莱维过程

朱春林 (21721262)

2018 年 5 月 14 日

摘要

本文我们将简单介绍 levy 过程，包括 levy 过程的定义以及 levy 过程的特例，接下来我们将介绍莱维辛钦定理，最后我们将介绍莱维分解定理。

1 莱维过程的定义

定义 1.1 一个随机过程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 如果符合以下条件：1. $X_0 = 0$.

2. 独立增量：对于任何 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 相互独立.

3. 稳定增量：对任何 s<t, $X_t - X_s$ 与 X_{t-s} 有相同分布.

4. X 几乎确定是右连左极.

我们把 X 称作 levy 过程.

2 无限可分过程

为了更好地理解 levy 过程，我们首先需要讨论无限可分布的分布。

定义 1.2 对于一个随机变量 U, 如果存在一系列的独立同分布的随机变量 $U_{1,n}, \ldots, U_{n,n}$，使得 U$\overset{\mathrm{d}}{=} U_{1,n}, \ldots, U_{n,n}$, 那么随机变量 U 拥有无限可分分布，$\overset{\mathrm{d}}{=}$ 意味着同分布.

关于无限可分布分布的基本定理是根据我们现在定义的特征指数来表达的。回想一下，如果 U 是一个随机变量，那么它的特征函数（傅里叶变换）h：R $\rightarrow$ C 为：h(θ)=E[$e^{i\theta U}$],$\theta \in R$.

接下来我们再来看一个定理。

定理 1.3 设 U 是一个无限可分的随机变量，h 是其特征函数。然后：

1. 函数 h 是连续的且非零的，并且 h(0)= 1。

2. 存在一个唯一的连续函数 f：R $\rightarrow$ C，使得对于所有 $\theta \rightarrow R$ 以及 f(0)= 0，$e^{f(\theta)} = h(\theta)$。我们将通过 log 来表示函数，并且指出 U 的特征指数。

对于上面的定理，我们可以知道，假设 U1 和 U2 是具有特征函数 h1 和 h2 以及特征指数 f1 和 f2 的两个独立的无限可分的随机变量。然后，将随机变量 U = U1 + U2 具有无限可分分布，并且如果我们用 H 和 F 定义 U 的特征函数和指数，则 h = h1*h2 和 f = f1 + f2。

定理 1.4 如果 X 是一个 levy 过程，对于任何 $t \geq 0$, 随机变量 X_{t_1} 拥有无限可分分布.

接下来我们看一下简单的证明。

如果 X 是 levy 过程，并且 $t \geq 0$. 那么对于 n=1,2,...,

$$X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \cdots + (X_t - X(n-1)t/n)$$

右边的每项都是独立同分布，并且有独立稳定增量属性，因此，X_t 拥有无限可分分布.

接下来，我们看下一维 levy 过程的特征函数，对于 levy 过程 X,X_t 的特征指数为 ψ_t，

$$e^{\psi_t(\theta)} = E[e^{i\theta X_t}], \theta \in R$$

通过上面的公式，我们可以得到

$$m\psi_1(\theta) = \psi_m(\theta) = n\psi_{m/n}(\theta)$$

也就是说对于 $t \geq 0$，

$$\psi_t(\theta) = t\psi_1(\theta)$$

因此，我们可以得到

$$E[e^{i\theta X_t}] = e^{t\psi(\theta)}, \theta \in R$$

其中，ψ:=ψ_1 是 X_1 的特征指数.

定理 1.5 莱维辛钦定理 X 为 levy 过程，特征指数为 ψ. 存在唯一的 $a \in R, \sigma \geq 0$ 以及测度 $\prod$, 满足 $\int_R 1 \bigwedge x \prod dx$

$$\psi(\theta) = ia\theta - \frac{1}{2}\sigma_2\theta_2 + (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I_{[-1,1]}(x)) \prod(dx)$$

对于上述三个参数 $(a, \sigma, \prod)$，a 包含了任何确定的漂移项，σ 是高斯系数，描述了布朗运动的波动性，而 $\prod$ 描述了 X 跳跃的大小和强度

3 莱维过程的特例

possion 过程

possion 过程的概率密度函数为 $\mu_{\lambda(k)} = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, 因此 possion 分布的特征函数为

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta k}\mu_\lambda(k) = e^{\lambda(e^{i\lambda}-1)} = [e^{\frac{\lambda}{n}}(e^{i\theta}-1)]^n$$

因此对于一个 possion 过程$N_t : t \geq 0$ 如果参数为 λt，则是 levy 过程，特征函数为 $E(e^{i\theta N_t}) = e^{\lambda t(e^{i\theta}-1)}$, 特征指数为 $\psi(\theta) = \lambda(e^{i\theta}-1)$

复合 possion 过程

N 为 possion 过程，对于 $\theta \in R$, 特征函数为

$$E(e^{i\theta\sum_{i=1}^{N}\xi_i}) = \sum_{n\geq 0} E(e^{i\theta\sum_{i=1}^{N}\xi_i})e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}(\int_R e^{i\theta x}F(dx))^n e^{-\lambda} = e^{\lambda\int_R e^{i\theta x}F(dx)}$$

其中三个参数分别为 $a = \lambda\int_{0<|x|<1} xF(dx)$,$\sigma = 0$,$\prod(dx) = \lambda F(dx)$.

布朗运动

布朗运动的概率密度函数为:

$$\mu_{s,\gamma}(dx) := \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}}e^{-(x-\gamma)^2/2s^2}dx, x \in R$$

我们可以得到他的特征函数和特征指数:

$$E[i\theta U] = e^{\frac{1}{2}s^2\theta^2+i\theta\gamma}$$

三个参数为 $a = -\gamma, \sigma = s, \prod = 0$

4 莱维伊藤分解

根据莱维-辛钦定理，我们可以得到如下公式

$$\Psi(\theta) = \{ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\} + \{\prod(R\backslash(-1,1))\int_{|x|\geq 1}(1-e^{i\theta x})\frac{\prod dx}{\prod(R\backslash(-1,1)}\}$$

$$+\{\int_{0<|x|<1}(1-e^{i\theta x}+i\theta x)\prod(dx)\}$$

第一项是线性布朗运动，第二项是复合泊松过程，第三项是平方可积鞅. 因此 levy 过程可由这三个过程组合而成.