Protokoll Übung 2

David Keller, Moritz Woltron, Matthias Fottner

Inhaltsverzeichnis

1 Schaltplan mit allen Strömen, Spannungen und Knoten **2**

2 Aufstellen des Gleichungssystems in Matrixform durch "hinschauen" **3**
2.1 Widerstände 3
2.2 Unabhängige Stromquelle $S3$ 3
2.3 Unabhängige Spannungsquelle $S2$ ($\rightarrow$ +1 Gleichung) 4
2.4 Stromgesteuerte Spannungsquelle $S1$ ($\rightarrow$ +1 Gleichung) 5
2.5 Ausrechnen der Unbekanntenvektors x 6

3 Thevenin-Quelle bezüglich der Klemmen a und b **6**
3.1 U_{Th} 6
3.2 I_{KS} 7
3.3 R_{Th} mithilfe von U_{Th} und I_{KS} 8
3.4 R_{Th} mithilfe von Testspannung U_T 8

4 Simulation in PSpice **11**
4.1 Originalschaltung 11
4.2 Thevenin-Quelle 11

1 Schaltplan mit allen Strömen, Spannungen und Knoten

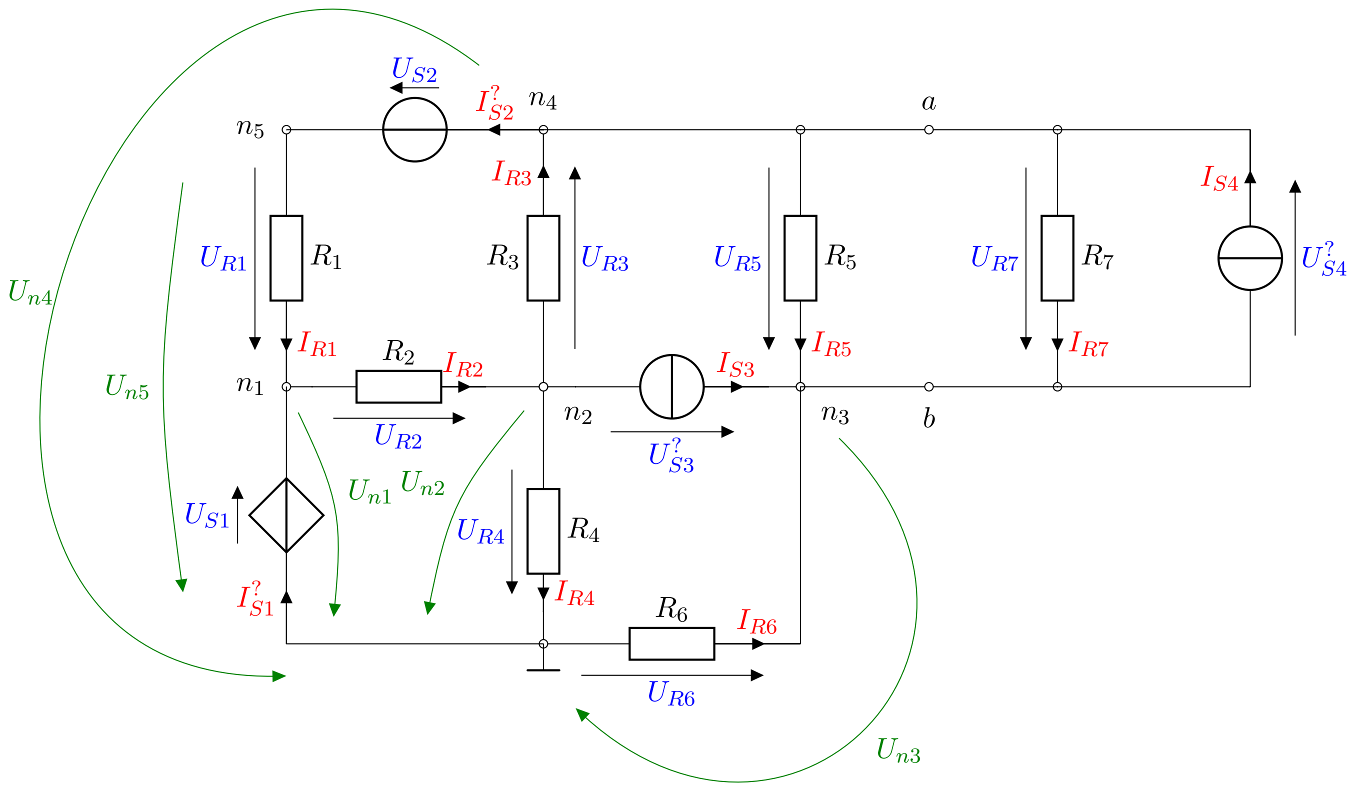

Abb. 1: Netzwerk mit allen eingezeichneten Strömen, (Knoten-)spannungen und Knoten

2 Aufstellen des Gleichungssystems in Matrixform durch "hinschauen"

2.1 Widerstände

Zuerst wird die Admittanzmatrix durch hinschauen bestimmt. Dazu werden auf der Hauptdiagonale alle den jeweiligen Knoten umgebenden Leitwerte addiert. Auf der Nebendiagonale werden die Werte der zwischen den Knoten liegenden Widerstände als negativer Leitwert eingetragen. Der Unbekanntenvektor besteht aus den Knotenspannungen, der Ergebnisvektor beträgt 0.

$$\text{Es gilt:} \quad G_n = \frac{1}{R_n}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} n1 & n2 & n3 & n4 & n5 \end{array} \\
\begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ n5 \end{array} &
\left[\begin{array}{c:c:c:c:c}
G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -G_1 \\ \hdashline
-G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & G_5 + G_6 & -G_5 & 0 \\ \hdashline
0 & -G_3 & -G_5 & G_3 + G_5 & 0 \\ \hdashline
-G_1 & 0 & 0 & 0 & G_1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

2.2 Unabhängige Stromquelle $S3$

Der bekannte Strom I_{S3} der Stromquelle $S3$ fließt aus Knoten $n2$ (positiv) in den Knoten $n3$ (negativ)(vgl. Abb. 2). Bringt man nun die Größe auf die andere Seite des Gleichungssystems, so muss I_{S3} im Lösungsvektor negativ bei $n2$ und positiv bei $n3$ sein.

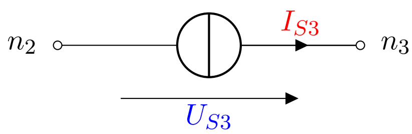

Abb. 2: freigestellte Stromquelle $S3$

Es ergibt sich folgende Änderung im Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} n1 & n2 & n3 & n4 & n5 \end{array} \\ \begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ n5 \end{array} & \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -G_1 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_5 + G_6 & -G_5 & 0 \\ 0 & -G_3 & -G_5 & G_3 + G_5 & 0 \\ -G_1 & 0 & 0 & 0 & G_1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{S3} \\ I_{S3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2.3 Unabhängige Spannungsquelle $S2$ ($\rightarrow +1$ Gleichung)

Bei der unabhängigen Spannungsquelle kommt mit dem Strom $I_{S2}^?$ eine unbekannte Größe hinzu. Folglich muss auch eine weitere Gleichung im Gleichungssystem ergänzt werden. Diese erhält man, indem die bekannte Quellspannung U_{S2} mithilfe der Knotenspannungen ausgedrückt wird (vgl. Abb. 3):

$$U_{S2} = U_{n4} - U_{n5}$$

Beim Hinzufügen von $I_{S2}^?$ in den Unbekanntenvektor, muss auch die Strombilanz der Knoten $n4$ (positiv) und $n5$ (negativ) angepasst werden.

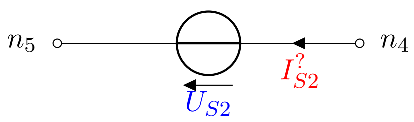

Abb. 3: freigestellte Spannungsquelle $S2$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} n1 & n2 & n3 & n4 & n5 & I_{S2}^? \end{array} \\ \begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ n5 \\ I_{S2}^? \end{array} & \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -G_1 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_5 + G_6 & -G_5 & 0 & 0 \\ 0 & -G_3 & -G_5 & G_3 + G_5 & 0 & 1 \\ -G_1 & 0 & 0 & 0 & G_1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \\ I_{S2}^? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{S3} \\ I_{S3} \\ 0 \\ 0 \\ U_{S2} \end{Bmatrix}$$

2.4 Stromgesteuerte Spannungsquelle $S1$ ($\rightarrow +1$ Gleichung)

Bei der stromgesteuerten Spannungsquelle $S1$ kommt die unbekannte Größe $I_{S1}^{?}$ hinzu. Folglich muss auch hier das Gleichungssystem um eine Gleichung erweitert werden.

$$
\begin{aligned}
U_{S1} &= \alpha \cdot I_{R3} \\
I_{R3} &= G_3(U_{n2} - U_{n4}) \\
U_{S1} &= -U_{n1} \\
\implies -U_{n1} &= \alpha \cdot G_3(U_{n2} - U_{n4}) \\
0 &= \alpha \cdot G_3(U_{n2} - U_{n4}) + U_{n1}
\end{aligned}
$$

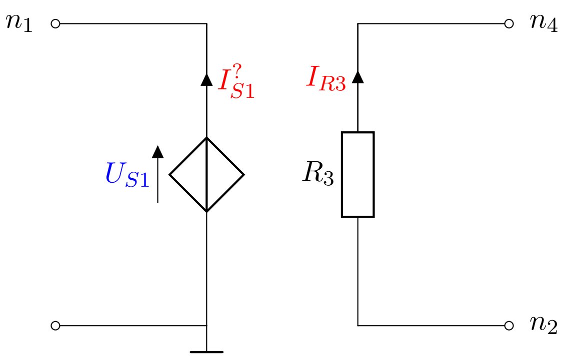

Abb. 4: freigestellte stromgesteuerte Spannungsquelle $S1$ mit Steuerungsstrom I_{R3}

$$
\underbrace{\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} n1 & n2 & n3 & n4 & n5 & I_{S2}^{?} & I_{S1}^{?} \end{array} \\
\begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \\ n4 \\ n5 \\ I_{S2}^{?} \\ I_{S1}^{?} \end{array} &
\begin{bmatrix}
G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -G_1 & 0 & -1 \\
-G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & 0 & -G_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & G_5 + G_6 & -G_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -G_3 & -G_5 & G_3 + G_5 & 0 & 1 & 0 \\
-G_1 & 0 & 0 & 0 & G_1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & \alpha G_3 & 0 & -\alpha G_3 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}}_{\text{A}}
\underbrace{\begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \\ I_{S2}^{?} \\ I_{S1}^{?} \end{Bmatrix}}_{\text{x}}
=
\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{S3} \\ I_{S3} \\ 0 \\ 0 \\ U_{S2} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{b}}
$$

2.5 Ausrechnen der Unbekanntenvektors x

Indem man beide Seiten der Gleichung mit der Inversen A^{-1} multipliziert, kann man nach x auflösen.

$$x = A^{-1}b$$

Man erhält mithilfe von Matlab für x:

$$x = \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \\ I_{S2}^{?} \\ I_{S1}^{?} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5,6140\,\mathrm{V} \\ -0,1754\,\mathrm{V} \\ 23,1579\,\mathrm{V} \\ 20,8772\,\mathrm{V} \\ 0,8772\,\mathrm{V} \\ -0,9474\,\mathrm{A} \\ 1,5263\,\mathrm{A} \end{Bmatrix}$$

3 Thevenin-Quelle bezüglich der Klemmen a und b

3.1 U_{Th}

Die Spannung U_{Th} entspricht der Leerlaufspannung an den Klemmen a und b ($U_{ab,LL}$), welche der Spannung U_{R5} entspricht (vgl. Abb. 5). Somit kann U_{Th} mithilfe der gewonnenen Knotenspannungen aus Kapitel 2.5 berechnet werden. Es gilt:

$$U_{Th} = U_{ab,LL} = U_{R5} = U_{n4} - U_{n3} = 20,8772\,\mathrm{V} - 23,1579\,\mathrm{V} = -2,2807\,\mathrm{V}$$

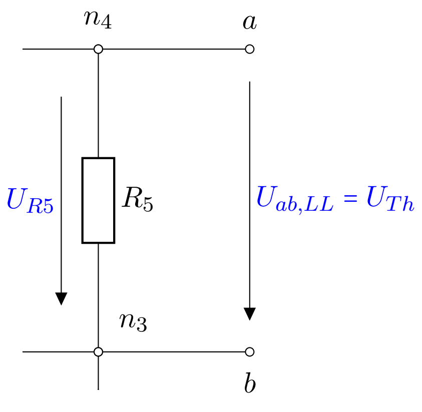

Abb. 5: Spannungsbetrachtung an den Klemmen a und b

3.2 I_{KS}

Bei I_{KS} handelt es sich um eine weiter Unbekannte, deshalb muss das Gleichungssystem um eine weitere Gleichung erweitert werden. Um den Kurzschluss zu simulieren, kann an den Klemmen a und b eine ideale Spannungsquelle mit 0 V Spannungsabfall angenommen werden (vgl. Abb. 6). Dieser Spannungsabfall entspricht U_{R5}, und somit kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$U_{R5} = U_{KS} = U_{n4} - U_{n3} = 0$$

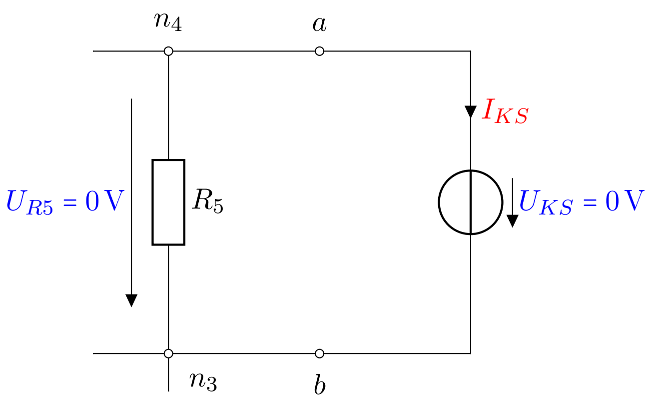

Abb. 6: Simulation des Kurzschlussstroms I_{KS}

Der Kurzschlussstrom I_{KS} muss als ausfließender Strom in Knoten n_4 und als zufließender Strom in Knoten n_3 ergänzt werden. Insgesamt ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$
\underbrace{\begin{array}{c|cccccccc|}
 & n1 & n2 & n3 & n4 & n5 & I_{S2}^{?} & I_{S1}^{?} & I_{KS} \\
\hline
n1 & G_1+G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -G_1 & 0 & -1 & 0 \\
n2 & -G_2 & G_2+G_3+G_4 & 0 & -G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
n3 & 0 & 0 & G_5+G_6 & -G_5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
n4 & 0 & -G_3 & -G_5 & G_3+G_5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
n5 & -G_1 & 0 & 0 & 0 & G_1 & -1 & 0 & 0 \\
I_{S2}^{?} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
I_{S1}^{?} & 1 & \alpha G_3 & 0 & -\alpha G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
I_{KS} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}}_{\text{A}}
\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \\ I_{S2}^{?} \\ I_{S1}^{?} \\ I_{KS} \end{pmatrix}}_{\text{x}}\right\}
=
\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -I_{S3} \\ I_{S3} \\ 0 \\ 0 \\ U_{S2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{b}}\right\}
$$

Bei erneutem Auflösen nach x und Ausrechnen der Gleichung mit Matlab erhält man für x:

$$x = \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \\ I_{S2}^{?} \\ I_{S1}^{?} \\ I_{KS} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5,7143\,\mathrm{V} \\ 1,7764 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{V} \\ 21,4286\,\mathrm{V} \\ 21,4286\,\mathrm{V} \\ 1,4286\,\mathrm{V} \\ -0,8571\,\mathrm{A} \\ 1,4286\,\mathrm{A} \\ -0,5714\,\mathrm{A} \end{Bmatrix}$$

Der Kurzschlussstrom I_{KS} entspricht somit $571,4\,\mathrm{mA}$.

3.3 R_{Th} mithilfe von U_{Th} und I_{KS}

Der Innenwiderstand R_{Th} der Thevenin-Quelle entspricht dank der Quellenäquivalenz von Norton- und Thevenin-Quelle dem Quotienten aus U_{Th} und I_{KS}. Somit ergibt sich:

$$R_{Th} = R_N = \frac{U_{Th}}{I_{KS}} = \frac{-2,2807\,\mathrm{V}}{-0,5714\,\mathrm{A}} = 3,9912\,\Omega$$

3.4 R_{Th} mithilfe von Testspannung U_T

Um den Innenwiderstand der Thevenin-Quelle zu erhalten, werden zuerst alle unabhängigen Quellen im Netzwerk durch deren idealen Innenwiderstand ersetzt. Zusätzlich wird an den Klemmen a und b eine frei wählbare Testspannung U_T angelegt (vgl. Abb. 7). Daraus ergibt sich ein unbekannter Teststrom $I_T^?$, der vom Knoten n_4 in den Knoten n_3 fließt. Das Gleichungssystem aus Kapitel 2.4 muss somit um eine weitere Gleichung ergänzt werden

$$U_T = U_{R5} = U_{n4} - U_{n3}$$

und man erhält folgende Matrixgleichung:

$$
\underbrace{
\begin{array}{c|cccccccc}
 & n1 & n2 & n3 & n4 & n5 & I_{S2}^{?} & I_{S1}^{?} & I_{T}^{?} \\
\hline
n1 & G_1+G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -G_1 & 0 & -1 & 0 \\
n2 & -G_2 & G_2+G_3+G_4 & 0 & -G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
n3 & 0 & 0 & G_5+G_6 & -G_5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
n4 & 0 & -G_3 & -G_5 & G_3+G_5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
n5 & -G_1 & 0 & 0 & 0 & G_1 & -1 & 0 & 0 \\
I_{S2}^{?} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
I_{S1}^{?} & 1 & \alpha G_3 & 0 & -\alpha G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
I_{T}^{?} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
}_{\text{A}}
\underbrace{
\begin{Bmatrix}
U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \\ U_{n5} \\ I_{S2}^{?} \\ I_{S1}^{?} \\ I_{T}^{?}
\end{Bmatrix}
}_{\text{x}}
=
\underbrace{
\begin{Bmatrix}
0 \\ -I_{S3}=0 \\ I_{S3}=0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{S2}=0 \\ 0 \\ U_T
\end{Bmatrix}
}_{\text{b}}
$$

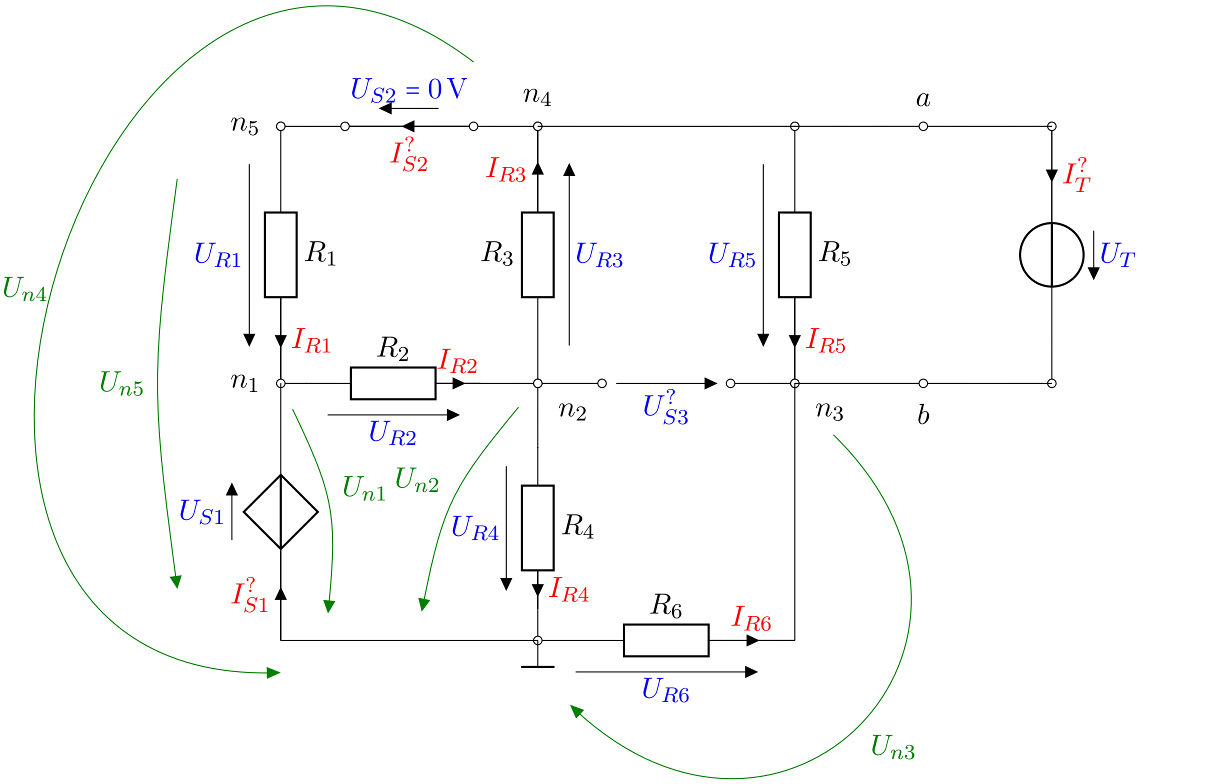

Abb. 7: Netzwerk mit idealen Innenwiderständen der unabhängigen Quellen und der Testspannung U_T

Legt man nun die Testspannung U_T willkürlich auf 1 V fest, so kann man das Gleichungssystem nach dem x-Vektor auflösen und erhält mithilfe Matlabs den Wert des Stromes $I_T^?$.

$$I_T^? = -0,2505\,\mathrm{A}$$

Die Situation kann wie in Abbildung 8 dargestellt werden:

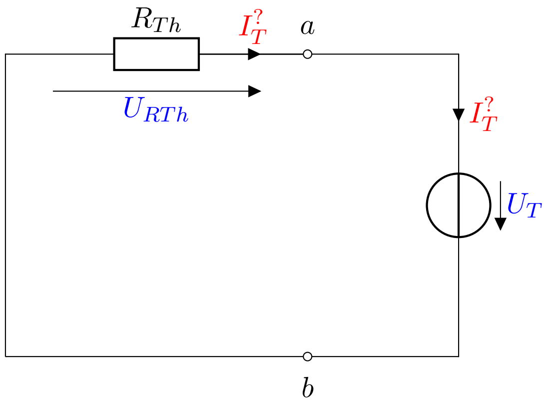

Abb. 8: Testspannung am Innenwiderstand der Thevenin-Quelle

Es lässt sich also folgende Maschengleichung bestimmen:

$$U_{RTh} = -U_T = -1\,\mathrm{V}$$

und letztlich der Widerstand R_{Th} mithilfe des ohm'schen Gesetzes:

$$R_{Th} = \frac{U_{RTh}}{I_T^?} = \frac{-1\,\mathrm{V}}{-0,2505\,\mathrm{A}} = 3,9912\,\Omega$$

Dieser Wert deckt sich mit dem ausgerechneten Wert für R_{Th} aus Kapitel 3.3.

4 Simulation in PSpice

4.1 Originalschaltung

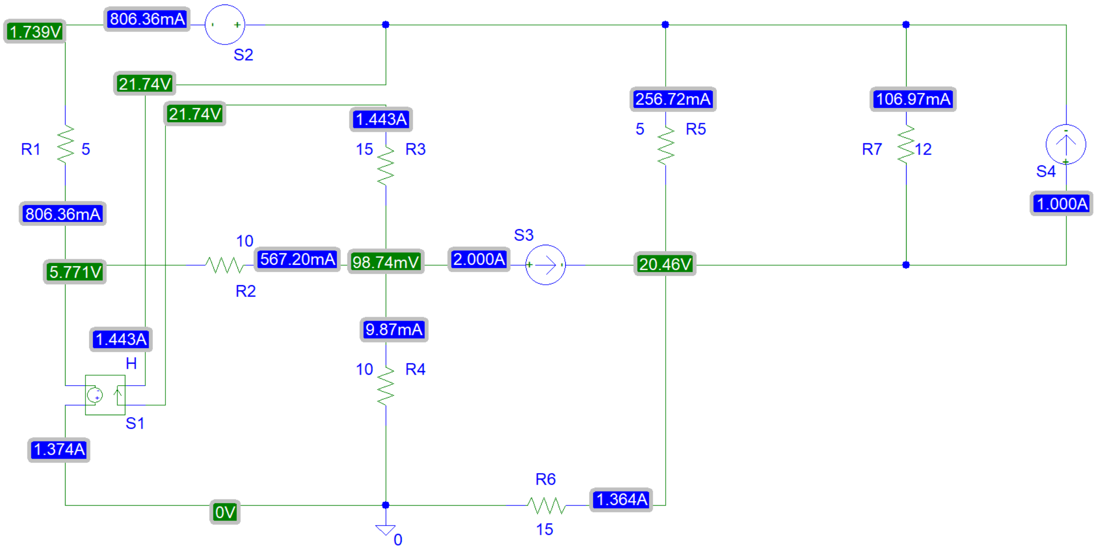

Abb. 9: PSpice-Simulation der Originalschaltung (vgl. Abb. 1)

4.2 Thevenin-Quelle

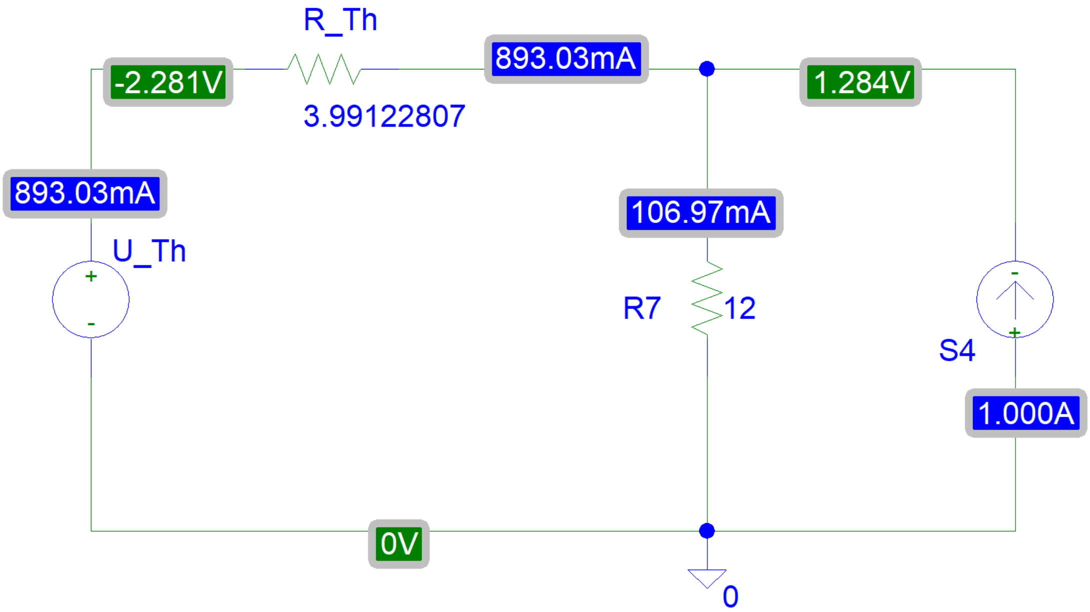

Abb. 10: PSpice-Simulation der Thevenin-Ersatzschaltung (vgl. Abb. 1)