

# Elektrische Netzwerke und Mehrport Übung

Wintersemester 2020

## Protokoll Übung 3: Schaltvorgang Kondensator

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 12. November 2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Bestimmen des Anfangszustands von <math>u_C</math></b>	<b>3</b>
1.1	Schaltplan zur Schalterposition a . . . . .	3
1.2	Erstellen der erweiterten KSV-Matrix . . . . .	4
1.3	Bestimmen von $U_{C_a}$ . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Aufstellen der Differentialgleichung</b>	<b>5</b>
2.1	Schaltplan zur Schalterposition b . . . . .	5
2.2	Erstellen der KSV-Matrix . . . . .	6
2.3	Lösen der Differentialgleichung . . . . .	6
2.3.1	(Laplace Lösung) . . . . .	6
2.3.2	Homogene Lösung . . . . .	8
2.3.3	Partikuläre Lösung . . . . .	8
2.3.4	Anfangswertproblem . . . . .	9
2.3.5	Gesamtlösung . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Vergleich mit allgemeiner Lösungsformel</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Simulation in PSpice</b>	<b>10</b>
4.1	Schalterposition a . . . . .	10
4.2	Schalterposition b . . . . .	11
4.3	Simulation des Umschaltvorgangs . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Matlab-Simulation</b>	<b>13</b>
5.1	Skript . . . . .	13
5.2	Konsolenoutput . . . . .	14
5.3	Plot . . . . .	15

# 1 Bestimmen des Anfangszustands von $u_C$

## 1.1 Schaltplan zur Schalterposition a

Die Schaltung befindet sich bis zum Zeitpunkt  $t = T_0$  in Schalterposition a. In Abbildung 1 ist das Ersatzschaltbild für den Ladevorgang zuständigen Teil des Netzwerks zu sehen. Da nach langer Zeit ein Kondensator als Leerlauf betrachtet werden darf, kann  $I_{R5} = i_C = 0 \text{ A}$  gesetzt werden. Durch Netzwerkanalyse mittels des KSVs lässt sich  $u_C$  als  $U_{n4}$  ausdrücken. (vgl. Abbildung 1)

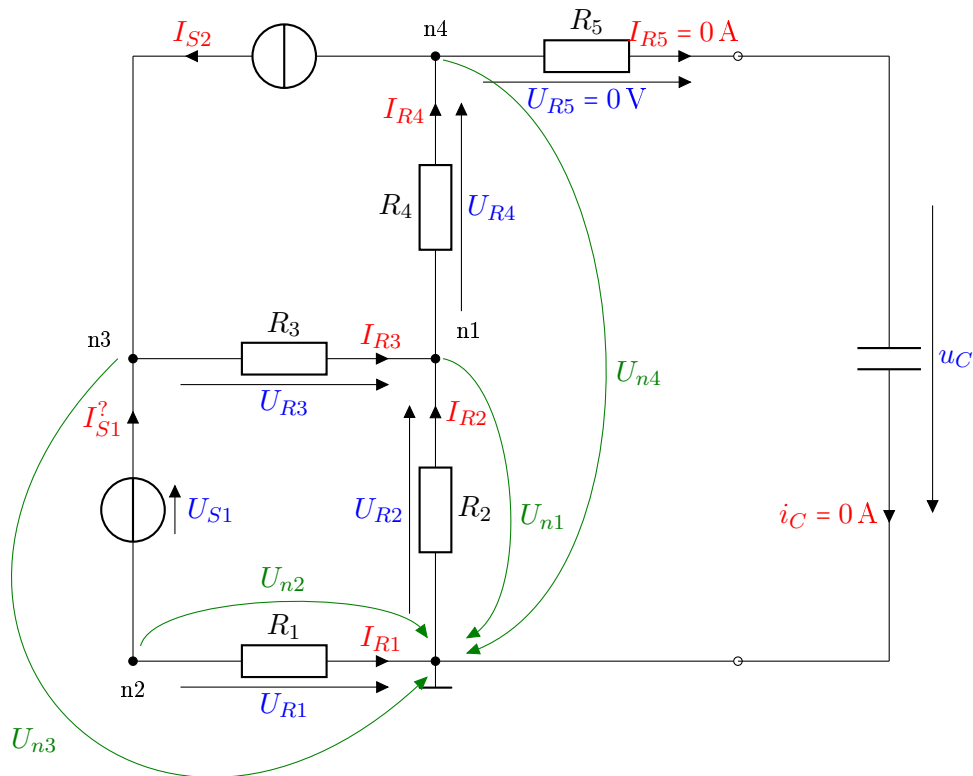


Abbildung 1: relevantes Netzwerk zur Schalterposition a mit allen eingezeichneten Strömen, (Knoten-)spannungen und Knoten

## 1.2 Erstellen der erweiterten KSV-Matrix

Durch "hinschauen" kann die netzwerkzugehörige KSV-Matrix aufgestellt werden. Diese besteht zum einen aus der Admittanzmatrix und zum anderen aus der zusätzlichen Gleichung für den unbekannten Strom  $I_{S1}^?$ . Jene erhält man über die Darstellung der Quellspannung  $U_{S1}$  mit den Knotenspannungen  $U_{n2}$  und  $U_{n3}$ :

$$U_{S1} = U_{n2} - U_{n3}$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} n1 \quad n2 \quad n3 \quad n4 \quad I_{S1}^? \\ \begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ I_{S1}^? \end{array} \begin{bmatrix} G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & -G_4 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 & 0 & 1 \\ -G_3 & 0 & G_3 & 0 & -1 \\ -G_4 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}}_{A_a} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ I_{S1}^? \end{pmatrix}}_{x_a} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{S2} \\ -I_{S2} \\ U_{S1} \end{pmatrix}}_{b_a}$$

Man erhält mithilfe von Matlab für  $x_a$ :

$$x_a = \begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ I_{S1}^? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,36 \text{ V} \\ 2,24 \text{ V} \\ -7,76 \text{ V} \\ -4,32 \text{ V} \\ -0,56 \text{ A} \end{pmatrix}$$

## 1.3 Bestimmen von $U_{C_a}$

Wie sich im Schaltplan in Abbildung 1 erkennen lässt, entspricht  $U_{C_a} = U_{n4}$ :

$$U_{C_a} = U_{n4} = -4,32 \text{ V}$$

## 2 Aufstellen der Differentialgleichung

### 2.1 Schaltplan zur Schalterposition b

Zum Zeitpunkt  $t = T_0$  wird der Schalter in die b Position gebracht und der sich vom Kondensator links befindliche Teil der Schaltung getrennt. Um das Aufstellen der Differentialgleichung zu erleichtern, kann mittels KSV die Theveninquelle und der dazugehörige Innenwiderstand ermittelt werden. (vgl. Abbildung 2 und 4)

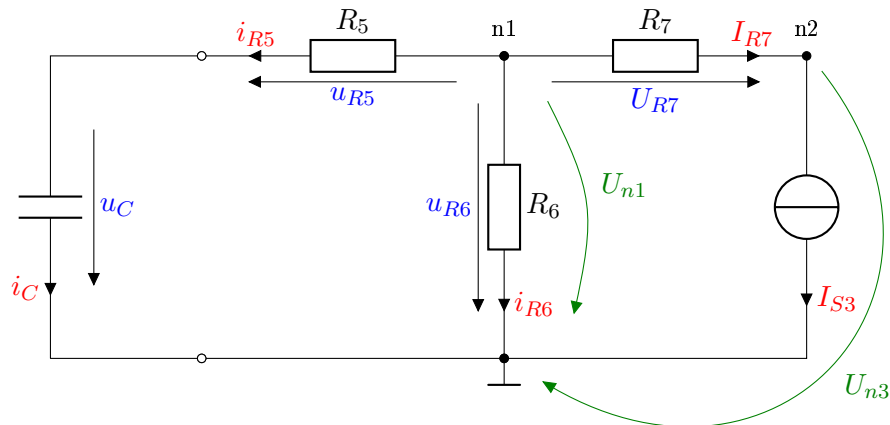


Abbildung 2: relevantes Netzwerk zur Schalterposition a mit allen eingezeichneten Strömen, (Knoten-)spannungen und Knoten

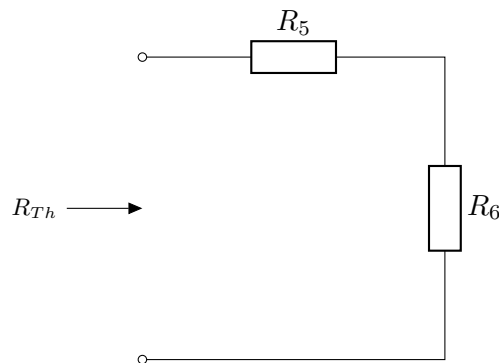


Abbildung 3: Schaltbild zur Bestimmung des Innenwiderstandes  $R_{Th}$

Der Innenwiderstand kann folgendermaßen berechnet werden:

$$R_{Th} = R_5 + R_6 = 17 \Omega$$

## 2.2 Erstellen der KSV-Matrix

Durch "hinschauen" kann erneut eine KSV-Matrix zu dem Netzwerk in Abbildung 2 aufgestellt werden und mit der Lösung  $x_b$   $U_{Th}$  bestimmt werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G_6 + G_7 & \vdots & -G_7 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_7 & \vdots & G_7 \end{bmatrix}}_{A_b} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \end{pmatrix}}_{x_b} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -I_{S3} \end{pmatrix}}_{b_b}$$

$$x_b = \begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \text{ V} \\ -16 \text{ V} \end{pmatrix}$$

$$U_{Th} = U_{n1} = -6 \text{ V}$$

Mit den ermittelten Werten für  $U_{Th}$  und  $R_{Th}$  kann die Ersatzquellschaltung erstellt und anschließend die Differentialgleichung aufgestellt werden.

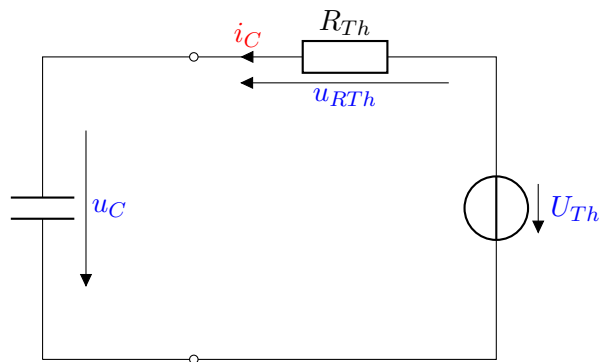


Abbildung 4: Thevenin-Ersatzquelle des Netzwerks aus Abbildung 2

## 2.3 Lösen der Differentialgleichung

### 2.3.1 (Laplace Lösung)

$$u_C + u_{RTh} = U_{Th}$$

$$u_C + R_{Th} \cdot i_C = U_{Th}$$

$$u_C + R_{Th} \cdot C \cdot u'_C = U_{Th}$$

$$u'_C + u_C \left( \frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}$$



$$s \cdot u_C(s) - u_C(0) + \left( \frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right) u_C(s) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C} \cdot \frac{1}{s}$$

$$u_C(s) \left( s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C} \cdot \frac{1}{s} + u_C(0)$$

$$u_C(s) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C} \cdot \frac{1}{s \left( s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right)} + \frac{u_C(0)}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}}$$

$$\frac{1}{s \left( s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}}$$

$$A = \frac{1}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}} \Big|_{s=0} = R_{Th} \cdot C$$

$$B = \frac{1}{s} \Big|_{s=-\frac{1}{R_{Th} \cdot C}} = -R_{Th} \cdot C$$

$$u_C(s) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C} \left( \frac{R_{Th} \cdot C}{s} - \frac{R_{Th} \cdot C}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}} \right) + \frac{u_C(0)}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}}$$

$$= U_{Th} \cdot \frac{1}{s} + (u_C(0) - U_{Th}) \frac{1}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}}$$



$$u_C(t) = U_{Th} + (u_C(0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t}{R_{Th} \cdot C}}$$

Die Funktion ist um  $T_0$  nach rechts verschoben. Deswegen gilt:

$$u_C(t) = \sigma(t - T_0) \left[ U_{Th} + (u_C(0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}} \right]$$

### 2.3.2 Homogene Lösung

Die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung lautet:

$$u'_C + u_C \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}$$

Der homogene Anteil lässt sich somit folgendermaßen beschreiben:

$$u'_{C,h} + u_{C,h} \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = 0$$

Aufgrund des Schaltvorgangs zum Zeitpunkt  $t = T_0$ , wird die Gleichung um  $T_0$  nach rechts verschoben. Man setzt an:

$$u_{C,h} = K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)}$$

$$u'_{C,h} = -\lambda \cdot K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)}$$

$$\implies -\lambda \cdot K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)} + K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)} \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = 0$$

$$\underbrace{K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)}}_{\neq 0} \left( \frac{1}{R_{Th} \cdot C} - \lambda \right) = 0$$

$$\frac{1}{R_{Th} \cdot C} = \lambda$$

$$\implies u_{C,h} = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}}$$

### 2.3.3 Partikuläre Lösung

Für die partikuläre Lösung kann man  $u_{C,p} = A$  ansetzen und erhält:

$$u_{C,p} = A$$

$$u'_{C,p} = 0$$

$$\implies 0 + A \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}$$



$$A = U_{Th}$$

Die Gesamtlösung der Differentialgleichung setzt sich nun aus der homogenen und der partikulären Lösung zusammen:

$$u_C = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}} + U_{Th} \quad (1)$$

### 2.3.4 Anfangswertproblem

In Kapitel 1.3 wurde bereits der Spannungswert des Kondensators  $U_{C_a} = u_C(T_0)$  zum Zeitpunkt  $t \leq T_0$  ausgerechnet. Da die Spannung am Kondensator eine stetige Größe ist, ist  $u_C^+(T_0) = u_C^-(T_0)$ . Diesen Anfangswert der stetigen Kondensatorspannung  $u_C$  zum Zeitpunkt  $T_0$  kann man nun dazu verwenden, den Wert von  $K$  aus der Formel 1 auszurechnen.

$$u_C(T_0) = K \cdot \underbrace{e^{\frac{T_0-T_0}{R_{Th} \cdot C}}}_{=1} + U_{Th}$$

$$\implies K = u_C(T_0) - U_{Th}$$

### 2.3.5 Gesamtlösung

Setzt man nun den erhaltenen Wert von  $K$  in die Formel 1 ein, so lautet die gelöste Differentialgleichung:

$$u_C = (u_C(T_0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t}{R_{Th} \cdot C}} + U_{Th}$$

## 3 Vergleich mit allgemeiner Lösungsformel

Transiente Vorgänge lassen sich verallgemeinert mit folgender Lösungsformel lösen:

$$x(t) = x_f + [x_0 - x_f] \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

$x_0$  entspricht dem Anfangswert, welcher bei  $t = T_0$  den Wert  $u_C(T_0) = U_{C_a}$  hat.  $x_f$  entspricht dem Endwert, dieser ist in gegebener Schaltung der Wert von  $U_{Th}$ , da dieser Spannungswert übrig bleibt, nachdem sich der Kondensator entladen hat. Setzt man für  $x_0$  und  $x_f$  die entsprechenden Werte in die allgemeine Lösungsformel ein, so ist diese Form identisch mit der Gesamtlösung aus Kapitel 2.3.5.

## 4 Simulation in PSpice

### 4.1 Schalterposition a

In der Schalterposition a muss der Kondensator  $C$  nicht aufgezeichnet werden, da er nach langer Zeit wie ein Leerlauf fungiert.

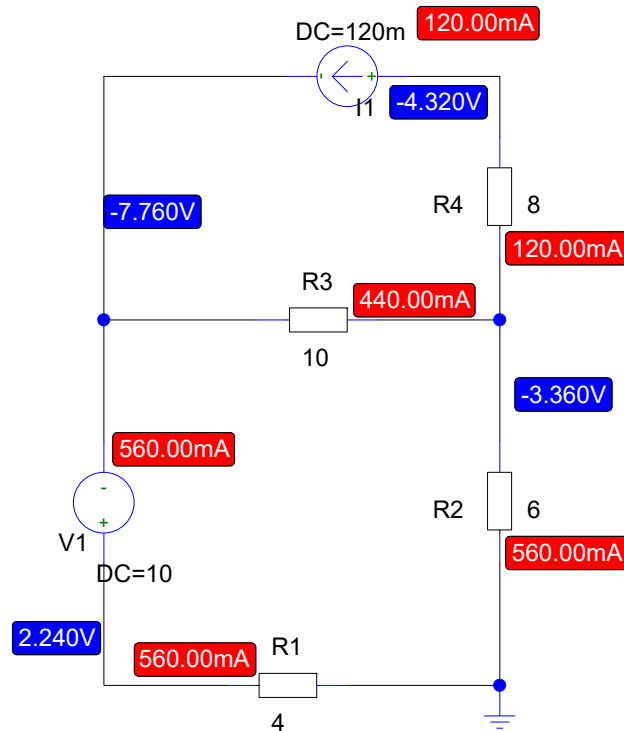


Abbildung 5: PSpice-Simulation der Schalterposition a

## 4.2 Schalterposition b

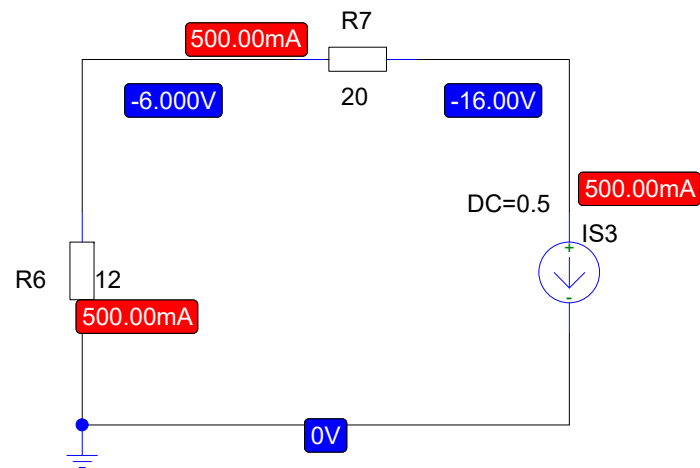


Abbildung 6: PSpice-Simulation der Schalterposition b

### 4.3 Simulation des Umschaltvorgangs

In Abbildung 9 ist der Schaltungsaufbau für die Simulation des Umschaltvorgangs zu sehen. Dabei ist der Schalter tOpen zum Zeitpunkt  $0 < t \leq 100 \text{ ms}$  geschlossen, während tClose geschlossen ist. Zum Zeitpunkt  $t > 100 \text{ ms}$  ist tOpen offen und tClose geschlossen.

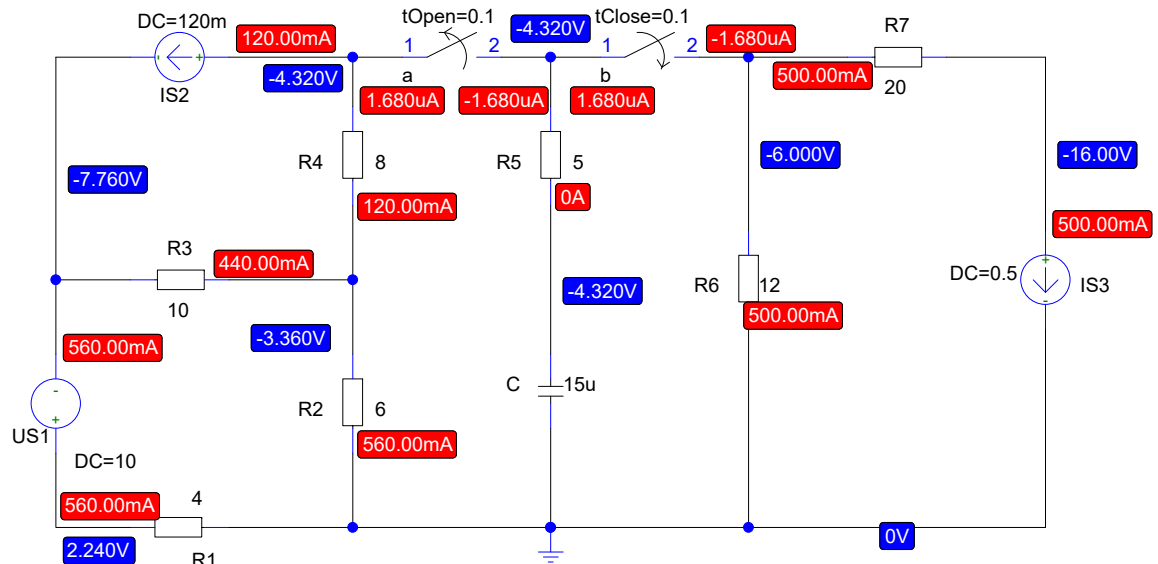


Abbildung 7: PSpice-Simulation des Umschaltvorgangs

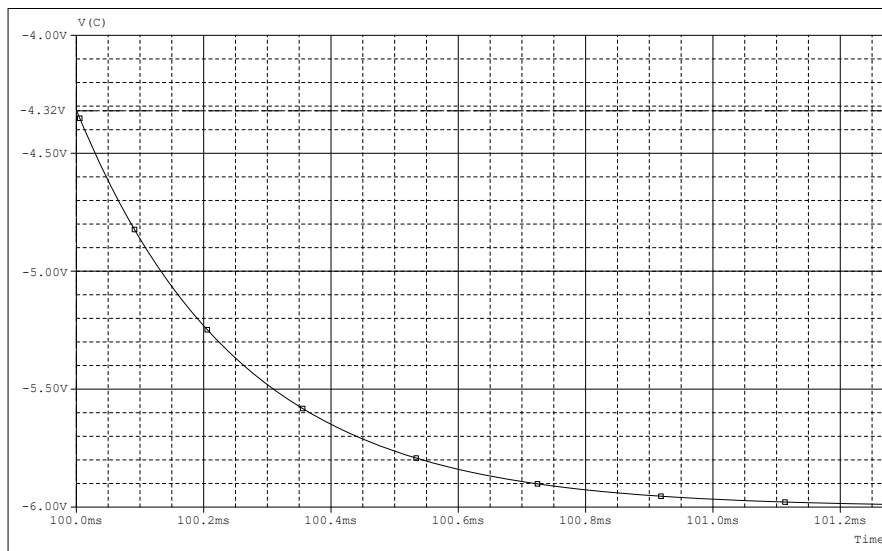


Abbildung 8: PSpice-Plot des Umschaltvorgangs

## 5 Matlab-Simulation

### 5.1 Skript

```
1  clc
2  Ohm = char(hex2dec('03A9'));
3
4  %% Variablendefinition der bekannten Werte
5
6  r1 = 4;
7  r2 = 6;
8  r3 = 10;
9  r4 = 8;
10 r5 = 5;
11 r6 = 12;
12 r7 = 20;
13
14 C = 15*10^(-6);
15 Us1 = 10;
16 Is2 = (120*10^(-3));
17 Is3 = 0.5;
18 T_0 = 100*10^(-3);
19
20 g1 = 1/r1;
21 g2 = 1/r2;
22 g3 = 1/r3;
23 g4 = 1/r4;
24 g5 = 1/r5;
25 g6 = 1/r6;
26 g7 = 1/r7;
27
28 %% Definition der Systemmatrix in der Form A * x = b von Schalterposition a
29
30 A_a = [g2+g3+g4, 0, -g3, -g4, 0;
31        0, g1, 0, 0, 1;
32        -g3, 0, g3, 0, -1;
33        -g4, 0, 0, g4, 0;
34        0, 1, -1, 0, 0];
35
36 b_a = [0; 0; Is2; -Is2; Us1];
37
38 %% L sen der Systemgleichung
39 x_a = A_a^(-1)*b_a;
40
41
42
43 %% Berechnung von U_C_a = Anfangswert
44
45 U_C_a_temp = x_a(4);
46
47 U_C_a = sprintf("%.4f V" , U_C_a_temp)
48
49
50
51
52 %% Definition der Systemmatrix in der Form A * x = b von Schalterposition b
53
54 A_b = [g6+g7, -g7;
55        -g7, g7];
56
57 b_b = [0; -Is3];
```

```

58
59 %% L sen der Systemgleichung
60 x_b = A_b^(-1)*b_b;
61
62 %% Berechnung von U_Th
63
64 U_Th_temp = x_b(1);
65
66 U_Th = sprintf("%.4f V" , U_Th_temp)
67
68
69 %% Berechnung von R_Th_b
70
71 R_Th_temp = r5+r6;
72
73 R_Th = sprintf("%.0f %s" , R_Th_temp, Ohm)
74
75 %% Plot
76
77 tau = R_Th_temp * C;
78
79 t = linspace(0.1,0.101275);
80 t_label = linspace(0.1,0.101275, 6);
81
82
83 figure('Name','Spannung u_C ab T_0','NumberTitle','off');
84 axLims = [0.1 (0.1+5*tau) -6 -4.32]; %[x-min, x-max, y-min, y-max] axis limits
85 u_c = U_Th_temp + (U_C_a_temp - U_Th_temp)*exp((-t+T_0)/(C*R_Th_temp));
86
87 plot(t, u_c, 'b');
88 hold on
89 point = [0.1+tau, U_Th_temp + (U_C_a_temp - U_Th_temp)*exp(-(0.1+tau)+T_0)/(C*
    R_Th_temp)];
90 plot(point(1), point(2), 'o')
91 plot([point(1), point(1)], [axLims(3), point(2)], 'k:') %vertical line
92 plot([axLims(1), point(1)], [point(2), point(2)], 'k:') %horizontal line
93
94 xticks(t_label)
95 xticklabels({'0\tau', '1\tau', '2\tau', '3\tau', '4\tau', '5\tau'})
96 yticks([-6 point(2) -4.32])
97 yticklabels({'-6 V', 'ca. 37%', '-4.32 V'})

```

## 5.2 Konsolenausput

```

1  U_C_a =
2
3  "-4.3200 V"
4
5
6  U_Th =
7
8  "-6.0000 V"
9
10
11  R_Th =
12
13  "17 Ω"

```

### 5.3 Plot

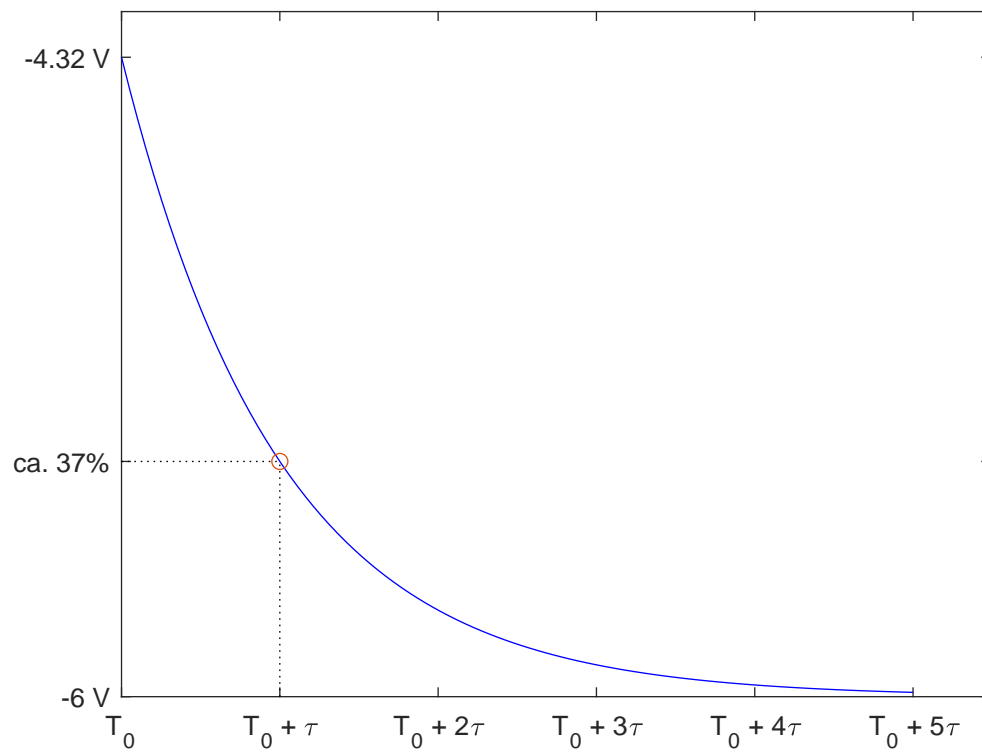


Abbildung 9: Matlab Plot des Umschaltvorgangs von  $t = T_0$  bis  $t = T_0 + 5 \cdot \tau$