Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik

Elektrische Netzwerke und Mehrtore
Übung

Wintersemester 2020

Protokoll Übung 3: Schaltvorgang Kondensator

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 18. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $0 \le t \le 2\tau_1$

1.1 Schaltbild des Netzwerks für $0 \le t \le 2\tau_1$

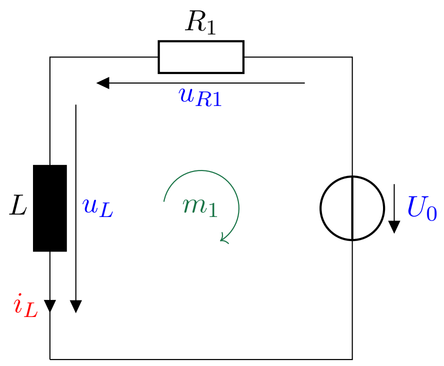


Abbildung 1: Netzwerk im Zeitintervall $0 \le t \le 2\tau_1$.

1.2 Aufstellen der DGL mithilfe der allgemeinen Lösungsformel

Da es sich um ein LR-Netzwerk handelt, lässt sich τ_1 folgendermaßen bestimmen:

$$\frac{1}{\lambda} = \tau_1 = \frac{L}{R} = \frac{100\,\mathrm{mH}}{50\,\Omega} = 2\,\mathrm{ms}$$

Weiters lässt sich durch einsetzen in die allgemeine Lösungsformel für Transiente Vorgänge mit einem Energiespeicher der Strom i_L für $0 \le t \le 2\tau_1$ ermitteln.

Allgemeine Lösungsformel:

$$x(t) = x_f + [\,x_0 - x_f\,] \cdot e^{(-\frac{t-t_0}{\tau})}$$

Das Bauteilgesetz der Spule besagt, dass der Strom eine stetige Größe ist, während die Spannung „Sprünge“ aufweisen kann. Aufgrund dieser Tatsache, darf man die für obige Lösungsformel benötigten Werte wie folgt annehmen:

$$x_f = 0\,\mathrm{V}$$

$$x_0 = U_0 = 10\,\mathrm{V}$$

$$u_{R1}(0) = R_1 * I_{L_0} = 2.5\,\mathrm{V}$$

Durch anschließendes Einsetzen erhält man:

$$u_L = 0 + [\,U_0 - u_{R1}(0) - 0\,] \cdot e^{(-\frac{t}{\tau_1})} = [\,10\,\mathrm{V} - 2.5\,\mathrm{V}\,] \cdot e^{(-\frac{t}{2\,\mathrm{ms}})}$$

Masche m_1:

$$u_{R_1} = U_0 - u_L$$

$$R_1 * i_L = U_0 - u_L$$

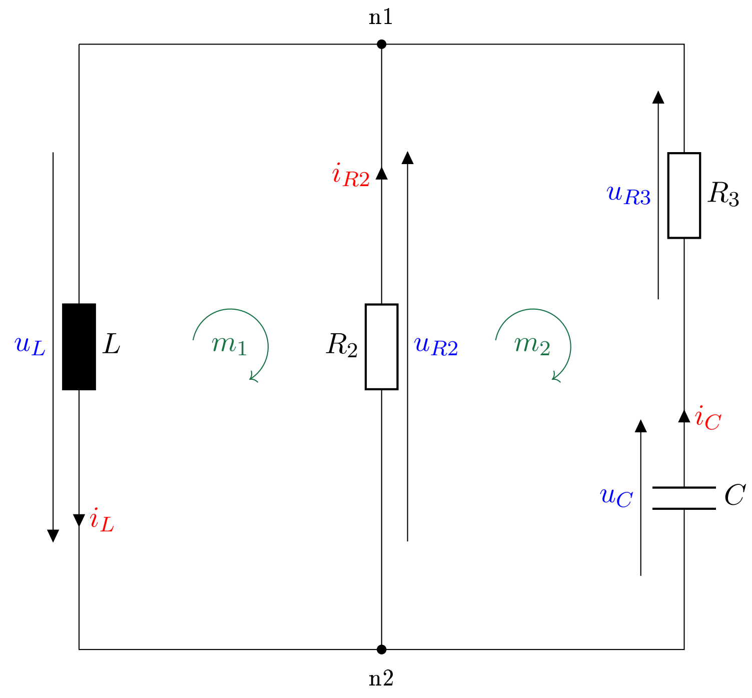
$$i_L = \frac{U_0 - u_L}{R_1} = \frac{U_0 - (U_0 - R_1 \cdot I_{L_0}) \cdot e^{(-\frac{t}{\tau_1})}}{R_1}$$

$$i_L(t = 2\tau_1) = \frac{10\,\mathrm{V} - (7,5 \cdot e^{(-\frac{t}{2\,\mathrm{ms}})})}{50\,\Omega} = 0,2\,\mathrm{A} - 0,15\,\mathrm{A} \cdot e^{-(\frac{t}{2\,\mathrm{ms}})}$$

$$i_L(t = 2\tau_1) = 179,7\,\mathrm{mA}$$

2 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

2.1 Schaltbild des Netzwerks für $t > 2\tau_1$



2.2 Aufstellen der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschengleichungen

$$n_1: \quad i_L - i_{R2} - i_C = 0$$

$$n_2: \quad i_C + i_{R2} - i_L = 0$$

$$m_1: \quad -u_{R2} - u_L = 0$$

$$m_2: \quad u_{R2} - u_{R3} - u_C = 0$$

2.3 Herleitung der DGL 2. Ordnung von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

$$-i_C - i_{R2} + i_L = 0$$

$$-C{u_C}' - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$\begin{aligned} u_C &= u_{R2} - u_{R3} \\ &= -u_L - u_{R3} \\ &= -(Li'_L + u_{R3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies C\frac{d}{dt}\left[Li'_L + u_{R3}\right] - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\ CLi''_L + \frac{d}{dt}CR_3 i_C - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\ CLi''_L + \frac{d}{dt}CR_3(i_L - i_{R2}) - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\ CLi''_L + CR_3 i'_L - \frac{d}{dt}\left(CR\frac{u_{R2}}{R_2}\right) - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\ CLi''_L + CR_3 i'_L + \frac{CR_3L}{R_2}i''_L - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\ CLi''_L + CR_3 i'_L + \frac{CR_3L}{R_2}i''_L + \frac{L}{R_2}i'_L + i_L &= 0 \\ i''_L\left(CL + \frac{CR_3L}{R_2}\right) + i'_L\left(CR_3 + \frac{L}{R_2}\right) + i_L &= 0 \end{aligned}$$

$$i_L'' + i_L'\left(\frac{R_3C + \frac{L}{R_2}}{LC + \frac{R_3LC}{R_2}}\right) + i_L\left(\frac{1}{LC + \frac{R_3LC}{R_2}}\right) = 0$$

$$i_L'' + i_L'\underbrace{\left(\frac{R_2R_3C + L}{R_2LC + R_3LC}\right)}_{=:2\delta} + i_L\underbrace{\left(\frac{R_2}{R_2LC + R_3LC}\right)}_{=:\omega_0^2} = 0$$

Ansatz: $\tilde{t} = t - 2\tau_1$

$$i_L(\tilde{t}) = e^{\lambda\tilde{t}}$$

$$i_L'(\tilde{t}) = \lambda e^{\lambda\tilde{t}}$$

$$i_L''(\tilde{t}) = \lambda^2 e^{\lambda\tilde{t}}$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 e^{\lambda\tilde{t}} + 2\delta\lambda e^{\lambda\tilde{t}} + \omega_0^2 i_L = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{R_2R_3C + L}{R_2LC + R_3LC}\right)^2 - \frac{R_2}{R_2LC + R_3LC} = -416667\frac{1}{s^2} < 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(-1)\underbrace{\omega_0^2 - \delta^2}_{\Omega_d}}$$

$$= -\delta \pm j\Omega_d$$

Lösung:

$$i_L(\tilde{t}) = e^{-\delta\tilde{t}}\left[\tilde{K}_1 e^{j\Omega_d\tilde{t}} + \tilde{K}_2 e^{-j\Omega_d\tilde{t}}\right] = e^{-j\delta\tilde{t}}\left[K_1\cos(\Omega_d\tilde{t}) + K_2\sin(\Omega_d\tilde{t})\right]$$

2.4 Interpretation der Parameter δ, ω_0 und Ω_d

2.5 Anfangswertproblem

2.5.1 Anfangsbedingungen

$$i_L(\tilde{t} = 0^+) = i_L(\tilde{t} = 0^-) = i_L(t = 2\tau_1) = 179{,}7\,\mathrm{mA}$$

$$u_C(\tilde{t} = 0^+) = u_C(\tilde{t} = 0^-) = U_{C,0} = 25\,\mathrm{V}$$

$$
\begin{aligned}
u_C(\tilde{t}=0^+) = U_{C,0} = u_{R2} - u_{R3} &= -Li'_L - R_3 i_L - \frac{R_3 L}{R_2} i'_L \\
&= i'_L \left[-\left(L + \frac{R_3 L}{R_2} \right) \right] - R_3 i_L \\
U_{C_0} + R_3 i_L &= i'_L \left[-\left(L + \frac{R_3 L}{R_2} \right) \right] \\
i'_L &= -\frac{U_{C,0} + R_3 i_L}{L + \frac{R_3 L}{R_2}} \\
&= -\frac{R_2(U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}
\end{aligned}
$$

2.5.2 Lösen von K_1 und K_2

$$
\begin{aligned}
i_L(\tilde{t}=0) &= e^0 \left[K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0) \right] = K_1 \\
K_1 &= 179{,}7\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i'_L(\tilde{t}) &= -\delta e^{-\delta \tilde{t}} \left[K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t}) \right] + e^{-\delta \tilde{t}} \left[-K_1 \Omega_d \sin(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \Omega_d \cos(\Omega_d \tilde{t}) \right] \\
i'_L(\tilde{t}=0) &= -\delta \cdot 1 \left[K_1 \cdot 1 K_2 \cdot 0 \right] + 1 \cdot \left[-K_1 \Omega_d \cdot 0 + K_2 \Omega_d \cdot 1 \right] \\
&= -\delta K_1 + K_2 \Omega_d \stackrel{!}{=} -\frac{R_2(U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\delta K_1 + K_2 \Omega_d &= -\frac{R_2(U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L} \\
K_2 \Omega_d &= \delta K_1 - \frac{R_2(U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L} \\
K_2 &= \frac{\delta K_1 - \frac{R_2(U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L}}{\Omega_d} = -304{,}6\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
i_L(\tilde{t}) &= e^{-\delta \tilde{t}} \left[K_1 \cos(\Omega_d \tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d \tilde{t}) \right] \\
&= e^{-500 s^{-1} \cdot \tilde{t}} \left[179{,}7\,\mathrm{mA} \cos(\Omega_d \tilde{t}) - 304{,}6\,\mathrm{mA} \sin(\Omega_d \tilde{t}) \right]
\end{aligned}
$$

3 Plots und Simulationen

3.1 Matlab-Plot $i_L(t)$

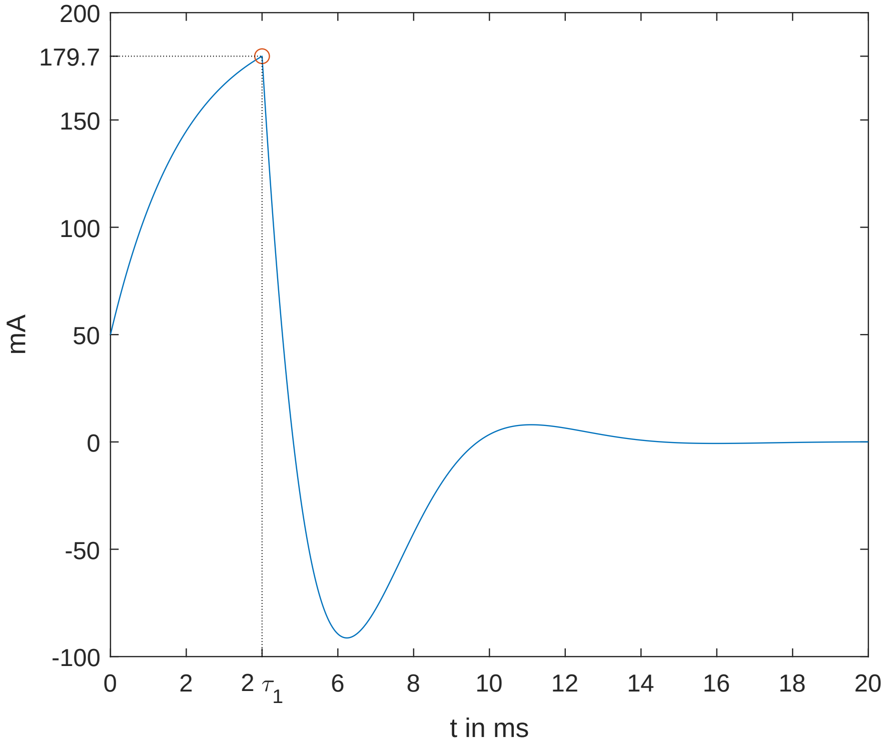


Abbildung 2: Matlab-Plot des Stroms i_L

3.2 PSpice-Plot $i_L(t)$ und $u_L(t)$