Résolution d'équations différentielles à l'aide de réseaux de neurones

Matthieu Carreau, encadré par Stam Nicolis et Pascal Thibaudeau

Juillet 2022

1 Etude d'un exemple

On cherche à tester nos méthodes sur l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{dx} + cos(2\pi x) = 0 \\ \Psi(0) = A \end{cases} \tag{1}$$

Cette équation avec condition initiale admet une unique solution analytique :

$$\tilde{\Psi}(x) = A - \frac{1}{2\pi} sin(2\pi x) \tag{2}$$

On cherche des solutions numériques approchées sous la forme de séries de Fourier tronquées avec M harmoniques :

$$\begin{cases} \Psi(x) = A + \tilde{\mathcal{N}}(x, \vec{p}) \\ \tilde{\mathcal{N}}(x, \vec{p}) = \sum_{m=1}^{M} A_m sin(2\pi m x) \end{cases} \tag{3}$$

Les coefficients $(A_m)_{m \in [\![1,M]\!]}$ sont des paramètres à ajuster. On cherche à obtenir la solution analytique, i.e $\forall m \in [\![1, M]\!], A_m = -\frac{1}{2\pi}\delta_1^m$. On définit une fonction d'erreur pour ces solutions potentielles, en s'interressant aux N points suivants : $\forall i \in [\![1, N]\!], x_i = \frac{i}{N-1}$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (\sum_{m=1}^{M} 2\pi m A_m cos(2\pi m x_i) + cos(2\pi x_i))^2 \tag{4}$$

On calcule alors la dérivée partielle de cette erreur par rapport à chaque paramètre A_l :

$$\frac{\partial E}{\partial A_l} = \sum_{i=1}^{N} (\sum_{m=1}^{M} 2\pi m A_m cos(2\pi m x_i) + cos(2\pi x_i)) 2\pi l cos(2\pi l x_i) \tag{5}$$

Les deux méthodes suivantes ont pour objectif de trouver les coefficient $(A_m)_{m \in [\![1,M]\!]}$ qui minimisent E.

1.1 Première méthode : inversion d'un système linéaire

On cherche à résoudre le système linéaire donné par : $\forall m \in [\![1, M]\!], \frac{\partial E}{\partial A_l} = 0$, on définit pour cela les matrices suivantes :

$$\mathcal{M} = (r_{m,l})_{(m,l)\in[\![1,M]\!]^2}, \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_M \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\forall (m,l) \in [\![1, N]\!]^2, \begin{cases} r_{m,l} = 2\pi ml \sum_{i=1}^{N} cos(2\pi m x_i) cos(2\pi l x_i) \\ b_l = -l \sum_{i=1}^{N} cos(2\pi x_i) cos(2\pi l x_i) \end{cases} \tag{7}$$

On résoud le système en écrivant l'équation matricielle le représentant :

$$\mathcal{M}\vec{A} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{A} = \mathcal{M}^{-1}\vec{b} \tag{8}$$

(Attention pour certains paramètres comme $(M = 5, N = 10)$, $\mathcal{M}$ n'est pas inversible)

1.2 Seconde méthode : descente de gradient

On définit les paramètres suivants :

$$\alpha > 0, \vec{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} A_1^{(0)} \\ A_2^{(0)} \\ \vdots \\ A_M^{(0)} \end{pmatrix}, \vec{g}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial A_1^{(0)}} \\ \frac{\partial E^{(0)}}{\partial A_2^{(0)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial E^{(0)}}{\partial A_M^{(0)}} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

Puis on calcule itérativement :

$$\vec{A}^{(k+1)} = \vec{A}^{(k)} - \alpha \vec{g}^{(k)} \tag{10}$$