Fiche de cours 5 : Equations différentielles Linéaires

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps de base $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Equations différentielles du premier ordre

1.1 Equations homogènes (sans second membre)

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = 0$)
Soient $a \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I et y une fonction dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $y' + ay = 0$ sur I.
(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $y = \lambda e^{-A}$ sur I.
Si de plus une condition initiale $y(x_0) = y_0$ est imposée, avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, alors la valeur de la constante λ est fixée ; l'équation avec condition initiale possède une unique solution.

1.2 Equations avec second membre

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$; elle est définie par :

$$\forall x \in I, y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}dt.$$

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, solutions générale et particulière)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur I. Soit de plus y une fonction dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $y' + ay = b$ sur I.
(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, sur I, on ait

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-A}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

Théorème : (Principe de superposition)
Soient $a, b_1, b_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Si y_1 est une solution particulière sur I de $y' + a(x)y = b_1(x)$ et si y_2 est une solution particulière sur I de $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution particulière sur I de $y' + a(x)y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

1.3 Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante

Pour résoudre une équation différentielle du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$:
• Trouver **toutes** les solutions de l'équation homogène associée $y' + a(x)y = 0$. Ces solutions sont les $\lambda_0 e^{-A(x)}$, avec $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ et A primitive de a sur I.
• Trouver **une** solution particulière $\bar{y}$ de l'équation avec second membre $y' + a(x)y = b(x)$, à l'aide de la méthode de **variation de la constante** :
On cherche $\bar{y}$ sous la forme

$$\bar{y} = \lambda(x)e^{-A(x)}.$$

On obtient $(\lambda' e^{-A} - \lambda A' e^{-A}) + a\lambda e^{-A} = b$ soit après simplifications $\boxed{\lambda' = be^A}$. On cherche alors λ primitive quelconque de be^A.
• Les solutions de $y' + a(x)y = b(x)$ sont alors les $\bar{y} + \lambda_0 e^{-A(x)}$, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$.
• Si de plus une condition initiale est imposée, alors on ajuste la constante λ_0 en conséquence.

1.4 Recherche d'une solution particulière pour des équations différentielles linéaires <u>à coefficients constants</u>, pour des seconds membres $b(x)$ spécifiques

On considére l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $y' + ay = b(x)$, où $a \in \mathbb{K}$. Soit P un polynôme de degré n, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{K}$.

- **Equations** $y' + ay = P(x)e^{kx}$:
  On cherche une solution sous la forme $x \mapsto Q(x)e^{kx}$, où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré :
  1. $deg(Q) \leq n$ si $k \neq -a$;
  2. $deg(Q) \leq n + 1$ si $k = -a$.
- **Pour** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **: Equations** $y' + ay = P(x)\cos(kx)$ ou $y' + ay = P(x)\sin(kx)$:
  On cherche, à l'aide de la méthode ci-dessus, une solution complexe $y_{\mathbb{C}}$ de $y' + ay = P(x)e^{\imath kx}$. Alors $\Re(y_{\mathbb{C}})$ est une solution particulière de $y' + ay = P(x)\cos(kx)$ et $\Im(y_{\mathbb{C}})$ est une solution particulière de $y' + ay = P(x)\sin(kx)$.
- **Pour** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **: Equations** $y' + ay = P(x)\mathrm{ch}(kx)$ ou $y' + ay = P(x)\mathrm{sh}(kx)$:
  On cherche, à l'aide de la méthode ci-dessus, une solution y^+ de $y' + ay = P(x)e^{kx}$ et une solution y^- de $y' + ay = P(x)e^{-kx}$. Alors $\frac{y^+ + y^-}{2}$ est une solution particulière de $y' + ay = P(x)\mathrm{ch}(kx)$ et $\frac{y^+ - y^-}{2}$ est une solution particulière de $y' + ay = P(x)\mathrm{sh}(kx)$, d'après le principe de superposition.

2 Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

2.1 Equations homogènes (sans second membre)

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle polynôme caractéristique de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

• **Cas complexe** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. Si $\underline{\Delta \neq 0}$, soient r_1 et r_2 les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
2. Si $\underline{\Delta = 0}$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

• **Cas réel** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1. Si $\underline{\Delta > 0}$, soient r_1 et r_2 les racines (réelles) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
2. Si $\underline{\Delta = 0}$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Si $\underline{\Delta < 0}$, soient $r + i\omega$ et $r - i\omega$ les racines (complexes conjuguées) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x))\, e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on peut aussi mettre sous la forme $x \mapsto \lambda \sin(\omega x + \phi)e^{rx}$ ou $x \mapsto \lambda \cos(\omega x + \phi)e^{rx}$, $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$.

Si de plus une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ est fixée, avec $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, alors la valeur des constantes est fixée. L'équation avec condition initiale possède une unique solution.

2.2 Equations avec second membre

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ sur I. Soit de plus $y : I \to \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $ay'' + by' + cy = d$ sur I.
(ii)

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\widetilde{y}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

Théorème : (Principe de superposition)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, $d_1, d_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Si y_1 est une solution particulière sur I de $ay'' + by' + cy = d_1(x)$ et si y_2 est une solution particulière sur I de $ay'' + by' + cy = d_2(x)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution particulière sur I de $ay'' + by' + cy = \lambda_1 d_1(x) + \lambda_2 d_2(x)$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

2.3 Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres spécifiques

Soient $a, b, c, k \in \mathbb{K}, a \neq 0$, P un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

– **Equation de la forme** $ay'' + by' + cy = P(x)e^{kx}$ **:**
  On cherche les solutions sous la forme $x \mapsto Q(x)e^{kx}$, où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré :
  1. $deg(Q) \leq n$ si k n'est pas racine du polynôme $aX^2 + bX + c$.
  2. $deg(Q) \leq n + 1$ si k est racine simple du polynôme $aX^2 + bX + c$.
  3. $deg(Q) \leq n + 2$ si k est racine double du polynôme $aX^2 + bX + c$.

- **Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: Equations** $ay''+by'+cy=P(x)\cos(kx)$ ou $ay''+by'+cy=P(x)\sin(kx)$:
  On cherche, à l'aide de la méthode ci-dessus, une solution complexe $y_{\mathbb{C}}$ de $ay''+by'+cy=P(x)e^{\imath kx}$. Alors $\Re(y_{\mathbb{C}})$ est une solution particulière de $ay''+by'+cy=P(x)\cos(kx)$ et $\Im(y_{\mathbb{C}})$ est une solution particulière de $ay''+by'+cy=P(x)\sin(kx)$.
- **Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: Equations** $ay''+by'+cy=P(x)\mathrm{ch}(kx)$ ou $ay''+by'+cy=P(x)\mathrm{sh}(kx)$:
  On cherche, à l'aide de la méthode ci-dessus, une solution y^+ de $ay''+by'+cy=P(x)e^{kx}$ et une solution y^- de $ay''+by'+cy=P(x)e^{-kx}$. Alors $\frac{y^++y^-}{2}$ est une solution particulière de $ay''+by'+cy=P(x)\mathrm{ch}(kx)$ et $\frac{y^+-y^-}{2}$ est une solution particulière de $ay''+by'+cy=P(x)\mathrm{sh}(kx)$, d'après le principe de superposition.

3 Rappel : primitives des fonctions usuelles

On suppose $a>0$.

Fonction	Primitive	Ensemble de définition de la primitive
x^α avec $\alpha\neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}$)
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
a^x avec $a>0,\ a\neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[,k\in\mathbb{Z}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[,k\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[,k\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\coth x = -\frac{\cos x}{\sin x}$	$]k\pi,\pi+k\pi[,k\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\|\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\|$	$]k\pi,\pi+k\pi[,k\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\|$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[,k\in\mathbb{Z}$
$\tanh^2 x$	$x-\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$\dfrac{1}{\tanh x}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{a+x}{a-x}\right\|$	$]-\infty,-a[$ ou $]-a,a[$ ou $]a,+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$	$]-a,a[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|$	$]-\infty,-a[$ ou $]a,+\infty[$