Génie Industriel et Mathématiques Appliquées

Projet de Modélisation Stochastique Appliquée

SPEISMANN Matthieu et POURMY Thomas

Ecole Nationale Supérieure des Mines de Nancy

Année scolaire 2025-2026

I Modélisation du problème

1. Les colonies sont les lieux où un vélo peut se trouver à un instant t donné. Ainsi, les colonies sont ici :
   - Les stations de vélo $(S_i)_{i\in[1,N]}$
   - Les trajets orientés $(T_{i,j})_{i,j\in[1,N],i\neq j}$ entre les stations.

   Cela permet de définir l'état du système à l'instant t par :
   $$X(t) = (X_{S_1}(t), ..., X_{S_N}(t), X_{T_{1,2}}(t), X_{T_{1,3}}(t), ..., X_{T_{N,N-1}}(t))$$
   où, à l'instant t, $X_{S_i}(t)$ le nombre de vélo à la station S_i et $X_{T_{i,j}}(t)$ le nombre de vélo sur le trajet orienté $T_{i,j}$.
   De plus, le nombre de vélo total dans le système est constant et égal à K d'où la contrainte
   $$\sum_{i=1}^{N} X_{S_i}(t) + \sum_{i\neq j} X_{T_{i,j}}(t) = K$$
   L'espace d'état est donc $\mathbb{E} = \left\{x \in \mathbb{N}^{N+N(N-1)} \mid \sum x = K\right\}$. Celui-ci est discret et fini.

2. TODO
3. On a besoin de définir des vecteurs de transition e_{S_i} et $e_{T_{i,j}}$ pour les départs de station et les trajets tel que :

   > $\forall x = (X_{S_1}, ..., X_{S_N}, X_{T_{1,2}}, ..., X_{T_{N,N-1}})$ un état du système.
   >
   > - $x \pm e_{S_i} = (X_{S_1}, ..., X_{S_i} \pm 1, ..., X_{S_N}, X_{T_{1,2}}, ..., X_{T_{N,N-1}})$
   > - $x \pm e_{S_i} = (X_{T_{i,j}}, ..., X_{S_N}, X_{T_{1,2}}, ..., X_{T_{i,j}} \pm 1, ..., X_{T_{N,N-1}})$

   On remarque qu'il existe deux types de transitions possibles :
   - <u>Un départ de station :</u>
     Si un vélo est disponible, un client commence un trajet depuis la station S_i avec un taux λ_i.
     Ensuite, il a une probabilité $p_{i,j}$ de se diriger vers la station S_j et ainsi de faire le trajet $T_{i,j}$.
     Donc ce type de transition est défini dans le générateur par $Q(x, x - e_{S_i} + e_{T_{i,j}}) = \lambda_i p_{i,j} 1_{x_{S_i}>0}$.
   - <u>Une fin de trajet :</u>
     Chaque trajet de i vers j met un temps exponentiel de paramètre $\mu_{i,j}$ à se terminer.
     Donc ce type de transition est défini dans le générateur par $Q(x, x + e_{S_j} - e_{T_{i,j}}) = \mu_{i,j} x_{T_{i,j}}$.

   On conclut donc que le générateur infinitésimal Q du processus de Markov est défini par :
   $$Q = \begin{cases} Q(x, x - e_{S_i} + e_{T_{i,j}}) = \lambda_i p_{i,j} 1_{x_{S_i}>0} \\ \\ Q(x, x + e_{S_j} - e_{T_{i,j}}) = \mu_{i,j} x_{T_{i,j}} \\ \\ Q(x, x) = -\sum\limits_{x\neq y} Q(x, y) \end{cases}$$

4. Les paramètres du modèle sont les suivants :
   - λ_i sont les taux d'arrivée de client à la station S_i. En clients par heure (équivalent à intensité de départ de vélo par station)
   - $\mu_{i,j}$ sont les taux d'arrivée du trajet de i vers j, inverses du temps moyen du trajet de la station i vers la station j. En heures^{-1}.
   - $p_{i,j}$ les probabilités qu'un client qui parte de la station i réalise un trajet vers la station j. Sans unité.
   - K le paramètre global du nombre total de vélo dans le système.

II Calibration des paramètres

Avec les données fournies, on peut estimer les paramètres du modèle comme :

- λ_i est estimé par le nombre de départs de vélo par heure à la station S_i.
- $\mu_{i,j}$ est estimé par l'inverse du temps moyen du trajet de la station i vers la station j.
- $p_{i,j}$ est estimé par la probabilité d'aller en j partant de i.
- K est le nombre total de vélo dans le système, égal à la somme des vélos présents dans les stations à l'instant initial.

III Simulation

1. Voir le code de la simulation dans le notebook disponible sur le dépot :

2. En calculant d'une variable aléatoire qui vaut 1 si une station est vide après 150 heures, et 0 sinon, on peut calculer cette proportion. Avec 200 simulations, on obtient un résulat de 0.735

3. On calcule un intervalle de confiance à 95% pour la proportion de temps où une station est vide.
   Avec p la proportion calculée à la question précédente et M le nombre de simulations, on trouve l'intervalle de confiance suivant :

$$\left[p - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{M}}, p + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{M}}\right] = [0.674, 0.796]$$

4. En conservant l'historique de l'état des stations au cours d'une simulation, on détermine numériquement cette valeur, ici égale à 0.748.

5. En vertu de la propriété d'ergodicité du processus de Markov, et de la propriété PASTA, on s'attend à ce que ces deux résulats coincident et soient tout deux proches de la probbilité stationnaire d'une station vide.
   Cela est vérifié ici car, en effet, les deux valeurs obtenues sont proches, en particulier, le pourcentage du temps où il existe une station vide est compris dans l'intervalle de confiance de la probabilité d'avoir une station vide après 150 heures.