Projet Cinquième Année

Mise en place d'un module de stress test "quantitatif" de portefeuille.

Majeure Ingénierie Financière et Statistique

Noélie DEBS
Alexandre DELACHE
Guillaume DURIEU
Matthieu MERINIS

Monsieur Grégory VICENS

Mars 2020

Table des matières

1 Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Mr Vicens pour son soutien et son aide tout au long de l'élaboration de notre projet.

Nous tenons également à remercier Mr Marie et Mme Halconruy pour les connaissances qu'ils nous ont transmis à travers leurs cours et pour leurs réponses à nos questions.

2 Introduction

Les institutions financières se servent du risque pour générer des profits. En investissant leurs capitaux dans les marchés financiers, elles prennent un risque qui peut leur rapporter des bénéfices mais aussi leur causer de fortes pertes. Plus grand sera le risque, plus grandes seront les perspectives de gains mais plus grandes seront les pertes si elles ont lieu. Pour contrôler la prise de risque de la part des institutions financières et pour éviter une nouvelle crise comme la crise des subprimes, les institutions financières appliquent désormais des « stress test » à leurs entités pour tester leur résistance à un potentiel choc et prendre les mesures adéquates pour s'en prémunir.

Notre projet a pour objectif la mise en place d'un module de stress test "quantitatif" sur un portefeuille. Cela signifie que nous allons prendre en compte les différents risques qui pèsent sur notre portefeuille pour essayer de prédire les pertes potentielles et étudier la réaction du portefeuille face à un choc financier important. Pour se faire, nous allons d'abord étudier et comprendre les notions et définitions afférentes à notre projet pour ensuite maitriser les mécanismes de « stress test ». Enfin, nous implémenterons nos différents modèles sous Python afin de les appliquer à notre portefeuille d'instruments financiers.

Comme notre portefeuille est composé d'actions, nous en donnerons d'abord une définition avant d'introduire notre portefeuille qui est le CAC 40. Puis nous introduirons la notion de « stress test » ou test de résistance bancaire et les risques qui y sont liés. Ensuite, nous développerons les modèles mathématiques qui nous permettront de quantifier les risques pesant sur notre portefeuille. Dans une troisième partie, nous appliquerons ces modèles à notre portefeuille d'actifs. Enfin, nous étudierons nos résultats.

3 CAC 40

3.1 Les actions

Une action est un titre de propriété négociable représentant une part du capital social d'une entreprise. Si vous détenez des actions, vous êtes détenteur d'une part du capital. Cela vous permet l'obtention de certains droits :

- le droit aux dividendes : part du bénéfice distribué aux actionnaires décidés en assemblée générale et versés annuellement ou trimestriellement
- le droit de vote lors des assemblées générales
- le droit à l'information : toute société cotée doit communiquer à ses actionnaires certaines informations comme sa situation financière

Ces droits sont proportionnels au nombre d'actions détenues et à la classe de l'action.

Le prix d'une action reflète la valeur future espérée par l'entreprise et non sa valeur actuelle. Si l'entreprise se porte bien et qu'elle décide d'émettre de nouvelles actions, celles-ci auront une valeur plus importante que les précédentes. A l'inverse, si les résultats de l'entreprise ne sont pas à la hauteur des espérances, ou pour une quelconque raison extérieure, les résultats prévus sont plus faibles, la valeur de l'action sera plus faible. Une entreprise émet des actions le plus souvent pour faire face à un besoin de capital. Si une entreprise décide de s'introduire en bourse, elle émet alors des actions qui seront cotées sur le marché. Ces actions auront un prix qui varie en fonction de l'offre et de la demande. Plus la demande est forte, plus le prix sera élevé. Si les actions ne sont pas cotées en bourse, elles peuvent tout de même s'échanger, de gré à gré à un prix fixé entre le vendeur et l'acheteur.

Pour calculer la valeur d'une action, il existe deux indicateurs de risques : le BNPA et le PER. Le BNPA (Bénéfice Net par Action) représente le rapport entre le bénéfice net et le nombre d'actions en circulation. Le PER (Price Earning Ratio) d'une action est le rapport entre le cours de l'action divisé par le BNPA. Un PER élevé reflète l'optimisme du marché quant à l'évolution des bénéfices futurs (et inversement).

$$PER = \frac{Cours\ de\ l'action(Prix)}{BNPA} = \frac{Prix * Nombre\ d'actions}{Benefice} = \frac{Capitalisation}{Benefice}$$

3.2 Définition du CAC 40

Nous avons décidé dans ce projet de travailler sur le CAC 40. Le CAC 40 est le principal indice boursier de référence regroupant les 40 plus grandes sociétés françaises cotées en Bourse. Le CAC 40 est constitué des 40 valeurs sélectionnées parmi les 100 plus importantes capitalisations boursières cotées à la Bourse de

Paris. Le CAC 40 a été créé le 31 décembre 1987 par la Compagnie des Agents de Change avec une base initiale de 1000 points. Il a vu officiellement le jour le 15 juin 1988. C'est le conseil scientifique de NYSE Euronext qui décide des valeurs qui entrent ou qui sortent de l'indice.

CAC signifie "Cotation Assistée en Continu" ce qui signifie que sa valeur varie en permanence tous les jours. L'indice 40 désigne le nombre de valeurs françaises qui composent l'indice. L'indice du CAC 40 est mis à jour toutes les 30 secondes et est publié les jours ouvrés de 9h à 17h30.

Ces entreprises sont choisies pour représenter l'économie nationale en couvrant l'ensemble des secteurs d'activité. On y trouve par exemple des groupes automobiles, des entreprises de luxe, des groupes industriels, des banques etc. Elles sont régulièrement mises à jour pour s'assurer que l'indice reste proche de la réalité. C'est le Comité scientifique des indices qui se réunit tous les trois mois pour décider de sa composition.

3.3 Calcul de l'indice du CAC 40

Depuis le 1er décembre 2003, le CAC 40 utilise le système de la capitalisation boursière flottante. Le flottant correspond aux nombre de titres d'une société circulant sur le marché. C'est la partie du capital librement négociable en bourse. Les actionnaires stables (fondateurs, famille,etc.) sont exclus du flottant.

L'indice du CAC 40 est calculé en continu en faisant la moyenne pondérée par la capitalisation boursière de chaque valeur des 40 actions. La capitalisation boursière d'une valeur représente le nombre de titres multiplié par leur cours. Chacune des sociétés du CAC 40 pondère un indice en fonction de la quantité de titres disponibles sur le marché. Ces pondérations varient d'une société à l'autre en fonction de sa capitalisation et des échanges survenus sur la valeur. Le poids de la capitalisation d'une valeur sur l'indice ne peut excéder 15%. Le CAC 40 est calculé hors dividendes, c'est à dire sans tenir compte des bénéfices répartis entre les actionnaires. Quand le cours d'un titre monte, son poids dans le CAC 40 augmente. Chaque société du CAC a un poids déterminé en fonction de sa capitalisation boursière. Parmi les poids les plus importants du CAC 40, on trouve Total, Sanofi, l'Oréal, LVMH ou VINCI.

La cotation en bourse présente de nombreux avantages pour une entreprise, notamment la possibilité de recourir aux marchés pour se financer par l'émission de nouvelles actions, l'augmentation de capital ou par l'émission d'obligations. Les entreprises du CAC 40 lèvent ainsi plusieurs milliards d'euros sur Euronext chaque année. En revanche, une baisse du CAC 40 serait interprétée comme une diminution de la santé de l'économie française.

3.4 Mesure de risque : le Bêta

Le Bêta est un outil de mesure du risque d'un actif. Il correspond à la sensibilité de l'action d'une entreprise par rapport à un indice de référence. Plus le bêta d'une entreprise est élevé, plus les tendances de marché s'amplifient (et inversement). Il permet d'analyser le comportement d'un titre vis à vis de son indice. Le calcul du coefficient est valable à un instant donné et évolue dans le temps.

Il existe trois valeurs de Bêta :

- le bêta positif : plus il sera élevé, plus la valeur de l'action est sensible au mouvement de son marché de référence
- le bêta nul : l'actif et son marché ne sont pas du tout corrélés, leurs variations sont totalement indépendantes
- le bêta négatif : la valeur de l'action évolue en sens inverse de son marché

Pour illustrer cela, prenons un exemple sur une action du CAC 40 : cette action possède un Bêta de 1.4. Si l'indice du CAC 40 varie de 10%, l'action va varier de 14%. Les mouvements du marché vont donc s'amplifier. Or, si cette action possède un Bêta de 0.4, elle variera moins que son marché de référence. En effet, si le CAC 40 varie de 10%, l'action ne variera que de 4%. Au contraire, si le bêta d'une action est négatif de - 1.4%, l'action baissera de -14% si son marché gagne 10%, et inversement.

Le coefficient Bêta est calculé en comparant la rentabilité de l'actif à celle de son marché de référence.Pour le calculer, il faut disposer de la série historique des prix d'une entreprise et des prix de son indice de référence. Mathématiquement, le Bêta de l'actif financier se définit comme le rapport de la covariance de la rentabilité de l'actif avec celle de l'indice par la variance de la rentabilité de l'indice.

$$\beta = \frac{cov(r_p, r_m)}{var(r_m)}$$

avec r_p la rentabilité de l'actif et r_m la rentabilité du marché de référence

4 Le « stress test » (Test de résistance bancaire)

4.1 Définition et origines

Le but du « stress test » est de simuler des conditions économiques et financières extrêmes négatives mais réalistes afin d'en étudier les conséquences sur les banques et de mesurer leur capacité de résistance à de telles situations. C'est un test visant à mesurer l'impact du choc macro-économique sur les volumes et les risques de crédits portés par les banques sur la valeur de leurs actifs et in fine sur leur ratio de solvabilité. Les stress tests ont été mis en place à la fin des années 1990. Leur objectif n'est pas seulement de protéger une banque de la faillite mais de protéger le système financier dans son ensemble. En effet si une banque fait faillite, cela entrainera des difficultés dans les autres banques et donc dans l'économie toute entière. Cela s'appelle le risque systémique. Le « stress test » consiste donc à définir plusieurs scénarios à un horizon d'un ou deux ans qui seront appliqués aux portefeuilles des banques afin de mesurer leur évolution. Ce « stress test » permettra de faire apparaître la capacité des banques à affronter les tempêtes économiques. Dans ce cas, les banques devront soit augmenter leurs fonds propres (avec ou sans l'aide de l'Etat), soit opérer des restructurations comme par exemple une réduction des engagements de crédits.

L'accord de Bâle III (16 décembre 2010) est un accord sur la régulation des banques et l'amélioration des « stress test ». Il intervient suite à la crise financière de 2007 et au fait que la qualité des fonds propres de couverture se dégradait. La solidité des institutions face à une crise de liquidité est également remise en question. Ce qui a changé avec Bâle III, c'est la mise en place de pénalités pour le retrait prématuré de certains produits par les clients pour que ces produits puissent rentrer dans la catégorie des ressources stables permettant de financer des crédits long termes. Cela assure une plus grande stabilité pour les institutions bancaires. Il instaure également la prise en compte du statut du client (ancienneté, fonds domiciliés à la banque ou pas, etc.) pour la qualification de ressources stables pour les produits financiers qu'il contracte. Il durcit également les critères pour délivrer des prêts aux PME et TPE et met en place plusieurs ratios de contrôle tels que le ratio de liquidité et le ratio d'effet de levier. Il instaure également la révision de la couverture de certains risques, la redéfinition des fonds propres réglementaires, et réhausse le capital de base (apport des actionnaires et bénéfices retenus) de 2% à 7% pour les banques. Bâle III est appliqué aux banques d'envergures à l'international, contrairement à son prédécesseur, l'accord de Bâle II, qui n'était pas respecté par les Américains notamment.

Depuis la crise de 2008, les « stress tests » se multiplient. En Europe, un test a été réalisé en 2010 pour rassurer les clients des banques durant la crise grecque. Ce test a étudié la capacité de résistance de 91 banques européennes à deux scénarios négatifs : le premier sur une détérioration de l'économie sur 2 ans et le second sur un choc sur une dette souveraine. Les 4 banques françaises testées (BNP, Crédit agricole, BPCE et Société Générale) ont révélé des résultats positifs. Un nouveau test plus dur a été réalisé l'année suivante et 8 banques ont échoué et ont dû rapidement augmenter leurs fonds propres à hauteur de 2,5 milliards d'euros. Nos 4 banques françaises ont, là encore, passé l'examen avec succès.

En 2018, l'Autorité Bancaire Européenne a mené un « stress test » sur 48 banques de l'Union Européenne dont six françaises (BNP Paribas, Crédit Mutuel, BPCE, Crédit Agricole, La Banque Postale et Société Générale). Il ressort de ce test que la solidité des bilans des banques européennes s'est améliorée du fait des obligations d'augmentation des fonds propres. Cependant, de bons résultats aux « stress tests » ne signifient pas l'absence de risque de crise bancaire. D'une part, une crise économique plus violente que le scénario testé peut ébranler la solidité des banques. D'autre part, mesurer précisément les risques pris par les banques est un exercice délicat qui n'a rien d'une science exacte.

Les « stress tests » sont donc menés par les banques centrales. En Europe, c'est l'Autorité européenne des Banques (EBA créée depuis 2011 après la crise financière) qui organise régulièrement ces tests. On les applique dans d'autres secteurs comme les assurances ou l'énergie ainsi que dans des grandes entreprises.

Les « stress tests » reposent sur deux types de scénarios possibles. Ils portent surtout sur ce à quoi est exposé la banque :

- L'intermédiation : ensemble des activités développées par les intermédiaires financiers afin de mettre en relation l'offre et la demande de capitaux
- L'activité crédits
- Les portefeuilles de placement

Le premier scénario est le scénario « central » ou « de base » fondé à partir des principales prévisions macroéconomiques existantes sur les 2 ou 3 années à venir. Le second scénario repose sur des prévisions dégradées comme la baisse du PIB, un krach boursier, un effondrement de l'immobilier, une crise majeure ou une hausse du chômage. Ce scénario évalue la capacité de résistance, l'impact du choc sur les valeurs des actifs donc leur ratio de solvabilité et le repérage préventif des problèmes pouvant affecter les systèmes bancaires. Les résultats des scénarios sont comparés et révèlent si les banques disposent de suffisamment de fonds propres pour faire face à une forte dégradation de l'économie.

Un test de résistance bancaire peut être ascendant ou descendant. Un « stress test » ascendant, c'est lorsqu'une institution fournie à toutes les entités testées le même test mais que chaque entité évaluera sa résistance au choc en fonction de ses propres modèles. Un « stress test » descendant, quant à lui, c'est lorsque c'est l'institution qui se teste en fonction des résultats de ses entités et de ses modèles.

Mais il y a des limites à ces « stress test ». Les institutions bancaires ne peuvent pas donner des résultats trop dégradés ou catastrophiques. En effet, cela risquerait d'effrayer les marchés et les investisseurs. Le risque est alors de provoquer une crise contre lesquels les « stress test » sont censés justement les prévenir. Une autre limite est le fait que les risques systémiques sont encore trop peu pris en compte dans les « stress test » : les risques de liquidités et les risques souverains sont rarement pris en compte et sinon pour des catégories d'actifs précis (très court-terme en général). Mais l'augmentation du risque de défaillance d'un État fait peser sur les institutions financières des risques plus élevés de dépréciations de leurs actifs. Certaines banques et entreprises ont cependant déjà commencé à prendre en compte ces risques dans leurs tests en interne.

Pour mettre en place notre « stress test », nous avons d'abord défini des fonctions qui récupèrent les différentes actions et cours dont nous avons besoin. Puis nous n'avons gardé que les parties qui nous intéressaient qui sont le prix et la date. Nous avons ensuite créé la fonction définissant le mouvement brownien pour ensuite créer notre prédiction en prenant en compte la tendance. Après avoir accordé les échelles, nous avons réussi à obtenir une prévision des cours du CAC40.

4.2 Les risques pouvant peser sur un portefeuille d'instruments financiers

4.2.1 Le risque de marché

Le risque de marché est le risque de perte de la valeur de marché d'un portefeuille d'instruments financiers lié à l'évolution des marchés financiers. Il existe plusieurs risques de marché : le risque de taux, de change, de crédit, le risque action et le risque sur les matières premières. Le risque de marché a deux dimensions : quantitative (montant du risque de perte) et probabiliste (probabilité que cela arrive). Un bon indicateur pour mesurer le risque de crédit est la Value-at-Risk dite VaR que l'on détaillera dans la partie suivante.

4.2.2 Le risque de liquidité

Le risque de liquidité correspond au risque de ne pas pouvoir faire face aux créances. C'est l'impossibilité de clôturer, céder ou liquider une position. Ce phénomène se produit par exemple lorsque la banque se retrouve dans une situation ou les retraits sont plus importants que les dépôts (Grèce, 2015). Pour évaluer le risque de liquidité, le comité de Bâle a mis en place deux ratios : un ratio de liquidité à court terme (LCR, Liquidity Coverage Requirement) et un ratio de liquidité à long terme (NSFR, Net Stable Funding Ratio). Le LCR indique si la banque peut couvrir ses besoins sous 30 jours en cas de situations très dégradées. Il se définit comme suit :

$$LCR = \frac{Encours\ d'actifs\ liquides\ de\ haute\ qualite}{Sorties\ nettes\ de\ tresorerie\ sur\ les\ 30\ jours\ suivants} > 100\%$$

Les encours d'actifs liquides de haute qualité sont les actifs disposant d'une bonne liquidité même en cas de crise (titres d'États...). Le NSFR permet d'assurer à tout établissement financier un financement stable qui lui permet de poursuivre sainement ses activités pendant une période de 1 an dans un scénario de tensions prolongées. On le définit de la sorte :

$$NSFR = \frac{Montant\ de\ financement\ stable\ disponible}{Montant\ de\ financement\ stable\ exige} > 100\%$$

Ces deux ratios permettent d'évaluer le risque de liquidité d'une institution financière.

4.2.3 Le risque de contrepartie

Le risque de contrepartie correspond au risque de défaillance d'un emprunteur. L'emprunteur n'est plus en capacité de rembourser sa dette. Il correspond au montant que peut perdre le créancier sur son investissement. Il intervient généralement lorsque la situation de l'emprunteur se dégrade. Ce sont principalement des agences de notations qui mesurent le risque de crédit. Il n'est pas simple de mesurer ce risque car il est difficile de prévoir si telle ou telle contrepartie va faillir à ses engagements. Beaucoup de facteurs externes interviennent.

4.2.4 Le risque opérationnel

D'après le comité de Bâle, le risque opérationnel est le risque de perte provenant de processus internes inadéquats ou défaillants, de personnes et systèmes ou d'évènements externes. Concrètement, on parle de risque opérationnel lorsqu'un évènement perturbe le déroulement normal des processus métiers et qu'il génère une perte financière ou une dégradation de l'image de la banque. Le processus métier correspond à l'ensemble des tâches coordonnées en vue de fournir un produit ou un service à la clientèle. Pour chaque étape du processus, on associe tous les incidents susceptibles de se produire et de perturber l'aboutissement de la tâche. Pour chaque risque, on lui associe une perte et une probabilité d'occurrence. Cela va permettre de cartographier les risques et de définir des facteurs de risques. Les facteurs de risques sont les éléments quantitatifs susceptibles d'augmenter la probabilité de réalisation d'un risque. On calcule ensuite la perte maximale estimée en cas de réalisation avec une probabilité de 99% avec un horizon de temps donné (VaR). C'est un risque qui est en soit difficile à quantifier du fait du comportement imprévisible de chaque personne.

5 La Value-at-Risk (VaR)

5.1 Définition

La VaR est une mesure de référence du risque sur les marchés financiers. De façon générale, la Value-at-Risk représente le montant des pertes qui ne devrait pas être dépassé pour un niveau de confiance donné, sur un horizon temporel donné. On dit aussi qu'elle correspond à la perte maximale potentielle, dans des conditions normales de marché, qui ne devrait être atteinte qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné. Lorsqu'un gérant de portefeuille utilise une mesure de risque comme la VaR, il cherche une constatation de ce type : nous perdons moins de X euros dans les N prochains jours avec une probabilité de Y.

Que signifie par exemple VaR 1 jour de portefeuille = 10 millions de dollars avec un niveau de confiance de 95% ? Cela signifie qu'il n'y a seulement 5% de chances dans des conditions normales de marché pour qu'une perte supérieure à 10 millions de dollars puisse survenir.

5.2 Utilité et Utilisation de la VaR

L'objectif de la VaR fournit une mesure du risque total de portefeuille. Bien que la VaR puisse être utilisée pour la quantification des risques de marché, de crédit, de liquidité et des risques opérationnels, seule son application au risque de marché est principalement utilisée. Si la VaR estimée est trop élevée pour un investisseur, il peut réduire sa position en vendant des titres ou encore prendre des couvertures réduisant ainsi le risque global de son portefeuille. Elle est également utilisée dans l'évaluation des performances, le choix de placement ou encore dans la gestion du capital. Cette mesure de risque s'adresse donc aux professionnels de marché, aux institutions financières, aux entreprises non financières, aux régulateurs.

Deux organismes de contrôle font autorité concernant la solvabilité des banques en tant que principales gestionnaires de portefeuilles. Il s'agit du Comité de Bâle et la Banque des Règlements Internationaux (BRI). Pour une institution financière, la VaR est très utilisée car elle détermine le capital propre minimal qu'elle doit maintenir pour ne pas s'exposer à la faillite.

Les institutions financières exigent certaines règles pour le calcul de la VaR : la VaR doit être calculée sur un horizon de 10 jours pour un niveau de confiance de 99%. Les gérants de portefeuille s'intéressent donc à la perte potentielle qui sera dépassée avec une probabilité de 1%. Pour estimer la VaR, il est nécessaire d'avoir au moins une année d'observations. Les capitaux propres requis sont alors au moins égaux à 3 fois la VaR. Pour passer d'une VaR quotidienne à une VaR 10 jours, on multiplie donc la VaR 1 jour par $\sqrt{10}$. Dans le cas général, on aura :

$$VaR\ (N\ jours)\ =\ \sqrt{N}\ *\ VaR(1\ jour)$$

Pour le montant des capitaux propres, le régulateur exige 3 fois la VaR (N jours). Donc :

$$Capitaux\ propres = 3 * \sqrt{N} * VaR\,(1 jour)$$

Le plus souvent lorsque N est l'horizon, X le nombre de variations et Y le seuil de confiance, la VaR est le X * (1-Y) quantile de la distribution de probabilité des variations de valeur du portefeuille dans les N jours à venir.

Exemple : si j'ai 200 valeurs de PnL entre aujourd'hui et demain à 97%, la VaR sera le 6ème quantile.

$$VaR\ =\ 200 *\ (1\ -\ \frac{97}{100})\ =\ 200 * (\frac{100\ -\ 97}{100})\ =\ 6$$

5.3 Avantages et Inconvénients

La Value at Risk présente plusieurs avantages. Tout d'abord, elle donne une perception des pertes possibles dans un horizon de temps donné, avec une probabilité donnée. Elle peut s'appliquer à n'importe quel type d'actifs, ce qui explique probablement pourquoi ce modèle est encore très utilisé par les entreprises. De plus, la VaR est un indicateur très facile à lire et à interpréter. C'est un outil de communication puissant. Elle permet de comparer des portefeuilles d'instruments financiers et d'améliorer leurs performances ou leur sécurité.

En revanche, la VaR présente également des limites. En effet, elle se base sur un nombre d'hypothèses discutables comme la distribution normale des variations des prix des actifs alors qu'il peut arriver que les mouvements du marché ne suivent pas une loi normale. De plus, le fait de se baser sur le passé peut être discutable dans le sens où certaines crises ne ressemblent à aucune autre et que chacune a ses spécificités. Ensuite, un horizon de temps fixe ne prend pas en compte l'absence de liquidité sur un marché dû notamment à un krach. Il faut alors prolonger la durée de détention des produits car ils sont invendables. Enfin, les récentes crises et catastrophes ont montré que la VaR peut souvent être dépassée. Il est donc légitime de se poser la question de la viabilité de ce modèle et de son efficacité.

5.4 Formalisation Mathématique

Statistiquement, la VaR définie pour un taux de couverture de $\alpha\%$ correspond au quantile d'ordre α de la distribution de profits et pertes (P&L) associée à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs sur une période donnée.

Considérons un portefeuille d'actifs entre les dates 0 et T par un processus stochastique.

$$P = (P(t), 0 \leq t \leq T)$$

On note $P(T) = P_T$ la valeur du portefeuille à l'instant T et $P(0) = P_0$ la valeur du portefeuille à sa date d'estimation (à l'instant 0). La variation de la valeur du portefeuille pour une période de [0 ;T] appelée fonction P&L (profit and loss) est :

$$\Delta P = P_T - P_0$$

Si la valeur est positive, le portefeuille se sera valorisé. S'il est négatif, le portefeuille se sera dégradé.

La Value-at-Risk d'un portefeuille d'actifs pour une période de [0 ;T] avec un niveau de confiance $\alpha \in$ [0,1] est définie comme un montant noté VaR(α) telle que la variation ΔP observée ne sera inférieure au montant VaR(α) qu'avec une probabilité de (1-α). En d'autres termes, la perte de ce portefeuille pour la période [0 ;T] sera supérieure à |VaR(α)| avec une probabilité de (1-α).

$$P[\Delta P \leq VaR(\alpha)] = 1 - \alpha$$

$$P[\Delta P > VaR(\alpha)] = \alpha$$

$$VaR(\alpha) = F^{-1}(1 - \alpha)$$

Avec F la fonction de répartition de la variable aléatoire ΔP et F^{-1} la fonction inverse.

La VaR est un quantile de la distribution des P&L du portefeuille au niveau de confiance α sur un horizon de temps T. La VaR se fonde donc sur trois grands paramètres :

1. La distribution des profits et pertes du portefeuille d'actifs ou de l'actif
2. Le niveau de confiance (aussi appelé taux de couverture) généralement de 95% ou 99%
3. La période de détention de l'actif ou horizon temporel : l'horizon varie de 1 jour à plusieurs semaines. Plus l'horizon est long, plus les pertes peuvent être importantes.

5.5 Méthodes d'estimations de la VaR

Le calcul de la VaR nécessite donc de déterminer la distribution des risques possibles. Il existe plusieurs méthodes pour le calcul de la VaR : une méthode historique, une paramétrique comme par exemple la méthode de variance/covariance et une méthode de Monte Carlo qui requiert un grand nombre de simulations. Pour appliquer ces différentes méthodes, il faut tout d'abord déterminer les facteurs de risques. Ces facteurs de risques sont des variables fondamentales du marché (cours des titres, taux d'intérêts, taux de change, indices boursiers etc.) qui déterminent le risque de marché pour l'investisseur. Ils déterminent le prix des titres, des actifs, du portefeuille... La variation du portefeuille sur la période [0 ;T] est une fonction des variations de ces facteurs de risques :

$$\Delta P = f(\Delta X_1, \Delta X_2, ..., \Delta X_n)$$

où $X_1, ..., X_n$ sont les différents facteurs de risque. Les variations des facteurs de risque valent :

$$\Delta_k(t) = \frac{X_k(T) - X_k(T-1)}{X_k(T-1)}$$

avec $k = 1, ..., N$, $t = [0; T]$ et X_k l'ensemble des facteurs de risque

Il faut donc choisir le bon modèle d'évaluation f qui peut être linéaire comme les actions ou non linéaire si les actifs sont des options ou des obligations. Deuxièmement, les méthodes d'estimation de la VaR, exploitent les données historiques relatives à ces facteurs de risques pour estimer le quantile à un niveau de confiance α. Cette étape est fondamentale pour estimer les variations potentielles de la valeur du portefeuille dans le futur. Une fois les historiques des prix récupérés, le modèle d'évaluation et la méthode d'estimation choisie, nous pouvons estimer la distribution des pertes et profits qui nous servira à trouver la VaR de notre portefeuille.

Nous allons vous présenter ci-dessous, les trois méthodes d'estimation de la VaR avec leurs avantages et inconvénients.

5.5.1 VaR historique

La VaR historique est la méthode la plus simple d'utilisation. Cette approche est une méthode non paramétrique c'est-à-dire qu'on n'impose pas de distribution sur les rendements du portefeuille. Cependant elle repose sur l'hypothèse de stationnarité des variations des différents facteurs de risque pour l'horizon choisi. Un facteur de risque est un cash-flow généré par l'actif à un instant t quelconque.

L'objectif de cette méthode est d'estimer la distribution des variations des facteurs de risque par la distribution observée à partir des historiques. De cette distribution, on peut extraire un quantile qui permet de lire la VaR pour un seuil de confiance donné. Elle s'appuie très directement sur les variations passées pour estimer la distribution des variations futures.

On peut donc déterminer l'évolution du portefeuille (profits et pertes quotidiens) en les relevant sur une période choisie puis en les classant par ordre croissant. En fonction du nombre de valeurs (profits et pertes calculées) et de l'intervalle de confiance désiré, la VAR historique correspondra à la valeur des pertes et profits correspondantes.

La démarche pour réaliser cette méthode se compose en 4 étapes :

1. On identifie les facteurs de risque qui vont impacter mon portefeuille
2. A partir des données historiques collectées, on calcule les variations pour chaque facteur de risque
3. On adapte l'historique des rendements passés à la valorisation actuelle du portefeuille pour simuler aujourd'hui les gains et pertes à venir. On évalue donc le prix actuel du portefeuille et on estime la distribution des pertes et profits
4. On classe les P&L dans l'ordre croissant. La VaR, à un niveau de confiance α, sera la N variation la plus défavorable.

Exemple : si l'on dispose d'un échantillon de 1000 observations historiques de rendements avec un niveau de confiance de 95%, la VaR représentera la valeur du rendement qui correspond à la 50ème perte la plus forte.

L'avantage principal de cette méthode est qu'elle est simple au niveau du calcul et de l'interprétation. De plus, elle ne formule aucune hypothèse sur la distribution des rendements ou la linéarité des relations entre les prix et les facteurs de risque. Le fait que cette méthode soit non paramétrique lui évite d'estimer des paramètres au préalable.

En revanche, théoriquement cette méthode se base sur l'hypothèse de stationnarité signifiant que le futur se comporte comme le passé. Or, dans la réalité, ceci est peu probable. De plus, cette méthode rencontre des difficultés sur l'utilisation de ces données passées pour pouvoir estimer une perte. Les données historiques jouent le rôle le plus important dans l'estimation de la VaR. En effet, la méthode historique construit la distribution des rendements futurs du portefeuille sur la base des prix passés. Pour calculer la VaR, il faut donc une quantité importante de données historiques relatives à un grand nombre de facteurs de risques. La méthode ne tient pas compte des événements extrêmes et assigne le même poids pour toutes les données anciennes ou récentes. Or les données les plus récentes peuvent jouer un rôle plus important dans cette estimation. Les données sont également traitées comme si elles venaient de la même distribution de probabilité alors que celle-ci change au cours du temps. Le choix de la période d'observation peut donc poser problème. D'un côté, beaucoup de données sont nécessaires mais de l'autre la prise en compte de données trop anciennes pourrait affaiblir la pertinence de l'estimation.

5.5.2 VaR paramétrique

La VaR paramétrique estime la VaR d'un portefeuille d'actifs à partir d'une loi de distribution paramétrique de la distribution des profits et pertes de notre portefeuille. On distingue 5 étapes pour l'estimation de cette VaR :

1. On détermine un modèle d'évolution des gains/pertes du portefeuille en fonction des divers facteurs de risque
2. On choisit des lois paramétriques pertinentes qui correspondent aux qualités distributionnelles des facteurs de risque
3. On estime les paramètres de ces lois à partir des données passées suivant les méthodes statistiques classiques (comme par exemple la méthode des moments ou du maximum de vraisemblance)
4. On détermine la loi de distribution des pertes et profits à partir du modèle choisi
5. On calcule le quantile associé au niveau de confiance souhaité

Généralement, la loi de distribution la plus utilisée est la loi normale car ses propriétés permettent un calcul plus simple et plus rapide. L'avantage de cette méthode est qu'elle est là encore assez simple d'utilisation. En revanche, elle exige une connaissance de la loi de distribution des facteurs de risque. On peut donc par défaut utiliser la loi normale, ce qui n'est pas forcément le bon choix.

Il existe plusieurs méthodes paramétriques pour calculer la VaR. Dans notre projet, nous étudions un portefeuille d'actifs. La méthode la plus adaptée pour le calcul de VaR paramétrique est la méthode de variance-covariance. Cette méthode fut développée par JP Morgan en 1994 avec son système de RiskMetrics. La méthode de variance-covariance est une méthode paramétrique linéaire. Elle s'appuie sur 3 hypothèses fondamentales :

- Les distributions des variations des prix de marchés suivent un loi normale
- Les rendements des actifs sont stationnaires
- La relation entre les prix des actifs et les facteurs de risques sont linéaires

L'hypothèse de la normalité de la distribution de la valeur du portefeuille permet de dire que $\Delta P = P_T - P_0$ suit une loi normale $N \sim (E(\Delta P), \sigma(\Delta P))$. La VaR vaut donc au niveau de confiance $1 - \alpha$:

$$P[\Delta P \leq VaR(\alpha)] = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{\Delta P - E(\Delta P)}{\sigma(\Delta P)} \leq \frac{VaR(\alpha) - E(\Delta P)}{\sigma(\Delta P)}) = 1 - \alpha$$

On en déduit que :

$$\frac{VaR(\alpha) - E(\Delta P)}{\sigma(\Delta P)} = Z_{1-\alpha}$$

où $Z_{1-\alpha}$ est le quantile de la distribution de la loi normale centrée réduite. Or $Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$ donc la VaR vaut :

$$VaR(\alpha) = E(\Delta P) - Z_\alpha \sigma(\Delta P)$$

Sous ces hypothèses, les calculs sont rapides et simples et ne requiert que la matrice de variance-covariance des rendements du portefeuille. En revanche, elle ne s'applique pas aux portefeuilles contenant des produits optionnels car la distribution des rendements ne suit pas une loi normale. De plus, sur un portefeuille avec un très grand nombre d'actifs, la matrice de variance-covariance peut être volumineuse et complexe à calculer.

5.5.3 VaR Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo est un mélange des deux méthodes précédentes. Elle est généralement utilisée lorsqu'il est difficile de déterminer la loi de probabilité d'une distribution grâce à un raisonnement mathématique. Elle consiste à estimer la distribution de probabilité des gains et pertes du portefeuille à partir d'un grand nombre de simulations des comportements futurs possibles des facteurs de risque. On crée les simulations futures alors qu'elles sont données par le passé dans la méthode historique.

Cette méthode se constitue en 6 étapes :

1. On détermine un modèle d'évolution des P&L du portefeuille en fonction des facteurs de risque
2. On choisit un modèle paramétrique pour chaque facteur de risque
3. On estime les paramètres de ces modèles à partir des données historiques
4. On simule un grand nombre de P&L
5. On classe ces P&L dans l'ordre croissant
6. On détermine le quantile à partir de ces simulations et du niveau de confiance souhaité

La VaR Monte Carlo repose donc principalement sur la simulation de variables aléatoires des P&L.Dans notre projet, on veut que nos variables aléatoires soient corrélées entre elles. Pour cela, nous utilisons la méthode dite de Cholesky.

Théorème de la décomposition de Cholesky : Si A est une matrice symétrique définie positive, il existe au moins une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que : $A = LL^T$

Avant de démontrer ce théorème, rappelons ce que veut dire une matrice définie positive. Soit A une matrice carrée d'odre n symétrique (c'est à dire que $A^T = A$) à coefficients réelles. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Toutes les valeurs propres de M sont strictement positives
- Pour tout vecteur non nul X de $R_n, AL^tL > 0$

- Il existe une matrice inversible L telle que $A = L^t L$

Si elles sont respectées, on peut dire que A est définie positive

Démonstration par récurrence de la décomposition de Cholesky.
On pose n=1, A = λ avec $\lambda > 0$ et la seule solution est $L = \sqrt{\lambda}$
On suppose que la propriété est vraie au rang $n \geq 1$.
Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n+1. Il faut montrer l'existence et l'unicité de L triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs, d'ordre n+ 1 telle que : $A = LL^T$.
On peut écrire $A = \begin{pmatrix} A_n & X_n^T \\ X_n & a \end{pmatrix}$ et chercher L sous la forme $L = \begin{pmatrix} L_n & 0 \\ Y_n & \lambda \end{pmatrix}$
Ici, A_n est la sous-matrice principale d'ordre n de A, L_n est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs, d'ordre n, X_n et Y_n sont deux vecteurs lignes de taille n et a et λ sont deux réels strictement positifs.
On doit prouver l'existence et l'unicité de L_n, Y_n et

$$\lambda$$

Par les notations précédentes :

$$L^T L = A \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} L_n & 0 \\ Y_n & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_n^T & Y_n^T \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & X_n^T \\ X_n & a \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} L_n^T L_n = A_n \\ Y_n L_n^T = X_n \\ Y_n^T Y_n + \lambda^2 = a \end{cases}$$

Puisque A_n est symétrique définie positive, l'hypothèse de récurrence assure que la première égalité admet une solution L_n unique triangulaire inférieure à coefficients diagonaux >0.
Cette matrice L_n etant inversible,la deuxième égalité donne alors $Y_n = X_n(L_n^T)^{-1}$
Il reste la troisième égalité qui s'écrit $\lambda^2 = a - Y_n^T Y_n$ (T_n est maintenant connu).
Pour l'instant, on peut considérer que λ est l'une des deux racines carrés complexes du scalaire $a - Y_n^T Y_n$.
Avec un tel λ provisoire, on a effectivement $A = L^t L$. Or, on sait que det(A) > 0.
On a $det(L) = (detL_n)$ donc $det(A) = det(L^t L) = det(L^2) = (detL_n)^2 \lambda^2$
Ainsi $\lambda^2 > 0$. Ceci prouve que λ peut être choisi dans R^{+*}, et ce d'une façon unique. On a donc prouvé le théorème au rang n+1, ce qui démontre bien la décomposition de Cholesky.

Dans l'algorithme de Cholesky, on peut imposer que les éléments diagonaux de la matrice L soient tous positifs ce qui impliquerait que la décomposition de Cholesky est unique.
Soit $A = LL^T$ la décomposition de Cholesky de la matrice A définie positive.

On note $a_{i,j}$ et $l_{i,j}$ les coefficients d'indice i,j des matrices A et L.
D'une part, on cherche la matrice L tel que :

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{ij} \end{pmatrix}$$

L'égalité A $= LL^T$ permet par identification de calculer les $l_{i,j}$:

$$\begin{aligned} A = LL^T \Leftrightarrow \quad \forall i,j \in \{1,...,n\}, \quad a_{i,j} &= (LL^T)_{i,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [L]_{i,k}[L^T]_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} l_{i,k}l_{j,k} = \sum_{k=1}^{min(i,j)} l_{i,k}l_{j,k} \qquad (1) \end{aligned}$$

La somme est limitée supérieurement à min(i,j) car L est triangulaire inférieure. D'autre part, on sait que la matrice A est symétrique. L'identification dans A $= LL^T$ peut donc être limitée sans perdre aucune généralité au cas $j \leq i$. Pour tout entier j fixé $(1 \leq j \leq n)$, on doit satisfaire la relation suivante :

$$a_{ij} = (LL^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{i,k}l_{j,k}$$

avec $1 \leq j \leq i \leq n$. On trouve donc :

- pour i $=$j ;

$$\sum_{k=1}^{j} l_{j,k}^2 = a_{j,j} \Rightarrow l_{j,j}^2 = a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2 \Rightarrow l_{j,j} = \sqrt{(a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2)} \qquad (2)$$

- pour $j+1 \leq i \leq n$:

$$\sum_{k=1}^{j} l_{i,k}l_{j,k} = a_{i,j} \Rightarrow l_{j,j} = \frac{1}{l_{j,j}}(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k}l_{j,k}) \qquad (3)$$

Les coefficients de L peuvent donc être calculés colonne par colonne. Lors du calcul de la j-ème colonne, l'équation (2) donne le j-ème coefficient diagonal $l_{j,j} > 0$ (si le second membre n'est pas strictement positif, c'est que A n'est pas définie positive). On constate que $l_{j,j}$ est obtenu en fonction de $a_{j,j}$ et des coefficients déjà calculés dans L (sur la même ligne, mais sur les colonnes précédentes). L'équation (3) donne les termes subdiagonaux de la j-ème colonne de L. Chaque $l_{i,j}$ est obtenu en fonction de $a_{i,j}$, du coefficient diagonal $l_{j,j}$ (venant d'être calculé) et des termes déjà connus de L (sur les lignes i, j, mais sur des colonnes d'indice inférieure à j).
Cette méthode a donc l'avantage d'être peu couteuse en temps de calcul et permet de simuler un grand nombre de variables aléatoires corrélées entre elles.

En pratique :

1. On récupère l'historique

$$H = \begin{pmatrix} H_{1,1}......H_{1,n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ H_{m,1}....H_{m,n} \end{pmatrix}$$

   avec j = (1,...,m) la valeur des actifs et i = (1,...,n)

2. On calcule les rendements

$$H_{rendement} = \frac{H[i,j] - H[i-1,j]}{H[i-1,j]}$$

   Cela nous donne la matrice des rendements.

3. On calcule la volatilité. Pour calculer la volatilité, il faut calculer la matrice de variance-covariance :

$$COV(X,Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} V_{1,1}.....V_{1,n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ V_{m,1}....V_{m,n} \end{pmatrix}$$

4. On calcule le rendement moyen

$$\overline{H} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} H[i,j]$$

On obtient donc un vecteur ligne :

$$\overline{H} = [\overline{X_1}, ..., \overline{X_j}, ..., \overline{X_n}]$$

Pour chaque simulation, on va d'abord créer la matrice de vecteurs aléatoires gaussiens Z :

$$Z = \begin{pmatrix} 0,18................ \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ ....0,37 \end{pmatrix}$$

avec le nombre d'actifs en colonne et le nombre de jours en ligne.

On cherche la matrice L via la méthode de décomposition de Cholesky que l'on a vu plus haut :

$$L = Cholesky(\sigma)$$

avec $\sigma = LL^T$

On peut donc calculer les rendements

$$RendementsR = \begin{pmatrix} \overline{X_1}......\overline{X_j}......\overline{X_n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \overline{X_1}......\overline{X_j}......\overline{X_n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \overline{X_1}......\overline{X_j}......\overline{X_n} \end{pmatrix} + L.Z^T$$

Enfin, on détermine les rendements actualisés

$$Rendements\_actualise = Poids\_de\_l'actif.R^T + \begin{pmatrix} 1.....1.....1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 1.....1.....1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 1.....1.....1 \end{pmatrix}$$

On obtient un vecteur colonne des prix actualisés chaque jour.

$$Simulation = [Rendement\_actualise_{(1)}.........Rendement\_actualise_{(n)}]$$

On peut donc en déduire la VaR à 95%

$$Var_{95\%} = \frac{95^{eme}\ pire\ valeur\ finale}{\sqrt{nombre\ de\ jours\ simules}}$$

Cette méthode est la plus puissante, puisqu'elle autorise les produits non linéaires tels que les produits dérivés ou optionnels. De plus, les facteurs de risques peuvent suivre un grand nombre de lois de probabilités. Cela amène donc un modèle plus précis.

En revanche, la mise en oeuvre de cette méthode peut s'avérer délicate selon la complexité des modèles choisis et le nombre de facteurs de risque définis. Un autre inconvénient majeur de cette VaR est son coût élevé dans les ressources informatiques puisqu'il s'agit de simuler des millions de trajectoires. De plus, les calculs nécessitent un long temps de calcul.

6 Application en Pratique

6.1 Implémentation des VaR

6.1.1 Création du portefeuille

Récupération des données historiques

1. Le choix d'une API

   Afin d'effectuer les calculs des VaR dans un premier temps et du stress test dans un second, nous devons commencer par récupérer les cours de bourses des actions désirées. Afin que notre programme continue de fonctionner au-delà de la date de fin du projet, nous avons décidé d'utiliser des API afin d'obtenir les derniers cours de bourses en date. Cette manière de procéder a deux avantages : d'une part, elle permet de tenir les valeurs du portefeuille actualisées au jour le jour, d'autre part elle permet de réduire l'espace occupé par le programme. Si nous avions téléchargé un fichier ".xlsm" contenant les valeurs du CAC 40 des 30 dernières années, cela aurait permis d'accélérer la vitesse d'exécution du programme en ne téléchargeant pas à chaque itération les informations nécessaires et de ne pas les stocker dans la RAM mais aurait réduit la flexibilité du portefeuille.

2. Les fonctions de récupération

   Des API comme Qandl ou Yahoofinance sont très populaires car très simple d'utilisation. Le problème que nous avons rencontré est que ces API sont des freemium. C'est-à-dire qu'il faut payer un abonnement pour avoir accès à la totalité de leurs fonctionnalités. Pour contourner ce problème, nous avons décidé d'utiliser les deux à la fois en utilisant les parties gratuites de chacune afin d'avoir accès à la plus grande diversité de données. Nous avons donc créé quatre fonctions distinctes : stock_US(ticker, startdate), stock_EU(ticker, startdate), stock_Metal(ticker, startdate), stock_Crypto(ticker, startdate) qui permettent respectivement d'avoir accès au actions américaines, européennes, aux matières premières et aux cryptomonnaies.
   Ces fonctions renvoient un DataFrame pandas qui contient uniquement le prix de clôture de chaque jour entre la date sélectionnée et aujourd'hui

Constitution du portefeuille par l'utilisateur

1. Fonction Portfolio()

   La fonction portefeuille fait appel aux fonctions créées précédemment pour récupérer les historiques de prix. Elle demande à l'utilisateur de choisir s'il désire importer des actions américaines, européennes, des matières premières ou des cryptomonnaies. Puis il sélectionne le « ticker » de l'action qui veut importer. Le ticker est une abréviation qui sert d'identifiant

unique à chaque action (« TSLA » pour Tesla, « AAPL » pour Apple). Avec une boucle for, l'utilisateur peut créer son portefeuille.
Après avoir récupéré les cours des actions, la fonction les concatène en utilisant la date comme variable commune. Les valeurs manquantes sont automatiquement supprimées et les bornes temporelles tronquées si elles ne coïncident pas exactement.

2. Fonction Asset_Repartition()

   Une fois que l'utilisateur a choisi ses actions, il faut calculer la valeur du portefeuille à l'instant présent. Pour cela, nous avons laissé deux possibilités pour le faire : en pourcentage ou en valeur.
   Pour une constitution en valeur, l'utilisateur rentre pour chaque action le montant en euro qu'il possède. Le programme calcule ensuite le pourcentage que chaque action représente dans le montant total.
   Pour une constitution en pourcentage, il suffit à l'utilisateur de rentrer la proportion de chaque actif dans son portefeuille et de donner le montant total pour obtenir la répartition du portefeuille.

6.1.2 Estimation de la VaR

VaR historique

Le calcul de la VaR historique est celui qui est le plus économique en temps de calcul. Cela consiste à trier un tableau de valeurs pour trouver le pire résultat avec une probabilité de N pourcents sans émettre d'hypothèses sur la distribution.

La fonction commence par récupérer les tickers passés en arguments pour vérifier que le dataframe contient les bonnes informations. Ensuite, on calcule la variation du cours entre t+1 et t pour l'ensemble du dataframe. On multiplie chaque variation par la valeur de l'action et sa part dans le portefeuille. On obtient la perte ou le gain qu'aurait perçu le propriétaire du portefeuille s'il avait possédé cette même quantité d'actifs à la date du calcul. Il ne reste plus qu'à sommer jour à jour les pertes et gains potentiels et les ajouter dans une nouvelle colonne dans le dataframe. On sélectionne finalement le centile qui nous intéresse pour connaitre la VaR que l'on recherche.

L'inconvénient avec cette méthode c'est qu'il nous faut un large historique de données pour avoir suffisamment de scénarios pour que la VaR puisse être utilisée.

VaR paramétrique

Pour le calcul de la VaR paramétrique nous utilisons les librairies pandas, numpy et scipy.stats. Elles nous permettront de faciliter grandement le calcul matriciel.

Pour cela nous commençons par récupérer, la valeur du portefeuille, les tickers, les poids et les historiques de cours des actifs. Puis nous calculons les rendements journaliers des actifs avec la fonction pd.pct_change(). A partir de cela on en déduit la matrice de variance-covariance (avec la fonction np .cov()) et le rendement moyen pondéré par le poids de chaque actif avec la fonction np.mean(). On multiplie les rendements moyens par les poids pour obtenir le rendement moyen du portefeuille. Pour calculer l'écart type du portefeuille, on multiplie la transposée du vecteur des poids par la matrice de covariance avec la fonction np.dot() puis par les poids. On prend la racine de cette matrice. On déduit l'investissement moyen en multipliant l'investissement initial par un plus l'investissent moyen et l'écart type moyen multipliant l'écart type des actifs par l'investissement.

La fonction gaussienne de perte norm.ppf prend en paramètre l'intervalle de confiance, la moyenne et l'écart type pour renvoyer la valeur de la perte potentielle du portefeuille. En la soustrayant à l'investissement initial on obtient la VaR à N%.

VaR Monte Carlo

La VaR monte Carlo permet de simuler le portefeuille n fois et d'en déduire la VaR à partir de ces différents scénarios.

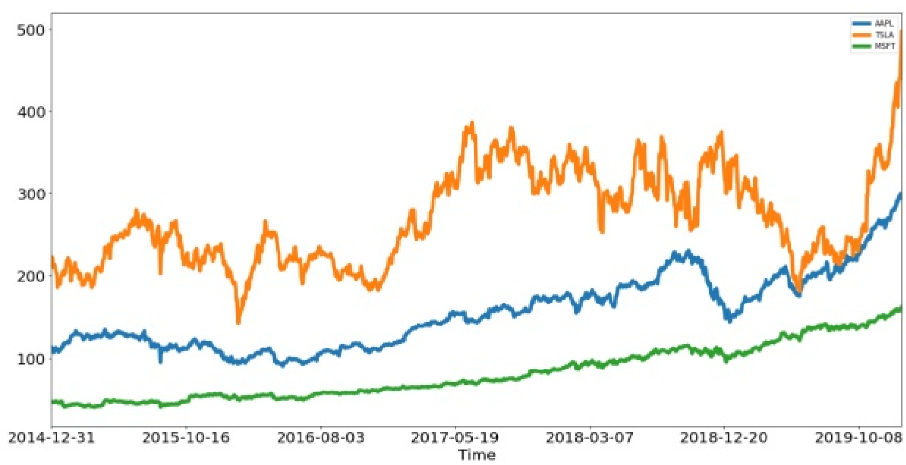
Comme pour les VaR précédentes, nous commençons par récupérer, la valeur du portefeuille, les tickers, les poids et les historiques de cours des actifs. Encore une fois, nous calculons les rendements journaliers des actifs avec la fonction pd.pct_change() et supprimons les valeurs manquantes s'il y en a avec pd.dropna(). La volatilité se calcule avec la fonction np.sdt() à partir des rendements en la multipliant par racine de 252 (qui est le nombre de jours ouvrés dans l'année). Le calcul de la matrice de variance covariance se fait à partir des rendements journaliers à l'aide de la fonction np.transpose() et np.cov(). On créer le vecteur colonne à partir des retours journaliers, puis on crée une matrice de dimension [nombre de jours ; nombre d'actifs] avec les rendements moyens de ces actifs répétés, puis que l'on transpose. Enfin on créer une matrice nulle de dimension [nombre de jours ; nombre de simulations].

Nous effectuons ensuite les n simulations du cours des actifs. Pour cela nous utilisons la décomposition de Cholesky. On commence par créer une matrice Z remplie de variables aléatoires normales de dimension [nombre d'actifs ; nombre de jours]. Pour obtenir la matrice triangulaire dont le produit donne la matrice de variance-covariance, on utilise la fonction np.linalg.cholesky(). En multipliant cette matrice par la matrice Z pour obtenir les rendements aléatoires. On ajoute à tous les éléments la moyenne pour obtenir une valorisation du portefeuille à chaque instant.On finit par faire la somme des rendements des actifs, pondérés par leurs poids respectifs dans le portefeuille.

Après les simulations, en triant et en pondérant par la valeur du portefeuille, et en divisant par la racine du nombre de jours simulés, on sélectionne le centile qui nous intéresse pour obtenir la VaR correspondante.

6.1.3 Résultats

Nous avons appliqué nos algorithmes de VaR à un portefeuille composé de trois actions : Apple, Tesla et Microsoft. Le portefeuille a une valeur de 300$ avec chaque titre représentant une valeur de 100$ dans le portefeuille. Pour effectuer nos estimations, nous avons pris un historique de prix allant du 1er janvier 2015 au 1er janvier 2020.

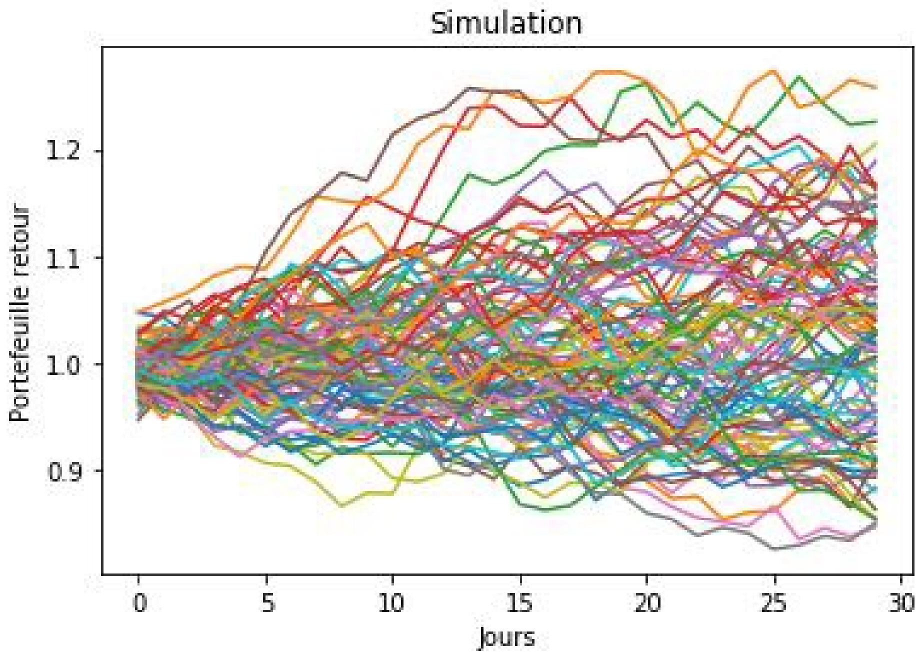


Evolution des prix des actifs du portefeuille lors des 5 dernières années.

Le calcul de la VAR à 95% à 30 jours nous donne les résultats suivants :

Portefeuille	Montant
Valeur du portefeuille	300$
Var Historique 95%	7.58$
Var Paramétrique 95%	8.57$
Var Monte Carlo 95%	9.05$

Pour calculer la VaR Monte Carlo, nous avons effectué 100 simulations. Au-delà, le nombre de simulations n'ayant que peu d'impact, nous en avons déduit que la VaR converge autour de 100 simulations pour ce portefeuille.



Graphe des différents scénarios selon la VAR Monte Carlo

Au cours des 5 dernières années, ces actifs n'ont pas connu de pertes graves, c'est pourquoi la VaR historique est plus faible que les autres, dans notre historique il n'y a pas de précédent concernant une forte baisse des actifs. La VaR paramétrique est supérieure et prend mieux en compte le risque de baisse de la valeur du portefeuille. La VaR Monte Carlo quant à elle est la plus précise, et est celle qui estime le risque avec le plus de justesse mais prend aussi le plus de temps à être calculée, même pour un plus petit portefeuille.

6.2 Mise en place du « Stress test »

6.2.1 Méthode 1 : Utilisation du Bêta

Pour l'élaboration de notre premier stress test, nous avons d'abord calculé les β du CAC 40 grâce à l'historique des variations de son cours. Pour rappel, le β est un coefficient de volatilité ou de sensibilité qui indique la relation existante entre les fluctuations de la valeur du titre et celle du marché.

On le calcule comme suit :

$$\beta_{CAC40} = \frac{COV(r_{CAC40}, r_{actif})}{Var(r_{CAC40})} \tag{5}$$

La simulation avec le mouvement Brownien produit des résultats trop aléatoires et non réalistes, c'est pourquoi nous intégrons les β pour simuler le cours de nos actifs. En effet, avec une simulation n'utilisant que le mouvement Brownien, si le cours de la BNP enregistre une forte baisse, celui de la Société Générale pourrait tant enregistrer une forte hausse qu'une forte baisse. En réalité, ces deux cours sont sensiblement liés.

Il faut cependant garder à l'esprit que l'utilisation des β comporte aussi des limites. En effet, le β est un indicateur qui n'est en aucun cas exhaustif. Il décrit généralement la réalité mais des écarts peuvent se produire. Ainsi, il est possible que lors d'une remontée du CAC40, l'un des indices le composant enregistre une baisse malgré son β positif.

Nous entrons désormais dans la phase 1 de notre simulation. Cette phase consiste à simuler le cours du CAC 40 grâce à l'équation différentielle suivante :

$$\mathrm{d}S = \mu S \mathrm{d}t + \sigma S \mathrm{d}W_t \tag{6}$$

avec S le prix de l'action, μ le drift, σ la volatilité et W_t le mouvement Brownien.

Le drift représente la moyenne des retours sur une période de temps donnée. La volatilité représente la moyenne des volatilités sur la même durée. Le mouvement Brownien constitue la partie aléatoire de l'équation.

La solution de l'équation stochastique est de la forme suivante :

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \tag{7}$$

Nous pouvons donc simuler le cours du CAC40, et nous allons maintenant lui appliquer un choc. Pour cela, nous avons créé une fonction qui prend en arguments la date de début du choc et l'intensité en pourcentage. Cela va provoquer une baisse de x% sur le CAC 40.

Ensuite, nous entrons dans la phase 2. Durant cette phase d'après le choc, les données historiques nous montrent que la volatilité a tendance à fortement augmenter et que l'instrument financier est sensible aux évènements extérieurs. Il est donc assez compliqué d'évaluer le drift à cette période. Le but de la phase 2 est de modéliser une volatilité nettement supérieure au drift. Nous nous sommes donc penchés sur l'historique du CAC 40 afin d'étudier la variation de sa volatilité lors de l'après choc. En étudiant ces variations de volatilité après les principales crises qu'a connu le CAC 40, on en a déduit que la volatilité était augmentée d'un facteur 5. Nous avons donc augmenté la volatilité dans notre modèle. Nous avons également baissé la valeur du drift pour la mettre négative. Nous avons fait ce choix car lors des précédentes crises, on observe une période de fortes ventes avec reprise de cash par les différents acteurs du marché. Le drift ne peut donc pas rester positif dans notre modèle.

Nous n'avons pas pu modéliser le drift lors de cette période par manque de données. En effet, notre but était de le modéliser via la moyenne mobile du CAC 40 et non via le retour moyen. Cependant, la récupération des moyennes mobiles sur une heure ou une demi-heure n'a pas été possible. Nous n'avions accès qu'au moyenne mobile sur une journée ce qui n'est pas pertinent pour notre projet.

Nous avons modélisé la seconde phase sur 10 jours de bourse. Ces 10 jours correspondent à la période durant laquelle l'incertitude sur les marchés est la plus grande. Le drift étant difficile à modéliser, nous avons donc diminué le drift et augmenté la volatilité.

Notre but était de prendre le coefficient de la droite de tendance de la moyenne mobile des 30 derniers éléments pour déterminer le drift.

Concernant la phase 3, où nous allons simuler le cours du CAC40 une fois le choc passé, nous avons repris le drift de la phase 1 en le divisant par deux. En effet, la tendance étant presque impossible à déterminer, il nous a fallu réduire le drift. La volatilité quant à elle reste inchangée car le marché s'est rassuré.

6.2.2 Résulats Méthode 1

Pour ce test, nous avons d'abord simulé le CAC 40 :

La courbe bleu représente le prix du CAC40 et la courbe orange représente notre simulation. Nous avons commencé notre simulation à partir du 2 février 2020, avant l'impact du Covid-19 sur les marchés financiers. A noter que chaque simulation sera différente du fait du mouvement Brownien.

Voici une comparaison de nos résultats avec la situation actuelle des choses :

On remarque bien que les résutats sont similaires. On observe très clairement des rebonds (période de forte volatilité vers le haut après une forte chute) représentatifs de notre phase 2 d'après choc.

Le graphe suivant représente la simulation de nos différents actifs composants le CAC 40 avec leur β. C'est ici que nous observons les limites de notre simulation car tous les actifs semblent avoir la même tendance bien que leurs β soient différents. Or sur les marchés, cela n'est pas toujours le cas. La méthode des β nous permet de voir en revanche quels sont les actif les plus sensibles aux chocs.

En effet, lorsque nous avons simulé le cours de Danone, nous avons pu observer qu'il suivait parfaitement son béta de 0,65 mais dans la réalité, il va dans le sens inverse de l'évolution du CAC 40. Cela montre les limites de l'utilisation de notre méthode.

Cette méthode de simulation permet d'étudier la probable tendance de notre actif en cas de choc. Comme nous avons pu le constater, cette méthode donne des résultats proches de la réalité. Un moyen d'optimisation de notre méthode est l'amélioration de notre drift pour garder une volatilité basse et donc avoir des simulations proches les unes des autres. Cependant, avoir une grande volatilité peut être un atout car après le choc, des éléments externes peuvent influencer le cours de l'action. Par exemple, en mars 2020, le S&P 500 a perdu 10% en une journée mais en a récupéré 15% le lendemain suite aux annonces de la Fed. Ces évènements externes sont difficiles à modéliser.

6.2.3 Méthode 2 : Monte Carlo

Le choix du modèle de Monte Carlo

Pour ce stress test, nous avons décidé de réutiliser la factorisation de Cholesky et l'algorithme de Monte Carlo. Cela nous permet d'effectuer un stress test sur une grande quantité d'actifs corrélés entre eux. Nous pouvons également changer facilement la distribution de probabilité ou les paramètres du stress test. Nous effectuerons les simulations grâce à une loi normale et une loi de Weibull. Cette dernière fait partie de la famille des lois d'extremum généralisées. Elles sont particulièrement adaptées à la simulation de phénomènes à valeurs extrêmes (positives comme négatives).

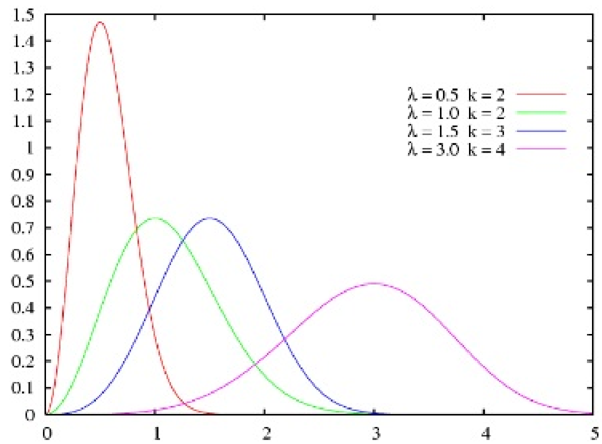
Le choix des lois

Nous avons utilisé la loi normale pour modéliser nos actifs car après avoir effectué les tests de normalité des rendements pour les VaR, nous en avons déduit que pour un nombre suffisamment importants d'actifs, leur évolution pouvait s'apparenter à une loi normale. De plus, elle fait partie des distributions les plus simples à implémenter ce qui facilite les calculs des simulations.

La loi de Weibull est une loi de probabilité continue qui est un cas spécial des lois d'extremums généralisés. Les lois d'extremums généralisés sont une famille de lois de probabilités qui permettent de représenter des phénomènes de valeurs extrêmes, aux probabilités faibles mais non nulles. Nous utilisons cette loi pour ne pas minimiser les fortes baisses du cours qui peuvent être sous-estimées par la loi normale. Sa fonction de densité de probabilité est :

$$f(x;k,\lambda) = \frac{k}{\lambda}(\frac{x}{\lambda})^{k-1}e^{-(\frac{k}{\lambda})^k} \tag{8}$$

où k $>$ 0 est le paramètre dit de forme et $>$ 0 le paramètre d'échelle de la distribution



Le fonctionnement de la simulation

Les paramètres de la simulation sont donnés en arguments à la fonction : le nombre de jours à simuler, le nombre de simulations à effectuer, l'ampleur du stress à appliquer au portefeuille et la loi de distribution. Ensuite, à partir de l'historique des prix du portefeuille, on déduit la tendance des variations des prix et la matrice de variance-covariance des actifs.

D'après l'historique des variations du CAC 40 et grâce à nos résultats de recherche, nous avons sélectionné des paramètres du stress test tels que celui-ci s'approche le plus possible d'un choc réel. Pour cela, nous avons augmenté la tendance baissière ainsi que la volatilité comme cela est le cas dans les périodes de crises.

On crée donc une matrice de dimension [nombre d'actifs ; nombre de jours] de valeurs aléatoires avec la distribution souhaitée. En utilisant la décomposition de Cholesky et la méthode décrite dans la VAR de Monte Carlo on obtient les simulations des scénarios du portefeuille.

Enfin pour analyser les résultats, on affiche trois graphiques : le graphique de la simulation uniquement, celui de la simulation et du cours historique et enfin de la simulation avec des options. On affiche le résultat moyen de la simulation, les 99ème pire et meilleur scénarios ainsi que la valeur réelle du portefeuille à la date du 17 Mars 2020.

La simulation avec options

Afin de simuler le portefeuille avec options, on commence par récupérer le DataFrame de la simulation sans options. C'est à partir des valeurs des simulations précédentes que l'on va calculer les nouvelles valeurs du portefeuille. On récupère les valeurs qui sont nécessaires pour calculer le prix d'une option avec le modèle de Black and Scholes : le taux d'intérêt sans risque, la volatilité du sous-jacent, la maturité à échéance de l'option.

Pour rappel, le modèle de BS sert à valoriser le prix d'une option européenne. Pour pouvoir utiliser la formule de Black-Scholes, il faut d'abord établir plusieurs hypothèses. La première est que l'on traite avec des options européennes, c'est à dire que l'exercice se fait à échéance. De plus, on part du principe qu'il n'y a pas de versements de dividendes. On néglige également les commissions et les impôts. Ensuite, le prix du sous-jacent suit un mouvement Brownien géométrique. On fait également l'hypothèse qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage. En ce qui concerne les taux d'intérêts et la volatilité, on fait l'hypothèse que ceux-ci sont constants durant la durée de vie de l'option. Enfin, on part du principe que les rendements suivent une loi normale. Le modèle de Black-Scholes-Merton est un modèle permettant de trouver le prix théorique des options. Soit h le payoff de l'action. Le prix d'un call (C) et le prix d'un put (P) se définissent ainsi :

$$Prix = \mathbb{E}(h * e^{-rT}) \tag{9}$$

où $h = (S_T - K)^+$ si c'est un call et $h = (K - S_T)^+$ si c'est un put. La formule de Black-Scholes est donc :

$$C = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2) \tag{10}$$

$$P = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S\mathcal{N}(-d_1) \tag{11}$$

où $d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = \frac{ln(\frac{S}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

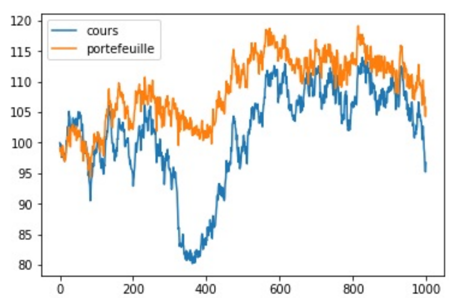
avec S le prix de l'action, K le strike ou prix d'exercice de l'option, r le taux d'intérêt sans risque, T la maturité et σ la volatilité.

On va ensuite, pour chaque jour de chaque simulation, recalculer la valeur du portefeuille selon les paramètres de couverture choisies. Il est possible de modifier la maturité, le nombre d'options à acheter et le pourcentage de couverture. La stratégie de couverture que nous avons choisi consiste à acheter et exercer nos options avec un pas régulier en jours. On calcule le payoff du put à échéance, on exerce si le strike est supérieur au sous-jacent et l'on reprend le même nombre d'options avec un strike valant le sous-jacent actuel à plus ou moins un pourcentage prédéfini.

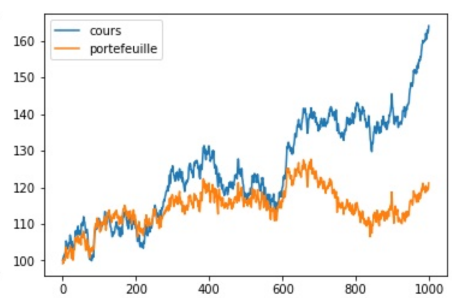
On obtient donc le même nombre de simulations que précédemment calculé avec Monte Carlo mais couvertes par une stratégie à base d'options. On affiche enfin la valeur moyenne, les 99ème pire et meilleur scénarios ainsi que la valeur réelle du portefeuille actuel.

Cette stratégie de couverture est efficace en temps de baisse, cependant elle réduit grandement les bénéfices lors des phases de hausse. Un achat d'option dynamique selon certains critères comme la moyenne mobile ou la volatilité pourrait être plus efficace en tant normal mais lors d'un krach cette méthode à moins d'intérêts.

On peut voir son effet sur les rendements du portefeuille selon les cas :



Cours avec une forte baisse

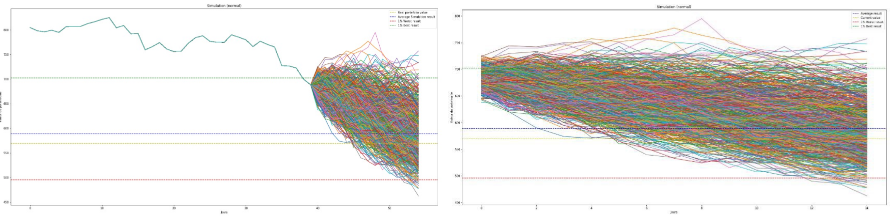


Cours avec une forte hausse

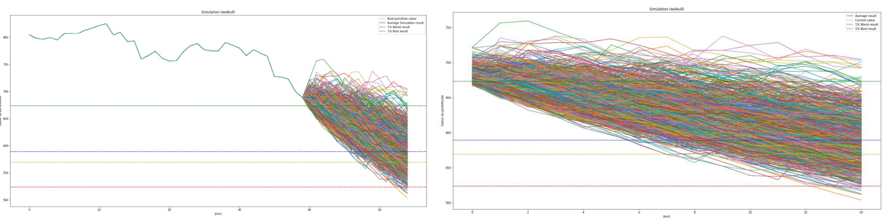
6.2.4 Résultats Méthode 2

Nous avons choisi un portefeuille composé des principales valeurs du CAC 40 en capitalisation à savoir : LVMH, L'Oréal, Sanofi, Total, Hermès, Kering et Air liquide. Etant donné l'effondrement de l'indice ces derniers jours, nous avons décidé d'utiliser cet évènement pour valider notre modélisation. Nous avons donc pris comme historique, les cours allant du 1er janvier 2020 au 2 mars 2020. Nous avons simulé l'évolution de ce portefeuille avec la méthode de Monte Carlo et de Cholesky en utilisant deux lois de distributions pour modéliser nos variables aléatoires : la loi normale et la distribution de Weibull. Pour chacune, nous avons simulé 1000 scénarios pour les 15 premiers jours de mars.

Nous avons obtenu les résultats suivants à la suite des simulations :



Simulation avec une loi normale



Simulation avec une loi de Weibull

Nous remarquons que les deux lois de distributions donnent un résultat moyen proche de la réalité. En effet, la valeur réelle de ce portefeuille au 17 mars 2020 était de €569.48 pour une valeur estimée à €589.33 , ce qui représente un écart de 3,4% avec la réalité. Nous pouvons donc en conclure que notre simulation était correctement calibrée.

La grande volatilité passée en argument à la fonction de la distribution normale entraine un écart important entre les 1% pires et meilleurs scénarios (respectivement 495.60€et 702,45€), davantage que la distribution de Weibull (respectivement 524.10€et 673.62€.

En conclusion, la méthode de simulation de Monte Carlo est efficace pour modéliser l'évolution d'un portefeuille en cas de krach, cependant les paramètres du modèle doivent être intelligemment choisi pour représenter au mieux le type de stress test souhaité. L'importance du krach sera principalement basée sur les paramètres de la fonction et sur la loi de probabilité choisie, il variera donc énormément selon les choix de l'utilisateur.

7 Conclusion

Le contexte dans lequel nous rédigeons ce rapport nous rappelle encore l'intérêt des indicateurs de risques que sont les « stress tests » et la VaR pour les institutions financières. Le calcul des VaR, qu'elles soient historiques, paramétriques ou de Monte Carlo permet d'anticiper les risques, de les limiter et de s'y préparer, notamment en renforçant ses actifs de qualité et en s'assurant du respect des ratios de solvabilité mis en place par Bâle III.

Les VaR historique et paramétrique sont un moyen simple de se prémunir contre le risque en surveillant quotidiennement les pertes potentielles. La VaR de Monte Carlo, bien que plus complexe à calculer, fournit une estimation encore plus précise du risque. Néanmoins, elles ne permettent pas d'anticiper un krach et son impact, c'est pourquoi il est aussi nécessaire d'effectuer régulièrement des « stress tests » de portefeuille.

La simulation d'un portefeuille stressé à l'aide d'un mouvement brownien constitue une mise en perceptive intéressante du risque. Il incombe cependant à l'utilisateur de choisir les paramètres de la simulation de manière adéquate, sans quoi les pertes seront sur ou sous-estimées. De plus, les phénomènes imprévisibles, majoritairement non modélisables, restent souvent des facteurs clés dans une crise.

Quant à la crise actuelle que nous traversons, lorsque celle-ci se sera dissipée, nous constaterons si les agents financiers avaient suffisamment anticipé une crise de cette ampleur ou si les instruments et dispositifs de mesures des risques sont encore à améliorer.

8 Bibliographie

- «*Calcul stochastique pour la finance*» ; **Mr. Marie**
- «*Cours Introduction des Marchés Financiers*» ; **Mme. Bouvet**
- «*Options, futures et autres actifs dérivés*» ; **John Hull**, 10^{e} édition
- «*Rapport du comité de Bâle*» ; sénat.fr
- «*Bilan des « stress test » menés sur le système bancaire français »* ; Banque de France
- Site **fimarkets.com, https ://www.abcbourse.com/, https ://www.cafedelabourse.com/, https ://epargne.ooreka.fr/**etc.
- «*La Value at Risk*» ; **Tristan SYDOR**
- «*Etude et estimation de certaines mesures de risque multivariées avec application en finance*» par **Rachid BENTOUMI**