Projet Maths

Matthias Zdravkovic, Ameen Mohd Fairuz

Mai 2023

1 Développements mathématiques

1. a) On part de la loi normale bidimensionnelle :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} exp(-\frac{1}{2}(z-\mu)^T \Sigma^{-1}(z-\mu))$$

On pose

$$\Sigma = U \cdot \Lambda \cdot U^T$$

$$\Leftrightarrow \det \Sigma = \det U \cdot \det \Lambda \cdot \det(U^T)$$

$$(\det U)^2 = 1 \text{ car c'est une matrice orthogonale}$$

$$\Leftrightarrow \det \Sigma = \det \Lambda$$

avec $\Sigma \in M_2(\mathbb{R})$ matrice symétrique positive définie, $U \in M_2(\mathbb{R})$ matrice orthogonale et $\Lambda \in M_2(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients positifs.
On pose

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

avec

$$\Sigma^{-1} = U \cdot \Lambda^{-1} \cdot U^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b\cos^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} & \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} \\ \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} & \frac{b\sin^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} \end{pmatrix}$$

On injecte dans la formule de $f_Z(z)$:

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} exp(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b\cos^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} & \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} \\ \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} & \frac{b\sin^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix})$$

$$\Leftrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} exp(-\frac{1}{2ab} \begin{pmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b\cos^2\theta + a\sin^2\theta & b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta \\ b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta & b\sin^2\theta + a\sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix})$$

Calculons le produit matriciel A dans l'exponentielle :

$$A = \begin{pmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b\cos^2\theta + a\sin^2\theta & b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta \\ b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta & b\sin^2\theta + a\sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = ((a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)(x-\mu_1) + \cos\theta\sin\theta(b-a)(y-\mu_2))(x-\mu_1) + ((b\sin^2\theta + a\cos^2\theta)(y-\mu_2) + \cos\theta\sin\theta(b-a)(x-\mu_1))(y-\mu_2)$$

$$\Leftrightarrow A = (a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)(x-\mu_1)^2 + \cos\theta\sin\theta(b-a)(x-\mu_1)(y-\mu_2) + (b\sin^2\theta + a\cos^2\theta)(y-\mu_2)^2 + \cos\theta\sin\theta(b-a)(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\Leftrightarrow A = (a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)(x-\mu_1)^2 + 2\cos\theta\sin\theta(b-a)(x-\mu_1)(y-\mu_2) + (b\sin^2\theta + a\cos^2\theta)(y-\mu_2)^2$$

$$\Leftrightarrow A = a\sin^2\theta(x-\mu_1)^2 + b\cos^2\theta(x-\mu_1)^2 + 2\cos\theta\sin\theta(b-a)(x-\mu_1)(y-\mu_2) + b\sin^2\theta(y-\mu_2)^2 + a\cos^2\theta(y-\mu_2)^2$$

$$\Leftrightarrow A = a(\sin^2\theta(x-\mu_1)^2 + \cos^2\theta(y-\mu_2)^2) + 2\cos\theta\sin\theta(b-a)(x-\mu_1)(y-\mu_2) + b(\sin^2\theta(y-\mu_2)^2 + \cos^2\theta(x-\mu_1)^2)$$

$$\Leftrightarrow A = a((x-\mu_1)^2\sin^2\theta + (y-\mu_2)^2\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta(x-\mu_1)(y-\mu_2)) + b((y-\mu_2)^2\sin^2\theta + (x-\mu_1)^2\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta(x-\mu_1)(y-\mu_2))$$

$$\Leftrightarrow A = a((x-\mu_1)\sin\theta - (y-\mu_2)\cos\theta)^2 + b((x-\mu_1)\cos\theta + (y-\mu_2)\sin\theta)^2$$

On obtient donc :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} exp(-\frac{((x-\mu_1)\sin\theta - (y-\mu_2)\cos\theta)^2}{2b} - \frac{((x-\mu_1)\cos\theta + (y-\mu_2)\sin\theta)^2}{2a}) = K$$

$$\Leftrightarrow f_Z(z) = \frac{((x-\mu_1)\sin\theta - (y-\mu_2)\cos\theta)^2}{2b} + \frac{((x-\mu_1)\cos\theta + (y-\mu_2)\sin\theta)^2}{2a} = -\ln(K2\pi\sqrt{ab})$$

$$\Leftrightarrow f_Z(z) = \frac{((x-\mu_1)\sin\theta - (y-\mu_2)\cos\theta)^2}{2b\ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})} + \frac{((x-\mu_1)\cos\theta + (y-\mu_2)\sin\theta)^2}{2a\ln(\frac{1}{K2\pi\sqrt{ab}})} = 1$$

Ici, le centre de l'ellipse est donné par $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\sqrt{2a\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})}$ est la demi-longueur de l'axe principal et $\sqrt{2b\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})}$ la demi-longueur de l'axe secondaire, K est la constante de normalisation et θ est l'angle de rotation de l'ellipse.

1. b)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$