

Projet Maths

Matthias ZDRAVKOVIC, Ameen MOHD FAIRUZ

Mai 2023

1 Développements mathématiques

1. a) On part de la loi normale bidimensionnelle :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - \mu)\Sigma^{-1}(z - \mu)\right)$$

On pose

$$\Sigma = U \cdot \Lambda \cdot U^T$$

$$\Leftrightarrow \det \Sigma = \det U \cdot \det \Lambda \cdot \det(U^T)$$

$$(\det U)^2 = 1 \text{ car c'est une matrice orthogonale}$$

$$\Leftrightarrow \det \Sigma = \det \Lambda$$

avec $\Sigma \in M_2(\mathbb{R})$ matrice symétrique positive définie, $U \in M_2(\mathbb{R})$ matrice orthogonale et $\Lambda \in M_2(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients positifs.

On pose

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

avec

$$\Sigma^{-1} = U \cdot \Lambda^{-1} \cdot U^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b \cos^2 \theta + a \sin^2 \theta}{ab} & \frac{b \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta \cos \theta}{ab} \\ \frac{b \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta \cos \theta}{ab} & \frac{b \sin^2 \theta + a \sin^2 \theta}{ab} \end{pmatrix}$$

On injecte dans la formule de $f_Z(z)$:

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - \mu_1 & y - \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b \cos^2 \theta + a \sin^2 \theta}{ab} & \frac{b \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta \cos \theta}{ab} \\ \frac{b \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta \cos \theta}{ab} & \frac{b \sin^2 \theta + a \sin^2 \theta}{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} \exp\left(-\frac{1}{2ab} \begin{pmatrix} x - \mu_1 & y - \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \cos^2 \theta + a \sin^2 \theta & b \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta \cos \theta \\ b \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta \cos \theta & b \sin^2 \theta + a \sin^2 \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix}\right)$$

Calculons le produit matriciel A dans l'exponentielle :

$$A = \begin{pmatrix} x - \mu_1 & y - \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \cos^2 \theta + a \sin^2 \theta & b \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta \cos \theta \\ b \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta \cos \theta & b \sin^2 \theta + a \sin^2 \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = ((a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)(x - \mu_1) + \cos \theta \sin \theta (b - a)(y - \mu_2))(x - \mu_1) + ((b \sin^2 \theta + a \cos^2 \theta)(y - \mu_2) + \cos \theta \sin \theta (b - a)(x - \mu_1))(y - \mu_2)$$

$$\Leftrightarrow A = (a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)(x - \mu_1)^2 + \cos \theta \sin \theta (b - a)(x - \mu_1)(y - \mu_2) + (b \sin^2 \theta + a \cos^2 \theta)(y - \mu_2)^2 + \cos \theta \sin \theta (b - a)(x - \mu_1)(y - \mu_2)$$

$$\Leftrightarrow A = (a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)(x - \mu_1)^2 + 2 \cos \theta \sin \theta (b - a)(x - \mu_1)(y - \mu_2) + (b \sin^2 \theta + a \cos^2 \theta)(y - \mu_2)^2$$

$$\Leftrightarrow A = a \sin^2 \theta (x - \mu_1)^2 + b \cos^2 \theta (x - \mu_1)^2 + 2 \cos \theta \sin \theta (b - a)(x - \mu_1)(y - \mu_2) + b \sin^2 \theta (y - \mu_2)^2 + a \cos^2 \theta (y - \mu_2)^2$$

$$\Leftrightarrow A = a(\sin^2 \theta (x - \mu_1)^2 + \cos^2 \theta (y - \mu_2)^2) + 2 \cos \theta \sin \theta (b - a)(x - \mu_1)(y - \mu_2) + b(\sin^2 \theta (y - \mu_2)^2 + \cos^2 \theta (x - \mu_1)^2)$$

$$\Leftrightarrow A = a((x - \mu_1)^2 \sin^2 \theta + (y - \mu_2)^2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta (x - \mu_1)(y - \mu_2)) + b((y - \mu_2)^2 \sin^2 \theta + (x - \mu_1)^2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta (x - \mu_1)(y - \mu_2))$$

$$\Leftrightarrow A = a((x - \mu_1) \sin \theta - (y - \mu_2) \cos \theta)^2 + b((x - \mu_1) \cos \theta + (y - \mu_2) \sin \theta)^2$$

On obtient donc :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} \exp\left(-\frac{((x-\mu_1)\sin\theta - (y-\mu_2)\cos\theta)^2}{2b} - \frac{((x-\mu_1)\cos\theta + (y-\mu_2)\sin\theta)^2}{2a}\right) = K$$

$$\Leftrightarrow \frac{((x-\mu_1)\sin\theta - (y-\mu_2)\cos\theta)^2}{2b} + \frac{((x-\mu_1)\cos\theta + (y-\mu_2)\sin\theta)^2}{2a} = -\ln(K2\pi\sqrt{ab})$$

$$\Leftrightarrow \frac{((x-\mu_1)\sin\theta - (y-\mu_2)\cos\theta)^2}{2b \ln\left(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}}\right)} + \frac{((x-\mu_1)\cos\theta + (y-\mu_2)\sin\theta)^2}{2a \ln\left(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}}\right)} = 1$$

Ici, le centre de l'ellipse est donné par $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\sqrt{2a \log\left(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}}\right)}$ est la demi-longueur de l'axe principal et $\sqrt{2b \log\left(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}}\right)}$ la demi-longueur de l'axe secondaire, K est la constante de normalisation et θ est l'angle de rotation de l'ellipse.

1. b) Pour calculer la probabilité qu'un point tiré selon la loi Z appartienne à la surface interne S_k délimitée par l'ellipse d'isodensité K , on intègre la densité de Z par la surface de l'ellipse:

$$P(Z \in S_k) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi^2 \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}t(z-\mu)\Sigma^{-1}(z-\mu)\right) dz$$

$$\Leftrightarrow \int \int_{S_k} \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} \exp\left(-\frac{[(x-\mu_1)\cos\theta + (y-\mu_2)\sin\theta]^2}{2a} - \frac{[(x-\mu_1)\sin\theta - (y-\mu_2)\cos\theta]^2}{2b}\right) dx dy$$

Pour simplifier les calculs, on fait un changement de variable:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{(x-\mu_1)\cos\theta + (y-\mu_2)\sin\theta}{\sqrt{2a}} \\ x_2 = \frac{(x-\mu_1)\sin\theta - (y-\mu_2)\cos\theta}{\sqrt{2b}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2a}\cos\theta x_1 + \sqrt{2b}\sin\theta y_1 + \mu_1 \\ y = \sqrt{2a}\sin\theta x_1 - \sqrt{2b}\cos\theta y_1 + \mu_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial x_1} = \sqrt{2a}\cos\theta ; \quad \frac{\partial x}{\partial y_1} = \sqrt{2b}\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \sqrt{2a}\sin\theta ; \quad \frac{\partial y}{\partial y_1} = -\sqrt{2b}\cos\theta$$

En changeant (x, y) à (x_1, y_1) , nous avons maintenant:

$$\int \int_{S_k} \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} \exp(-x_1^2 - y_1^2) \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial x}{\partial y_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial y_1} \end{array} \right| dx_1 dy_1$$

$$\Leftrightarrow \int \int_{S_k} \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} \exp(-x_1^2 - y_1^2) \left| -\sqrt{4ab}\cos^2\theta - \sqrt{4ab}\sin^2\theta \right| dx_1 dy_1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \int_{S_k} \frac{2\sqrt{ab}}{2\pi\sqrt{ab}} \exp(-x_1^2 - y_1^2) dx_1 dy_1 \\
&\Leftrightarrow \int \int_{S_k} \frac{1}{\pi} \exp(-x_1^2 - y_1^2) dx_1 dy_1
\end{aligned}$$

Changement en base polaire: on utilise $x_1 = r \cos \varphi$ et $y_1 = r \sin \varphi$

$$\begin{aligned}
&\int \int_{S_k} \frac{1}{\pi} \exp(-r^2) r dr d\varphi \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} r e^{-r} d\varphi dr \\
&\Leftrightarrow \int_0^r 2r e^{-r} dr
\end{aligned}$$

Or, ici il faut utiliser r = l'équation de l'ellipse en base (r, φ)

Pour cela, nous reprenons l'équation de l'ellipse trouvée à la question 1.a)

$$\begin{aligned}
&\frac{((x - \mu_1) \sin \theta - (y - \mu_2) \cos \theta)^2}{2b \ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})} + \frac{((x - \mu_1) \cos \theta + (y - \mu_2) \sin \theta)^2}{2a \ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{\ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})} + \frac{y_1^2}{\ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{r^2}{\ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})} = 1 \\
&\Leftrightarrow r = \sqrt{\ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})}
\end{aligned}$$

Nous utilisons cette équation de r comme borne superieure de notre intégrale:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{\ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})}} 2r e^{-r} dr \\
&\Leftrightarrow \left[-e^{r^2} \right]_0^{\sqrt{\ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})}} \\
&\Leftrightarrow -e^{\ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})} + e^0
\end{aligned}$$

Nous trouvons donc:

$$\begin{aligned}
&p = P(Z \in S_k) \\
&\Leftrightarrow p = 1 - 2\pi K \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

2. Intuitivement, on a envie de montrer que les estimateurs de μ et Σ sont :

$$\mu = \left(\frac{\sum_{i=1}^N X_i}{\sum_{i=1}^N Y_i} \right) \Leftrightarrow \mu = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^N z_i}{N}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_1)^2 & \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_1)(y_i - \mu_2) \\ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_1)(y_i - \mu_2) & \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu_2)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T$$

Montrons le grâce à la fonction log-vraisemblance. Pour commencer, on va trouver l'estimateur de μ en maximisant la fonction log-vraisemblance :

$$\begin{aligned} \mu &\rightarrow \ln \mathcal{L}(\mu | z_i) \\ \Leftrightarrow \ln \mathcal{L}(\mu | z_i) &= \ln \prod_{i=1}^N \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (z_i - \mu)\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\ln\left(\frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (z_i - \mu)\right)\right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma|}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N ((z_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (z_i - \mu)) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma|}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i^T \Sigma^{-1} z_i - z_i^T \Sigma^{-1} \mu - \mu^T \Sigma^{-1} z_i + \mu^T \Sigma^{-1} \mu) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma|}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N z_i^T \Sigma^{-1} z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N z_i^T \Sigma^{-1} \mu + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu^T \Sigma^{-1} z_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu^T \Sigma^{-1} \mu \end{aligned}$$

On dérive par rapport à μ et on cherche le maximum. En sachant que pour n'importe quel vecteur v de taille 2 et matrice M de taille 2×2 , on a¹² :

$$\frac{\partial (v^T M v)}{\partial v} = (M + M^T) v$$

$$\frac{\partial v^T M}{\partial v} = M^T$$

On utilise ces formules pour la dérivation matricielle :

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mu | z_i)}{\partial \mu} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N z_i^T \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^N (\Sigma^{-1} z_i)^T - \sum_{i=1}^N (\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T) \cdot \mu \right) = 0$$

¹<https://www.di.ens.fr/~fbach/courses/fall2009/formulaire.pdf>

²<https://en.wikipedia.org/wiki/Matrixcalculus>

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N (\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T) \cdot \mu = \sum_{i=1}^N z_i^T \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^N (z_i^T (\Sigma^{-1})^T) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \mu = \frac{\sum_{i=1}^N z_i^T \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^N (z_i^T (\Sigma^{-1})^T)}{\sum_{i=1}^N (\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T)} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \mu = \sum_{i=1}^N z_i^T \frac{(\sum_{i=1}^N \Sigma^{-1} + ((\Sigma^{-1})^T))}{\sum_{i=1}^N (\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T)} \\
&\Leftrightarrow N \cdot \hat{\mu} = \sum_{i=1}^N z_i^T \\
&\Leftrightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^N z_i^T}{N}
\end{aligned}$$

Or $\frac{\sum_{i=1}^N z_i^T}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N z_i}{N}$ car c'est une somme d'un vecteur colonne. On retrouve donc bien l'estimateur de μ . On fait la même chose pour Σ :

$$\begin{aligned}
&\Sigma \rightarrow \ln \mathcal{L}(\Sigma | z_i) \\
&\Leftrightarrow \ln \mathcal{L}(\Sigma | z_i) = \ln \prod_{i=1}^N \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (z_i - \mu)\right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (z_i - \mu)\right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \ln \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma|}} + \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{2}(z_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (z_i - \mu) \right)
\end{aligned}$$

On dérive par rapport à Σ et on cherche le maximum.

On a aussi une autre formule de dérivation Matricielle³ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \det \Sigma}{\partial \Sigma} &= \det(\Sigma) (\Sigma^{-1})^T \\
\frac{\partial a^T \Sigma^T b}{\partial \Sigma} &= ab^T
\end{aligned}$$

avec a et b pas des fonctions de Σ .

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\Sigma | z_i)}{\partial \Sigma} = \sum_{i=1}^N (2\pi \sqrt{\det \Sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(\frac{1}{2\pi \sqrt{\det \Sigma}} \right)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T = 0$$

³<https://www.quora.com/What-is-the-differentiation-of-the-determinant-of-a-matrix-to-the-matrix-itself-and-why>

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\Sigma|z_i)}{\partial \Sigma} = \sum_{i=1}^N (\sqrt{\det \Sigma} \cdot (-\frac{1}{2 \det \Sigma \sqrt{\det \Sigma}}) \cdot \det(\Sigma)(\Sigma^{-1})^T) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T = 0$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\Sigma|z_i)}{\partial \Sigma} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \cdot (\Sigma^{-1})^T - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T = 0$$

Or on sait que Σ est une matrice de rotation, donc $\Sigma^T = \Sigma^{-1}$.

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\Sigma|z_i)}{\partial \Sigma} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Sigma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \Sigma = \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T$$

$$\Leftrightarrow N \cdot \Sigma = \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \mu)(z_i - \mu)^T}{N}$$