Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik

Elektrische Netzwerke und Mehrtore
Übung

Wintersemester 2020

Protokoll Übung 3: Schaltvorgang Kondensator

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:
1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 12. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Bestimmen des Anfangszustands von u_C

1.1 Schaltplan zur Schalterposition a

Die Schaltung befindet sich bis zum Zeitpunkt $t = T_0$ in Schalterposition a. In Abbildung 1 ist das Ersatzschaltbild für den Ladevorgang zuständigen Teil des Netzwerks zu sehen. Da nach langer Zeit ein Kondensator als Leerlauf betrachtet werden darf, kann $I_{R5} = i_C = 0\,\mathrm{A}$ gesetzt werden. Durch Netzwerkanalyse mittels des KSVs lässt sich u_C als U_{n4} ausdrücken. (vgl. Abbildung 1)

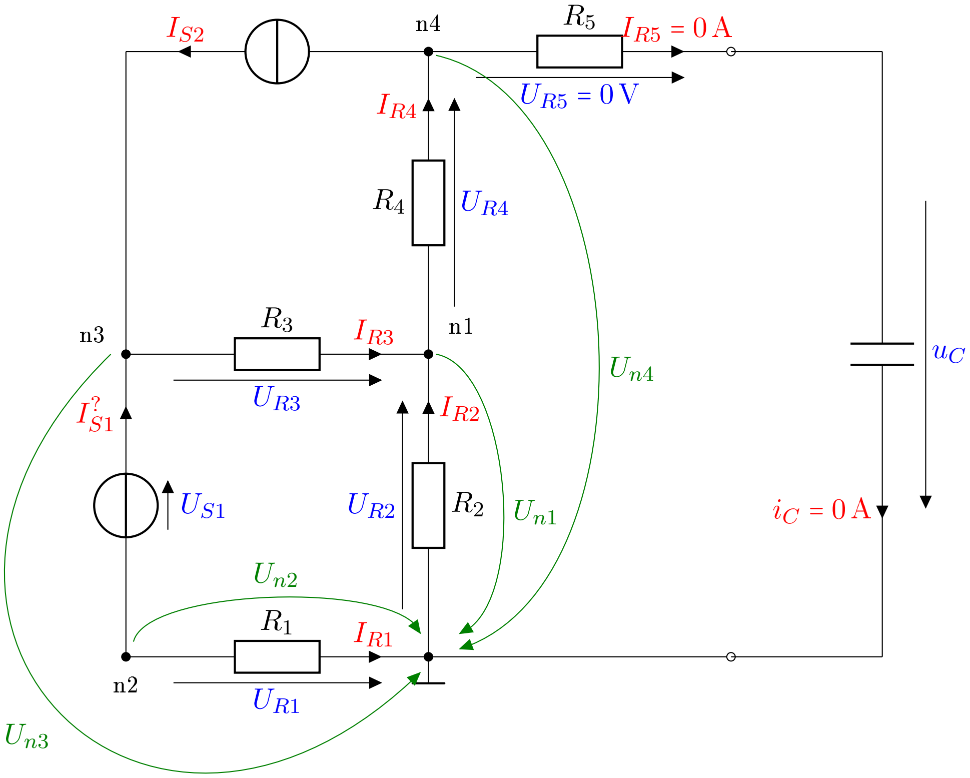

Abbildung 1: relevantes Netzwerk zur Schalterposition a mit allen eingezeichneten Strömen, (Knoten-)spannungen und Knoten

1.2 Erstellen der erweiterten KSV-Matrix

Durch "hinschauen"kann die netzwerkzugehörige KSV-Matrix aufgestellt werden. Diese besteht zum einen aus der Admittanzmatrix und zum anderen aus der zusätzlichen Gleichung für den unbekannten Strom $I_{S1}^{?}$. Jene erhält man über die Darstellung der Quellspannung U_{S1} mit den Knotenspannungen U_{n2} und U_{n3}:

$$U_{S1} = U_{n2} - U_{n3}$$

$$\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} n1 & n2 & n3 & n4 & I_{S1}^{?} \end{array} \\ \begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ I_{S1}^{?} \end{array} & \begin{bmatrix} G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & -G_4 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 & 0 & 1 \\ -G_3 & 0 & G_3 & 0 & -1 \\ -G_4 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}}_{A_a} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ I_{S1}^{?} \end{Bmatrix}}_{x_a} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{S2} \\ -I_{S2} \\ U_{S1} \end{Bmatrix}}_{b_a}$$

Man erhält mithilfe von Matlab für x_a:

$$x_a = \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ I_{S1}^{?} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,36\,\mathrm{V} \\ 2,24\,\mathrm{V} \\ -7,76\,\mathrm{V} \\ -4,32\,\mathrm{V} \\ -0,56\,\mathrm{A} \end{Bmatrix}$$

1.3 Bestimmen von U_{C_a}

Wie sich im Schaltplan in Abbildung 1 erkennen lässt, entspricht $U_{C_a} = U_{n4}$:

$$U_{C_a} = U_{n4} = -4,32\,\mathrm{V}$$

2 Aufstellen der Differentialgleichung

2.1 Schaltplan zur Schalterposition b

Zum Zeitpunkt $t = T_0$ wird der Schalter in die b Position gebracht und der sich vom Kondensator links befindliche Teil der Schaltung getrennt. Um das Aufstellen der Differentialgleichung zu erleichtern, kann mittels KSV die Theveninquelle und der dazugehörige Innenwiderstand ermittelt werden. (vgl. Abbildung 2 und 4)

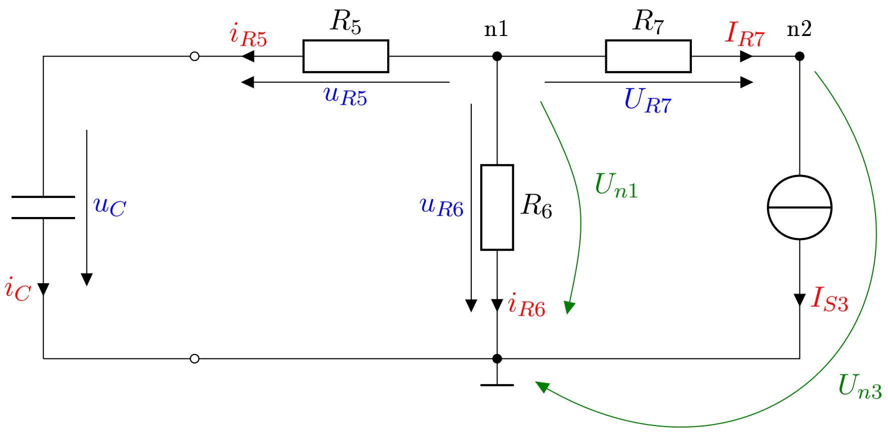

Abbildung 2: relevantes Netzwerk zur Schalterposition a mit allen eingezeichneten Strömen, (Knoten-)spannungen und Knoten

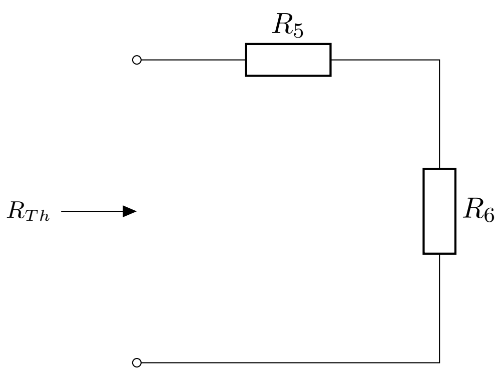

Abbildung 3: Schaltbild zur Bestimmung des Innenwiderstandes R_{Th}

Der Innenwiderstand kann folgendermaßen berechnet werden:

$$R_{Th} = R_5 + R_6 = 17\,\Omega$$

2.2 Erstellen der KSV-Matrix

Durch "hinschauen"kann erneut eine KSV-Matrix zu dem Netzwerk in Abbildung 2 aufgestellt werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G_6 + G_7 & -G_7 \\ -G_7 & G_7 \end{bmatrix}}_{A_b} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \end{Bmatrix}}_{x_b} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{S3} \end{Bmatrix}}_{b_b}$$

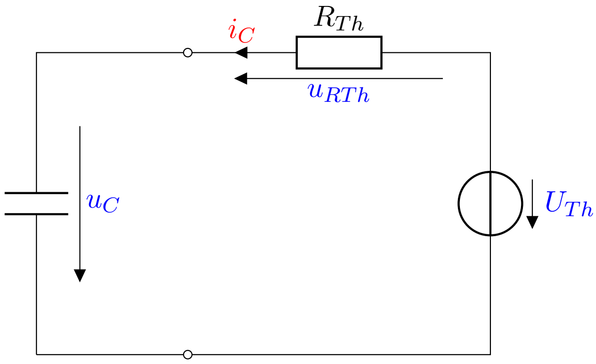

Abbildung 4: Thevenin-Ersatzquelle des Netzwerks aus Abbildung 2

2.3 Lösen der Differentialgleichung

2.3.1 (Laplace Lösung)

$$u_C + u_{RTh} = U_{Th}$$

$$u_C + R_{Th} \cdot i_C = U_{Th}$$

$$u_C + R_{Th} \cdot C \cdot u_C' = U_{Th}$$

$$u_C' + u_C \left(\frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}$$

$$\circ\!-\!\!\bullet$$

$$s \cdot u_C(s) - u_C(0) + \left(\frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right) u_C(s) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C} \cdot \frac{1}{s}$$

$$u_C(s)\left(s + \frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right) = \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\cdot\frac{1}{s} + u_C(0)$$

$$u_C(s) = \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\cdot\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right)} + \frac{u_C(0)}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}$$

$$\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}$$

$$A = \left.\frac{1}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}\right|_{s=0} = R_{Th}\cdot C$$

$$B = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=-\frac{1}{R_{Th}\cdot C}} = -R_{Th}\cdot C$$

$$u_C(s) = \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\left(\frac{R_{Th}\cdot C}{s} - \frac{R_{Th}\cdot C}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}\right) + \frac{u_C(0)}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}$$

$$= U_{Th}\cdot\frac{1}{s} + \left(u_C(0) - U_{Th}\right)\frac{1}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}$$

$$u_C(t) = U_{Th} + \left(u_C(0) - U_{Th}\right)\cdot e^{-\frac{t}{R_{Th}\cdot C}}$$

Die Funktion ist um T_0 nach rechts verschoben. Deswegen gilt:

$$u_C(t) = \sigma(t-T_0)\left[U_{Th} + \left(u_C(0) - U_{Th}\right)\cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th}\cdot C}}\right]$$

2.3.2 Homogene Lösung

Die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung lautet:

$$u_C' + u_C\cdot\frac{1}{R_{Th}\cdot C} = \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}$$

Der homogene Anteil lässt sich somit folgendermaßen beschreiben:

$$u'_{C,h} + u_{C,h} \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = 0$$

Aufgrund des Schaltvorgangs zum Zeitpunkt $t = T_0$, wird die Gleichung um T_0 nach rechts verschoben. Man setzt an:

$$\begin{aligned}
u_{C,h} &= K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)} \\
u'_{C,h} &= -\lambda \cdot K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)} \\
\Longrightarrow -\lambda \cdot K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)} + K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)} \frac{1}{R_{Th} \cdot C} &= 0 \\
\underbrace{K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)}}_{\neq 0} \left(\frac{1}{R_{Th} \cdot C} - \lambda \right) &= 0 \\
\frac{1}{R_{Th} \cdot C} &= \lambda \\
\Longrightarrow u_{C,h} &= K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}}
\end{aligned}$$

2.3.3 Partikuläre Lösung

Für die partikuläre Lösung kann man $u_{C,p} = A$ ansetzen und erhält:

$$\begin{aligned}
u_{C,p} &= A \\
u'_{C,p} &= 0 \\
\Longrightarrow 0 + A \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} &= \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C} \\
A &= U_{Th}
\end{aligned}$$

Die Gesamtlösung der Differentialgleichung setzt sich nun aus der homogenen und der partikulären Lösung zusammen:

$$u_C = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}} + U_{Th} \tag{1}$$

2.3.4 Anfangswertproblem

In Kapitel 1.3 wurde bereits der Spannungswert des Kondensators $u_{C,a} = u_C(T_0)$ zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ ausgerechnet. Diesen Anfangswert der stetigen Kondensatorspannung

u_C zum Zeitpunkt T_0 kann man nun dazu verwenden, den Wert von K aus der Formel 1 auszurechnen.

$$u_C(T_0) = K \cdot \underbrace{e^{\frac{T_0 - T_0}{R_{Th} \cdot C}}}_{=1} + U_{Th}$$

$$\Longrightarrow K = u_C(T_0) - U_{Th}$$

2.3.5 Gesamtlösung

Setzt man nun den erhaltenen Wert von K in die Formel 1 ein, so lautet die gelöste Differentialgleichung:

$$u_C = (u_C(T_0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t}{R_{Th} \cdot C}} + U_{Th}$$

3 Vergleich mit allgemeiner Lösungsformel

Transiente Vorgänge lassen sich verallgemeinert mit folgender Lösungsformel lösen:

$$x(t) = x_f + \left[x_0 - x_f\right] \cdot e^{-\frac{t - t_0}{\tau}}$$

x_0 entspricht dem Anfangswert, welcher bei $t = T_0$ den Wert $u_C(T_0) = U_{C,a}$ hat. x_f entsprich dem Endwert, dieser ist in gegebener Schaltung der Wert von U_{Th}, da dieser Spannungswert übrig bleibt, nachdem sich der Kondensator übrig bleibt. Setzt man für x_0 und x_f die entsprechenden Werte in die allgemeine Lösungsformel ein, so ist diese Form identisch mit der Gesamtlösung aus Kapitel 2.3.5.

4 Simulation in PSpice

4.1 Schalterposition a

In der Schalterposition a muss der Kondensator C nicht aufgezeichnet werden, da er nach langer Zeit wie ein Leerlauf fungiert.

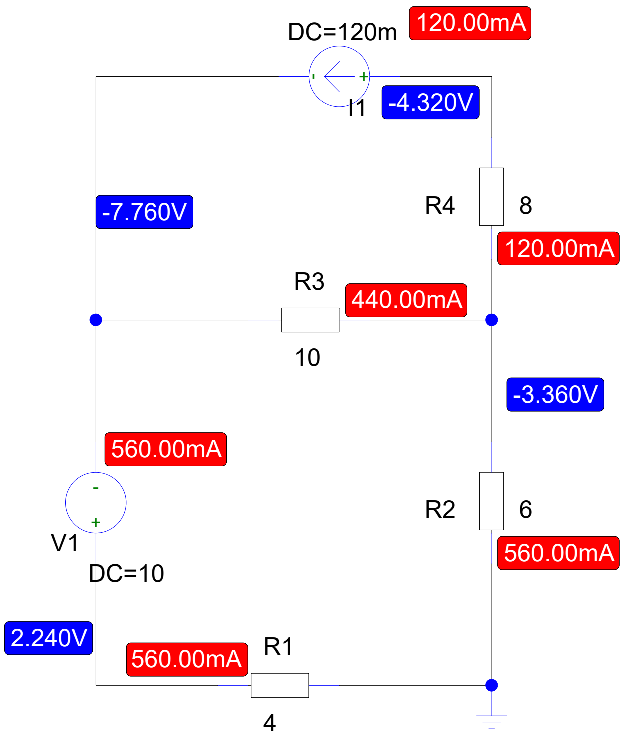

Abbildung 5: PSpice-Simulation der Schalterposition a

4.2 Schalterposition b

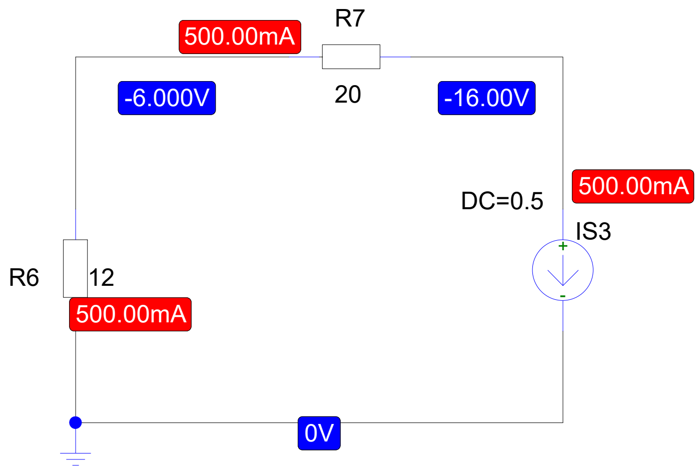

Abbildung 6: PSpice-Simulation der Schalterposition b

4.3 Simulation des Umschaltvorgangs

In Abbildung 9 ist der Schaltungsaufbau für die Simulation des Umschaltvorgangs zu sehen. Dabei ist der Schalter tOpen zum Zeitpunkt $0 < t \leq 100\,\text{ms}$ geschlossen, während tClose geschlossen ist. Zum Zeitpunkt $t > 100\,\text{ms}$ ist tOpen offen und tClose geschlossen.

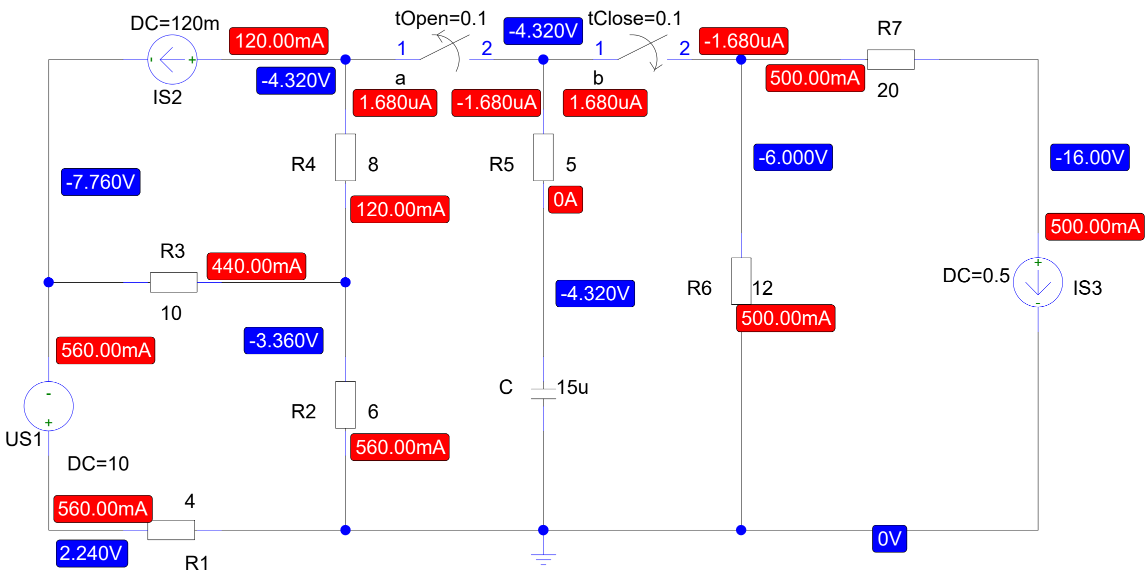

Abbildung 7: PSpice-Simulation des Umschaltvorgangs

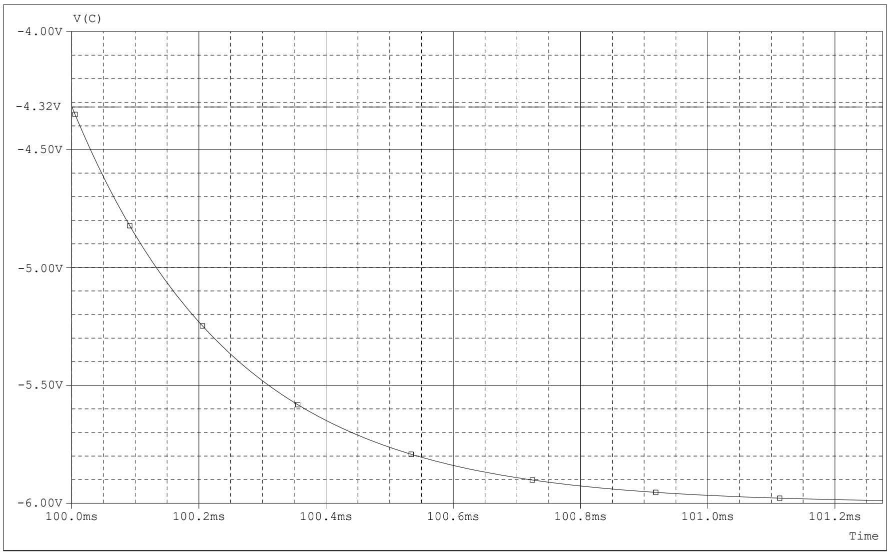

Abbildung 8: PSpice-Plot des Umschaltvorgangs

5 Matlab-Simulation

5.1 Skript

```
clc
Ohm = char(hex2dec('03A9'));

%% Variablendefinition der bekannten Werte

r1 = 4;
r2 = 6;
r3 = 10;
r4 = 8;
r5 = 5;
r6 = 12;
r7 = 20;

C = 15*10^(-6);
Us1 = 10;
Is2 = (120*10^(-3));
Is3 = 0.5;
T_0 = 100*10^(-3);

g1 = 1/r1;
g2 = 1/r2;
g3 = 1/r3;
g4 = 1/r4;
g5 = 1/r5;
g6 = 1/r6;
g7 = 1/r7;

%% Definition der Systemmatrix in der Form A * x = b von Schalterposition a

A_a = [g2+g3+g4, 0, -g3, -g4, 0;
    0, g1, 0, 0, 1;
    -g3, 0, g3, 0, -1;
    -g4, 0, 0, g4, 0;
    0, 1, -1, 0, 0];

b_a = [0; 0; Is2; -Is2; Us1];

%% L sen der Systemgleichung
x_a = A_a^(-1)*b_a;



%% Berechnung von U_C_a = Anfangswert

U_C_a_temp = x_a(4);

U_C_a = sprintf("%.4f V" , U_C_a_temp)




%% Definition der Systemmatrix in der Form A * x = b von Schalterposition b

A_b = [g6+g7, -g7;
    -g7, g7];

b_b = [0; -Is3];
```

```
%% L sen der Systemgleichung
x_b = A_b^(-1)*b_b;

%% Berechnung von U_Th

U_Th_temp = x_b(1);

U_Th = sprintf("%.4f V" , U_Th_temp)


%% Berechnung von R_Th_b

R_Th_temp = r5+r6;

R_Th = sprintf("%.0f %s" , R_Th_temp, Ohm)

%% Plot

tau = R_Th_temp * C;

t = linspace(0.1,0.101275);
t_label = linspace(0.1,0.101275, 6);


figure('Name','Spannung u_C ab T_0','NumberTitle','off');
axLims = [0.1 (0.1+5*tau) -6 -4.32];  %[x-min, x-max, y-min, y-max] axis limits
u_c = U_Th_temp + (U_C_a_temp - U_Th_temp)*exp((-t+T_0)/(C*R_Th_temp));

plot(t, u_c, 'b');
hold on
point = [0.1+tau, U_Th_temp + (U_C_a_temp - U_Th_temp)*exp((-(0.1+tau)+T_0)/(C*
    R_Th_temp))];
plot(point(1), point(2), 'o')
plot([point(1), point(1)], [axLims(3), point(2)], 'k:')  %vertical line
plot([axLims(1), point(1)], [point(2), point(2)], 'k:')  %horizontal line

xticks(t_label)
xticklabels({'0\tau','1\tau','2\tau','3\tau','4\tau','5\tau'})
yticks([-6 point(2) -4.32])
yticklabels({'-6 V', 'ca. 37%', '-4.32 V'})
```

5.2 Konsolenoutput

```
  U_C_a =

  "-4.3200 V"


  U_Th =

  "-6.0000 V"


  R_Th =

  "17 Ω"
```

5.3 Plot

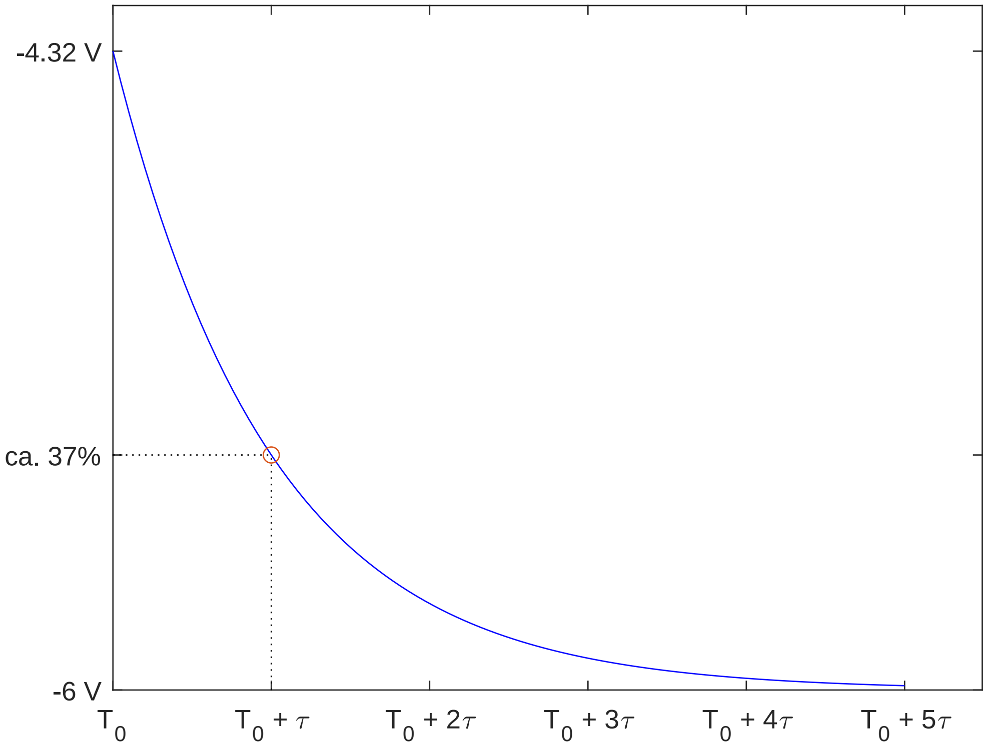

Abbildung 9: Matlab Plot des Umschaltvorgangs von $t = T_0$ bis $t = T_0 + 5 \cdot \tau$