

Elektrische Netzwerke und Mehrport Übung

Wintersemester 2020

Protokoll Übung 3: Schaltvorgang Kondensator

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 10. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Bestimmen des Anfangszustands von u_C	3
1.1	Schaltplan zur Schalterposition a	3
1.2	Erstellen der erweiterten KSV-Matrix	4
1.3	Bestimmen von u_C	4
2	Aufstellen der Differentialgleichung	5
2.1	Schaltplan zur Schalterposition b	5
2.2	Erstellen der KSV-Matrix	5
2.3	Lösen der Differentialgleichung	5
2.3.1	(Laplace Lösung)	5
2.3.2	Homogene Lösung	7
2.3.3	Partikuläre Lösung	7
2.3.4	Anfangswertproblem	8
2.3.5	Gesamtlösung	8
3	Vergleich mit allgemeiner Lösungsformel	8
4	Simulation in PSpice	9
4.1	Schalterposition a	9
4.2	Schalterposition b	10
4.3	Simulation des Umschaltvorgangs	11
5	Matlab-Simulation	12
5.1	Skript	12
5.2	Plot	14
5.3	Konsolenoutput	14

1 Bestimmen des Anfangszustands von u_C

1.1 Schaltplan zur Schalterposition a

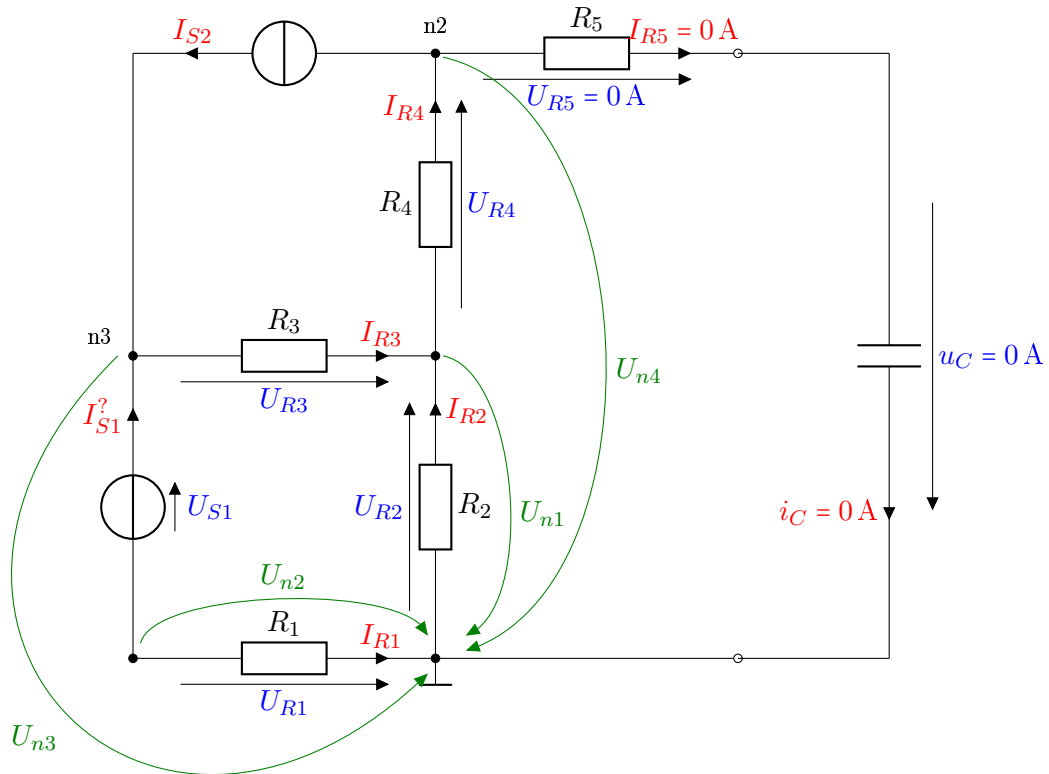


Abbildung 1: Netzwerk mit allen eingezeichneten Strömen, (Knoten-)spannungen und Knoten

1.2 Erstellen der erweiterten KSV-Matrix

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & n1 & n2 & n3 & n4 & I_{S1}^? \\
 n1 & G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & -G_4 & 0 \\
 n2 & 0 & G_1 & 0 & 0 & 1 \\
 n3 & -G_3 & 0 & G_3 & 0 & -1 \\
 n4 & -G_4 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\
 I_{S1}^? & 0 & 1 & -1 & 0 & 0
 \end{array}
 \begin{bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ I_{S1}^? \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{S2} \\ -I_{S2} \\ U_{S1} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Man erhält mithilfe von Matlab für x :

$$x = \begin{bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ I_{S1}^? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,36 \text{ V} \\ 2,24 \text{ V} \\ -7,76 \text{ V} \\ -4,32 \text{ V} \\ -0,56 \text{ A} \end{bmatrix}$$

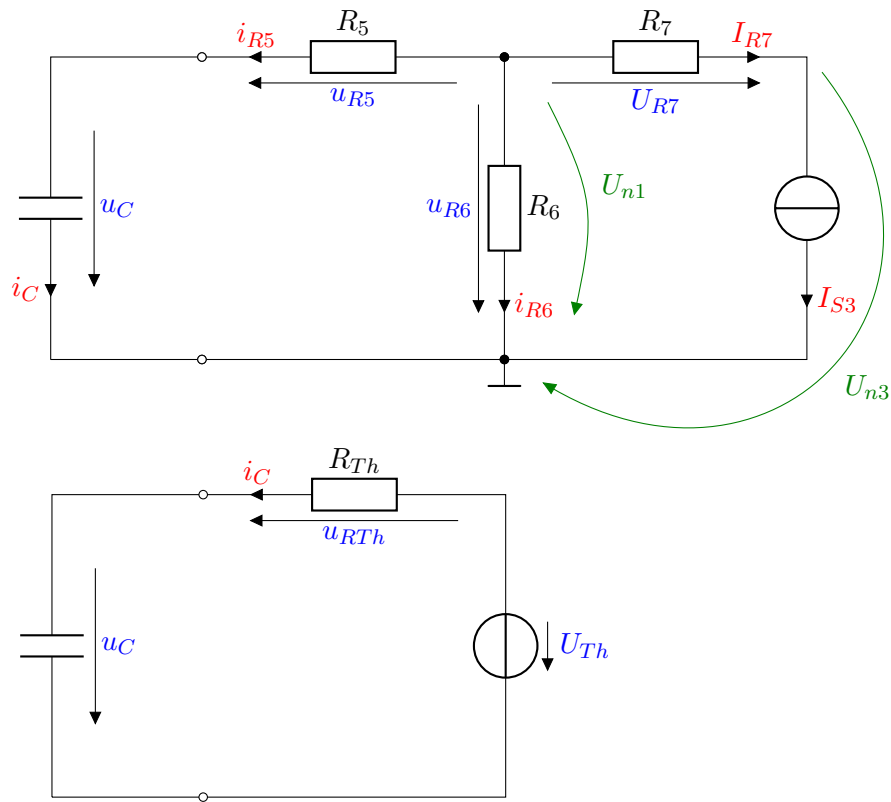
1.3 Bestimmen von u_C

Wie sich im Schaltplan in Abbildung 1 erkennen lässt, entspricht $U_{C,a} = U_{n4}$:

$$U_{C,a} = U_{n4} = -4,32 \text{ V}$$

2 Aufstellen der Differentialgleichung

2.1 Schaltplan zur Schalterposition b



2.2 Erstellen der KSV-Matrix

$$\begin{bmatrix} G_6 + G_7 & \vdots & -G_7 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_7 & \vdots & G_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{S3} \end{Bmatrix}$$

2.3 Lösen der Differentialgleichung

2.3.1 (Laplace Lösung)

$$u_C + u_{RTh} = U_{Th}$$

$$u_C + R_{Th} \cdot i_C = U_{Th}$$

$$u_C + R_{Th} \cdot C \cdot u'_C = U_{Th}$$

$$u'_C + u_C \left(\frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}$$



$$s \cdot u_C(s) - u_C(0) + \left(\frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right) u_C(s) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C} \cdot \frac{1}{s}$$

$$u_C(s) \left(s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C} \cdot \frac{1}{s} + u_C(0)$$

$$u_C(s) = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C} \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right)} + \frac{u_C(0)}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}}$$

$$\frac{1}{s \left(s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C} \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}}$$

$$A = \frac{1}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}} \Big|_{s=0} = R_{Th} \cdot C$$

$$B = \frac{1}{s} \Big|_{s=-\frac{1}{R_{Th} \cdot C}} = -R_{Th} \cdot C$$

$$\begin{aligned} u_C(s) &= \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C} \left(\frac{R_{Th} \cdot C}{s} - \frac{R_{Th} \cdot C}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}} \right) + \frac{u_C(0)}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}} \\ &= U_{Th} \cdot \frac{1}{s} + (u_C(0) - U_{Th}) \frac{1}{s + \frac{1}{R_{Th} \cdot C}} \end{aligned}$$



$$u_C(t) = U_{Th} + (u_C(0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t}{R_{Th} \cdot C}}$$

Die Funktion ist um T_0 nach rechts verschoben. Deswegen gilt:

$$u_C(t) = \sigma(t - T_0) \left[U_{Th} + (u_C(0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}} \right]$$

2.3.2 Homogene Lösung

Die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung lautet:

$$u'_C + u_C \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}$$

Der homogene Anteil lässt sich somit folgendermaßen beschreiben:

$$u'_{C,h} + u_{C,h} \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = 0$$

Aufgrund des Schaltvorgangs zum Zeitpunkt $t = T_0$, wird die Gleichung um T_0 nach rechts verschoben. Man setzt an:

$$u_{C,h} = K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)}$$

$$u'_{C,h} = -\lambda \cdot K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)}$$

$$\implies -\lambda \cdot K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)} + K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)} \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = 0$$

$$\underbrace{K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)}}_{\neq 0} \left(\frac{1}{R_{Th} \cdot C} - \lambda \right) = 0$$

$$\frac{1}{R_{Th} \cdot C} = \lambda$$

$$\implies u_{C,h} = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}}$$

2.3.3 Partikuläre Lösung

Für die partikuläre Lösung kann man $u_{C,p} = A$ ansetzen und erhält:

$$u_{C,p} = A$$

$$u'_{C,p} = 0$$

$$\implies 0 + A \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}$$

$$A = U_{Th}$$

Die Gesamtlösung der Differentialgleichung setzt sich nun aus der homogenen und der partikulären Lösung zusammen:

$$u_C = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}} + U_{Th} \quad (1)$$

2.3.4 Anfangswertproblem

In Kapitel 1.3 wurde bereits der Spannungswert des Kondensators $u_{C,a} = u_C(T_0)$ zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ ausgerechnet. Diesen Anfangswert der stetigen Kondensatorspannung u_C zum Zeitpunkt T_0 kann man nun dazu verwenden, den Wert von K aus der Formel 1 auszurechnen.

$$\begin{aligned} u_C(T_0) &= K \cdot \underbrace{e^{\frac{T_0-T_0}{R_{Th} \cdot C}}}_{=1} + U_{Th} \\ \implies K &= u_C(T_0) - U_{Th} \end{aligned}$$

2.3.5 Gesamtlösung

Setzt man nun den erhaltenen Wert von K in die Formel 1 ein, so lautet die gelöste Differentialgleichung:

$$u_C = (u_C(T_0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t}{R_{Th} \cdot C}} + U_{Th}$$

3 Vergleich mit allgemeiner Lösungsformel

Transiente Vorgänge lassen sich verallgemeinert mit folgender Lösungsformel lösen:

$$x(t) = x_f + [x_0 - x_f] \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

x_0 entspricht dem Anfangswert, welcher bei $t = T_0$ den Wert $u_C(T_0) = U_{C,a}$ hat. x_f entspricht dem Endwert, dieser ist in gegebener Schaltung der Wert von U_{Th} , da dieser Spannungswert übrig bleibt, nachdem sich der Kondensator übriggeladen hat. Setzt man für x_0 und x_f die entsprechenden Werte in die allgemeine Lösungsformel ein, so ist diese Formel identisch mit der Gesamtlösung aus Kapitel 2.3.5.

4 Simulation in PSpice

4.1 Schalterposition a

In der Schalterposition a muss der Kondensator C nicht aufgezeichnet werden, da er nach langer Zeit wie ein Leerlauf fungiert.

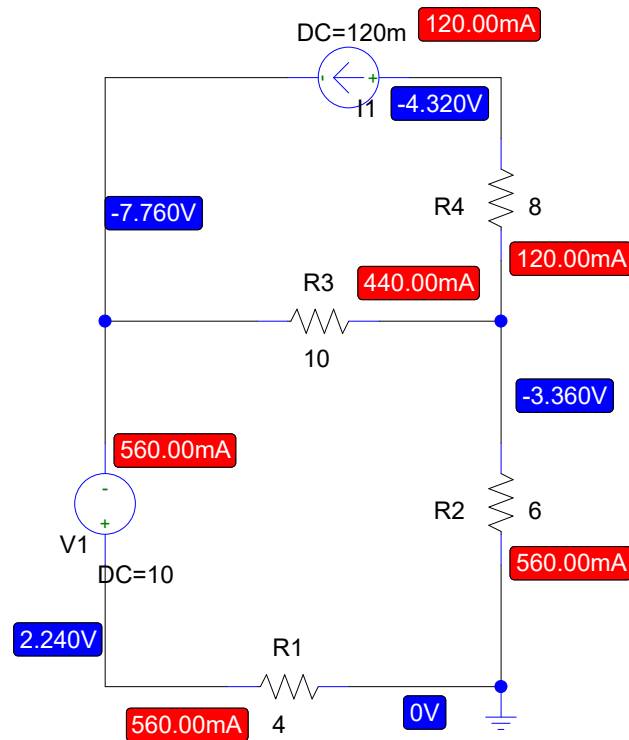


Abbildung 2: PSpice-Simulation der Schalterposition a

4.2 Schalterposition b

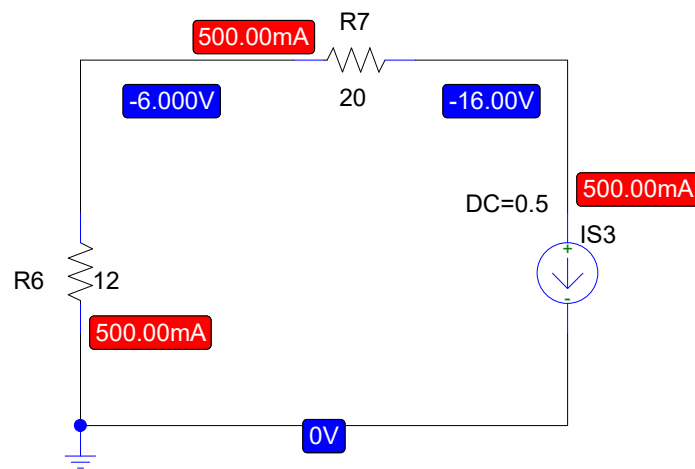


Abbildung 3: PSpice-Simulation der Schalterposition b

4.3 Simulation des Umschaltvorgangs

In Abbildung 5 ist der Schaltungsaufbau für die Simulation des Umschaltvorgangs zu sehen. Dabei ist der Schalter tOpen zum Zeitpunkt $0 < t \leq 100$ ms geschlossen, während tClose geschlossen ist. Zum Zeitpunkt $t > 100$ ms ist tOpen offen und tClose geschlossen.

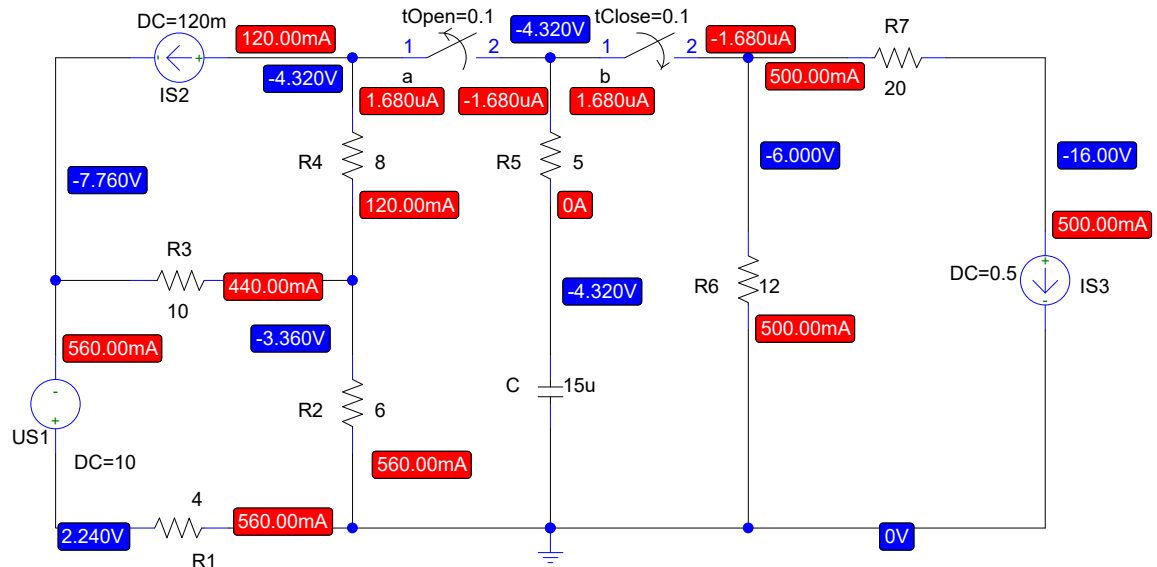


Abbildung 4: PSpice-Simulation des Umschaltvorgangs

5 Matlab-Simulation

5.1 Skript

```
1  clc
2  Ohm = char(hex2dec('03A9'));
3
4  %% Variablendefinition der bekannten Werte
5
6  r1 = 4;
7  r2 = 6;
8  r3 = 10;
9  r4 = 8;
10 r5 = 5;
11 r6 = 12;
12 r7 = 20;
13
14 C = 15*10^(-6);
15 Us1 = 10;
16 Is2 = (120*10^(-3));
17 Is3 = 0.5;
18 T_0 = 100*10^(-3);
19
20 g1 = 1/r1;
21 g2 = 1/r2;
22 g3 = 1/r3;
23 g4 = 1/r4;
24 g5 = 1/r5;
25 g6 = 1/r6;
26 g7 = 1/r7;
27
28 %% Definition der Systemmatrix in der Form A * x = b von Schalterposition a
29
30 A_a = [g2+g3+g4, 0, -g3, -g4, 0;
31        0, g1, 0, 0, 1;
32        -g3, 0, g3, 0, -1;
33        -g4, 0, 0, g4, 0;
34        0, 1, -1, 0, 0];
35
36 b_a = [0; 0; Is2; -Is2; Us1];
37
38 %% Lsen der Systemgleichung
39 x_a = A_a^(-1)*b_a;
40
41
42
43 %% Berechnung von U_C_a = Anfangswert
44
45 U_C_a_temp = x_a(4);
46
47 U_C_a = sprintf("%.4f V" , U_C_a_temp)
48
49
50
51
52 %% Definition der Systemmatrix in der Form A * x = b von Schalterposition b
53
54 A_b = [g6+g7, -g7;
55        -g7, g7];
56
57 b_b = [0; -Is3];
```

```

58
59 %% Lsen der Systemgleichung
60 x_b = A_b^(-1)*b_b;
61
62 %% Berechnung von U_Th
63
64 U_Th_temp = x_b(1);
65
66 U_Th = sprintf("%.4f V" , U_Th_temp)
67
68
69 %% Berechnung von R_Th_b
70
71 R_Th_temp = r5+r6;
72
73 R_Th = sprintf("%.0f %s" , R_Th_temp, Ohm)
74
75 %% Plot
76
77 tau = R_Th_temp * C;
78
79 t = linspace(0.1,0.101275);
80 t_label = linspace(0.1,0.101275, 6);
81
82
83 figure('Name','Spannung u_C ab T_0','NumberTitle','off');
84 axLims = [0.1 (0.1+5*tau) -6 -4.32]; %[x-min, x-max, y-min, y-max] axis limits
85 u_c = U_Th_temp + (U_C_a_temp - U_Th_temp)*exp((-t+T_0)/(C*R_Th_temp));
86
87 plot(t, u_c, 'b');
88 hold on
89 point = [0.1+tau, U_Th_temp + (U_C_a_temp - U_Th_temp)*exp(-(0.1+tau)+T_0)/(C*
    R_Th_temp)];
90 plot(point(1), point(2), 'o')
91 plot([point(1), point(1)], [axLims(3), point(2)], 'k:') %vertical line
92 plot([axLims(1), point(1)], [point(2), point(2)], 'k:') %horizontal line
93
94 xticks(t_label)
95 xticklabels({'0\tau', '1\tau', '2\tau', '3\tau', '4\tau', '5\tau'})
96 yticks([-6 point(2) -4.32])
97 yticklabels({'-6 V', 'ca. 37%', '-4.32 V'})

```

5.2 Konsolenausput

```

1  U_C_a =
2
3  "-4.3200 V"
4
5
6  U_Th =
7
8  "-6.0000 V"
9
10
11 R_Th =
12
13  "17 Ω"

```

5.3 Plot

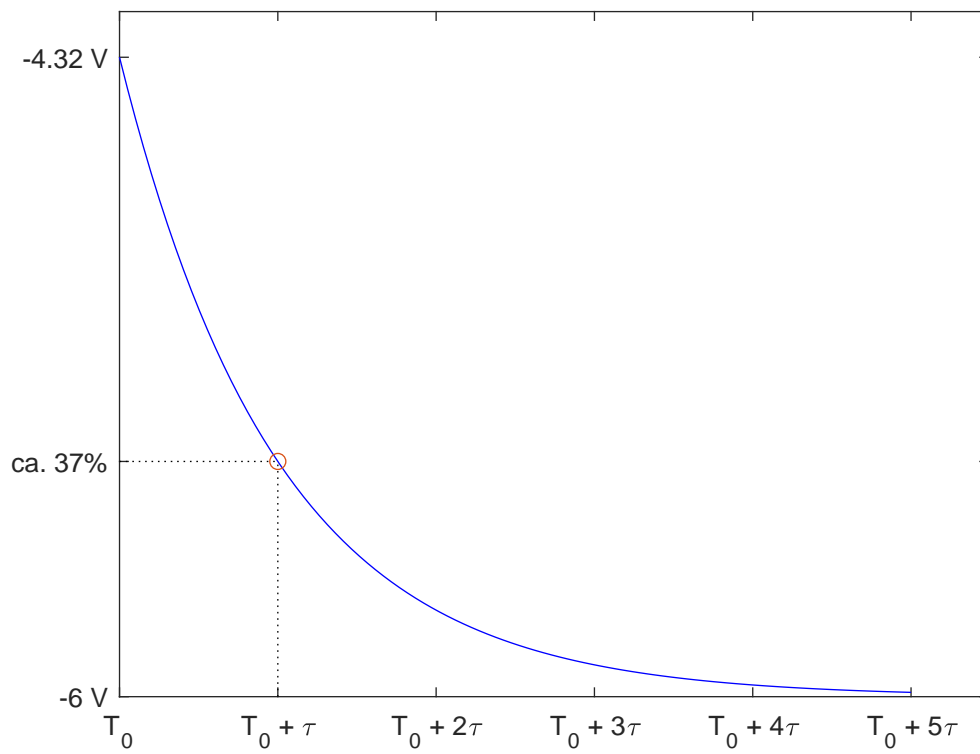


Abbildung 5: Matlab Plot des Umschaltvorgangs von $t = T_0$ bis $t = T_0 + 5 \cdot \tau$