Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik

Elektrische Netzwerke und Mehrtore
Übung

Wintersemester 2020

Protokoll Übung 3: Transiente Vorgänge

Gruppe: 04

Gruppenteilnehmer:

1. Matthias Fottner
2. David Keller
3. Moritz Woltron

Vortragende: Helena Grabner

Graz, am 18. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $0 \leq t \leq 2\tau_1$

1.1 Schaltbild des Netzwerks für $0 \leq t \leq 2\tau_1$

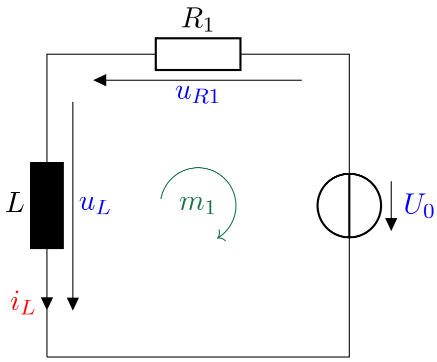

Abbildung 1: Netzwerk im Zeitintervall $0 \leq t \leq 2\tau_1$.

1.2 Aufstellen der DGL mithilfe der allgemeinen Lösungsformel

Da es sich um ein LR-Netzwerk handelt, lässt sich τ_1 folgendermaßen bestimmen:

$$\frac{1}{\lambda} = \tau_1 = \frac{L}{R} = \frac{100\,\text{mH}}{50\,\Omega} = 2\,\text{ms}$$

Weiters lässt sich durch einsetzen in die allgemeine Lösungsformel für Transiente Vorgänge mit einem Energiespeicher der Strom i_L für $0 \leq t \leq 2\tau_1$ ermitteln.

Allgemeine Lösungsformel:

$$x(t) = x_f + [\, x_0 - x_f\,] \cdot e^{(-\frac{t-t_0}{\tau})}$$

Das Bauteilgesetz der Spule besagt, dass der Strom eine stetige Größe ist, während die Spannung „Sprünge“ aufweisen kann. Aufgrund dieser Tatsache, darf man die für obige Lösungsformel benötigten Werte wie folgt annehmen:

$$x_f = 0\,\text{V}$$

$$x_0 = U_0 = 10\,\text{V}$$

$$u_{R1}(0) = R_1 * I_{L_0} = 2.5\,\text{V}$$

Durch anschließendes Einsetzen erhält man:

$$u_L = 0 + [\,U_0 - u_{R1}(0) - 0] \cdot e^{(-\frac{t}{\tau_1})} = [\,10\,\mathrm{V} - 2.5\,\mathrm{V}] \cdot e^{(-\frac{t}{2\,\mathrm{ms}})}$$

Masche m_1:

$$u_{R_1} = U_0 - u_L$$

$$R_1 * i_L = U_0 - u_L$$

$$i_L = \frac{U_0 - u_L}{R_1} = \frac{U_0 - (U_0 - R_1 \cdot I_{L_0}) \cdot e^{(-\frac{t}{\tau_1})}}{R_1}$$

$$i_L(t = 2\tau_1) = \frac{10\,\mathrm{V} - (7,5 \cdot e^{(-\frac{t}{2\,\mathrm{ms}})})}{50\,\Omega} = 0,2\,\mathrm{A} - 0,15\,\mathrm{A} \cdot e^{-(\frac{t}{2\,\mathrm{ms}})}$$

$$i_L(t = 2\tau_1) = 179,7\,\mathrm{mA}$$

2 Ermitteln der DGL von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

2.1 Schaltbild des Netzwerks für $t > 2\tau_1$

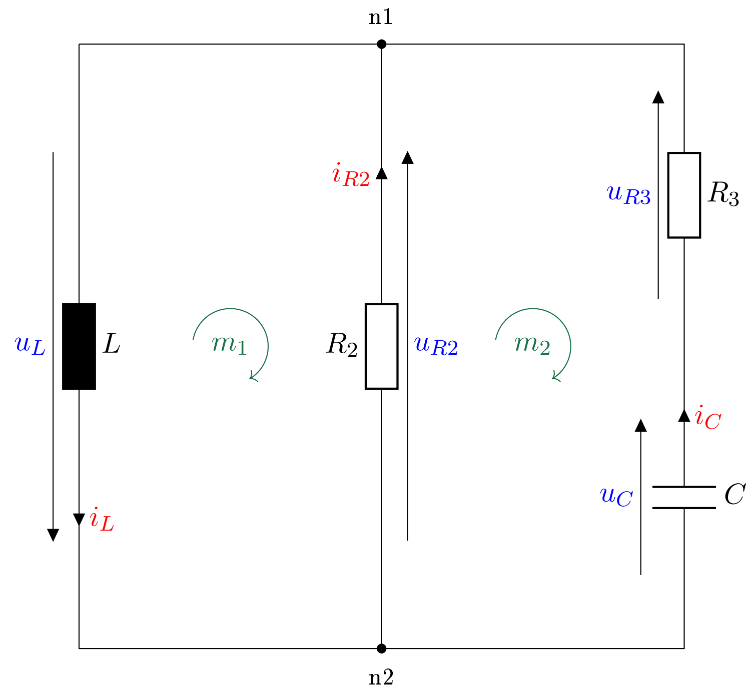

Abbildung 2: Netzwerk im Zeitintervall $t > 2\tau_1$.

2.2 Aufstellen der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschengleichungen

$$n_1: \qquad i_L - i_{R2} - i_C = 0$$
$$n_2: \qquad i_C + i_{R2} - i_L = 0$$

$$m_1: \qquad -u_{R2} - u_L = 0$$
$$m_2: \qquad u_{R2} - u_{R3} - u_C = 0$$

2.3 Herleitung der DGL 2. Ordnung von $i_L(t)$ für $t > 2\tau_1$

$$-i_C - i_{R2} + i_L = 0$$
$$-C{u_C}' - \frac{u_{R2}}{R_2} + i_L = 0$$

$$\begin{aligned} u_C &= u_{R2} - u_{R3} \\ &= -u_L - u_{R3} \\ &= -(Li'_L + u_{R3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow C\frac{d}{dt}\left[Li'_L + u_{R3}\right] - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\
CLi''_L + \frac{d}{dt}CR_3 i_C - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\
CLi''_L + \frac{d}{dt}CR_3(i_L - i_{R2}) - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\
CLi''_L + CR_3 i'_L - \frac{d}{dt}\left(CR\frac{u_{R2}}{R_2}\right) - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\
CLi''_L + CR_3 i'_L + \frac{CR_3 L}{R_2} i''_L - \frac{u_{R2}}{R2} + i_L &= 0 \\
CLi''_L + CR_3 i'_L + \frac{CR_3 L}{R_2} i''_L + \frac{L}{R_2} i'_L + i_L &= 0 \\
i''_L\left(CL + \frac{CR_3 L}{R_2}\right) + i'_L\left(CR_3 + \frac{L}{R_2}\right) + i_L &= 0
\end{aligned}$$

$$i_L'' + i_L' \left(\frac{R_3C + \frac{L}{R_2}}{LC + \frac{R_3LC}{R_2}} \right) + i_L \left(\frac{1}{LC + \frac{R_3LC}{R_2}} \right) = 0$$

$$i_L'' + i_L' \underbrace{\left(\frac{R_2R_3C + L}{R_2LC + R_3LC} \right)}_{=:2\delta} + i_L \underbrace{\left(\frac{R_2}{R_2LC + R_3LC} \right)}_{=:\omega_0^2} = 0$$

Ansatz: $\tilde{t} = t - 2\tau_1$

$$i_L(\tilde{t}) = e^{\lambda\tilde{t}}$$

$$i_L'(\tilde{t}) = \lambda e^{\lambda\tilde{t}}$$

$$i_L''(\tilde{t}) = \lambda^2 e^{\lambda\tilde{t}}$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 e^{\lambda\tilde{t}} + 2\delta\lambda e^{\lambda\tilde{t}} + \omega_0^2 i_L = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{R_2R_3C + L}{R_2LC + R_3LC} \right)^2 - \frac{R_2}{R_2LC + R_3LC} = -416667 \frac{1}{s^2} < 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(-1) \underbrace{\omega_0^2 - \delta^2}_{\Omega_d}}$$

$$= -\delta \pm j\Omega_d$$

Lösung:

$$i_L(\tilde{t}) = e^{-\delta\tilde{t}} \left[\tilde{K}_1 e^{j\Omega_d\tilde{t}} + \tilde{K}_2 e^{-j\Omega_d\tilde{t}} \right] = e^{-j\delta\tilde{t}} \left[K_1 \cos(\Omega_d\tilde{t}) + K_2 \sin(\Omega_d\tilde{t}) \right]$$

2.4 Interpretation der Parameter δ, ω_0 und Ω_d

δ	... Dämpfung	$[\delta] = \frac{1}{s}$
ω_0	... Resonanzfrequenz	$[\omega_0] = \frac{1}{s}$
Ω_d	... Eigenfrequenz	$[\Omega_d] = \frac{1}{s}$

$$\delta^2 - \omega_0^2 \begin{cases} > 0 & \text{2 reelle Lösungen} & \Rightarrow \Omega_d = \delta^2 - \omega_0^2 & \text{(Fall 1)} \\ < 0 & \text{2 (konjugiert) komplexe Lösungen} & \Rightarrow \Omega_d = \omega_0^2 - \delta^2 & \text{(Fall 2)} \\ = 0 & \text{1 reelle Doppellösung} & \Rightarrow \Omega_d = 0 & \text{(Fall 3)} \end{cases}$$

- Fall 1: Kriechfall, d.h. es entsteht keine Schwingung. Je größer die Dämpfung (δ) ist, desto langsamer kriechen Strom und Spannung gegen ihren Endwert.
- Fall 2: Realer Schwingkreis, d.h. Strom und Spannung geraten in Schwingung und pendeln sich langsam am Endwert ein (trifft auf diese Schaltung zu, siehe 5)
- Fall 3: Aperiodischer Grenzfall, d.h. der Endwert wird ohne Schwingen am schnellsten erreicht.

2.5 Anfangswertproblem

2.5.1 Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} i_L(\tilde{t} = 0^+) &= i_L(\tilde{t} = 0^-) = i_L(t = 2\tau_1) = 179,7\,\text{mA} \\ u_C(\tilde{t} = 0^+) &= u_C(\tilde{t} = 0^-) = U_{C,0} = 25\,\text{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_C(\tilde{t} = 0^+) = U_{C,0} = u_{R2} - u_{R3} &= -Li'_L - R_3 i_L - \frac{R_3 L}{R_2} i'_L \\ &= i'_L \left[-\left(L + \frac{R_3 L}{R_2} \right) \right] - R_3 i_L \\ U_{C_0} + R_3 i_L &= i'_L \left[-\left(L + \frac{R_3 L}{R_2} \right) \right] \\ i'_L &= -\frac{U_{C,0} + R_3 i_L}{L + \frac{R_3 L}{R_2}} \\ &= -\frac{R_2 (U_{C,0} + R_3 i_L)}{R_2 L + R_3 L} \end{aligned}$$

2.5.2 Lösen von K_1 und K_2

$$\begin{aligned} i_L(\tilde{t} = 0) &= e^0 \left[K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0) \right] = K_1 \\ K_1 &= 179,7\,\text{mA} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
i_L'(\tilde{t}) &= -\delta e^{-\delta\tilde{t}}\left[K_1\cos(\Omega_d\tilde{t}) + K_2\sin(\Omega_d\tilde{t})\right] + e^{-\delta\tilde{t}}\left[-K_1\Omega_d\sin(\Omega_d\tilde{t}) + K_2\Omega_d\cos(\Omega_d\tilde{t})\right] \\
i_L'(\tilde{t}=0) &= -\delta\cdot 1\left[K_1\cdot 1 K_2\cdot 0\right] + 1\cdot\left[-K_1\Omega_d\cdot 0 + K_2\Omega_d\cdot 1\right] \\
&= -\delta K_1 + K_2\Omega_d \stackrel{!}{=} -\frac{R_2(U_{C,0}+R_3 i_L)}{R_2L+R_3L}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\delta K_1 + K_2\Omega_d &= -\frac{R_2(U_{C,0}+R_3 i_L)}{R_2L+R_3L} \\
K_2\Omega_d &= \delta K_1 - \frac{R_2(U_{C,0}+R_3 i_L)}{R_2L+R_3L} \\
K_2 &= \frac{\delta K_1 - \frac{R_2(U_{C,0}+R_3 i_L)}{R_2L+R_3L}}{\Omega_d} = -304,6\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
i_L(\tilde{t}) &= e^{-\delta\tilde{t}}\left[K_1\cos(\Omega_d\tilde{t}) + K_2\sin(\Omega_d\tilde{t})\right] \\
&= e^{-500s^{-1}\cdot\tilde{t}}\left[179,7\,\mathrm{mA}\cos(\Omega_d\tilde{t}) - 304,6\,\mathrm{mA}\sin(\Omega_d\tilde{t})\right]
\end{aligned}
$$

3 Plots und Simulationen

3.1 Matlab-Plot $i_L(t)$

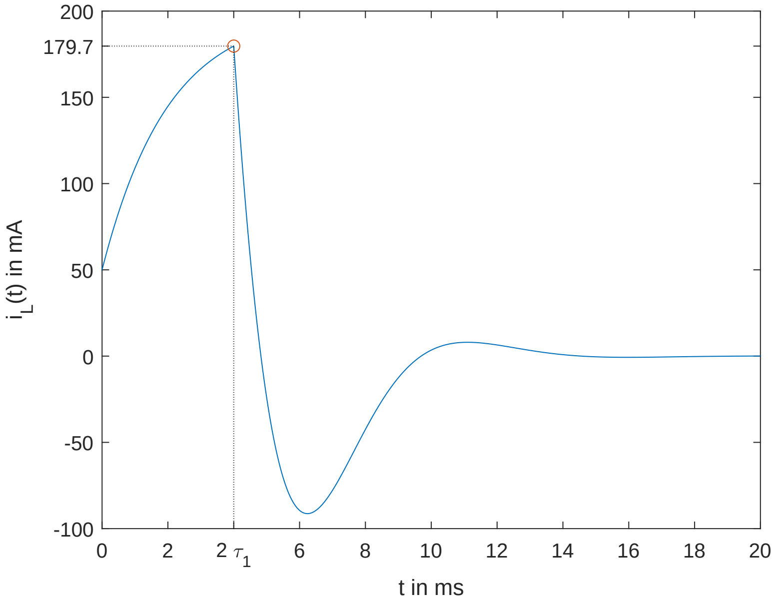

Abbildung 3: Matlab-Plot des Stroms $i_L(t)$

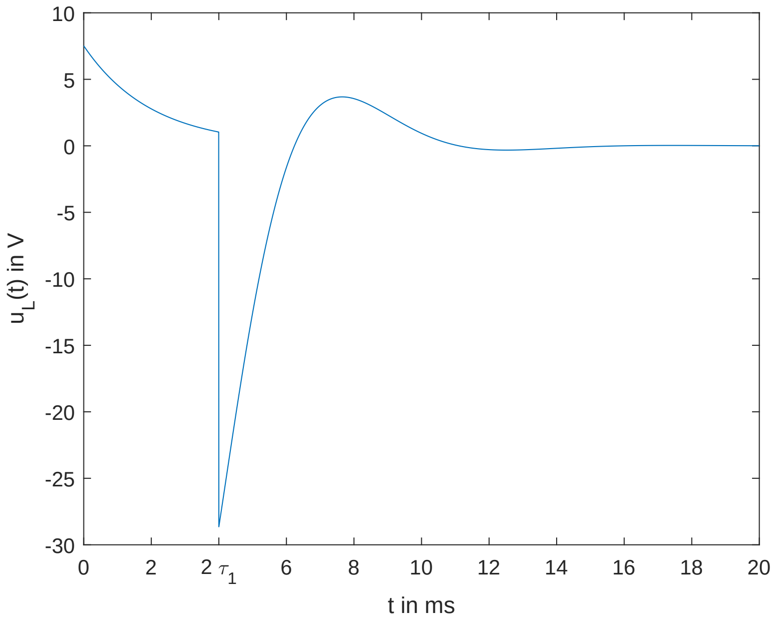

Abbildung 4: Matlab-Plot der Spannung $u_L(t)$

3.2 PSpice-Plot $i_L(t)$ und $u_L(t)$

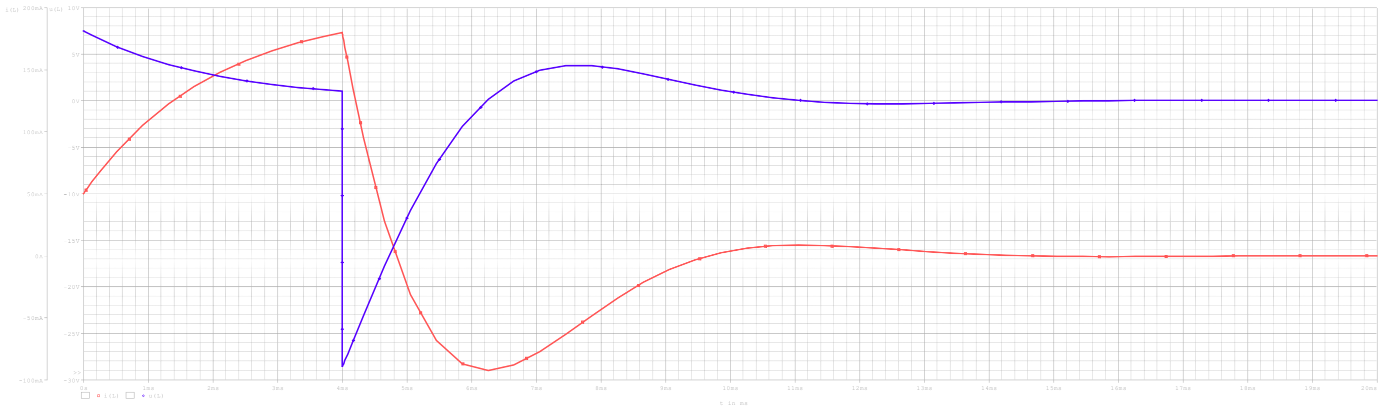

Abbildung 5: PSpice-Plot von $i_L(t)$ und $u_L(t)$

-

4 Matlab-Simulation

4.1 Skript

```
%Aufrumen der Matlab Umgebung.
clc
close all

%% Variablendefinition der bekannten Werte

r1 = 50;
r2 = 200;
r3 = 100;

C = 10*10^(-6);
L = 0.1;
U_0 = 10;
I_L0 = 50 * 10^(-3);
U_C0 = 25;
tau_1 = L/r1;

%% Bestimmen der Werte der Parameter delta, omega_0 und Omega_d

delta = ((r2 * r3 * C + L)/(2*(r2 * L * C + r3 * L * C)))
omega_0 = sqrt((r2)/(r2 * L * C + r3 * L * C))
Omega_d = sqrt((omega_0^2 - delta^2))

%% Berechnung von i_L(t_tilde), K_1, K_2

i_L_t_tilde = ((U_0-(U_0 - (r1 * I_L0)) * exp(-(2 * tau_1)/(tau_1)))/(r1))

K_1 = i_L_t_tilde
K_2 = ((delta * K_1 - (r2 * (U_C0 + r3 * i_L_t_tilde)) / (r2  * L + r3 * L)) / (
    Omega_d))

%% Berechnung von i_L / u_L und Plot
```

```matlab

%Define time arrays
t = linspace(0,0.02, 1000000);
t_label = linspace(0,0.02, 11);
A_label = linspace(-0.1,0.2, 7);
A_label = sort([A_label, 0.1797]);
axLims = [0 0.02 -0.1 -0.2];  %[x-min, x-max, y-min, y-max] axis limits


% Plot of u_L
figure('Name','Spannung␣der␣Spule','NumberTitle','off');
plot(t, (((-1)*(heaviside(t-2*tau_1)-1)) .* u_L_t_1(t, U_0, r1, I_L0, tau_1, L) ...
     + heaviside(t-2*tau_1) .* u_L_t_2(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, L, tau_1)));
xlabel('t␣in␣ms')
ylabel('{u_L(t)␣in␣V}')

xticks(t_label)
xticklabels({'0','2','2␣\tau_1','6','8','10', '12', '14', '16', '18', '20'})


% Plot of i_L
figure('Name','Strom␣der␣Spule','NumberTitle','off');
plot(t, ((-1)*(heaviside(t-2*tau_1)-1)) .* i_L_t_0(t, U_0, r1, tau_1, I_L0) ...
     + heaviside(t-2*tau_1) .* (i_L_t_1(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, tau_1)));
hold on
point = [2*tau_1, 0.1797];
plot(point(1), point(2), 'o')
plot([point(1), point(1)], [axLims(3), point(2)], 'k:')  %vertical line
plot([axLims(1), point(1)], [point(2), point(2)], 'k:')  %horizontal line

xlabel('t␣in␣ms')
ylabel('{i_L(t)␣in␣mA}')

xticks(t_label)
xticklabels({'0','2','2␣\tau_1','6','8','10', '12', '14', '16', '18', '20'})
yticks(A_label)
yticklabels({'-100', '-50', '0', '50', '100', '150', '179.7', '200'})



%% Functions of i_L / u_L
function i_L_t_1 = i_L_t_1(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, tau_1)
    i_L_t_1 = exp(-((t-2*tau_1) * delta)) .* (K_1 * cos(Omega_d * (t-2*tau_1)) + K_2 * sin(Omega_d * (t-2*tau_1)));
end

function u_L_t_1 = u_L_t_1(t, U_0, r1, I_L0, tau_1, L)
    u_L_t_1 = (U_0 / r1 + (U_0 - r1 * I_L0) / (r1 * tau_1) .* exp(-t / tau_1)) * L;
end

function u_L_t_2 = u_L_t_2(t, delta, K_1, K_2, Omega_d, L, tau_1)
    t = (t-2*tau_1);
    u_L_t_2 = L * (-delta * exp(-delta * t) .* (K_1 * cos(Omega_d * t) + K_2 * sin(Omega_d * t)) + exp(-delta * t) .* (-K_1 * Omega_d * sin(Omega_d * t) + K_2 * Omega_d * cos(Omega_d * t)));
end

function i_L_t_0 = i_L_t_0(t, U_0, r1, tau_1, I_L0)
    i_L_t_0 = ((U_0-(U_0 - (r1 * I_L0)) * exp(-(t)/(tau_1)))/(r1));
end
```

4.2 Konsolenoutput

```
delta =

   "500 1/s"


omega_0 =

  "816.4966 1/s"


Omega_d =

  "645.4972 1/s"


i_L_t_tilde =

    "0.1797 A"


K_1 =

    "0.1797 A"


K_2 =

   "-0.3046 A"
```