Projet Maths

Matthias Zdravkovic, Ameen Mohd Fairuz

Mai 2023

1 Développements mathématiques

1. a) On part de la loi normale bidimensionnelle :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} exp(-\frac{1}{2}(z-\mu)^T \Sigma^{-1}(z-\mu))$$

On pose

$$\Sigma = U \cdot \Lambda \cdot U^T$$

$$\Leftrightarrow \det \Sigma = \det U \cdot \det \Lambda \cdot \det(U^T)$$

$$(\det U)^2 = 1 \text{ car c'est une matrice orthogonale}$$

$$\Leftrightarrow \det \Sigma = \det \Lambda$$

avec $\Sigma \in M_2(\mathbb{R})$ matrice symétrique positive définie, $U \in M_2(\mathbb{R})$ matrice orthogonale et $\Lambda \in M_2(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients positifs.
On pose

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

avec

$$\Sigma^{-1} = U \cdot \Lambda^{-1} \cdot U^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b\cos^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} & \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} \\ \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} & \frac{b\sin^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} \end{pmatrix}$$

On injecte dans la formule de $f_Z(z)$:

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} exp(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b\cos^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} & \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} \\ \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} & \frac{b\sin^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix})$$

$$\Leftrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} exp(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b\cos^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} & \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} \\ \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} & \frac{b\sin^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix})$$

$$\Leftrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} exp(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 \end{pmatrix} \frac{1}{ab} \cdot \begin{pmatrix} b\cos^2\theta + a\sin^2\theta & b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta \\ b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta & b\sin^2\theta + a\sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix})$$

$$\Leftrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} exp(-\frac{1}{2ab} \begin{pmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b\cos^2\theta + a\sin^2\theta & b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta \\ b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta & b\sin^2\theta + a\sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix})$$

Calculons l'intérieur de l'exponentielle :

$$\Leftrightarrow \frac{[(x-\mu_1)\cdot\cos(\theta) + (y-\mu_2)\cdot\sin(\theta)]^2}{2a\cdot\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})} + \frac{[(x-\mu_1)\cdot\sin(\theta) - (y-\mu_2)\cdot\cos(\theta)]^2}{2b\cdot\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} exp(\frac{[(x-\mu_1)\cdot\cos(\theta) + (y-\mu_2)\cdot\sin(\theta)]^2}{2a\cdot\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})} + \frac{[(x-\mu_1)\cdot\sin(\theta) - (y-\mu_2)\cdot\cos(\theta)]^2}{2b\cdot\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})}) = 1$$

Ici, le centre de l'ellipse est donné par $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\sqrt{2a\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})}$ est la demi-longueur de l'axe principal et $\sqrt{2b\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})}$ la demi-longueur de l'axe secondaire, K est la constante de normalisation et θ est l'angle de rotation de l'ellipse.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$