Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik

Elektrische Netzwerke und Mehrtore
Übung

Wintersemester 2020

Protokoll Übung 3: Schaltvorgang Kondensator

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 10. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Bestimmen des Anfangszustands von u_C

1.1 Schaltplan zur Schalterposition a

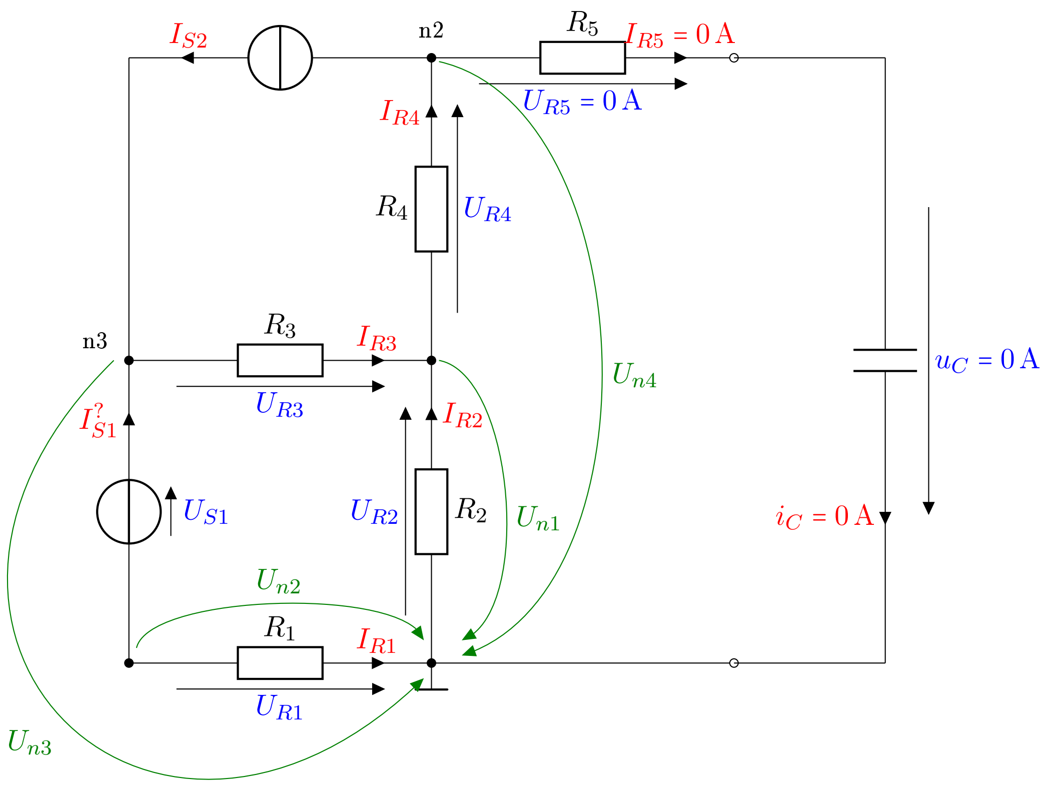


Abbildung 1: Netzwerk mit allen eingezeichneten Strömen, (Knoten-)spannungen und Knoten

1.2 Erstellen der erweiterten KSV-Matrix

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} n1 & n2 & n3 & n4 & I_{S1}^{?} \end{array} \\
\begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ I_{S1}^{?} \end{array} &
\begin{bmatrix}
G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & -G_4 & 0 \\
0 & G_1 & 0 & 0 & 1 \\
-G_3 & 0 & G_3 & 0 & -1 \\
-G_4 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ I_{S1}^{?} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{S2} \\ -I_{S2} \\ U_{S1} \end{Bmatrix}
$$

Man erhält mithilfe von Matlab für x:

$$
x = \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ I_{S1}^{?} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,36\,\mathrm{V} \\ 2,24\,\mathrm{V} \\ -7,76\,\mathrm{V} \\ -4,32\,\mathrm{V} \\ -0,56\,\mathrm{A} \end{Bmatrix}
$$

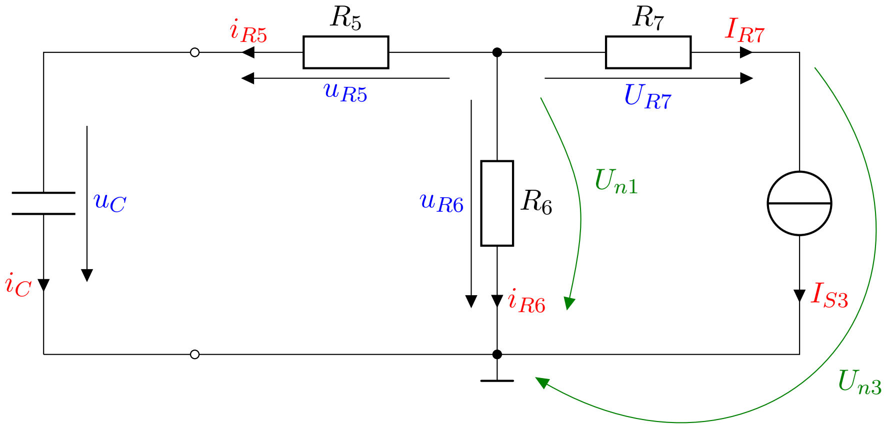
1.3 Bestimmen von u_C

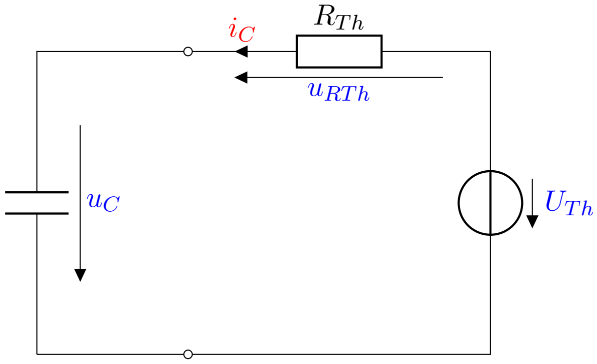
Wie sich im Schaltplan in Abbildung 1 erkennen lässt, entspricht $U_{C,a} = U_{n4}$:

$$
U_{C,a} = U_{n4} = -4,32\,\mathrm{V}
$$

2 Aufstellen der Differentialgleichung

2.1 Schaltplan zur Schalterposition b





2.2 Erstellen der KSV-Matrix

$$\left[\begin{array}{c:c} G_6 + G_7 & -G_7 \\ \hdashline -G_7 & G_7 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{S3} \end{Bmatrix}$$

2.3 Lösen der Differentialgleichung

2.3.1 (Laplace Lösung)

$$u_C + u_{RTh} = U_{Th}$$

$$u_C + R_{Th} \cdot i_C = U_{Th}$$

$$u_C + R_{Th} \cdot C \cdot u_C' = U_{Th}$$

$$u_C' + u_C\left(\frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right) = \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}
s\cdot u_C(s) - u_C(0) + \left(\frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right)u_C(s) &= \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\cdot\frac{1}{s}\\
u_C(s)\left(s + \frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right) &= \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\cdot\frac{1}{s} + u_C(0)\\
u_C(s) &= \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\cdot\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right)} + \frac{u_C(0)}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}$$

$$A = \frac{1}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}\bigg|_{s=0} = R_{Th}\cdot C$$

$$B = \frac{1}{s}\bigg|_{s=-\frac{1}{R_{Th}\cdot C}} = -R_{Th}\cdot C$$

$$\begin{aligned}
u_C(s) &= \frac{U_{Th}}{R_{Th}\cdot C}\left(\frac{R_{Th}\cdot C}{s} - \frac{R_{Th}\cdot C}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}\right) + \frac{u_C(0)}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}\\
&= U_{Th}\cdot\frac{1}{s} + (u_C(0) - U_{Th})\,\frac{1}{s+\frac{1}{R_{Th}\cdot C}}
\end{aligned}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$u_C(t) = U_{Th} + (u_C(0) - U_{Th})\cdot e^{-\frac{t}{R_{Th}\cdot C}}$$

Die Funktion ist um T_0 nach rechts verschoben. Deswegen gilt:

$$u_C(t) = \sigma(t - T_0)\left[U_{Th} + (u_C(0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}}\right]$$

2.3.2 Homogene Lösung

Die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung lautet:

$$u'_C + u_C \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}$$

Der homogene Anteil lässt sich somit folgendermaßen beschreiben:

$$u'_{C,h} + u_{C,h} \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = 0$$

Aufgrund des Schaltvorgangs zum Zeitpunkt $t = T_0$, wird die Gleichung um T_0 nach rechts verschoben. Man setzt an:

$$u_{C,h} = K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)}$$

$$u'_{C,h} = -\lambda \cdot K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)}$$

$$\Longrightarrow -\lambda \cdot K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)} + K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)} \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = 0$$

$$\underbrace{K \cdot e^{-\lambda \cdot (t-T_0)}}_{\neq 0} \left(\frac{1}{R_{Th} \cdot C} - \lambda\right) = 0$$

$$\frac{1}{R_{Th} \cdot C} = \lambda$$

$$\Longrightarrow u_{C,h} = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}}$$

2.3.3 Partikuläre Lösung

Für die partikuläre Lösung kann man $u_{C,p} = A$ ansetzen und erhält:

$$u_{C,p} = A$$

$$u'_{C,p} = 0$$

$$\Longrightarrow 0 + A \cdot \frac{1}{R_{Th} \cdot C} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} \cdot C}$$

$$A = U_{Th}$$

Die Gesamtlösung der Differentialgleichung setzt sich nun aus der homogenen und der partikulären Lösung zusammen:

$$u_C = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{R_{Th} \cdot C}} + U_{Th} \tag{1}$$

2.3.4 Anfangswertproblem

In Kapitel 1.3 wurde bereits der Spannungswert des Kondensators $u_{C,a} = u_C(T_0)$ zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ ausgerechnet. Diesen Anfangswert der stetigen Kondensatorspannung u_C zum Zeitpunkt T_0 kann man nun dazu verwenden, den Wert von K aus der Formel 1 auszurechnen.

$$u_C(T_0) = K \cdot \underbrace{e^{\frac{T_0 - T_0}{R_{Th} \cdot C}}}_{=1} + U_{Th}$$

$$\Longrightarrow K = u_C(T_0) - U_{Th}$$

2.3.5 Gesamtlösung

Setzt man nun den erhaltenen Wert von K in die Formel 1 ein, so lautet die gelöste Differentialgleichung:

$$u_C = (u_C(T_0) - U_{Th}) \cdot e^{-\frac{t}{R_{Th} \cdot C}} + U_{Th}$$

3 Vergleich mit allgemeiner Lösungsformel

Transiente Vorgänge lassen sich verallgemeinert mit folgender Lösungsformel lösen:

$$x(t) = x_f + \left[x_0 - x_f\right] \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

x_0 entspricht dem Anfangswert, welcher bei $t = T_0$ den Wert $u_C(T_0) = U_{C,a}$ hat. x_f entsprich dem Endwert, dieser ist in gegebener Schaltung der Wert von U_{Th}, da dieser Spannungswert übrig bleibt, nachdem sich der Kondensator übrig bleibt. Setzt man für x_0 und x_f die entsprechenden Werte in die allgemeine Lösungsformel ein, so ist diese Form identisch mit der Gesamtlösung aus Kapitel 2.3.5.

4 Simulation in PSpice

4.1 Schalterposition a

In der Schalterposition a muss der Kondensator C nicht aufgezeichnet werden, da er nach langer Zeit wie ein Leerlauf fungiert.

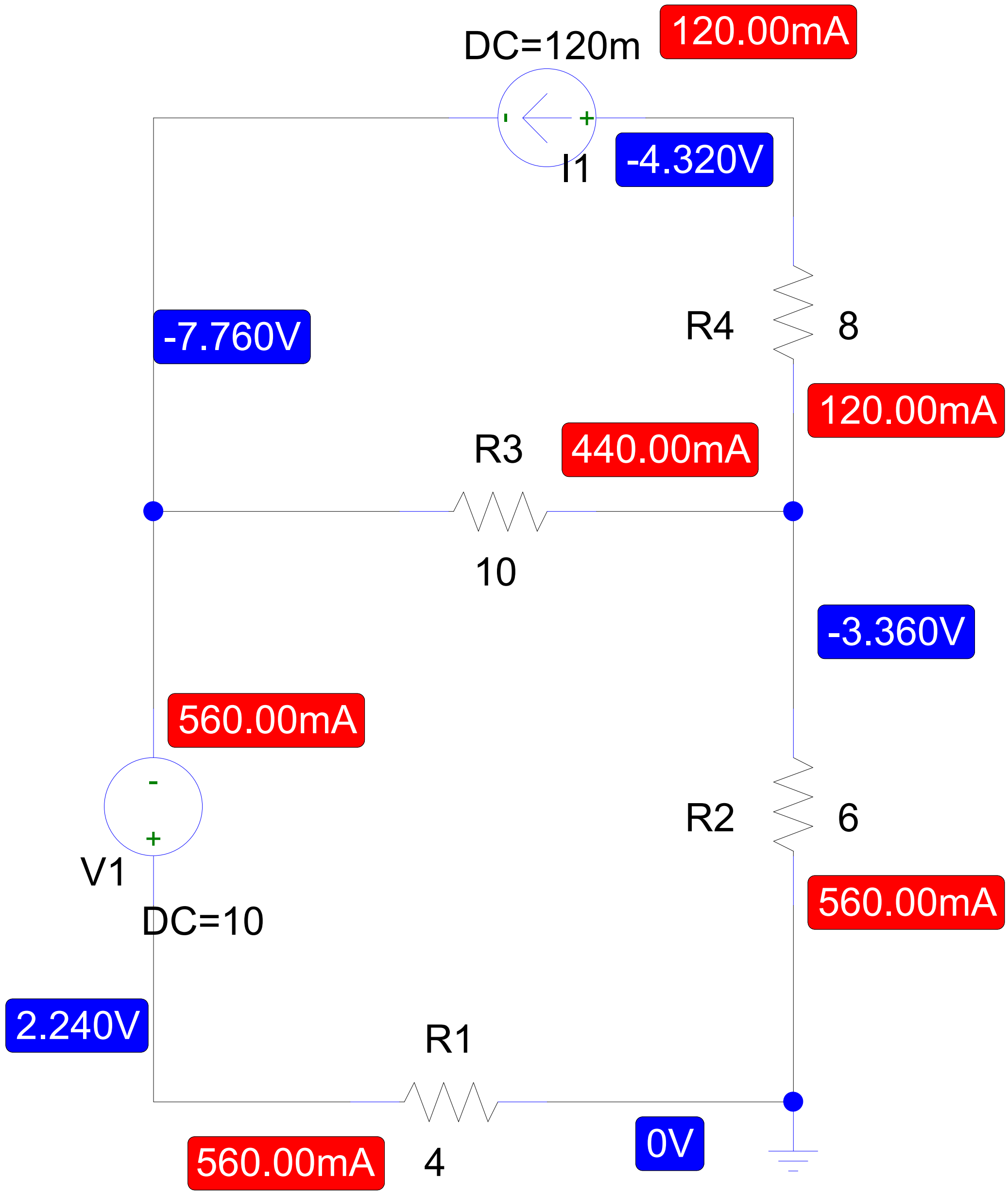


Abbildung 2: PSpice-Simulation der Schalterposition a

4.2 Schalterposition b

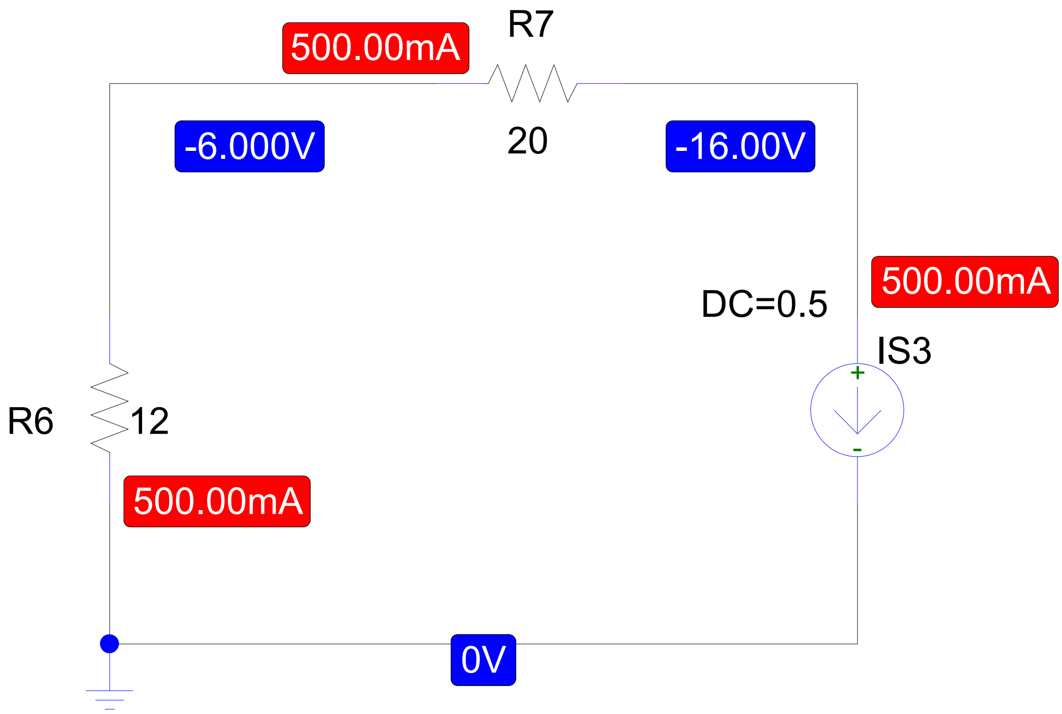


Abbildung 3: PSpice-Simulation der Schalterposition b

4.3 Simulation des Umschaltvorgangs

In Abbildung 5 ist der Schaltungsaufbau für die Simulation des Umschaltvorgangs zu sehen. Dabei ist der Schalter tOpen zum Zeitpunkt $0 < t \leq 100\,\text{ms}$ geschlossen, während tClose geschlossen ist. Zum Zeitpunkt $t > 100\,\text{ms}$ ist tOpen offen und tClose geschlossen.

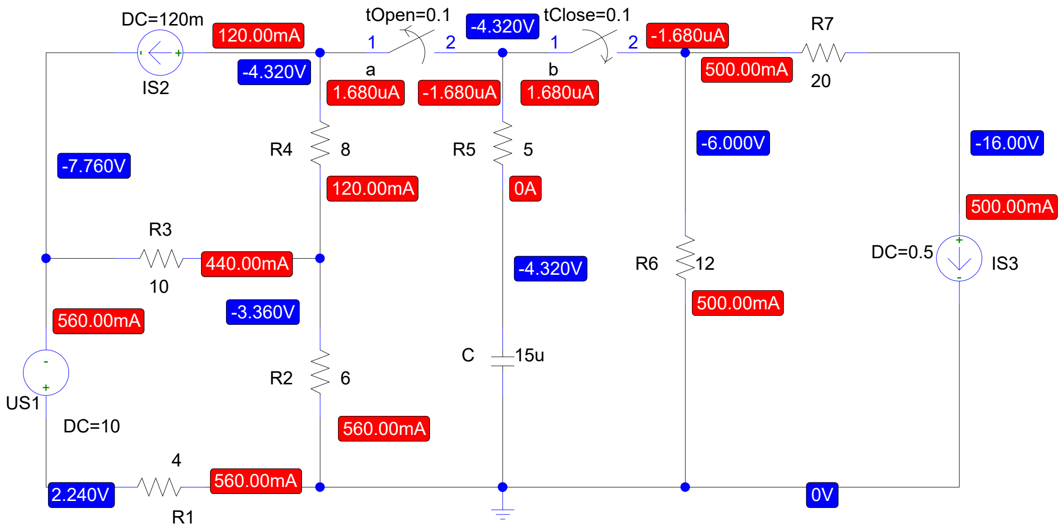


Abbildung 4: PSpice-Simulation des Umschaltvorgangs

5 Matlab-Simulation

5.1 Skript

```
clc
Ohm = char(hex2dec('03A9'));

%% Variablendefinition der bekannten Werte

r1 = 4;
r2 = 6;
r3 = 10;
r4 = 8;
r5 = 5;
r6 = 12;
r7 = 20;

C = 15*10^(-6);
Us1 = 10;
Is2 = (120*10^(-3));
Is3 = 0.5;
T_0 = 100*10^(-3);

g1 = 1/r1;
g2 = 1/r2;
g3 = 1/r3;
g4 = 1/r4;
g5 = 1/r5;
g6 = 1/r6;
g7 = 1/r7;

%% Definition der Systemmatrix in der Form A * x = b von Schalterposition a

A_a = [g2+g3+g4, 0, -g3, -g4, 0;
    0, g1, 0, 0, 1;
    -g3, 0, g3, 0, -1;
    -g4, 0, 0, g4, 0;
    0, 1, -1, 0, 0];

b_a = [0; 0; Is2; -Is2; Us1];

%% L sen der Systemgleichung
x_a = A_a^(-1)*b_a;



%% Berechnung von U_C_a = Anfangswert

U_C_a_temp = x_a(4);

U_C_a = sprintf("%.4f V" , U_C_a_temp)




%% Definition der Systemmatrix in der Form A * x = b von Schalterposition b

A_b = [g6+g7, -g7;
    -g7, g7];

b_b = [0; -Is3];
```

```
%% L sen der Systemgleichung
x_b = A_b^(-1)*b_b;

%% Berechnung von U_Th

U_Th_temp = x_b(1);

U_Th = sprintf("%.4f V" , U_Th_temp)


%% Berechnung von R_Th_b

R_Th_temp = r5+r6;

R_Th = sprintf("%.0f %s" , R_Th_temp, Ohm)

%% Plot

tau = R_Th_temp * C;

t = linspace(0.1,0.101275);
t_label = linspace(0.1,0.101275, 6);


figure('Name','Spannung␣u_C␣ab␣T_0','NumberTitle','off');
axLims = [0.1 (0.1+5*tau) -6 -4.32];  %[x-min, x-max, y-min, y-max] axis limits
u_c = U_Th_temp + (U_C_a_temp - U_Th_temp)*exp((-t+T_0)/(C*R_Th_temp));

plot(t, u_c, 'b');
hold on
point = [0.1+tau, U_Th_temp + (U_C_a_temp - U_Th_temp)*exp((-(0.1+tau)+T_0)/(C*R_Th_temp))];
plot(point(1), point(2), 'o')
plot([point(1), point(1)], [axLims(3), point(2)], 'k:')  %vertical line
plot([axLims(1), point(1)], [point(2), point(2)], 'k:')  %horizontal line

xticks(t_label)
xticklabels({'0\tau','1\tau','2\tau','3\tau','4\tau','5\tau'})
yticks([-6 point(2) -4.32])
yticklabels({'-6␣V', 'ca.␣37%', '-4.32␣V'})
```

5.2 Plot

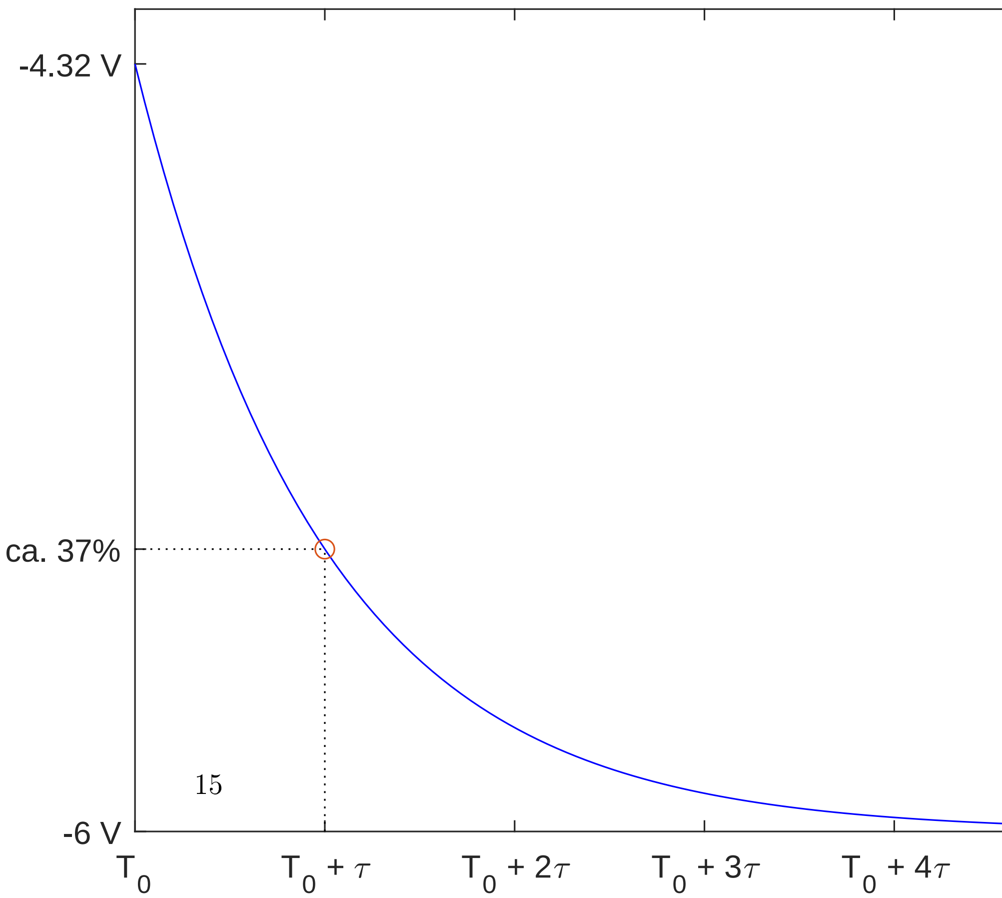


Abbildung 5: Matlab Plot des Umschaltvorgangs von $t = T_0$ bis $t = T_0 + 5 \cdot \tau$

5.3 Konsolenoutput

```
U_C_a =

"-4.3200 V"


U_Th =

"-6.0000 V"


R_Th =

"17 Ω"
```