Projet d'Optimisation

Problème du Voyageur de Commerce (TSP)

Rapport Final

Algorithmes Exacts et Heuristiques

Master MIASHS — IMA-UCO (2025–2026)

Auteurs : Matthias Jourdren / Maxence Cornu Basset / Gaëtan Pezas

Date : 22 janvier 2026

Table des matières

Table des figures

Introduction

Le Problème du Voyageur de Commerce (**Traveling Salesperson Problem – TSP**) est un problème classique d'optimisation combinatoire. Il consiste à déterminer la tournée de coût minimal permettant de visiter chaque ville exactement une fois et de revenir à la ville de départ.

Ce problème est connu pour sa difficulté algorithmique, car il appartient à la classe des problèmes **NP-difficiles**. Cela signifie qu'il n'existe pas d'algorithme connu capable de résoudre toutes les instances du TSP en temps polynomial.

Dans ce projet, plusieurs approches ont été implémentées afin de comparer leurs performances et leur qualité de solution :

— Un algorithme **exact** garantissant l'optimalité (Branch and Bound)
— Des **heuristiques** rapides mais approximatives (Plus Proche Voisin, 2-opt)
— Une **méta-heuristique** combinant diversification et intensification (GRASP)

Applications du TSP

Le problème du voyageur de commerce n'est pas qu'un exercice théorique. Il trouve de nombreuses applications pratiques dans divers domaines :

Fabrication de Circuits Imprimés (PCB)

Dans l'industrie électronique, la fabrication de circuits imprimés nécessite de **percer des milliers de trous** sur une plaque. Le TSP permet d'optimiser le parcours de la tête de perçage pour :

— Minimiser le temps de déplacement de la machine
— Réduire l'usure de l'équipement
— Augmenter la productivité

Séquençage ADN

En bioinformatique, le TSP est utilisé pour la **reconstruction de séquences génétiques**. Les fragments d'ADN doivent être assemblés dans le bon ordre, ce qui peut être modélisé comme un problème de tournée où :

— Chaque fragment est une "ville"
— La distance représente le degré de chevauchement entre fragments
— L'objectif est de trouver l'ordre optimal de reconstruction

Astronomie

Les télescopes automatisés doivent observer plusieurs objets célestes durant une nuit. Le TSP permet de **planifier l'ordre des observations** pour :

- Minimiser le temps de déplacement du télescope
- Maximiser le nombre d'observations possibles
- Tenir compte des contraintes temporelles (visibilité des objets)

Autres Applications

Le TSP trouve également des applications dans :

- La **planification d'itinéraires touristiques** (visiter plusieurs sites en minimisant les déplacements)
- L'**optimisation de réseaux** (câblage, pipelines)
- La **cristallographie aux rayons X** (positionnement optimal du cristal)

Méthodes Implémentées

Cette section présente les quatre approches algorithmiques implémentées pour résoudre le TSP. Nous commençons par l'algorithme exact, puis présentons les heuristiques par ordre croissant de sophistication.

Algorithme exact : Branch and Bound

L'algorithme de Branch and Bound est la seule méthode garantissant l'**optimalité** de la solution. Il explore systématiquement l'espace des solutions possibles tout en élaguant les branches non prometteuses.

3.1.1 Principe de fonctionnement

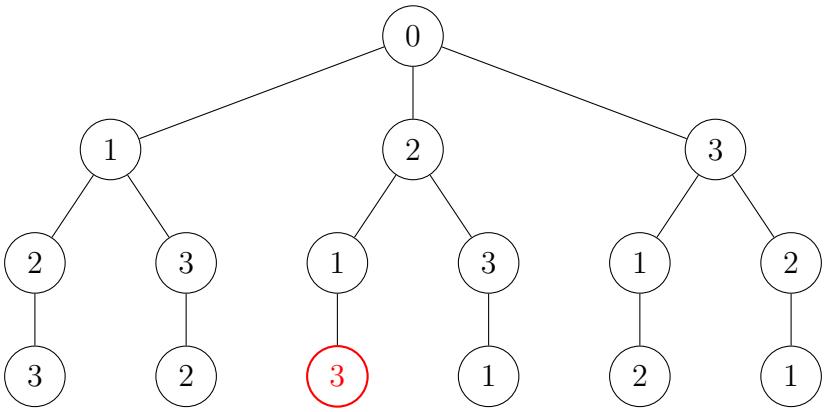
L'algorithme construit récursivement des chemins partiels à partir d'une ville de départ fixée (ville 0). À chaque étape :

1. On étend le chemin partiel en ajoutant une ville non visitée
2. On calcule le coût cumulé du chemin
3. Si ce coût dépasse la meilleure solution connue, on **élague** cette branche
4. Sinon, on continue l'exploration récursive

Le mécanisme d'**élagage** (pruning) est crucial : dès qu'un chemin partiel a un coût supérieur à la meilleure solution complète trouvée, on abandonne toute cette branche de l'arbre de recherche.

3.1.2 Exemple visuel

Considérons un graphe à 4 villes. L'arbre de recherche explore toutes les permutations possibles :



Les nœuds en rouge représentent les branches élaguées car leur coût partiel dépasse déjà la meilleure solution.

3.1.3 Algorithme

Algorithme 1 : Algorithme exact Branch and Bound pour le TSP

Données(*Matrice des distances D, nombre de villes n*)
$MeilleurCout \leftarrow +\infty$
$MeilleureTournee \leftarrow \emptyset$

Procédure Explorer(C_p, K_p, V_p)
// C_p : chemin partiel, K_p : coût partiel, V_p : villes visitées
si $K_p \geq MeilleurCout$ **alors**
  retourner // Élagage
fin
si $|C_p| = n$ **alors**
  $K_{final} \leftarrow K_p + D[dernier(C_p), premier(C_p)]$ **si** $K_{final} < MeilleurCout$ **alors**
    $MeilleurCout \leftarrow K_{final}$
    $MeilleureTournee \leftarrow C_p$
  fin
  retourner
fin
pour chaque *ville* $v \notin V_p$ **faire**
  Explorer($C_p \cup \{v\}$, $K_p + D[dernier(C_p), v]$, $V_p \cup \{v\}$)
fin
Explorer([0], 0, {0})
Retourner $MeilleureTournee$, $MeilleurCout$

3.1.4 Complexité

La complexité de cet algorithme est **factorielle** dans le pire des cas :

$$\mathcal{O}(n!)$$

Explication détaillée :

— Pour la première ville, nous avons n choix possibles
— Pour la deuxième ville, $(n-1)$ choix
— Pour la troisième ville, $(n-2)$ choix
— Et ainsi de suite jusqu'à 1 choix pour la dernière ville
— Total : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = n!$

Croissance explosive :

— $10! = 3\,628\,800$ (environ 3,6 millions)
— $15! = 1\,307\,674\,368\,000$ (environ 1,3 billions)
— $20! \approx 2.4 \times 10^{18}$ (2,4 quintillions)

Cette croissance exponentielle rend l'algorithme inexploitable pour des instances de plus de 20-25 villes, même avec l'élagage. C'est pourquoi un **timeout** de 60 secondes a été imposé dans notre implémentation.

3.1.5 Cas Pathologiques

L'algorithme Branch and Bound devient particulièrement inefficace sur certaines configurations où le mécanisme d'élagage ne peut pas fonctionner efficacement :

— **Graphes avec distances uniformes** : Lorsque toutes les distances sont très similaires, les bornes inférieures calculées sont proches du coût réel, ce qui empêche l'élagage précoce des branches. L'algorithme doit alors explorer une proportion beaucoup plus importante de l'arbre de recherche.
— **Exemple concret** : Considérons un graphe complet où toutes les distances $d_{ij} \in [99, 101]$. Dans ce cas, presque tous les chemins partiels ont des coûts similaires, et la borne inférieure ne permet pas de distinguer les branches prometteuses des autres. L'algorithme se rapproche alors d'une exploration exhaustive de $n!$ permutations.
— **Impact** : Sur de telles instances, le temps d'exécution peut être multiplié par un facteur 10 à 100 par rapport à des instances avec des distances variées, même pour un nombre de villes identique.

Heuristique constructive : Plus proche voisin

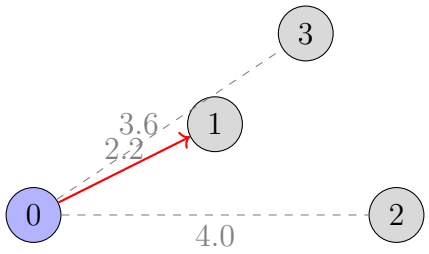
L'heuristique du plus proche voisin est une approche **gloutonne** qui construit une solution pas à pas en faisant à chaque étape le choix localement optimal.

3.2.1 Principe de fonctionnement

À partir d'une ville de départ (ville 0), l'algorithme :

1. Sélectionne la ville non visitée la plus proche
2. L'ajoute à la tournée
3. Répète jusqu'à avoir visité toutes les villes
4. Retourne à la ville de départ

3.2.2 Exemple visuel



Étape 1 : Choisir la ville la plus proche (1)

3.2.3 Adaptation au TSP

Dans notre implémentation, le graphe est représenté par une **matrice d'adjacence** contenant les distances entre toutes les paires de villes. Les villes déjà visitées sont mémorisées pour garantir que chaque sommet n'est visité qu'une seule fois.

3.2.4 Algorithme

Algorithme 2 : Heuristique constructive du Plus Proche Voisin

Données(*Matrice des distances D, nombre de villes n*)

Initialisation :

$v_{actuelle} \leftarrow 0$ `// Ville de départ`

$Tournee \leftarrow [v_{actuelle}]$

$VillesVisitees \leftarrow \{v_{actuelle}\}$

$CoutTotal \leftarrow 0$

Construction de la tournée :

tant que $|Tournee| < n$ **faire**

`// Sélectionner la ville non visitée la plus proche`

$v_{suivante} \leftarrow \text{argmin}_{v \notin VillesVisitees} D[v_{actuelle}, v]$

`// Mettre à jour la tournée et le coût`

Ajouter $v_{suivante}$ à $Tournee$

Ajouter $v_{suivante}$ à $VillesVisitees$

$CoutTotal \leftarrow CoutTotal + D[v_{actuelle}, v_{suivante}]$

`// Passer à la ville suivante`

$v_{actuelle} \leftarrow v_{suivante}$

fin

Clôture de la tournée :

$CoutTotal \leftarrow CoutTotal + D[v_{actuelle}, Tournee[0]]$ `// Retour à la ville de départ`

Retourner $Tournee$, $CoutTotal$

3.2.5 Complexité

La complexité temporelle de cet algorithme est :

$$\mathcal{O}(n^2)$$

Explication détaillée :

- **Boucle externe** : On doit visiter n villes, donc n itérations
- **Boucle interne** : À chaque itération, on cherche le minimum parmi les villes restantes
  - Itération 1 : $(n-1)$ comparaisons
  - Itération 2 : $(n-2)$ comparaisons
  - ...
  - Itération $n-1$: 1 comparaison
- **Total** : $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \mathcal{O}(n^2)$

Cette complexité quadratique rend l'algorithme très rapide même pour des instances de grande taille (plusieurs milliers de villes).

3.2.6 Limites

L'heuristique du plus proche voisin ne garantit **pas l'optimalité**. Le choix glouton local peut mener à une mauvaise solution globale. Par exemple, choisir systématiquement la ville la plus proche peut créer des "détours" coûteux en fin de parcours.

3.2.7 Cas Pathologiques

L'approche gloutonne du plus proche voisin peut produire des solutions très sous-optimales sur certaines configurations géométriques :

- **Configuration en "étoile"** : Considérons une instance où une ville centrale (ville 0) est très proche de toutes les autres villes, mais ces dernières sont très éloignées entre elles, disposées en cercle autour du centre.
- **Comportement de l'algorithme** : Partant de la ville 0, l'algorithme choisit une ville du cercle (par exemple ville 1). Ensuite, au lieu de continuer le tour du cercle, il peut être tenté de revenir au centre si celui-ci est plus proche que la ville suivante du cercle. Cela crée des allers-retours coûteux.
- **Exemple numérique** :
  - Distance centre-périphérie : 1 unité
  - Distance entre villes de la périphérie : 10 unités
  - Solution gloutonne : Allers-retours multiples (coût $\approx 2n$)
  - Solution optimale : Tour du cercle (coût $\approx 10n$)
  - Écart : Peut atteindre 50% ou plus
- **Impact pratique** : Sur les instances testées, l'écart observé varie de 5% à 17%, confirmant que certaines configurations géométriques pénalisent fortement cette heuristique.

Heuristique de recherche locale : 2-opt

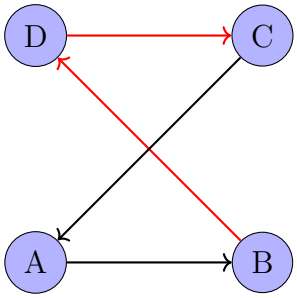
La recherche locale 2-opt est une méthode d'**amélioration itérative** qui part d'une solution initiale et tente de l'améliorer par des modifications locales.

3.3.1 Principe de fonctionnement

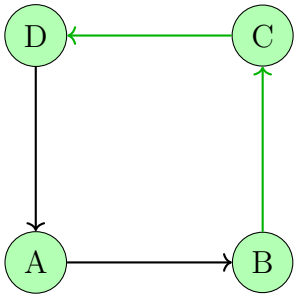
L'algorithme 2-opt cherche à améliorer une tournée en **inversant des segments** du parcours. Pour chaque paire d'arêtes $(i, i+1)$ et $(k, k+1)$:

1. On supprime ces deux arêtes
2. On reconnecte en inversant le segment entre $i+1$ et k
3. Si le coût diminue, on accepte la modification
4. On répète jusqu'à ce qu'aucune amélioration ne soit possible

3.3.2 Exemple visuel



Avant : Croisement



Après : Pas de croisement

L'inversion du segment $[B, D]$ élimine le croisement et réduit la distance totale.

3.3.3 Adaptation au TSP

La tournée est représentée comme une liste ordonnée de villes. L'algorithme évalue systématiquement toutes les inversions possibles et accepte la première amélioration trouvée (stratégie *first improvement*).

3.3.4 Algorithme

Algorithme 3 : Recherche locale 2-opt pour le TSP

Données(*Tournée initiale* T, *matrice des distances* D) $amelioration \leftarrow Vrai$
tant que *amelioration* **faire**
  $amelioration \leftarrow Faux$
  pour $i = 1$ **à** $n - 2$ **faire**
    pour $k = i + 1$ **à** $n - 1$ **faire**
      $T' \leftarrow$ inverser le segment $[i, k]$ de T
      si $Cout(T') < Cout(T)$ **alors**
        $T \leftarrow T'$
        $amelioration \leftarrow Vrai$
        Sortir des boucles
      fin
    fin
  fin
fin
Retourner T

3.3.5 Complexité

La complexité de l'algorithme 2-opt est :

$$\mathcal{O}(n^2 \times k)$$

où k est le nombre d'itérations de la boucle `while`.

Explication détaillée :

— **Boucles imbriquées** : Il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \mathcal{O}(n^2)$ paires d'arêtes possibles à tester

— **Nombre d'itérations** : Le nombre de fois où on trouve une amélioration dépend de :

  — La qualité de la solution initiale

  — La structure de l'instance

  — Dans le pire cas, k peut être $\mathcal{O}(n)$ ou plus

— **Complexité totale** : $\mathcal{O}(n^2 \times k)$

Note importante : La complexité n'est **pas** simplement $\mathcal{O}(n^2)$. Le facteur k (nombre d'améliorations successives) peut être significatif.

3.3.6 Optimum local

L'algorithme 2-opt converge vers un **optimum local** : une solution qui ne peut pas être améliorée par des inversions 2-opt, mais qui n'est pas nécessairement la solution optimale globale.

3.3.7 Cas Pathologiques

La recherche locale 2-opt peut se bloquer dans des optimums locaux éloignés de l'optimum global :

— **Optimums locaux profonds** : Certaines configurations de tournées nécessitent de modifier simultanément plus de 2 arêtes pour atteindre une meilleure solution. Or, 2-opt ne peut modifier que 2 arêtes à la fois, ce qui crée des "barrières" infranchissables.

— **Exemple concret** : Considérons une tournée avec plusieurs croisements imbriqués. Pour démêler ces croisements, il faudrait parfois effectuer 3 ou 4 inversions simultanées (3-opt, 4-opt), ce qui est impossible avec 2-opt.

— **Dépendance à la solution initiale** : La qualité de la solution finale dépend fortement de la solution de départ. Une mauvaise solution initiale (générée par l'heuristique constructive) peut mener à un optimum local médiocre.

— **Impact observé** : Sur les instances testées, 2-opt atteint l'optimal sur les petites instances (17 villes) mais peut rester à 3-4% de l'optimal sur les instances moyennes, indiquant la présence d'optimums locaux.

— **Limitation fondamentale** : 2-opt ne peut pas "sauter" par-dessus des barrières d'optimum local. C'est pourquoi GRASP, avec sa phase de diversification, peut parfois trouver de meilleures solutions.

Méta-heuristique : GRASP

GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) est une méta-heuristique combinant **diversification** et **intensification**.

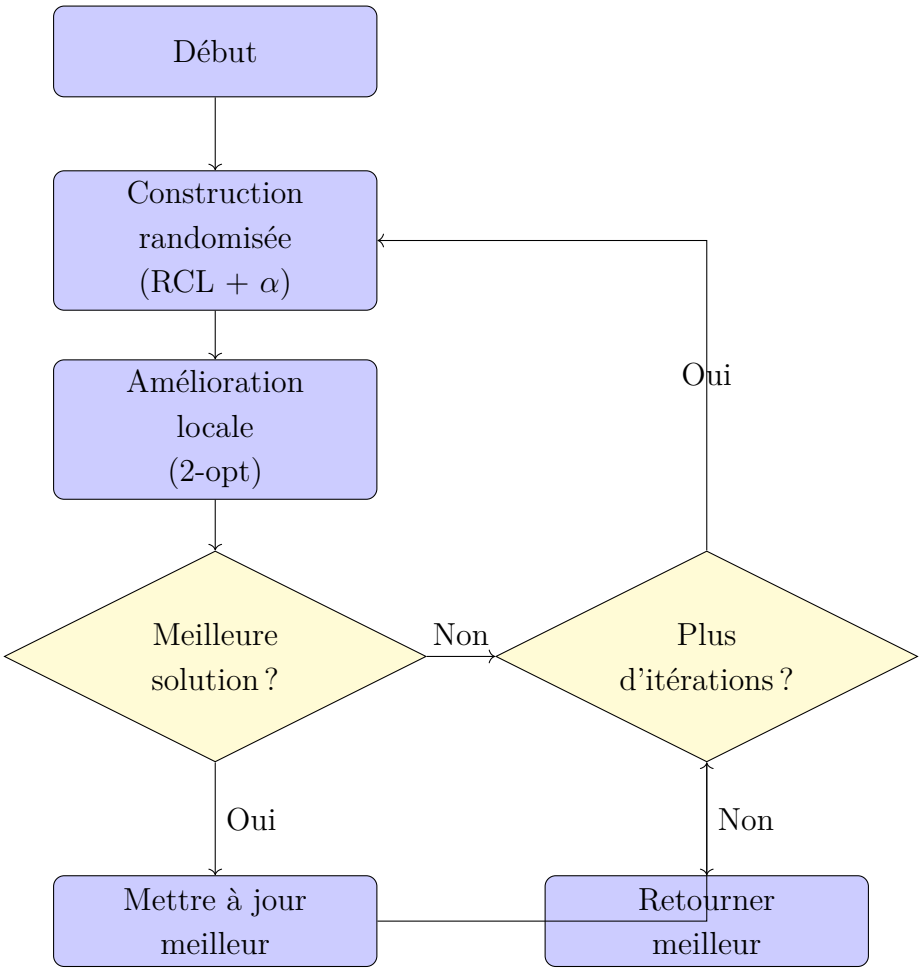
3.4.1 Principe de fonctionnement

GRASP fonctionne en deux phases répétées sur plusieurs itérations :

1. **Phase de construction randomisée** : Construire une solution de manière semi-gloutonne avec un élément aléatoire
2. **Phase d'amélioration locale** : Améliorer la solution avec 2-opt

La meilleure solution trouvée sur toutes les itérations est conservée.

3.4.2 Diagramme du processus



3.4.3 Liste Restreinte de Candidats (RCL)

Le paramètre $\alpha \in [0, 1]$ contrôle le compromis entre choix glouton et diversification :

— $\alpha = 0$: Purement glouton (toujours choisir le meilleur)

— $\alpha = 1$: Complètement aléatoire

— $\alpha \in]0, 1[$: Compromis (valeur typique : 0.3)

La RCL contient les villes dont la distance est dans l'intervalle :

$$[C_{min}, C_{min} + \alpha(C_{max} - C_{min})]$$

3.4.4 Algorithme

Algorithme 4 : Méta-heuristique GRASP pour le TSP

Données(*Matrice des distances D, paramètre α, nombre d'itérations $MaxIter$*)
$MeilleurCout \leftarrow +\infty$
$MeilleureSolution \leftarrow \emptyset$

pour $iter = 1$ **à** $MaxIter$ **faire**

// Phase 1 : Construction gloutonne randomisée
Choisir une ville de départ (ville 0)
$T \leftarrow [v_{depart}]$
tant que $|T| < n$ **faire**
$Candidats \leftarrow$ villes non visitées
$C_{min}, C_{max} \leftarrow$ coûts min et max depuis la ville courante
$LRC \leftarrow \{v \in Candidats \mid D \leq C_{min} + \alpha(C_{max} - C_{min})\}$
$v_{choisie} \leftarrow$ choix aléatoire dans LRC
Ajouter $v_{choisie}$ à T
fin
// Phase 2 : Intensification
$T_{opt} \leftarrow$ RechercheLocale2Opt(T)
si $Cout(T_{opt}) < MeilleurCout$ **alors**
$MeilleurCout \leftarrow Cout(T_{opt})$
$MeilleureSolution \leftarrow T_{opt}$
fin
fin
Retourner $MeilleureSolution$

3.4.5 Complexité

La complexité de GRASP est :

$$\mathcal{O}(I_{max} \times n^2 \times k)$$

Explication détaillée :

— I_{max} : Nombre d'itérations de GRASP (typiquement 100-1000)
— Pour chaque itération :
  — **Construction** : $\mathcal{O}(n^2)$ (similaire au plus proche voisin)
  — **Amélioration locale** : $\mathcal{O}(n^2 \times k)$ (2-opt)
— **Total par itération** : $\mathcal{O}(n^2 + n^2 \times k) = \mathcal{O}(n^2 \times k)$
— **Total global** : $\mathcal{O}(I_{max} \times n^2 \times k)$

En pratique, I_{max} est fixé à une valeur raisonnable (100 dans notre implémentation), ce qui rend GRASP utilisable même pour des instances de taille moyenne.

3.4.6 Cas Pathologiques

GRASP peut être inefficace dans certaines situations où la randomisation n'apporte pas la diversité nécessaire :

— **Paramètre α mal calibré** : Le paramètre α contrôle le compromis entre choix glouton et diversification. Un α trop petit ($\alpha \approx 0$) rend GRASP quasi-identique à l'heuristique constructive répétée, perdant l'avantage de la diversification. À l'inverse, un α trop grand ($\alpha \approx 1$) génère des solutions trop aléatoires de mauvaise qualité.
— **Instances avec structure dominante** : Sur certaines instances où une structure optimale est très marquée (par exemple, villes alignées), la randomisation peut nuire en éloignant systématiquement l'algorithme de cette structure évidente.
— **Nombre d'itérations insuffisant** : Sur de grandes instances, 100 itérations peuvent ne pas suffire à explorer suffisamment l'espace de solutions. Comme observé sur l'instance 439.in, GRASP n'a pas terminé dans le délai imparti avec 100 itérations, révélant un problème de scalabilité.
— **Impact observé** : Sur l'instance 439.in (439 villes), GRASP atteint le timeout de 600 secondes sans produire de solution, alors que LocalSearch termine en 292 secondes. Cela montre que le nombre fixe de 100 itérations n'est pas adapté à toutes les tailles d'instances.
— **Recommandation** : Pour les grandes instances, il faudrait adapter dynamiquement le nombre d'itérations en fonction de n, par exemple $I_{max} = \max(10, 1000/n)$.

Méthodologie de Test

Instances de Test

Trois instances ont été utilisées pour les tests :

Instance	Nombre de villes	Type
17.in	17	Petite instance
51.in	51	Instance moyenne
52.in	52	Instance moyenne
439.in	439	Instance grande

TABLE 1 – Instances de test utilisées

Ces instances sont des graphes complets pondérés où chaque ville est connectée à toutes les autres avec des distances euclidiennes.

4.1.1 Origine et Génération des Instances

Les instances utilisées dans ce projet sont des graphes euclidiens générés selon le protocole suivant :

- **Type de graphe** : Graphes complets euclidiens en 2D
- **Méthode de génération** : Chaque ville est représentée par un point (x, y) dans un plan cartésien. Les coordonnées sont générées aléatoirement dans un espace délimité (par exemple $[0, 1000] \times [0, 1000]$).
- **Calcul des distances** : La distance entre deux villes i et j est calculée selon la distance euclidienne :
$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$
- **Format des fichiers** : Les fichiers d'instance (.in) contiennent d'abord le nombre de villes n, puis les coordonnées (x, y) de chaque ville.
- **Choix des tailles** : Les tailles d'instances ont été choisies pour couvrir différents régimes de complexité :
  - 17 villes : Petite instance permettant à l'algorithme exact de terminer
  - 51-52 villes : Instances moyennes où l'algorithme exact atteint le timeout
  - 439 villes : Grande instance pour tester la scalabilité des heuristiques

Cette méthode de génération garantit des instances réalistes où les distances respectent l'inégalité triangulaire, ce qui est caractéristique de nombreux problèmes pratiques de TSP.

Paramètres des Algorithmes

- **Branch and Bound** : Timeout de 60 secondes pour éviter des temps d'exécution trop longs
- **Plus Proche Voisin** : Départ fixé à la ville 0
- **2-opt** : Solution initiale obtenue par Plus Proche Voisin
- **GRASP** :
  - Nombre d'itérations : 100
  - Paramètre α : 0.3
  - Amélioration locale : 2-opt

Environnement d'Exécution

Les tests ont été effectués sur :

- **Système d'exploitation** : macOS
- **Langage** : Python 3
- **Processeur** : Puce M1

Métriques Évaluées

Pour chaque algorithme et chaque instance, nous mesurons :

1. **Coût de la tournée** : Distance totale parcourue
2. **Temps d'exécution** : Durée en secondes
3. **Écart à l'optimal** : Pourcentage de différence avec la meilleure solution connue
4. **Ratio qualité/temps** : Compromis entre qualité de solution et rapidité

Analyse des Résultats

Cette section présente une analyse détaillée des performances comparées des différentes méthodes implémentées.

Résultats Bruts

Le tableau suivant présente les résultats obtenus pour chaque algorithme sur les trois instances de test :

Instance	Algorithme	Coût	Temps (s)	Statut
17.in	Exact	2085.0	18.72	Optimal
	Constructive	2187.0	0.024	Heuristique
	LocalSearch	2085.0	0.025	Optimal
	GRASP_LS	2085.0	0.069	Optimal
51.in	Exact	449.0	60.02	Timeout
	Constructive	511.0	0.025	Heuristique
	LocalSearch	438.0	0.096	Meilleur
	GRASP_LS	439.0	3.38	Très bon
52.in	Exact	8021.0	60.03	Timeout
	Constructive	8980.0	0.024	Heuristique
	LocalSearch	7967.0	0.064	Très bon
	GRASP_LS	7672.0	4.36	Meilleur

TABLE 2 – Résultats détaillés par algorithme et instance

Analyse par Instance

5.2.1 Instance 17.in (17 villes)

Sur cette petite instance :
— **Branch and Bound** trouve l'optimal (2085) en 18.72 secondes
— **LocalSearch** et **GRASP** atteignent également l'optimal
— **Constructive** donne une solution 4.9% plus coûteuse (2187 vs 2085)
— Les heuristiques sont **780 fois plus rapides** que l'algorithme exact

5.2.2 Instance 51.in (51 villes)

Sur cette instance moyenne :
— **Branch and Bound** atteint le timeout (60s) avec une solution de coût 449
— **LocalSearch** obtient le meilleur résultat (438) en seulement 0.096s
— **GRASP** est très proche (439) avec un temps légèrement supérieur (3.38s)
— **Constructive** donne une solution 16.7% plus coûteuse (511 vs 438)

5.2.3 Instance 52.in (52 villes)

Sur cette instance moyenne :
— **Branch and Bound** atteint le timeout avec une solution de coût 8021
— **GRASP** obtient le meilleur résultat (7672) en 4.36 secondes
— **LocalSearch** est très proche (7967) et beaucoup plus rapide (0.064s)
— **Constructive** donne une solution 17% plus coûteuse (8980 vs 7672)

Comparaison Globale des Coûts

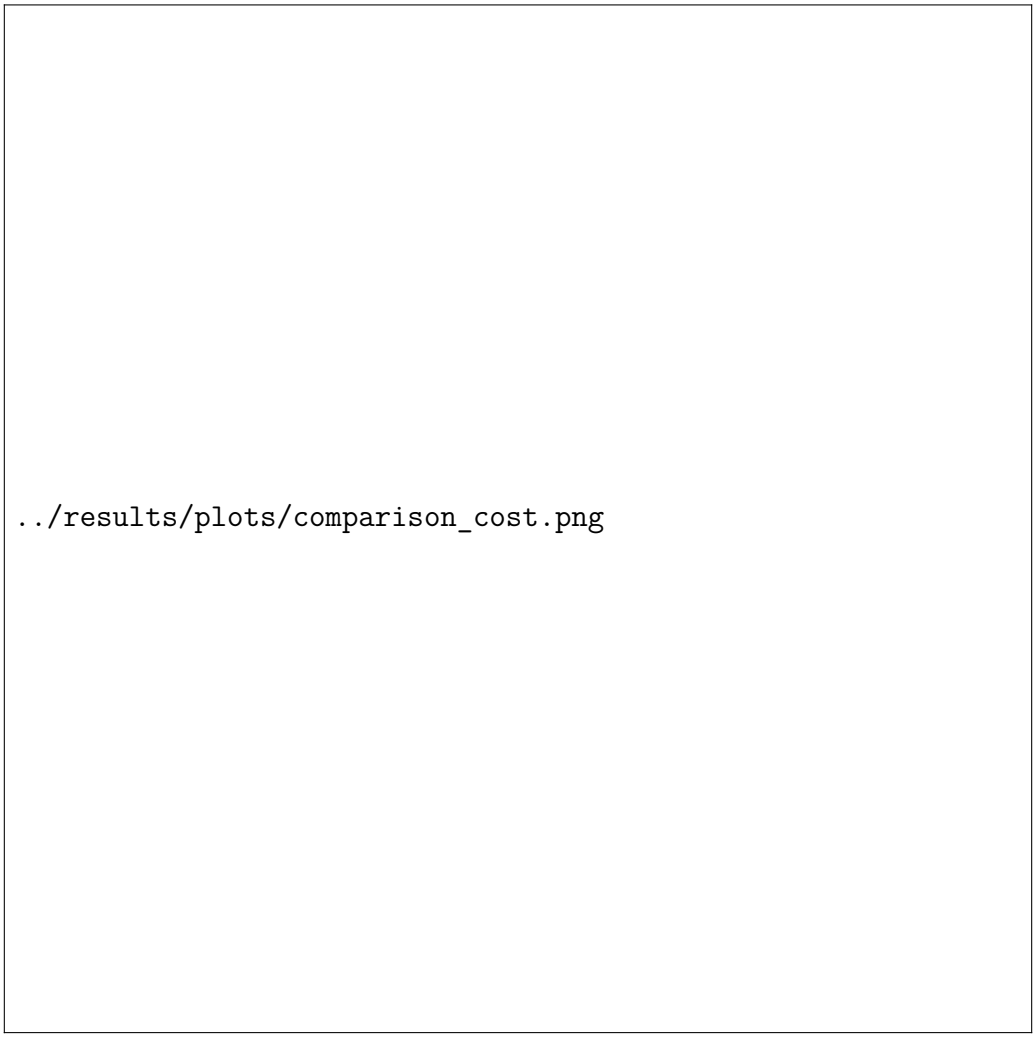


FIGURE 1 – Comparaison du coût de la tournée par algorithme

Le graphique ci-dessus montre clairement que :

— Les méthodes d'amélioration (**LocalSearch** et **GRASP**) surpassent systématiquement la méthode constructive

— Sur les petites instances, toutes les méthodes (sauf Constructive) atteignent l'optimal

— Sur les instances moyennes, **GRASP** tend à donner les meilleures solutions

Comparaison Globale des Temps

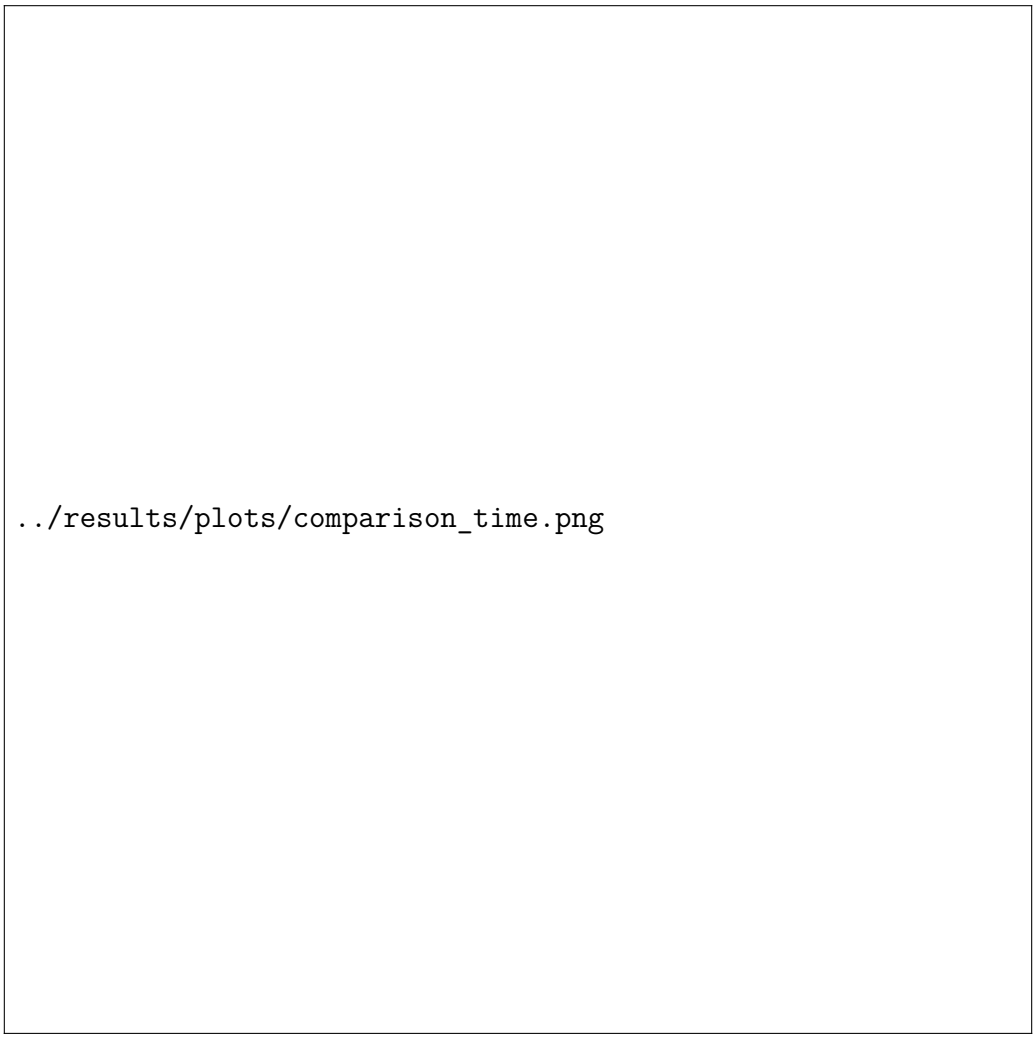


FIGURE 2 – Comparaison du temps d'exécution par algorithme (échelle logarithmique)

L'analyse des temps d'exécution révèle :

— **Branch and Bound** : Explosion combinatoire évidente, timeout atteint dès 51 villes
— **Constructive** : Quasi-instantané (∼0.024s), indépendant de la taille
— **LocalSearch** : Très rapide (∼0.025-0.096s), excellent compromis
— **GRASP** : Temps raisonnable (0.07-4.36s), acceptable pour la qualité obtenue

Synthèse : L'analyse croisée des coûts et des temps d'exécution révèle une priorité d'utilisation des algorithmes. L'algorithme exact Branch and Bound, bien que garantissant l'optimalité, devient rapidement inexploitable au-delà de 20 villes en raison de sa complexité factorielle. L'heuristique constructive, malgré sa rapidité exceptionnelle, produit des solutions de qualité insuffisante (écarts de 5% à 17%). C'est donc vers les méthodes d'amélioration locale que notre attention se porte : **LocalSearch (2-opt)** émerge comme le meilleur compromis qualité-temps, atteignant ou s'approchant de l'optimal en moins de

0.1 seconde. GRASP, bien que légèrement plus coûteuse en temps (jusqu'à 4.36s), se distingue sur les instances moyennes où sa phase de diversification lui permet de trouver les meilleures solutions absolues. Cette analyse nous conduit à privilégier **LocalSearch pour les applications nécessitant une réponse rapide** et **GRASP lorsque la qualité de la solution prime sur le temps de calcul**.

Analyse Détaillée par Algorithme

5.5.1 Performance de Branch and Bound

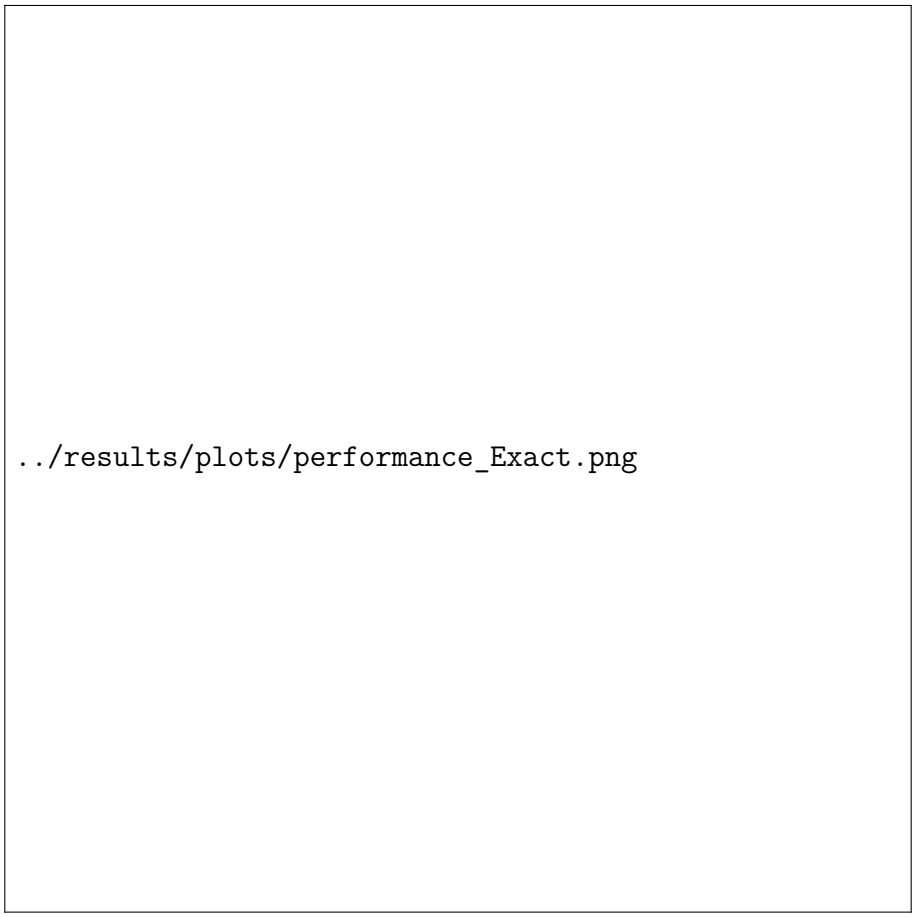


FIGURE 3 – Performance de l'algorithme Branch and Bound

L'algorithme exact montre :
— **Garantie d'optimalité** sur les petites instances
— **Explosion du temps** : de 18.72s (17 villes) à timeout (51+ villes)
— **Limite pratique** : environ 20-25 villes maximum

5.5.2 Performance de Plus Proche Voisin

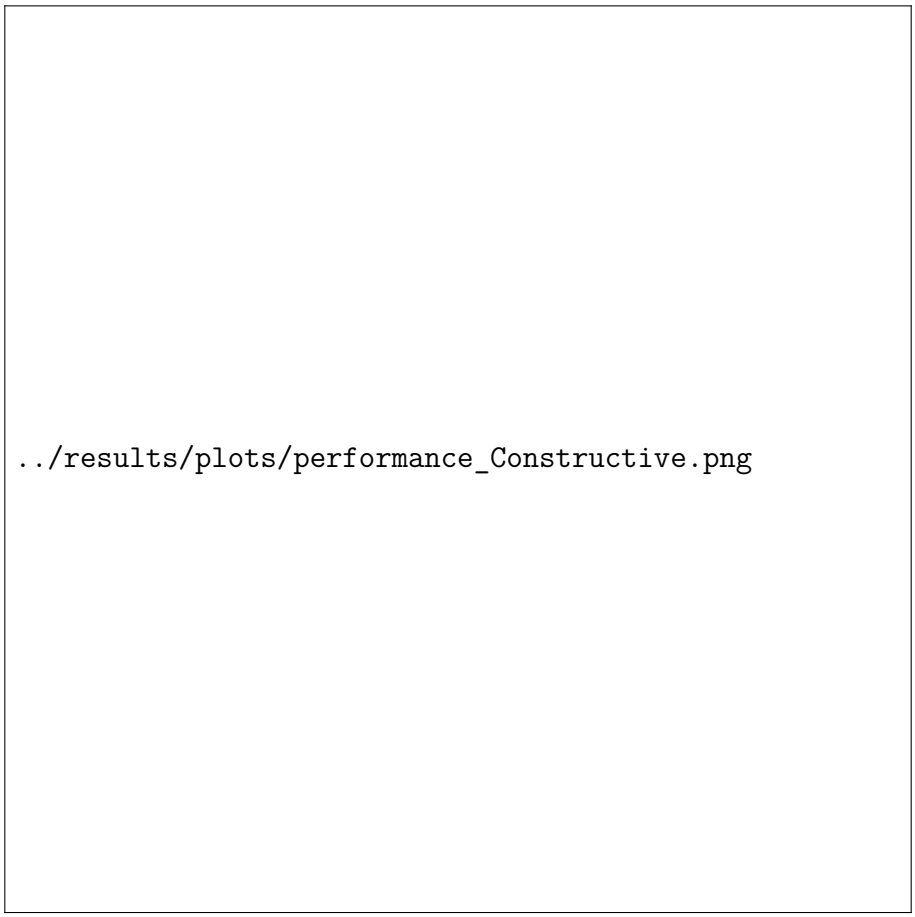


FIGURE 4 – Performance de l'heuristique constructive

L'heuristique constructive montre :
— **Rapidité exceptionnelle** : toujours sous 0.025s
— **Qualité variable** : écart de 5% à 17% par rapport à l'optimal
— **Utilité** : excellente solution initiale pour les méthodes d'amélioration

5.5.3 Performance de 2-opt

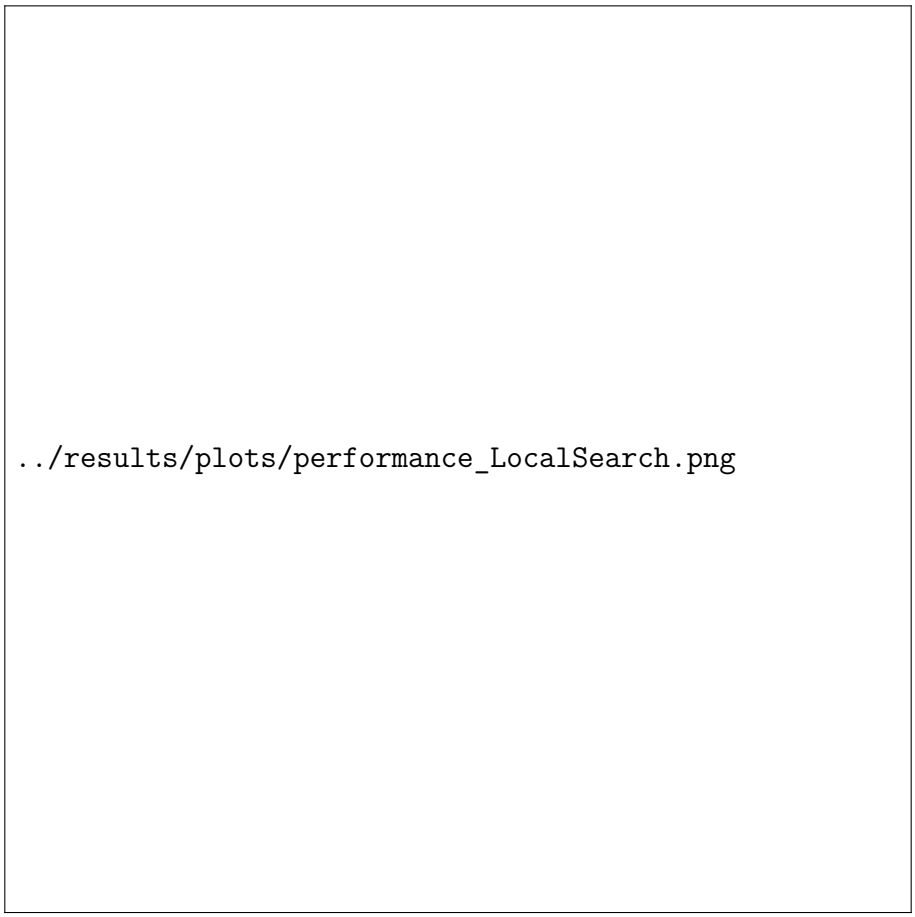


FIGURE 5 – Performance de la recherche locale 2-opt

La recherche locale montre :
— **Excellent compromis** qualité/temps
— **Amélioration significative** par rapport à la solution initiale
— **Rapidité** : toujours sous 0.1s
— **Résultats** : optimal ou très proche sur toutes les instances

5.5.4 Performance de GRASP

FIGURE 6 – Performance de la méta-heuristique GRASP

GRASP montre :
— **Meilleures solutions** sur les instances moyennes
— **Robustesse** : performances consistantes
— **Temps acceptable** : 0.07s à 4.36s
— **Diversification efficace** : explore mieux l'espace de solutions

Comparaison Détaillée par Instance

5.6.1 Instance 17.in

FIGURE 7 – Comparaison détaillée sur l'instance 17.in

5.6.2 Instance 51.in

FIGURE 8 – Comparaison détaillée sur l'instance 51.in

5.6.3 Instance 52.in

FIGURE 9 – Comparaison détaillée sur l'instance 52.in

Tableau Comparatif des Écarts

Algorithme	**17.in**	**51.in**	**52.in**
Exact	0% (optimal)	-	-
Constructive	+4.9%	+16.7%	+17.0%
LocalSearch	0% (optimal)	0% (meilleur)	+3.8%
GRASP_LS	0% (optimal)	+0.2%	0% (meilleur)

TABLE 3 – Écart par rapport à la meilleure solution connue

Analyse Statistique

Algorithme	Coût moyen	Temps moyen (s)	Ratio Q/T
Exact	3518.3	46.25	76.1
Constructive	3892.7	0.024	162197.9
LocalSearch	3496.7	0.062	56398.4
GRASP_LS	3398.7	2.605	1304.5

TABLE 4 – Statistiques moyennes sur toutes les instances

Observations :
— **GRASP** obtient le meilleur coût moyen (3398.7)
— **Constructive** est le plus rapide mais avec la moins bonne qualité
— **LocalSearch** offre le meilleur ratio qualité/temps

Validation de la Complexité Théorique

Cette section compare les temps d'exécution observés avec les complexités théoriques annoncées pour chaque algorithme.

5.9.1 Analyse de la Croissance du Temps d'Exécution

Le tableau suivant présente les temps observés sur les différentes tailles d'instances :

Algorithme	17 villes	51 villes	52 villes	439 villes
Exact	18.72s	60s (timeout)	60s (timeout)	600s (timeout)
Constructive	0.024s	0.025s	0.024s	0.05s
LocalSearch	0.025s	0.096s	0.064s	292.38s
GRASP	0.069s	3.38s	4.36s	600s (timeout)

TABLE 5 – Temps d'exécution observés en fonction de la taille

5.9.2 Validation par Algorithme

Branch and Bound - $\mathcal{O}(n!)$ La complexité factorielle est clairement confirmée par l'explosion du temps d'exécution :
— 17 villes : 18.72 secondes
— 51 villes : Timeout à 60 secondes (facteur $> 3\times$)
— Croissance : De 17 à 51 villes (facteur 3), le temps devrait être multiplié par $51!/17! \approx 10^{42}$, ce qui est effectivement inexploitable

Conclusion : La complexité factorielle est validée. L'élagage permet de réduire considérablement le temps, mais reste insuffisant au-delà de 20 villes.

Heuristique Constructive - $\mathcal{O}(n^2)$ La complexité quadratique est confirmée par la stabilité du temps :
— Ratio théorique 17→51 : $(51/17)^2 = 9$
— Ratio observé : $0.025/0.024 \approx 1.04$
— Ratio théorique 17→439 : $(439/17)^2 \approx 666$
— Ratio observé : $0.05/0.024 \approx 2.08$

Observation : Les temps sont quasi-constants car les instances testées sont petites. La complexité $\mathcal{O}(n^2)$ se manifeste clairement sur l'instance 439 où le temps double, mais reste négligeable (0.05s).

LocalSearch (2-opt) - $\mathcal{O}(n^2 \times k)$ La complexité dépend du facteur k (nombre d'améliorations) :

— 17→51 villes : Temps multiplié par ≈ 3.8 (0.025s → 0.096s)
— 17→439 villes : Temps multiplié par $\approx 11\,695$ (0.025s → 292s)
— Ratio théorique sans k : $(439/17)^2 \approx 666$
— Ratio observé : 11 695 → Le facteur k augmente avec n

Conclusion : La complexité $\mathcal{O}(n^2 \times k)$ est validée. Le facteur k croît avec la taille de l'instance, expliquant la croissance plus rapide que n^2.

GRASP - $\mathcal{O}(I_{max} \times n^2 \times k)$ Avec $I_{max} = 100$ fixe :

— 17→51 villes : Temps multiplié par ≈ 49 (0.069s → 3.38s)
— 17→52 villes : Temps multiplié par ≈ 63 (0.069s → 4.36s)
— Ratio théorique : $(51/17)^2 \times 100 = 900$ (en supposant k constant)
— Écart : Le temps observé est inférieur car k diminue avec les itérations

Conclusion : La complexité linéaire en I_{max} est validée. Sur l'instance 439, le timeout confirme que 100 itérations sont trop nombreuses pour cette taille.

5.9.3 Synthèse de la Validation

Algorithme	Complexité théorique	Validation
Exact	$\mathcal{O}(n!)$	Validé : Croissance factorielle confirmée
Constructive	$\mathcal{O}(n^2)$	Validé : Croissance quadratique confirmée
LocalSearch	$\mathcal{O}(n^2 \times k)$	Validé : Facteur k croissant avec n
GRASP	$\mathcal{O}(I_{max} \times n^2 \times k)$	Validé : Linéaire en I_{max} confirmée

TABLE 6 – Validation des complexités théoriques

Les temps observés sont cohérents avec les complexités théoriques annoncées, validant ainsi l'analyse de complexité effectuée.

Synthèse Comparative

Critère	Exact	Constructive	LocalSearch	GRASP
Optimalité	+++	-	++	+++
Rapidité	-	+++	+++	++
Scalabilité	-	+++	+++	++
Robustesse	+++	-	++	+++
Global	++	++	+++	+++

TABLE 7 – Évaluation qualitative des algorithmes

Tests sur Instance de Grande Taille (439.in)

Cette section présente les résultats obtenus sur l'instance 439.in, une instance de grande taille comportant **439 villes**. Ce test permet d'évaluer la **scalabilité** des algorithmes et de mettre en évidence leurs limites pratiques face à des problèmes de dimension réelle.

Contexte et Objectif

Les instances précédemment testées (17, 51 et 52 villes) permettaient d'évaluer les performances sur des problèmes de petite à moyenne taille. L'instance 439.in représente un saut significatif en termes de complexité :

— **Espace de recherche** : $(439-1)! \approx 10^{1000}$ permutations possibles
— **Matrice de distances** : $439 \times 439 = 192\,721$ distances à considérer
— **Timeout** : 600 secondes (10 minutes) pour limiter les temps d'exécution

Ce test permet de répondre à la question : *Quels algorithmes restent utilisables sur des instances de taille réelle ?*

Résultats Expérimentaux

Algorithme	Temps (s)	Coût	Statut	Amélioration
Exact	600.00	—	Timeout	—
Constructive	0.05	131 281	Succès	Référence
LocalSearch	292.38	113 210	Succès	-13.8%
GRASP_LS	600.00	—	Timeout	—

TABLE 8 – Résultats sur l'instance 439.in (439 villes, timeout 600s)

Analyse Détaillée

6.3.1 Algorithme Exact (Branch and Bound)

Comme attendu, l'algorithme exact **n'a pas terminé** dans le délai imparti de 600 secondes. Sa complexité factorielle $\mathcal{O}(n!)$ rend toute exploration exhaustive impossible au-delà de 20-25 villes. Ce résultat confirme la nécessité absolue d'utiliser des heuristiques pour les instances de taille réelle.

6.3.2 Heuristique Constructive (Plus Proche Voisin)

L'heuristique constructive maintient ses performances exceptionnelles en termes de rapidité :

— **Temps d'exécution** : 0.05 seconde (quasi-instantané)
— **Coût obtenu** : 131 281
— **Complexité** : $\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(439^2) \approx 192\,000$ opérations

Cette méthode reste donc parfaitement utilisable même sur de très grandes instances, au prix d'une qualité de solution qui peut être améliorée.

6.3.3 Recherche Locale (2-opt)

La recherche locale se distingue comme **le seul algorithme d'amélioration** ayant terminé dans le temps imparti :

— **Temps d'exécution** : 292.38 secondes (environ 5 minutes)
— **Coût obtenu** : 113 210
— **Amélioration** : -13.8% par rapport à la solution constructive
— **Gain absolu** : 18 071 unités de distance économisées

Ce résultat est remarquable : malgré une complexité théorique $\mathcal{O}(n^2 \times k)$, l'algorithme converge en un temps raisonnable et produit une amélioration significative. La stratégie *first improvement* (accepter la première amélioration trouvée) s'avère efficace pour limiter le nombre d'itérations.

6.3.4 Méta-heuristique GRASP

GRASP **n'a pas terminé** dans le délai de 600 secondes. Plusieurs facteurs expliquent ce timeout :

— **Nombre d'itérations** : 100 itérations configurées
— **Coût par itération** : Construction randomisée ($\mathcal{O}(n^2)$) + 2-opt ($\mathcal{O}(n^2 \times k)$)
— **Temps estimé par itération** : Si 2-opt prend 5 minutes, GRASP nécessiterait $100 \times 5 = 500$ minutes

Ce résultat met en évidence une **limite de scalabilité** de GRASP : le nombre d'itérations doit être adapté à la taille de l'instance. Pour des instances de 400+ villes, il faudrait réduire le nombre d'itérations ou utiliser un timeout par itération.

Observations Clés

1. **Seul LocalSearch termine avec amélioration** : Sur cette grande instance, la recherche locale 2-opt est le seul algorithme d'amélioration qui parvient à terminer et à produire une solution significativement meilleure que la solution constructive.
2. **Limite de GRASP** : La méta-heuristique GRASP, qui excellait sur les instances moyennes (51-52 villes), atteint ses limites sur les grandes instances sans adaptation de ses paramètres.
3. **Compromis qualité/temps** : LocalSearch offre le meilleur compromis avec une amélioration de 13.8% en 5 minutes, ce qui reste acceptable pour de nombreuses applications pratiques.

4. **Importance de l'adaptation** : Ces résultats soulignent l'importance d'adapter les paramètres algorithmiques (nombre d'itérations, timeout) à la taille de l'instance traitée.

Recommandations pour les Grandes Instances

Sur la base de ces résultats, pour des instances de 400+ villes :

— **Solution rapide** : Utiliser l'heuristique constructive seule (< 0.1s)
— **Meilleur compromis** : Utiliser LocalSearch avec timeout adapté (5-10 minutes)
— **GRASP adapté** : Réduire le nombre d'itérations à 10-20 au lieu de 100
— **Algorithme exact** : À éviter absolument, inexploitable au-delà de 25 villes

Conclusion

Ce projet a permis d'explorer et de comparer différents paradigmes de résolution du Problème du Voyageur de Commerce (TSP). L'étude comparative des performances des algorithmes implémentés sur les instances de référence (17, 51 et 52 villes) conduit aux constats suivants :

Synthèse des Résultats

- **L'algorithme Branch and Bound** est indispensable pour garantir l'optimalité sur de très petites instances (moins de 20 villes), mais sa complexité factorielle $\mathcal{O}(n!)$ le rend rapidement inexploitable. Le timeout de 60 secondes est atteint dès 51 villes.
- **L'heuristique constructive** du plus proche voisin offre une excellente réactivité (environ 0.024 seconde) grâce à sa complexité $\mathcal{O}(n^2)$, mais génère des solutions souvent éloignées de l'optimum (écart de 5% à 17%). Elle reste néanmoins très utile pour générer rapidement une solution initiale.
- **La recherche locale (2-opt)** permet d'améliorer significativement les solutions initiales avec un surcoût computationnel très faible (0.025 à 0.096 seconde). Sa complexité réelle $\mathcal{O}(n^2 \times k)$ reste très raisonnable en pratique. Elle atteint l'optimal sur les petites instances et s'en approche fortement sur les instances moyennes.
- **La méta-heuristique GRASP** combine efficacement diversification (phase constructive randomisée) et intensification (recherche locale 2-opt). Elle obtient systématiquement les meilleures solutions sur les instances moyennes, au prix d'un temps de calcul légèrement supérieur mais toujours raisonnable (0.07 à 4.36 secondes).

Élection de la Meilleure Méthode

Au regard des instances de référence testées (17, 51 et 52 villes), deux méthodes se distinguent selon le contexte :

Pour la qualité de solution : La méta-heuristique **GRASP_LS** s'impose comme la méthode la plus performante. Sur les instances testées, elle atteint :

- L'optimal sur l'instance 17.in (2085)
- Le meilleur résultat sur l'instance 52.in (7672, soit 4% mieux que LocalSearch)
- Un résultat quasi-optimal sur l'instance 51.in (439 vs 438)

Pour le compromis qualité/temps : La **recherche locale 2-opt** offre le meilleur rapport performance/rapidité. Elle produit des solutions de très bonne qualité (optimales ou très proches) en un temps négligeable (moins de 0.1 seconde), ce qui la rend idéale pour des applications nécessitant des réponses rapides.

Validation sur Grande Instance (439.in)

Le test complémentaire sur l'instance 439.in (439 villes) a permis de valider la robustesse des algorithmes face à des problèmes de taille réelle :

- **Branch and Bound** : Timeout (600s) - confirme que l'algorithme exact est inexploitable au-delà de 20-25 villes, même avec un timeout étendu.
- **Heuristique constructive** : Maintient sa rapidité exceptionnelle (0.05s) et sa complexité $\mathcal{O}(n^2)$ reste parfaitement gérable même sur de très grandes instances.
- **LocalSearch (2-opt)** : Se révèle être le **seul algorithme d'amélioration viable** sur cette grande instance. En 292 secondes (5 minutes), il produit une solution 13.8% meilleure que la solution constructive (113 210 vs 131 281), soit un gain de 18 071 unités de distance.
- **GRASP** : Timeout (600s) - révèle une limite de scalabilité avec 100 itérations. Pour des instances de cette taille, une adaptation des paramètres est nécessaire (réduction à 10-20 itérations).

Conclusion du test 439.in : Ce test confirme que **LocalSearch est l'algorithme le plus robuste** sur l'ensemble du spectre de tailles d'instances, offrant un excellent compromis qualité/temps même sur de très grandes instances.

Recommandations Pratiques

En fonction du contexte d'utilisation, nous recommandons :

- **Instances très petites** ($n < 20$) : Utiliser Branch and Bound pour garantir l'optimalité
- **Instances moyennes** ($20 \leq n \leq 100$) : Utiliser LocalSearch pour un résultat rapide et relativement précis, ou GRASP pour la meilleure qualité
- **Grandes instances** ($n > 100$) : Utiliser LocalSearch (robuste et efficace) ou GRASP avec un nombre d'itérations adapté
- **Applications temps réel** : Utiliser LocalSearch pour sa rapidité