Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik

Elektrische Netzwerke und Mehrtore
Übung

Wintersemester 2020

Protokoll Übung 7: Laplace Transformation

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 10. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Transformation der Quellspannung in den s-Bereich

$$
\begin{gathered}
u(t) = U_0 \cdot \sigma(t - T_1) - U_0 \cdot \sigma(t - T_2) \\
\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \\
U(s) = U_0 \cdot \frac{1}{s} \left(e^{-s \cdot T_1} - e^{-s \cdot T_2} \right)
\end{gathered}
\tag{1}
$$

2 Transformation der Schaltung in den s-Bereich

3 Herleitung der Gleichung für den Strom $I_L(s)$

Maschengleichungen:

$$
m_1: \qquad U_L(s) + U_{R3}(s) - U_{R2}(s) = 0 \tag{2}
$$

$$
m_2: \qquad U_{R1}(s) + U_{R2}(s) - U(s) = 0 \tag{3}
$$

Knotengleichung:

$$
k_1: \qquad I_L(s) + I_{R2}(s) - I_{R1}(s) = 0 \tag{4}
$$

Um die Gleichung für $I_L(s)$ zu erhalten, kann zuerst die Knotengleichung aus Gleichung 4 hergenommen werden:

$$
\begin{aligned}
I_L(s) + I_{R2}(s) - I_{R1}(s) &= 0 \\
I_L(s) + \frac{U_{R2}(s)}{R_2} - \frac{U_{R1}(s)}{R_1} &= 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

U_{R2} kann nun aus der Maschengleichung m_1 (Gleichung 2) errechnet werden. Dabei hilft das Gesetz der Reihenschaltung ($I_L(s) = I_{R3}(s)$).

$$
\begin{aligned}
U_{R2} &= s \cdot L \cdot I_L(s) + U_{R3} \\
&= s \cdot L \cdot I_L(s) + R_3 \cdot I_L(s) \\
&= I_L(s) \left(s \cdot L + R_3 \right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Aus der Maschengleichung m_2 (Glg. 3) und dem Wert für U_{R2} (Glg. 6) erhält man für U_{R1}:

$$
\begin{aligned}
U_{R1} &= U(s) - U_{R2} \\
&= U(s) - I_L(s) \left(s \cdot L + R_3 \right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Da nun alle Ausdrücke aus Gleichung 5 durch Ausdrücke von $I_L(s)$ ersetzt werden können, kann nun nach $I_L(s)$ aufgelöst werden:

$$
\begin{aligned}
I_L(s) &= \frac{U(s) - sLI_L(s) - I_L(s)R_3}{R_1} - \frac{sLI_L(s) + I_L(s)R_3}{R_2} \\
&= \frac{U(s)R_2 - sLI_L(s)R_2 - I_L(s)R_3R_2 - sLI_L(s)R_1 - I_L(s)R_3R_1}{R_1R_2} \\
&= I_L(s)\frac{-sLR_2 - R_3R_2 - sLR_1 - R_3R_1}{R_1R_2} + \frac{U(s)R_2}{R_1R_2} \\
\frac{U(s)}{R_1} &= I_L(s) - I_L(s)\frac{-sLR_2 - R_3R_2 - sLR_1 - R_3R_1}{R_1R_2} \\
\frac{U(s)}{R_1} &= I_L(s)\left(1 + \frac{sLR_2 + R_3R_2 + sLR_1 + R_3R_1}{R_1R_2}\right) \qquad (8) \\
I_L(s) &= \frac{U(s)}{R_1\left(1 + \frac{sLR_2+R_3R_2+sLR_1+R_3R_1}{R_1R_2}\right)} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1R_2} \\
&= \frac{R_2U(s)}{R_1R_2 + sLR_2 + R_3R_2 + sLR_1 + R_3R_1} \\
&= \frac{R_2U(s)}{sL(R_2 + R_1) + R_1R_2 + R_3R_2 + R_3R_1} \\
&= \frac{R_2}{L(R_2 + R_1)} \cdot \frac{U(s)}{s + \frac{R_1R_2+R_3R_2+R_3R_1}{L(R_2+R_1)}}
\end{aligned}
$$

mit $U(s) = U_0\frac{1}{s}\left(e^{-sT_1} - e^{-sT_2}\right)$:

$$
I_L(s) = \frac{R_2U_0}{L(R_1 + R_2)} \cdot \frac{e^{-sT_1} - e^{-sT_2}}{s\left(s + \frac{R_1R_2+R_3R_2+R_3R_1}{L(R_2+R_1)}\right)} \qquad (9)
$$

4 Bestimmen der Gleichung für die Spannung $U_L(s)$

Aus dem Bauteilgesetz der Spule und dem Differentiationssatz im Zeitbereich erhält man:

$$
\begin{gathered}
u_L(t) = L i_L(t)' \\
\circ\!\!-\!\!\bullet \\
U_L(s) = sLI_L(s) - \underbrace{i_L(t=0)}_{=0}
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Aus Gleichung 9 kann nun der Ausdruck für $I_L(s)$ übernommen werden:

$$
\begin{aligned}
U_L(s) &= \frac{sLR_2U_0}{L(R_1+R_2)} \cdot \frac{e^{-sT_1} - e^{-sT_2}}{s\left(s + \underbrace{\frac{R_1R_2 + R_3R_2 + R_3R_1}{L(R_2+R_1)}}_{=:a}\right)} \\
&= \frac{R_2U_0}{R_1+R_2}\left(\frac{e^{-sT_1} - e^{-sT_2}}{s+a}\right)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

5 Rücktransformation von $I_L(s)$ und $U_L(s)$

5.1 Rücktransformation $I_L(s)$

$$
\begin{aligned}
I_L(s) &= \underbrace{\frac{R_2U_0}{L(R_1+R_2)}}_{=:b} \cdot \frac{e^{-sT_1} - e^{-sT_2}}{s\left(s + \underbrace{\frac{R_1R_2 + R_3R_2 + R_3R_1}{L(R_2+R_1)}}_{=:a}\right)} \\
&= b \cdot \frac{e^{-sT_1} - e^{-sT_2}}{s\,(s+a)}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Um $I_L(s)$ mit gegebenen Transformationspaaren zurückzutransformieren, muss zuerst eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden:

$$\frac{1}{s(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{s+a}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{a} \\ B &= \frac{1}{s}\bigg|_{s=-a} = -\frac{1}{a} \end{aligned} \tag{13}$$

Somit erhält man:

$$\begin{aligned} I_L(s) &= b \cdot \left(e^{-sT_1} - e^{-sT_2}\right)\left(\frac{1}{a \cdot s} - \frac{1}{a(s+a)}\right) \\ &= \frac{b}{a} \cdot \left(e^{-sT_1} - e^{-sT_2}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) \\ &\;\bullet\!\!-\!\!\circ \\ i_L(t) &= \frac{b}{a}\left(\sigma(t-T_1) - \sigma(t-T_1)e^{-a(t-T_1)} - \sigma(t-T_2) + \sigma(t-T_2)e^{-a(t-T_2)}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

5.2 Rücktransformation $U_L(s)$

$$\begin{aligned} U_L(s) &= \underbrace{\frac{R_2 U_0}{R_1 + R_2}}_{=:c}\left(\frac{e^{-sT_1} - e^{-sT_2}}{s+a}\right) \\ &= c\left(\frac{e^{-sT_1} - e^{-sT_2}}{s+a}\right) \\ &\;\bullet\!\!-\!\!\circ \\ u_L(t) &= c\left(\sigma(t-T_1)e^{-a(t-T_1)} - \sigma(t-T_2)e^{-a(t-T_2)}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

5.3 Bestimmen der Zeitkonstante τ

Die Zeitkonstante τ ist aus den Ergebnissen für u_L und i_L ersichtlich. Dabei handelt es sich um den Kehrbruch des Faktors a in den Exponentialfunktionen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{R_1R_2+R_3R_2+R_3R_1}{L(R_2+R_1)}} \\ &= \frac{L(R_2+R_1)}{R_1R_2+R_3R_2+R_3R_1} \\ &= 436{,}364\,\mu\mathrm{s}\end{aligned} \tag{16}$$