

# Elektrische Netzwerke und Mehrport Übung

Wintersemester 2020

## Protokoll Übung 3: Schaltvorgang Kondensator

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 18. November 2020

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ermitteln der DGL von <math>i_L(t)</math> für <math>0 \leq t \leq 2\tau_1</math></b>	<b>3</b>
1.1	Schaltbild des Netzwerks für $0 \leq t \leq 2\tau_1$ . . . . .	3
1.2	Aufstellen der DGL mithilfe der allgemeinen Lösungsformel . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Ermitteln der DGL von <math>i_L(t)</math> für <math>t &gt; 2\tau_1</math></b>	<b>4</b>
2.1	Schaltbild des Netzwerks für $t > 2\tau_1$ . . . . .	4
2.2	Aufstellen der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschengleichungen . . . . .	5
2.3	Herleitung der DGL 2. Ordnung von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$ . . . . .	5
2.4	Interpretation der Parameter $\delta$ , $\omega_0$ und $\Omega_d$ . . . . .	6
2.5	Anfangswertproblem . . . . .	6
2.5.1	Anfangsbedingungen . . . . .	6
2.5.2	Lösen von $K_1$ und $K_2$ . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Plots und Simulationen</b>	<b>8</b>
3.1	Matlab-Plot $i_L(t)$ . . . . .	8
3.2	PSpice-Plot $i_L(t)$ und $u_L(t)$ . . . . .	9

## 1 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $0 \leq t \leq 2\tau_1$

### 1.1 Schaltbild des Netzwerks für $0 \leq t \leq 2\tau_1$

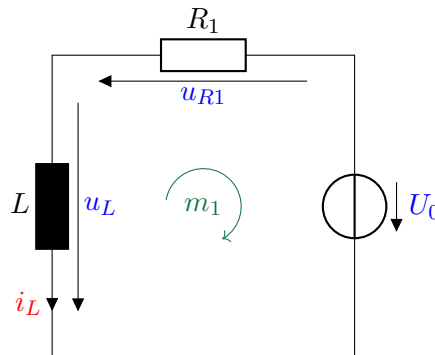


Abbildung 1: Netzwerk im Zeitintervall  $0 \leq t \leq 2\tau_1$ .

### 1.2 Aufstellen der DGL mithilfe der allgemeinen Lösungsformel

Da es sich um ein LR-Netzwerk handelt, lässt sich  $\tau_1$  folgendermaßen bestimmen:

$$\frac{1}{\lambda} = \tau_1 = \frac{L}{R} = \frac{100 \text{ mH}}{50 \Omega} = 2 \text{ ms}$$

Weiters lässt sich durch einsetzen in die allgemeine Lösungsformel für Transiente Vorgänge mit einem Energiespeicher der Strom  $i_L$  für  $0 \leq t \leq 2\tau_1$  ermitteln.

Allgemeine Lösungsformel:

$$x(t) = x_f + [x_0 - x_f] \cdot e^{\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)}$$

Das Bauteilgesetz der Spule besagt, dass der Strom eine stetige Größe ist, während die Spannung „Sprünge“ aufweisen kann. Aufgrund dieser Tatsache, darf man die für obige Lösungsformel benötigten Werte wie folgt annehmen:

$$x_f = 0 \text{ V}$$

$$x_0 = U_0 = 10 \text{ V}$$

$$u_{R1}(0) = R_1 \cdot I_{L0} = 2.5 \text{ V}$$

Durch anschließendes Einsetzen erhält man:

Masche  $m_1$ :

$$R_1 * i_L = U_0 - u_L$$

$$i_L(t = 2\tau_1) = \frac{10 \text{ V} - (7,5 \cdot e^{(-\frac{t}{2\text{ms}})})}{50 \Omega} = 0,2 \text{ A} - 0,15 \text{ A} \cdot e^{(-\frac{t}{2\text{ms}})}$$

## 2 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

## 2.2 Aufstellen der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschengleichungen

$$n_1 : \quad i_L - i_{R2} - i_C = 0$$

$$n_2 : \quad i_C + i_{R2} - i_L = 0$$

$$m_1 : \quad -u_{R2} - u_L = 0$$

$$m_2 : \quad u_{R2} - u_{R3} - u_C = 0$$

## 2.3 Herleitung der DGL 2. Ordnung von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

$$-i_C - i_{R2} + i_L = 0$$

$$-C u_C' - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$u_C = u_{R2} - u_{R3}$$

$$= -u_L - u_{R3}$$

$$= -(L i_L' + u_{R3})$$

$$\implies C \frac{d}{dt} [L i_L' + u_{R3}] - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$C L i_L'' + \frac{d}{dt} C R_3 i_C - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$C L i_L'' + \frac{d}{dt} C R_3 (i_L - i_{R2}) - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$C L i_L'' + C R_3 i_L' - \frac{d}{dt} \left( C R \frac{u_{R2}}{R_2} \right) - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$C L i_L'' + C R_3 i_L' + \frac{C R_3 L}{R_2} i_L'' - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$C L i_L'' + C R_3 i_L' + \frac{C R_3 L}{R_2} i_L'' + \frac{L}{R_2} i_L' + i_L = 0$$

$$i_L'' \left( C L + \frac{C R_3 L}{R_2} \right) + i_L' \left( C R_3 + \frac{L}{R_2} \right) + i_L = 0$$

$$i_L'' + i_L' \left( \frac{R_3 C + \frac{L}{R_2}}{LC + \frac{R_3 LC}{R_2}} \right) + i_L \left( \frac{1}{LC + \frac{R_3 LC}{R_2}} \right) = 0$$

$$i_L'' + \underbrace{i_L' \left( \frac{R_2 R_3 C + L}{R_2 LC + R_3 LC} \right)}_{=: 2\delta} + \underbrace{i_L \left( \frac{R_2}{R_2 LC + R_3 LC} \right)}_{=: \omega_0^2} = 0$$

Ansatz:  $\tilde{t} = t - 2\tau_1$

$$i_L(\tilde{t}) = e^{\lambda \tilde{t}}$$

$$i_L'(\tilde{t}) = \lambda e^{\lambda \tilde{t}}$$

$$i_L''(\tilde{t}) = \lambda^2 e^{\lambda \tilde{t}}$$

$$\implies \lambda^2 e^{\lambda \tilde{t}} + 2\delta \lambda e^{\lambda \tilde{t}} + \omega_0^2 e^{\lambda \tilde{t}} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 = \left( \frac{R_2 R_3 C + L}{R_2 LC + R_3 LC} \right)^2 - \frac{R_2}{R_2 LC + R_3 LC} = -416667 \frac{1}{s^2} < 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(-1) \underbrace{\omega_0^2 - \delta^2}_{\Omega_d}}$$

$$= -\delta \pm j\Omega_d$$

Lösung:

$$i_L(\tilde{t}) = e^{-\delta \tilde{t}} \left[ \tilde{K}_1 e^{j\Omega_d \tilde{t}} + \tilde{K}_2 e^{-j\Omega_d \tilde{t}} \right] = e^{-j\delta \tilde{t}} \left[ K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t}) \right]$$

## 2.4 Interpretation der Parameter $\delta$ , $\omega_0$ und $\Omega_d$

## 2.5 Anfangswertproblem

### 2.5.1 Anfangsbedingungen

$$i_L(\tilde{t} = 0^+) = i_L(\tilde{t} = 0^-) = i_L(t = 2\tau_1) = 179,7 \text{ mA}$$

$$u_C(\tilde{t} = 0^+) = u_C(\tilde{t} = 0^-) = U_{C,0} = 25 \text{ V}$$

$$\begin{aligned}
u_C(\tilde{t} = 0^+) &= U_{C,0} = u_{R2} - u_{R3} = -Li'_L - R_3 i_L - \frac{R_3 L}{R_2} i'_L \\
&= i'_L \left[ - \left( L + \frac{R_3 L}{R_2} \right) \right] - R_3 i_L \\
U_{C,0} + R_3 i_L &= i'_L \left[ - \left( L + \frac{R_3 L}{R_2} \right) \right] \\
i'_L &= - \frac{U_{C,0} + R_3 i_L}{L + \frac{R_3 L}{R_2}} \\
&= - \frac{R_2 (U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}
\end{aligned}$$

### 2.5.2 Lösen von $K_1$ und $K_2$

$$i_L(\tilde{t} = 0) = e^0 [K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0)] = K_1$$

$$K_1 = 179,7 \text{ mA}$$

$$\begin{aligned}
i'_L(\tilde{t}) &= -\delta e^{-\delta \tilde{t}} [K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t})] + e^{-\delta \tilde{t}} [-K_1 \Omega_d \sin(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \Omega_d \cos(\Omega_d \tilde{t})] \\
i'_L(\tilde{t} = 0) &= -\delta \cdot 1 [K_1 \cdot 1 K_2 \cdot 0] + 1 \cdot [-K_1 \Omega_d \cdot 0 + K_2 \Omega_d \cdot 1] \\
&= -\delta K_1 + K_2 \Omega_d \stackrel{!}{=} - \frac{R_2 (U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L} \\
-\delta K_1 + K_2 \Omega_d &= - \frac{R_2 (U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L} \\
K_2 \Omega_d &= \delta K_1 - \frac{R_2 (U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L} \\
K_2 &= \frac{\delta K_1 - \frac{R_2 (U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}}{\Omega_d} = -304,6 \text{ mA}
\end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
i_L(\tilde{t}) &= e^{-\delta \tilde{t}} [K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t})] \\
&= e^{-500 \text{ s}^{-1} \cdot \tilde{t}} [179,7 \text{ mA} \cos(\Omega_d \tilde{t}) - 304,6 \text{ mA} \sin(\Omega_d \tilde{t})]
\end{aligned}$$

### 3 Plots und Simulationen

#### 3.1 Matlab-Plot $i_L(t)$

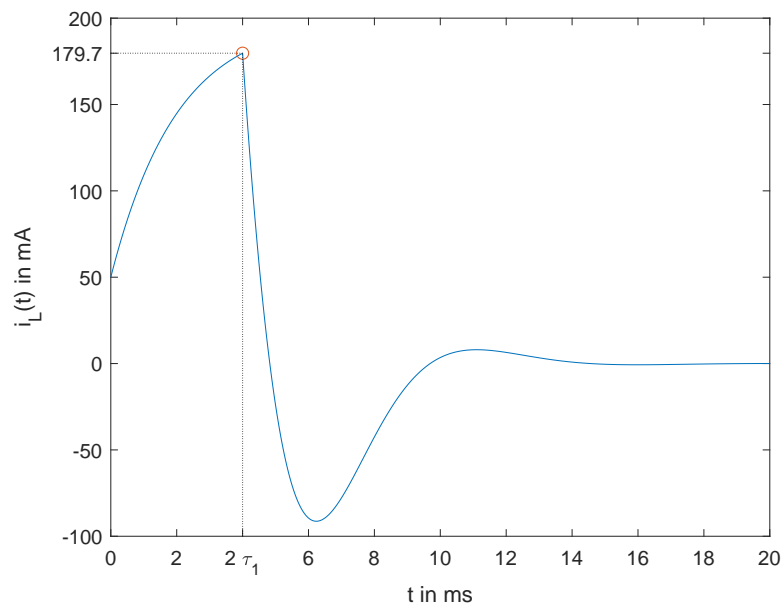


Abbildung 2: Matlab-Plot des Stroms  $i_L(t)$

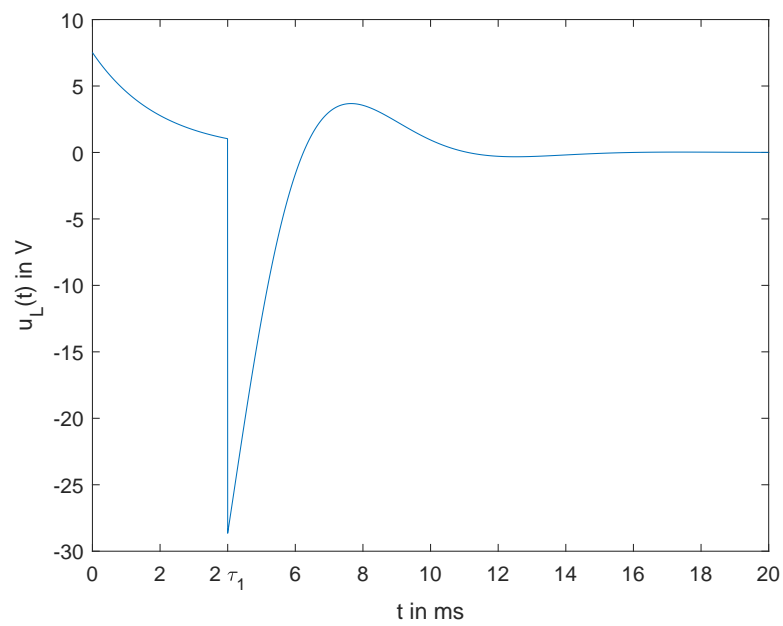


Abbildung 3: Matlab-Plot der Spannung  $u_L(t)$



### 3.2 PSpice-Plot $i_L(t)$ und $u_L(t)$

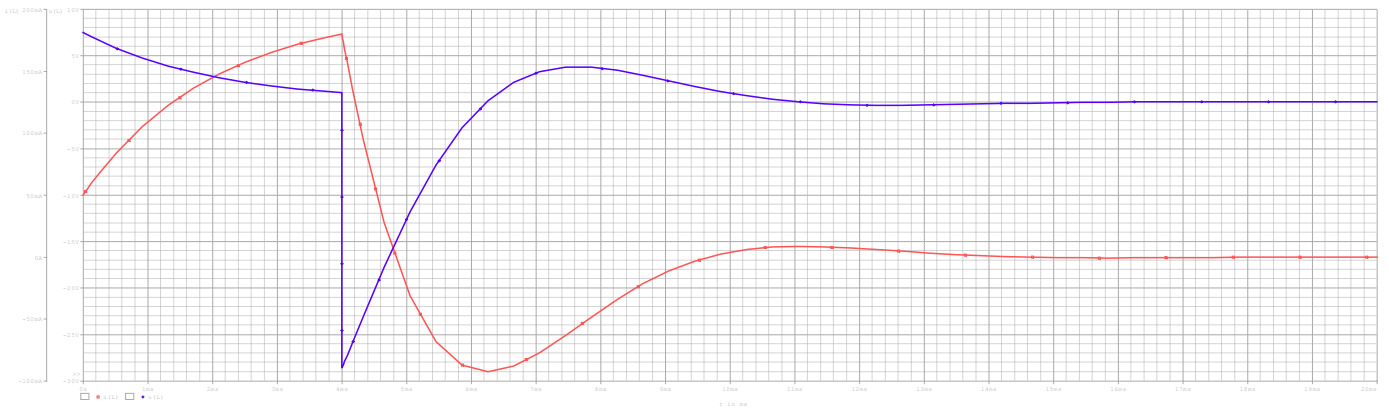


Abbildung 4: PSpice-Plot von  $i_L(t)$  und  $u_L(t)$