) $\int_A f(x)\tilde{N}(t, dx), t \geq 0$ 是一个鞅。

(2) 特征函数：

$$\mathbf{E}[exp\{iu \cdot \int_A f(x)\tilde{N}(t, dx)\}] = exp\{t\int_A (e^{iu\cdot x} - 1 - iu \cdot x)\mu_f(dx)\}. \tag{15}$$

其中 $u \in \mathbf{R}^d, \mu_f = \mu \circ f^{-1}$.

(3) 如果有 $f \in L^2(A, \mu_A)$，那么有

$$Var[|\int_A f(x)\tilde{N}(t, dx)|] = t\int_A |f(x)|^2\mu(dx). \tag{16}$$

Levy-Ito decomposition

对于有下界的 A 和任意的 $t>0$，$\int_A xN(t,dx)\sum_{0\le u\le t}\Delta X(u)1_A(\Delta X(u))$ 是集合 A 中不超过时间 t 的所有跳变值和。由于轨迹 X 是 Cadlag, 所以上述是个有限随机和。特别地，$\int_{|x|\ge 1} xN(t,dx)$is 所有大于 1 的跳变之和。也就是说是一个带有有限次扰动的复合泊松过程。相反地，也可以证明 $X(t)-\int_{|x|\ge 1} xN(t,dx)$ 带有有限次有次序动作的莱维过程。但是也许有无界扰动。所以我们可以定义

$$b=\mathbf{E}[X(1)-\int_{|x|\ge 1} xN(1,dx)]. \tag{17}$$

Levy-Ito decomposition

现在把关注度放在小跳变上来。引入 $M(t,A)=\int_A f(x)\tilde{N}(t,dx)$. 令 $A_m=\{x:\frac{1}{m+1}<|x|\le 1\}$. 可以证明在 L^2 里，当 $m\to\infty$ 时，我们有 $M(t,A_m)\to\int_{|x|<1}x\tilde{N}(t,dx)$。所以 $\int_{|x|<1}x\tilde{N}(t,dx)$ 是一个鞅。取极限得

$$\mathbf{E}[exp\{iu\cdot\int_A x\tilde{N}(t,dx)\}]=exp\{t\int_A(e^{iu\cdot x}-1-iu\cdot x)\mu(dx)\}. \tag{18}$$

最后考虑如下随机过程

$$W_A(t)=X(t)-bt-\int_{|x|<1}x\tilde{N}(t,dx)-\int_{|x|\ge 1}xN(t,dx). \tag{19}$$

那么随机过程 $W_A(t)$ 是带有连续采样路径的中心鞅。利用布朗运动的莱维特征化，我们有 $W_A(t)$ 就是协方差为 A 的布朗运动。

Levy-Ito decomposition

Levy-Ito Decomposition$X$ 是莱维过程。那么存在 $b\in\mathbf{R}^d$, 协方差为 A 的布朗运动 $W_A(t)$,$\mathbf{R}^+\times\{\mathbf{R}^d\backslash\{0\}\}$ 独立的泊松随机测度 N 使得下式成立：

$$X(t)=bt+W_A(t)+\int_{|x|<1}x\tilde{N}(t,dx)+\int_{|x|\geq 1}xN(t,dx). \tag{20}$$

其中平方可积鞅 (L^2-鞅)$\int_{|x|<1}x\tilde{N}(t,dx)$ 是所有小跳变的补和。上述跳变是以 1 为界的，可以推广至任意实数 $R>0$，我们有

$$X(t)=b_Rt+W_A(t)+\int_{|x|<R}x\tilde{N}(t,dx)+\int_{|x|\geq R}xN(t,dx). \tag{21}$$

其中 $b_R=\mathbf{E}[X(1)-\int_{|x|\geq R}xN(1,dx)]$. 可以计算如下：

(1) 如果 $1<R<\infty$, 有 $b_R=b+\int_{1\leq|x|x<R}x\mu(dx)$.

(2) 如果 $0<R<1$, 有 $b_R=b-\int_{R\leq|x|x<1}x\mu(dx)$.

Levy-Ito decomposition

是否可以去除上届约束 R 呢？此时我们有

$$X(t) = b_\infty t + W_A(t) + \int_{|x|\geq 0} x\tilde{N}(t, dx). \tag{22}$$

结论是可以的，如果我们有 $\mathbf{E}[X(1)] < \infty$。此时，我们有
$b_\infty = \mathbf{E}[X(1)] < \infty$.