

# Elektrische Netzwerke und Mehrport Übung

Wintersemester 2020

## Protokoll Übung 3: Transiente Vorgänge

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 19. November 2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ermitteln der DGL von <math>i_L(t)</math> für <math>0 \leq t \leq 2\tau_1</math></b>	<b>3</b>
1.1	Schaltbild des Netzwerks für $0 \leq t \leq 2\tau_1$ . . . . .	3
1.2	Aufstellen der DGL mithilfe der allgemeinen Lösungsformel . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Ermitteln der DGL von <math>i_L(t)</math> für <math>t &gt; 2\tau_1</math></b>	<b>4</b>
2.1	Schaltbild des Netzwerks für $t > 2\tau_1$ . . . . .	4
2.2	Aufstellen der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschengleichungen . . . . .	4
2.3	Herleitung der DGL 2. Ordnung von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$ . . . . .	4
2.4	Interpretation der Parameter $\delta$ , $\omega_0$ und $\Omega_d$ . . . . .	6
2.5	Anfangswertproblem . . . . .	7
2.5.1	Anfangsbedingungen . . . . .	7
2.5.2	Lösen von $K_1$ und $K_2$ . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Plots und Simulationen</b>	<b>8</b>
3.1	Matlab-Plot $i_L(t)$ . . . . .	8
3.2	PSpice-Plot $i_L(t)$ und $u_L(t)$ . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Matlab-Simulation</b>	<b>9</b>
4.1	Skript . . . . .	9
4.2	Konsolenoutput . . . . .	11

## 1 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $0 \leq t \leq 2\tau_1$

### 1.1 Schaltbild des Netzwerks für $0 \leq t \leq 2\tau_1$

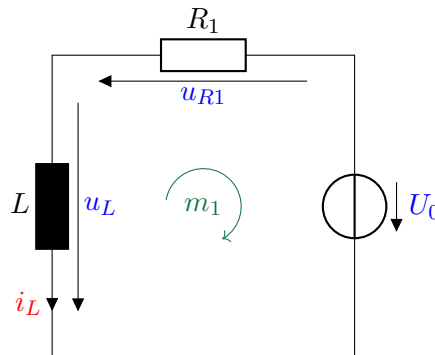


Abbildung 1: Netzwerk im Zeitintervall  $0 \leq t \leq 2\tau_1$ .

### 1.2 Aufstellen der DGL mithilfe der allgemeinen Lösungsformel

Da es sich um ein LR-Netzwerk handelt, lässt sich  $\tau_1$  folgendermaßen bestimmen:

$$\frac{1}{\lambda} = \tau_1 = \frac{L}{R} = \frac{100 \text{ mH}}{50 \Omega} = 2 \text{ ms}$$

Weiters lässt sich durch einsetzen in die allgemeine Lösungsformel für Transiente Vorgänge mit einem Energiespeicher der Strom  $i_L$  für  $0 \leq t \leq 2\tau_1$  ermitteln.

Allgemeine Lösungsformel:

$$x(t) = x_f + [x_0 - x_f] \cdot e^{(-\frac{t-t_0}{\tau})}$$

Die Spule entspricht nach  $t > 5\tau_1$  einem Kurzschluss. Deswegen ergibt sich  $x_f$  aus dem Strom durch den Widerstand  $R_1$ .

$$x_0 = i_L(t = 0) = I_{L_0} = 50 \text{ mA}$$

$$x_f = i_L(t \rightarrow \infty) = i_{R1} = \frac{U_0}{R_1} = 200 \text{ mA}$$

Durch anschließendes Einsetzen erhält man:

$$i_L(t) = 200 \text{ mA} + [50 \text{ mA} - 200 \text{ mA}] \cdot e^{-\frac{t}{2 \text{ ms}}}$$
$$i_L(t = 2\tau_1) = 200 \text{ mA} + [50 \text{ mA} - 200 \text{ mA}] \cdot e^{-\frac{4 \text{ ms}}{2 \text{ ms}}} = 179,7 \text{ mA}$$

## 2 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

### 2.1 Schaltbild des Netzwerks für $t > 2\tau_1$

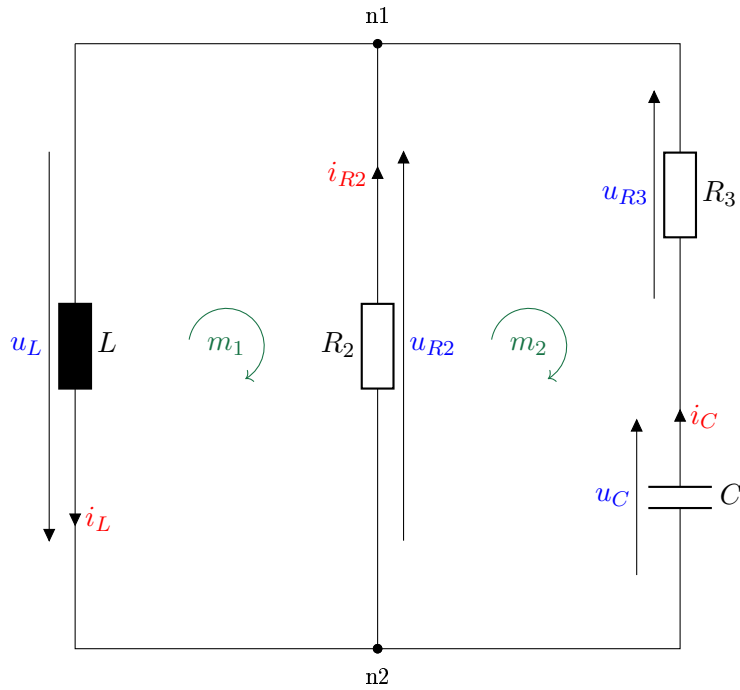


Abbildung 2: Netzwerk im Zeitintervall  $t > 2\tau_1$ .

### 2.2 Aufstellen der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschengleichungen

$$n_1 : \quad i_L - i_{R2} - i_C = 0$$

$$n_2 : \quad i_C + i_{R2} - i_L = 0$$

$$m_1 : \quad -u_{R2} - u_L = 0$$

$$m_2 : \quad u_{R2} - u_{R3} - u_C = 0$$

### 2.3 Herleitung der DGL 2. Ordnung von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

$$-i_C - i_{R2} + i_L = 0$$

$$-Cu_C' - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$u_C = u_{R2} - u_{R3}$$

$$= -u_L - u_{R3}$$

$$= -(Li_L' + u_{R3})$$

$$\implies C \frac{d}{dt} [Li_L' + u_{R3}] - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$CLi_L'' + \frac{d}{dt} CR_3 i_C - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$CLi_L'' + \frac{d}{dt} CR_3 (i_L - i_{R2}) - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$CLi_L'' + CR_3 i_L' - \frac{d}{dt} \left( CR_3 \frac{u_{R2}}{R_2} \right) - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$CLi_L'' + CR_3 i_L' + \frac{CR_3 L}{R_2} i_L'' - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$CLi_L'' + CR_3 i_L' + \frac{CR_3 L}{R_2} i_L'' + \frac{L}{R_2} i_L' + i_L = 0$$

$$i_L'' \left( CL + \frac{CR_3 L}{R_2} \right) + i_L' \left( CR_3 + \frac{L}{R_2} \right) + i_L = 0$$

$$i_L'' + i_L' \left( \frac{R_3 C + \frac{L}{R_2}}{LC + \frac{R_3 LC}{R_2}} \right) + i_L \left( \frac{1}{LC + \frac{R_3 LC}{R_2}} \right) = 0$$

$$i_L'' + i_L' \underbrace{\left( \frac{R_2 R_3 C + L}{R_2 LC + R_3 LC} \right)}_{=: 2\delta} + i_L \underbrace{\left( \frac{R_2}{R_2 LC + R_3 LC} \right)}_{=: \omega_0^2} = 0$$

Ansatz:  $\tilde{t} = t - 2\tau_1$

$$i_L(\tilde{t}) = e^{\lambda \tilde{t}}$$

$$i_L'(\tilde{t}) = \lambda e^{\lambda \tilde{t}}$$

$$i_L''(\tilde{t}) = \lambda^2 e^{\lambda \tilde{t}}$$

$$\implies \lambda^2 e^{\lambda \tilde{t}} + 2\delta \lambda e^{\lambda \tilde{t}} + \omega_0^2 e^{\lambda \tilde{t}} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 = \left( \frac{R_2 R_3 C + L}{R_2 LC + R_3 LC} \right)^2 - \frac{R_2}{R_2 LC + R_3 LC} = -416667 \frac{1}{s^2} < 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\delta \pm \sqrt{(-1) \underbrace{\omega_0^2 - \delta^2}_{\Omega_d}} \\ &= -\delta \pm j\Omega_d \end{aligned}$$

Lösung:

$$i_L(\tilde{t}) = e^{-\delta \tilde{t}} \left[ \tilde{K}_1 e^{j\Omega_d \tilde{t}} + \tilde{K}_2 e^{-j\Omega_d \tilde{t}} \right] = e^{-\delta \tilde{t}} \left[ K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t}) \right]$$

## 2.4 Interpretation der Parameter $\delta$ , $\omega_0$ und $\Omega_d$

$$\delta \quad \dots \text{ Dämpfung} \quad [\delta] = \frac{1}{s}$$

$$\omega_0 \quad \dots \text{ Resonanzfrequenz} \quad [\omega_0] = \frac{1}{s}$$

$$\Omega_d \quad \dots \text{ Eigenfrequenz} \quad [\Omega_d] = \frac{1}{s}$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 \quad \left\{ \begin{array}{ll} > 0 & 2 \text{ reelle Lösungen} \\ < 0 & 2 \text{ (konjugiert) komplexe Lösungen} \\ = 0 & 1 \text{ reelle Doppellösung} \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} \Rightarrow \Omega_d = \delta^2 - \omega_0^2 & (\text{Fall 1}) \\ \Rightarrow \Omega_d = \omega_0^2 - \delta^2 & (\text{Fall 2}) \\ \Rightarrow \Omega_d = 0 & (\text{Fall 3}) \end{array}$$

- Fall 1: Kriechfall, d.h. es entsteht keine Schwingung. Je größer die Dämpfung ( $\delta$ ) ist, desto langsamer kriechen Strom und Spannung gegen ihren Endwert.
- Fall 2: Realer Schwingkreis, d.h. Strom und Spannung geraten in Schwingung und pendeln sich langsam am Endwert ein (trifft auf diese Schaltung zu, siehe 5)
- Fall 3: Aperiodischer Grenzfall, d.h. der Endwert wird ohne Schwingen am schnellsten erreicht.

## 2.5 Anfangswertproblem

### 2.5.1 Anfangsbedingungen

$$i_L(\tilde{t} = 0^+) = i_L(\tilde{t} = 0^-) = i_L(t = 2\tau_1) = 179,7 \text{ mA}$$

$$u_C(\tilde{t} = 0^+) = u_C(\tilde{t} = 0^-) = U_{C,0} = 25 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} u_C(\tilde{t} = 0^+) &= U_{C,0} = u_{R2} - u_{R3} = -Li'_L - R_3i_L - \frac{R_3L}{R_2}i'_L \\ &= i'_L \left[ -\left( L + \frac{R_3L}{R_2} \right) \right] - R_3i_L \\ U_{C,0} + R_3i_L &= i'_L \left[ -\left( L + \frac{R_3L}{R_2} \right) \right] \\ i'_L &= -\frac{U_{C,0} + R_3i_L}{L + \frac{R_3L}{R_2}} \\ &= -\frac{R_2(U_{C,0} + R_3i_L)}{R_2L + R_3L} \end{aligned}$$

### 2.5.2 Lösen von $K_1$ und $K_2$

$$i_L(\tilde{t} = 0) = e^0 [K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0)] = K_1$$

$$K_1 = 179,7 \text{ mA}$$

$$i'_L(\tilde{t}) = -\delta e^{-\delta\tilde{t}} [K_1 \cos(\Omega_d\tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d\tilde{t})] + e^{-\delta\tilde{t}} [-K_1\Omega_d \sin(\Omega_d\tilde{t}) + K_2\Omega_d \cos(\Omega_d\tilde{t})]$$

$$i'_L(\tilde{t} = 0) = -\delta \cdot 1 [K_1 \cdot 1 K_2 \cdot 0] + 1 \cdot [-K_1\Omega_d \cdot 0 + K_2\Omega_d \cdot 1]$$

$$= -\delta K_1 + K_2\Omega_d \stackrel{!}{=} -\frac{R_2(U_{C,0} + R_3i_L)}{R_2L + R_3L}$$

$$-\delta K_1 + K_2\Omega_d = -\frac{R_2(U_{C,0} + R_3i_L)}{R_2L + R_3L}$$

$$K_2\Omega_d = \delta K_1 - \frac{R_2(U_{C,0} + R_3i_L)}{R_2L + R_3L}$$

$$K_2 = \frac{\delta K_1 - \frac{R_2(U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}}{\Omega_d} = -304,6 \text{ mA}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} i_L(\tilde{t}) &= e^{-\delta \tilde{t}} [K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t})] \\ &= e^{-500 \text{ s}^{-1} \cdot \tilde{t}} [179,7 \text{ mA} \cos(\Omega_d \tilde{t}) - 304,6 \text{ mA} \sin(\Omega_d \tilde{t})] \end{aligned}$$

### 3 Plots und Simulationen

#### 3.1 Matlab-Plot $i_L(t)$

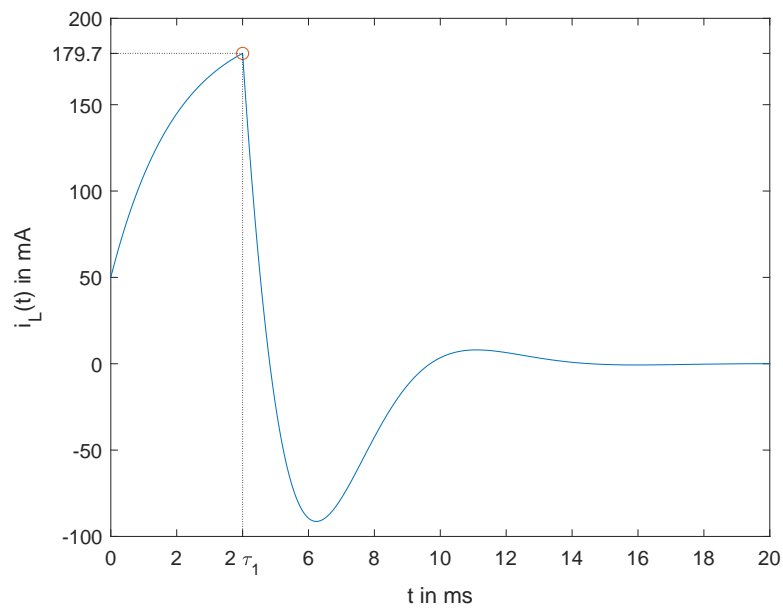


Abbildung 3: Matlab-Plot des Stroms  $i_L(t)$



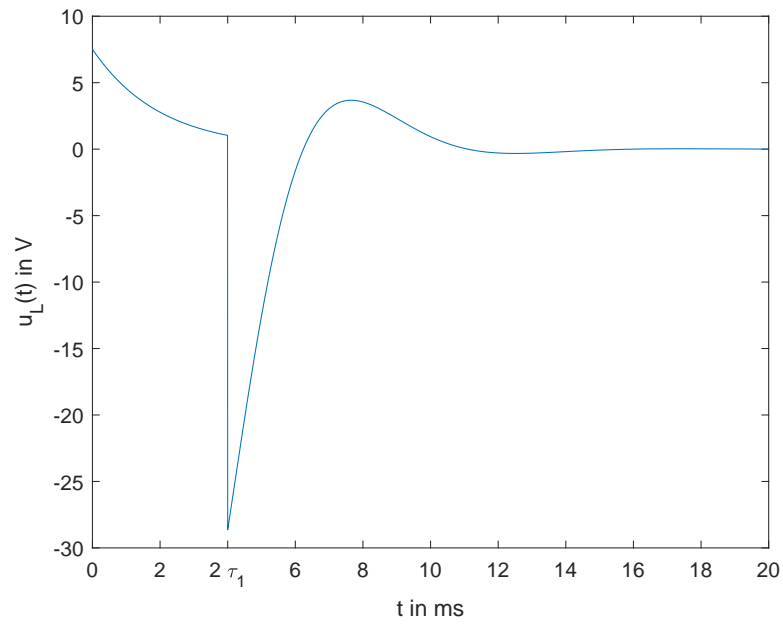


Abbildung 4: Matlab-Plot der Spannung  $u_L(t)$

### 3.2 PSpice-Plot $i_L(t)$ und $u_L(t)$

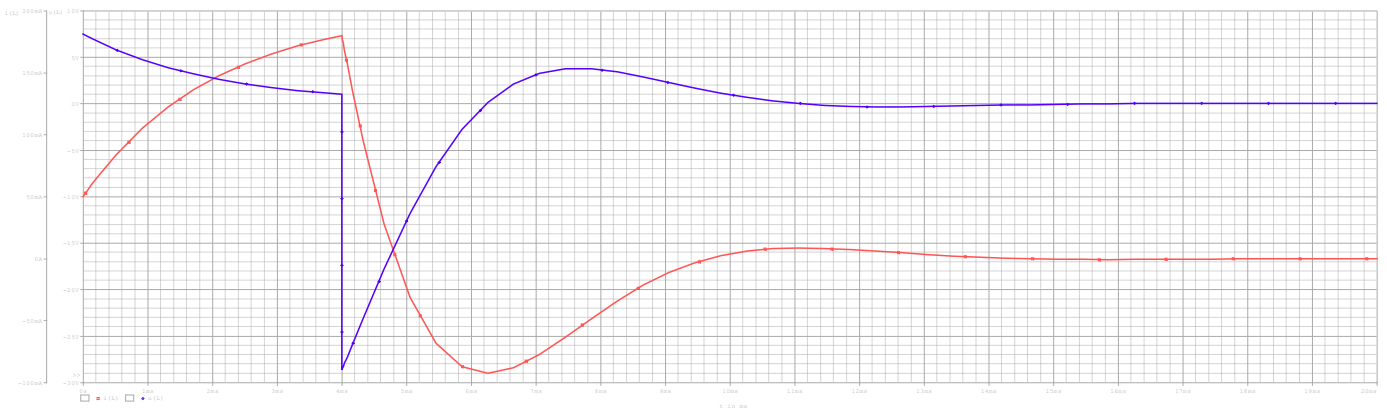


Abbildung 5: PSpice-Plot von  $i_L(t)$  und  $u_L(t)$

## 4 Matlab-Simulation

### 4.1 Skript

```

1 % Aufrufen der Matlab Umgebung.
2 clc
3 close all

```

```

4
5 %% Variablendefinition der bekannten Werte
6
7 r1 = 50;
8 r2 = 200;
9 r3 = 100;
10
11 C = 10*10^(-6);
12 L = 0.1;
13 U_0 = 10;
14 I_L0 = 50 * 10^(-3);
15 U_C0 = 25;
16 tau_1 = L/r1;
17
18 %% Bestimmen der Werte der Parameter delta, omega_0 und Omega_d
19
20 delta = ((r2 * r3 * C + L)/(2*(r2 * L * C + r3 * L * C)))
21 omega_0 = sqrt((r2)/(r2 * L * C + r3 * L * C))
22 Omega_d = sqrt((omega_0^2 - delta^2))
23
24 %% Berechnung von i_L(t_tilde), K_1, K_2
25
26 i_L_t_tilde = ((U_0-(U_0 - (r1 * I_L0)) * exp(-(2 * tau_1)/(tau_1)))/(r1))
27
28 K_1 = i_L_t_tilde
29 K_2 = ((delta * K_1 - (r2 * (U_C0 + r3 * i_L_t_tilde)) / (r2 * L + r3 * L)) / (
    Omega_d))
30
31 %% Berechnung von i_L / u_L und Plot
32
33 %Define time arrays
34 t = linspace(0,0.02, 1000000);
35 t_label = linspace(0,0.02, 11);
36 A_label = linspace(-0.1,0.2, 7);
37 A_label = sort([A_label, 0.1797]);
38 axlims = [0 0.02 -0.1 -0.2]; %[x-min, x-max, y-min, y-max] axis limits
39
40
41 % Plot of u_L
42 figure('Name','Spannung_der_Spule','NumberTitle','off');
43 plot(t, (((-1)*(heaviside(t-2*tau_1)-1)) .* u_L_t_1(t, U_0, r1, I_L0, tau_1, L)
    ...
44 + heaviside(t-2*tau_1) .* u_L_t_2(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, L, tau_1)));
45 xlabel('t_in_ms')
46 ylabel('{u_L(t)}_in_V')
47
48 xticks(t_label)
49 xticklabels({'0','2','2\tau_1','6','8','10','12','14','16','18','20'})
50
51
52 % Plot of i_L
53 figure('Name','Strom_der_Spule','NumberTitle','off');
54 plot(t, (((-1)*(heaviside(t-2*tau_1)-1)) .* i_L_t_0(t, U_0, r1, tau_1, I_L0) ...
55 + heaviside(t-2*tau_1) .* (i_L_t_1(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, tau_1)));
56 hold on
57 point = [2*tau_1, 0.1797];
58 plot(point(1), point(2), 'o')
59 plot([point(1), point(1)], [axlims(3), point(2)], 'k:') %vertical line
60 plot([axlims(1), point(1)], [point(2), point(2)], 'k:') %horizontal line
61
62 xlabel('t_in_ms')
63 ylabel('{i_L(t)}_in_mA')

```

```

64
65 xticks(t_label)
66 xticklabels({'0','2','2\tau_1','6','8','10','12','14','16','18','20'})
67 yticks(A_label)
68 yticklabels({'-100',' -50','0','50','100','150','179.7','200'})
69
70
71
72 %% Functions of i_L / u_L
73 function i_L_t_1 = i_L_t_1(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, tau_1)
74     i_L_t_1 = exp(-((t-2*tau_1) * delta)) .* (K_1 * cos(Omega_d * (t-2*tau_1)) +
75         K_2 * sin(Omega_d * (t-2*tau_1)));
76 end
77 function u_L_t_1 = u_L_t_1(t, U_0, r1, I_L0, tau_1, L)
78     u_L_t_1 = (U_0 / r1 + (U_0 - r1 * I_L0) / (r1 * tau_1) .* exp(-t / tau_1)) * L
79     ;
80 end
81 function u_L_t_2 = u_L_t_2(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, L, tau_1)
82     t = (t-2*tau_1);
83     u_L_t_2 = L * (-delta * exp(-delta * t) .* (K_1 * cos(Omega_d * t) + K_2 * sin
84         (Omega_d * t)) + exp(-delta * t) .* (-K_1 * Omega_d * sin(Omega_d * t) +
85         K_2 * Omega_d * cos(Omega_d * t)));
86 end
87 function i_L_t_0 = i_L_t_0(t, U_0, r1, tau_1, I_L0)
88     i_L_t_0 = ((U_0-(U_0 - (r1 * I_L0)) * exp(-(t)/(tau_1)))/(r1));
89 end

```

## 4.2 Konsolenoutput

```

1 delta =
2
3     "500 1/s"
4
5
6 omega_0 =
7
8     "816.4966 1/s"
9
10
11 Omega_d =
12
13     "645.4972 1/s"
14
15
16 i_L_t_tilde =
17
18     "0.1797 A"
19
20
21 K_1 =
22
23     "0.1797 A"
24
25
26 K_2 =
27
28     "-0.3046 A"

```