

# Protokoll Übung 2

David Keller, Moritz Woltron, Matthias Fottner

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Schaltplan mit allen Strömen, Spannungen und Knoten</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Aufstellen des Gleichungssystems in Matrixform durch “hinschauen”</b>	<b>3</b>
2.1	Widerstände . . . . .	3
2.2	Unabhängige Stromquelle $S3$ . . . . .	3
2.3	Unabhängige Spannungsquelle $S2$ ( $\rightarrow +1$ Gleichung) . . . . .	4
2.4	Stromgesteuerte Spannungsquelle $S1$ ( $\rightarrow +1$ Gleichung) . . . . .	5
2.5	Ausrechnen der Unbekanntenvektors $x$ . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Thevenin-Quelle bezüglich der Klemmen <math>a</math> und <math>b</math></b>	<b>6</b>
3.1	$U_{Th}$ . . . . .	6
3.2	$I_{KS}$ . . . . .	7
3.3	$R_{Th}$ mithilfe von $U_{Th}$ und $I_{KS}$ . . . . .	8
3.4	$R_{Th}$ mithilfe von Testspannung $U_T$ . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Simulation in PSpice</b>	<b>11</b>
4.1	Originalschaltung . . . . .	11
4.2	Thevenin-Quelle . . . . .	11
4.3	Vergleich der beiden Simulationen . . . . .	12

# 1 Schaltplan mit allen Strömen, Spannungen und Knoten

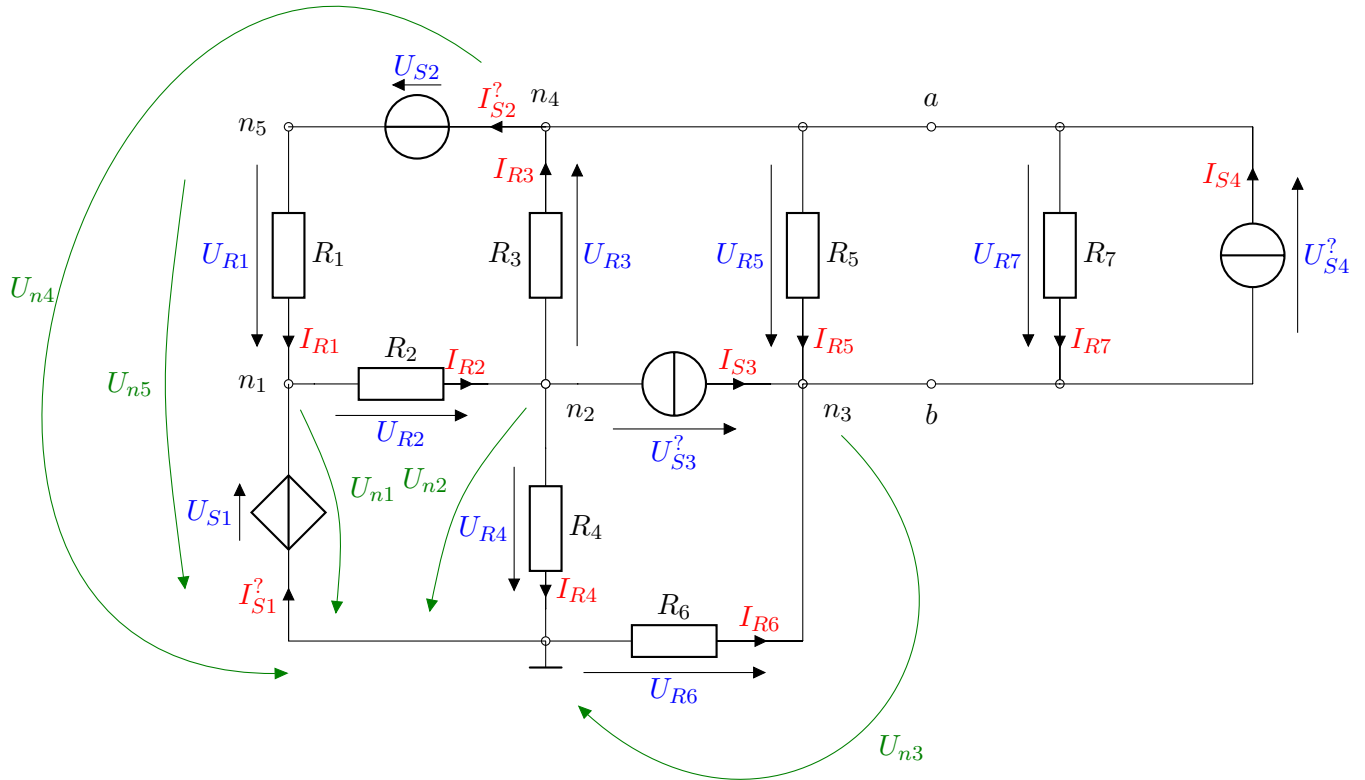


Abb. 1: Netzwerk mit allen eingezeichneten Strömen, (Knoten-)spannungen und Knoten

## 2 Aufstellen des Gleichungssystems in Matrixform durch “hinschauen”

### 2.1 Widerstände

Zuerst wird die Admittanzmatrix durch hinschauen bestimmt. Dazu werden auf der Hauptdiagonale alle den jeweiligen Knoten umgebenden Leitwerte addiert. Auf der Nebendiagonale werden die Werte der zwischen den Knoten liegenden Widerstände als negativer Leitwert eingetragen. Der Unbekanntenvektor besteht aus den Knotenspannungen, der Ergebnisvektor beträgt 0.

$$\text{Es gilt: } G_n = \frac{1}{R_n}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & n1 & & n2 & & n3 & & n4 & & n5 \\
 n1 & G_1 + G_2 & \vdots & -G_2 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & -G_1 \\
 n2 & -G_2 & \vdots & G_2 + G_3 + G_4 & \vdots & 0 & \vdots & -G_3 & \vdots & 0 \\
 n3 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & G_5 + G_6 & \vdots & -G_5 & \vdots & 0 \\
 n4 & 0 & \vdots & -G_3 & \vdots & -G_5 & \vdots & G_3 + G_5 & \vdots & 0 \\
 n5 & -G_1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & G_1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

### 2.2 Unabhängige Stromquelle $S3$

Der bekannte Strom  $I_{S3}$  der Stromquelle  $S3$  fließt aus Knoten  $n2$  (positiv) in den Knoten  $n3$  (negativ)(vgl. Abb. 2). Bringt man nun die Größe auf die andere Seite des Gleichungssystems, so muss  $I_{S3}$  im Lösungsvektor negativ bei  $n2$  und positiv bei  $n3$  sein.

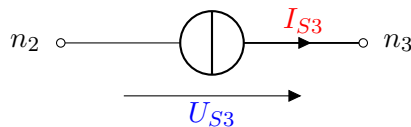


Abb. 2: freigestellte Stromquelle  $S3$

Es ergibt sich folgende Änderung im Gleichungssystem:

$$\begin{array}{c}
n1 \quad n2 \quad n3 \quad n4 \quad n5 \\
\begin{array}{c}
n1 \\
n2 \\
n3 \\
n4 \\
n5
\end{array}
\begin{bmatrix}
G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -G_1 \\
-G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & 0 \\
0 & 0 & G_5 + G_6 & -G_5 & 0 \\
0 & -G_3 & -G_5 & G_3 + G_5 & 0 \\
-G_1 & 0 & 0 & 0 & G_1
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -I_{S3} \\ I_{S3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

### 2.3 Unabhängige Spannungsquelle $S2$ ( $\rightarrow +1$ Gleichung)

Bei der unabhängigen Spannungsquelle kommt mit dem Strom  $I_{S2}^?$  eine unbekannte Größe hinzu. Folglich muss auch eine weitere Gleichung im Gleichungssystem ergänzt werden. Diese erhält man, indem die bekannte Quellspannung  $U_{S2}$  mithilfe der Knotenspannungen ausgedrückt wird (vgl. Abb. 3):

$$U_{S2} = U_{n4} - U_{n5}$$

Beim Hinzufügen von  $I_{S2}^?$  in den Unbekanntenvektor, muss auch die Strombilanz der Knoten  $n4$  (positiv) und  $n5$  (negativ) angepasst werden.

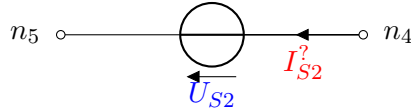


Abb. 3: freigestellte Spannungsquelle  $S2$

$$\begin{array}{c}
n1 \quad n2 \quad n3 \quad n4 \quad n5 \quad I_{S2}^? \\
\begin{array}{c}
n1 \\
n2 \\
n3 \\
n4 \\
n5 \\
I_{S2}^?
\end{array}
\begin{bmatrix}
G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -G_1 & 0 \\
-G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & G_5 + G_6 & -G_5 & 0 & 0 \\
0 & -G_3 & -G_5 & G_3 + G_5 & 0 & 1 \\
-G_1 & 0 & 0 & 0 & G_1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \\ I_{S2}^? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -I_{S3} \\ I_{S3} \\ 0 \\ 0 \\ U_{S2} \end{pmatrix}
\end{array}$$

## 2.4 Stromgesteuerte Spannungsquelle $S1$ ( $\rightarrow +1$ Gleichung)

Bei der stromgesteuerten Spannungsquelle  $S1$  kommt die unbekannte Größe  $I_{S1}^?$  hinzu. Folglich muss auch hier das Gleichungssystem um eine Gleichung erweitert werden.

$$\begin{aligned}
 U_{S1} &= \alpha \cdot I_{R3} \\
 I_{R3} &= G_3(U_{n2} - U_{n4}) \\
 U_{S1} &= -U_{n1} \\
 \implies -U_{n1} &= \alpha \cdot G_3(U_{n2} - U_{n4}) \\
 0 &= \alpha \cdot G_3(U_{n2} - U_{n4}) + U_{n1}
 \end{aligned}$$

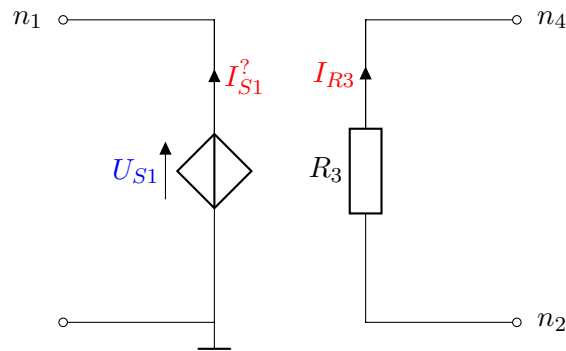


Abb. 4: freigestellte stromgesteuerte Spannungsquelle  $S1$  mit Steuerungsstrom  $I_{R3}$

	$n1$	$n2$	$n3$	$n4$	$n5$	$I_{S2}^?$	$I_{S1}^?$		
$n1$	$G_1 + G_2$	$-G_2$	$0$	$0$	$-G_1$	$0$	$-1$	$\left\{ \begin{matrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -I_{S3} \\ I_{S3} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ -I_{S3} \\ I_{S3} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$
$n2$	$-G_2$	$G_2 + G_3 + G_4$	$0$	$-G_3$	$0$	$0$	$0$		
$n3$	$0$	$0$	$G_5 + G_6$	$-G_5$	$0$	$0$	$0$		
$n4$	$0$	$-G_3$	$-G_5$	$G_3 + G_5$	$0$	$1$	$0$		
$n5$	$-G_1$	$0$	$0$	$0$	$G_1$	$-1$	$0$		
$I_{S2}^?$	$0$	$0$	$0$	$1$	$-1$	$0$	$0$	$\left\{ \begin{matrix} I_{S2}^? \\ I_{S1}^? \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} U_{S2} \\ 0 \end{matrix} \right\}$
$I_{S1}^?$	$1$	$\alpha G_3$	$0$	$-\alpha G_3$	$0$	$0$	$0$		
A								x	b

## 2.5 Ausrechnen der Unbekanntenvektors $x$

Indem man beide Seiten der Gleichung mit der Inversen  $A^{-1}$  multipliziert, kann man nach  $x$  auflösen.

$$x = A^{-1}b$$

Man erhält mithilfe von Matlab für  $x$ :

$$x = \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \\ I_{S2}^? \\ I_{S1}^? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5,6140 \text{ V} \\ -0,1754 \text{ V} \\ 23,1579 \text{ V} \\ 20,8772 \text{ V} \\ 0,8772 \text{ V} \\ -0,9474 \text{ A} \\ 1,5263 \text{ A} \end{Bmatrix}$$

## 3 Thevenin-Quelle bezüglich der Klemmen $a$ und $b$

### 3.1 $U_{Th}$

Die Spannung  $U_{Th}$  entspricht der Leerlaufspannung an den Klemmen  $a$  und  $b$  ( $U_{ab,LL}$ ), welche der Spannung  $U_{R5}$  entspricht (vgl. Abb. 5). Somit kann  $U_{Th}$  mithilfe der gewonnenen Knotenspannungen aus Kapitel 2.5 berechnet werden. Es gilt:

$$U_{Th} = U_{ab,LL} = U_{R5} = U_{n4} - U_{n3} = 20,8772 \text{ V} - 23,1579 \text{ V} = -2,2807 \text{ V}$$

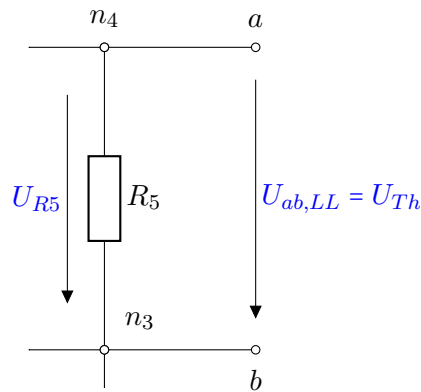


Abb. 5: Spannungsbetrachtung an den Klemmen  $a$  und  $b$

### 3.2 $I_{KS}$

Bei  $I_{KS}$  handelt es sich um eine weitere Unbekannte, deshalb muss das Gleichungssystem um eine weitere Gleichung erweitert werden. Um den Kurzschluss zu simulieren, kann an den Klemmen  $a$  und  $b$  eine ideale Spannungsquelle mit 0 V Spannungsabfall angenommen werden (vgl. Abb. 6). Dieser Spannungsabfall entspricht  $U_{R5}$ , und somit kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$U_{R5} = U_{KS} = U_{n4} - U_{n3} = 0$$

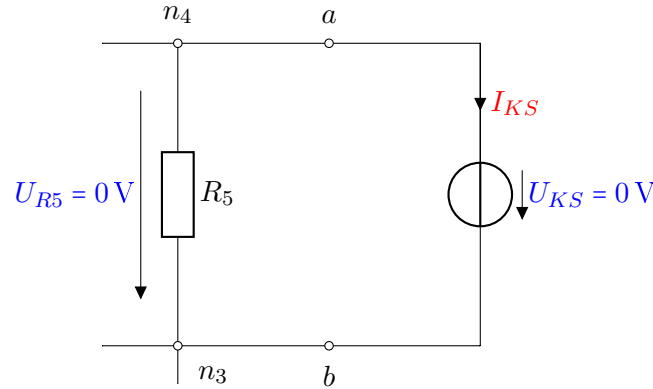


Abb. 6: Simulation des Kurzschlussstroms  $I_{KS}$

Der Kurzschlussstrom  $I_{KS}$  muss als ausfließender Strom in Knoten  $n_4$  und als zufließender Strom in Knoten  $n_3$  ergänzt werden. Insgesamt ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

	$n1$	$n2$	$n3$	$n4$	$n5$	$I_{S2}^?$	$I_{S1}^?$	$I_{KS}$		
$n1$	$G_1 + G_2$	$-G_2$	$0$	$0$	$-G_1$	$0$	$-1$	$0$	$\left\{ \begin{matrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -I_{S3} \\ I_{S3} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ -I_{S3} \\ I_{S3} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$
$n2$	$-G_2$	$G_2 + G_3 + G_4$	$0$	$-G_3$	$0$	$0$	$0$	$0$		
$n3$	$0$	$0$	$G_5 + G_6$	$-G_5$	$0$	$0$	$0$	$-1$		
$n4$	$0$	$-G_3$	$-G_5$	$G_3 + G_5$	$0$	$1$	$0$	$1$		
$n5$	$-G_1$	$0$	$0$	$0$	$G_1$	$-1$	$0$	$0$		
$I_{S2}^?$	$0$	$0$	$0$	$1$	$-1$	$0$	$0$	$0$	$\left\{ \begin{matrix} I_{S2}^? \\ I_{S1}^? \\ I_{KS} \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} U_{S2} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$
$I_{S1}^?$	$1$	$\alpha G_3$	$0$	$-\alpha G_3$	$0$	$0$	$0$	$0$		
$I_{KS}$	$0$	$0$	$-1$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$		
$\underbrace{\hspace{15em}}_A$									x	b

Bei erneutem Auflösen nach  $x$  und Ausrechnen der Gleichung mit Matlab erhält man für  $x$ :

$$x = \begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \\ I_{S2}^? \\ I_{S1}^? \\ I_{KS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,7143 \text{ V} \\ 1,7764 \cdot 10^{-15} \text{ V} \\ 21,4286 \text{ V} \\ 21,4286 \text{ V} \\ 1,4286 \text{ V} \\ -0,8571 \text{ A} \\ 1,4286 \text{ A} \\ -0,5714 \text{ A} \end{pmatrix}$$

Der Kurzschlussstrom  $I_{KS}$  entspricht somit 571,4 mA.

### 3.3 $R_{Th}$ mithilfe von $U_{Th}$ und $I_{KS}$

Der Innenwiderstand  $R_{Th}$  der Thevenin-Quelle entspricht dank der Quellenäquivalenz von Norton- und Thevenin-Quelle dem Quotienten aus  $U_{Th}$  und  $I_{KS}$ . Somit ergibt sich:

$$R_{Th} = R_N = \frac{U_{Th}}{I_{KS}} = \frac{-2,2807 \text{ V}}{-0,5714 \text{ A}} = 3,9912 \Omega$$

### 3.4 $R_{Th}$ mithilfe von Testspannung $U_T$

Um den Innenwiderstand der Thevenin-Quelle zu erhalten, werden zuerst alle unabhängigen Quellen im Netzwerk durch deren idealen Innenwiderstand ersetzt. Zusätzlich wird an den Klemmen  $a$  und  $b$  eine frei wählbare Testspannung  $U_T$  angelegt (vgl. Abb. 7). Daraus ergibt sich ein unbekannter Teststrom  $I_T^?$ , der vom Knoten  $n_4$  in den Knoten  $n_3$  fließt. Das Gleichungssystem aus Kapitel 2.4 muss somit um eine weitere Gleichung ergänzt werden

$$U_T = U_{R5} = U_{n4} - U_{n3}$$

und man erhält folgende Matrixgleichung:



$$\underbrace{\begin{array}{c} n1 \quad n2 \quad n3 \quad n4 \quad n5 \quad I_{S2}^? \quad I_{S1}^? \quad I_T^? \\ \begin{array}{l} n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ n5 \\ I_{S2}^? \\ I_{S1}^? \\ I_T^? \end{array} \end{array}}_A \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -G_1 & 0 & -1 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_5 + G_6 & -G_5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -G_3 & -G_5 & G_3 + G_5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -G_1 & 0 & 0 & 0 & G_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha G_3 & 0 & -\alpha G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \\ I_{S2}^? \\ I_{S1}^? \\ I_T^? \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -I_{S3} = 0 \\ I_{S3} = 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{S2} = 0 \\ 0 \\ U_T \end{pmatrix}}_b$$

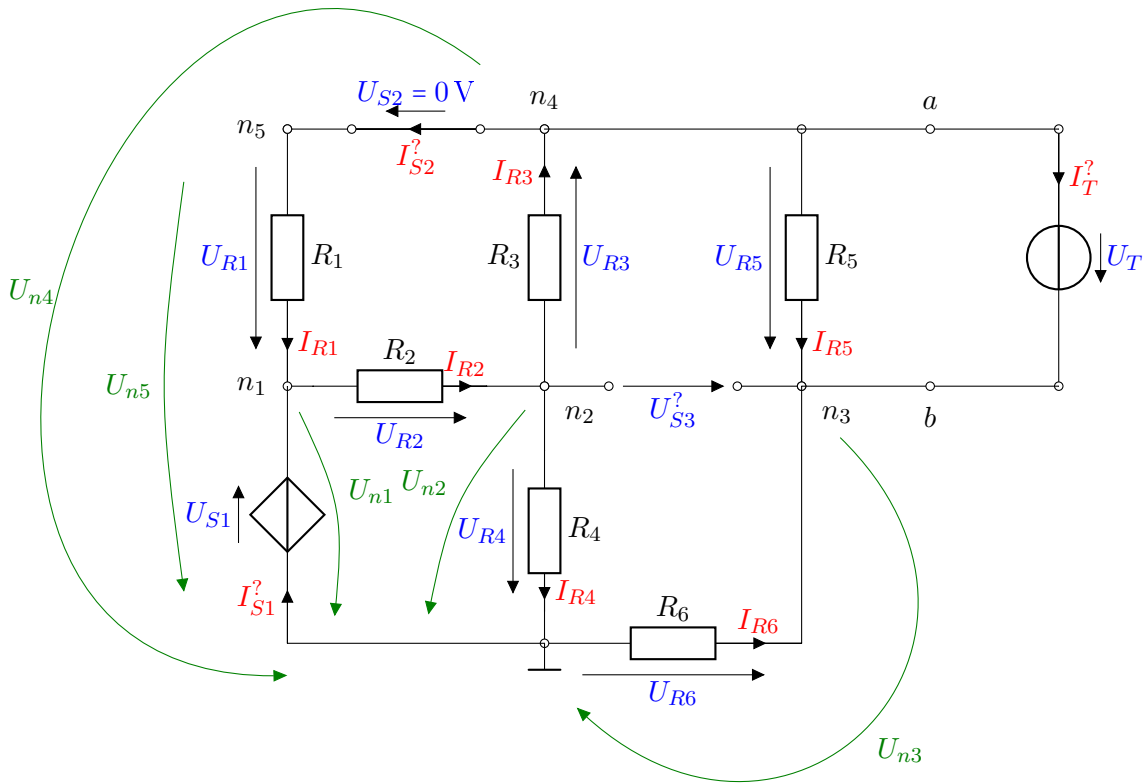


Abb. 7: Netzwerk mit idealen Innenwiderständen der unabhängigen Quellen und der Testspannung  $U_T$

Legt man nun die Testspannung  $U_T$  willkürlich auf 1 V fest, so kann man das Gleichungssystem nach dem x-Vektor auflösen und erhält mithilfe Matlabs den Wert des Stromes  $I_T^?$ .

$$I_T^? = -0,2505 \text{ A}$$

Die Situation kann wie in Abbildung 8 dargestellt werden:

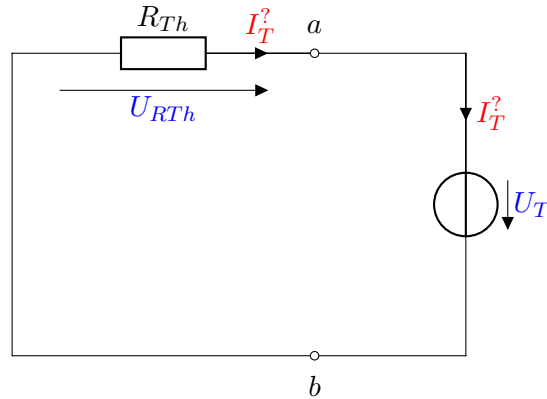


Abb. 8: Testspannung am Innenwiderstand der Thevenin-Quelle

Es lässt sich also folgende Maschengleichung bestimmen:

$$U_{RTh} = -U_T = -1 \text{ V}$$

und letztlich der Widerstand  $R_{Th}$  mithilfe des ohm'schen Gesetzes:

$$R_{Th} = \frac{U_{RTh}}{I_T^?} = \frac{-1 \text{ V}}{-0,2505 \text{ A}} = 3,9912 \Omega$$

Dieser Wert deckt sich mit dem ausgerechneten Wert für  $R_{Th}$  aus Kapitel 3.3.

## 4 Simulation in PSpice

### 4.1 Originalschaltung

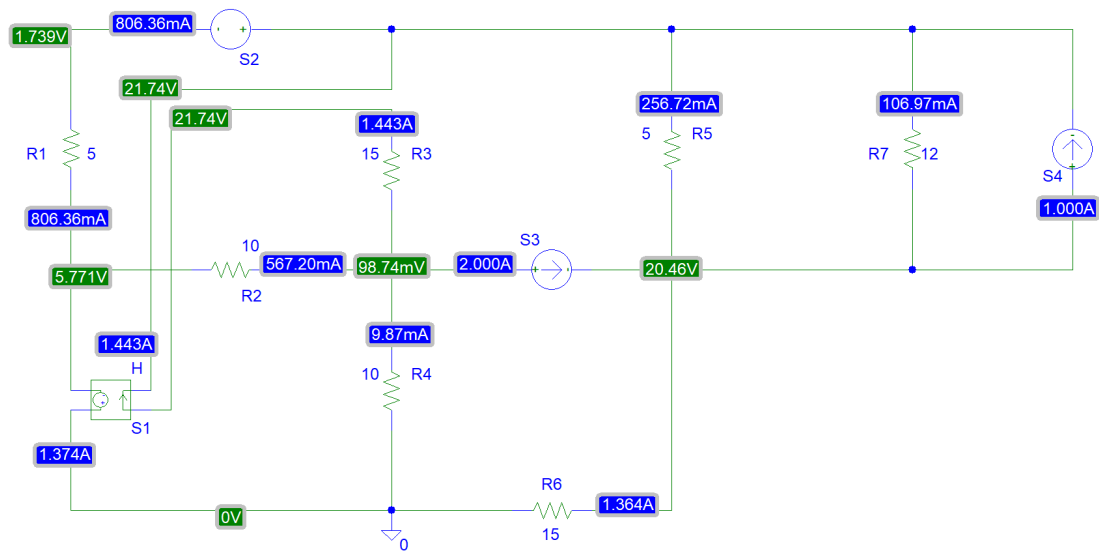


Abb. 9: PSpice-Simulation der Originalschaltung (vgl. Abb. 1)

### 4.2 Thevenin-Quelle

Bei der Simulation mit der Thevenin-Quelle wird das Netzwerk links von den Klemmen  $a$  und  $b$  durch eine ideale Spannungsquelle mit der Spannung  $U_{Th}$  und einem in Serie geschaltetem Innenwiderstand  $R_{Th}$  ersetzt. Die Werte hierfür wurden in Kapitel 3 berechnet. Der Schaltplan aus Abbildung 10 liegt der Simulation zugrunde.

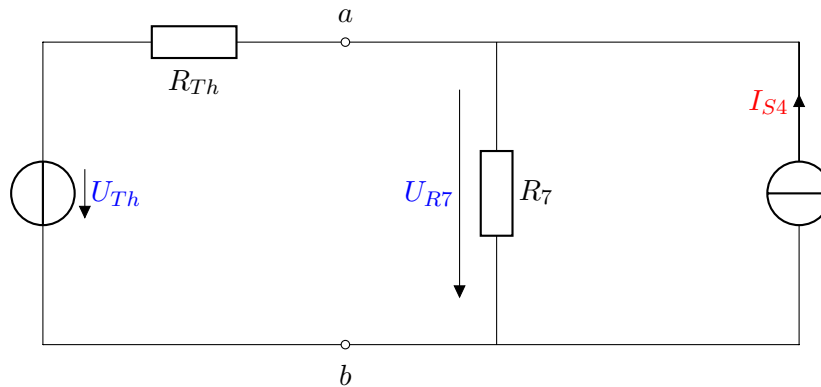


Abb. 10: Ersatzschaltung mit Thevenin-Quelle

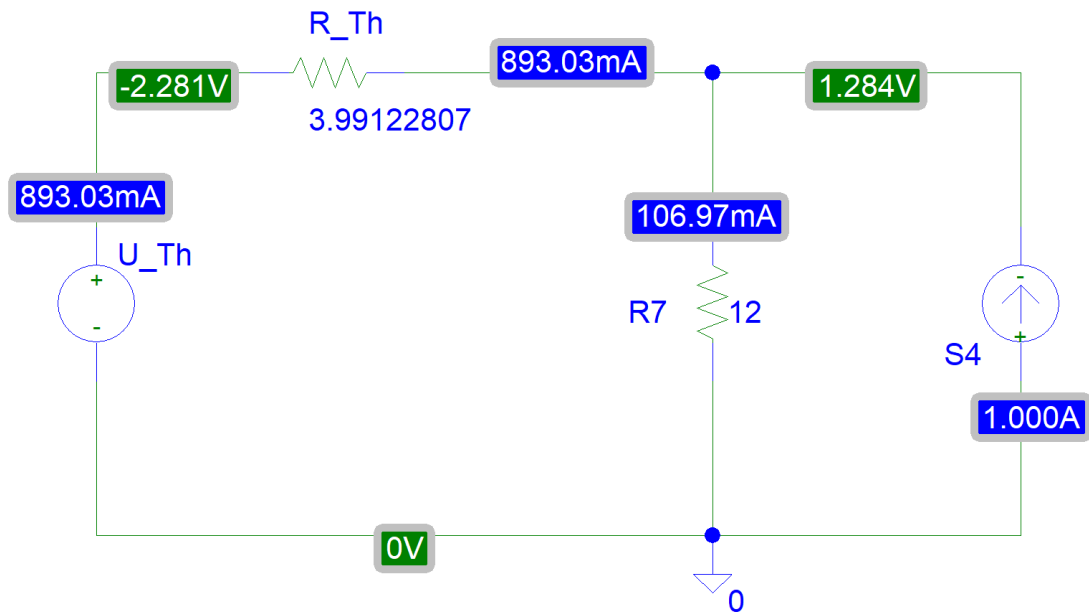


Abb. 11: PSpice-Simulation der Thevenin-Ersatzschaltung (vgl. Abb. 1)

### 4.3 Vergleich der beiden Simulationen

Die Ströme  $I_{R7}$  und  $I_{S4}$  sind in beiden Simulationen identisch. Bei der Originalschaltung ist an der Klemme  $a$  ein Potential von  $21,74\text{ V}$  zu verzeichnen, an der Klemme  $b$   $20,46\text{ V}$  (vgl. Abb. 9). Dieser Potentialunterschied von  $21,74\text{ V} - 20,46\text{ V} = 1,28\text{ V}$  entspricht dem Potentialunterschied von  $1,284\text{ V}$  zwischen  $a$  und  $b$  bei der Thevenin-Simulation (vgl. Abb. 11). Der Unterschied von  $0,004\text{ V}$  ist auf die Darstellungsungenauigkeit der Zahlen in der Abbildung zurückzuführen.