Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik

Elektrische Netzwerke und Mehrtore
Übung

Wintersemester 2020

Protokoll Übung 3: Transiente Vorgänge

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 19. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $0 \leq t \leq 2\tau_1$

1.1 Schaltbild des Netzwerks für $0 \leq t \leq 2\tau_1$

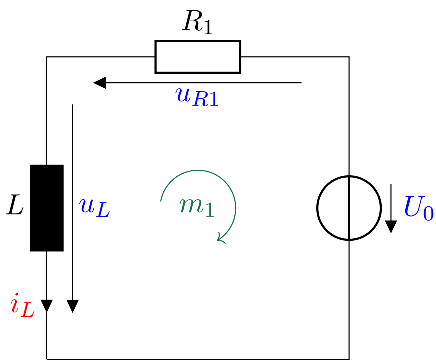

Abbildung 1: Netzwerk im Zeitintervall $0 \leq t \leq 2\tau_1$.

1.2 Aufstellen der DGL mithilfe der allgemeinen Lösungsformel

Da es sich um ein LR-Netzwerk handelt, lässt sich τ_1 folgendermaßen bestimmen:

$$\frac{1}{\lambda} = \tau_1 = \frac{L}{R} = \frac{100\,\mathrm{mH}}{50\,\Omega} = 2\,\mathrm{ms}$$

Weiters lässt sich durch einsetzen in die allgemeine Lösungsformel für Transiente Vorgänge mit einem Energiespeicher der Strom i_L für $0 \leq t \leq 2\tau_1$ ermitteln.

Allgemeine Lösungsformel:

$$x(t) = x_f + [\,x_0 - x_f\,] \cdot e^{(-\frac{t-t_0}{\tau})}$$

Die Spule entspricht nach $t > 5\tau_1$ einem Kurzschluss. Deswegen ergibt sich x_f aus dem Strom durch den Widerstand R_1.

$$x_0 = i_L(t=0) = I_{L_0} = 50\,\mathrm{mA}$$

$$x_f = i_L(t \to \infty) = i_{R1} = \frac{U_0}{R_1} = 200\,\mathrm{mA}$$

Durch anschließendes Einsetzen erhält man:

$$i_L(t) = 200\,\mathrm{mA} + [50\,\mathrm{mA} - 200\,\mathrm{mA}] \cdot e^{-\frac{t}{2\,\mathrm{ms}}}$$

$$i_L(t = 2\tau_1) = 200\,\mathrm{mA} + [50\,\mathrm{mA} - 200\,\mathrm{mA}] \cdot e^{-\frac{4\,\mathrm{ms}}{2\,\mathrm{ms}}} = 179{,}7\,\mathrm{mA}$$

2 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

2.1 Schaltbild des Netzwerks für $t > 2\tau_1$

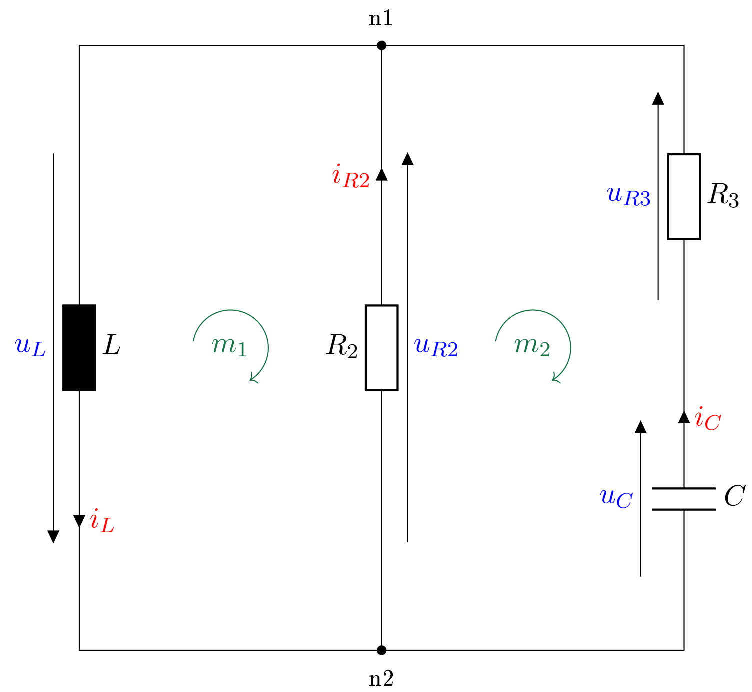

Abbildung 2: Netzwerk im Zeitintervall $t > 2\tau_1$.

2.2 Aufstellen der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschengleichungen

$$n_1: \qquad i_L - i_{R2} - i_C = 0$$

$$n_2: \qquad i_C + i_{R2} - i_L = 0$$

$$m_1: \qquad -u_{R2} - u_L = 0$$

$$m_2: \qquad u_{R2} - u_{R3} - u_C = 0$$

2.3 Herleitung der DGL 2. Ordnung von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

$$-i_C - i_{R2} + i_L = 0$$

$$-C{u_C}' - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$\begin{aligned}
u_C &= u_{R2} - u_{R3} \\
&= -u_L - u_{R3} \\
&= -(Li'_L + u_{R3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow C\frac{d}{dt}\left[Li'_L + u_{R3}\right] - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\
CLi''_L + \frac{d}{dt}CR_3 i_C - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\
CLi''_L + \frac{d}{dt}CR_3(i_L - i_{R2}) - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\
CLi''_L + CR_3 i'_L - \frac{d}{dt}\left(CR\frac{u_{R2}}{R_2}\right) - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\
CLi''_L + CR_3 i'_L + \frac{CR_3 L}{R_2}i''_L - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\
CLi''_L + CR_3 i'_L + \frac{CR_3 L}{R_2}i''_L + \frac{L}{R_2}i'_L + i_L &= 0 \\
i''_L\left(CL + \frac{CR_3 L}{R_2}\right) + i'_L\left(CR_3 + \frac{L}{R_2}\right) + i_L &= 0 \\
i''_L + i'_L\left(\frac{R_3 C + \frac{L}{R_2}}{LC + \frac{R_3 LC}{R_2}}\right) + i_L\left(\frac{1}{LC + \frac{R_3 LC}{R_2}}\right) &= 0 \\
i''_L + i'_L\underbrace{\left(\frac{R_2 R_3 C + L}{R_2 LC + R_3 LC}\right)}_{=:2\delta} + i_L\underbrace{\left(\frac{R_2}{R_2 LC + R_3 LC}\right)}_{=:\omega_0^2} &= 0
\end{aligned}$$

Ansatz: $\tilde{t} = t - 2\tau_1$

$$\begin{aligned}
i_L(\tilde{t}) &= e^{\lambda\tilde{t}} \\
i'_L(\tilde{t}) &= \lambda e^{\lambda\tilde{t}} \\
i''_L(\tilde{t}) &= \lambda^2 e^{\lambda\tilde{t}}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 e^{\lambda\tilde{t}} + 2\delta\lambda e^{\lambda\tilde{t}} + \omega_0^2 i_L = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{R_2R_3C + L}{R_2LC + R_3LC}\right)^2 - \frac{R_2}{R_2LC + R_3LC} = -416667\frac{1}{s^2} < 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(-1)\underbrace{\omega_0^2 - \delta^2}_{\Omega_d}}$$

$$= -\delta \pm j\Omega_d$$

Lösung:

$$i_L(\tilde{t}) = e^{-\delta\tilde{t}}\left[\tilde{K}_1 e^{j\Omega_d\tilde{t}} + \tilde{K}_2 e^{-j\Omega_d\tilde{t}}\right] = e^{-j\delta\tilde{t}}\left[K_1\cos(\Omega_d\tilde{t}) + K_2\sin(\Omega_d\tilde{t})\right]$$

2.4 Interpretation der Parameter δ, ω_0 und Ω_d

δ	... Dämpfung	$[\delta] = \frac{1}{s}$
ω_0	... Resonanzfrequenz	$[\omega_0] = \frac{1}{s}$
Ω_d	... Eigenfrequenz	$[\Omega_d] = \frac{1}{s}$

$$\delta^2 - \omega_0^2 \begin{cases} > 0 & \text{2 reelle Lösungen} & \Rightarrow \Omega_d = \delta^2 - \omega_0^2 & \text{(Fall 1)} \\ < 0 & \text{2 (konjugiert) komplexe Lösungen} & \Rightarrow \Omega_d = \omega_0^2 - \delta^2 & \text{(Fall 2)} \\ = 0 & \text{1 reelle Doppellösung} & \Rightarrow \Omega_d = 0 & \text{(Fall 3)} \end{cases}$$

- Fall 1: Kriechfall, d.h. es entsteht keine Schwingung. Je größer die Dämpfung (δ) ist, desto langsamer kriechen Strom und Spannung gegen ihren Endwert.
- Fall 2: Realer Schwingkreis, d.h. Strom und Spannung geraten in Schwingung und pendeln sich langsam am Endwert ein (trifft auf diese Schaltung zu, siehe 5)
- Fall 3: Aperiodischer Grenzfall, d.h. der Endwert wird ohne Schwingen am schnellsten erreicht.

2.5 Anfangswertproblem

2.5.1 Anfangsbedingungen

$$i_L(\tilde{t} = 0^+) = i_L(\tilde{t} = 0^-) = i_L(t = 2\tau_1) = 179{,}7\,\mathrm{mA}$$
$$u_C(\tilde{t} = 0^+) = u_C(\tilde{t} = 0^-) = U_{C,0} = 25\,\mathrm{V}$$

$$\begin{aligned}
u_C(\tilde{t} = 0^+) = U_{C,0} = u_{R2} - u_{R3} &= -Li_L' - R_3 i_L - \frac{R_3 L}{R_2} i_L' \\
&= i_L' \left[-\left(L + \frac{R_3 L}{R_2} \right) \right] - R_3 i_L \\
U_{C_0} + R_3 i_L &= i_L' \left[-\left(L + \frac{R_3 L}{R_2} \right) \right] \\
i_L' &= -\frac{U_{C,0} + R_3 i_L}{L + \frac{R_3 L}{R_2}} \\
&= -\frac{R_2 (U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}
\end{aligned}$$

2.5.2 Lösen von K_1 und K_2

$$\begin{aligned}
i_L(\tilde{t} = 0) &= e^0 \left[K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0) \right] = K_1 \\
K_1 &= 179{,}7\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_L'(\tilde{t}) &= -\delta e^{-\delta \tilde{t}} \left[K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t}) \right] + e^{-\delta \tilde{t}} \left[-K_1 \Omega_d \sin(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \Omega_d \cos(\Omega_d \tilde{t}) \right] \\
i_L'(\tilde{t} = 0) &= -\delta \cdot 1 \left[K_1 \cdot 1 K_2 \cdot 0 \right] + 1 \cdot \left[-K_1 \Omega_d \cdot 0 + K_2 \Omega_d \cdot 1 \right] \\
&= -\delta K_1 + K_2 \Omega_d \stackrel{!}{=} -\frac{R_2 (U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\delta K_1 + K_2 \Omega_d &= -\frac{R_2 (U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L} \\
K_2 \Omega_d &= \delta K_1 - \frac{R_2 (U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}
\end{aligned}$$

$$K_2 = \frac{\delta K_1 - \frac{R_2(U_{C,0}+R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}}{\Omega_d} = -304{,}6\,\mathrm{mA}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} i_L(\tilde{t}) &= e^{-\delta\tilde{t}}\left[K_1\cos(\Omega_d\tilde{t}) + K_2\sin(\Omega_d\tilde{t})\right] \\ &= e^{-500s^{-1}\cdot\tilde{t}}\left[179{,}7\,\mathrm{mA}\cos(\Omega_d\tilde{t}) - 304{,}6\,\mathrm{mA}\sin(\Omega_d\tilde{t})\right] \end{aligned}$$

3 Plots und Simulationen

3.1 Matlab-Plot $i_L(t)$

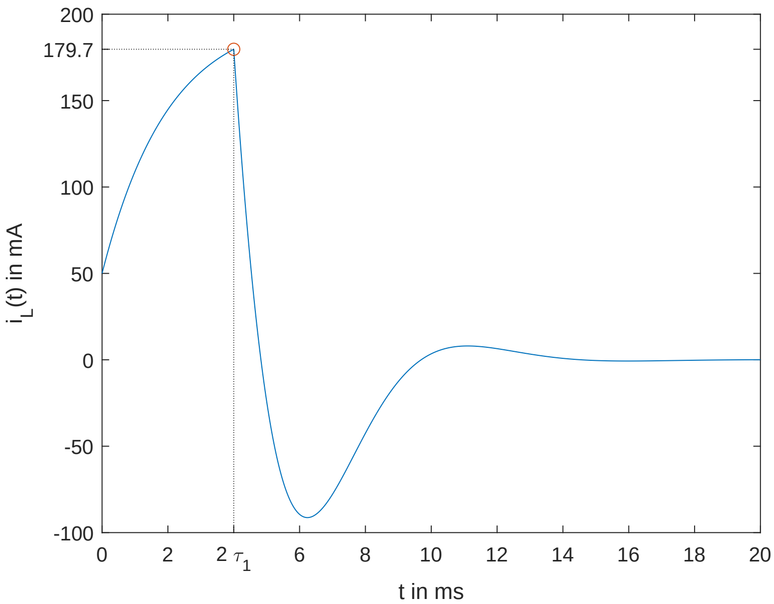

Abbildung 3: Matlab-Plot des Stroms $i_L(t)$

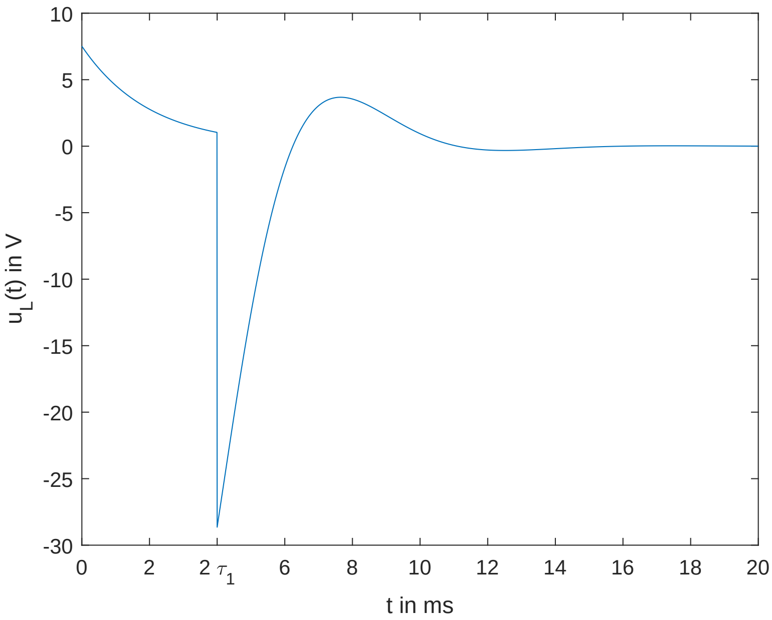

Abbildung 4: Matlab-Plot der Spannung $u_L(t)$

3.2 PSpice-Plot $i_L(t)$ und $u_L(t)$

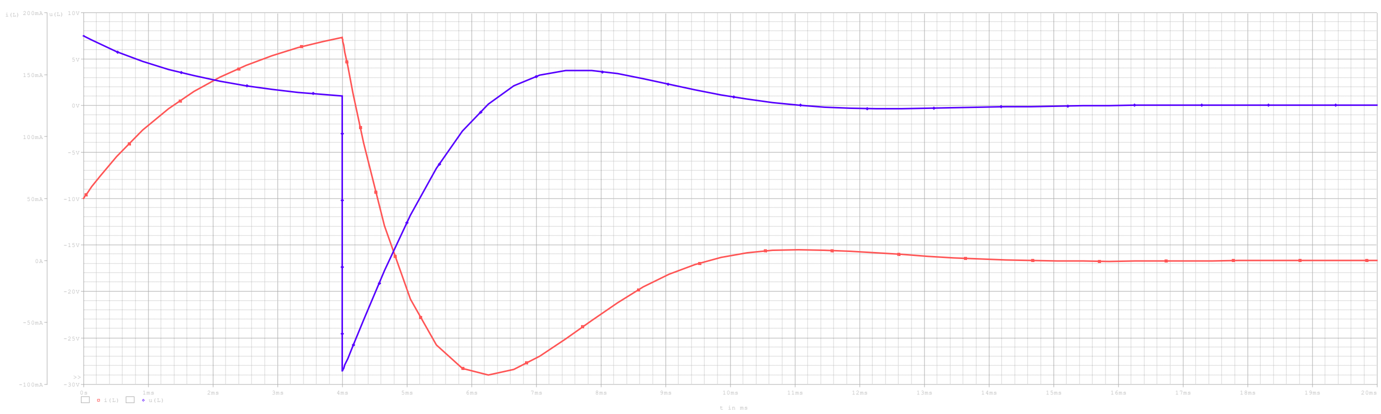

Abbildung 5: PSpice-Plot von $i_L(t)$ und $u_L(t)$

-

4 Matlab-Simulation

4.1 Skript

```
%Aufrumen der Matlab Umgebung.
clc
close all
```

```

%% Variablendefinition der bekannten Werte

r1 = 50;
r2 = 200;
r3 = 100;

C = 10*10^(-6);
L = 0.1;
U_0 = 10;
I_L0 = 50 * 10^(-3);
U_C0 = 25;
tau_1 = L/r1;

%% Bestimmen der Werte der Parameter delta, omega_0 und Omega_d

delta = ((r2 * r3 * C + L)/(2*(r2 * L * C + r3 * L * C)))
omega_0 = sqrt((r2)/(r2 * L * C + r3 * L * C))
Omega_d = sqrt((omega_0^2 - delta^2))

%% Berechnung von i_L(t_tilde), K_1, K_2

i_L_t_tilde = ((U_0-(U_0 - (r1 * I_L0)) * exp(-(2 * tau_1)/(tau_1)))/(r1))

K_1 = i_L_t_tilde
K_2 = ((delta * K_1 - (r2 * (U_C0 + r3 * i_L_t_tilde)) / (r2  * L + r3 * L)) / (Omega_d))

%% Berechnung von i_L / u_L und Plot

%Define time arrays
t = linspace(0,0.02, 1000000);
t_label = linspace(0,0.02, 11);
A_label = linspace(-0.1,0.2, 7);
A_label = sort([A_label, 0.1797]);
axLims = [0 0.02 -0.1 -0.2];  %[x-min, x-max, y-min, y-max] axis limits


% Plot of u_L
figure('Name','Spannung␣der␣Spule','NumberTitle','off');
plot(t, (((-1)*(heaviside(t-2*tau_1)-1)) .* u_L_t_1(t, U_0, r1, I_L0, tau_1, L) ...
     + heaviside(t-2*tau_1) .* u_L_t_2(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, L, tau_1)));
xlabel('t␣in␣ms')
ylabel('{u_L(t)␣in␣V}')

xticks(t_label)
xticklabels({'0','2','2␣\tau_1','6','8','10', '12', '14', '16', '18', '20'})


% Plot of i_L
figure('Name','Strom␣der␣Spule','NumberTitle','off');
plot(t, ((-1)*(heaviside(t-2*tau_1)-1)) .* i_L_t_0(t, U_0, r1, tau_1, I_L0) ...
     + heaviside(t-2*tau_1) .* (i_L_t_1(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, tau_1)));
hold on
point = [2*tau_1, 0.1797];
plot(point(1), point(2), 'o')
plot([point(1), point(1)], [axLims(3), point(2)], 'k:')  %vertical line
plot([axLims(1), point(1)], [point(2), point(2)], 'k:')  %horizontal line

xlabel('t␣in␣ms')
ylabel('{i_L(t)␣in␣mA}')
```

```
xticks(t_label)
xticklabels({'0','2','2 \tau_1','6','8','10', '12', '14', '16', '18', '20'})
yticks(A_label)
yticklabels({'-100', '-50', '0', '50', '100', '150', '179.7', '200'})



%% Functions of i_L / u_L
function i_L_t_1 = i_L_t_1(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, tau_1)
    i_L_t_1 = exp(-((t-2*tau_1) * delta)) .* (K_1 * cos(Omega_d * (t-2*tau_1)) + K_2 * sin(Omega_d * (t-2*tau_1)));
end

function u_L_t_1 = u_L_t_1(t, U_0, r1, I_L0, tau_1, L)
    u_L_t_1 = (U_0 / r1 + (U_0 - r1 * I_L0) / (r1 * tau_1) .* exp(-t / tau_1)) * L;
end

function u_L_t_2 = u_L_t_2(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, L, tau_1)
    t = (t-2*tau_1);
    u_L_t_2 = L * (-delta * exp(-delta * t) .* (K_1 * cos(Omega_d * t) + K_2 * sin(Omega_d * t)) + exp(-delta * t) .* (-K_1 * Omega_d * sin(Omega_d * t) + K_2 * Omega_d * cos(Omega_d * t)));
end

function i_L_t_0 = i_L_t_0(t, U_0, r1, tau_1, I_L0)
    i_L_t_0 = ((U_0-(U_0 - (r1 * I_L0)) * exp(-(t)/(tau_1)))/(r1));
end
```

4.2 Konsolenoutput

```
delta =

   "500 1/s"


omega_0 =

  "816.4966 1/s"


Omega_d =

  "645.4972 1/s"


i_L_t_tilde =

    "0.1797 A"


K_1 =

    "0.1797 A"


K_2 =

   "-0.3046 A"
```