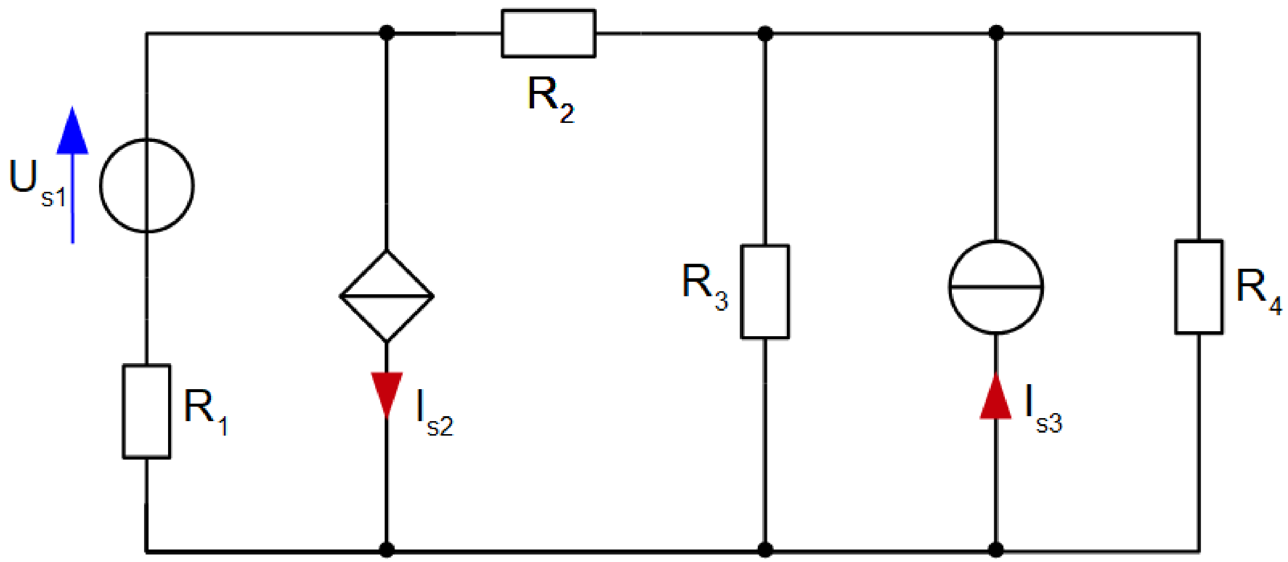
NWMT WS20/21 - 1. Übung

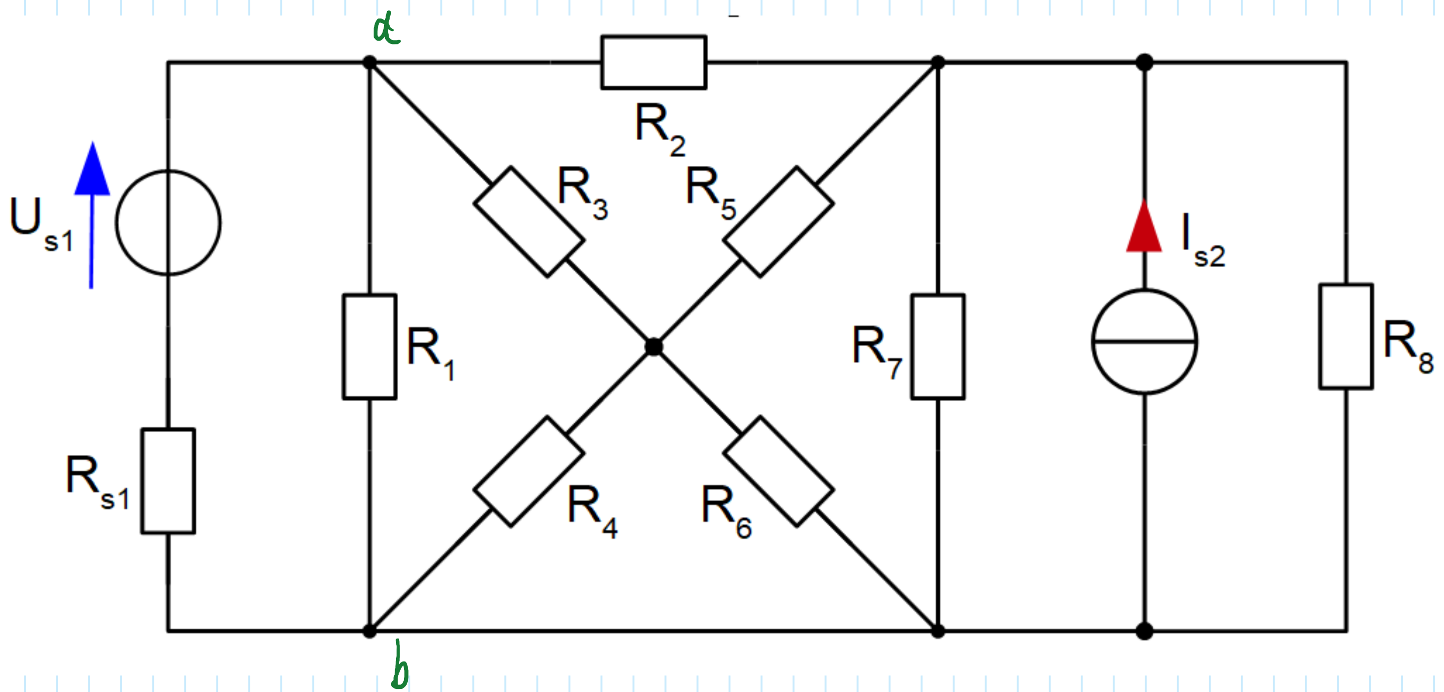
Modifiziertes Knotenspannungsverfahren (KSV)

Mit: (idealen) Spannungsquellen

Gesteuerten Quellen



Bsp. 1.1: Knotenspannungsverfahren



- gegeben:

$R_{S1} = 4\Omega,\ R_1 = 2\Omega,\ R_2 = 8\Omega$

$R_3 = 12\Omega,\ R_4 = 10\Omega,\ R_5 = 10\Omega$

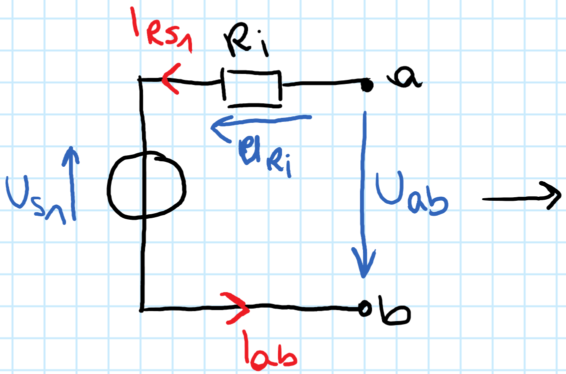
$R_6 = 8\Omega,\ R_7 = 12\Omega,\ R_8 = 6\Omega$

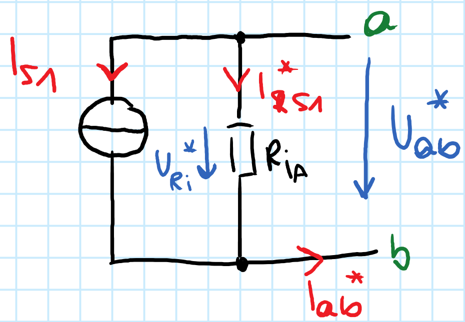
$U_{S1} = -12V$ $\quad I_{S2} = 250mA$

- gesucht:

Alle Zweigströme und -spannungen
Im Netzwerk (Netzwerkanalyse)

GET: 1. Quellenumwandlung: Spannungsquelle ⟶ Stromquelle



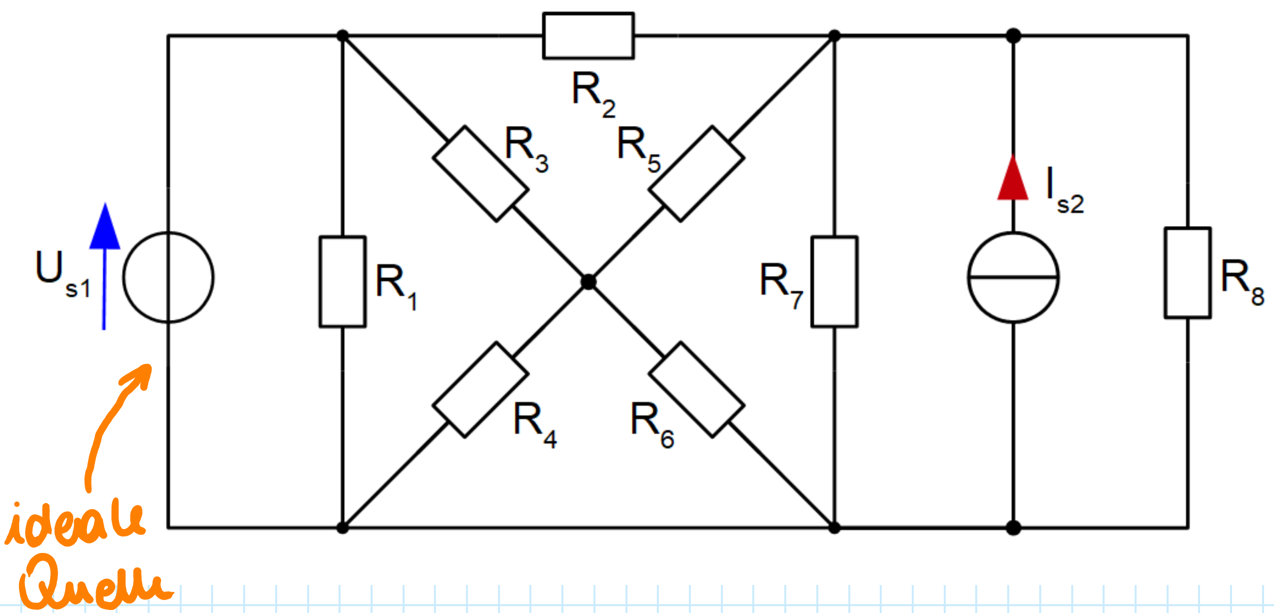


$$\boxed{I_{S1} = \frac{U_{S1}}{R_{S1}}} = -\frac{12V}{4\Omega} = -3A$$

-> U_{Ri}, U^*_{Ri} und I^*_{RS1}, I_{RS1}
sind hier aber unterschiedlich!
-> nur gleiches Klemmenverhalten:
$U_{ab} = U^*_{ab}$, $I_{ab} = I^*_{ab}$

-> Lösung?
-> Was ist, wenn Rs1 nicht existiert? $\Big\}$ => andere Methode

Bsp. 1.1 (b): Modifiziertes Knotenspannungsverfahren



- gegeben:

  $\cancel{R_{S1} = 4\Omega}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 8\Omega$

  $R_3 = 12\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 10\Omega$

  $R_6 = 8\Omega$, $R_7 = 12\Omega$, $R_8 = 6\Omega$

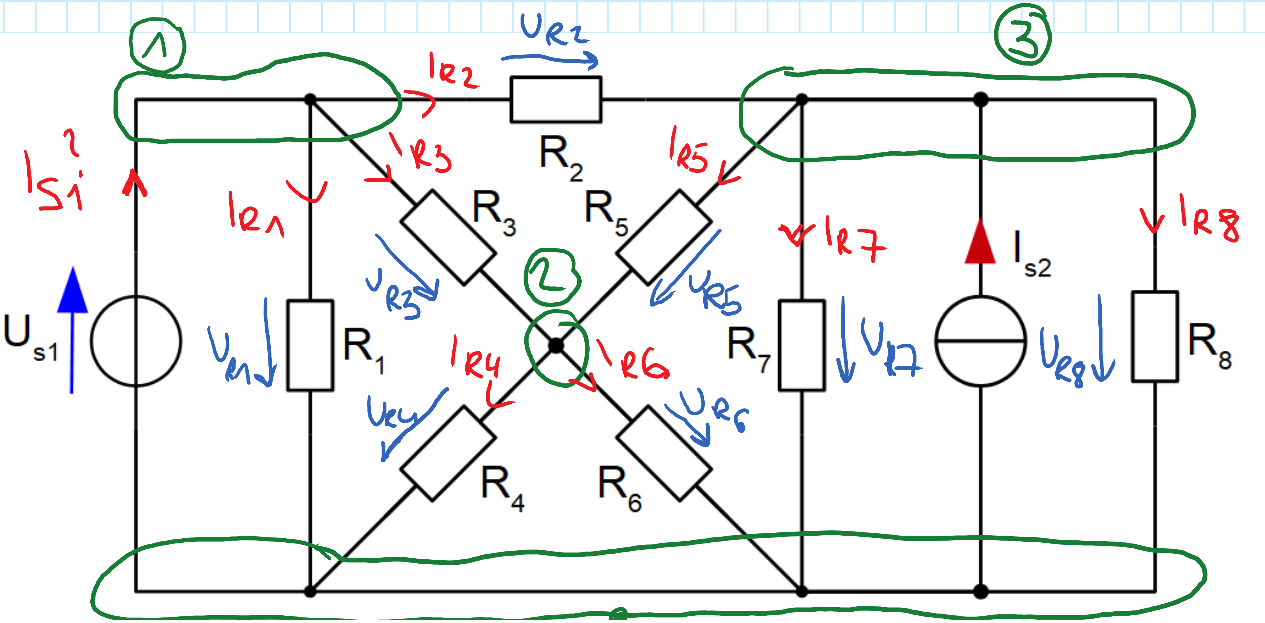
  $U_{S1} = -12V$ $\quad$ $I_{S2} = 250mA$

- gesucht:

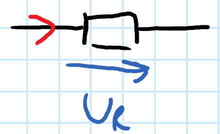
  Alle Zweigströme und -spannungen Im Netzwerk (Netzwerkanalyse)

1. Einzeichnen von Strom und Spannung an allen Bauteilen (Verbraucherzählpfeilsystem **VZS**!) Festlegen des Bezugsknotens (BZK) und Nummerieren der restlichen Knoten

unbekannter Strom durch Spgs.quelle

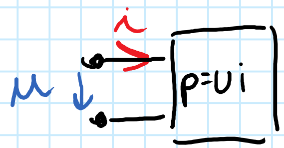


I_R VZS:



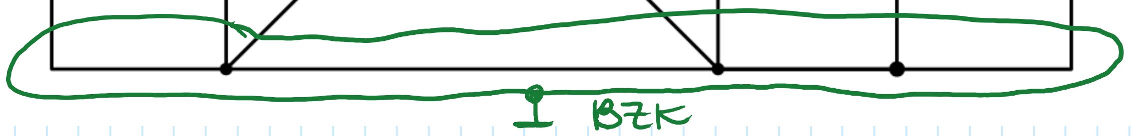
$U_R = I_R \cdot R$

allgemein



$p>0$: Verbraucher

$p<0$: Quelle


BZK

2. 1. Kirchhoff'sches Gesetz (Kirchoff's Current Law "KCL") anwenden

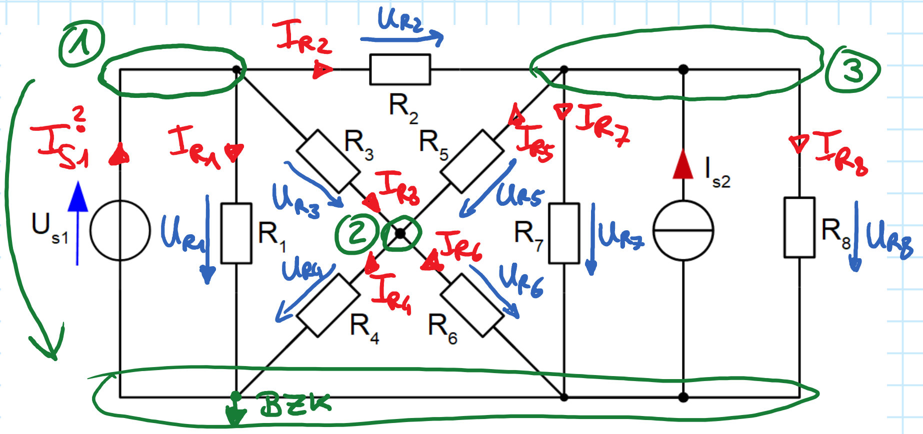
-> **Knotengleichungen aufstellen**

① $-I_{S1}^{?} + I_{R1} + I_{R2} + I_{R3} = 0$

② $-I_{R3} + I_{R4} - I_{R5} + I_{R6} = 0$

③ $-I_{R2} + I_{R5} + I_{R7} + I_{R8} - I_{S2} = 0$

U_{11}



(④ BZK. $I_{S1}^{?} - I_{R1} - I_{R4} - I_{R6} - I_{R7} - I_{R8} + I_{S2} = 0 \quad \hat{=} -① - ② - ③$)

↳ Linearkombination aller restlichen Knotengleichungen

keine weitere Information

3. **Ohm'sches Gesetz** an allen Widerständen in den Knotengleichungen anwenden:

① $\frac{U_{R1}}{R_1} + \frac{U_{R2}}{R_2} + \frac{U_{R3}}{R_3} - I_{S1}^{?} = 0$

② $-\frac{U_{R3}}{R_3} + \frac{U_{R4}}{R_4} - \frac{U_{R5}}{R_5} + \frac{U_{R6}}{R_6} = 0$

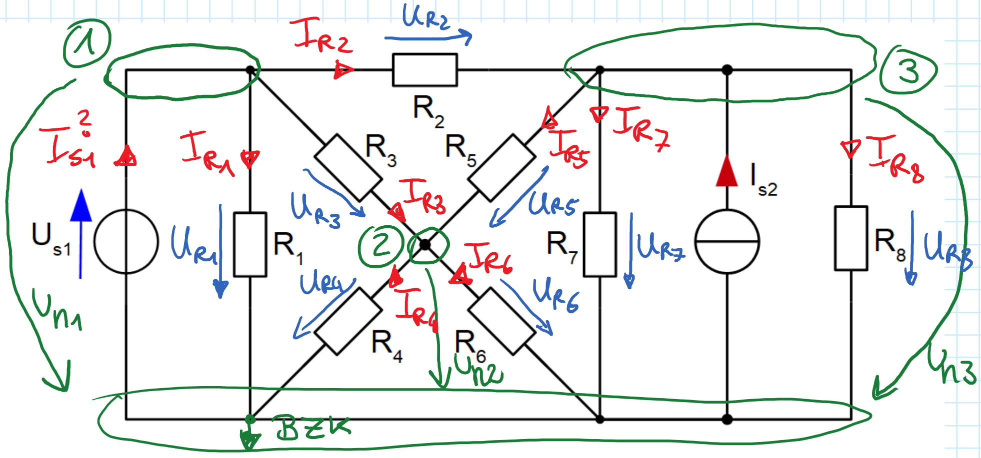
③ $-\frac{U_{R2}}{R_2} + \frac{U_{R5}}{R_5} + \frac{U_{R7}}{R_7} + \frac{U_{R8}}{R_8} = I_{S2}$

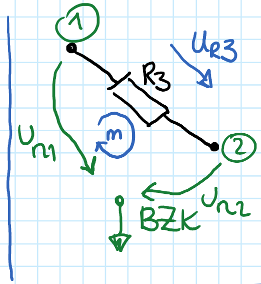
$$\boxed{I_{Ri} = \frac{U_{Ri}}{R_i}}$$

Bekannte Größen auf die rechte Seite

$\Rightarrow$ 9 unbekannte Werte (U_{R1} bis U_{R8} & $I_{S1}^{?}$)

4. **Knotenspannungen** einführen und alle anderen Spannungen gemäß des 2. Kirchhoff'schen Gesetzes (Kirchhoff's Voltage Law "KVL") über diese ausdrücken (**Maschengleichungen**)





Masche:

$U_{R3} + U_{n2} - U_{n1} = 0$

$U_{R3} = U_{n1} - U_{n2}$

$U_{R1} = U_{n1}$ $\qquad U_{R5} = U_{n3} - U_{n2}$

$U_{R2} = U_{n1} - U_{n3}$ $\qquad U_{R6} = U_{n2}$

$U_{R3} = U_{n1} - U_{n2}$ $\qquad U_{R7} = U_{n3}$

$U_{R4} = U_{n2}$ $\qquad U_{R8} = U_{n3}$

5. Spannungen in den Knotengleichungen durch Knotenspannungen ersetzen:

① $\frac{U_{R1}}{R_1} + \frac{U_{R2}}{R_2} + \frac{U_{R3}}{R_3} - I_{s1}^{?} = 0$

② $-\frac{U_{R3}}{R_3} + \frac{U_{R4}}{R_4} - \frac{U_{R5}}{R_5} + \frac{U_{R6}}{R_6} = 0$

③ $-\frac{U_{R2}}{R_2} + \frac{U_{R5}}{R_5} + \frac{U_{R7}}{R_7} + \frac{U_{R8}}{R_8} = I_{s2}$

① $\frac{U_{n1}}{R_1} + \frac{U_{n1} - U_{n3}}{R_2} + \frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_3} - I_{s1}^{?} = 0$

② $-\frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_3} + \frac{U_{n2}}{R_4} - \frac{U_{n3} - U_{n2}}{R_5} + \frac{U_{n2}}{R_6} = 0$

③ $-\frac{U_{n1} - U_{n3}}{R_2} + \frac{U_{n3} - U_{n2}}{R_5} + \frac{U_{n3}}{R_7} + \frac{U_{n3}}{R_8} = I_{s2}$

1. $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_{n1} - \frac{1}{R_3}U_{n2} - \frac{1}{R_2}U_{n3} - I_{S1}^{?} = 0$
2. $-\frac{1}{R_3}U_{n1} + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)U_{n2} - \frac{1}{R_5}U_{n3} = 0$
3. $-\frac{1}{R_2}U_{n1} - \frac{1}{R_5}U_{n2} + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_7}+\frac{1}{R_8}\right)U_{n3} = I_{S2}$

1. $\frac{U_{n1}}{R_1} + \frac{U_{n1}-U_{n3}}{R_2} + \frac{U_{n1}-U_{n2}}{R_3} - I_{S1}^{?} = 0$
2. $-\frac{U_{n1}-U_{n2}}{R_3} + \frac{U_{n2}}{R_4} - \frac{U_{n3}-U_{n2}}{R_5} + \frac{U_{n2}}{R_6} = 0$
3. $-\frac{U_{n1}-U_{n3}}{R_2} + \frac{U_{n3}-U_{n2}}{R_5} + \frac{U_{n3}}{R_7} + \frac{U_{n3}}{R_8} = I_{S2}$

↳ 4 Unbekannte: $U_{n1}, U_{n2}, U_{n3}, I_{S1}^{?}$

↳ 3 Gleichungen: Unterbestimmtes Gleichungssystem → nicht eindeutig lösbar!

Wir brauchen eine weitere Gleichung

6. **Zusatzbedingungen** in Gleichungen formulieren

⇒ eine Zusatzbedingung kann mit der gegebenen Größe U_{S1} formuliert werden:

$U_{S1} = -12V$ Diese Information haben wir noch nicht verwendet.

Außerdem erkennen wir, in der Schaltung ⇒ ALLE Spannungen können durch Knotenspannungen dargestellt werden)

$U_{S1} = -U_{n1}$ ⇒ 4. $-U_{n1} = U_{S1}$

⇒ 4 Gleichungen, 4 Unbekannte: Das ist lösbar ☺

7. Gleichungssystem übersichtlich in **Matrizenform** anschreiben $\boxed{A \cdot x = b}$

(1) $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) U_{n1} - \frac{1}{R_3} U_{n2} - \frac{1}{R_2} U_{n3} - I_{Si}^{?} = 0$

(2) $-\frac{1}{R_3} U_{n1} + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right) U_{n2} - \frac{1}{R_5} U_{n3} = 0$

(3) $\quad n_1 \quad R_5\; U_{n2} + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_7}+\frac{1}{R_8}\right) U_{n3} = I_{S2}$

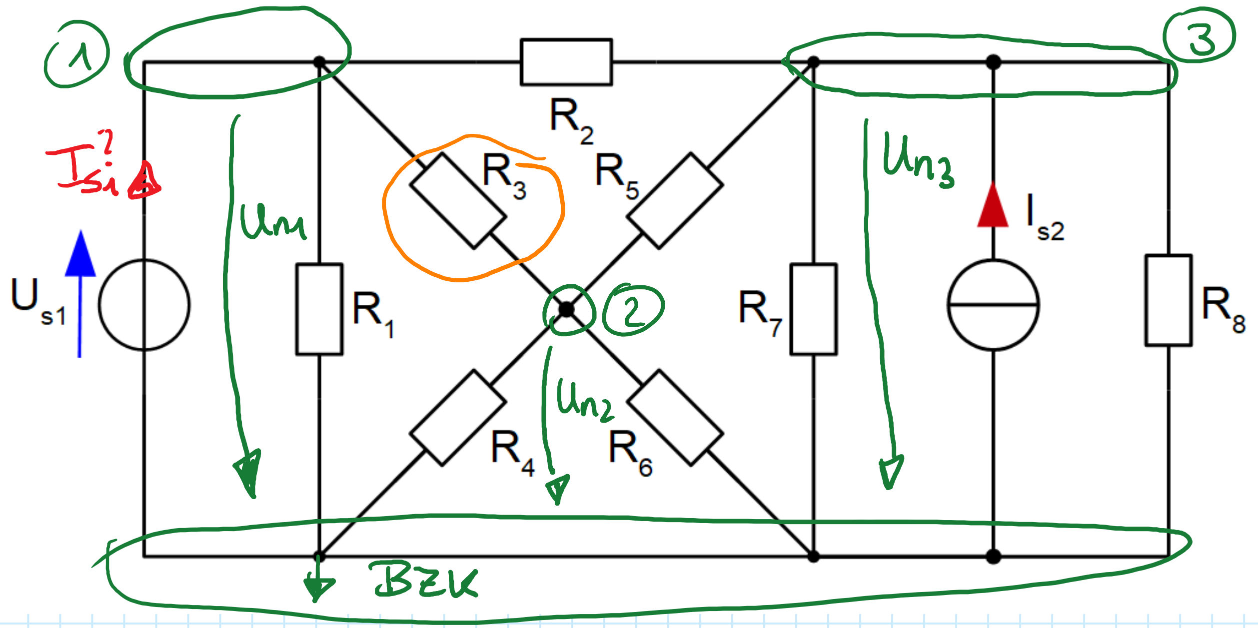
(4) $-U_{n1} = U_{S1}$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} U_{n1} & \quad U_{n2} & \quad U_{n3} & \quad I_{Si}^{?} \end{array} \\
\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -1 \\
-\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_5} & 0 \\
-\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_2} & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ I_{Si}^{?} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{S2} \\ U_{S1} \end{Bmatrix}
$$

$$\qquad\qquad A \qquad\qquad\qquad\qquad x \qquad\quad b$$

Bsp. 1.2: Modifiziertes KSV - durch "Hinschauen"

1. Nummerieren aller Knoten und Einzeichnen der Knotenspannungen, unbekannte Ströme durch Quellen einzeichnen - wie bisher



Matrizengleichung

$$A \cdot x = b$$

2. **Zusatzbedingungen** angeben

(4) $\boxed{U_{S1} = -U_{n1}}$

3. Ableiten der A-Matrix direkt aus der Struktur des Netzwerks

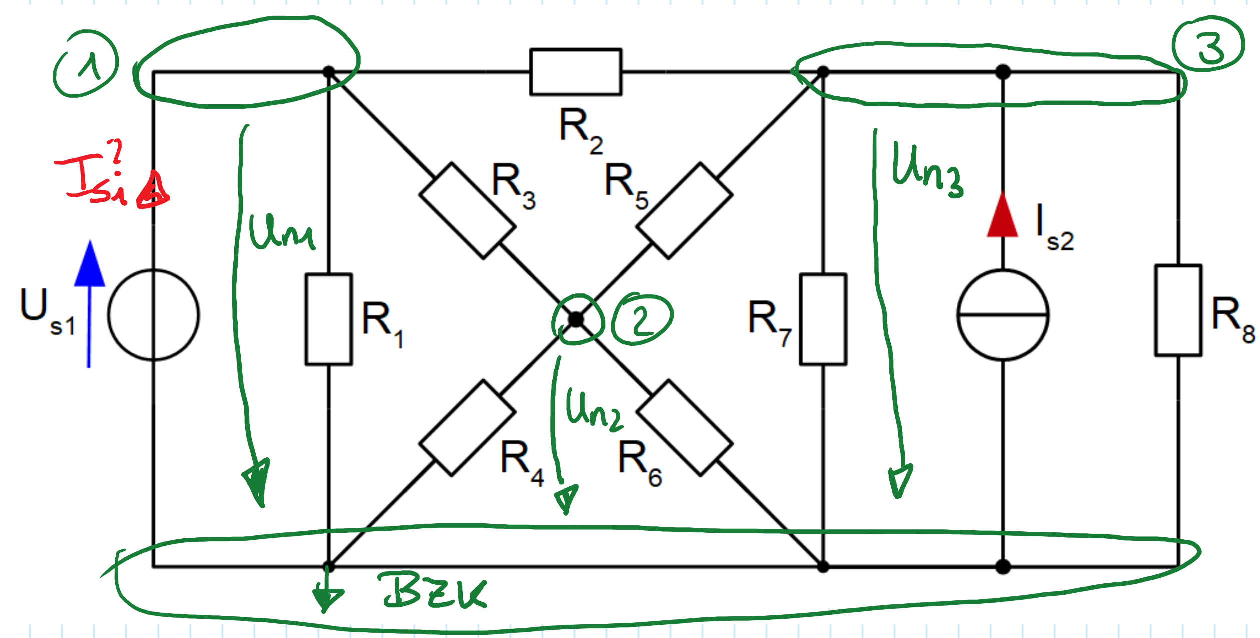
$$\frac{1}{R_i} = G_i$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & (2) & (3) & I_{S1}? \\
\hline
(1) & G_1+G_2+G_3 & -G_3 & -G_2 & -1 \\
(2) & -G_3 & G_3+G_4+G_5+G_6 & -G_5 & 0 \\
(3) & -G_2 & - & G_2+G_5+G_7+G_8 & 0 \\
(4) & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Hauptdiagonale: positiven Summen aller Knotenleitwerte

Nebendiagonale: negativen Summen aller Koppelleitwerte zw. den Knoten (a) & (b)

1. Ableiten des Ergebnisvektors **b** direkt aus der Struktur des Netzwerks



(unabh.) Stromquellen stehen immer auf der rechten Seite (bekannt)

umgekehrtes Vorzeichen zur Knotengleichung

→ eingehende Quellströme: +

→ ausgehende Quellströme: −

+ rechte Seite der Zusatzbedingungen

$$
\begin{array}{c}
 \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad & (2) & (3) & I_{s1}? \end{array} \\
\begin{bmatrix}
G_1+G_2+G_3 & -G_3 & -G_2 & -1 \\
-G_3 & G_3+G_4+G_5+G_6 & -G_5 & 0 \\
-G_2 & -G_5 & G_2+G_5+G_7+G_8 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ I_{s1}? \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{s2} \\ U_{s1} \end{Bmatrix}
$$

Unbekanntenvektor x

Wir haben die Matrizengleichung auf 2 verschiedene Arten aufgestellt - jetzt muss Sie gelöst werden!
Offensichtlich ist die Multiplikation mit der inversen Leitwertmatrix eine Möglichkeit:

A-Matrix:
- quadrat.
- Symmetr.

$\Big\} \Rightarrow \exists A^{-1}$

$A^{-1} \cdot | \; A \cdot x = b$

$\underbrace{A^{-1} A}_{E} \cdot x = A^{-1} b \quad \rightarrow \quad x = A^{-1} \cdot b$

- $AB \neq BA$
- $A^{-1}A = E = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$

$\boxed{2 \times 2} \quad 2 \overset{!}{=} 2 \quad \boxed{2 \times 1} \qquad \boxed{2 \times 1}$

Berechnung mit Matlab (oder Octave):

```
clear all;
close all;
clc;

%% UE01

% Bauteilwerte
Ri = [ 2; 8; 12; 10; 10; 8; 12; 6 ];
Gi = Ri.^(-1);
Usl = -12;
Is2 = 0.25;

b = zeros(4,1);
b(3) = Is2;
b(4) = Usl;

% Knotenadmittanzmatrix
A = [Gi(1) + Gi(2) + Gi(3), -Gi(3), -Gi(2), -1;
      -Gi(3), Gi(3) + Gi(4) + Gi(5) + Gi(6), -Gi(5), 0;
      -Gi(2), -Gi(5), Gi(2) + Gi(5) + Gi(7) + Gi(8), 0;
      -1, 0, 0, 0];
```

```
% Loesung des Gleichungssystems
x = A^(-1)*b; % äquivalent zu A\b

Un = x(1:3)
Isl = x(4)

% Zweigspannungen
Ui = [Un(1); Un(1) - Un(3);
      Un(1) - Un(2); Un(2); Un(3) - Un(2);
      Un(2); Un(3); Un(3)]

% Zweigstroeme
Ii = Ui.*Gi
% Leistungen an allen Widerstaenden
P = Ui .* Ii

Pr_sum = sum(P)
% Leistungen der Quellen
Psl = Usl * (-Isl)
Ps2 = Ui(8) * Is2

Ps_sum = Psl + Ps2
```

```
Un =

   12.0000
    3.5334
    4.4281

Isl =    7.6520
Ui =

   12.00000
    7.57191
    8.46659
    3.53341
    0.89468
    3.53341
    4.42809
    4.42809
```

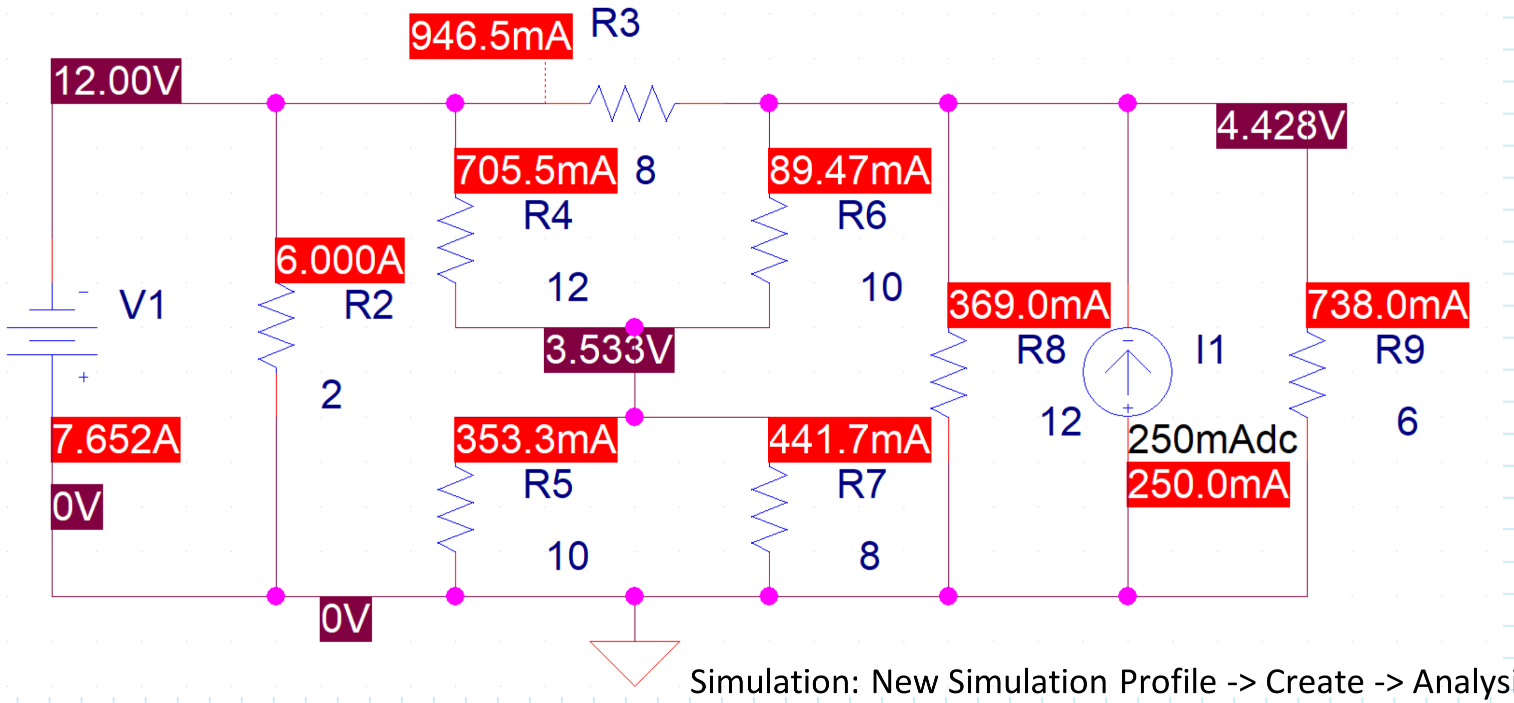
```
Ii =

   6.000000
   0.946489
   0.705549
   0.353341
   0.089468
   0.441676
   0.369007
   0.738014
```

```
P =

   72.000000
    7.166735
    5.973597
    1.248498
    0.080045
    1.560622
    1.633996
    3.267991

Pr_sum =   92.931
Psl =   91.824
Ps2 =   1.1070
Ps_sum =   92.931
```

Beachte Leistungsbilanz

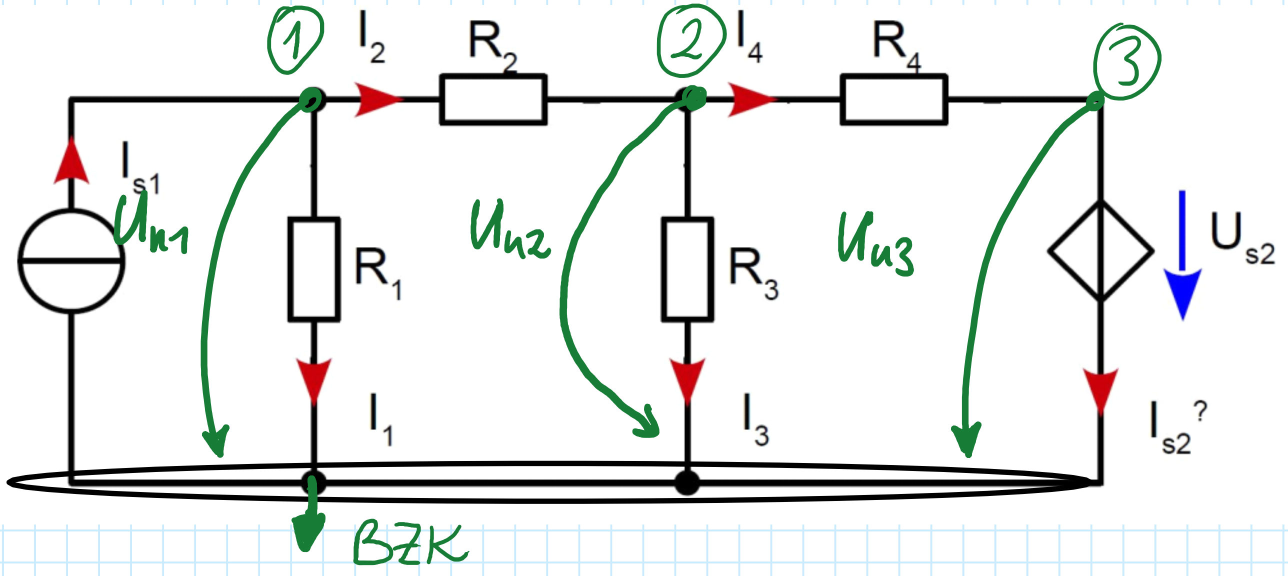
Pr_sum = Ps_sum

PSpice Simulation:



Simulation: New Simulation Profile -> Create -> Analysis Type : Bias Point

Aufgabe 1.3: Modifiziertes KSV mit Gesteuerter Quelle



- gegeben:

$R_1 = 1\Omega \quad R_2 = 2\Omega \quad R_3 = 3\Omega$

$R_4 = 4\Omega \quad \alpha = 5$

$I_{S1} = 100\,mA \quad U_{S2} = \alpha\, I_{S1}$

- gesucht:

ALLE Knotenspannungen

$U_{S2} = f(I_2)$ ... allgemein ⟶ Strom-gesteuerte Spannungs-Quelle:
(liefert eine Spannung abhängig vom Strom am steuernden Bauteil)

· Knotengleichungen

① $G_1 + G_2 \cdot U_{n1} - G_2 \cdot U_{n2} = I_{S1}$

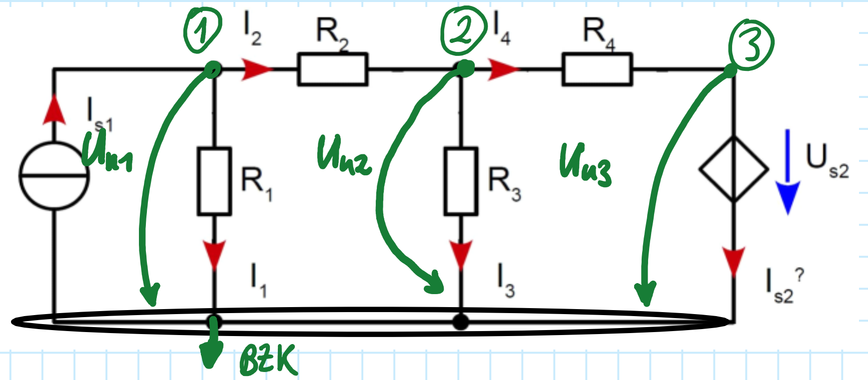
② $-G_2\, U_{n1} + (G_2 + G_3 + G_4) \cdot U_{n2} - G_4\, U_{n3} = 0$

③ $-G_4\, U_{n2} + G_4\, U_{n3} + I_{S2}^{\,!} = 0$

rechte Seite: NUR bekannte Größen

$\Rightarrow$ 3 Gleichungen aber 4 Unbekannte: $U_{n1} - U_{n3}$, I_{S2}:

$\rightarrow$ 1 zusätzliche Gleichung wird benötigt



$U_{s2} = \alpha \, I_{R2}$ $\quad$ $\underline{U_{s2} = U_{n3}}$

↳ keine bekannte Größe

$\underline{I_{R2}} = G_2 \, U_{R2} = G_2 (U_{n1} - U_{n2})$

$\Rightarrow U_{n3} = \alpha \cdot G_2 \cdot (U_{n1} - U_{n2})$

$$\boxed{(4) \quad U_{n3} - \alpha G_2 U_{n1} + \alpha G_2 U_{n2} = 0}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 & 0 \\ 0 & -G_4 & G_4 & 1 \\ -\alpha G_2 & +\alpha G_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ I_{s2}^{S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

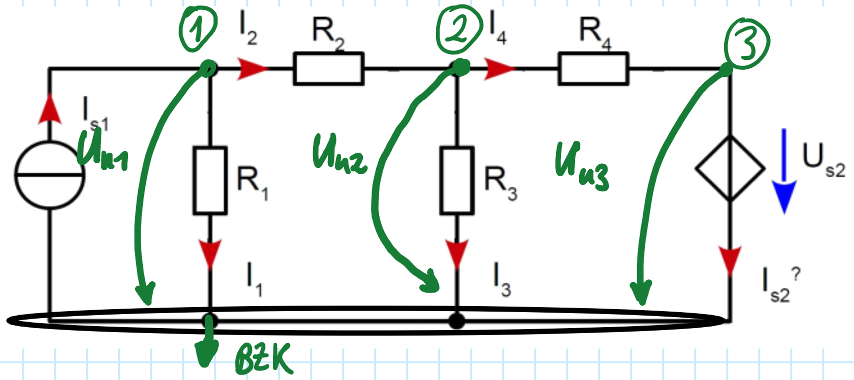
PSpice : E . . . spannungsgestr. Spannungsquelle

F . . . stromgestr. Stromquelle

G . . . spannungsgestr. Stromquelle

H . . . stromgestr. Spannungsquelle

→ Wenn der Wert Us2 auch gesucht ist:
2 weitere Gleichungen nötig



(4) $U_{S2} = U_{n3}$

(5) $U_{S2} = \alpha I_{R2} = \alpha \, G_2 (U_{n1} - U_{n2})$

→ im Unbekannten-Vektor: $U_{n1}, U_{n2}, U_{n3}, I_{S2}^{?}$ und U_{S2}

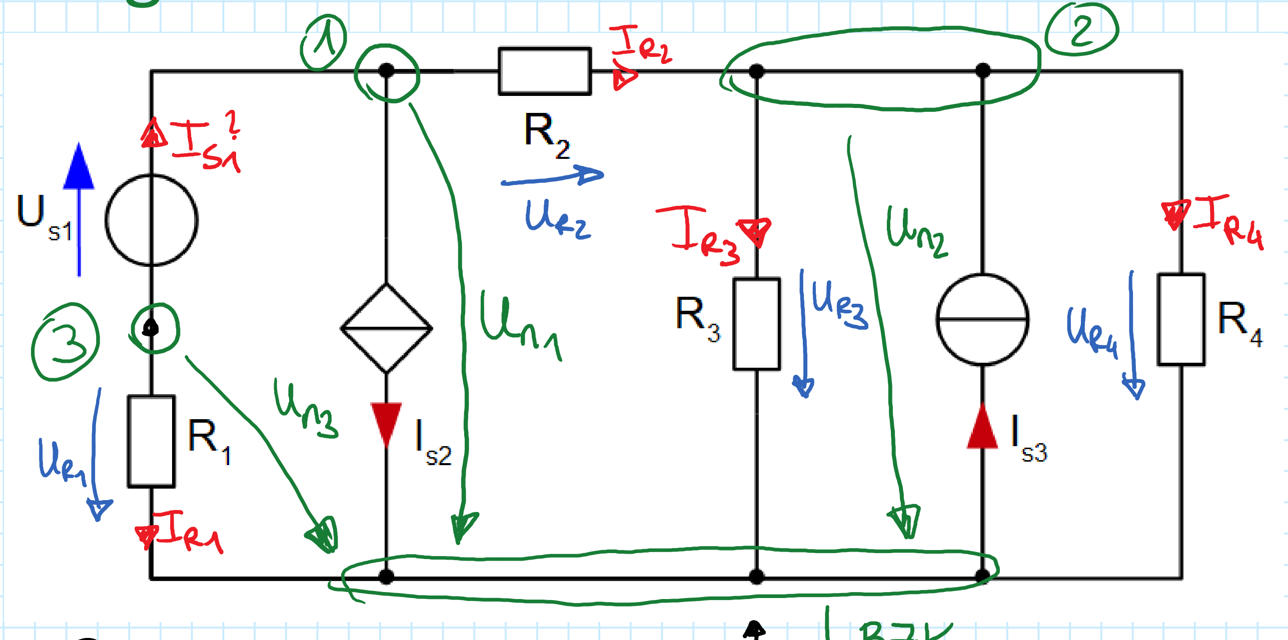
(5) $U_{S2} - U_{n3} = 0$

(4) $U_{S2} - \alpha G_2 U_{n1} + \alpha G_2 U_{n2} = 0$

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ (4) \\ (5)
\end{array}
\begin{bmatrix}
G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 & 0 \\
-G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 & 0 & 0 \\
0 & -G_4 & G_4 & 1 & 0 \\
-\alpha G_2 & \alpha G_2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
\text{nur bekannte Größen} \\
\begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ I_{S2}^{?} \\ U_{S2} \end{Bmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\text{nur unbekannte Größen} \\
\begin{Bmatrix} I_{S1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{array}
$$

(4) − (5) → $\alpha \, G_2 U_{n1} + \alpha \, G_2 U_{n2} + U_{n3} = 0$

Aufgabe 1.4: Modifiziertes KSV



- gegeben:

R_1, R_2, R_3, R_4

U_{S1}, I_{S3}

$\rightarrow I_{S2} = \alpha \cdot U_{R2}, \alpha$ ↳ Einheit: $\frac{V}{A} = S$

- gesucht:

alle Knotenspg., I_{S2}

Spannungs-gesteuerte Strom-Quelle:
(liefert einen Strom abhängig von einem Strom am steuernden Bauteil)

① Alle Größen einzeichnen

② Knotengleichungen aufstellen

① $G_2 \cdot (U_{n1} - U_{n2}) - I_{S1}^{?} + I_{S2} = 0$

② $G_2 \cdot (U_{n2} - U_{n1}) + G_3 \cdot U_{n2} + G_4 \cdot U_{n2} = 0$

③ $G_1 \cdot U_{n3} + I_{S1}^{?} = 0$

5 Unbekannte: $U_{n1}, U_{n2}, U_{n3}, I_{S1}^{?}, I_{S2}$

$\Rightarrow$ 2 zusätzl. Gleichungen nötig

③ Zusatzbedingungen aufstellen

④ $U_{n3} - U_{n1} = U_{S1}$

⑤ $I_{S2} = \alpha \cdot U_{R2} \Rightarrow \alpha (U_{n1} - U_{n2}) - I_{S2} = 0$

① $G_2 \cdot (U_{n1} - U_{n2}) - I_{s1}^{?} + I_{s2} = 0$

② $G_2 \cdot (U_{n2} - U_{n1}) + G_3 \cdot U_{n2} + G_4 \cdot U_{n2} = I_{s3}$

③ $G_1 \cdot U_{n3} + I_{s1}^{?} = 0$

④ $U_{n3} - U_{n1} = U_{s1}$

⑤ $\alpha \cdot (U_{n1} - U_{n2}) - I_{s2} = 0$

4 Gleichungssystem in Matrizenform darstellen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G_1 & -G_2 & 0 & -1 & 1 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ I_{s1}^{?} \\ I_{s2} \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I_{s3} \\ 0 \\ U_{s1} \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$