

# Elektrische Netzwerke und Mehrport Übung

Wintersemester 2020

## Protokoll Übung 3: Schaltvorgang Kondensator

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 18. November 2020

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ermitteln der DGL von <math>i_L(t)</math> für <math>0 \leq t \leq 2\tau_1</math></b>	<b>3</b>
1.1	Schaltbild des Netzwerks für $0 \leq t \leq 2\tau_1$ . . . . .	3
1.2	Aufstellen der DGL mithilfe der allgemeinen Lösungsformel . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Ermitteln der DGL von <math>i_L(t)</math> für <math>t &gt; 2\tau_1</math></b>	<b>4</b>
2.1	Schaltbild des Netzwerks für $t > 2\tau_1$ . . . . .	4
2.2	Aufstellen der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschengleichungen . . . . .	5
2.3	Herleitung der DGL 2. Ordnung von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$ . . . . .	5
2.4	Interpretation der Parameter $\delta$ , $\omega_0$ und $\Omega_d$ . . . . .	6
2.5	Anfangswertproblem . . . . .	7
2.5.1	Anfangsbedingungen . . . . .	7
2.5.2	Lösen von $K_1$ und $K_2$ . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Plots und Simulationen</b>	<b>9</b>
3.1	Matlab-Plot $i_L(t)$ . . . . .	9
3.2	PSpice-Plot $i_L(t)$ und $u_L(t)$ . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Matlab-Simulation</b>	<b>10</b>
4.1	Skript . . . . .	10
4.2	Konsolenoutput . . . . .	12

## 1 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $0 \leq t \leq 2\tau_1$

### 1.1 Schaltbild des Netzwerks für $0 \leq t \leq 2\tau_1$

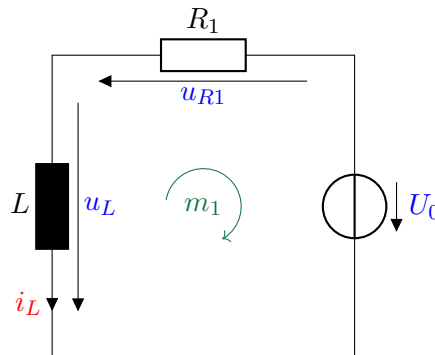


Abbildung 1: Netzwerk im Zeitintervall  $0 \leq t \leq 2\tau_1$ .

### 1.2 Aufstellen der DGL mithilfe der allgemeinen Lösungsformel

Da es sich um ein LR-Netzwerk handelt, lässt sich  $\tau_1$  folgendermaßen bestimmen:

$$\frac{1}{\lambda} = \tau_1 = \frac{L}{R} = \frac{100 \text{ mH}}{50 \Omega} = 2 \text{ ms}$$

Weiters lässt sich durch einsetzen in die allgemeine Lösungsformel für Transiente Vorgänge mit einem Energiespeicher der Strom  $i_L$  für  $0 \leq t \leq 2\tau_1$  ermitteln.

Allgemeine Lösungsformel:

$$x(t) = x_f + [x_0 - x_f] \cdot e^{(-\frac{t-t_0}{\tau})}$$

Das Bauteilgesetz der Spule besagt, dass der Strom eine stetige Größe ist, während die Spannung „Sprünge“ aufweisen kann. Aufgrund dieser Tatsache, darf man die für obige Lösungsformel benötigten Werte wie folgt annehmen:

$$x_f = 0 \text{ V}$$

$$x_0 = U_0 = 10 \text{ V}$$

$$u_{R1}(0) = R_1 \cdot I_{L0} = 2.5 \text{ V}$$

Durch anschließendes Einsetzen erhält man:

$$u_L = 0 + [U_0 - u_{R1}(0) - 0] \cdot e^{(-\frac{t}{\tau_1})} = [10 \text{ V} - 2.5 \text{ V}] \cdot e^{(-\frac{t}{2 \text{ ms}})}$$

Masche  $m_1$ :

$$u_{R1} = U_0 - u_L$$

$$R_1 \cdot i_L = U_0 - u_L$$

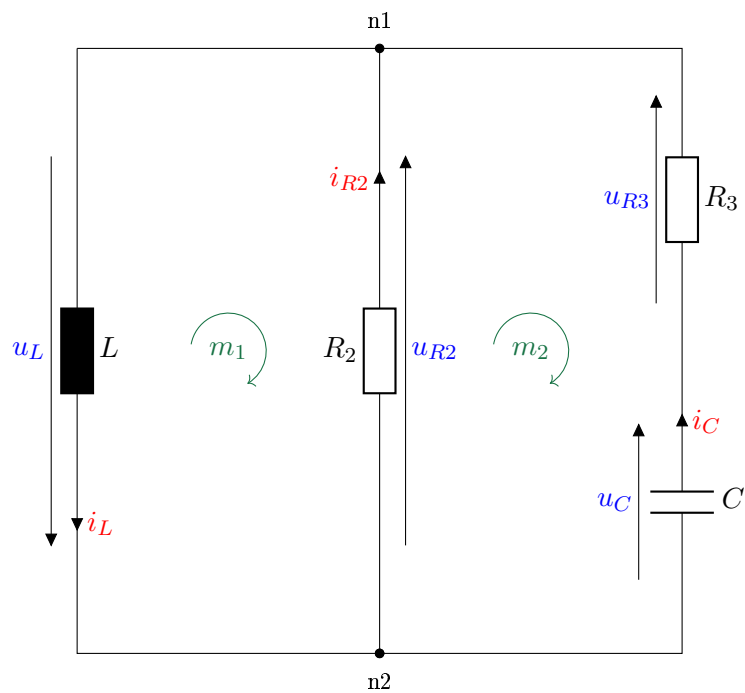
$$i_L = \frac{U_0 - u_L}{R_1} = \frac{U_0 - (U_0 - R_1 \cdot I_{L0}) \cdot e^{(-\frac{t}{\tau_1})}}{R_1}$$

$$i_L(t = 2\tau_1) = \frac{10 \text{ V} - (7,5 \cdot e^{(-\frac{t}{2 \text{ ms}})})}{50 \Omega} = 0,2 \text{ A} - 0,15 \text{ A} \cdot e^{(-\frac{t}{2 \text{ ms}})}$$

$$i_L(t = 2\tau_1) = 179,7 \text{ mA}$$

## 2 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

### 2.1 Schaltbild des Netzwerks für $t > 2\tau_1$



## 2.2 Aufstellen der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschengleichungen

$$n_1 : \quad i_L - i_{R2} - i_C = 0$$

$$n_2 : \quad i_C + i_{R2} - i_L = 0$$

$$m_1 : \quad -u_{R2} - u_L = 0$$

$$m_2 : \quad u_{R2} - u_{R3} - u_C = 0$$

## 2.3 Herleitung der DGL 2. Ordnung von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

$$-i_C - i_{R2} + i_L = 0$$

$$-C u_C' - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$u_C = u_{R2} - u_{R3}$$

$$= -u_L - u_{R3}$$

$$= -(L i_L' + u_{R3})$$

$$\implies C \frac{d}{dt} [L i_L' + u_{R3}] - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$C L i_L'' + \frac{d}{dt} C R_3 i_C - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$C L i_L'' + \frac{d}{dt} C R_3 (i_L - i_{R2}) - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$C L i_L'' + C R_3 i_L' - \frac{d}{dt} \left( C R \frac{u_{R2}}{R_2} \right) - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$C L i_L'' + C R_3 i_L' + \frac{C R_3 L}{R_2} i_L'' - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$C L i_L'' + C R_3 i_L' + \frac{C R_3 L}{R_2} i_L'' + \frac{L}{R_2} i_L' + i_L = 0$$

$$i_L'' \left( C L + \frac{C R_3 L}{R_2} \right) + i_L' \left( C R_3 + \frac{L}{R_2} \right) + i_L = 0$$

$$i_L'' + i_L' \left( \frac{R_3 C + \frac{L}{R_2}}{LC + \frac{R_3 LC}{R_2}} \right) + i_L \left( \frac{1}{LC + \frac{R_3 LC}{R_2}} \right) = 0$$

$$i_L'' + i_L' \underbrace{\left( \frac{R_2 R_3 C + L}{R_2 LC + R_3 LC} \right)}_{=: 2\delta} + i_L \underbrace{\left( \frac{R_2}{R_2 LC + R_3 LC} \right)}_{=: \omega_0^2} = 0$$

Ansatz:  $\tilde{t} = t - 2\tau_1$

$$i_L(\tilde{t}) = e^{\lambda \tilde{t}}$$

$$i_L'(\tilde{t}) = \lambda e^{\lambda \tilde{t}}$$

$$i_L''(\tilde{t}) = \lambda^2 e^{\lambda \tilde{t}}$$

$$\implies \lambda^2 e^{\lambda \tilde{t}} + 2\delta \lambda e^{\lambda \tilde{t}} + \omega_0^2 i_L = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 = \left( \frac{R_2 R_3 C + L}{R_2 LC + R_3 LC} \right)^2 - \frac{R_2}{R_2 LC + R_3 LC} = -416667 \frac{1}{s^2} < 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(-1) \underbrace{\omega_0^2 - \delta^2}_{\Omega_d^2}}$$

$$= -\delta \pm j\Omega_d$$

Lösung:

$$i_L(\tilde{t}) = e^{-\delta \tilde{t}} \left[ \tilde{K}_1 e^{j\Omega_d \tilde{t}} + \tilde{K}_2 e^{-j\Omega_d \tilde{t}} \right] = e^{-j\delta \tilde{t}} \left[ K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t}) \right]$$

## 2.4 Interpretation der Parameter $\delta$ , $\omega_0$ und $\Omega_d$

$\delta$	... Dämpfung	$[\delta] = \frac{1}{s}$
$\omega_0$	... Resonanzfrequenz	$[\omega_0] = \frac{1}{s}$
$\Omega_d$	... Eigenfrequenz	$[\Omega_d] = \frac{1}{s}$

$$\delta^2 - \omega_0^2 \begin{cases} > 0 & 2 \text{ reelle Lösungen} & \Rightarrow \Omega_d = \delta^2 - \omega_0^2 & (\text{Fall 1}) \\ < 0 & 2 \text{ (konjugiert) komplexe Lösungen} & \Rightarrow \Omega_d = \omega_0^2 - \delta^2 & (\text{Fall 2}) \\ = 0 & 1 \text{ reelle Doppellösung} & \Rightarrow \Omega_d = 0 & (\text{Fall 3}) \end{cases}$$

- Fall 1: Kriechfall, d.h. es entsteht keine Schwingung. Je größer die Dämpfung ( $\delta$ ) ist, desto langsamer kriechen Strom und Spannung gegen ihren Endwert.
- Fall 2: Realer Schwingkreis, d.h. Strom und Spannung geraten in Schwingung und pendeln sich langsam am Endwert ein (trifft auf diese Schaltung zu, siehe 4)
- Fall 3: Aperiodischer Grenzfall, d.h. der Endwert wird ohne Schwingen am schnellsten erreicht.

## 2.5 Anfangswertproblem

### 2.5.1 Anfangsbedingungen

$$i_L(\tilde{t} = 0^+) = i_L(\tilde{t} = 0^-) = i_L(t = 2\tau_1) = 179,7 \text{ mA}$$

$$u_C(\tilde{t} = 0^+) = u_C(\tilde{t} = 0^-) = U_{C,0} = 25 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} u_C(\tilde{t} = 0^+) &= U_{C,0} = u_{R2} - u_{R3} = -Li'_L - R_3i_L - \frac{R_3L}{R_2}i'_L \\ &= i'_L \left[ -\left( L + \frac{R_3L}{R_2} \right) \right] - R_3i_L \\ U_{C,0} + R_3i_L &= i'_L \left[ -\left( L + \frac{R_3L}{R_2} \right) \right] \\ i'_L &= -\frac{U_{C,0} + R_3i_L}{L + \frac{R_3L}{R_2}} \\ &= -\frac{R_2(U_{C,0} + R_3i_L)}{R_2L + R_3L} \end{aligned}$$

### 2.5.2 Lösen von $K_1$ und $K_2$

$$i_L(\tilde{t} = 0) = e^0 [K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0)] = K_1$$

$$K_1 = 179,7 \text{ mA}$$

$$\begin{aligned}
i'_L(\tilde{t}) &= -\delta e^{-\delta \tilde{t}} [K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t})] + e^{-\delta \tilde{t}} [-K_1 \Omega_d \sin(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \Omega_d \cos(\Omega_d \tilde{t})] \\
i'_L(\tilde{t} = 0) &= -\delta \cdot 1 [K_1 \cdot 1 K_2 \cdot 0] + 1 \cdot [-K_1 \Omega_d \cdot 0 + K_2 \Omega_d \cdot 1] \\
&= -\delta K_1 + K_2 \Omega_d \stackrel{!}{=} -\frac{R_2(U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L} \\
-\delta K_1 + K_2 \Omega_d &= -\frac{R_2(U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L} \\
K_2 \Omega_d &= \delta K_1 - \frac{R_2(U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L} \\
K_2 &= \frac{\delta K_1 - \frac{R_2(U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}}{\Omega_d} = -304,6 \text{ mA}
\end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
i_L(\tilde{t}) &= e^{-\delta \tilde{t}} [K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t})] \\
&= e^{-500 \text{ s}^{-1} \tilde{t}} [179,7 \text{ mA} \cos(\Omega_d \tilde{t}) - 304,6 \text{ mA} \sin(\Omega_d \tilde{t})]
\end{aligned}$$



### 3 Plots und Simulationen

#### 3.1 Matlab-Plot $i_L(t)$

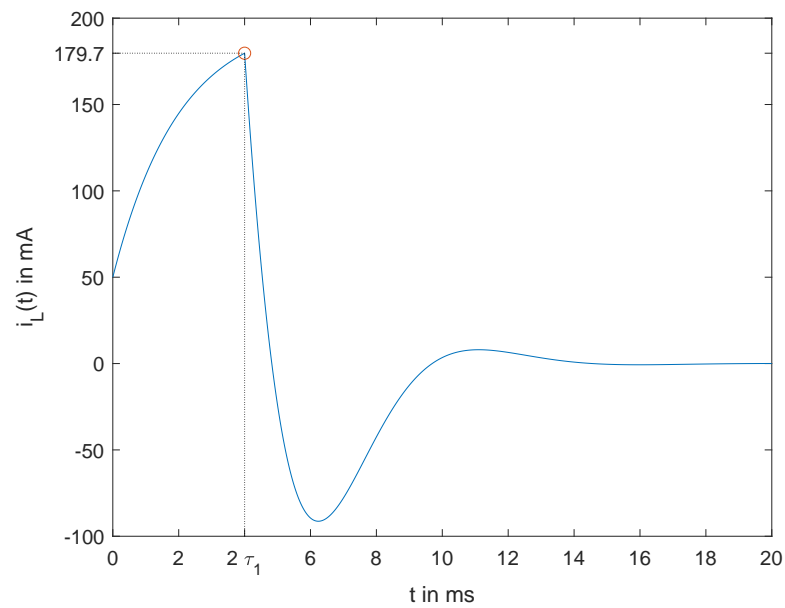


Abbildung 2: Matlab-Plot des Stroms  $i_L(t)$

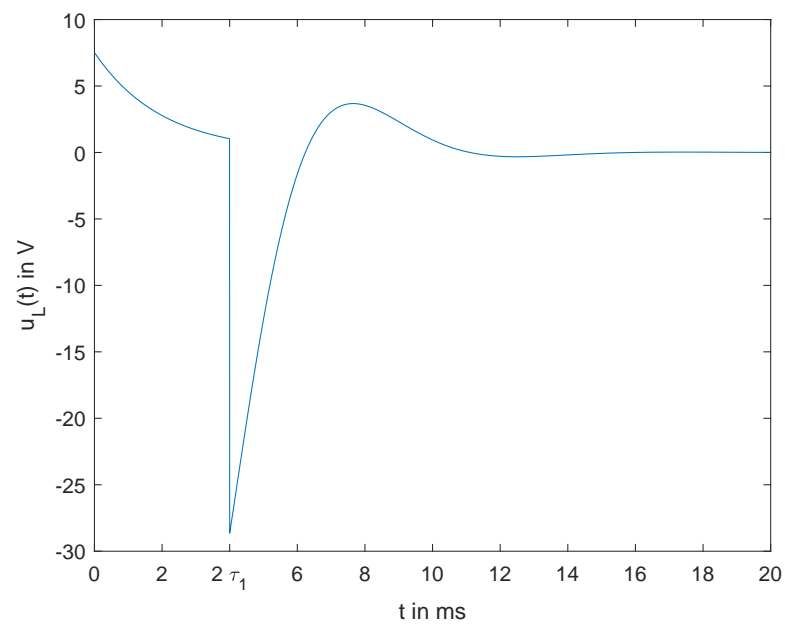


Abbildung 3: Matlab-Plot der Spannung  $u_L(t)$

### 3.2 PSpice-Plot $i_L(t)$ und $u_L(t)$

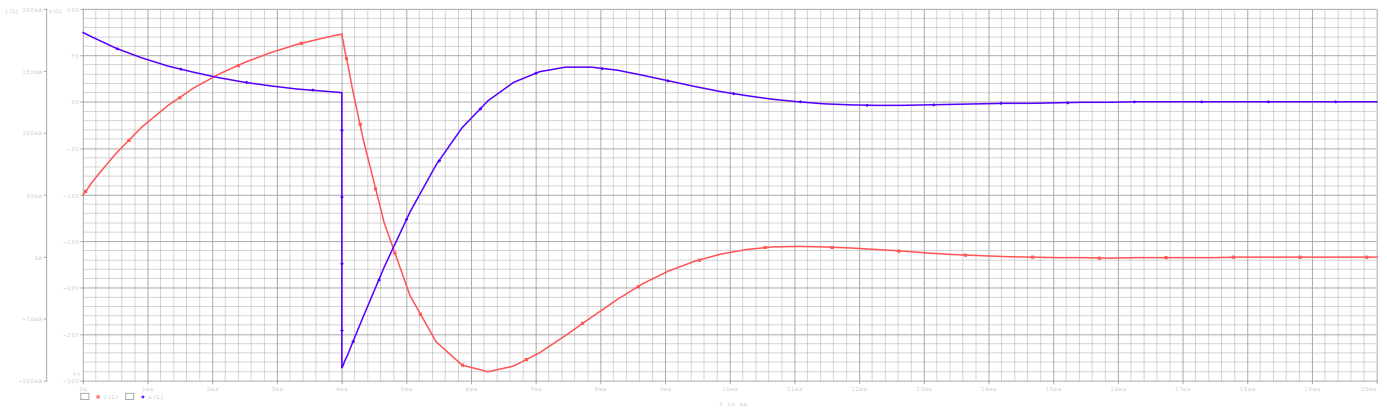


Abbildung 4: PSpice-Plot von  $i_L(t)$  und  $u_L(t)$

## 4 Matlab-Simulation

### 4.1 Skript

```

1  %Aufrufen der Matlab Umgebung.
2  clc
3  close all
4
5  %% Variablendefinition der bekannten Werte
6
7  r1 = 50;
8  r2 = 200;
9  r3 = 100;
10
11 C = 10*10^(-6);
12 L = 0.1;
13 U_0 = 10;
14 I_L0 = 50 * 10^(-3);
15 U_C0 = 25;
16 tau_1 = L/r1;
17
18 %% Bestimmen der Werte der Parameter delta, omega_0 und Omega_d
19
20 delta = ((r2 * r3 * C + L)/(2*(r2 * L * C + r3 * L * C)))
21 omega_0 = sqrt((r2)/(r2 * L * C + r3 * L * C))
22 Omega_d = sqrt((omega_0^2 - delta^2))
23
24 %% Berechnung von i_L(t_tilde), K_1, K_2
25
26 i_L_t_tilde = ((U_0-(U_0 - (r1 * I_L0)) * exp(-(2 * tau_1)/(tau_1)))/(r1))
27
28 K_1 = i_L_t_tilde
29 K_2 = ((delta * K_1 - (r2 * (U_C0 + r3 * i_L_t_tilde)) / (r2 * L + r3 * L)) / (
    Omega_d))
30
31 %% Berechnung von i_L / u_L und Plot

```

```

32
33 %Define time arrays
34 t = linspace(0,0.02, 1000000);
35 t_label = linspace(0,0.02, 11);
36 A_label = linspace(-0.1,0.2, 7);
37 A_label = sort([A_label, 0.1797]);
38 axLims = [0 0.02 -0.1 -0.2]; % [x-min, x-max, y-min, y-max] axis limits
39
40
41 % Plot of u_L
42 figure('Name','Spannung_über_Spule','NumberTitle','off');
43 plot(t, (((-1)*(heaviside(t-2*tau_1)-1)) .* u_L_t_1(t, U_0, r1, I_L0, tau_1, L)
44     ...
45     + heaviside(t-2*tau_1) .* u_L_t_2(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, L, tau_1)));
46 xlabel('t in ms')
47 ylabel('{u_L(t) in V}')
48
49 xticks(t_label)
50 xticklabels({'0','2','2\tau_1','6','8','10','12','14','16','18','20'})
51
52 % Plot of i_L
53 figure('Name','Strom_über_Spule','NumberTitle','off');
54 plot(t, (((-1)*(heaviside(t-2*tau_1)-1)) .* i_L_t_0(t, U_0, r1, tau_1, I_L0) ...
55     + heaviside(t-2*tau_1) .* (i_L_t_1(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, tau_1))));
56 hold on
57 point = [2*tau_1, 0.1797];
58 plot(point(1), point(2), 'o')
59 plot([point(1), point(1)], [axLims(3), point(2)], 'k:') %vertical line
60 plot([axLims(1), point(1)], [point(2), point(2)], 'k:') %horizontal line
61
62 xlabel('t in ms')
63 ylabel('{i_L(t) in mA}')
64
65 xticks(t_label)
66 xticklabels({'0','2','2\tau_1','6','8','10','12','14','16','18','20'})
67 yticks(A_label)
68 yticklabels({'-100',' -50', '0', '50', '100', '150', '179.7', '200'})
69
70
71
72 %% Functions of i_L / u_L
73 function i_L_t_1 = i_L_t_1(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, tau_1)
74     i_L_t_1 = exp(-((t-2*tau_1) * delta)) .* (K_1 * cos(Omega_d * (t-2*tau_1)) +
75         K_2 * sin(Omega_d * (t-2*tau_1)));
76 end
77
78 function u_L_t_1 = u_L_t_1(t, U_0, r1, I_L0, tau_1, L)
79     u_L_t_1 = (U_0 / r1 + (U_0 - r1 * I_L0) / (r1 * tau_1) .* exp(-t / tau_1)) * L
80 ;
81 end
82
83 function u_L_t_2 = u_L_t_2(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, L, tau_1)
84     t = (t-2*tau_1);
85     u_L_t_2 = L * (-delta * exp(-delta * t) .* (K_1 * cos(Omega_d * t) + K_2 * sin
86         (Omega_d * t)) + exp(-delta * t) .* (-K_1 * Omega_d * sin(Omega_d * t) +
87         K_2 * Omega_d * cos(Omega_d * t)));
88 end
89
90 function i_L_t_0 = i_L_t_0(t, U_0, r1, tau_1, I_L0)
91     i_L_t_0 = ((U_0-(U_0 - (r1 * I_L0)) * exp(-(t)/(tau_1)))/(r1));
92 end

```

## 4.2 Konsolenoutput

```
1  delta =  
2  
3      "500 1/s"  
4  
5  
6  omega_0 =  
7  
8      "816.4966 1/s"  
9  
10  
11  Omega_d =  
12  
13      "645.4972 1/s"  
14  
15  
16  i_L_t_tilde =  
17  
18      "0.1797 A"  
19  
20  
21  K_1 =  
22  
23      "0.1797 A"  
24  
25  
26  K_2 =  
27  
28      "-0.3046 A"
```