Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik

Elektrische Netzwerke und Mehrtore
Übung

Wintersemester 2020

Protokoll Übung 3: Schaltvorgang Kondensator

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 10. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Bestimmen des Anfangszustands von u_C

1.1 Schaltplan zur Schalterposition a

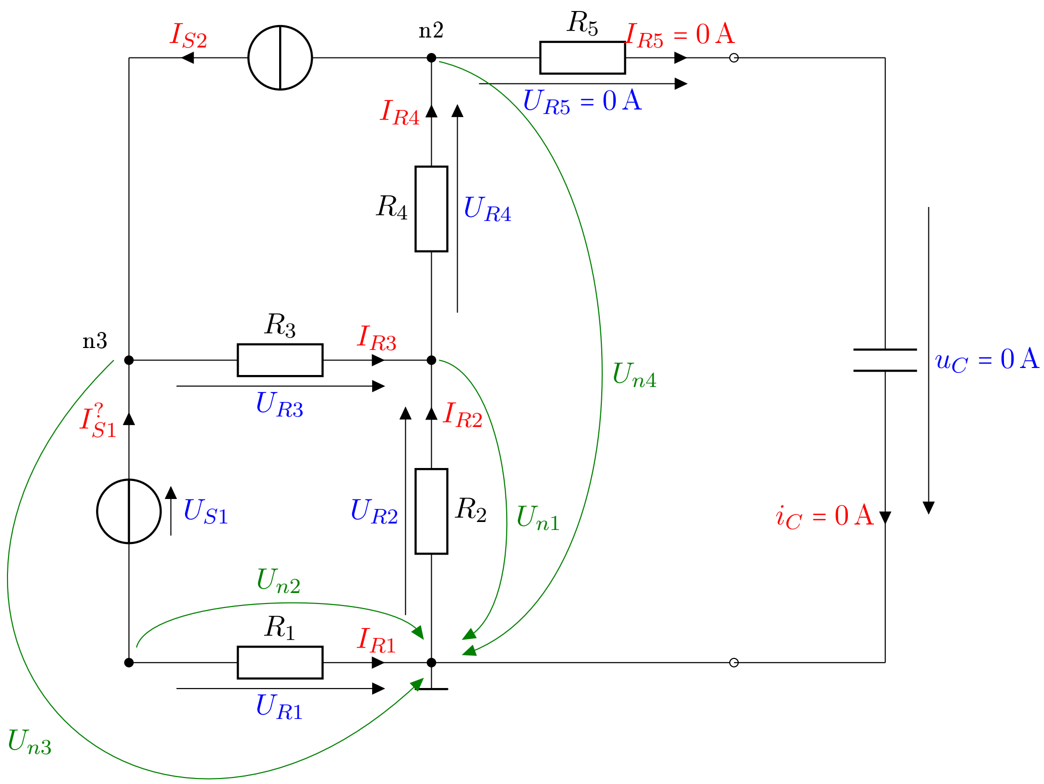


Abbildung 1: Netzwerk mit allen eingezeichneten Strömen, (Knoten-)spannungen und Knoten

1.2 Erstellen der erweiterten KSV-Matrix

$$\begin{array}{c} \\ n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ I_{S1}^{?} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} n1 & n2 & n3 & n4 & I_{S1}^{?} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} G_2+G_3+G_4 & 0 & -G_3 & -G_4 & 0 \\ \hdashline 0 & G_1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -G_3 & 0 & G_3 & 0 & -1 \\ \hdashline -G_4 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ I_{S1}^{?} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{S2} \\ -I_{S2} \\ U_{S1} \end{Bmatrix}$$

Man erhält mithilfe von Matlab für x:

$$x = \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ I_{S1}^{?} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,36\,\mathrm{V} \\ 2,24\,\mathrm{V} \\ -7,76\,\mathrm{V} \\ -4,32\,\mathrm{V} \\ -0,56\,\mathrm{A} \end{Bmatrix}$$

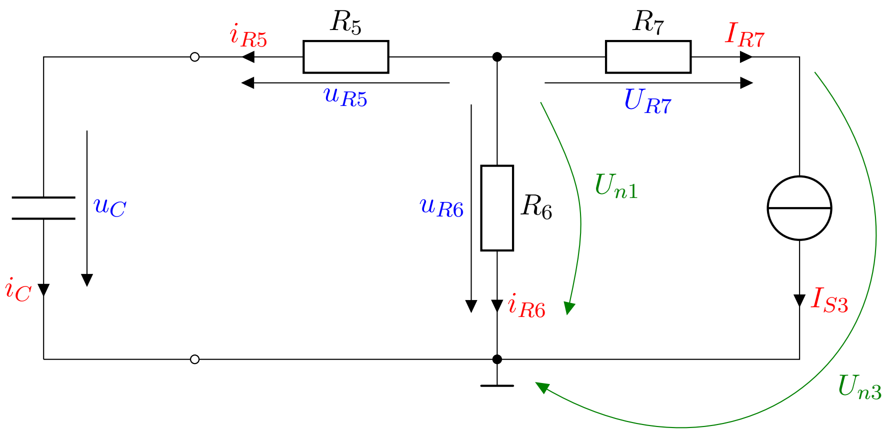
1.3 Bestimmen von u_C

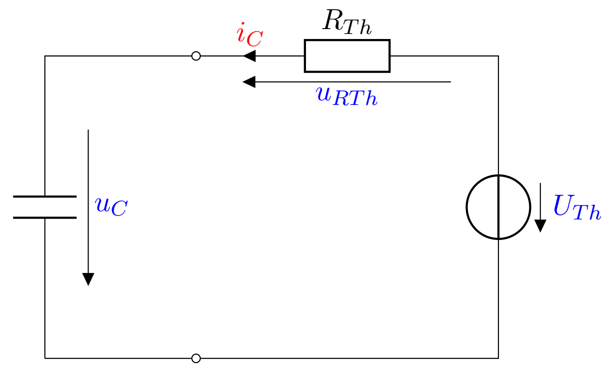
Wie sich im Schaltplan in Abbildung 1 erkennen lässt, entspricht $U_{C,a} = U_{n4}$:

$$U_{C,a} = U_{n4} = -4,32\,\mathrm{V}$$

2 Aufstellen der Differentialgleichung

2.1 Schaltplan zur Schalterposition b





2.2 Erstellen der KSV-Matrix

$$\left[\begin{array}{c:c} G_6 + G_7 & -G_7 \\ \hdashline -G_7 & G_7 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{S3} \end{Bmatrix}$$

2.3 Lösen der Differentialgleichung

2.3.1 (Laplace Lösung)

$$u_C + u_{RTh} = U_{Th}$$

$$u_C + R_{Th} \cdot i_C = U_{Th}$$

$$u_C + R_{Th} \cdot C \cdot u_C' = U_{Th}$$

$$u_C' + u_C\left(\frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right) = \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}$$

$$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}
s\cdot u_C(s) - u_C(0) + \left(\frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right)u_C(s) &= \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\cdot\frac{1}{s}\\
u_C(s)\left(s + \frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right) &= \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\cdot\frac{1}{s} + u_C(0)\\
u_C(s) &= \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\cdot\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right)} + \frac{u_C(0)}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}\\
A &= \left.\frac{1}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}\right|_{s=0} = R_{Th}\cdot C\\
B &= \left.\frac{1}{s}\right|_{s=-\frac{1}{R_{Th}\cdot C}} = -R_{Th}\cdot C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_C(s) &= \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\left(\frac{R_{Th}\cdot C}{s} - \frac{R_{Th}\cdot C}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}\right) + \frac{u_C(0)}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}\\
&= U_{Th}\cdot\frac{1}{s} + \left(u_C(0) - U_{Th}\right)\frac{1}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}
\end{aligned}$$

$$\bullet\!\!\!-\!\!\circ$$

$$u_C(t) = U_{Th} + \left(u_C(0) - U_{Th}\right)\cdot e^{-\frac{t}{R_{Th}\cdot C}}$$

Die Funktion ist um T_0 nach rechts verschoben. Deswegen gilt:

$$u_C(t) = \sigma(t - T_0)\left[U_{Th} + (u_C(0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}}\right]$$

2.3.2 Homogene Lösung

Die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung lautet:

$$u_C' + u_C \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}$$

Der homogene Anteil lässt sich somit folgendermaßen beschreiben:

$$u_{C,h}' + u_{C,h} \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = 0$$

Aufgrund des Schaltvorgangs zum Zeitpunkt $t = T_0$, wird die Gleichung um T_0 nach rechts verschoben. Man setzt an:

$$\begin{aligned}
u_{C,h} &= K \cdot e^{-\lambda \cdot (t - T_0)} \\
u_{C,h}' &= -\lambda \cdot K \cdot e^{-\lambda \cdot (t - T_0)} \\
\implies -\lambda \cdot K \cdot e^{-\lambda \cdot (t - T_0)} + K \cdot e^{-\lambda \cdot (t - T_0)} \frac{1}{R_{Th} \cdot C} &= 0 \\
\underbrace{K \cdot e^{-\lambda \cdot (t - T_0)}}_{\neq 0} \left(\frac{1}{R_{Th} \cdot C} - \lambda\right) &= 0 \\
\frac{1}{R_{Th} \cdot C} &= \lambda \\
\implies u_{C,h} &= K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}}
\end{aligned}$$

2.3.3 Partikuläre Lösung

Für die partikuläre Lösung kann man $u_{C,p} = A$ ansetzen und erhält:

$$\begin{aligned}
u_{C,p} &= A \\
u_{C,p}' &= 0 \\
\implies 0 + A \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} &= \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}
\end{aligned}$$

$$A = U_{Th}$$

Die Gesamtlösung der Differentialgleichung setzt sich nun aus der homogenen und der partikulären Lösung zusammen:

$$u_C = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}} + U_{Th} \tag{1}$$

2.3.4 Anfangswertproblem

In Kapitel 1.3 wurde bereits der Spannungswert des Kondensators $u_{C,a} = u_C(T_0)$ zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ ausgerechnet. Diesen Anfangswert der stetigen Kondensatorspannung u_C zum Zeitpunkt T_0 kann man nun dazu verwenden, den Wert von K aus der Formel 1 auszurechnen.

$$u_C(T_0) = K \cdot \underbrace{e^{\frac{T_0-T_0}{R_{Th} \cdot C}}}_{=1} + U_{Th}$$

$$\Longrightarrow K = u_C(T_0) - U_{Th}$$

2.3.5 Gesamtlösung

Setzt man nun den erhaltenen Wert von K in die Formel 1 ein, so lautet die gelöste Differentialgleichung:

$$u_C = (u_C(T_0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t}{R_{Th} \cdot C}} + U_{Th}$$

3 Vergleich mit allgemeiner Lösungsformel

Transiente Vorgänge lassen sich verallgemeinert mit folgender Lösungsformel lösen:

$$x(t) = x_f + \left[x_0 - x_f\right] \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

x_0 entspricht dem Anfangswert, welcher bei $t = T_0$ den Wert $u_C(T_0) = U_{C,a}$ hat. x_f entsprich dem Endwert, dieser ist in gegebener Schaltung der Wert von U_{Th}, da dieser Spannungswert übrig bleibt, nachdem sich der Kondensator übrig bleibt. Setzt man für x_0 und x_f die entsprechenden Werte in die allgemeine Lösungsformel ein, so ist diese Form identisch mit der Gesamtlösung aus Kapitel 2.3.5.

4 Simulation in PSpice

5 Matlab-Skript