

ECOULEMENTS DIPHASIQUES DE TYPE CAHN-HILLIARD

Franck BOYER

*Force m'est de constater
Qu'il me devient difficile
De faire coïncider mes levers tardifs
Avec mes couchers prématurés
Par le biais de mes siestes prolongées.*

BASILE, “DISCIPULUS SIMPLEX”,
Léonard le génie *Turk et De Groot*

*L'éternité c'est long ...
... surtout vers la fin.*

WOODY ALLEN

*Qui ne pense point,
Se trompe jamais.*

LÉONARD DE VINCI

A Joséphine et Jean,

Remerciements

Mes premiers remerciements sont, bien entendu, destinés à Pierre Fabrie.

Il a tout d'abord su me donner un sujet nouveau, dont l'intérêt à la fois physique et mathématique ne peut se discuter. Chose rare et d'une certaine façon courageuse, ce sujet n'était pas un corollaire direct de ses propres thèmes de recherche, ce qui m'a donné une grande liberté dans la façon de l'aborder. Je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Malgré ses très nombreuses sollicitations, il a toujours été d'une disponibilité exemplaire, débouchant presque quotidiennement sur une nouvelle idée de piste à explorer. Par ailleurs, nos relations, qui ont souvent dépassé le cadre strictement scientifique de la thèse, dans les bons moments comme dans les plus difficiles, ont toujours été marquées par l'honnêteté, la franchise et la confiance. C'est certainement le point le plus important à mes yeux. Je ne suis pas certain que j'aurais pu tirer autant avantage de tout autre type de relations entre un directeur de thèse et son étudiant.

Pour toutes ces raisons, je souhaite qu'il trouve ici la marque de ma profonde gratitude.

Il est évident que sans Thierry Colin, je n'aurais certainement pas rencontré Pierre et atterri finalement en thèse à Bordeaux. Sa grande culture mathématique, sa sympathie spontanée envers les thésards mais aussi son goût prononcé pour les contrepéteries et les grands crus du Bordelais font certainement de lui un responsable de la formation doctorale exemplaire. Je suis très heureux de pouvoir lui exprimer ici toute ma reconnaissance.

Emmanuel Grenier et Pierre-Arnaud Raviart m'ont fait l'honneur de bien vouloir consacrer du temps à la lecture de ce manuscrit. Je tiens à les remercier pour l'intérêt qu'ils ont porté à tous les aspects de mes travaux.

Michel Langlais a bien voulu présider le jury, je l'en remercie vivement.

Je tiens à remercier tout particulièrement Michel Quintard et Didier Roux de m'avoir fait l'honneur de participer au jury. Leur présence témoigne à mes yeux de l'intérêt qu'ils ont manifesté, du point de vue de la physique, pour mes travaux.

Georges-Henri Cottet et Guy Métivier m'ont aussi fait l'honneur d'être présents au sein du Jury, je souhaite qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Je n'oublie bien évidemment pas que sans les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec Annie Colin, Pascal Panniza et Michel Quintard, la partie "modélisation" de la thèse en serait certainement restée à l'état embryonnaire. Je tiens donc à les remercier tous très chaleureusement et à les impliquer fortement dans le bon déroulement de ce travail.

Le Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Bordeaux offre à un jeune chercheur de nombreuses possibilités de discussions (toujours très amicales) sur la quasi-totalité des sujets scientifiques qu'il peut être amené à aborder durant sa thèse. Je souhaite ici remercier tout particulièrement Charles-Henri Bruneau, Gilles Carbou, Thierry Colin, Cédric Galusinski, Marianna Haragus, David Lannes, Jean-Luc Joly et Iraj Mortazavi.

Je n'oublie pas, bien entendu, que c'est grâce à Thierry Colin et David Lannes, organisateurs des séances du groupe de travail "Stabilité", que certaines de ces discussions ont été entamées.

A chaque fois qu'un problème est survenu dans le système informatique, ou que j'ai eu besoin d'un conseil sur le fonctionnement de la boucle de calcul, j'ai pu trouver des gens toujours disponibles pour m'indiquer la meilleure solution. Un grand merci donc aux ingénieurs de l'institut : Philippe Depouilly, Alain Houille, Khodor Khadra et Sandrine Layrisse.

Je tiens à remercier Mauricette Jaubert pour sa disponibilité et sa sympathie. Elle a toujours su répondre à mes besoins de façon efficace en des temps défiant toute concurrence.

Les conditions de travail au sein du laboratoire m'ont certainement été très agréables de par la qualité de mes relations de voisinage. Ainsi, les nombreux thésards présents dans “le couloir” (et même un peu au-delà) au cours de ma thèse, ont toujours gardé avec moi, et de façon réciproque, des relations amicales très simples et très naturelles y compris, et surtout, quand nos thèmes de recherche étaient orthogonaux.

Je tiens donc à les remercier tous et dans le désordre : David (n'oublions pas qu'il fut lui-aussi thésard il y a peu), Jean-François (j'en profite pour saluer la machine à café !), Wallid, Cédric, Benjamin, Vincent, Guillaume, Fabrice (même si j'ai souvent refusé de lui expliquer la théorie des métriques de Schwarzschild ...), Laurent C., Laurent M. (et ses sempiternelles questions sur Unix, LaTeX, et les opérateurs de Scattering ...), Mohamed, Steeve, Vuk, Sylvie, et Richard.

Toutefois, mon enthousiasme à leur égard se doit d'être modéré par la tendance de certains à tenter de me forcer à participer à des soit-disant matches de foot organisés de façon occulte au sein de ce laboratoire. J'ose espérer que ce titre de Docteur contribuera à mettre fin à ces pratiques inacceptables.

Enfin, je termine en remerciant celle qui a partagé ma vie durant cette thèse. Son soutien énergique (trop ??) et efficace n'a eu d'égal que celui que j'ai dû moi-même lui prodiguer en d'autres circonstances.

Table des matières

Introduction	5
Partie I Modélisation : dérivation et simulations	23
1 Dérivation du modèle	25
1 Notations	26
2 Equations générales	27
2.1 Conservation de la masse	27
2.2 Conservation de la quantité de mouvement	28
2.3 Equations en vitesse moyenne et en perturbation	29
3 Equations adimensionnées et obtention du modèle	32
4 Bilan	36
Bibliographie du chapitre 1	36
2 Validation numérique du modèle	39
1 Introduction	39
2 Discréttisation en temps	40
3 Discréttisation en espace et résolution effective	42
3.1 Description du maillage et des inconnues discrètes	42
3.2 Traitement des conditions au bord	42
3.3 Discréttisation des équations proprement dites	43
3.4 Comparaison des schémas de Murman et de Rasetarinera	48
4 Résultats numériques et validation du modèle	49
4.1 Cavité entraînée régularisée	49
4.2 Décomposition spinodale et structuration des phases sous cisaillement	52
4.3 Instabilité de Rayleigh-Taylor	57
4.4 Chute d'une goutte	59
4.5 Affleurement de bulles	61
5 Méthode de domaine fictif pour la prise en compte d'un obstacle	62
5.1 Description de la méthode	62
5.2 Un exemple de résultat	65
6 Conclusions	67
Bibliographie du chapitre 2	68

Partie II Etude mathématique du modèle : existence et comportement qualitatif des solutions	71
3 Préliminaires et étude du cas homogène	75
1 Rappels sur le modèle considéré	75
2 Notations et résultats préliminaires	76
3 Résultats principaux dans le cadre homogène	81
3.1 Définitions	81
3.2 Enoncés des résultats	83
4 Preuves des résultats	88
4.1 Les conditions aux limites non-homogènes	88
4.2 Cas non dégénéré	88
4.3 Solutions fortes dans le cas non dégénéré	94
4.4 Cas non-dégénéré avec un potentiel logarithmique	102
4.5 Solutions faibles dans le cas dégénéré	108
4.6 Un résultat asymptotique	113
Bibliographie du chapitre 3	117
4 Cas faiblement non-homogène	119
1 Introduction	119
2 Rappels sur le modèle de fluides non-homogènes incompressibles	120
3 Hypothèses générales	121
4 Mélanges faiblement non-homogènes	122
4.1 Solutions faibles	122
4.2 Solutions fortes	134
4.3 Comportement asymptotique	140
Bibliographie du chapitre 4	147
5 Persistance des perturbations de solutions 1D à grand cisaillement	149
1 Introduction	149
2 Solutions 1D du système	150
3 Changement de variables et d'inconnues	152
4 Rappels sur les inégalités de Sobolev anisotropes	153
5 Solution bidimensionnelle de l'équation linéarisée	155
6 Résultats principaux	158
7 Estimations d'énergie	160
7.1 Équations sur les restes	160
7.2 Estimation L^2 sur R_ε	162
7.3 Estimation L^2 sur W_ε	163
7.4 Estimation L^2 sur $\partial_x R_\varepsilon$	163
7.5 Estimation L^2 sur $\partial_z R_\varepsilon$	164
7.6 Estimation finale	164
8 Preuves dans le cas général et dans le cas homogène non-métastable	173
9 Preuve dans le cas homogène métastable	178
Bibliographie du chapitre 5	185

Conclusions et perspectives	187
------------------------------------	------------

Introduction

La thématique générale des travaux effectués au cours de cette thèse est l'étude théorique et numérique des écoulements de mélanges de deux fluides (ou phases). Parmi les divers modèles que l'on peut trouver actuellement dans la littérature, on peut distinguer deux grandes classes :

- Les modèles de type "fluides non homogènes" [18, 19, 22] qui prennent en compte les phénomènes hydrodynamiques mais qui ne rendent pas compte des échanges à l'interface. Ce sont par exemple des problèmes à frontière libre, ou des équations de Navier-Stokes non homogènes.
- Les modèles de type "Cahn-Hilliard" [14, 15, 24] qui, à l'inverse des précédents, modélisent les phénomènes d'interface entre les deux phases mais ne prennent pas en compte l'écoulement. Dans certains cas, les travaux existants ne considèrent que le problème stationnaire de séparation de phase.

Ces deux types de modèles ne suffisent pas à explorer les divers cas physiques où les deux sortes de phénomènes sont présents. Ainsi, on trouve dans des articles récents [11, 20] une nouvelle classe de modèles qui couplent les deux types de phénomènes précédents. C'est dans ce cadre général que se situe les travaux présentés dans la suite

Parmi les expériences physiques qui motivent cette étude, citons par exemple, le cas d'un mélange de polymère et de solvant sous cisaillement dans une cellule de Couette. Les résultats expérimentaux montrent l'apparition de structures macroscopiques (décomposition spinodale) puis sous l'effet du cisaillement, l'organisation de ces structures sous forme de bandes régulièrement espacées [20]. Nous montrerons que notre modèle peut rendre compte de ce type de comportement.

L'étude mathématique de tels modèles est aujourd'hui de première importance car les travaux théoriques sur des problèmes de fluides complexes restent encore rares. Les techniques d'étude et de discréétisation de ces équations sont issues des méthodes déjà connues sur les problèmes de la mécanique des fluides et sur l'équation de Cahn-Hilliard mais nécessitent de bien appréhender les phénomènes de couplage.

Cette étude s'inscrit également dans la lignée d'une classe de travaux actuels dans les domaines de la mécanique des fluides et de la chimie. La modélisation a fait l'objet d'une collaboration avec M. Quintard (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse) sur l'aspect mécanique des problèmes étudiés et avec A. Colin (Centre de Recherche Paul Pascal) et P. Panniza (Centre de Physique Moléculaire Optique et Hertzienne) sur les aspects en relation avec la chimie et les phénomènes expérimentaux. Des expériences d'écoulements lamellaires sous cisaillement sont effectuées dans ces deux laboratoires et les résultats numériques que nous avons obtenus sont en concordance qualitative avec les expériences menées. Ces contacts nous ont permis en particulier de s'assurer de la pertinence physique du modèle proposé, et de connaître les divers types de situations expérimentales dont on peut mener l'étude théorique et numérique.

Première partie - Modélisation : Dérivation et simulations

Chapitre 1 - Dérivation du modèle

Dans ce premier chapitre (publié dans [8]), à la suite de travaux précédents de Chella et Viñals [11], de Doi [13], ou encore de Onuki [20], on précise la modélisation et en particulier la mise en équations du modèle. Une mise sous forme adimensionnelle permet de dégager les termes significatifs pour une large gamme de situations physiques. On met en évidence par ce biais la dépendance des divers paramètres adimensionnels qui apparaissent dans les équations en fonction des conditions expérimentales (température, densités des deux phases, etc ...).

Nous nous plaçons dans le cas où les phases sont incompressibles et de densités différentes. Nous introduisons les champs de vitesse propres de chaque phase v_1 et v_2 , et le paramètre d'ordre φ qui est une renormalisation (entre -1 et 1) de la fraction volumique d'une des phases. On définit à partir de ces variables, par un processus de moyenne pondérée, des inconnues globales pour le mélange : une densité ρ (qui est une fonction connue du paramètre d'ordre φ), un champ de vitesse v et une fluctuation en vitesse w sous la forme

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1+\varphi}{2}\rho_1^0 + \frac{1-\varphi}{2}\rho_2^0, \\ v &= \frac{1+\varphi}{2}v_1 + \frac{1-\varphi}{2}v_2, \\ w &= v_1 - v_2.\end{aligned}$$

Ensuite, on écrit l'équation de conservation de la masse pour chacune des phases, à partir desquelles on déduit une équation pour le paramètre d'ordre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi - \beta \operatorname{div} \left(\frac{1-\varphi^2}{2} w \right) = 0,$$

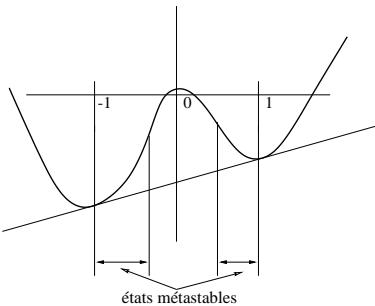
et une condition d'écoulement isovolume sur la vitesse v

$$\operatorname{div}(v) = 0.$$

La deuxième étape consiste à écrire une équation de Navier-Stokes pour chacune des deux phases en tenant compte dans les termes de forces extérieures des potentiels chimiques de chacune d'entre elles. C'est dans ces termes que le potentiel chimique de Cahn-Hilliard μ intervient [20] :

$$\mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi),$$

où α est le rapport entre l'épaisseur d'interface entre les deux phases et la longueur caractéristique qui a servi à adimensionner les équations, et F est un potentiel ayant une structure en double puits [13] dès que la température est inférieure à la température critique.



On déduit ensuite des deux équations sur v_1 et v_2 , une équation sur la vitesse moyenne v et une équation sur la fluctuation w . Après mise sous forme adimensionnelle des équations et en évaluant l'ordre de grandeur des divers coefficients qui apparaissent dans celles-ci pour une gamme de paramètres physiques donnés [12, 20], on obtient deux équations simples sur v et w :

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) - \frac{1}{Re} \operatorname{div} (2\eta(\varphi)D(v)) + \nabla p &= \mathcal{K}\mu \nabla \varphi + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1-\varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho(\varphi)} \right) + \rho(\varphi)g, \\ \operatorname{div}(v) &= 0, \\ w &= \frac{(\varphi^2 - 1)(1 - \varepsilon)}{4\rho(\varphi)\xi(\varphi)} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho(\varphi)} \right). \end{aligned}$$

L'équation en v n'est autre qu'une équation de Navier-Stokes non-homogène incompressible à densité et viscosité dépendant du paramètre d'ordre φ (c'est-à-dire de la composition locale du mélange) et comprenant un terme de couplage de type "forces capillaires" $\mathcal{K}\mu \nabla \varphi$ localisé à l'interface. L'équation en w montre que la fluctuation en vitesse est reliée au potentiel de Cahn-Hilliard μ et à son gradient. On obtient alors le système final en remplaçant w par sa valeur dans l'équation en φ , ce qui donne en introduisant un nombre de Peclet Pe :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{Pe} \operatorname{div} \left(\frac{B(\varphi)}{\rho(\varphi)} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho(\varphi)} \right) \right) = 0.$$

On reconnaît ici une équation de Cahn-Hilliard couplée à l'équation de Navier-Stokes par un terme de transport. Dans cette dernière équation $B(\varphi)$ est un coefficient de diffusion appelé : *mobilité*, qui dépend de φ .

Remarquons d'ores et déjà que $\varphi \equiv 1$ est solution de l'équation précédente et qu'alors l'équation obtenue sur v se réduit à une équation de Navier-Stokes homogène incompressible. Ainsi, le modèle proposé dégénère de façon cohérente avec le modèle de Navier-Stokes lorsqu'une seule des phases est présente.

Dans tout ce qui suit, φ et μ sont soumis à des conditions aux limites de Neumann (aucun flux ne doit traverser le bord du domaine, et l'interface est supposée perpendiculaire aux bords physiques du domaine) et la vitesse à des conditions de Dirichlet. Eventuellement, on pourra remplacer ces conditions par des conditions de périodicité dans une direction pour étudier par exemple les problèmes de cisaillement dans un canal.

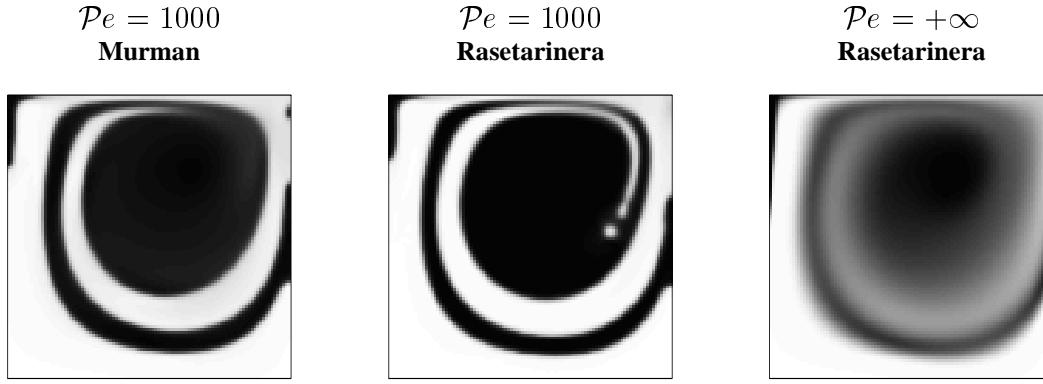
Une fois le modèle ainsi établi, on s'intéresse dans un premier temps à sa validation par le biais d'une méthode numérique qui permet de s'assurer qualitativement de la pertinence des résultats. Dans un second temps, on mène l'étude théorique du système d'équations obtenu dans deux grandes directions : les problèmes d'existence et d'unicité de solutions tenant compte des diverses possibilités physiques pour la mobilité $B(\varphi)$, et pour le potentiel de Cahn-Hilliard $F(\varphi)$ d'une part, et les propriétés de stabilité de diverses solutions particulières d'autre part.

Chapitre 2 - Validation numérique du modèle

Dans le second chapitre (en partie publié dans [8]), on a mis en oeuvre un schéma numérique par différences finies en 2D qui confirme la pertinence du modèle. Le point-clé de ce travail est le choix de la manière dont on discrétise le terme de transport. En effet, nous savons que la discréttisation usuelle par un schéma décentré amont (ou schéma de Murman) induit une forte diffusion numérique, ce qui dans le cadre d'un suivi d'interface n'est pas satisfaisant.

Nous avons donc implémenté un schéma dû à P. Rasetarinera [21] qui propose une discréttisation antidiffusée du terme de transport vraiment bidimensionnelle. Nous montrons que ce schéma apporte effectivement une amélioration réelle des résultats dans le cas d'une cavité entraînée par exemple. Nous montrons aussi que le terme de Cahn-Hilliard (et en particulier le terme déstabilisant $F'(\varphi)$ dans le potentiel μ) joue un rôle d'antidiffusion important en comparaison avec la discréttisation d'une équation de transport simple (*i.e.* $Pe = +\infty$).

On souhaite alors mettre en évidence le rôle des forces capillaires dans des écoulements classiques et vérifier que le modèle et le schéma peuvent en rendre compte. Rappelons que ces forces apparaissent au second membre de l'équation



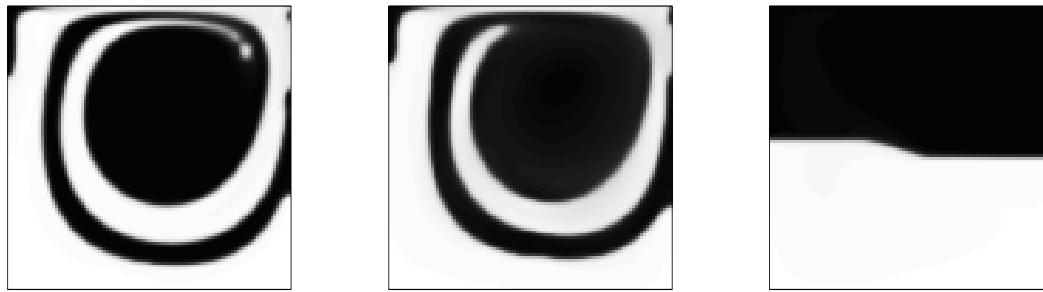
de Navier-Stokes sous la forme $\mathcal{K}\mu\nabla\varphi$. C'est donc une force normale à l'interface, proportionnelle à \mathcal{K} et on peut montrer qu'elle est essentiellement proportionnelle à la courbure de l'interface (voir [11, 16, 17]).

Dans la figure suivante, sur le problème de la cavité entraînée, on compare (toutes choses étant égales par ailleurs) les résultats obtenus pour diverses valeurs du coefficient de capillarité \mathcal{K} . Nous observons que lorsque ces forces deviennent prépondérantes devant les forces visqueuses, elles créent une certaine "rigidité" de l'interface qui va à l'encontre de l'effet d'étirement. Enfin, lorsque nous augmentons suffisamment la valeur de \mathcal{K} par rapport à la viscosité, nous constatons que les forces visqueuses ne suffisent plus à créer le mouvement d'enroulement et de mélange des deux fluides.

$$\mathcal{K} = \frac{10^{-1}}{\mathcal{R}e}$$

$$\mathcal{K} = \frac{10}{\mathcal{R}e}$$

$$\mathcal{K} = \frac{100}{\mathcal{R}e}$$



Une autre situation physique classique dont le modèle peut rendre compte est celui de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Cette instabilité apparaît lorsqu'on dépose un fluide lourd au-dessus d'un fluide plus léger et que l'on perturbe légèrement l'interface initialement parfaitement plane. L'instabilité va se propager et au final les deux fluides vont échanger leurs places dans la cavité.

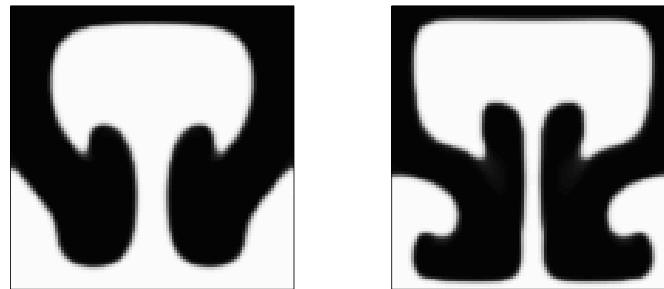
On montre les différents comportements du système quand la capillarité varie à des temps équivalents. On vérifie que le terme de forces capillaires a pour action de rendre l'interface aussi plate que possible.

Enfin, nous nous intéressons à deux autres situations physiques : la décomposition spinodale sous cisaillement et l'étude de gouttes ou de bulles.

Dans le premier cas, nous partons d'un mélange quasi-homogène entre deux phases (on peut penser à un polymère dans un solvant) et nous imposons des conditions aux limites de cisaillement. Nous observons alors les phénomènes qui motivent en partie cette étude : tout d'abord la formation de structures macroscopiques (petites zones où chaque phase est presque pure) séparées par une interface de taille α , puis l'organisation de ces structures en bandelettes parallèles à

$$\mathcal{K} = 0$$

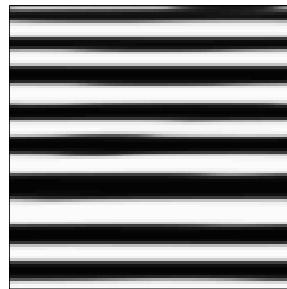
$$\mathcal{K} = \frac{1}{\mathcal{R}e}$$



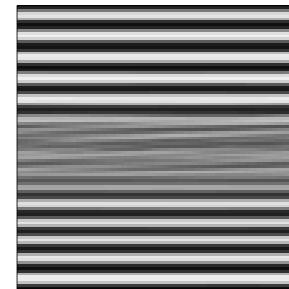
la direction de cisaillement. Nous observons de plus un phénomène physique connu : le nombre de bandelettes créées augmente avec la vitesse de cisaillement.

Ces résultats sont à la base d'une direction de recherche théorique dont les premiers résultats obtenus font l'objet du chapitre 5. La question sous-jacente à l'apparition de telles structures en bandes est la suivante : dans quelle mesure une solution monodimensionnelle de l'équation de Cahn-Hilliard (dans la direction transverse à l'écoulement) est-elle stable quand elle est soumise à cisaillement ? En effet, une solution de l'équation de Cahn-Hilliard 1D jointe au champ de vitesse de cisaillement stationnaire forment à l'évidence une solution particulière du système 2D.

Cisaillement = 1

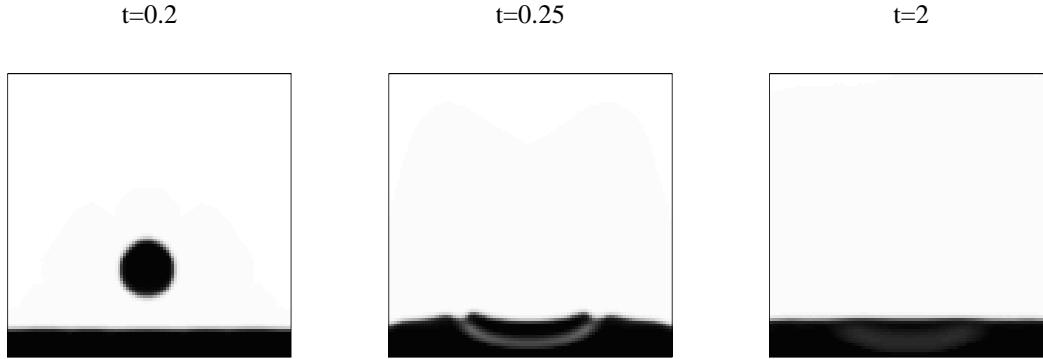


Cisaillement = 10

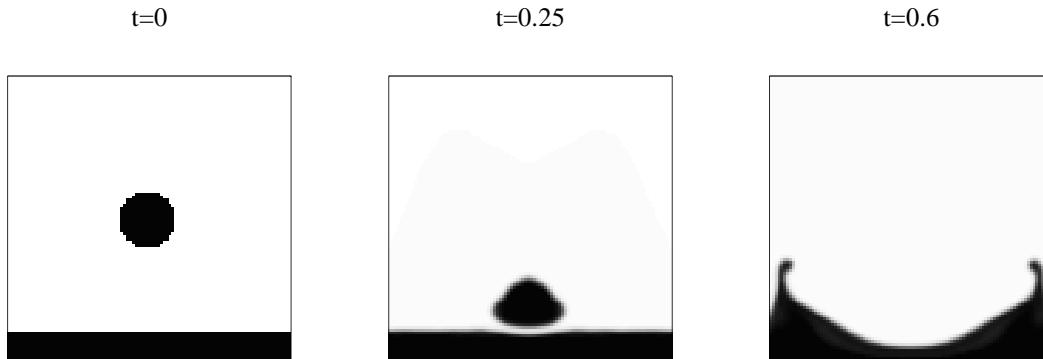


Dans le cadre de la chute d'une goutte, nous mettons en évidence la nécessité de faire dépendre la viscosité du paramètre d'ordre dans l'équation de Navier-Stokes.

A viscosité variable, la goutte s'écrase dans le liquide disposé au fond de la cavité, puis l'équilibre s'établit assez rapidement :



A viscosité constante, la goutte touche le liquide qui est au fond de la cavité et crée un phénomène de vaguelettes horizontales entre le centre et le bord de la cavité, l'équilibre étant beaucoup plus long à atteindre :



On constate de même, des différences fondamentales de comportement et de dynamique sur le problème d'une bulle de gaz qui remonte à la surface d'un liquide. Dans les deux cas (goutte ou bulle), les résultats sont qualitativement tout à fait comparables à des résultats existants dans [23] par exemple.

Enfin, à la fin du chapitre, on expose comment, grâce à une méthode de domaine fictif et de pénalisation, on peut adapter la méthode numérique proposée au cas d'un écoulement dans un domaine avec obstacle ou dans un domaine non rectangle. Pour l'équation de Cahn-Hilliard on met en place une condition aux limites discrète originale qui assure la conservation numérique de la masse et pour l'équation de Navier-Stokes on emploie la méthode de pénalisation proposée et analysée dans [2].

Seconde partie - Etude mathématique du modèle : existence et comportement qualitatif des solutions

Nous décrivons maintenant les résultats théoriques que nous avons obtenus.

Dans un premier temps (chapitre 3), nous étudions un modèle simplifié dans lequel la densité des deux phases est la même. Cela revient, après adimensionnement, à prendre $\rho(\varphi) \equiv 1$ dans les équations. Nous obtenons des résultats d'existence globale de solutions faibles (y compris quand la mobilité $B(\varphi)$ dégénère), et un résultat d'existence et d'unicité de solutions fortes (globales en 2D et locales en 3D).

Ces résultats peuvent s'étendre à des potentiels singuliers (logarithmiques par exemple) avec une mobilité non-dégénérée comme dégénérée [5, 6]. Dans ce cas on obtient, en outre, une estimation L^∞ sur le paramètre d'ordre prouvant que la solution est physiquement acceptable.

L'étude de la stabilité asymptotique des états stationnaires est une question de grand intérêt du point de vue physique. Si nous considérons uniquement l'équation de Cahn-Hilliard, il existe très peu de résultats dans ce sens en dimension supérieure à 1 où les solutions stationnaires non constantes sont difficiles à obtenir [24]. En dimension 1, quelques études qualitatives sont menées [1, 4, 10] en particulier en étudiant les minimums de la fonctionnelle de l'énergie de Cahn-Hilliard. Ainsi, en 1D trois types de solutions stationnaires monotones se dégagent : les constantes, les solutions de type couche limite, et les solutions de type couche de transition.

A l'inverse de ces travaux, nous nous intéressons ici essentiellement aux dimensions physiques 2 et 3, et à la stabilité des mélanges homogènes.

Ainsi, toujours sur le modèle homogène, nous montrons la stabilité asymptotique sous cisaillement des états métastables, c'est-à-dire des mélanges homogènes dont la composition $\varphi \equiv \omega$ est un point de convexité de F .

Dans le chapitre 4, nous étudions le modèle complet, en particulier dans le cas où les densités des deux phases sont proches (ε petit). Nous montrons dans ces conditions l'existence de solutions faibles globales et de solutions fortes (locales en 2D et globales en 3D) ainsi qu'un résultat de stabilité asymptotique similaire à celui obtenu dans le cadre homogène.

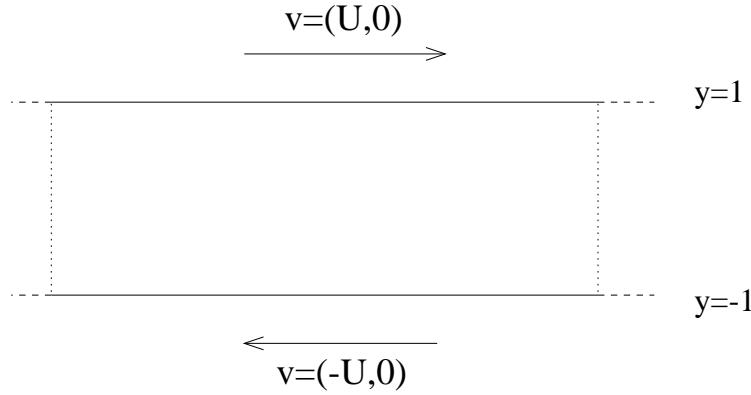
Enfin, nous montrons dans le chapitre 5, des résultats de persistance de solutions monodimensionnelles dans un domaine étiré et à grand cisaillement correspondant aux conditions expérimentales des cellules de Couette. Ces résultats constituent une première étape en vue de l'étude de la stabilité des solutions en bandelettes sous grand cisaillement.

Chapitre 3 - Préliminaires et étude du cas homogène

Dans le cas homogène le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{Pe} \operatorname{div} (B(\varphi) \nabla \mu) &= 0, \\ \mu &= -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v - \frac{1}{Re} \operatorname{div} (2\eta(\varphi) D(v)) + \nabla p &= \mathcal{K} \mu \nabla \varphi, \\ \operatorname{div}(v) &= 0. \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, nous avons pris le terme source $g = 0$, le moteur de l'écoulement étant assuré par les conditions aux limites suivantes :



Les difficultés rencontrées lors de l'étude de ce système sont multiples. Il y a bien sûr celles inhérentes à l'équation de Cahn-Hilliard et à celle de Navier-Stokes, mais il y a en plus les problèmes posés par les conditions aux limites non-homogènes et les termes de couplage, en particulier le terme de forces capillaires.

- **Existence et unicité**

Nous étudions tout d'abord le cas non dégénéré (paragraphes 4.2 et 4.3), c'est-à-dire quand la mobilité vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < B_1 \leq B(x) \leq B_2,$$

avec un potentiel de Cahn-Hilliard F défini sur \mathbb{R} et essentiellement polynômial à l'infini.

Nous montrons alors les deux résultats suivants en dimension $d = 2$ et $d = 3$.

Théorème

Pour toutes données $U > 0$ (vitesse de cisaillement), $v_0 \in \mathbb{L}^2$, tel que $\operatorname{div}(v_0) = 0$, $\varphi_0 \in H^1$ vérifiant les conditions aux limites, il existe une solution faible globale du système telle que

$$\begin{aligned} v &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^1), \\ \varphi &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; H^3). \end{aligned}$$

Théorème

Pour toutes données $U > 0$, $v_0 \in \mathbb{H}^1$, tel que $\operatorname{div}(v_0) = 0$, $\varphi_0 \in H^2$ vérifiant les conditions aux limites, on a

– Si $d = 2$: il existe une unique solution forte globale du problème. Elle vérifie

$$\begin{aligned} v &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^1) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^2), \\ \varphi &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; H^4). \end{aligned}$$

– Si $d = 3$: il existe une unique solution forte locale. Elle satisfait localement aux mêmes résultats de régularité que dans le cas 2D précédent.

En outre, nous établissons dans le paragraphe 4.4 un résultat d'existence si l'on choisit un potentiel F logarithmique [3], i.e. de la forme

$$F(x) = \theta_c(1 - x^2) + \theta((1 + x) \log(1 + x) + (1 - x) \log(1 - x)),$$

où la température θ est strictement inférieure à la température critique θ_c .

Théorème

Supposons que le potentiel F soit défini comme ci-dessus. Pour toutes données $U > 0$, $v_0 \in \mathbb{H}^1$, tel que $\operatorname{div}(v_0) = 0$, et $\varphi_0 \in H^1$ vérifiant les conditions aux limites et

$$|\varphi_0|_\infty \leq 1 \text{ et } |m(\varphi_0)| < 1,$$

il existe une solution faible globale du problème vérifiant

$$\begin{aligned} v &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^1), \\ \varphi &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; H^2). \end{aligned}$$

Cette solution vérifie de plus

$$|\varphi(t, x)| < 1 \text{ pour presque tout } (t, x) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega,$$

et

$$F'(\varphi) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)).$$

Ce résultat est fondamental puisqu'en réalité chimistes et physiciens [15] considèrent que c'est ce type de potentiels logarithmiques qui est physiquement réaliste (au sens de la thermodynamique) et que les potentiels polynomiaux ne sont que des approximations de ces potentiels au voisinage du point critique.

Nous étudions ensuite (paragraphe 4.5) le cas dégénéré [14], où l'on accepte que B s'annule pour les valeurs ± 1 de φ . Au vu de la définition du paramètre d'ordre, les seules valeurs physiques pour φ sont dans $[-1, 1]$ et les valeurs ± 1 représentent les cas limites où une seule des deux phases est présente. Le cas typique d'application des résultats suivants est $B(\varphi) = |1 - \varphi^2|^r$ avec $r = 1$ ou 2 . Nous montrons alors :

Théorème

Pour toutes données $U > 0$, $v_0 \in \mathbb{L}^2$, tel que $\operatorname{div}(v_0) = 0$, $\varphi_0 \in H^1$ telle que $|\varphi_0|_\infty < 1$ et pour tout $T > 0$ il existe une solution faible du problème sur $[0, T[$ vérifiant

$$\begin{aligned} v &\in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2) \cap L^2_{loc}(0, T; \mathbb{H}^1), \\ \varphi &\in L^\infty(0, T; H^1) \cap L^2_{loc}(0, T; H^2), \\ |\varphi(t, x)| &\leq 1, \text{ pour presque tout } (t, x). \end{aligned}$$

En fait, ce théorème reste vrai si on suppose $|\varphi_0|_\infty = 1$ et B suffisamment dégénérée (i.e. $B'(\pm 1) = 0$). Il est aussi valable avec un potentiel de Cahn-Hilliard F logarithmique comme celui considéré plus haut.

Dans les deux théorèmes précédents (B non-dégénérée avec potentiel logarithmique et B dégénérée), nous soulignons l'intérêt de l'estimation L^∞ obtenue sur φ . Elle prouve que quand B dégénère ou quand F est logarithmique, les valeurs de φ restent dans l'intervalle $[-1, 1]$ des valeurs physiquement admissibles.

Ce type de résultat semble hors d'atteinte dans le cas non dégénéré si l'on choisit un potentiel de Cahn-Hilliard F régulier (polynôme d'ordre pair à coefficient dominant positif). Ceci est lié à la non-existence d'un principe du maximum pour l'opérateur biharmonique.

• Stabilité asymptotique des états métastables

Dans le paragraphe 4.6 nous ne faisons aucune hypothèse spécifique sur B (de type dégénérescence) et F . En particulier le résultat qui va suivre est valable dans les cas dégénérés et non dégénérés, mais aussi pour F polynomiale ou logarithmique. On s'intéresse à la stabilité asymptotique de la solution stationnaire du problème donnée par

$$\varphi_\infty \equiv \omega, \quad v_\infty^U = Uye_x,$$

où ω est un réel donné.

Théorème

Soit $\omega \in [-1, 1]$. On suppose que $B(\omega) > 0$ et F convexe dans un voisinage de ω . Alors pour $U > 0$ suffisamment petit, la solution stationnaire $(\varphi_\infty, v_\infty^U)$ du problème est asymptotiquement stable.

C'est-à-dire que pour toute donnée suffisamment proche de cette solution stationnaire, il existe une unique solution forte globale (y compris si $d = 3$!) du système et celle-ci converge vers la solution stationnaire considérée quand t tend vers $+\infty$.

Remarque : Nous insistons sur le fait que ce théorème complète le théorème d'existence de solutions fortes dans le cas 3D puisque nous prouvons ici l'existence *globale* d'une telle solution. De plus, ce théorème montre que la décomposition spinodale mise en évidence dans les expériences numériques, ne peut avoir lieu que si la composition moyenne du mélange de départ n'est pas dans un état métastable de F (*i.e.* F est concave en ω).

Chapitre 4 - Cas faiblement non-homogène

Dans ce chapitre, publié dans [7], nous étudions le modèle complet (en supposant la mobilité constante $B(\varphi) \equiv 1$ par exemple) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{\mathcal{P}_e} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho_\varepsilon} \right) \right) &= 0, \\ \mu &= -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi), \\ \rho_\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) - \frac{2}{\mathcal{R}_e} \operatorname{div} (\eta(\varphi) D(v)) + \nabla p &= \mathcal{K} \mu \nabla \varphi + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1 - \varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho_\varepsilon} \right) + \rho_\varepsilon g, \\ \operatorname{div}(v) &= 0, \\ \rho_\varepsilon &= \rho_\varepsilon(\varphi), \end{aligned}$$

Rappelons que la densité est donnée dans la dérivation du modèle comme une fonction linéaire du paramètre d'ordre

$$\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon(\varphi) = 1 + \varepsilon \frac{\varphi - 1}{2},$$

où, dans ce paragraphe, on reprend la notation

$$\varepsilon = \frac{|\rho_1^0 - \rho_2^0|}{\max(\rho_1^0, \rho_2^0)},$$

où ρ_1^0 , et ρ_2^0 sont les densités des deux constituants dans les conditions de l'étude. Quand $\varepsilon = 0$, on retrouve le modèle homogène étudié précédemment.

En fait, comme on ne sait pas montrer que les valeurs de φ restent dans l'intervalle $[-1, 1]$, on doit, pour assurer que la densité reste positive, introduire une fonction ρ_ε qui coïncide avec l'expression linéaire précédente sur $[-1, 1]$ mais qui vérifie

$$|\rho'_\varepsilon|_\infty \leq \varepsilon, \text{ et } 0 < \rho_{min} \leq \rho_\varepsilon(x) \leq \rho_{max}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où ρ_{min}, ρ_{max} sont indépendantes de ε .

- **Existence et unicité**

Nous ne sommes pas en mesure de montrer l'existence de solutions faibles pour ce problème dans le cas général (*i.e.* pour tout $\varepsilon > 0$). Ceci est essentiellement dû au fait que la densité ρ ne vérifie pas l'équation de transport

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = 0,$$

à cause du terme de diffusion de Cahn-Hilliard. En revanche, nous montrons le résultat d'existence locale et d'unicité de solutions fortes suivant

Théorème

Pour toutes données $U > 0$, $v_0 \in \mathbb{H}^1$, tel que $\operatorname{div}(v_0) = 0$, $\varphi_0 \in H^4$, vérifiant les conditions aux limites, il existe $T > 0$ (dépendant de U , $\|v_0\|_{\mathbb{H}^1}$ et de $\|\varphi_0\|_{H^4}$) tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une unique solution forte du problème $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon)$ définie sur $[0, T[$, telle que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; H^4)} + \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbb{H}^2)} \leq C,$$

où la constante C est indépendante de ε .

Pour obtenir des solutions faibles globales nous allons nous placer dans le cas "**faiblement non-homogène**", c'est-à-dire que l'on étudie le régime asymptotique où ε est supposé petit. Dans ces conditions nous avons

Théorème

Soient $U > 0$, $v_0^\varepsilon \in \mathbb{L}^2$, tel que $\operatorname{div}(v_0^\varepsilon) = 0$, $\varphi_0^\varepsilon \in H^3$ vérifiant les conditions aux limites et tels qu'il existe $C_0 > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|\varphi_0^\varepsilon\|_{H^1} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\varphi_0^\varepsilon\|_{H^2} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|\varphi_0^\varepsilon\|_{H^3} + \|v_0^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \leq C_0.$$

Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ dépendant uniquement de C_0 et de F tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une solution faible globale $(v_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ du problème (avec la condition initiale $(v_0^\varepsilon, \varphi_0^\varepsilon)$) qui vérifie

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2)} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H^3)} + \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2)} \leq C,$$

$$\text{pour tout } T > 0, \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^3)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbb{H}^1)} \leq C(T),$$

où C et $C(T)$ sont indépendantes de ε .

De plus, si on a

$$\varphi_0^\varepsilon \rightarrow \varphi_0 \text{ dans } H^1 \text{ et } v_0^\varepsilon \rightarrow v_0 \text{ dans } \mathbb{L}^2,$$

quand ε tend vers 0, alors quitte à extraire une sous-suite, la solution $(v_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ converge vers une solution faible du problème homogène ($\varepsilon = 0$).

Remarquons que la donnée initiale φ_0^ε est supposée dans H^3 mais que plus ε est petit et plus les normes de φ_0^ε dans H^2 et H^3 sont autorisées à grandir de sorte que l'on retrouve formellement pour $\varepsilon = 0$ la régularité des données initiales nécessaire à l'existence de solutions faibles pour le modèle homogène.

Dans le cas de mélanges faiblement non-homogènes, on améliore le résultat d'existence de solutions régulières exposé plus haut.

Théorème

Soient $U > 0$, $v_0 \in \mathbb{H}^1$, tel que $\operatorname{div}(v_0) = 0$, $\varphi_0 \in H^3$ vérifiant les conditions aux limites, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ dépendant de $\|v_0\|_{\mathbb{H}^1}$, $\|\varphi_0\|_{H^3}$ et de F tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une unique solution forte du problème $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon)$ pour la condition initiale (φ_0, v_0) .

- si $d = 2$: cette solution est globale et vérifie

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H^3)} + \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^1)} \leq C,$$

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; H^4)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbb{H}^2)} \leq C(T), \text{ pour tout } T > 0,$$

où C et $C(T)$ sont indépendants de ε .

- si $d = 3$: cette solution existe sur un temps $T > 0$ indépendant de ε et vérifie sur $[0, T[$ les mêmes résultats de régularité que dans le cas 2D précédent.

- **Stabilité asymptotique des états métastables**

De façon similaire à l'étude menée dans le cadre homogène, nous montrons enfin la stabilité asymptotique des états métastables, toujours sous l'hypothèse de mélanges presque homogènes. Le théorème suivant est établi aussi bien en dimension 2 que 3, si l'on suppose que le terme de forces extérieures g est un gradient (ce qui est bien sûr valable dans le cas de la gravité).

Théorème

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, un état métastable de F (i.e. $F''(\omega) > 0$). Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $U > 0$ assez petit et pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, la solution stationnaire $(v_\infty^U, \varphi_\infty)$ est asymptotiquement stable.

En particulier, pour toute donnée initiale suffisamment proche de cette solution stationnaire, il existe une unique solution forte globale.

Chapitre 5 - Persistance des perturbations de solutions 1D à grand cisaillement

Dans ce chapitre, le paramètre ε n'est pas celui représentant le contraste de densité comme dans le chapitre précédent.

Une cellule de Couette est formée de deux cylindres concentriques dont la différence des rayons est petite (d'ordre 1) devant le rayon moyen de la cellule (d'ordre $\sim \frac{1}{\varepsilon}$). Si on fait tourner les cylindres à des vitesses angulaires opposées et de l'ordre de 1, la vitesse de cisaillement obtenue est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. On peut ainsi se ramener en 2D à un problème modèle qui s'écrit pour $(x, z) \in \Omega_\varepsilon =]0, \frac{1}{\varepsilon}[\times]-1, 1[$, sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} + \frac{z}{\varepsilon} \partial_x \varphi_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon - \Delta \mu_\varepsilon &= 0, \\ \mu_\varepsilon &= -\alpha^2 \Delta \varphi_\varepsilon + F'(\varphi_\varepsilon), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon + \nabla p &= \mu_\varepsilon \nabla \varphi_\varepsilon, \\ \operatorname{div}(u_\varepsilon) &= 0, \end{aligned}$$

où φ_ε , μ_ε et u_ε vérifient des conditions aux limites homogènes de type Couette. On suppose ici que la viscosité et la mobilité sont constantes, et que l'écoulement est laminaire, c'est-à-dire que les termes d'inertie sont négligeables.

On constate alors que si (φ_0, u_0) est une solution 1D dans la direction transverse z du système, celle-ci est donnée par une solution de l'équation de Cahn-Hilliard 1D

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \partial_z^2 \mu_0 &= 0, \\ \mu_0 &= -\alpha^2 \partial_z^2 \varphi_0 + F'(\varphi_0), \\ \partial_z \varphi_0 &= \partial_z^3 \varphi_0 = 0, \text{ sur } \{z = \pm 1\}, \end{aligned}$$

et une solution de l'équation de la chaleur 1D

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \partial_z^2 u_0 = 0, \text{ dans }]-1, 1[, \text{ avec } u_0(t=0) = u_0^0, u_0(z=\pm 1) = 0.$$

Ces solutions correspondent aux solutions en bandes que l'on observe expérimentalement et numériquement.

Si on note $|f|_{2,\varepsilon}$ la norme L^2 indépendante du domaine, c'est-à-dire

$$|f|_{2,\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_\varepsilon|}} \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)},$$

alors le résultat suivant [9] montre la persistance des perturbations de taille ε de la solution (φ_0, u_0) sur des temps $O(1)$.

Théorème

On considère une famille de données initiales de la forme

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(0) &= \varphi_0^0 + \varepsilon \varphi_1^0, \\ u_\varepsilon(0) &= u_0^0(z)e_x + w_\varepsilon^0,\end{aligned}$$

pour les équations précédentes dans le domaine Ω_ε . On suppose que $m(\varphi_1^0) = 0$ et qu'il existe une constante K_0 ne dépendant que de φ_0^0 telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait

$$\begin{aligned}|\varphi_1^0|_{2,\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\nabla \varphi_1^0|_{2,\varepsilon} &\leq K_0, \\ |w_\varepsilon^0|_{2,\varepsilon} &\leq K_0 \varepsilon.\end{aligned}$$

Alors, pour tout $T > 0$, il existe $\varepsilon_0(T) > 0$ et $M_0(T) > 0$ tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, la solution $(\varphi_\varepsilon, u_\varepsilon)$ du problème posé dans Ω_ε vérifie

$$\begin{aligned}\sup_{t \in [0,T]} \left(|\varphi_\varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon \varphi_1|_{2,\varepsilon} + |u_\varepsilon - u_0|_{2,\varepsilon} \right) &\leq M_0(T) \varepsilon, \\ \sup_{t \in [0,T]} \left(|\nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon \varphi_1)|_{2,\varepsilon} \right) &\leq M_0(T) \varepsilon^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

où u_0 et φ_1 sont solutions des équations linéaires

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \partial_z^2 u_0 = 0, \text{ dans }]-1,1[, \text{ avec } u_0(t=0) = u_0^0, u_0(z=\pm 1) = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{z}{\varepsilon} \partial_x \varphi_1 + u_0(z) \partial_x \varphi_1 - \Delta \mu_1 &= 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \mu_1 &= -\alpha^2 \Delta \varphi_1 + F''(\varphi_0) \varphi_1. \\ \text{avec } \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} &= \frac{\partial \mu_1}{\partial \nu} = 0 \text{ au bord et } \varphi_1(0) = \varphi_1^0\end{aligned}$$

On peut améliorer de façon significative ce résultat : si φ_0 est en fait une solution de l'équation de Cahn-Hilliard 1D constante, $\varphi_0 \equiv \omega$, et si ω est un état métastable du potentiel ($F''(\omega) > 0$), alors on a

Théorème

On considère une famille de données initiales de la forme

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(0) &= \varphi_0^0 + \varepsilon \varphi_1^0, \\ u_\varepsilon(0) &= u_0^0(z)e_x + w_\varepsilon^0,\end{aligned}$$

pour les équations précédentes dans le domaine Ω_ε . On suppose que $m(\varphi_1^0) = 0$ et qu'il existe une constante K_0 ne dépendant que de φ_0^0 telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait

$$\begin{aligned}|\varphi_1^0|_{2,\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\nabla \varphi_1^0|_{2,\varepsilon} &\leq K_0, \\ |w_\varepsilon^0|_{2,\varepsilon} &\leq K_0 \varepsilon^{\frac{5}{4}}.\end{aligned}$$

Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $M_0 > 0$ tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, la solution $\varphi_\varepsilon, u_\varepsilon$ du problème posé dans Ω_ε vérifie

$$\begin{aligned}\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left(|\varphi_\varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon \varphi_1|_{2,\varepsilon} + |u_\varepsilon - u_0|_{2,\varepsilon} \right) &\leq M_0 \varepsilon^{\frac{5}{4}}, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left(|\nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon \varphi_1)|_{2,\varepsilon} \right) &\leq M_0 \varepsilon^{\frac{3}{4}},\end{aligned}$$

où u_0 et φ_1 sont les solutions des équations linéaires précédemment introduites.

Ainsi, dans ce cas, on obtient une persistance des perturbations de taille ε de la solution 1D uniformément en temps et en outre, on justifie sur tout \mathbb{R}^+ le développement asymptotique

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + o(\varepsilon).$$

Notons qu'on montre aussi un résultat intermédiaire, dans le cas où φ_0 est une constante ω qui n'est pas métastable ($F''(\omega) < 0$), qui justifie le même développement asymptotique mais sur des temps $O(1)$.

On établit donc une hiérarchie des propriétés de persistance des solutions 1D : les mélanges homogènes sont plus stables à grand cisaillement que les autres solutions “bandes”, et parmi ceux-ci, les états métastables sont stables sur des temps infinis.

Références

- [1] N. Alikakos, P. Bates, and G. Fusco. Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension. *Journal of Differential Equation*, 90 :pp 71–135, 1991.
- [2] P. Angot, C-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numer. Math.*, 81 :pp 497–520, 1999.
- [3] H. W. Barrett and J. F. Blowey. Finite elements approximation of the Cahn-Hilliard equation with concentration dependent mobility. *Mathematics of Computation*, 68 :pp 487–517, 1999.
- [4] P. W. Bates and P. C. Fife. The dynamics of nucleation for the Cahn-Hilliard equation. *SIAM Journal of Applied Maths*, 53 :pp 990–1008, 1993.
- [5] F. Boyer. Mathematical study of multiphase flow under shear through order parameter formulation. *Asymptotic Analysis*, 20 :pp 175–212, 1999.
- [6] F. Boyer. Diphasic flow with a logarithmic Cahn-Hilliard potential. *en préparation*, 2001.
- [7] F. Boyer. Nonhomogeneous Cahn-Hilliard fluids. *Annales de l'IHP : Analyse non linéaire*, sous presse, 2001.
- [8] F. Boyer. A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows. *Computers and Fluids*, sous presse, 2001.
- [9] F. Boyer and P. Fabrie. Persistency of 1D solutions for a Cahn-Hilliard flow under high shear in a stretched 2D domain. *en préparation*, 2001.
- [10] J. Carr, M. Gurtin, and M. Slemrod. Structured phase transitions on a finite interval. *Archive for Rational Mechanical Analysis*, 86 :pp 317–351, 1984.
- [11] R. Chella and J. Vinals. Mixing of a two-phase fluid by a cavity flow. *Physical Review E*, 53 :p 3832, 1996.
- [12] A. Colin and P. Panizza. communication personnelle.
- [13] M. Doi. Dynamics of domains and textures. *Theoretical Challenges in the Dynamics of Complex Fluids*, pages 293–314, 1997.
- [14] C. M. Elliott and H. Garcke. On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility. *Siam Journal on Mathematical Analysis*, 27 :pp 404–423, 1996.
- [15] D. Gunton, P. S. Sahni, and M. San Miguel. The dynamics of first-order phase transitions. In *Phase transitions and critical phenomena*, Vol. 8, pages 267–482. Domb and Lebowitz (Academic press, London), 1983.
- [16] D. Jacqmin. Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling. *Journal of Computational Physics*, 155 :pp 96–127, 1999.
- [17] D. Jamet. *Etude des potentialités de la théorie du second gradient pour la simulation numérique directe des écoulements liquide-vapeur avec changement de phase*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, CEA Grenoble, 1998.
- [18] P. L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics : Vol. 1 Incompressible models*. Oxford Science Publications, 1996.

- [19] A. Nouri and F. Poupaud. An existence theorem for the multifluid Navier-Stokes problem. *Journal of Differential Equations*, 122 :pp 71–88, 1995.
- [20] A. Onuki. Phase transitions of fluids in shear flow. *J. Phys. : Condens. Matter*, 9 :pp 6119–6157, 1997.
- [21] P. Rasetarinera. *Etude mathématique et numérique de la restauration biologique en milieu poreux*. Thèse de Doctorat, MAB, Univ. Bordeaux 1, 1995.
- [22] J. Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids : existence of velocity, density, and pressure. *SIAM J. Math. Anal.*, 21 :pp 1093–1117, 1990.
- [23] M. Sussman, A. S. Almgren, J. B. Bell, P. Colella, L. H. Howell, and M. L. Welcome. An adaptative level set approach for incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 148 :pp 81–124, 1999.
- [24] J. Wei and M. Winter. Stationary solutions for the Cahn-Hilliard equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré : Analyse non linéaire*, 15 :pp 459–492, 1998.

Première partie

Modélisation : dérivation et simulations

Chapitre 1

Dérivation du modèle

Dans ce chapitre nous présentons la dérivation du modèle qui va faire l'objet de notre étude. Notre but est de rendre compte des phénomènes à la fois chimiques, thermodynamiques et hydrodynamiques qui interviennent dans l'écoulement d'un mélange diphasique. Ce travail est motivé par l'observation de phénomènes expérimentaux qui ne sont pas encore complètement expliqués aujourd'hui.

Par exemple, portons un mélange solvant-polymère au-dessus de la température critique (les deux phases sont alors uniformément mélangées) et plaçons-le sous cisaillement dans un système de Couette-Taylor (c'est-à-dire dans un rhéomètre), puis abaissons subitement la température au-dessous de la température critique du mélange. Deux phénomènes se produisent, l'un de nature thermodynamique : les deux phases se séparent spontanément et se structurent en gouttelettes (phase éponge), l'autre de nature hydrodynamique : les phases ainsi séparées vont progressivement se structurer sous la forme de rubans ou de tubes (phase lamellaire).

Il est ainsi clair que de tels phénomènes ne peuvent être théoriquement étudiés qu'à travers un modèle qui couple les propriétés chimiques et hydrodynamiques du mélange.

Parmi les modèles diphasiques existants, on peut distinguer deux grandes catégories : les modèles à interface ponctuelle et les modèles à interface diffuse. Les premiers supposent que l'interface entre deux phases est d'épaisseur nulle, les seconds considèrent que l'épaisseur d'interface est certes petite mais non nulle et qu'ainsi l'interface est une zone de petite épaisseur dans laquelle les grandeurs physiques caractéristiques du mélange (typiquement les concentrations) évoluent continûment.

Ces deux types de modèles sont étudiés depuis plusieurs années, à la fois d'un point de vue théorique et numérique, cependant il semble que la vision *interface diffuse* ait actuellement la faveur des physiciens [1] et ce pour des raisons simples : au moins à l'échelle moléculaire les deux phases ne peuvent être rigoureusement séparées et ainsi sur une épaisseur de l'ordre de quelques tailles moléculaires on peut trouver un mélange des deux phases. De plus, comme nous le verrons plus loin, la simulation numérique de tels modèles est en un certain sens plus aisée que celle des modèles à interface plate. Ainsi, pour positionner une interface théoriquement plate, on est obligés d'introduire artificiellement une épaisseur ε à l'interface et de régulariser les distributions de Dirac qui apparaissent dans ces modèles et qui ne peuvent être discrétisées sous leur forme distribution (méthodes level set par exemple [26]).

Dans ce travail, l'optique "interface diffuse" est adoptée, le modèle considéré est établi sur la base de travaux d'Onuki [23] et de Chella et Vinals [17, 20]. Dans ces articles, l'interface est modélisée à travers le choix d'un paramètre d'ordre (essentiellement la fraction volumique ou la concentration de l'une des phases) et d'une énergie libre dite de Cahn-Hilliard qui rend compte de l'excès d'énergie à l'interface dû aux fortes variations de la composition du mélange dans cette zone. La taille de l'interface est prise en compte directement dans l'énergie.

En outre, en ce qui concerne les propriétés hydrodynamiques du mélange (sous cisaillement par exemple), on souhaite écrire une équation pour un champ de vitesse moyen que l'on puisse traiter globalement. L'équation que nous obtenons est essentiellement une équation de Navier-Stokes non-homogène avec un terme force de type *forces capillaires* prenant en compte la *tension de surface* à l'interface. Ce terme apparaît dans la dérivation des équations comme une conséquence naturelle du choix de la théorie de Cahn-Hilliard pour l'énergie libre du système. De plus, les deux phases

considérées peuvent avoir des viscosités différentes (mélange air-eau ou mélange polymère-solvant, par exemple).

Nous renvoyons à [1] et [18] pour une vue d'ensemble des différents types de modèles qui existent pour ces problèmes.

Dans le cas homogène, c'est-à-dire quand les deux phases ont la même densité, le modèle présenté ici coïncide avec un modèle déjà écrit dans [11, 17] et fera l'objet d'une étude théorique dans le chapitre 3. Le modèle non-homogène plus général qui va être obtenu dans ce chapitre fait lui l'objet d'une étude théorique dans le chapitre 4.

1 Notations

Considérons un mélange composé de deux phases d'une même espèce (ou de deux espèces différentes), de densités ρ_1^0 et ρ_2^0 . Ces valeurs sont supposées constantes dans les conditions de l'expérience (ce sont les valeurs que l'on peut trouver dans les tables). Dans ce qui suit la température est supposée constante durant l'évolution du système. La fraction volumique de la phase 1 dans le mélange est définie par

$$\psi = \frac{dV_1}{dV},$$

où dV_1 est le volume occupé par la phase 1 dans le volume élémentaire dV (figure 1).

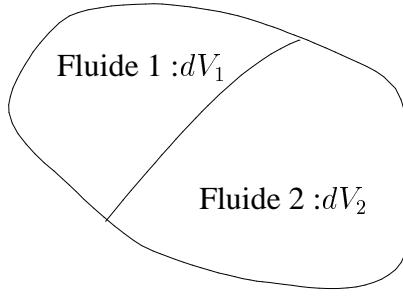


FIG. I.1.1 – Un volume élémentaire dV

Une telle définition du paramètre d'ordre nécessite quelques précisions. En effet, on fait l'hypothèse implicite que le volume élémentaire dV ne contient pas de "vide", ou autrement dit que $dV = dV_1 + dV_2$ pour tout volume élémentaire du domaine. Dans d'autres modèles du même type où c'est la densité qui est choisie comme paramètre d'ordre [19], une hypothèse similaire est faite sous la forme : le nombre total de particules par unité de volume est constant.

Certains auteurs [14, 24] utilisent ψ comme paramètre d'ordre, mais ici pour des raisons de compatibilité avec les modèles étudiés dans [11, 15], le paramètre d'ordre utilisé est la renormalisation de ψ définie par

$$\varphi = 2\psi - 1,$$

de telle sorte que $-1 \leq \varphi \leq 1$ et que $\varphi(x) = 1$ (resp. $\varphi(x) = -1$) si et seulement si la phase 1 (resp. la phase 2) est la seule présente au point x . Il est clair que le choix de φ ou de ψ comme paramètre d'ordre ne change en rien la nature du modèle ainsi que les résultats numériques et théoriques qui sont présentés dans la suite.

Les densités de chacune des phases au sein du mélange sont notées ρ_1 et ρ_2 , et ρ désigne la densité totale du mélange. On a de façon évidente

$$\rho_1 = \frac{\rho_1^0 dV_1}{dV} = \rho_1^0 \psi = \rho_1^0 \frac{1 + \varphi}{2}, \quad (\text{I.1.1})$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_2^0 dV_2}{dV} = \rho_2^0 (1 - \psi) = \rho_2^0 \frac{1 - \varphi}{2}, \quad (\text{I.1.2})$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2. \quad (\text{I.1.3})$$

Comme dans la théorie très générale des mélanges [24], on suppose que chaque phase possède un champ de vitesse propre \mathbf{v}_j ($j = 1, 2$). On fait alors le choix de définir la vitesse moyenne \mathbf{v} du mélange par la moyenne volumique des champs de vitesse propres des phases

$$\mathbf{v} = \frac{dV_1 \mathbf{v}_1 + dV_2 \mathbf{v}_2}{dV} = \frac{1 + \varphi}{2} \mathbf{v}_1 + \frac{1 - \varphi}{2} \mathbf{v}_2, \quad (\text{I.1.4})$$

et on définit la perturbation en vitesse par

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2. \quad (\text{I.1.5})$$

Un autre choix de champ de vitesse moyen souvent rencontré dans la littérature est celui de la moyenne des vitesses pondérée par les densités, autrement dit une moyenne massique. Ce choix est écarté ici, car on s'intéresse seulement au cas où les deux phases sont incompressibles, et on verra alors que la vitesse moyenne choisie vérifie la condition de divergence nulle. Cette condition de divergence nulle n'est pas satisfaite par la vitesse moyenne massique dans le cadre qui va suivre.

2 Equations générales

Pour tout champ de vecteur \mathbf{v} , on définit usuellement le tenseur de déformation par

$$\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t}{2}.$$

On note de plus

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{v}) = \mathbf{D}(\mathbf{v}) - \frac{1}{3} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \operatorname{Id},$$

la partie à trace nulle de ce tenseur de déformation.

2.1 Conservation de la masse

Les équations de conservation de la masse de chacune des phases s'écrivent

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (\text{I.2.1})$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{v}_2) = 0. \quad (\text{I.2.2})$$

En divisant chacune de ces équations par ρ_i^0 ($i = 1, 2$), et en ajoutant les équations obtenues, il vient avec (I.1.1) et (I.1.2)

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad (\text{I.2.3})$$

c'est-à-dire, comme annoncé plus haut, que le champ de vitesse moyen tel qu'il a été défini, satisfait la contrainte de divergence nulle très usuelle dans le cadre incompressible monophasique.

De plus, si on utilise (I.1.4)-(I.1.5) et (I.2.3), n'importe laquelle des équations (I.2.1) ou (I.2.2) peut s'écrire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi + \operatorname{div} \left(\frac{1 - \varphi^2}{2} \mathbf{w} \right) = 0. \quad (\text{I.2.4})$$

L'équation d'évolution obtenue sur le paramètre d'ordre φ contient donc deux termes essentiels qui décrivent les deux phénomènes qui participent au mouvement de l'interface. Le premier est le fait que le mélange est soumis à un écoulement caractérisé par le champ de vitesse moyen \mathbf{v} , qui justifie pleinement le terme de transport $\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi$. Quant au second, il s'agit d'un phénomène de diffusion au travers de l'interface, dont le flux est proportionnel à la perturbation en vitesse $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. On s'attend à ce que le flux de diffusion soit proportionnel au gradient du potentiel chimique du mélange et c'est effectivement ce que l'on va retrouver plus loin.

A la différence des modèles de type *fluides non-homogènes* étudiés dans [21, 25], on peut remarquer que la densité ρ ne satisfait pas une équation de conservation de la masse classique mais vérifie une autre équation de conservation qui s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\rho_1^0 - \rho_2^0}{4} \operatorname{div}((1 - \varphi^2) \mathbf{w}) = 0.$$

Cette remarque est importante dans l'optique du traitement mathématique et numérique des équations. On verra plus loin quels sont les avantages et inconvénients d'une telle équation de conservation par rapport à une équation de transport classique.

2.2 Conservation de la quantité de mouvement

On écrit l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour chacune des phases sous la forme conservative suivante

$$\frac{\partial \rho_1 \mathbf{v}_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_1) = \mathbf{F}_1, \quad (\text{I.2.5})$$

$$\frac{\partial \rho_2 \mathbf{v}_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_2) = \mathbf{F}_2, \quad (\text{I.2.6})$$

où $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ sont les tenseurs des contraintes des phases dans le mélange, et $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ les forces volumiques extérieures exercées sur chaque phase.

On définit de façon naturelle les tenseurs des contraintes par les lois constitutives suivantes

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = 2\eta_1(\varphi)\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{v}_1) - p_1 \operatorname{Id},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = 2\eta_2(\varphi)\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{v}_2) - p_2 \operatorname{Id},$$

où p_i désigne la pression partielle de la phase i , et η_i la viscosité de la phase i dans le mélange. Il est naturel [22] de considérer que chacune de ces viscosités dépend de la composition locale du mélange, c'est-à-dire de φ . On supposera par la suite qu'elles peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\eta_1(\varphi) = \frac{1 + \varphi}{2}\eta(\varphi), \quad \eta_2(\varphi) = \frac{1 - \varphi}{2}\eta(\varphi),$$

où $\eta(\varphi)$ est la viscosité du mélange uniforme théorique de composition φ . Bien entendu, si l'on souhaitait étudier des mélanges de fluides non-newtoniens, des lois constitutives plus générales devraient être introduites pour les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}_i$. On suppose aussi que les pressions partielles de chaque phase sont reliées à la pression totale du mélange via les relations :

$$p_1 = \frac{dV_1}{dV}p = \frac{1 + \varphi}{2}p, \quad p_2 = \frac{dV_2}{dV}p = \frac{1 - \varphi}{2}p,$$

de sorte que

$$p = p_1 + p_2.$$

Enfin, les forces extérieures sont supposées être de la forme suivante :

$$\mathbf{F}_1 = \rho_1 \mathbf{g} - \xi(\varphi) \mathbf{w} - \rho_1 \nabla \mu_1, \quad \mathbf{F}_2 = \rho_2 \mathbf{g} + \xi(\varphi) \mathbf{w} - \rho_2 \nabla \mu_2,$$

où \mathbf{g} est un terme de forces volumiques extérieures au mélange (des forces de gravité par exemple) et $\xi(\varphi)$ est un coefficient de frottement qui dépend de la composition du mélange. En particulier $\xi(\varphi)$ doit s'annuler quand une seule phase est présente c'est-à-dire quand $\varphi = \pm 1$.

Les potentiels chimiques μ_1 et μ_2 des deux phases sont alors déterminés en se basant sur les travaux de Cahn et Hilliard ([8, 9, 10]) et ceux d'Onuki ([23] p. 6138 et p.6146)

$$\mu_1 = \mu_0(\varphi) + \frac{1 - \varphi}{2\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \right), \quad \mu_2 = \mu_0(\varphi) - \frac{1 + \varphi}{2\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \right).$$

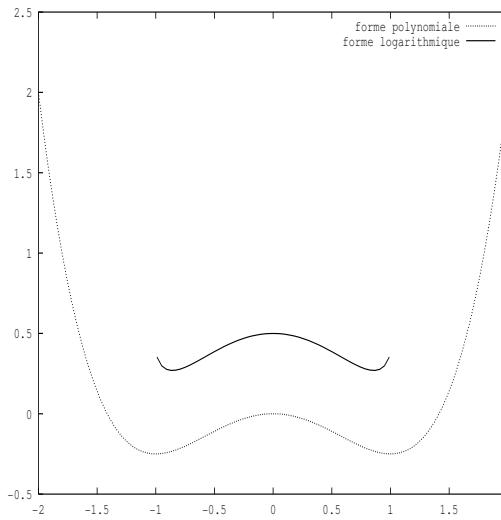


FIG. I.2.1 – Les deux types de potentiels de Cahn-Hilliard

Le potentiel $\mu_0(\varphi)$ est le potentiel chimique du mélange uniforme théorique de composition φ . Les autres termes sont les termes d'échange qui caractérisent la non-uniformité du mélange à l'interface, celle-ci étant décrite par l'énergie libre \mathcal{F} de type Cahn-Hilliard [11, 16, 23] :

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_{\Omega} \frac{A}{2} |\nabla \varphi|^2 + E F(\varphi), \quad (\text{I.2.7})$$

de sorte que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \right) = -A \Delta \varphi + E F'(\varphi), \quad (\text{I.2.8})$$

A et E étant deux paramètres physiques décrivant l'interaction entre les deux phases. Les termes d'échange apparaissant dans les potentiels chimiques sont en fait issus de la définition usuelle des potentiels chimiques en thermodynamique comme la différentielle de l'énergie libre par rapport à la densité ρ_i de chaque constituant (Cf. [23]).

La fonction F qui intervient dans l'énergie libre, est appelée *potentiel de Cahn-Hilliard*. Un choix physiquement raisonnable pour ce potentiel F est donné par une expression de type logarithmique [2, 13, 14, 16],

$$F(\varphi) = \theta_c (1 - \varphi^2) + \theta ((1 + \varphi) \log(1 + \varphi) + (1 - \varphi) \log(1 - \varphi)),$$

dans laquelle θ est la température du mélange dans les conditions de l'expérience, et θ_c sa température critique.

Pour que les deux phases soient séparées (c'est le cas intéressant), il faut bien sûr que $\theta < \theta_c$, ce qui, d'un point de vue mathématique, est équivalent à dire que le potentiel F n'est pas convexe. Pour θ suffisamment proche de θ_c , une bonne approximation de ce potentiel (figure I.2.1) est donnée par une expression polynomiale du type

$$F(\varphi) = r \varphi^4 - u \varphi^2, \quad r, u > 0.$$

C'est cette forme du potentiel de Cahn-Hilliard qui est la plus fréquemment utilisée dans la littérature, voir par exemple [27].

2.3 Equations en vitesse moyenne et en perturbation

Notation : Pour tous vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, leur produit tensoriel est noté dans la suite $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2$.

- **Equation en vitesses**

Pour obtenir l'équation satisfaite par \mathbf{v} , plusieurs méthodes sont possibles. On peut par exemple additionner les équations (I.2.5) et (I.2.6) de conservation de la quantité de mouvement de chacune des phases. Il vient

$$\frac{\partial \rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Remarquons tout d'abord que l'on peut écrire

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \frac{1-\varphi}{2} \mathbf{w},$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \frac{1+\varphi}{2} \mathbf{w}.$$

Pour faire apparaître une quantité de mouvement calculée sur les champs moyens dans la dérivée temporelle de l'équation précédente, on écrit

$$\rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2 = \rho \mathbf{v} + (\rho_1^0 - \rho_2^0) \frac{1-\varphi^2}{4} \mathbf{w}.$$

Les termes d'inertie peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \rho_1 \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \rho_2 \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 &= \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \frac{1-\varphi^2}{4} (\rho_1^0 + \rho_2^0 - \rho) \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \\ &\quad + (\rho_1^0 - \rho_2^0) \frac{1-\varphi^2}{4} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Pour traiter les termes de contraintes, on remarque de manière immédiate que pour toute fonction scalaire f et tout champ de vecteur \mathbf{u} on a

$$\mathbf{D}(f\mathbf{u}) = f\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} (\nabla f \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla f).$$

Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 &= 2\eta(\varphi)\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{v}) - p\operatorname{Id} \\ &\quad + (1+\varphi)\eta(\varphi) \left(\frac{1-\varphi}{2} \mathbf{D}(\mathbf{w}) - \frac{1}{4} \nabla \varphi \otimes \mathbf{w} - \frac{1}{4} \mathbf{w} \otimes \nabla \varphi \right) \\ &\quad - (1-\varphi)\eta(\varphi) \left(\frac{1+\varphi}{2} \mathbf{D}(\mathbf{w}) + \frac{1}{4} \nabla \varphi \otimes \mathbf{w} + \frac{1}{4} \mathbf{w} \otimes \nabla \varphi \right) \\ &\quad + \frac{1}{3}\eta(\varphi)(\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi)\operatorname{Id} \\ &= \left(2\eta(\varphi)\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{v}) - p\operatorname{Id} \right) - \frac{1}{2}\eta(\varphi) \left(\nabla \varphi \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \nabla \varphi - \frac{2}{3}(\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi)\operatorname{Id} \right) \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2, \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_1$ et $\boldsymbol{\Sigma}_2$ sont respectivement définis par

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = 2\eta(\varphi)\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{v}) - p\operatorname{Id}, \tag{I.2.9}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_2 = \frac{1}{2}\eta(\varphi) \left(\nabla \varphi \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \nabla \varphi - \frac{2}{3}(\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi)\operatorname{Id} \right). \tag{I.2.10}$$

Remarquons d'ores et déjà que $\boldsymbol{\Sigma}_1$ est le tenseur des contraintes usuel dans l'étude d'un écoulement incompressible d'un unique fluide avec un champ de vitesse \mathbf{v} , une pression p et une viscosité variable $\eta(\varphi)$.

Les forces extérieures s'expriment de la façon suivante

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= \rho \mathbf{g} - \rho_1 \nabla \mu_1 - \rho_2 \nabla \mu_2 \\ &= \rho \mathbf{g} - \rho \nabla \mu_0 - (\rho_1^0 - \rho_2^0) \frac{1 - \varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \nabla \varphi\end{aligned}$$

Ainsi l'équation satisfaite par \mathbf{v} s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \mathbf{v} + (\rho_1^0 - \rho_2^0) \frac{1 - \varphi^2}{4} \mathbf{w} \right) + \operatorname{div} \left(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \frac{1 - \varphi^2}{4} (\rho_1^0 + \rho_2^0 - \rho) \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \right) \\ + \operatorname{div} \left((\rho_1^0 - \rho_2^0) \frac{1 - \varphi^2}{4} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) \right) \\ = \operatorname{div} (\Sigma_1) - \operatorname{div} (\Sigma_2) - \rho \nabla \mu_0 + \rho \mathbf{g} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \nabla \varphi + (\rho_2^0 - \rho_1^0) \frac{1 - \varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \right),\end{aligned}\quad (\text{I.2.11})$$

où Σ_1 et Σ_2 sont les tenseurs définis plus haut.

• Equation en fluctuation

Pour simplifier les calculs, il est pratique de chercher l'équation en \mathbf{w} sous la forme non-conservative. Ainsi on écrit les deux équations de conservation de la quantité de mouvement (I.2.5) et (I.2.6) sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\rho_1^0 \frac{1 + \varphi}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{v} + \frac{1 - \varphi}{2} \mathbf{w} \right) + \rho_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 - \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_1) &= \mathbf{F}_1, \\ \rho_2^0 \frac{1 - \varphi}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{v} - \frac{1 + \varphi}{2} \mathbf{w} \right) + \rho_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 - \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_2) &= \mathbf{F}_2.\end{aligned}$$

Afin d'éliminer la dérivée en temps de \mathbf{v} , on multiplie la première équation par $\rho_2^0 \frac{1 - \varphi}{2}$, la deuxième par $\rho_1^0 \frac{1 + \varphi}{2}$ et on les soustrait, on obtient

$$\begin{aligned}\rho_1^0 \rho_2^0 \frac{1 - \varphi^2}{4} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \rho_1^0 \rho_2^0 \frac{1 - \varphi^2}{4} (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2) \\ - \rho_2^0 \frac{1 + \varphi}{2} \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_1) + \rho_1^0 \frac{1 - \varphi}{2} \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_2) \\ = \rho_2^0 \frac{1 + \varphi}{2} \mathbf{F}_1 - \rho_1^0 \frac{1 - \varphi}{2} \mathbf{F}_2.\end{aligned}$$

Un premier calcul fournit pour les termes d'inertie

$$\mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} - \varphi \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w}.$$

Pour récrire les termes issus des tenseurs des contraintes, introduisons après Σ_1 et Σ_2 (voir (I.2.9) et (I.2.10)), un troisième tenseur

$$\Sigma_3 = 2\eta(\varphi)\Sigma(\mathbf{w}), \quad (\text{I.2.12})$$

qui n'est autre que le tenseur des contraintes usuel associé au champ de vecteur \mathbf{w} . Un calcul facile montre que l'on peut alors exprimer les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ de la façon suivante

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_1 &= \frac{1 + \varphi}{2} (\Sigma_1 - \Sigma_2) + \frac{1 - \varphi^2}{4} \Sigma_3, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 &= \frac{1 - \varphi}{2} (\Sigma_1 - \Sigma_2) - \frac{1 - \varphi^2}{4} \Sigma_3,\end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned}
-\rho_2^0 \frac{1-\varphi}{2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_1) + \rho_1^0 \frac{1+\varphi}{2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_2) &= -\rho_2^0 \operatorname{div}\left(\frac{1-\varphi^2}{4}(\boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2)\right) - \rho_2^0 \frac{1+\varphi}{2}(\boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2) \cdot \nabla \varphi \\
&\quad + \rho_1^0 \operatorname{div}\left(\frac{1-\varphi^2}{4}(\boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2)\right) - \rho_1^0 \frac{1-\varphi}{2}(\boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2) \cdot \nabla \varphi \\
&\quad - \left(\rho_2^0 \frac{1-\varphi}{2} + \rho_1^0 \frac{1+\varphi}{2}\right) \operatorname{div}\left(\frac{1-\varphi^2}{4} \boldsymbol{\Sigma}_3\right) \\
&= (\rho_1^0 - \rho_2^0) \operatorname{div}\left(\frac{1-\varphi^2}{4}(\boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2)\right) + (\rho - \rho_1^0 - \rho_2^0)(\boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2) \cdot \nabla \varphi \\
&\quad - \rho \operatorname{div}\left(\frac{1-\varphi^2}{4} \boldsymbol{\Sigma}_3\right).
\end{aligned}$$

Enfin pour calculer le terme $\rho_2^0 \frac{1+\varphi}{2} \mathbf{F}_1 - \rho_1^0 \frac{1+\varphi}{2} \mathbf{F}_2$ on constate que la partie en \mathbf{g} va s'annuler et qu'il reste

$$\begin{aligned}
\rho_2^0 \frac{1+\varphi}{2} \mathbf{F}_1 - \rho_1^0 \frac{1+\varphi}{2} \mathbf{F}_2 &= -\rho_2^0 \frac{1-\varphi}{2} \xi \mathbf{w} - \rho_1^0 \frac{1+\varphi}{2} \xi \mathbf{w} - \rho_1^0 \rho_2^0 \frac{1-\varphi^2}{2} \nabla(\mu_1 - \mu_2) \\
&= -\rho \xi \mathbf{w} - \rho_1^0 \rho_2^0 \frac{1-\varphi^2}{4} \nabla\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en résumé, l'équation satisfaite par la perturbation en vitesse \mathbf{w} s'écrit

$$\begin{aligned}
\rho_1^0 \rho_2^0 \frac{1-\varphi^2}{4} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \rho_1^0 \rho_2^0 \frac{1-\varphi^2}{4} (-\varphi \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi) \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}) \\
= -(\rho_1^0 - \rho_2^0) \operatorname{div}\left(\frac{1-\varphi^2}{4}(\boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2)\right) + \rho \operatorname{div}\left(\frac{1-\varphi^2}{4} \boldsymbol{\Sigma}_3\right) \\
+ (\rho_1^0 + \rho_2^0 - \rho)(\boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2) \cdot \nabla \varphi - \rho_1^0 \rho_2^0 \frac{1-\varphi^2}{4} \nabla\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}\right) - \rho \xi(\varphi) \mathbf{w}, \tag{I.2.13}
\end{aligned}$$

les tenseurs $\boldsymbol{\Sigma}_1$, $\boldsymbol{\Sigma}_2$ et $\boldsymbol{\Sigma}_3$ étant définis plus haut.

Les équations obtenues rentrent dans le cadre très général de la mécanique des mélanges exposé dans [24]. Les diverses équations constitutives utilisées ici au cours de la dérivation, font du modèle présenté, un modèle original.

3 Equations adimensionnées et obtention du modèle

Les équations (I.2.11) et (I.2.13) obtenues précédemment ne sont pas exploitables, ni du point de vue numérique, ni du point de vue mathématique. Comme toujours dans un travail de modélisation, il est nécessaire de distinguer les termes significatifs de ceux qui ne le sont pas. Pour cela, dans une première étape, on doit mettre les équations sous forme adimensionnelle en choisissant, à la lumière du cadre expérimental, des grandeurs caractéristiques pour les diverses inconnues et variables présentes dans le problème.

• **Etape 1:** L'ordre de grandeur de la taille caractéristique de l'interface peut se déterminer grâce à une analyse de la linéarisée de l'équation de Cahn-Hilliard (sans le terme de transport) [14, 16] à partir des coefficients A et E qui apparaissent dans la définition de l'énergie libre de Cahn-Hilliard (I.2.7)-(I.2.8), de la façon suivante

$$l \sim \sqrt{A/E}.$$

On peut aussi trouver cette valeur en calculant le profil d'une interface plane infinie à l'équilibre. En effet, une telle interface est caractérisée par un profil monodimensionnel $\varphi(x)$ tel que $\varphi(\pm \infty) = \pm 1$ qui vérifie l'équation différentielle

$$-A\Delta\varphi + EF'(\varphi) = -A\varphi''(x) + E(\varphi^3 - \varphi) = 0,$$

dans le cas du potentiel

$$F(\varphi) = \frac{\varphi^4}{4} - \frac{\varphi^2}{2}.$$

La solution de cette équation est explicitement donnée par

$$\varphi_0(x) = \tanh\left(\sqrt{\frac{E}{2A}}x\right),$$

ce qui donne un profil d'interface de la forme

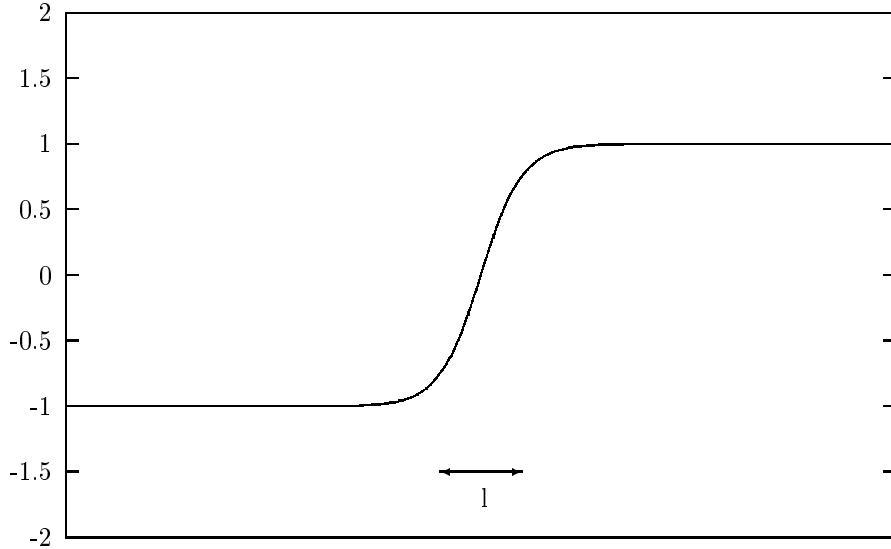


FIG. I.3.1 – Profil d'une interface plane infinie

On obtient en outre la valeur de la tension de surface (excès d'énergie dû à la forte variation de φ à l'interface) donnée par

$$\sigma = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x \varphi_0|^2 dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{AE} = \frac{1}{4} l E.$$

On souhaite voir apparaître dans les équations précédentes, les termes issus de la présence d'une interface qui sont significatifs. Pour estimer l'ordre de grandeur de ces termes à l'échelle de l'interface, il est naturel de choisir l comme taille caractéristique. On verra dans le chapitre suivant que pour effectuer des simulations numériques, une fois les termes significatifs déterminés, il est plus naturel d'adimensionner les longueurs par une taille caractéristique du domaine de calcul.

La densité de référence est donnée par $\bar{\rho} = \max(\rho_1^0, \rho_2^0) = \rho_1^0$ (pour fixer les idées) et le contraste entre les deux densités est alors représenté par le paramètre sans dimension

$$\varepsilon = \frac{\rho_1^0 - \rho_2^0}{\bar{\rho}} \geq 0.$$

On verra dans le chapitre 4 l'importance du rôle joué par ce paramètre dans l'étude mathématique du modèle.

D'un point de vue physique [23], on s'attend à ce que les termes dominants dans l'équation en \mathbf{w} (I.2.13) soient les deux derniers. Cela conduit naturellement au choix d'une grandeur de référence pour \mathbf{w} donnée par :

$$\bar{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{E}}{l\bar{\xi}},$$

en utilisant le fait que le coefficient E est la grandeur caractéristique du potentiel $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}$ (en effet $l \sim \sqrt{A/E} \ll 1$) et en notant $\bar{\xi}$ la valeur caractéristique du coefficient de frottement $\xi(\varphi)$.

• **Etape 2:** La vitesse de référence \bar{v} est donnée par le problème physique auquel on s'intéresse - la vitesse de cisaillement imposée au bord par exemple - ce qui nous fournit un temps de référence de l'écoulement à l'échelle de l'interface

$$T = \frac{l}{\bar{v}},$$

et une grandeur caractéristique pour \mathbf{g} , donnée par l'accélération $\frac{\bar{v}}{T}$.

On introduit finalement deux paramètres sans dimension qui caractérisent l'écoulement et la capillarité :

$$\mathcal{R}e = \frac{\bar{\rho}\bar{v}l}{\bar{\eta}}, \quad \text{nombre de Reynolds},$$

et

$$\mathcal{K} = \frac{E}{2\bar{\rho}\bar{v}^2}, \quad \text{coefficient de capillarité.}$$

Remarquons d'ores et déjà que

$$\mathcal{K}\mathcal{R}e = \frac{El}{\bar{\eta}\bar{v}},$$

a la forme d'un nombre capillaire qui mesure le rapport entre les forces visqueuses ($\bar{\eta}\bar{v}$) et la tension de surface ($\sigma \sim El$).

Pour simplifier les calculs, on note β le rapport entre les deux vitesses caractéristiques du problème :

$$\beta = \frac{\bar{\mathbf{w}}}{\bar{v}}.$$

• **Etape 3:** On récrit les équations obtenues dans la section précédente dans les variables adimensionnées (notées de la même façon que les variables initiales), pour obtenir :

$$\rho(\varphi) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}(\varphi - 1), \tag{I.3.1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi + \beta \operatorname{div} \left(\frac{1 - \varphi^2}{2} \mathbf{w} \right) = 0, \tag{I.3.2}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \tag{I.3.3}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\varepsilon \beta}{4} \frac{\partial (1 - \varphi^2) \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \beta^2 \operatorname{div} \left((\rho - \varepsilon \varphi) \frac{1 - \varphi^2}{4} \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \right) \\ & + \varepsilon \beta \operatorname{div} \left(\frac{1 - \varphi^2}{4} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) \right) \\ & = \frac{1}{\mathcal{R}e} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}_1) - \frac{\beta}{\mathcal{R}e} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}_2) \\ & - \frac{T}{\bar{v}} \rho \nabla \mu_0 + \mathcal{K} \mu \nabla \varphi + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1 - \varphi^2}{2} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \rho \mathbf{g}, \end{aligned} \tag{I.3.4}$$

avec

$$\mu = -\Delta\varphi + F'(\varphi), \quad (\text{I.3.5})$$

et enfin

$$\begin{aligned} & (1-\varepsilon) \frac{\bar{\rho}}{T\xi} \frac{1-\varphi^2}{4} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - (1-\varepsilon) \frac{\bar{\mathbf{w}}\bar{\rho}}{l\xi} \frac{1-\varphi^2}{4} (\varphi \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi) \mathbf{w}) \\ & + (1-\varepsilon) \frac{\bar{\rho}\bar{v}}{l\xi} \frac{1-\varphi^2}{4} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}) \\ & = -\frac{\varepsilon}{Re} \frac{\bar{\rho}\bar{v}^2}{l\xi\bar{w}} \operatorname{div} \left(\frac{1-\varphi^2}{4} \boldsymbol{\Sigma}_1 \right) + \frac{\varepsilon}{Re} \frac{\bar{\rho}\bar{v}}{l\xi} \operatorname{div} \left(\frac{1-\varphi^2}{4} \boldsymbol{\Sigma}_2 \right) \\ & + \frac{1}{Re} \frac{\bar{\rho}\bar{v}}{l\xi} \rho \operatorname{div} \left(\frac{1-\varphi^2}{4} \boldsymbol{\Sigma}_3 \right) + \frac{1}{Re} \frac{\bar{\rho}\bar{v}^2}{l\xi\bar{w}} (\rho - \varepsilon\varphi) \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \nabla \varphi \\ & - \frac{1}{Re} \frac{\bar{\rho}\bar{v}}{l\xi} (\rho - \varepsilon\varphi) \boldsymbol{\Sigma}_2 \cdot \nabla \varphi \\ & - (1-\varepsilon) \frac{1-\varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) - \rho\xi(\varphi) \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (\text{I.3.6})$$

• **Etape 4:** Dans cette seconde partie du travail de modélisation, on calcule les ordres de grandeur des coefficients de l'équation en prenant pour valeurs physiques celles d'un écoulement standard eau-polymère à une température θ telle que $\theta - \theta_c \sim 1\text{K}$ [12, 23]. Il vient :

$$\bar{\eta} = 10^{-3}\text{Pa.s}, \quad \bar{\rho} = 10^3\text{kg.m}^{-3}, \quad \sigma = 10^{-3}\text{N.m}^{-1}, \quad \bar{\xi} = 10^{12}\text{kg.m}^{-3}\text{s}^{-1}, \quad l = 10^{-6}\text{m}.$$

En ce plaçant dans le cadre expérimental du cisaillement dans une cellule de Couette, on peut typiquement atteindre des vitesses de l'ordre de :

$$\bar{v} = 10^{-1}\text{m.s}^{-1},$$

correspondant à un taux de cisaillement (noté $\dot{\gamma}$ dans la littérature physique) entre 10s^{-1} et 100s^{-1} .

On peut donc calculer les ordres de grandeurs des autres paramètres :

$$T = 10^{-5}\text{s}, \quad \bar{w} = 10^{-3}\text{m.s}^{-1}, \quad \beta = \frac{\bar{w}}{\bar{v}} = 10^{-2}, \quad \mathcal{K} \sim 10^2, \quad Re = 10^{-1}.$$

Remarquons aussi que le nombre capillaire obtenu est

$$\mathcal{K}Re \sim 10.$$

Si maintenant on injecte ces valeurs dans les équations adimensionnées, on peut négliger les termes dont les coefficients sont suffisamment petits devant les autres. Pour ce faire, on doit aussi noter que les variations du champ de vitesse (qui est un champ de vitesse moyen caractérisant l'écoulement) ne se font pas à l'échelle de l'interface et donc les ordres de grandeur des termes de (I.3.6) qui contiennent $\boldsymbol{\Sigma}_1$, c'est-à-dire le gradient de vitesse, sont surestimés dans la forme adimensionnelle proposée. Ainsi même si les coefficients apparaissant devant ces termes ne sont pas très petits ($\bar{\rho}\bar{v}^2/(\mathcal{K}Re l \bar{\xi} \bar{w}) \sim 10^{-1}$), il est tout à fait raisonnable de les négliger dans l'équation en \mathbf{w} .

Il nous reste alors dans l'équation (I.3.6) :

$$\xi(\varphi) \mathbf{w} = -(1-\varepsilon) \frac{1-\varphi^2}{4\rho} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right), \quad (\text{I.3.7})$$

et dans l'équation (I.3.4) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \frac{2}{Re} \operatorname{div} (\eta(\varphi) \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \nabla p \\ & = \mathcal{K}\mu \nabla \varphi + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1-\varphi^2}{2} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \rho \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Remarquons que le gradient de pression apparaît d'après la définition (I.2.9) du tenseur des contraintes Σ_1 .

On peut de plus mettre l'équation en \mathbf{v} obtenue sous forme non-conservative (ce qui peut être plus agréable dans l'optique de la simulation numérique du problème) et obtenir :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - \frac{2}{\mathcal{R}_e} \operatorname{div} (\eta(\varphi) \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \nabla p \\ = \mathcal{K}\mu \nabla \varphi + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1-\varphi^2}{2} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \rho \mathbf{g} \\ - \varepsilon(1-\varepsilon)\beta \operatorname{div} \left(\frac{(1-\varphi^2)^2}{8\rho\xi(\varphi)} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Le dernier terme de cette équation est à nouveau petit devant les autres et peut être négligé, de sorte que l'équation que l'on considère dans le reste de ce travail est la suivante :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - \frac{2}{\mathcal{R}_e} \operatorname{div} (\eta(\varphi) \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \nabla p \\ = \mathcal{K}\mu \nabla \varphi + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1-\varphi^2}{2} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \rho \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (\text{I.3.8})$$

4 Bilan

Suite à la mise sous forme adimensionnelle et aux approximations effectuées dans la section précédente, le système d'équations sur lequel l'étude va porter est donné par :

$$\rho(\varphi) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}(\varphi - 1), \quad (\text{I.4.1})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{\mathcal{P}_e} \operatorname{div} \left(\frac{B(\varphi)}{\rho(\varphi)} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right) = 0, \quad (\text{I.4.2})$$

$$\mu = -\Delta \varphi + F'(\varphi), \quad (\text{I.4.3})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \operatorname{div} (2\eta(\varphi) \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \nabla p = \mathcal{K}\mu \nabla \varphi + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1-\varphi^2}{2} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \rho \mathbf{g}, \quad (\text{I.4.4})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (\text{I.4.5})$$

en introduisant les nouvelles grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$B(\varphi) = \frac{(1-\varphi^2)^2}{8\xi(\varphi)} \quad (\text{coefficent de mobilité}), \quad \mathcal{P}_e = \frac{1}{(1-\varepsilon)\beta} \quad (\text{nombre de Peclet}).$$

Notons que la perturbation en vitesse \mathbf{w} a été exprimée plus haut essentiellement comme proportionnelle au gradient du potentiel chimique μ , et que donc cette inconnue n'apparaît plus dans le système. Ceci correspond bien au cahier des charges que l'on s'était fixé au départ : écrire un modèle qui ne fasse apparaître que les grandeurs moyennes du mélange.

On peut reconnaître en ce système, une généralisation des équations présentées dans [11] dans le cas homogène ($\varepsilon = 0$, $\rho(\varphi) \equiv 1$) et qui ont été dérivées de manière différente dans [17, 18, 20].

Même si la justification rigoureuse des approximations effectuées n'est *stricto sensu* valable que dans les gammes de paramètres physiques que nous avons considéré plus haut, l'accent sera mis dans ce qui suit sur le caractère assez général du modèle obtenu. En particulier, les résultats numériques présentés dans le chapitre 2 couvriront des cas physiques d'écoulements diphasiques les plus variés possibles. La concordance qualitative de ces résultats avec les résultats expérimentaux prouvera *a posteriori* que la validité du modèle est bien réelle et va au-delà de la plage de paramètres considérés plus haut.

Notons en outre, que lors des essais numériques, il est naturel de choisir un adimensionnement des équations un peu différent, et en particulier de choisir comme longueur de référence une dimension caractéristique du domaine de calcul et non pas la taille de l'interface. Ainsi, les paramètres sans dimension obtenus sont différents, le nombre de Reynolds étant par exemple plus grand que celui obtenu ici en le calculant à l'échelle de l'interface.

Bibliographie du chapitre 1

- [1] D. M. Anderson, G. B. McFadden, and A. A. Wheeler. Diffuse-interface methods in fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30 :pp 139–165, 1998.
- [2] H. W. Barrett and J. F. Blowey. Finite elements approximation of the Cahn-Hilliard equation with concentration dependent mobility. *Mathematics of Computation*, 68 :pp 487–517, 1999.
- [3] F. Boyer. Mathematical study of multiphase flow under shear through order parameter formulation. *Asymptotic Analysis*, 20 :pp 175–212, 1999.
- [4] F. Boyer. Diphasic flow with a logarithmic Cahn-Hilliard potential. *en préparation*, 2001.
- [5] F. Boyer. Nonhomogeneous Cahn-Hilliard fluids. *Annales de l'IHP : Analyse non linéaire*, sous presse, 2001.
- [6] F. Boyer. A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows. *Computers and Fluids*, sous presse, 2001.
- [7] F. Boyer and P. Fabrie. Persistency of 1D solutions for a Cahn-Hilliard flow under high shear in a stretched 2D domain. *en préparation*, 2001.
- [8] J. W. Cahn. On spinodal decomposition. *Acta Metall.*, 9 :pp 795–801, 1961.
- [9] J. W. Cahn and J. E. Hilliard. Free energy of a Nonuniform System. I. Interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, 2 :pp 258–267, 1958.
- [10] J. W. Cahn and J. E. Hilliard. Free energy of a Nonuniform System. III. Nucleation in a two-component incompressible fluid. *J. Chem. Phys.*, 31 :pp 688–699, 1959.
- [11] R. Chella and J. Vinals. Mixing of a two-phase fluid by a cavity flow. *Physical Review E*, 53 :p 3832, 1996.
- [12] A. Colin and P. Panizza. communication personnelle.
- [13] A. Debussche and L. Dettori. On the Cahn-Hilliard equation with a logarithmic free energy. *Nonlinear Analysis*, 10 :pp 1491–1514, 1995.
- [14] M. Doi. Dynamics of domains and textures. *Theoretical Challenges in the Dynamics of Complex Fluids*, pages 293–314, 1997.
- [15] C. M. Elliott and H. Garcke. On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility. *Siam Journal on Mathematical Analysis*, 27 :pp 404–423, 1996.
- [16] D. Gunton, P. S. Sahni, and M. San Miguel. The dynamics of first-order phase transitions. In *Phase transitions and critical phenomena*, Vol. 8, pages 267–482. Domb and Lebowitz (Academic press, London), 1983.
- [17] M. E. Gurtin, D. Polignone, and J. Vinals. Two-phase binary fluids and immiscible fluids described by an order parameter. *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, 6 :p 815, 1996.
- [18] D. Jacqmin. Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling. *Journal of Computational Physics*, 155 :pp 96–127, 1999.
- [19] D. Jamet. *Etude des potentialités de la théorie du second gradient pour la simulation numérique directe des écoulements liquide-vapeur avec changement de phase*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, CEA Grenoble, 1998.
- [20] D. Jasnow and J. Vinals. Coarse-grained description of thermo-capillary flow. *Phys. Fluids*, 8 :p 660, 1996.
- [21] P. L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics : Vol. 1 Incompressible models*. Oxford Science Publications, 1996.
- [22] A. Onuki. Domain growth and rheology in phase-separating binary mixtures with viscosity difference. *Europhysics letters*, 28 :pp 175–179, 1994.
- [23] A. Onuki. Phase transitions of fluids in shear flow. *J. Phys. : Condens. Matter*, 9 :pp 6119–6157, 1997.
- [24] K.R. Rajagopal and L. Tao. *Mechanics of mixtures*, volume 35 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995.

- [25] J. Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids : existence of velocity, density, and pressure. *SIAM J. Math. Anal.*, 21 :pp 1093–1117, 1990.
- [26] M. Sussman, A. S. Almgren, J. B. Bell, P. Colella, L. H. Howell, and M. L. Welcome. An adaptative level set approach for incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 148 :pp 81–124, 1999.
- [27] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Applied Mathematical Science*. Springer-Verlag, 1997.

Chapitre 2

Validation numérique du modèle

1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'approximation numérique des équations présentées dans le chapitre précédent en dimension 2 d'espace et que l'on rappelle ci-dessous

$$\rho(\varphi) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}(\varphi - 1), \quad (\text{II.1.1})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{\mathcal{P}_e} \operatorname{div} \left(\frac{B(\varphi)}{\rho(\varphi)} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right) = 0, \quad (\text{II.1.2})$$

$$\mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi), \quad (\text{II.1.3})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \operatorname{div} (2\eta(\varphi) \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \nabla p = \mathcal{K} \mu \nabla \varphi + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1 - \varphi^2}{2} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \rho \mathbf{g}, \quad (\text{II.1.4})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (\text{II.1.5})$$

Comme on l'a évoqué à la fin du chapitre précédent, les équations vont maintenant être adimensionnées par la longueur caractéristique L du domaine de calcul, ce qui provoque l'apparition d'un coefficient $\alpha = \frac{l}{L}$ dans l'expression de μ . Ainsi, les ordres de grandeur des paramètres sans dimension du problème utilisés dans la suite seront différents de ceux utilisés pour la justification des équations à l'échelle de l'interface.

La motivation principale de ce travail réside dans la mise en place d'un schéma à la fois précis et simple à mettre en oeuvre dans le cas de domaines rectangulaires et en maillage régulier. Cependant, on montre à la fin du chapitre que l'on peut généraliser le schéma proposé au cas d'un domaine non rectangle (ou domaine avec obstacle) grâce à une méthode de domaine fictif.

On va voir que dans la méthode proposée, l'interface ne nécessite pas de traitement particulier (contrairement aux méthodes level-set par exemple) car elle est entièrement et automatiquement déterminée par le terme de Cahn-Hilliard dans l'équation sur le paramètre d'ordre φ . En particulier les phénomènes de séparation de phases, de coalescence d'inclusions ou tout autre changement de topologie dans le mélange ne nécessite aucune attention particulière au cours du calcul.

Deux types de simulations numériques sont particulièrement visés par l'étude qui va suivre : le mélange de deux fluides dans une cavité entraînée (à comparer avec les résultats de [15]), et la décomposition spinodale sous cisaillement dans un canal [16, 24].

Comme annoncé dans le chapitre précédent, on va s'attacher à montrer la pertinence du modèle pour des problèmes physiques variés. Ainsi, on simulera un cas d'instabilité bien connu, celle de Rayleigh-Taylor, mais aussi la dynamique de gouttes et de bulles afin de mettre l'accent sur l'importance du contraste de viscosité.

Dans chacun de ces cas, le domaine d'étude est rectangulaire, seules les conditions aux limites varient. Dans le cas de la cavité entraînée, la vitesse est imposée sur les bords sous la contrainte $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale sortante au bord du domaine, et les conditions aux limites sur φ et μ sont

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0.$$

La première de ces conditions impose l'orthogonalité de l'interface et des parois (*angle de contact* égal à $\pi/2$), et la seconde impose que le flux diffusif soit tangent au bord, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de diffusion à travers les parois. Dans le cas du canal sous cisaillement, les conditions aux limites dans la direction longitudinale x sont des conditions de périodicité.

La discréttisation en temps est présentée dans la section 2, puis la discréttisation spatiale par différences finies est expliquée dans la section 3. Les divers résultats obtenus dans chacun des cas considérés, sont présentés et commentés dans la section 4.

Enfin, on montre dans la section 5 comment adapter les méthodes proposées au cas d'un écoulement autour d'un obstacle.

2 Discréttisation en temps

Dans ce chapitre uniquement, les deux coordonnées de la vitesse \mathbf{v} seront notées par

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

La discréttisation en temps est effectuée avec un pas de temps δt (qui varie à chaque itération), grâce à une méthode à pas fractionnaires en trois temps que l'on va présenter maintenant.

- **Etape 1 - équation de Cahn-Hilliard**

Supposons connues des approximations φ^n , μ^n et \mathbf{v}^n de la solution au temps discret t_n , la résolution de la partie Cahn-Hilliard du système est tout d'abord effectuée. Ainsi, on calcule $\varphi^{n+1/2}$, $\mu^{n+1/2}$ solutions de

$$\frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\delta t} - \frac{1}{\mathcal{P}_e} \operatorname{div} \left(\frac{B(\varphi^n)}{\rho(\varphi^n)} \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\theta \mu^{n+1/2} + (1-\theta)\mu^n}{\rho(\varphi^n)} \right) \right) = 0, \quad (\text{II.2.1})$$

$$(\theta \mu^{n+1/2} + (1-\theta)\mu^n) + \alpha^2 \Delta(\theta \varphi^{n+1/2} + (1-\theta)\varphi^n) = F'(\theta \varphi^{n+1/2} + (1-\theta)\varphi^n). \quad (\text{II.2.2})$$

Comme on le sait, le θ -schéma utilisé est inconditionnellement stable pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, et d'ordre 2 si $\theta = \frac{1}{2}$. Pour ne pas se trouver dans les cas limites de stabilité, la valeur de θ est choisie légèrement supérieure à $\frac{1}{2}$. Les calculs présentés dans la suite (section 4) ont été effectués avec $\theta = 0.6$.

Pour résoudre (II.2.1)-(II.2.2), deux stratégies peuvent être envisagées. La plus simple est une méthode de point fixe. Plus précisément si l'on pose $\Phi^{n+1/2,0} = \varphi^n$ et $\mathcal{M}^{n+1/2,0} = \mu^n$, on calcule alors $\Phi^{n+1/2,k}$ et $\mathcal{M}^{n+1/2,k}$, de manière itérative, comme solutions du système linéaire

$$\Phi^{n+1/2,k+1} - \frac{\theta \delta t}{\mathcal{P}_e} \operatorname{div} \left(\frac{B(\varphi^n)}{\rho(\varphi^n)} \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\mathcal{M}^{n+1/2,k+1}}{\rho(\varphi^n)} \right) \right) = \varphi^n, \quad (\text{II.2.3})$$

$$\mathcal{M}^{n+1/2,k+1} + \alpha^2 \Delta \Phi^{n+1/2,k+1} = F'(\Phi^{n+1/2,k}). \quad (\text{II.2.4})$$

Lorsqu' elles convergent, les suites $(\Phi^{n+1/2,k})_k$ et $(\mathcal{M}^{n+1/2,k})_k$ convergent vers

$$\theta \varphi^{n+1/2} + (1-\theta)\varphi^n,$$

et

$$\theta \mu^{n+1/2} + (1-\theta)\mu^n,$$

à partir desquels on déduit les valeurs de $\varphi^{n+1/2}$ et $\mu^{n+1/2}$. En pratique, quand la méthode converge, un petit nombre d'itérations en k suffit. Dans quelques rares cas où la vitesse de convergence de la méthode de point fixe n'est pas suffisante, un algorithme de Newton a été utilisé pour résoudre ces équations non-linéaires plus efficacement.

- **Etape 2 - Terme de transport**

Dans cette seconde étape, le terme de transport dans l'équation (II.1.2) est discrétisé. Pour cela, on utilise un des deux schémas explicites suivants, pour lesquels la discrétisation en temps et celle en espace sont intimement liées :

- *Schéma du premier ordre en temps avec un schéma de Murman en espace :*

$$\varphi^{n+1} = \varphi^{n+1/2} - \delta t \mathbf{v}^n \cdot \nabla \varphi^{n+1/2}, \quad (\text{II.2.5})$$

- *Schéma du second ordre en temps et en espace avec correction anti-diffusive stabilisée* : il est obtenu à partir du schéma de base suivant (voir [11, 10, 25] et la section 3)

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1} &= \varphi^{n+1/2} - \delta t \mathbf{v}^n \cdot \nabla \varphi^{n+1/2} + \frac{\delta t^2}{2} \operatorname{div}(\mathbf{D}^*(\mathbf{v}^n) \cdot \nabla \varphi^{n+\frac{1}{2}}), \\ \mathbf{D}^*(\mathbf{v}) &= \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.6})$$

Dans les deux cas μ^{n+1} est obtenu à partir de φ^{n+1} de façon immédiate via

$$\mu^{n+1} = -\alpha^2 \Delta \varphi^{n+1} + F'(\varphi^{n+1}). \quad (\text{II.2.7})$$

Cette partie de la discrétisation étant explicite, on sait qu'elle va introduire une condition de stabilité sur le pas de temps. En fait, c'est avec le terme d'inertie $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ dans l'équation de Navier-Stokes, les seuls points de la discrétisation qui imposent une condition de stabilité.

- **Etape 3 - Équation de Navier-Stokes**

En ce qui concerne l'équation de Navier-Stokes, la méthode utilisée est implicite pour la pression et pour les termes visqueux et explicite pour le terme d'inertie et le terme de couplage de forces capillaires. Plus précisément, φ^{n+1} , μ^{n+1} et \mathbf{v}^n étant connus, \mathbf{v}^{n+1} et p^{n+1} sont calculés à partir des équations

$$\begin{aligned} \rho(\varphi^{n+1}) \left(\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\delta t} \right) - \frac{1}{\mathcal{R}e} \operatorname{div}(2\eta(\varphi^{n+1}) \mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1})) + \nabla p^{n+1} \\ = -\rho(\varphi^{n+1}) \mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n + \mathcal{K} \mu^{n+1} \nabla \varphi^{n+1} \\ + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1 - (\varphi^{n+1})^2}{2} \nabla \left(\frac{\mu^{n+1}}{\rho(\varphi^{n+1})} \right) + \rho(\varphi^{n+1}) \mathbf{g}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}^{n+1}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.2.8})$$

Rappelons que $\rho(\varphi^{n+1})$ est directement calculé à partir de φ^{n+1} via (II.1.1).

Finalement, on est ramenés à la résolution d'un problème de Stokes généralisé. Ceci est effectué par la méthode de Lagrangien augmenté [17] : étant donné $r > 0$ assez grand (dans les calculs présentés plus loin, r est généralement choisi dans l'intervalle $[\frac{10^2}{\mathcal{R}e}, \frac{10^5}{\mathcal{R}e}]$), on pose $p^{n+1,0} = p^n$ et $\mathbf{v}^{n+1,0} = \mathbf{v}^n$, puis on résout le problème elliptique linéaire suivant

$$\begin{aligned} \rho(\varphi^{n+1}) \left(\frac{\mathbf{v}^{n+1,k+1} - \mathbf{v}^n}{\delta t} \right) - \frac{1}{\mathcal{R}e} \operatorname{div}(2\eta(\varphi^{n+1}) \mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1,k+1})) - r \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+1,k+1} \\ = -\nabla p^{n+1,k} - \rho(\varphi^{n+1}) \mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n \\ + \mathcal{K} \mu^{n+1} \nabla \varphi^{n+1} + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1 - (\varphi^{n+1})^2}{2} \nabla \left(\frac{\mu^{n+1}}{\rho(\varphi^{n+1})} \right) + \rho(\varphi^{n+1}) \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.9})$$

Enfin, on obtient $p^{n+1,k+1}$ par la formule

$$p^{n+1,k+1} - p^{n+1,k} + r \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+1,k+1} = 0. \quad (\text{II.2.10})$$

Les itérations en k sont effectuées jusqu'à ce que la divergence de $\mathbf{v}^{n+1,k}$ soit suffisamment petite en norme L^2 . Dans la majorité des cas, un petit nombre d'itérations en k sont suffisantes. Les champs de vitesse \mathbf{v}^{n+1} et de pression p^{n+1} obtenus à convergence sont alors les solutions approchées de (II.2.8).

3 Discrétisation en espace et résolution effective

3.1 Description du maillage et des inconnues discrètes

Comme on l'a vu plus haut, on s'intéresse essentiellement à des domaines de calcul rectangulaires. De plus, dans tous les cas test envisagés, il n'y a aucune zone du domaine de calcul que l'on puisse considérer comme plus importante qu'une autre et qu'on aurait intérêt à mailler plus finement. Tout ceci ajouté à la volonté de construire un schéma simple, incite à l'utilisation de différences finies sur un maillage régulier.

Nous verrons dans la section 5, comment on peut, à moindre frais, adapter les schémas proposés pour tenir compte de la présence éventuelle d'un obstacle dans le domaine rectangulaire, par une technique de domaine fictif.

Ainsi, on suppose dans ce qui suit que le domaine rectangulaire est découpé en $N \times M$ cellules rectangulaires isométriques de taille $\delta x \times \delta y$. Les points en lesquels la solution est cherchée sont choisis de façon classique (maillage décalé en vitesse-pression) comme indiqué sur la figure II.3.1 et sont notés $A_{i,j}$, $A_{i\pm\frac{1}{2},j}$ et $A_{i,j\pm\frac{1}{2}}$.

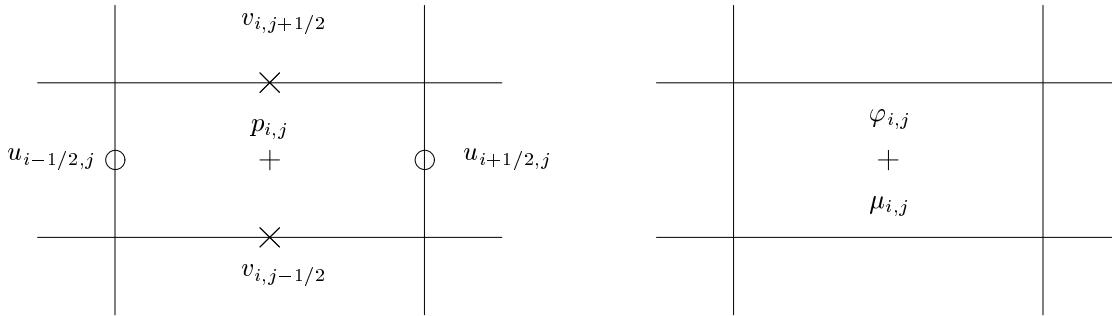


FIG. II.3.1 – Détail de la cellule $C_{i,j}$ respectivement en vitesse/pression et en paramètre d'ordre/potentiel chimique

3.2 Traitement des conditions au bord

La prise en compte des conditions au bord requiert l'introduction d'inconnues discrètes artificielles à l'extérieur du domaine physique. Ceci permet de discrétiser de la même façon les équations en tout point de l'intérieur du domaine physique (y compris ceux voisins du bord), et de discrétiser séparément les conditions aux limites. On peut ainsi modifier les conditions aux limites de façon simple si le besoin s'en fait sentir.

Par exemple, en ce qui concerne le paramètre d'ordre, les inconnues réelles à l'intérieur du domaine sont les $(\varphi_{i,j})$ pour $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq j \leq M$. On leur adjoint les inconnues $\varphi_{i,j}$ pour $i = 0, N + 1$ et $j = 1, \dots, M$ d'une part, et $i = 0, \dots, N$ et $j = 0, M + 1$ d'autre part. Il suffit alors d'écrire les relations satisfaites par ces nouvelles inconnues à partir des conditions aux limites. Dans l'exemple du paramètre d'ordre, on obtient :

- Cas de la cavité : La condition $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ fournit

$$\frac{\varphi_{0,j} - \varphi_{1,j}}{\delta x} = \frac{\varphi_{N,j} - \varphi_{N+1,j}}{\delta x} = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, M,$$

$$\frac{\varphi_{i,0} - \varphi_{i,1}}{\delta y} = \frac{\varphi_{i,M} - \varphi_{i,M+1}}{\delta y} = 0, \text{ pour } i = 0, \dots, N + 1.$$

- Cas du canal dans la direction x : Sur les bords inférieurs et supérieurs de Ω la condition au bord est encore $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ de sorte qu'on doit écrire

$$\frac{\varphi_{i,0} - \varphi_{i,1}}{\delta y} = \frac{\varphi_{i,M} - \varphi_{i,M+1}}{\delta y} = 0, \text{ pour } i = 0, \dots, N + 1,$$

alors que sur les bords gauche et droit, la périodicité s'écrit

$$\varphi_{0,j} - \varphi_{N,j} = \varphi_{1,j} - \varphi_{N+1,j} = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, M.$$

Ceci suffit à assurer numériquement la périodicité de φ et de sa dérivée.

On écrit aisément des relations similaires pour les autres inconnues du problème μ, u, v, p et pour les quantités intermédiaires Φ et \mathcal{M} .

3.3 Discrétisation des équations proprement dites

D'après ce qui précède, il n'est plus nécessaire de se préoccuper des conditions au bord lorsque l'on discrétise les équations à l'intérieur du domaine.

3.3.1 Equation de Cahn-Hilliard

On a vu dans la section 2 que la discrétisation en temps proposée, se ramène à résoudre à chaque pas de temps le système (II.2.3)-(II.2.4), que l'on peut réécrire sous la forme générale

$$\begin{aligned} \Phi - \omega \operatorname{div} \left(\frac{B}{\rho} \nabla \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right) \right) &= a, \\ \mathcal{M} + \alpha^2 \Delta \Phi &= b, \end{aligned}$$

où $a, b, B = B(\varphi^n)$ et $\rho = \rho(\varphi^n)$ sont connus aux points $A_{i,j}$. Le schéma utilisé pour résoudre ces équations linéaires est du second ordre et donné par :

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j} - \omega \frac{1}{\delta x^2} &\left(\frac{B_{i+\frac{1}{2},j}}{\rho_{i+\frac{1}{2},j}} \left(\frac{\mathcal{M}_{i+1,j}}{\rho_{i+1,j}} - \frac{\mathcal{M}_{i,j}}{\rho_{i,j}} \right) - \frac{B_{i-\frac{1}{2},j}}{\rho_{i-\frac{1}{2},j}} \left(\frac{\mathcal{M}_{i,j}}{\rho_{i,j}} - \frac{\mathcal{M}_{i-1,j}}{\rho_{i-1,j}} \right) \right) \\ &- \omega \frac{1}{\delta y^2} \left(\frac{B_{i,j+\frac{1}{2}}}{\rho_{i,j+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\mathcal{M}_{i,j+1}}{\rho_{i,j+1}} - \frac{\mathcal{M}_{i,j}}{\rho_{i,j}} \right) - \frac{B_{i,j-\frac{1}{2}}}{\rho_{i,j-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\mathcal{M}_{i,j}}{\rho_{i,j}} - \frac{\mathcal{M}_{i,j-1}}{\rho_{i,j-1}} \right) \right) = a_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{II.3.1})$$

et

$$\mathcal{M}_{i,j} + \alpha^2 \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\delta x^2} + \alpha^2 \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\delta y^2} = b_{i,j}$$

où $B_{i\pm\frac{1}{2},j}$ représente la moyenne harmonique de $B_{i,j}$ et $B_{i\pm 1,j}$, et $B_{i,j\pm\frac{1}{2}}$ la moyenne harmonique de $B_{i,j}$ et $B_{i,j\pm 1}$.

Au final, un système linéaire pour les inconnues $(\Phi_{i,j}), (\mathcal{M}_{i,j})$ est obtenu. Il peut s'écrire sous une forme matricielle simplifiée :

$$\begin{pmatrix} I & -\omega \operatorname{div} \left(\frac{B}{\rho} \nabla \left(\frac{\cdot}{\rho} \right) \right) \\ \alpha^2 \Delta & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dans les calculs présentés plus loin, la méthode d'inversion retenue pour ce problème est l'algorithme du BiCGStab préconditionné par une décomposition LU incomplète. Cette méthode a montré de bons résultats dans tous les cas de figure rencontrés, y compris dans les cas où la méthode de Newton a été préférée à la méthode de point fixe.

Il faut bien noter que dans le cas général où la mobilité B et la densité ρ ne sont pas constantes, il faut recalculer la matrice à chaque pas de temps (et même plus si on utilise la méthode de Newton). Ceci implique un nouveau calcul de la décomposition LU incomplète. On a donc tout intérêt à optimiser ces étapes du calcul si on veut réduire au maximum les temps de calcul. On peut aussi tout à fait se contenter de ne recalculer la matrice de préconditionnement que de temps en temps, quand la vitesse de convergence du BiCGStab faiblit.

Dans les quelques cas particuliers où la matrice est la même tout au long du calcul, on pourrait éventuellement envisager d'utiliser une méthode directe de type décomposition LU complète que l'on ne calculerait qu'une seule fois au début du calcul, mais ce sont alors les problèmes de stockage en mémoire dont il faudrait tenir compte.

3.3.2 Terme convectif

Dans la section 2, deux schémas en temps ont été proposés pour le terme de transport dans l'équation de Cahn-Hilliard : il s'agit de (II.2.5) et de (II.2.6). Le choix de l'un ou l'autre de ces schémas est très lié à la discréétisation en espace associée.

Dans les deux cas, le schéma doit être conservatif et L^∞ -stable pour préserver les propriétés de l'équation de Cahn-Hilliard et assurer que les valeurs de φ restent dans l'intervalle de valeurs physiquement admissibles (c'est-à-dire $[-1, 1]$). A ce sujet, on renvoie le lecteur à la seconde partie de la thèse dans laquelle on prouve des résultats théoriques qui montrent que, dans certains cas, cette propriété est effectivement vérifiée par les solutions du problème.

Le premier schéma proposé est une variante du schéma décentré amont classique, qui est conservative et stable : le schéma de Murman. Ce schéma est très facile à implémenter et connu pour ces qualités dans certains types de problèmes (notamment dans les problèmes compressibles à fort nombre de Mach). Cependant, dans les tests qui vont suivre (section 4), on montre que ce schéma est très diffusif dans les conditions considérées ici, ce qui a tendance à rendre l'interface de plus en plus diffuse et donne au final de mauvais résultats en temps long. Il semble donc que l'on ne puisse faire l'économie d'un schéma beaucoup plus sophistiqué pour assurer un bon suivi de l'interface au cours du temps.

Le second schéma présenté dans cette optique, est un schéma centré du second ordre dans lequel on voit apparaître des termes anti-diffusifs auxquels on applique des limiteurs pour assurer la stabilité. Ce schéma est dû à P. Rasetarinera [25] et peut être considéré comme une variante anti-diffusée du schéma de Murman. Des schémas très proches ont été étudiés dans le cas monodimensionnel dans [11] et dans le cas d'une méthode volumes finis dans [10]. Le schéma utilisé ici jouit des propriétés de conservativité et de L^∞ -stabilité, et de plus comme on l'espérait, la diffusion numérique est largement réduite. Bien entendu, ce second schéma est plus complexe à implémenter mais on montre dans la section 3.4 que les résultats obtenus sont vraiment satisfaisants. En fait, il a été montré dans [10, 11, 25] que ce schéma est l'un des plus précis en comparaison des schémas classiques existant pour les problèmes de convection-diffusion.

Enfin, dans les deux cas, la stabilité L^∞ est assurée sous une condition CFL que l'on va expliciter dans ce qui suit.

Notation : Jusqu'à la fin de ce chapitre, le symbole Δ représente l'opérateur aux différences discrètes. Par exemple, $\Delta\varphi_{i+\frac{1}{2},j}$ représente la différence $\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}$.

– Schéma de Murman

On discréttise le membre de droite de l'équation (II.2.5) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_{i,j} &= (u_{i-\frac{1}{2},j})^+ \left(\frac{\Delta\varphi_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right) - (u_{i+\frac{1}{2},j})^- \left(\frac{\Delta\varphi_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right) \\ &\quad + (v_{i,j-\frac{1}{2}})^+ \left(\frac{\Delta\varphi_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right) - (v_{i,j+\frac{1}{2}})^- \left(\frac{\Delta\varphi_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta y} \right), \end{aligned}$$

où u^+ et u^- représentent respectivement la partie positive et négative de u ($u = u^+ - u^-$).

On montre aisément le résultat suivant

Proposition II.3.1

Le schéma de Murman est conservatif et L^∞ -stable sous la condition CFL

$$\frac{\delta t}{\delta x} \sup_{i,j} |u_{i-\frac{1}{2},j}| + \frac{\delta t}{\delta y} \sup_{i,j} |v_{i,j-\frac{1}{2}}| \leq 1. \quad (\text{II.3.2})$$

– Schéma anti-diffusé de P. Rasetarinera

Dans ce paragraphe, on présente la discréétisation de (II.2.6) introduite dans [25]. Le schéma proposé est basé sur l'équation (II.2.6) qui, une fois discréttisée par des différences finies du second ordre, peut être vue comme une correction du schéma de Murman ci-dessus. Cette correction permet de voir apparaître clairement les termes diffusifs et les termes antidiiffusifs.

Dans un premier temps, il est nécessaire de modifier légèrement l'équation (II.2.6) en la remplaçant par

$$\varphi^{n+1} = \varphi^{n+1/2} - \delta t \mathbf{v}^n \cdot \nabla \varphi^{n+1/2} + \frac{\delta t^2}{2} \operatorname{div} (\mathbf{D}^{**}(\mathbf{v}^n) \cdot \nabla \varphi^{n+\frac{1}{2}}), \quad (\text{II.3.3})$$

$$\mathbf{D}^{**}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \max(u^2, \frac{\lambda_y}{\lambda_x} |uv|) & uv \\ uv & \max(v^2, \frac{\lambda_x}{\lambda_y} |uv|) \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_x = \frac{\delta t}{\delta x}$ et $\lambda_y = \frac{\delta t}{\delta y}$. Le but de cette modification, qui *a priori* va à l'encontre du but recherché, est de très légèrement augmenter la diffusion numérique afin de pouvoir assurer la stabilité du schéma proposé dans la suite. Remarquons que le schéma n'est plus exactement d'ordre 2 en temps. Cependant, la perte de précision est très limitée et négligeable devant les avantages de la méthode, c'est-à-dire la limitation de la diffusion numérique. Maintenant, (II.3.3) est discrétisée par un schéma différences finies centrées, en approchant les flux de façon décentrée amont lorsque cela est nécessaire. Finalement, les termes obtenus sont séparés en deux catégories : les termes diffusifs et les termes antidiffusifs, de sorte que l'on obtient, en supprimant les exposants $n + \frac{1}{2}$ et n sur $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ et \mathbf{v}^n pour plus de clarté,

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^* = & \varphi_{i,j} - \lambda_x \gamma_{i,j} (u_{i-\frac{1}{2},j}^+ \Delta \varphi_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}^- \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j}) \\ & - \lambda_y \beta_{i,j} (v_{i,j-\frac{1}{2}}^+ \Delta \varphi_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^- \Delta \varphi_{i,j+\frac{1}{2}}) \\ & - \frac{\lambda_x \lambda_y}{2} (u_{i+\frac{1}{2},j}^- (v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^+ \Delta \varphi_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^- \Delta \varphi_{i+1,j+\frac{1}{2}}) \\ & + u_{i-\frac{1}{2},j}^+ (v_{i-1,j-\frac{1}{2}}^+ \Delta \varphi_{i-1,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^- \Delta \varphi_{i-1,j+\frac{1}{2}}) \\ & + v_{i,j+\frac{1}{2}}^- (u_{i-\frac{1}{2},j+1}^+ \Delta \varphi_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j+1}^- \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j+1}) \\ & + v_{i,j-\frac{1}{2}}^+ (u_{i-\frac{1}{2},j-1}^+ \Delta \varphi_{i-\frac{1}{2},j-1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}^- \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j-1})), \end{aligned} \quad (\text{II.3.4})$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^{n+1} = & \varphi_{i,j}^* - \frac{\lambda_x}{2} (Q_{i+\frac{1}{2},j} \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j} - Q_{i-\frac{1}{2},j} \Delta \varphi_{i-\frac{1}{2},j}) \\ & - \frac{\lambda_y}{2} (R_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta \varphi_{i,j+\frac{1}{2}} - R_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta \varphi_{i,j-\frac{1}{2}}) \\ & - \frac{\lambda_x \lambda_y}{4} (u_{i+\frac{1}{2},j}^- (|v_{i+1,j+\frac{1}{2}}| \Delta \varphi_{i+1,j+\frac{1}{2}} - |v_{i+1,j-\frac{1}{2}}| \Delta \varphi_{i+1,j-\frac{1}{2}}) \\ & + u_{i-\frac{1}{2},j}^+ (|v_{i-1,j+\frac{1}{2}}| \Delta \varphi_{i-1,j+\frac{1}{2}} - |v_{i-1,j-\frac{1}{2}}| \Delta \varphi_{i-1,j-\frac{1}{2}}) \\ & + v_{i,j+\frac{1}{2}}^- (|u_{i+\frac{1}{2},j+1}| \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j+1} - |u_{i-\frac{1}{2},j+1}| \Delta \varphi_{i-\frac{1}{2},j+1}) \\ & + v_{i,j-\frac{1}{2}}^+ (|u_{i+\frac{1}{2},j-1}| \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j-1} - |u_{i-\frac{1}{2},j-1}| \Delta \varphi_{i-\frac{1}{2},j-1})). \end{aligned} \quad (\text{II.3.5})$$

Dans ces équations, on a utilisé les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j} &= 1 - \frac{\lambda_y}{2} (v_{i,j+\frac{1}{2}}^+ + v_{i,j-\frac{1}{2}}^-), \quad \beta_{i,j} = 1 - \frac{\lambda_x}{2} (u_{i+\frac{1}{2},j}^+ + u_{i-\frac{1}{2},j}^-), \\ Q_{i\pm\frac{1}{2},j} &= |u_{i\pm\frac{1}{2},j}| (\gamma_{i,j} - \sigma_{i\pm\frac{1}{2},j}), \quad R_{i,j\pm\frac{1}{2}} = |v_{i,j\pm\frac{1}{2}}| (\beta_{i,j} - \nu_{i,j\pm\frac{1}{2}}), \\ \sigma_{i+\frac{1}{2},j} &= \max(\lambda_x |u_{i+\frac{1}{2},j}|, \lambda_y (v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^+ + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^+), \lambda_y (v_{i,j-\frac{1}{2}}^+ + v_{i,j+\frac{1}{2}}^-)), \\ \nu_{i,j+\frac{1}{2}} &= \max(\lambda_y |v_{i,j+\frac{1}{2}}|, \lambda_x (u_{i-\frac{1}{2},j+1}^+ + u_{i+\frac{1}{2},j+1}^-), \lambda_x (u_{i-\frac{1}{2},j}^+ + u_{i+\frac{1}{2},j}^-)). \end{aligned}$$

Malheureusement, ce schéma n'est pas L^∞ -stable. Les termes anti-diffusifs sont trop importants par rapport aux termes diffusifs, cependant ce sont eux qui peuvent empêcher une trop grande diffusion numérique au final. Pour assurer la stabilité en introduisant le moins de diffusion numérique possible, il faut donc contrôler finement les termes anti-diffusifs du schéma en appliquant un limiteur de flux ϕ défini par

$$\phi(x) = 1 - \min \left(|1-x|, \frac{1}{|1-x|} \right) (1-x),$$

d'autres choix étant éventuellement envisageables pour ϕ , à condition que ce limiteur satisfasse la relation

$$-2\alpha \leq \beta \frac{\phi(r)}{r} - \alpha \phi(s) \leq 2\beta, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0, \forall r, s.$$

Ainsi, en introduisant

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j}^x = \begin{cases} \phi \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^+ \Delta \varphi_{i-\frac{1}{2},j}}{u_{i+\frac{1}{2},j}^+ \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j}} \right) & \text{si } u_{i+\frac{1}{2},j} \geq 0 \\ \phi \left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j}^- \Delta \varphi_{i+\frac{3}{2},j}}{u_{i+\frac{1}{2},j}^- \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j}} \right) & \text{si } u_{i+\frac{1}{2},j} < 0 \end{cases},$$

et

$$\phi_{i,j+\frac{1}{2}}^y = \begin{cases} \phi \left(\frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^+ \Delta \varphi_{i,j-\frac{1}{2}}}{v_{i,j+\frac{1}{2}}^+ \Delta \varphi_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) & \text{si } v_{i,j+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \phi \left(\frac{v_{i,j+\frac{3}{2}}^- \Delta \varphi_{i,j+\frac{3}{2}}}{v_{i,j+\frac{1}{2}}^- \Delta \varphi_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) & \text{si } v_{i,j+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases},$$

dans les termes antidiffusifs, (II.3.5) est remplacée par le schéma

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^{n+1} = & \varphi_{i,j}^* - \frac{\lambda_x}{2} (Q_{i+\frac{1}{2},j} \phi_{i+\frac{1}{2},j}^x \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j} - Q_{i-\frac{1}{2},j} \phi_{i-\frac{1}{2},j}^x \Delta \varphi_{i-\frac{1}{2},j}) \\ & - \frac{\lambda_y}{2} (R_{i,j+\frac{1}{2}} \phi_{i,j+\frac{1}{2}}^y \Delta \varphi_{i,j+\frac{1}{2}} - R_{i,j-\frac{1}{2}} \phi_{i,j-\frac{1}{2}}^y \Delta \varphi_{i,j-\frac{1}{2}}) \\ & - \frac{\lambda_x \lambda_y}{4} (u_{i+\frac{1}{2},j}^- (|v_{i+1,j+\frac{1}{2}}| \phi_{i+1,j+\frac{1}{2}}^y \Delta \varphi_{i+1,j+\frac{1}{2}} - |v_{i+1,j-\frac{1}{2}}| \phi_{i+1,j-\frac{1}{2}}^y \Delta \varphi_{i+1,j-\frac{1}{2}}) \\ & + u_{i-\frac{1}{2},j}^+ (|v_{i-1,j+\frac{1}{2}}| \phi_{i-1,j+\frac{1}{2}}^y \Delta \varphi_{i-1,j+\frac{1}{2}} - |v_{i-1,j-\frac{1}{2}}| \phi_{i-1,j-\frac{1}{2}}^y \Delta \varphi_{i-1,j-\frac{1}{2}}) \\ & + v_{i,j+\frac{1}{2}}^- (|u_{i+\frac{1}{2},j+1}| \phi_{i+\frac{1}{2},j+1}^x \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j+1} - |u_{i-\frac{1}{2},j+1}| \phi_{i-\frac{1}{2},j+1}^x \Delta \varphi_{i-\frac{1}{2},j+1}) \\ & + v_{i,j-\frac{1}{2}}^+ (|u_{i+\frac{1}{2},j-1}| \phi_{i+\frac{1}{2},j-1}^x \Delta \varphi_{i+\frac{1}{2},j-1} - |u_{i-\frac{1}{2},j-1}| \phi_{i-\frac{1}{2},j-1}^x \Delta \varphi_{i-\frac{1}{2},j-1})). \end{aligned} \quad (\text{II.3.6})$$

Dans ces conditions, le résultat de stabilité prouvé dans [25] est le suivant.

Proposition II.3.2

Le schéma défini par (II.3.4) et (II.3.6) est L^∞ -stable sous la condition CFL

$$\begin{aligned} & \max \left(\frac{\lambda_y}{2} (v_{i,j+\frac{1}{2}}^+ + v_{i,j-\frac{1}{2}}^-) + \sigma_{i \pm \frac{1}{2},j}, \frac{\lambda_x}{2} (u_{i+\frac{1}{2},j}^+ + u_{i-\frac{1}{2},j}^-) + \nu_{i,j \pm \frac{1}{2}}, \right. \\ & 2\lambda_x (u_{i-\frac{1}{2},j}^+ + u_{i+\frac{1}{2},j}^-) \left(1 - \frac{\lambda_y}{2} (|v_{i,j+\frac{1}{2}}| + |v_{i,j-\frac{1}{2}}|) \right) \\ & \left. + 2\lambda_y (v_{i,j-\frac{1}{2}}^+ + v_{i,j+\frac{1}{2}}^-) \left(1 - \frac{\lambda_x}{2} (|u_{i+\frac{1}{2},j}| + |u_{i-\frac{1}{2},j}|) \right) \right) \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{II.3.7})$$

Dans la suite, on va voir que la discréttisation du terme d'inertie dans l'équation de Navier-Stokes est effectuée en utilisant un schéma décentré amont classique. Ainsi, cette partie de la méthode nous impose une CFL qui est exactement (II.3.2). Donc, quelque soit le schéma choisi pour le terme de transport du paramètre d'ordre, le pas de temps δt doit satisfaire (II.3.2). Pour éviter une trop grande diffusion numérique sur le terme d'inertie, on prendra toujours

$$\delta t = \min \left(\frac{0.9}{\frac{1}{\delta_x} \sup_{i,j} |u_{i-\frac{1}{2},j}| + \frac{1}{\delta_y} \sup_{i,j} |v_{i,j-\frac{1}{2}}|}, \delta t_{max} \right), \quad (\text{II.3.8})$$

où δt_{max} est choisi pour assurer la précision souhaitée, et le coefficient 0.9 pour éviter les cas limites de stabilité.

Malheureusement, le choix de ce pas de temps n'est en général pas suffisant pour assurer que la condition CFL (II.3.7) du schéma de Rasetarinera, celle-ci s'avérant plus restrictive que celle du schéma de Murman. Pour passer outre cette difficulté, on détermine le plus petit entier K tel que $\delta t' = \delta t/K$ satisfasse (II.3.7), et on applique le schéma (II.3.4),(II.3.6) K fois consécutivement, avec un pas de temps $\delta t'$ pour obtenir la solution à l'instant $t + \delta t$.

En pratique, dans les calculs exposés dans la section 4, l'entier K est en général compris entre 1 et 4, de sorte que cette technique n'induit pas un trop gros coût numérique.

3.3.3 Equations de Navier-Stokes

A chaque étape de Navier-Stokes de la discrétisation, on doit résoudre un problème de Stokes généralisé par la méthode du Lagrangien augmenté. Cela se ramène à la résolution de systèmes elliptiques de la forme

$$\rho \mathbf{v} - \omega_1 \operatorname{div}(2\tilde{\eta}\mathbf{D}(\mathbf{v})) - \omega_2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (\text{II.3.9})$$

où $\rho = \rho(\varphi^{n+1})$, $\tilde{\eta} = \eta(\varphi^{n+1})$ sont connus aux points $A_{i,j}$, et a, b sont respectivement connus aux points $A_{i-\frac{1}{2},j}$ et $A_{i,j-\frac{1}{2}}$. Cette équation peut s'écrire dans les coordonnées u et v de la façon suivante

$$\rho u - \omega_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(2\tilde{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \omega_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \omega_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = a, \quad (\text{II.3.10})$$

$$\rho v - \omega_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \omega_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(2\tilde{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \omega_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = b. \quad (\text{II.3.11})$$

A présent, on discrétise (II.3.10)-(II.3.11) par un schéma aux différences finies centrées du second ordre classique pour les problèmes elliptiques. Ainsi, au point $A_{i-\frac{1}{2},j}$, l'équation (II.3.10) s'écrit

$$\begin{aligned} \rho_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{\omega_1}{\delta x} \left\{ 2\tilde{\eta}_{i,j} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} - 2\tilde{\eta}_{i-1,j} \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{3}{2},j}}{\delta x} \right\} \\ &\quad - \frac{\omega_1}{\delta y} \left\{ \tilde{\eta}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta y} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\eta}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y} + \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\omega_2}{\delta x} \left\{ \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{3}{2},j}}{\delta x} + \frac{v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right) \right\} \\ &= a_{i-\frac{1}{2},j}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.12})$$

De même, au point $A_{i,j-\frac{1}{2}}$, l'équation (II.3.11) s'écrit sous forme discrète

$$\begin{aligned} \rho_{i,j-\frac{1}{2}} v_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{\omega_1}{\delta x} \left\{ \tilde{\eta}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\delta y} + \frac{v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\eta}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y} + \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\omega_1}{\delta y} \left\{ 2\tilde{\eta}_{i,j} \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} - 2\tilde{\eta}_{i,j-1} \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{3}{2}}}{\delta y} \right\} \\ &\quad - \frac{\omega_2}{\delta y} \left\{ \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta x} + \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{3}{2}}}{\delta y} \right) \right\} \\ &= b_{i,j-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.13})$$

Les valeurs de $\tilde{\eta}_{i\pm\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}$ (resp. $\rho_{i-\frac{1}{2},j}$, $\rho_{i,j-\frac{1}{2}}$) sont obtenues à partir des valeurs de $\tilde{\eta}$ (resp. ρ) aux points $A_{i,j}$ par interpolation en utilisant la moyenne arithmétique ou la moyenne harmonique (cette dernière étant plus adaptée en présence de discontinuités).

Pour obtenir le membre de droite (a, b) dans l'équation (II.3.9), on met l'équation (II.2.9) sous la forme (II.3.9) et on obtient, en supprimant l'exposant de la discréétisation :

$$\rho u - \delta t \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla u + \mathcal{K} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1 - \varphi^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \rho g^x \right) = a,$$

$$\rho v - \delta t \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla v + \mathcal{K} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1 - \varphi^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \rho g^y \right) = b.$$

Ces quantités sont discréétisées de façon immédiate par

$$a_{i-\frac{1}{2},j} = \rho_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-\frac{1}{2},j} - \delta t \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\delta x} - \rho_{i-\frac{1}{2},j} (\mathbf{v} \cdot \nabla u)_{i-\frac{1}{2},j} + \mathcal{K} \frac{\mu_{i-1,j} + \mu_{i,j}}{2} \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{\delta x} \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon \mathcal{K}}{2 \delta x} \left\{ 1 - \left(\frac{\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{2} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{\mu_{i,j}}{\rho_{i,j}} - \frac{\mu_{i-1,j}}{\rho_{i-1,j}} \right\} + \rho_{i-\frac{1}{2},j} g_{i-\frac{1}{2},j}^x \right),$$

$$b_{i,j-\frac{1}{2}} = \rho_{i,j-\frac{1}{2}} v_{i,j-\frac{1}{2}} - \delta t \left(\frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\delta y} - \rho_{i,j-\frac{1}{2}} (\mathbf{v} \cdot \nabla v)_{i,j-\frac{1}{2}} + \mathcal{K} \frac{\mu_{i,j-1} + \mu_{i,j}}{2} \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{\delta y} \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon \mathcal{K}}{2 \delta y} \left\{ 1 - \left(\frac{\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{2} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{\mu_{i,j}}{\rho_{i,j}} - \frac{\mu_{i,j-1}}{\rho_{i,j-1}} \right\} + \rho_{i,j-\frac{1}{2}} g_{i,j-\frac{1}{2}}^y \right)$$

où les termes $(\mathbf{v} \cdot \nabla u)_{i-\frac{1}{2},j}$ et $(\mathbf{v} \cdot \nabla v)_{i,j-\frac{1}{2}}$ sont calculés en utilisant un schéma décentré amont classique. Remarquons que cela peut nécessiter d'interpoler linéairement les valeurs de u et v et que la condition de stabilité nécessaire est exactement (II.3.2) ce qui justifie, rappelons-le, le choix (II.3.8) pour le pas de temps δt .

Finalement, on doit résoudre un système linéaire creux non-symétrique dans les inconnues $(u_{i-\frac{1}{2},j})$, $(v_{i,j-\frac{1}{2}})$. Différentes méthodes d'inversion peuvent être utilisées, mais celle qui s'est avérée la plus efficace dans les calculs effectués est celle du BiCGStab préconditionné par une décomposition LU incomplète de la matrice du problème non pénalisé (c'est-à-dire avec $r = 0$).

3.4 Comparaison des schémas de Murman et de Rasetarinera

On va montrer l'importance de la mise en place du schéma de P. Rasetarinera, dans le but de limiter la diffusion numérique issue de la discréétisation du terme de transport dans l'équation (II.1.2).

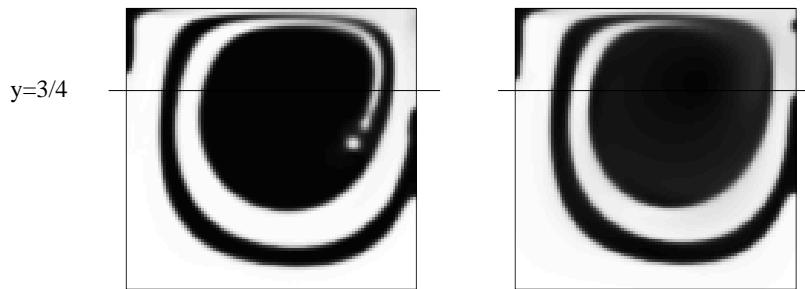


FIG. II.3.2 – Schéma de Rasetarinera (à gauche) et schéma de Murman (à droite)

La figure II.3.2 montre les résultats obtenus au même instant dans le cas test de la cavité entraînée, avec la même donnée initiale et les mêmes paramètres physiques, le premier étant obtenu avec le schéma de Rasetarinera et le second avec celui de Murman.

On perçoit nettement la présence d'une diffusion numérique plus importante dans le cas du schéma de Murman. Par exemple le test effectué avec le schéma antidiffusé, présente un changement de topologie dû à la séparation d'une gouttelette d'une des phases, ce qu'on ne voit pas dans l'autre cas.

Pour mieux illustrer le fait que l'interface est capturée de façon beaucoup plus précise avec ce schéma, la figure II.3.3 montre une vue de coupe des deux mélanges à l'instant considéré le long de la ligne $y = 3/4$: les zones interfaciales ainsi que les zones où les phases sont pures sont effectivement plus nettement capturées par le schéma de Rasetarinera.

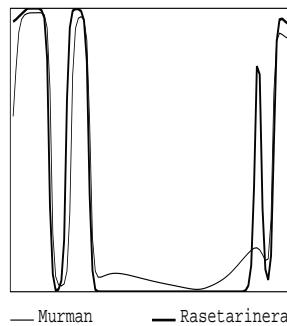


FIG. II.3.3 – Tracé de $\varphi(., 3/4)$ pour les deux schémas (voir la figure II.3.2)

4 Résultats numériques et validation du modèle

Dans tous les calculs présentés ici, on utilise les valeurs suivantes des paramètres physiques :

$$\alpha^2 = 5 \cdot 10^{-5}, \quad B(\varphi) = 1 - \varphi^2, \quad F(\varphi) = \varphi^4/4 - \varphi^2/2,$$

et la grille de discréttisation utilisée est 100×100 (sauf précision contraire), de sorte que l'épaisseur d'interface est du même ordre de grandeur que les pas de discréttisation en espace δx et δy .

Comme on vient de le voir, le schéma de Rasetarinera pour le terme de transport de l'équation de Cahn-Hilliard fournit de meilleurs résultats et permet d'affiner le suivi de l'interface. Pour cette raison, tous les résultats présentés jusqu'à la fin du chapitre sont obtenus en utilisant ce schéma.

Cette section est destinée à montrer que le modèle et le schéma proposés permettent de rendre compte de situations physiques diverses concernant les écoulements diphasiques incompressibles. De plus, on s'attachera dans ce qui suit à mettre en évidence le rôle des différents termes présents dans le modèle.

Remarque : On peut vérifier que la discréttisation proposée est conservative, dans le sens où, comme pour l'équation de Cahn-Hilliard continue, la moyenne discrète de φ est conservée au cours du temps. Une autre propriété importante de l'équation de Cahn-Hilliard est que, sous des hypothèses convenables sur les données, sur la mobilité B et sur le potentiel F (par exemple si B dégénère, ou si F a une forme logarithmique, voir le chapitre 3), le paramètre d'ordre φ prend ses valeurs dans l'intervalle physique $[-1, 1]$. Dans les calculs qui suivent, on vérifie que cette propriété est conservée pour le problème discret (aux erreurs d'inversion des systèmes linéaires près).

4.1 Cavité entraînée régularisée

Dans ce premier test, on suppose que les deux fluides ont les mêmes densité et viscosité, de sorte que les résultats qui suivent peuvent être comparés à ceux obtenus dans [15]. Sur le bord supérieur de la cavité carrée $[0, 1] \times [0, 1]$, la



FIG. II.4.1 – Donnée initiale pour la cavité entraînée

vitesse est soumise à la condition

$$u = Cx(1 - x), \quad v = 0,$$

où C est une constante, alors que l'on impose $\mathbf{v} = 0$ sur le reste du bord du domaine. On impose ici une vitesse régularisée (non constante sur le bord supérieur), afin de comparer qualitativement les résultats à ceux trouvés dans [15]. L'état initial du système est donné par la figure II.4.1, le mélange étant supposé initialement au repos.

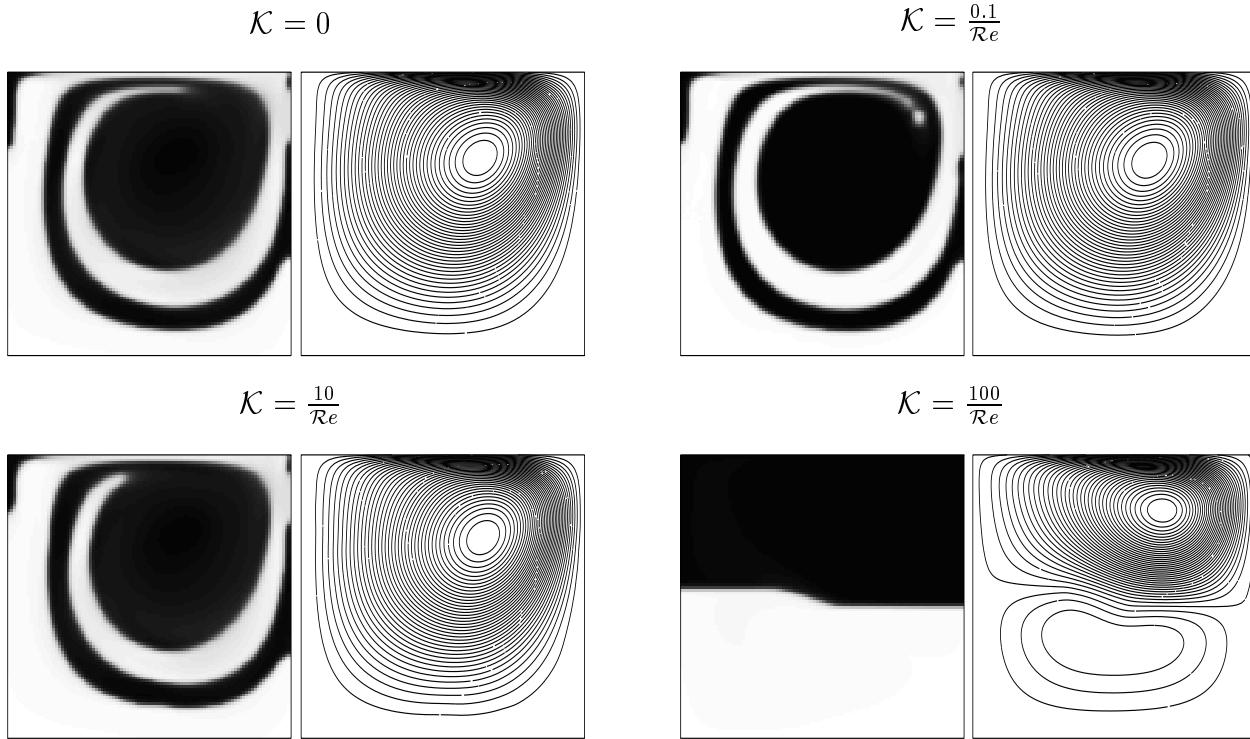


FIG. II.4.2 – Influence des forces capillaires sur la cavité entraînée

- **Effets de la capillarité :** Afin de mettre à jour l'influence des forces capillaires sur le mélange, des tests sont effectués à $\mathcal{R}_e = 500$ et $\mathcal{P}_e = 1000$ pour différentes valeurs du coefficient de capillarité \mathcal{K} (figure II.4.2).

On constate que quand les forces visqueuses sont prépondérantes face aux forces capillaires ($\mathcal{K} = \frac{0.1}{\mathcal{R}_e}$), la présence des forces capillaires favorise l'effet d'étirement de l'interface par le flot (à comparer avec le cas d'une interface passive

$\mathcal{K} = 0$) par un processus d'aplatissement de cette interface. Au contraire, quand ce sont les forces capillaires qui sont prépondérantes devant les forces visqueuses ($\mathcal{K} = \frac{10}{\mathcal{R}_e}$), elles vont à l'encontre de l'effet d'étirement, car elles créent une certaine rigidité à l'interface qui fait que le flot étire l'interface moins facilement. Dans le cas extrême d'une capillarité très forte ($\mathcal{K} = \frac{100}{\mathcal{R}_e}$), les forces visqueuses ne sont même pas suffisantes pour entraîner la seconde phase dans le mouvement, l'interface est trop rigide et reste essentiellement plate, l'écoulement se confinant dans la partie supérieure de la cavité.

Le résultat obtenu à $\mathcal{K} = 0$ dans lequel la phase “blanche” est moins étirée que pour $\mathcal{K} = \frac{0.1}{\mathcal{R}_e}$ peut sembler contradictoire. Ce résultat semble en fait la résultante de deux phénomènes. Le premier est un phénomène physique : la tension de surface tend à diminuer la courbure de l'interface, ainsi dans l'exemple étudié, la “langue” de la phase représentée en blanc est d'autant plus épaisse que la capillarité augmente. Mais une structure dont l'épaisseur est très faible n'est pas thermodynamiquement stable et se diffuse rapidement dans le milieu, c'est ce que l'on observe ici pour $\mathcal{K} = 0$.

Un second élément pour expliquer ce résultat est de nature numérique et lié au précédent commentaire. En effet, les paramètres numériques sont choisis pour que la taille de l'interface soit de l'ordre de quelques mailles. On comprend alors qu'une structure d'épaisseur très fine (de l'ordre de l'interface numérique) ne soit plus capturée par le schéma.

Pour vérifier l'influence du pas de discréétisation sur ces résultats, nous effectuons le même calcul sur un maillage deux fois plus fin (200×200 au lieu de 100×100).

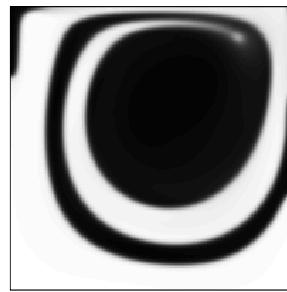


FIG. II.4.3 – Raffinement du maillage dans le cas $\mathcal{K} = 0$

Même si, en effet, on constate (figure II.4.3) un étirement plus grand que sur le maillage précédent, celui-ci n'est toujours pas supérieur à celui obtenu sur un maillage 100×100 pour $\mathcal{K} = 0.1/\mathcal{R}_e$, ce qui confirme une origine physique au phénomène. On constate en outre, une bonne cohérence des résultats obtenus sur les deux maillages, ce qui montre une bonne convergence du schéma par rapport au maillage (ceci sera encore illustré dans le paragraphe 4.5).

- **Effets de la diffusion/anti-diffusion naturelle dans l'équation de Cahn-Hilliard :**

On montre ici que les résultats obtenus grâce au modèle complet tel qu'il a été présenté, incluant le terme d'échange de Cahn-Hilliard, rend bien compte de l'épaisseur d'interface théorique prévue par le choix de l'énergie libre dans le modèle.

Plus précisément, il est intéressant de voir que même si un schéma sophistiqué très anti-diffusif est utilisé pour le terme de transport, on s'attend à observer quand même une diffusion numérique non négligeable, bien que réduite, dans les temps longs. En réalité, un tel phénomène n'est pas observé dans les résultats présentés dans ce travail. La raison en est simple. Le terme de Cahn-Hilliard contient une partie naturellement anti-diffusive, due à la non-convexité du potentiel de Cahn-Hilliard F qui assure à chaque instant l'équilibre local entre les deux phases à l'interface sur une distance de l'ordre de α , épaisseur théorique de l'interface.

Pour mettre ceci en évidence, les résultats pour le modèle complet sont comparés aux résultats obtenus avec $\mathcal{Pe} = +\infty$, c'est-à-dire avec un modèle limite dont l'équation en φ serait seulement une équation de transport interfacial pur (c'est le modèle de fluides incompressibles non-homogènes de [20, 27]). Les deux résultats présentés sont choisis au

même temps de calcul, toujours dans le cas de la cavité entraînée et avec les mêmes paramètres physiques : $\mathcal{R}e = 500$ et $\mathcal{K} = 2.10^{-4}$.



FIG. II.4.4 – Influence du terme d'échange sur le suivi de l'interface

Rappelons que la théorie prévoit (voir [20] et le théorème IV.2.2 du chapitre 4) que pour une équation de transport par un champ à divergence nulle d'une quantité φ , la mesure de l'ensemble des points x où φ prend une valeur supérieure à une valeur β fixée doit rester constante. Il est clair que cette propriété est loin d'être vérifiée par la solution numérique obtenue ici même avec un schéma d'ordre 2 dont la diffusion numérique est limitée. Ceci n'est pas surprenant et on sait bien que la résolution numérique des équations de transport avec une diffusion numérique la plus faible possible est encore aujourd'hui un problème de première importance.

Il est bien clair au vu de ces résultats qu'avec le modèle introduit dans ce travail, il s'avère plus simple de suivre "proprement" l'interface d'un point de vue numérique que dans le cadre des fluides non-homogènes. De plus, les résultats présentés ici ont été effectués sans modification artificielle du modèle. Ceci n'est pas le cas des méthodes level set [28] par exemple, dans lesquelles on doit, à chaque pas de temps, régulariser des fonctions de Heavyside et des distributions de Dirac, puis renormaliser la solution obtenue. Cela revient au final à introduire une épaisseur d'interface numérique alors que les modèles physiques utilisés sont des modèles à interface infiniment mince.

Remarquons aussi qu'avec le modèle complet ($\mathcal{P}e < +\infty$), l'interface peut se mouvoir le long des parois (en maintenant la condition d'orthogonalité au point triple) par diffusion, même si le champ de vitesse est nul au bord. Ceci n'est théoriquement pas le cas dans les modèles où l'interface est simplement transportée par le flot.

4.2 Décomposition spinodale et structuration des phases sous cisaillement

Dans ce paragraphe, on considère l'un des cas physiques qui a motivé cette étude, celui de la décomposition spinodale sous cisaillement. Les conditions expérimentales de l'étude d'un mélange sous cisaillement, sont celles d'un système de Couette-Taylor. Pour des raisons de simplifications, et au vu des grandeurs caractéristiques du domaine, on fait tout d'abord l'hypothèse que l'écoulement est bidimensionnel, puis que les deux cylindres étant de diamètres très voisins, on peut négliger les effets de courbure (voir figure II.4.5). On est donc ramenés à un domaine de calcul rectangulaire de type "canal" avec des conditions de périodicité dans la direction longitudinale.

Ainsi, on place les deux fluides (supposés de densités identiques) dans un canal en imposant des conditions de cisaillement sur le champ de vitesse. Les paramètres utilisés sont $Re = 500$, $\mathcal{K} = 1/500$ et $\mathcal{Pe} = 1000$. Les résultats obtenus sont présentés simultanément pour un cisaillement de référence, puis un cisaillement 10 fois plus important.

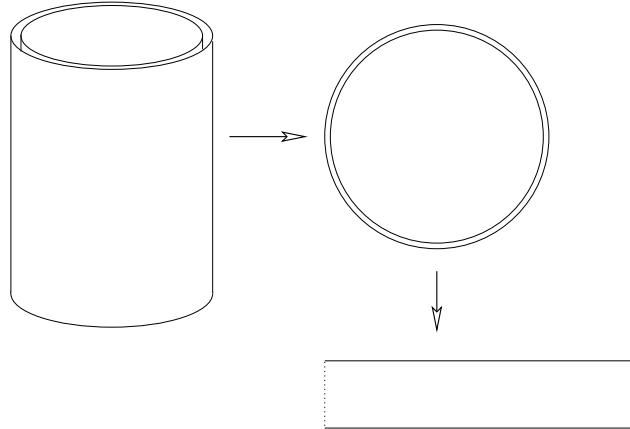


FIG. II.4.5 – Contexte expérimental : cellule de Couette - simplifications mathématiques

A titre de comparaison, on peut voir ci-dessous les résultats expérimentaux obtenus dans [21] qui montrent l'apparition d'une "string phase", ou phase lamellaire. Cette phase est caractérisée par des structures en bandes parallèles.

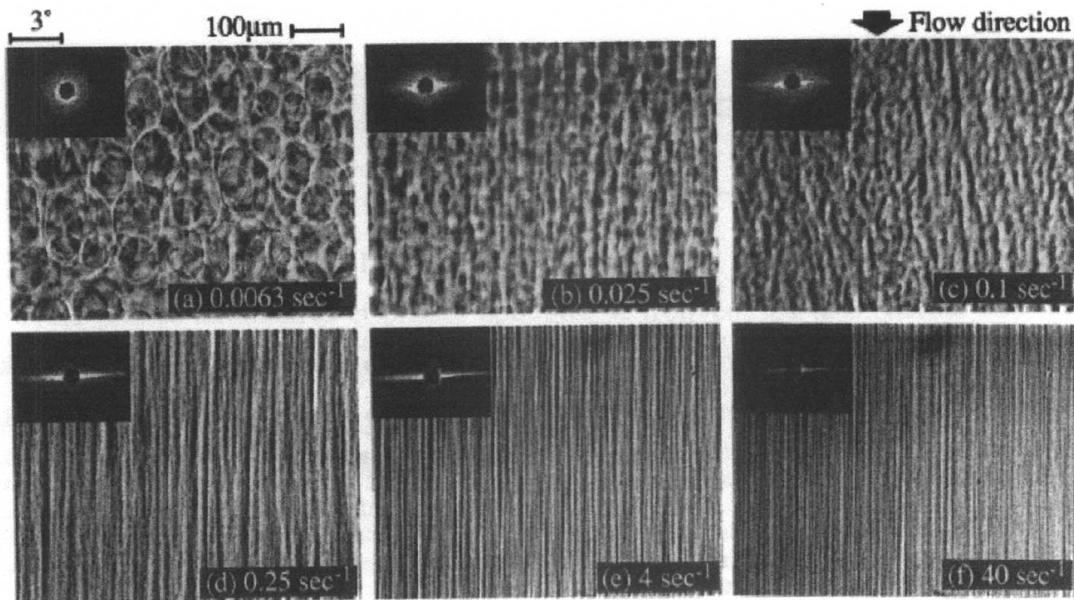


FIG. II.4.6 – Issue de [3] et [21] : résultats expérimentaux de à divers taux de cisaillement

En ce qui concerne les résultats numériques obtenus (figure II.4.7), on voit que dans les deux cas, l'évolution du système peut être divisée en deux étapes successives.

- Dans la première, on assiste à la séparation spontanée des deux phases (on rappelle que le mélange est subitement porté à une température inférieure à la température critique au temps $t = 0$) et à la formation de structures macroscopiques (*phase éponge*) dans le mélange sous l'influence du terme de Cahn-Hilliard. Ce premier phénomène est connu sous le nom de décomposition spinodale [12, 3].

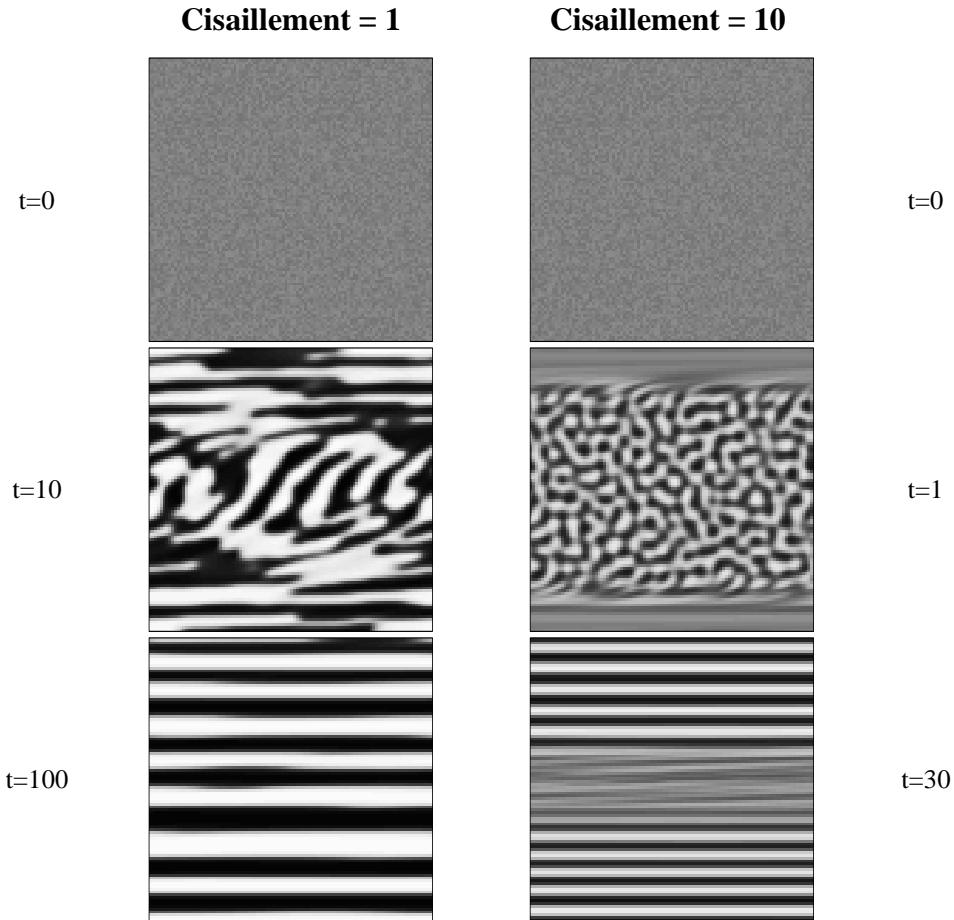


FIG. II.4.7 – Décomposition spinodale sous cisaillement

- Dans la seconde étape, on constate que l'influence du cisaillement se fait sentir. Il induit une réorganisation des structures macroscopiques précédemment observées sous formes de bandes parallèles chacune composée de l'une des deux phases (*phase lamellaire*).

On peut ainsi constater la concordance des résultats avec les expériences physiques (figure II.4.6 et [3, 16, 24]) sur les points suivants :

- La nature et la taille des structures macroscopiques créées dans un premier temps dépendent elles aussi de l'amplitude du cisaillement.
- Plus le cisaillement est fort, plus le nombre de bandes observées est grand, et plus les bandes sont minces.

Une question d'importance reste ouverte : que devient le système en temps long ? Pour le premier cas (à faible cisaillement), le système semble avoir atteint en $t = 100$ un état stationnaire stable. Par contre, dans le second cas, si on laisse évoluer le système plus longtemps, les structures bandes se déstabilisent et le mélange s'homogénéise (figure II.4.8).

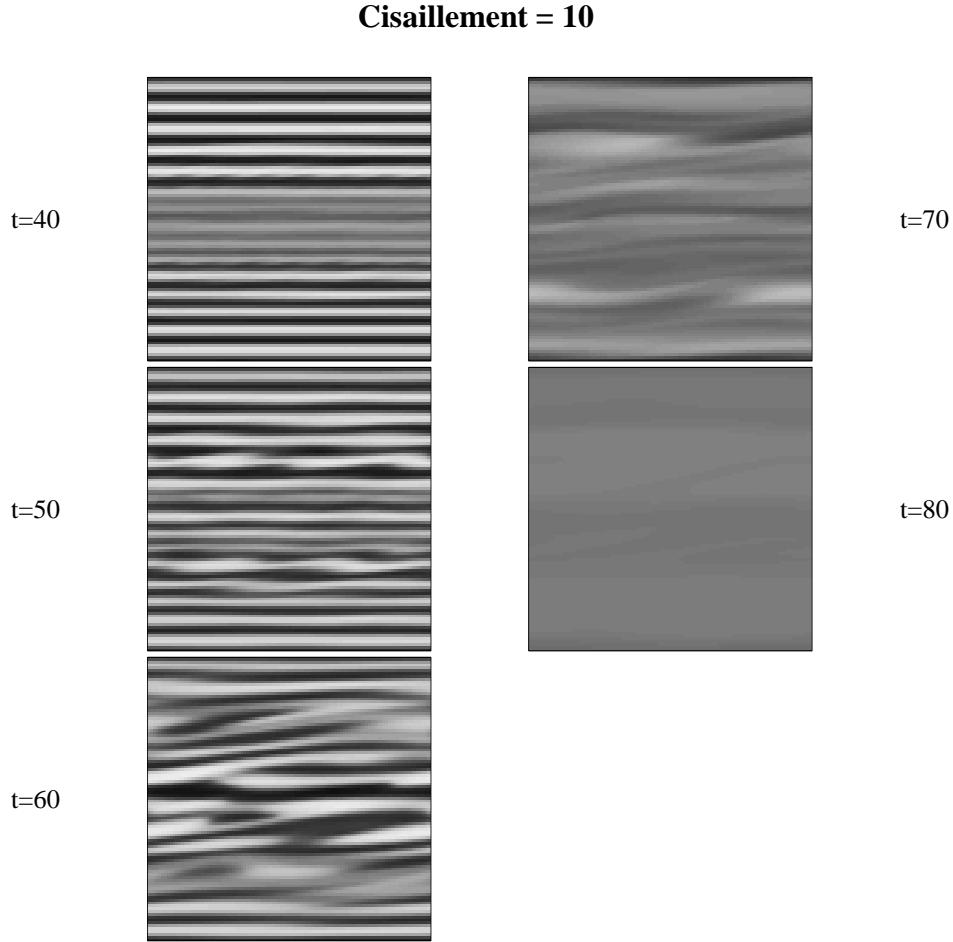


FIG. II.4.8 – Instabilité de la structure en bandes (phase lamellaire)

Ainsi le mélange qui était instable au repos (décomposition spinodale), devient stable sous cisaillement. Ce phénomène physique a été observé dans [3, 5, 6] par exemple, et peut s'interpréter comme un déplacement de la température critique du mélange sous l'effet du cisaillement. L'étude théorique du comportement du mélange à fort cisaillement fait l'objet du chapitre 5.

On peut maintenant s'intéresser à l'influence des forces capillaires pour ce type d'écoulements. Ainsi, on reprend un écoulement à $\mathcal{R}e = 500$ dans un canal avec une vitesse de cisaillement adimensionnée égale à 1. On observe les résultats obtenus aux mêmes instants avec $\mathcal{K} = \frac{10}{\mathcal{R}e}$ et $\mathcal{K} = \frac{100}{\mathcal{R}e}$ (figure II.4.9).

Encore une fois, on observe la compétition entre les forces visqueuses et les forces capillaires. Dans le cas d'une grande capillarité le régime stationnaire de cisaillement pour le champ de vitesse ne s'installe pas aussi facilement que dans le cas d'une capillarité plus faible. En outre, la structure en bandes n'est pas non plus clairement établie à $t = 35$ pour le cas $\mathcal{K} = \frac{100}{\mathcal{R}e}$ alors qu'elle l'est déjà dans l'autre cas.

$$\mathcal{K} = \frac{10}{\mathcal{R}_e}$$

$$\mathcal{K} = \frac{100}{\mathcal{R}_e}$$

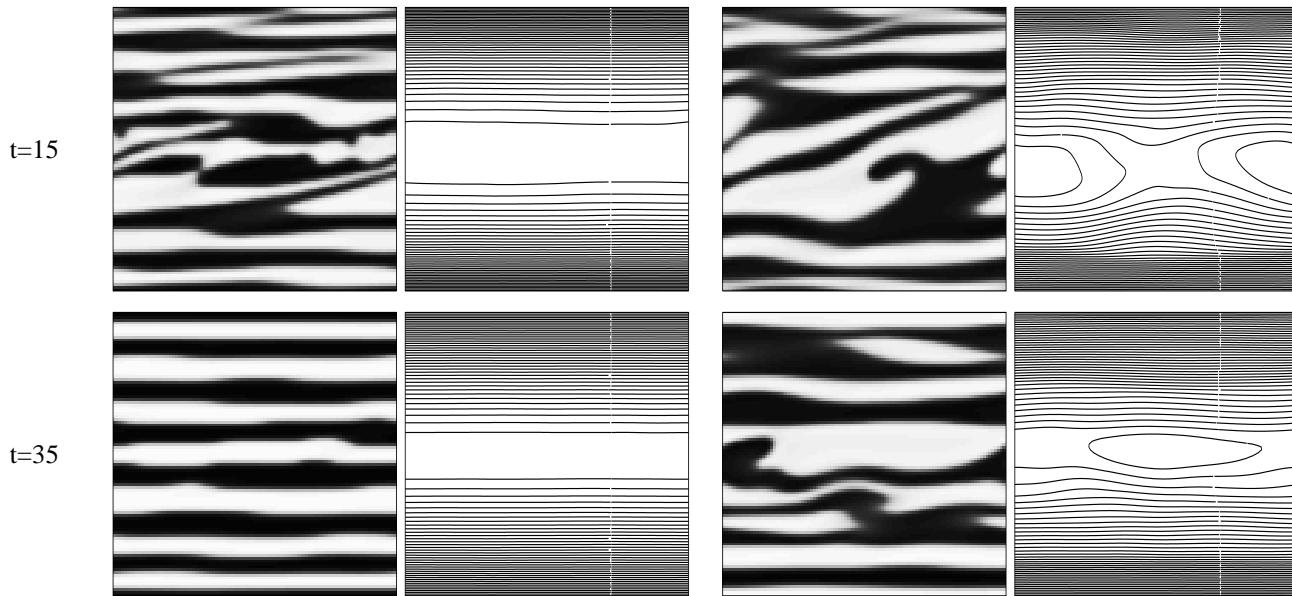


FIG. II.4.9 – Influence des forces capillaires sur le mélange sous cisaillement

Si on choisit maintenant un écoulement à petit Reynolds ($\mathcal{R}_e = 10^{-3}$) et à forte capillarité ($\mathcal{K} = \frac{100}{\mathcal{R}_e}$), on voit que le cisaillement n'est même plus capable de déformer les structures qui se forment (figure II.4.10). Ceci illustre encore une fois le fait que l'apparition d'une structure en bandes (phase "lamellaire") est très liée à une compétition au niveau de l'interface entre l'entrainement dû à l'écoulement de cisaillement et les forces capillaires qui essaient de minimiser la courbure des inclusions.

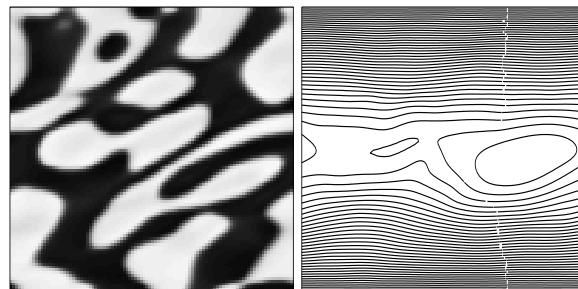


FIG. II.4.10 – Cisaillement à petit Reynolds et à forte capillarité

4.3 Instabilité de Rayleigh-Taylor

Cet exemple d'écoulement diphasique est classique, il consiste à étudier l'instabilité provoquée quand on met un fluide lourd au-dessus d'un fluide moins dense en perturbant très légèrement la position d'équilibre (voir [14, 18] par exemple). Le contraste de densité choisi ici est $\rho_1^0/\rho_2^0 = 1000$, et les viscosités des deux phases sont supposées identiques.

Les résultats présentés ont tous été obtenus avec la même condition initiale pour φ (voir figure II.4.11) au repos ($\mathbf{v} = 0$ à $t = 0$).

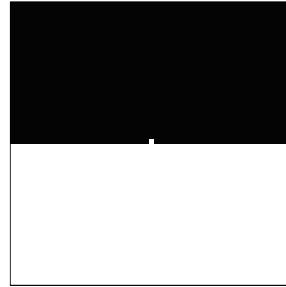


FIG. II.4.11 – Condition initiale pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor

On montre les différents comportements du système quand le nombre capillaire varie à des temps équivalents. On peut montrer que la capillarité est directement liée à la tension de surface (c'est-à-dire l'excès d'énergie à l'interface) et à la courbure de l'interface (voir [15, 18, 19]). Ce fait est effectivement observé ici : le terme de forces capillaires a pour action de rendre l'interface aussi plate que possible.

$$\mathcal{K} = 0$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\mathcal{R}_e}$$

$$\mathcal{K} = \frac{10}{\mathcal{R}_e}$$

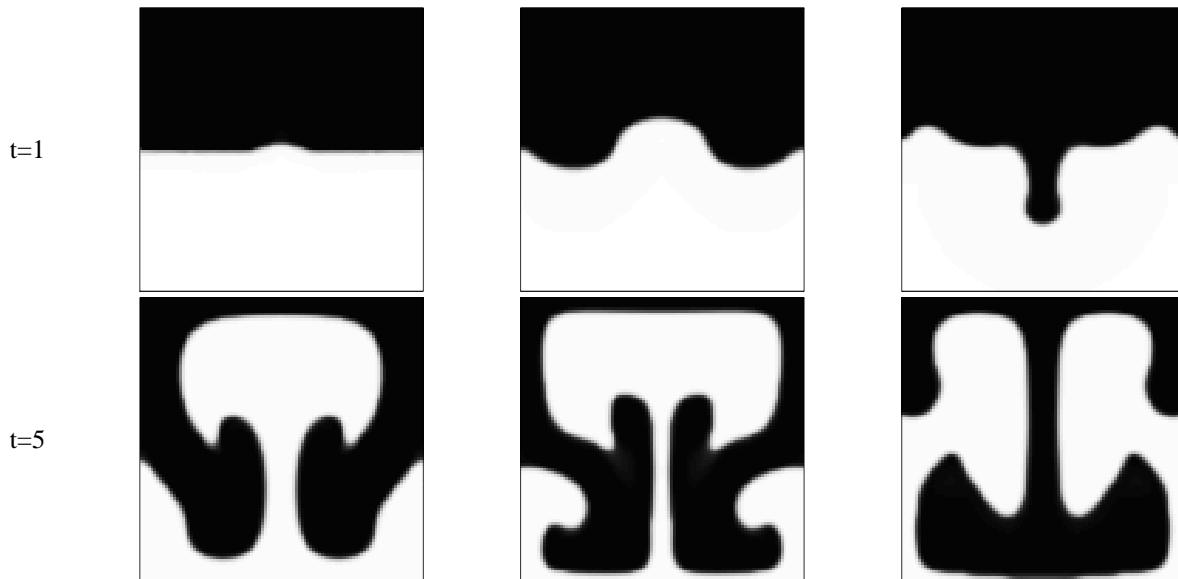


FIG. II.4.12 – Instabilité de Rayleigh-Taylor

De plus, quand la capillarité est vraiment importante ($\mathcal{K} = \frac{10}{\mathcal{R}_e}$), les forces capillaires sont prépondérantes au tout début du processus, quand le système a peu d'inertie. Donc, avant que l'instabilité ne commence réellement à se développer, la tension de surface tente de rendre l'interface plate, c'est la raison pour laquelle dans ce cas, le système évolue de façon contraire aux autres cas : elle semble se propager “vers le bas” alors que les autres résultats montrent une propagation “vers le haut”.

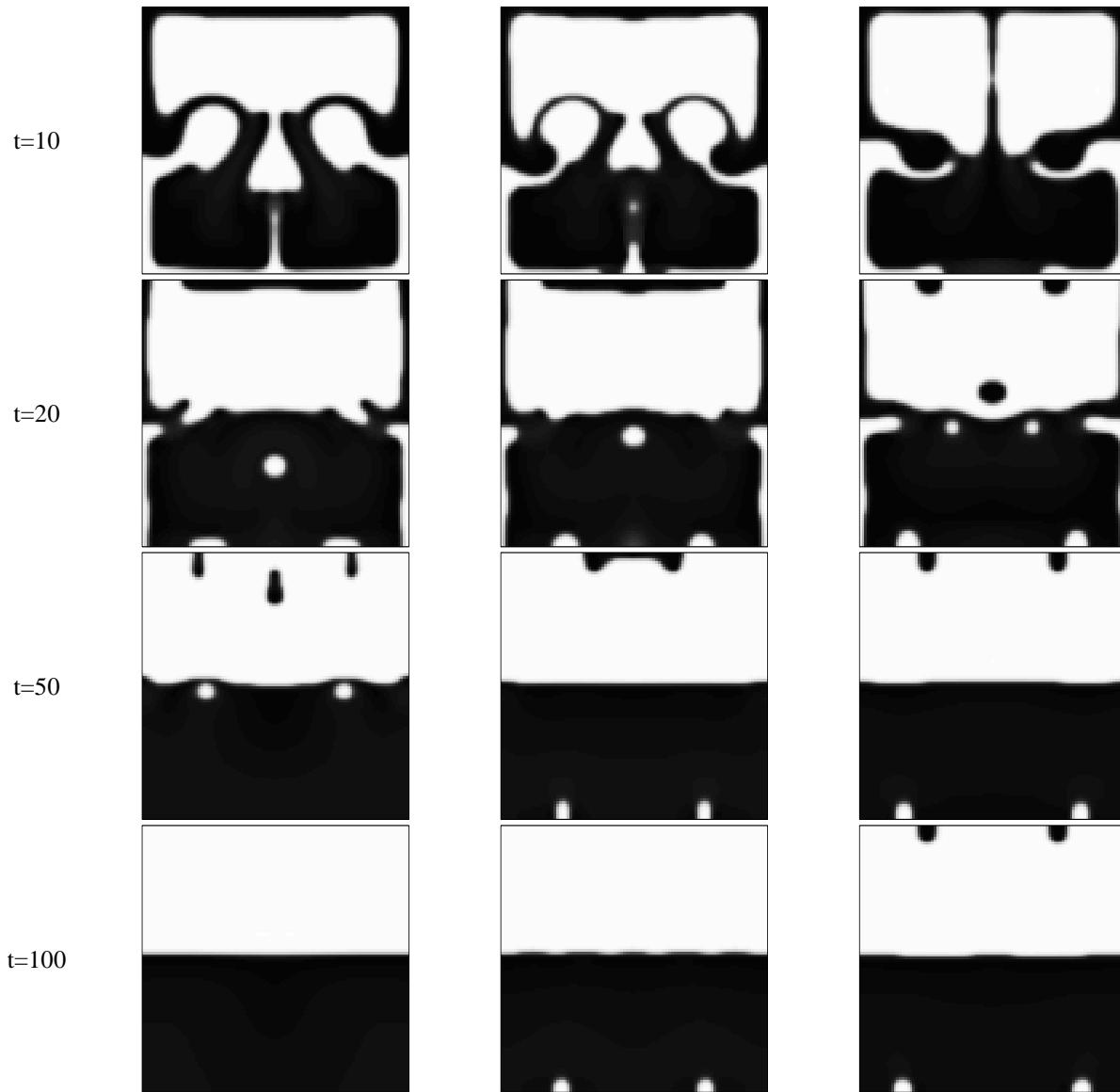


FIG. II.4.12 – Instabilité de Rayleigh-Taylor (suite)

4.4 Chute d'une goutte

Afin de montrer le rôle joué par le contraste de viscosité entre les deux phases, et la façon dont le modèle peut en rendre compte, deux résultats sont présentés ici. Il s'agit de simuler la chute d'une goutte de la phase 1 dans la phase 2. Les paramètres communs aux deux tests ci-dessous sont

$$\mathcal{Pe} = 1000, \quad \mathcal{K} = 0.01, \quad \rho_1^0 / \rho_2^0 = 1000.$$

Dans une première simulation (figure II.4.13), on considère le cas où la viscosité $\eta(\varphi)$ est choisie variable, avec un rapport de viscosité de l'ordre de celui qui existe entre l'air et l'eau : l'eau est 50 fois plus visqueuse que l'air. Le nombre de Reynolds choisi dans l'air est $\mathcal{Re} = 1000$.

Dans le second résultat (figure II.4.14), les deux fluides sont supposés avoir la même viscosité ($\eta(\varphi) \equiv 1$) et on choisit à nouveau $\mathcal{Re} = 1000$. Rappelons, à titre indicatif, que l'eau et le mercure ont effectivement des viscosités du même ordre et des densités différentes.

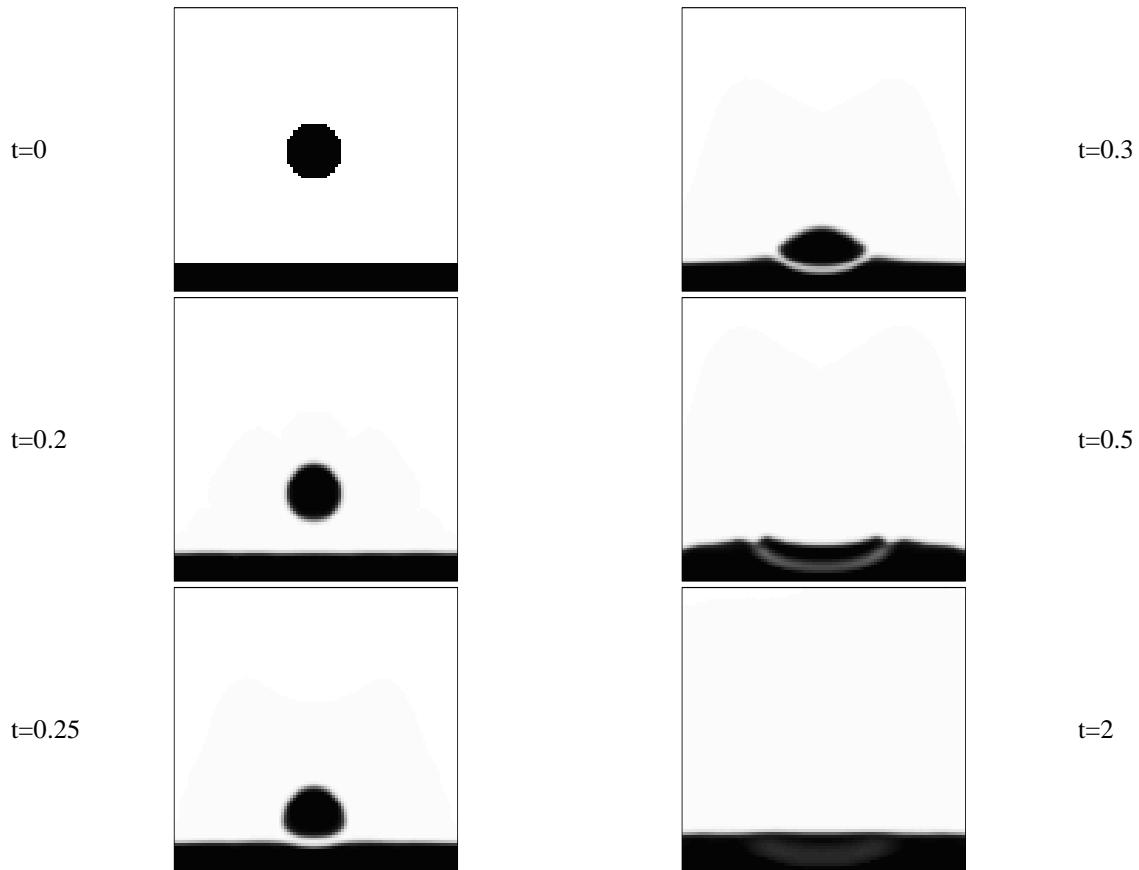


FIG. II.4.13 – Chute d'une goutte : viscosité variable

Dans le premier test (figure II.4.13), la goutte rentre en contact avec la couche d'eau présente au fond de la cavité, puis se fond dans cette couche sans éclaboussures. En revanche, dans le second cas, on peut voir entre les instants $t = 0.6$ et $t = 2.1$, que le contact de la goutte avec la couche au fond de la cavité provoque des éclaboussures et l'apparition d'une sorte de vaguelettes à la surface dont l'amplitude s'amortit avec le temps. On voit donc que le fait d'avoir ou non des viscosités égales peut avoir des conséquences importantes sur la dynamique du système. Il est cependant clair

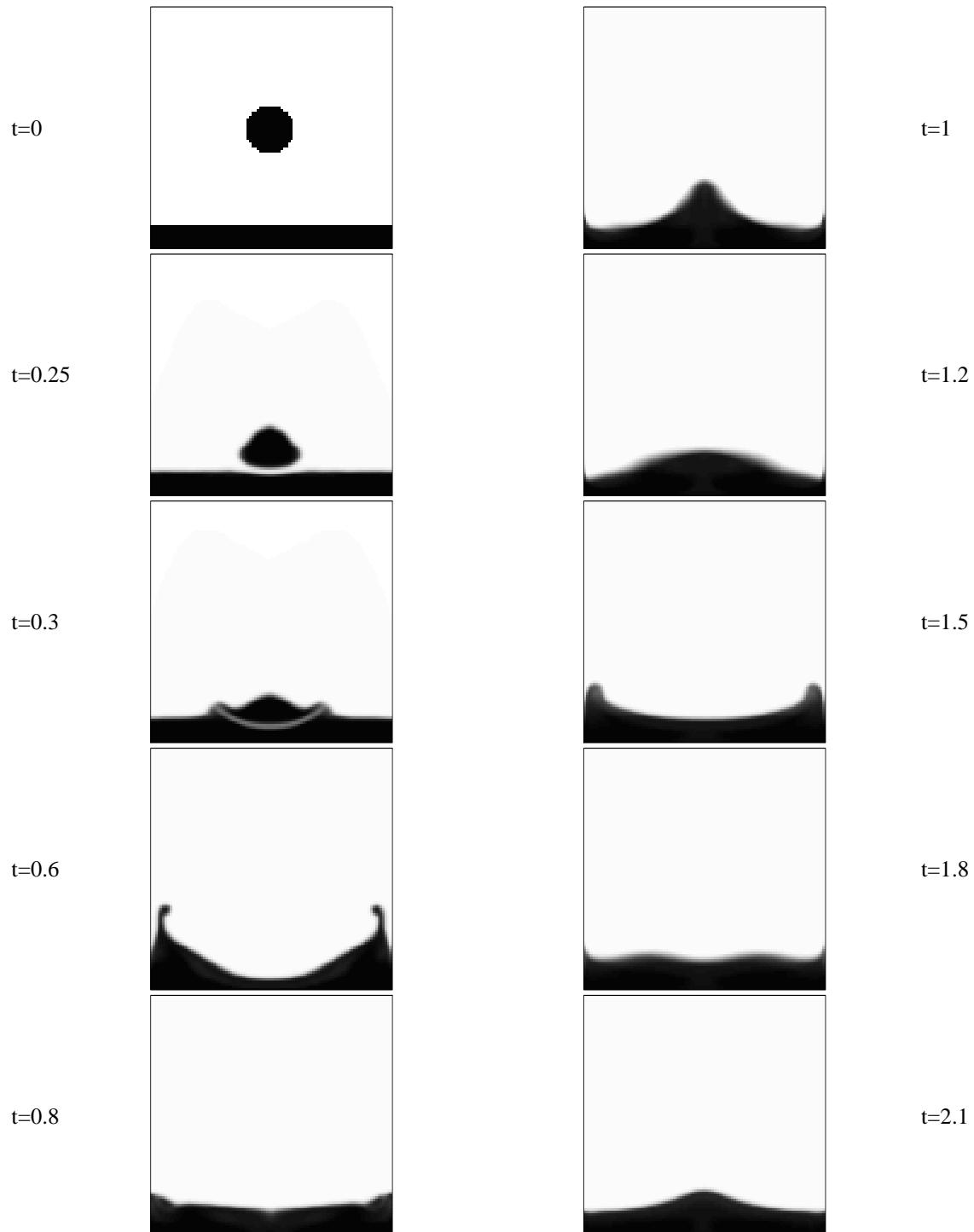


FIG. II.4.14 – Chute d'une goutte : viscosité constante

que si on laissait tomber la bulle d'une plus grande hauteur ou avec une vitesse initiale importante, on verrait aussi un phénomène d'éclaboussures dans le cas d'une goutte d'eau dans de l'air.

Les résultats obtenus sont aussi qualitativement en accord avec les résultats du même type que l'on peut trouver dans la littérature, en particulier la forme de la surface à l'instant $t = 0.6$ dans le second cas (figure II.4.14) est assez caractéristique de ce type de simulations numériques, comme par exemple celle effectuée par des méthodes level set adaptatives dans [28].

4.5 Affleurement de bulles

On s'intéresse maintenant à un problème voisin du précédent. Il s'agit d'étudier le comportement d'une bulle de gaz à l'intérieur d'un liquide.

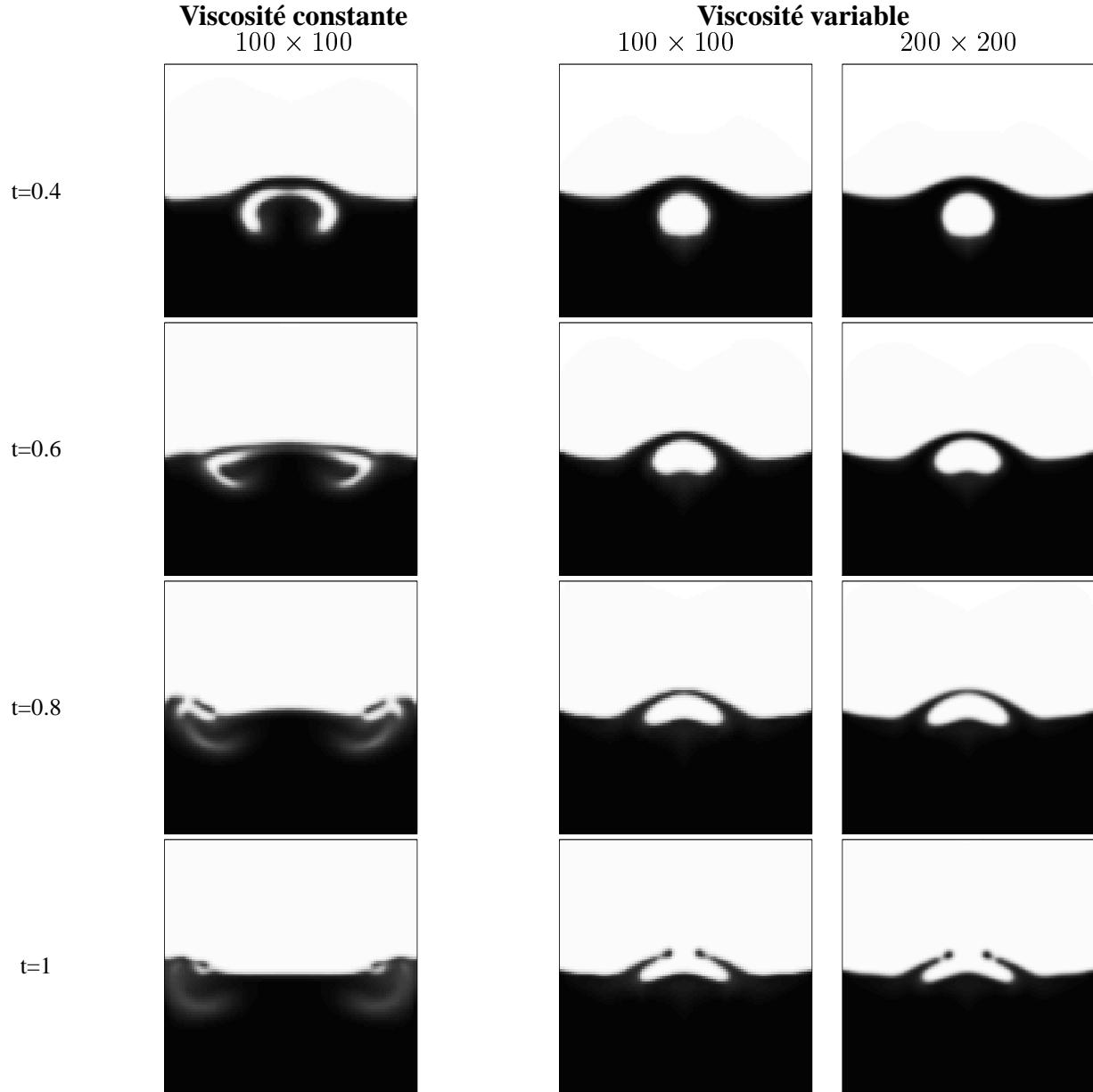


FIG. II.4.15 – bulle de gaz

Les paramètres utilisés sont les mêmes que ceux employés dans le paragraphe précédent pour l'étude des chutes de gouttes. On met à nouveau l'accent sur les différences de dynamique très importantes entre le cas d'une viscosité variable et celui d'une viscosité constante qui confirme la bonne prise en compte des différences de viscosité dans le modèle proposé. Les résultats sont à nouveau en accord qualitatif avec les résultats exposés dans [28].

En outre, on montre ici la comparaison des résultats obtenus dans le cas de la viscosité variable sur deux maillages différents (100×100 et 200×200). On constate la bonne cohérence des résultats qui montre la convergence en maillage de la méthode proposée ainsi que la bonne précision obtenue : le calcul sur un maillage 100×100 suffit à l'obtention d'une solution précise pour un temps de calcul raisonnable.

Il est cependant clair que pour des cas physiques plus complexes dans lesquels l'interface est très étirée (cavité entraînée), ou qui présentent de nombreux changements de topologie dans les phases (instabilité de Rayleigh-Taylor par exemple), l'utilisation d'un maillage plus fin permet de mieux capter les interfaces et peut donc se justifier.

5 Méthode de domaine fictif pour la prise en compte d'un obstacle

On va, dans ce paragraphe, montrer comment la méthode numérique proposée peut être adaptée pour le calcul d'un écoulement dans un domaine rectangulaire avec obstacle (ou encore à des domaines non rectangulaires).

On note dans la suite

$$\Omega_d = \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\},$$

le domaine discréte, c'est-à-dire l'ensemble des coordonnées des cellules de la discréteisation.

Soit alors Ω' un domaine dans Ω représentant l'obstacle à considérer, et Ω'_d son homologue discréte, c'est-à-dire

$$\Omega'_d = \{(i, j) \in \Omega_d, \text{ tels que } A_{i,j} \in \Omega'\}.$$

On cherche donc maintenant à résoudre le problème (II.1.1)-(II.1.5) sur $\Omega \setminus \Omega'$. C'est-à-dire que les équations doivent être discrétees dans $\Omega \setminus \Omega'$ et les conditions aux limites de Dirichlet homogène pour la vitesse et de Neumann pour φ et μ doivent être vérifiées en plus, sur le bord $\partial\Omega'$ de l'obstacle.

5.1 Description de la méthode

L'idée utilisée ici est celle d'une méthode de domaine fictif. Il s'agit de résoudre en fait un problème discret sur Ω_d tout entier dont la solution restreinte à $\Omega_d \setminus \Omega'_d$ est une solution approchée du problème de départ posé dans $\Omega \setminus \Omega'$. Il faut en particulier faire en sorte de satisfaire les nouvelles conditions aux limites sur le bord du domaine discret Ω'_d . Pour ce faire, analysons séparément comment mettre en place cette technique sur les trois étapes de la méthode à pas fractionnaires employée.

• Etape 1 - Equation de Cahn-Hilliard

Notons pour tout $(i, j) \in \Omega'_d$

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i+1, j) \notin \Omega'_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$g_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i-1, j) \notin \Omega'_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$h_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j+1) \notin \Omega'_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j-1) \notin \Omega'_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

autrement dit $d_{i,j} = 1$ par exemple, si l'arrête droite de la cellule $C_{i,j}$ est à la frontière de l'obstacle.

On choisit dans un premier temps comment discréteriser les conditions aux limites sur μ , ou encore sur l'inconnue intermédiaire \mathcal{M} . Cette discréterisation doit préserver la propriété fondamentale de l'équation de Cahn-Hilliard qui est

la conservation de la composition moyenne du mélange (sur le domaine physique $\Omega \setminus \Omega'$ et donc sur $\Omega_d \setminus \Omega'_d$ pour le problème discret).

Bien entendu on garde le schéma (II.3.1) pour discréteriser les équations à l'intérieur du domaine physique, c'est-à-dire pour tout $(i, j) \in \Omega_d \setminus \Omega'_d$. On aura donc conservation de la moyenne de φ dans cette étape si

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in \Omega_d \setminus \Omega'_d} \frac{1}{\delta x^2} \left(\xi_{i+\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \xi_{i-\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right) \\ & + \frac{1}{\delta y^2} \left(\xi_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \xi_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = 0, \end{aligned}$$

où $\xi_{i \pm \frac{1}{2},j} = \frac{B_{i \pm \frac{1}{2},j}}{\rho_{i \pm \frac{1}{2},j}}$ et $\xi_{i,j \pm \frac{1}{2}} = \frac{B_{i,j \pm \frac{1}{2}}}{\rho_{i,j \pm \frac{1}{2}}}$. En écrivant la somme sous la forme

$$\sum_{(i,j) \in \Omega_d \setminus \Omega'_d} = \sum_{(i,j) \in \Omega_d} - \sum_{(i,j) \in \Omega'_d},$$

on constate que la première des sommes (celle qui porte sur Ω_d) est nulle à cause des conditions aux limites imposées sur le bord du domaine fictif Ω_d (section 3.2). Ainsi la condition de conservation de la moyenne de φ devient

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in \Omega'_d} \frac{1}{\delta x^2} \left(\xi_{i+\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \xi_{i-\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right) \\ & + \frac{1}{\delta y^2} \left(\xi_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \xi_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.5.1})$$

Remarquons alors qu'un terme du type $\frac{1}{\delta x^2} \xi_{i+\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i+\frac{1}{2},j}$ se retrouve au plus deux fois dans la somme (dans le terme issu de la cellule (i, j) et celui issu de la cellule $(i+1, j)$ à la condition que celle-ci soit dans Ω'_d). Ainsi deux cas se présentent, $(i, j) \in \Omega'_d$ étant fixé :

- Si $(i+1, j) \in \Omega'_d$, alors le terme $\frac{1}{\delta x^2} \xi_{i+\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i+\frac{1}{2},j}$ est présent exactement deux fois dans la somme avec des signes opposés (sommes télescopiques), la contribution de ce terme est donc nulle. Remarquons que dans ce cas, on a par définition $d_{i,j} = 0$.
- Si $(i+1, j) \notin \Omega'_d$, alors ce terme n'est présent qu'une seule fois, et dans ce cas on a $d_{i,j} = 1$.

En appliquant ce même raisonnement à toutes les directions de sommation et à tous les termes, la condition (II.5.1) s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in \Omega'_d} \frac{1}{\delta x^2} \left(d_{i,j} \xi_{i+\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - g_{i,j} \xi_{i-\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right) \\ & + \frac{1}{\delta y^2} \left(h_{i,j} \xi_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - d_{i,j} \xi_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.5.2})$$

Or les cellules qui sont à l'intérieur de l'obstacle discret Ω'_d ont toutes leurs voisines dans Ω'_d , c'est-à-dire que pour une telle cellule (i, j) , on a

$$d_{i,j} = g_{i,j} = h_{i,j} = b_{i,j} = 0,$$

et donc la contribution de cette cellule dans la somme précédente est nulle. Ceci montre que, comme on s'en doutait, seules les cellules situées à la frontière de l'obstacle discret interviennent pour la conservation de la moyenne de φ sur le domaine physique $\Omega_d \setminus \Omega'_d$. Notons $\partial\Omega'_d$ l'ensemble des cellules du bord de Ω'_d , c'est-à-dire celles pour lesquelles au

moins l'un des $d_{i,j}, g_{i,j}, h_{i,j}, b_{i,j}$ est non nul. Au final, la condition de conservation s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \partial\Omega'_d} \frac{1}{\delta x^2} & \left(d_{i,j} \xi_{i+\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - g_{i,j} \xi_{i-\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right) \\ & + \frac{1}{\delta y^2} \left(h_{i,j} \xi_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - d_{i,j} \xi_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi pour assurer cette conservation, on voit apparaître naturellement la condition au bord qu'il faut imposer sur les cellules de $\partial\Omega'_d$. En effet, dans la somme précédente chaque terme contient la valeur de $\frac{\mathcal{M}}{\rho}$ sur la cellule (i, j) et les valeurs de $\frac{\mathcal{M}}{\rho}$ sur les cellules voisines de (i, j) qui sont dans le domaine physique (les autres termes sont nuls à cause de $d_{i,j}, g_{i,j}, h_{i,j}$ ou $b_{i,j}$).

Ainsi, on peut discréteriser la condition aux limites sur le bord de l'obstacle en imposant la nullité de chacun des termes de cette somme qui constituent une expression de la valeur de $\frac{\mathcal{M}}{\rho}$ sur $\partial\Omega'_d$ en fonction des valeurs calculées dans le domaine physique.

Finalement, la condition aux limites choisie pour cette partie de l'équation est : pour tout $(i, j) \in \partial\Omega'_d$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta x^2} & \left(d_{i,j} \xi_{i+\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - g_{i,j} \xi_{i-\frac{1}{2},j} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right) \\ & + \frac{1}{\delta y^2} \left(h_{i,j} \xi_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - d_{i,j} \xi_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta \left(\frac{\mathcal{M}}{\rho} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.5.3})$$

Notons que si tous les coefficients discrets de diffusion $\xi_{i \pm \frac{1}{2},j}$ et $\xi_{i,j \pm \frac{1}{2}}$ sont nuls, alors la condition devient vide ce qui est complètement cohérent avec la dégénérescence de l'opérateur de diffusion dans ce cas.

La condition aux limites sur φ , ou plutôt sur Φ , dans (II.3.1) est obtenue par analogie en écrivant qu'une telle condition doit assurer l'équivalent discret de la nullité de l'intégrale du laplacien de Φ sur le domaine physique. La méthode précédente amène naturellement à la condition

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta x^2} & \left(d_{i,j} \Delta \Phi_{i+\frac{1}{2},j} - g_{i,j} \Delta \Phi_{i-\frac{1}{2},j} \right) \\ & + \frac{1}{\delta y^2} \left(h_{i,j} \Delta \Phi_{i,j+\frac{1}{2}} - d_{i,j} \Delta \Phi_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.5.4})$$

écrite pour toutes les cellules $(i, j) \in \partial\Omega'_d$.

Notons que les valeurs de Φ et \mathcal{M} sur les cellules $(i, j) \in \Omega'_d \setminus \partial\Omega'_d$ qui sont à l'intérieur (au sens “topologique”) de l'obstacle n'interviennent nulle part dans le problème y compris dans ce qui va suivre.

En pratique, il suffit donc de modifier la matrice écrite dans le cas sans obstacle en remplaçant les lignes qui concernent les cellules de $\partial\Omega'_d$ par la traduction matricielle des conditions (II.5.3)-(II.5.4).

• Etape 2 - Equation de transport

Ce terme ne pose aucun problème car le champ de vitesse est nul dans tout l'obstacle et donc le schéma de Rasetarinera proposé au début du chapitre dégénère de façon parfaitement acceptable dans l'obstacle et sur les cellules du domaine physique qui sont proches de l'obstacle.

• Etape 3 - Equation de Navier-Stokes

Pour la discréterisation de l'équation de Navier-Stokes par une méthode de domaine fictif, on se réfère à [2] où une méthode pénalisation est proposée. Sa mise en oeuvre est très simple dans notre cadre et il est prouvé dans [2] que cette méthode est convergente quand le paramètre de pénalisation tend vers 0.

En résumé, il s'agit de remplacer la résolution de l'équation de Navier-Stokes (II.1.4) avec conditions de Dirichlet sur $\Omega \setminus \Omega'$ par la résolution de l'équation pénalisée suivante, sur Ω tout entier

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - \frac{1}{\mathcal{R}e} \operatorname{div} (2\eta(\varphi)\mathbf{D}(\mathbf{v})) + \frac{1}{\lambda} \mathbf{1}_{\Omega'} \mathbf{v} + \nabla p = \mathcal{K}\mu \nabla \varphi + \varepsilon \mathcal{K} \frac{1-\varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \rho \mathbf{g},$$

où $\mathbf{1}_{\Omega'}$ est la fonction indicatrice de l'obstacle Ω' et λ un petit paramètre de pénalisation. Il est prouvé dans [2] que

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega'))} \leq C(T) \lambda^{\frac{3}{4}},$$

et qu'en fait l'erreur obtenue numériquement est approximativement $O(\lambda)$ sur l'obstacle.

Il est aisément de mettre en place cette technique de pénalisation à partir du schéma proposé dans ce qui a précédé en rajoutant dans la matrice du problème de Stokes des coefficients $\frac{\delta t}{\lambda}$ dans les lignes concernant les cellules (i, j) qui sont dans l'obstacle discréte Ω'_d .

Cependant, à la fin de la résolution d'un pas de temps, il est indispensable d'imposer numériquement $\mathbf{v} = 0$ sur les cellules de l'obstacle Ω'_d pour éviter que les erreurs numériques dues à la méthode de pénalisation sur la nullité de \mathbf{v} dans l'obstacle, ne viennent perturber la partie transport de la discréte. On est ainsi certain que les valeurs de φ à l'intérieur de l'obstacle (qui n'ont, par définition, aucun sens physique) ne jouent aucun rôle dans la solution de l'équation de transport. En outre, l'erreur commise par cette opération est maîtrisée grâce à l'estimation d'erreur précédente.

5.2 Un exemple de résultat

On peut envisager de nombreuses applications de la méthode précédente, par exemple, pour l'étude d'écoulements diphasiques en milieu poreux dans lequel l'obstacle fait office de phase solide dans le problème.

Pour illustrer la validité qualitative de la méthode proposée, on montre ici les résultats obtenus sur un écoulement classique autour d'un obstacle. Plus précisément, il s'agit de simuler la décomposition spinodale d'un mélange non métastable dans un écoulement de Poiseuille autour d'un obstacle (voir figure II.5.1, l'écoulement a lieu de gauche à droite). Les paramètres utilisés sont

$$\mathcal{R}e = 10, \quad \mathcal{K} = 10^{-1}, \quad \mathcal{P}e = 1000.$$

On retrouve d'une certaine façon les caractéristiques d'un mélange sous cisaillement (voir la section 4.2) : une structuration essentiellement en bandes dans la direction de l'écoulement avec des bandes plus fines aux endroits où le champ de vitesse et son gradient sont les plus importants c'est-à-dire de part et d'autre de l'obstacle, puis dans la zone centrale du canal en aval de l'obstacle.

On a vérifié sur cet exemple que la moyenne de φ dans le domaine physique était bien conservée ce qui constituait la base du choix des conditions aux limites discrètes utilisées sur l'obstacle pour le paramètre d'ordre et le potentiel chimique.

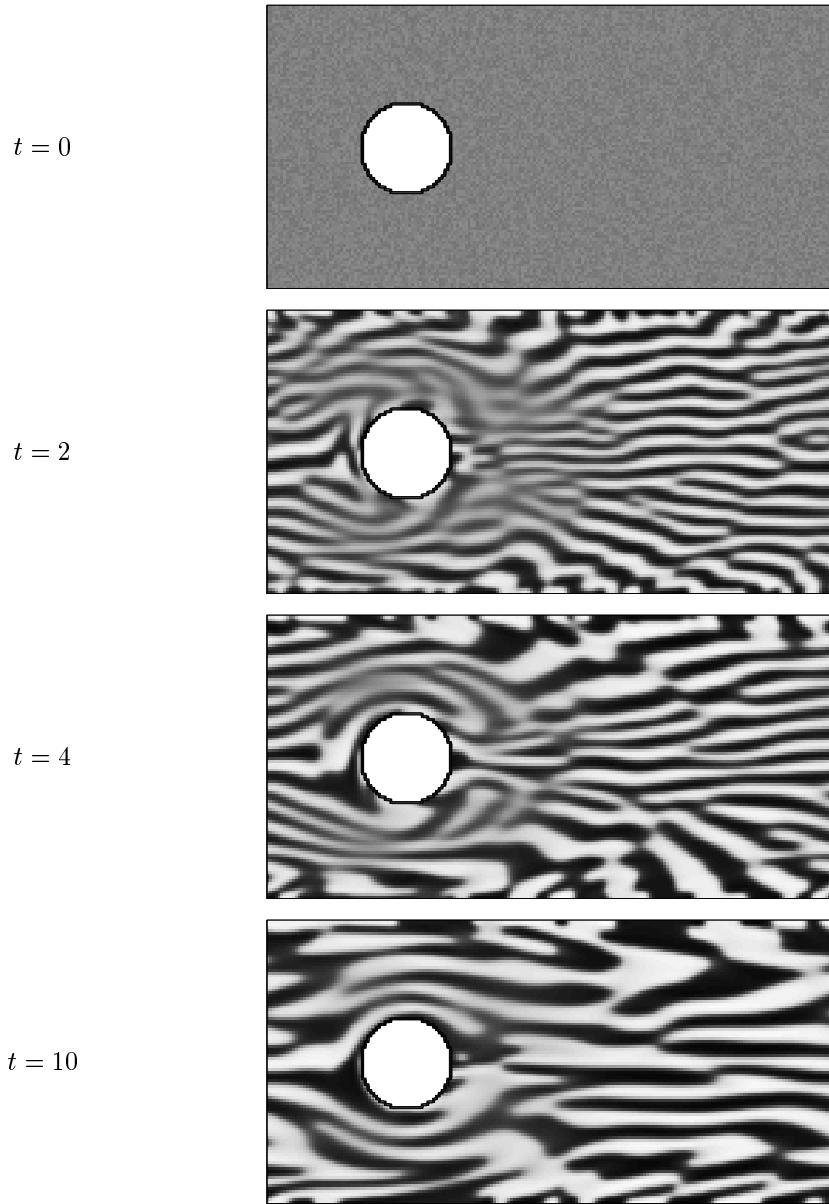


FIG. II.5.1 – Décomposition spinodale dans un écoulement autour d'un obstacle

6 Conclusions

Dans ces deux premiers chapitres nous avons dérivé rigoureusement un nouveau modèle pour l'étude des écoulements de mélanges diphasiques incompressibles. Ce modèle prend en compte aussi bien le contraste des densités, que celui des viscosités ainsi que la tension de surface à l'interface (forces capillaires). On espère ainsi pouvoir rendre compte aussi bien des phénomènes hydrodynamiques que des phénomènes chimiques qui se produisent dans ce type d'écoulements.

Pour confirmer ceci nous avons montré, dans le deuxième chapitre, que la mise en place d'un schéma aux différences finies permettait de retrouver qualitativement un certain nombre de résultats expérimentaux (voir les photos dans [24] ou dans [3], par exemple), dans des situations assez diverses : décomposition spinodale d'un polymère dans un solvant sous cisaillement, cavité entraînée, instabilité de Rayleigh-Taylor, chute d'une goutte de liquide, affleurement de bulles de gaz à la surface d'un liquide.

En fait, seule la discrétisation du terme de transport doit être particulièrement soignée si l'on veut éviter que la diffusion numérique au voisinage de l'interface ne permette plus de suivre cette interface dans les temps longs. Dans cette direction, nous avons montré que l'utilisation d'un schéma d'ordre 2 antidiiffusé et stabilisé proposé par P. Rasetarinera dans sa thèse, permettait un réel gain qualitatif. Enfin, en comparant notre modèle à celui des équations de Navier-Stokes incompressibles non-homogènes, nous avons vu que la présence du terme de Cahn-Hilliard rendait la discrétisation de l'équation de conservation de la masse (ou du paramètre d'ordre) plus aisée, le terme de Cahn-Hilliard ayant naturellement une action d'antidiiffusion qui tend à conserver l'équilibre local au voisinage de l'interface à chaque instant.

Dans une dernière partie, on montré brièvement que la méthode numérique proposée pouvait s'étendre, par une technique de domaine fictif et de pénalisation, à des calculs sur des écoulements avec obstacle ou sur des domaines non rectangles. Ceci permet d'envisager à court terme la simulation d'écoulements triphasiques avec une phase solide, comme par exemple des calculs d'écoulements diphasiques en milieu poreux à l'échelle des pores.

Bibliographie du chapitre 2

- [1] N. Alikakos, P. Bates, and G. Fusco. Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension. *Journal of Differential Equation*, 90 :pp 71–135, 1991.
- [2] P. Angot, C-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numer. Math.*, 81 :pp 497–520, 1999.
- [3] G. Cristobal Azkarate. *Etude de quelques changements structuraux dans les fluides complexes à l'équilibre et hors équilibre*. Thèse de Doctorat, CPMOH, Univ. Bordeaux 1, 2000.
- [4] P. W. Bates and P. C. Fife. The dynamics of nucleation for the Cahn-Hilliard equation. *SIAM Journal of Applied Maths*, 53 :pp 990–1008, 1993.
- [5] T. Baumberger, F. Perrot, and D. Beyssens. *Phys. Rev. A*, 46 :7636, 1992.
- [6] D. Beyssens and M. Gladamassi. *J. Phys. Lett.*, 40 :565, 1979.
- [7] F. Boyer. Mathematical study of multiphase flow under shear through order parameter formulation. *Asymptotic Analysis*, 20 :pp 175–212, 1999.
- [8] F. Boyer. Nonhomogeneous Cahn-Hilliard fluids. *Annales de l'IHP : Analyse non linéaire*, sous presse, 2001.
- [9] F. Boyer. A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows. *Computers and Fluids*, sous presse, 2001.
- [10] C. H. Bruneau and P. Rasetarinera. A finite volume method with efficient limiters for solving conservation laws. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 6 :pp 23–38, 1997.
- [11] C.H. Bruneau, P. Fabrie, and P. Rasetarinera. An accurate finite difference scheme for solving convection-dominated diffusion equations. *Internat. J. Num. Methods Fluids*, 24 :pp 169–183, 1997.
- [12] J. W. Cahn. On spinodal decomposition. *Acta. Metall.*, 9 :pp 795–801, 1961.
- [13] J. Carr, M. Gurtin, and M. Slemrod. Structured phase transitions on a finite interval. *Archive for Rational Mechanical Analysis*, 86 :pp 317–351, 1984.
- [14] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover Publications, Inc., 1961.
- [15] R. Chella and J. Vinals. Mixing of a two-phase fluid by a cavity flow. *Physical Review E*, 53 :p 3832, 1996.
- [16] A. Colin and P. Panizza. communication personnelle.
- [17] M. Fortin and R. Glowinski. *Augmented lagrangian methods : applications to the numerical solution of boundary-value problems*, volume 15 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Comp., 1983.
- [18] D. Jacqmin. Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling. *Journal of Computational Physics*, 155 :pp 96–127, 1999.
- [19] D. Jamet. *Etude des potentialités de la théorie du second gradient pour la simulation numérique directe des écoulements liquide-vapeur avec changement de phase*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, CEA Grenoble, 1998.
- [20] P. L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics : Vol. 1 Incompressible models*. Oxford Science Publications, 1996.
- [21] K. Matsuzaka, T. Koga, and T. Hashimoto. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :5441, 1998.
- [22] B. T. Nadiga and S. Zaleski. Investigations of a two-phase fluid model. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 15 :pp 885–896, 1996.
- [23] T. Ohta, H. Nozaki, and M. Doi. Computer simulations of domain growth under steady shear flow. *J. Chem. Phys.*, 93 :pp 2664–2675, 1990.
- [24] A. Onuki. Phase transitions of fluids in shear flow. *J. Phys. : Condens. Matter*, 9 :pp 6119–6157, 1997.
- [25] P. Rasetarinera. *Etude mathématique et numérique de la restauration biologique en milieu poreux*. Thèse de Doctorat, MAB, Univ. Bordeaux 1, 1995.

- [26] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS-KENT Publishing Company, 1996.
- [27] J. Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids : existence of velocity, density, and pressure. *SIAM J. Math. Anal.*, 21 :pp 1093–1117, 1990.
- [28] M. Sussman, A. S. Almgren, J. B. Bell, P. Colella, L. H. Howell, and M. L. Welcome. An adaptative level set approach for incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 148 :pp 81–124, 1999.

Deuxième partie

Etude mathématique du modèle : existence et comportement qualitatif des solutions

Introduction

Dans cette seconde partie, nous nous intéressons à l'étude théorique du modèle (II.1.1)-(II.1.5) présenté dans les deux premiers chapitres. Rappelons que les équations obtenues régissent l'évolution de quantités macroscopiques qui caractérisent en tout point la composition du mélange d'une part (paramètre d'ordre φ , potentiel chimique μ) et l'écoulement d'autre part (champ de vitesse \mathbf{v} , pression p).

Dans l'étude théorique de ce problème, plusieurs types de questions fondamentales se posent :

- **Problèmes d'existence et unicité :**

Le problème est-il bien posé en dimension 2 comme en dimension 3 ? On s'attend à l'existence globale de solutions faibles dans les deux cas mais l'existence globale de solutions fortes en dimension 3 est certainement un problème ouvert car ce résultat est déjà inconnu pour l'équation de Navier-Stokes incompressible homogène. Des résultats locaux sont tout de même envisageables.

On va voir en fait dans le chapitre 3 que si l'on se place dans le cas homogène (les deux phases ont la même densité $\rho_1^0 = \rho_2^0$), alors les résultats attendus sont vrais : existence globale de solutions faibles, existence et unicité de solutions fortes globales en 2D et locales en 3D.

Dans le cas non-homogène général ($\rho_1^0 \neq \rho_2^0$), de tels résultats restent des questions ouvertes en particulier à cause de la forte non-linéarité des équations. En revanche, si on fait l'hypothèse de faible non-homogénéité (chapitre 4), c'est-à-dire que $\rho_1^0 - \rho_2^0$ est petit devant la densité de référence $\max(\rho_1^0, \rho_2^0)$, ou encore que $\varepsilon = \frac{|\rho_1^0 - \rho_2^0|}{\max(\rho_1^0, \rho_2^0)}$ est petit devant 1, alors on prouve en effet que des solutions faibles existent pour tout temps, que des solutions plus régulières existent et sont uniques sur les mêmes temps d'existence que ceux de l'équation de Navier-Stokes homogène incompressible usuelle.

- **Problèmes qualitatifs :**

Dans le modèle présenté dans la première partie, le paramètre d'ordre φ est choisi de telle sorte que ses valeurs physiques soient comprises entre -1 et 1 . Une question de première importance est donc de s'assurer que les solutions mathématiques des équations vérifient bien cette propriété. Ce type de questions a été assez fréquemment étudié dans la littérature sur l'équation de Cahn-Hilliard [2, 4, 5].

La difficulté principale est la non-existence d'un principe du maximum pour l'opérateur *bilaplacien*, et de manière générale pour les opérateurs elliptiques du quatrième ordre [3]. Ainsi, si par exemple on choisit la mobilité $B(\varphi)$ constante égale à 1 et le potentiel de Cahn-Hilliard F polynomial, il est clair que l'on ne pourra pas montrer cette estimation L^∞ .

En fait, pour espérer pouvoir montrer ce résultat, il faut une certaine forme de dégénérescence et/ou de singularité quelque part dans l'équation. Deux cas précis sont étudiés ici : la dégénérescence (i.e. l'annulation) du coefficient de diffusion $B(\varphi)$ en $\varphi = \pm 1$, ou alors le choix d'un potentiel de Cahn-Hilliard singulier, par exemple sous sa forme logarithmique, de sorte que les dérivées de F explosent en ± 1 .

On va montrer dans le chapitre 3, qu'effectivement ces deux cas permettent de conclure sur la validité physique de la solution mathématique obtenue.

- **Problèmes asymptotiques :**

On sait expérimentalement et numériquement, que si l'on place un état homogène non métastable légèrement perturbé sous cisaillement alors la séparation des phases a lieu et la dynamique du système peut être complexe selon le taux de cisaillement (voir le chapitre 2 et [1]).

En revanche, on va montrer dans les chapitres suivants, la stabilité asymptotique des états métastables sous cisaillement. Concrètement cela signifie que, comme le confirme l'expérience, les mélanges uniformes sont stables sous cisaillement si dans les conditions de l'expérience la composition moyenne du mélange est un état métastable du potentiel chimique, ou encore mathématiquement que celui-ci soit un point de convexité locale du potentiel de Cahn-Hilliard.

- **Influence du cisaillement :**

On a observé dans le chapitre 2, que les mélanges homogènes dont la composition n'est pas un état métastable du potentiel de Cahn-Hilliard sont instables, et que sous cisaillement, l'instabilité prend la forme de bandes parallèles organisées dans le sens de l'écoulement.

Dans le chapitre 5, on se place dans le cadre physiquement raisonnable où l'épaisseur de la cellule de Couette est petite devant le rayon moyen de la cellule ce qui mathématiquement correspond à un domaine très étiré dans une direction et à un grand taux de cisaillement (d'ordre $1/\varepsilon$). On étudie dans ces conditions la persistance du caractère 1D de solutions pour le système bidimensionnel. Ces solutions 1D correspondent aux solutions "bandes" obtenues numériquement et expérimentalement.

On obtient une hiérarchie de résultats en fonction de la solution 1D de référence considérée. Celle-ci montre essentiellement que les solutions homogènes du système présentent une plus grande stabilité que les solutions "bandes" quelconques et qu'en outre parmi ces solutions homogènes, les solutions dont la composition moyenne est un état métastable du potentiel sont stables sur un temps infini.

Références

- [1] G. Cristobal Azkarate. *Etude de quelques changements structuraux dans les fluides complexes à l'équilibre et hors équilibre*. Thèse de Doctorat, CPMOH, Univ. Bordeaux 1, 2000.
- [2] H. W. Barrett and J. F. Blowey. Finite elements approximation of the Cahn-Hilliard equation with concentration dependent mobility. *Mathematics of Computation*, 68 :pp 487–517, 1999.
- [3] R. Dal Passo, H. Garcke, and G. Grün. On a fourth-order degenerate parabolic equation : global entropy estimates, existence, and qualitative behavior of solutions. *SIAM J. Math. Anal.*, 29 :pp 321–342, 1998.
- [4] A. Debussche and L. Dettori. On the Cahn-Hilliard equation with a logarithmic free energy. *Nonlinear Analysis*, 10 :pp 1491–1514, 1995.
- [5] C. Dupaix. A singularly perturbed phase field model with a logarithmic nonlinearity : Upper-semicontinuity of the attractor. *Nonlinear Analysis*, 41 :pp 725–744, 2000.

Chapitre 3

Préliminaires et étude du cas homogène

1 Rappels sur le modèle considéré

Dans ce chapitre et le suivant, le champ de vitesse sera noté simplement v . Dans ces conditions, en prenant pour simplifier les écritures tous les paramètres physiques ($\mathcal{R}e$, \mathcal{K} , et $\mathcal{P}e$) égaux à 1, le système étudié s'écrit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi - \operatorname{div} \left(\frac{B(\varphi)}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \right) \right) = 0, \quad (\text{III.1.1})$$

$$\mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi), \quad (\text{III.1.2})$$

$$\rho_\varepsilon(\varphi) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) - 2 \operatorname{div} (\eta(\varphi) D(v)) + \nabla p = \mu \nabla \varphi + \varepsilon \frac{1 - \varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \right) + \rho_\varepsilon(\varphi) g, \quad (\text{III.1.3})$$

$$\operatorname{div}(v) = 0, \quad (\text{III.1.4})$$

où la densité renormalisée est donnée par

$$\rho_\varepsilon(\varphi) = 1 + \varepsilon \left(\frac{\varphi - 1}{2} \right),$$

avec

$$\varepsilon = \frac{|\rho_1^0 - \rho_2^0|}{\max(\rho_1^0, \rho_2^0)},$$

qui représente la différence relative des densités. Nous rappelons la notation usuelle pour le tenseur des déformations $D(u) = (\nabla u + \nabla u^t)/2$ pour tout champ de vecteur u . Les conditions aux limites physiques pour ce problème sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= 0, \text{ condition de normalité de l'interface et du bord du domaine,} \\ \frac{\partial \mu}{\partial \nu} &= 0, \text{ condition de non-diffusion au travers du bord du domaine,} \end{aligned} \quad (\text{III.1.5})$$

ainsi que des conditions de type Dirichlet (ou périodicité) pour le champ de vitesse v sur lesquelles on reviendra plus tard.

Comme on l'a vu dans le premier chapitre, ce système est obtenu en écrivant les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement de chacune des deux espèces. L'existence d'une interface, c'est-à-dire d'une énergie d'échange et d'une tension de surface, est prise en compte via l'introduction d'une énergie libre thermodynamique qui dépend non seulement de la composition du mélange φ mais aussi de son gradient. Le choix d'une telle énergie est guidée par de nombreux travaux, en particulier ceux de Cahn et Hilliard [11]. Si on fait alors une étude dimensionnelle des équations, on obtient une description de l'écoulement par :

- Une équation sur le paramètre d'ordre φ (III.1.1) qui donne en tout point et à tout instant la composition du mélange. Celle-ci comporte deux termes de nature distincte, un terme de transport par le champ de vitesse moyen de l'écoulement et un terme de diffusion à travers l'interface dont le flux est proportionnel au gradient du potentiel chimique μ .
- Une équation donnant le potentiel chimique en fonction du paramètre d'ordre (III.1.2), issue directement du choix de l'énergie libre de Cahn et Hilliard.
- Une équation décrivant l'évolution du champ de vitesse moyen du mélange (III.1.3) qui n'est autre qu'une équation de Navier-Stokes non-homogène incompressible comportant un terme de forces capillaires agissant à l'interface.
- Enfin, dans les conditions de ce travail, où seuls les écoulements de deux phases incompressibles sont envisagés, il est naturel d'obtenir une contrainte usuelle d'écoulement isovolume (ou d'incompressibilité pour simplifier) pour le champ de vitesse moyen \mathbf{v} sous la forme (III.1.4).

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Dans un premier temps, on convient des notations utilisées dans ce chapitre et dans le suivant, ainsi que du cadre fonctionnel adapté à notre étude. On rappelle aussi les divers résultats dont on fait l'usage dans les démonstrations.

Dans un second temps, on s'intéresse au cadre homogène proprement dit, c'est-à-dire au système plus simple dans lequel on fait l'hypothèse que les deux phases ont la même densité. Ce système est obtenu en prenant $\varepsilon = 0$ dans (III.1.1)-(III.1.4). Plus précisément, on se consacre tout d'abord aux problèmes d'existence, d'unicité, de globalité et de régularité des solutions du système considéré, y compris quand la mobilité $B(\varphi)$ dégénère ou encore quand le potentiel de Cahn-Hilliard F est choisi singulier. Enfin, on établit le principal résultat de stabilité asymptotique des états métastables du potentiel.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude du modèle complet. On verra alors que l'hypothèse de faible inhomogénéité (en quelque sorte l'équivalent de l'hypothèse de faible compressibilité dans le cas compressible [22]) intervient de façon cruciale pour établir des résultats optimaux, en particulier des résultats d'existence globale, et même uniforme, en temps. On montrera de plus un résultat de stabilité asymptotique des états métastables dans le cadre faiblement nonhomogène, semblable à celui obtenu à la fin de ce chapitre.

2 Notations et résultats préliminaires

Tout ce qui est présenté dans cette section est commun à ce chapitre et au suivant.

• Notations classiques

Dans tout ce qui suit, Ω étant un ouvert de l'espace \mathbb{R}^d , on note $|\cdot|_p$ la norme usuelle sur l'espace $L^p(\Omega)$ des fonctions à puissance p -ième intégrable. Dans le cas $p = 2$, le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ est noté (\cdot, \cdot) . On désigne par $\|\cdot\|_s$ la norme usuelle sur l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ et par $((\cdot, \cdot))_s$ le produit scalaire sur cet espace. Enfin si d désigne la dimension de l'espace, on note $\mathbb{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^d$ et $\mathbb{H}^s(\Omega) = (H^s(\Omega))^d$, leurs normes étant toujours notées $|\cdot|_p$ et $\|\cdot\|_s$. Dans tout ce qui suit, lorsque cela n'induira aucune confusion, on ne précisera pas le domaine Ω considéré. Dans les écoulements incompressibles, la pression est toujours définie à une constante près (elle n'intervient que par son gradient dans les équations). On a donc besoin d'introduire les espaces quotients H^s/\mathbb{R} pour tout $s \geq 0$ obtenus en quotientant H^s par la relation d'équivalence

$$f \sim g \iff \exists \mu \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f = g + \mu.$$

Il est facile de voir que ces espaces sont des espaces de Banach pour la norme

$$\|f\|_{H^s/\mathbb{R}} = \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \|f + \mu\|_s.$$

Enfin, le produit intérieur de deux tenseurs σ et σ' est toujours noté

$$\sigma : \sigma' = \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,j} \sigma'_{i,j}.$$

• Domaine de l'étude et espaces fonctionnels

Les résultats exposés dans ce travail, se consacrent à l'étude particulière du système d'équations obtenu dans la première partie de la thèse, dans le cas d'un écoulement sous cisaillement. La raison en est que l'une des motivations de ce travail est l'étude de la décomposition spinodale sous cisaillement (dans un système de Couette-Taylor).

Il est clair que tous les résultats présentés ici sont encore valables si on étudie le problème dans un domaine Ω régulier avec des conditions aux limites homogènes ou non (voir les méthodes de relèvement de Hopf dans [23, 31]).

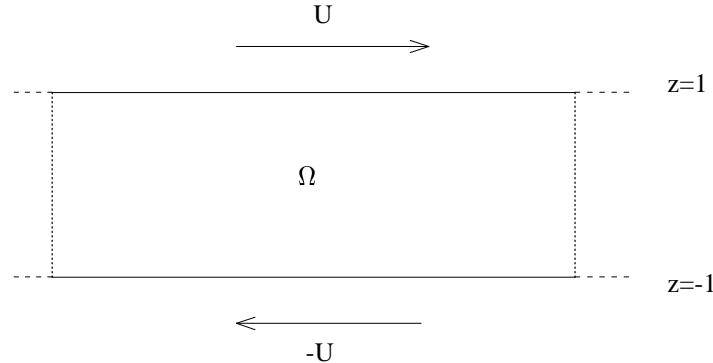
Ainsi, les énoncés et les preuves qui vont suivre, sont donnés dans le cas où le domaine considéré Ω est un canal en dimension $d = 2$ ou 3 , c'est-à-dire de la forme

$$\Omega = \prod_{i=1}^{d-1} [-L_i, L_i] \times]-1, 1[,$$

la dernière variable étant dans tous les cas notée z . Ce domaine, est une approximation d'un domaine de type "couronne" issu du système de Couette-Taylor, lorsque l'on néglige les effets de la courbure. Ceci est loisible car dans un tel système, l'épaisseur de la couronne (c'est-à-dire la différence des rayons des deux cylindres considérés) est petite devant le rayon moyen de la cellule (voir la figure II.4.5).

Ainsi, pour ce domaine d'étude, les bords $z = \pm 1$ sont des bords physiques sur lesquels on impose des conditions aux limites physiques, alors que les bords dans les directions x et y (si $d = 3$) sont purement mathématiques, les conditions imposées étant alors des conditions de périodicité.

Dorénavant, quand on dit qu'une fonction définie sur Ω est périodique en x (et y le cas échéant), cela sous-entend qu'elle est périodique de période L_1 en x et de période L_2 en y . En d'autres termes les fonctions que l'on considère sur Ω sont des fonctions définies en fait sur le produit d'un tore de dimension $d - 1$ avec l'intervalle $] -1, 1[$.



Dans le système de cisaillement, les conditions aux limites sur la vitesse ne sont pas, par nature, homogènes. On prend en effet des conditions aux limites du type

$$v = U e_x \text{ sur } \{z = 1\}, \quad v = -U e_x \text{ sur } \{z = -1\}, \quad (\text{III.2.1})$$

associées à la périodicité dans les autres directions. Les conditions aux limites sur φ et μ étant données par (III.1.5). Cependant, pour l'étude mathématique du problème, on doit introduire les conditions aux limites homogènes associées aux vraies conditions aux limites ainsi que les espaces qui en découlent. De ce fait, on introduit les conditions suivantes :

$$\varphi \text{ est périodique en } x \text{ (et } y \text{ si } d = 3\text{), et satisfait } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \{z = \pm 1\}, \quad (\text{III.2.2})$$

$$u \text{ est périodique en } x \text{ (et } y \text{ si } d = 3\text{), et satisfait } u = 0 \text{ sur } \{z = \pm 1\}. \quad (\text{III.2.3})$$

Puis, on définit les espaces adaptés à ces conditions au bord par

$$\Phi = \{\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \text{ vérifiant (III.2.2)}\},$$

$$\begin{aligned}\Phi_s &= \overline{\Phi}^{H^s(\Omega)}, \\ \mathcal{V} &= \{u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^d, \operatorname{div}(u) = 0, \text{ vérifiant (III.2.3)}\} \\ V_s &= \overline{\mathcal{V}}^{H^s(\Omega)}.\end{aligned}$$

De façon classique, les espaces V_0 et V_1 seront notés respectivement H et V . On rappelle que pour les fonctions de H , la condition au bord $u = 0$ n'a pas de sens, en revanche, on montre que ces fonctions vérifient $u \cdot \nu = 0$ (au sens des traces).

On note \mathcal{P} le projecteur orthogonal dans $L^2(\Omega)$ sur l'espace H .

• **Opérateur de Stokes**

On rappelle (voir [31]) que pour toute fonction u dans l'espace V_2 , il existe un unique couple $(Au, \pi) \in H \times (H^1/\mathbb{R})$ tel que

$$Au = -\Delta u + \nabla \pi,$$

l'opérateur $u \mapsto Au$ est un opérateur non-borné dans H de domaine V_2 appelé l'opérateur de Stokes. De plus, il existe des constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ telles que pour tout $u \in V_2$, on a

$$\begin{cases} C_1 \|u\|_2 \leq |Au|_2 \leq C_2 \|u\|_2, \\ \|\pi\|_{H^1/\mathbb{R}} \leq C_3 \|u\|_2, \\ |\pi|_{L^2/\mathbb{R}} \leq C_3 \|u\|_1. \end{cases} \quad (\text{III.2.4})$$

• **Inégalités fondamentales**

Tout au long de ce travail nous utilisons les inégalités classiques de Sobolev que l'on ne rappelle pas ici.

On rappelle les inégalités de Poincaré et de Korn [24] : il existe des constantes $C_4, C_5 > 0$ telles que pour tout $u \in V$, on a

$$\|u\|_1 \leq C_4 |\nabla u|_2, \quad (\text{III.2.5})$$

$$|\nabla u|_2 \leq C_5 |D(u)|_2. \quad (\text{III.2.6})$$

De plus, si pour toute fonction f intégrable, on note $m(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f$ sa moyenne, alors [32] il existe une constante $C_6 > 0$ telle que

$$\begin{cases} \|\varphi - m(\varphi)\|_1 \leq C_6 |\nabla \varphi|_2, \forall \varphi \in \Phi_1, \text{ (inégalité de Poincaré moyenne)} \\ \|\varphi - m(\varphi)\|_{s+2} \leq C_6 \|\Delta \varphi\|_s, \forall s \geq 0, \forall \varphi \in \Phi_{s+2} \text{ (régularité du laplacien).} \end{cases} \quad (\text{III.2.7})$$

Grâce à ces dernières inégalités, on utilisera de façon récurrente des inégalités du type

$$\|\nabla \varphi\|_1 = \|\nabla(\varphi - m(\varphi))\|_1 \leq \|\varphi - m(\varphi)\|_2 \leq C_6 |\Delta \varphi|_2, \forall \varphi \in \Phi_2.$$

Enfin, en dimension $d = 3$, on utilisera les deux inégalités d'Agmon [1]

$$\begin{cases} |f|_{\infty} \leq C_7 \|f\|_1^{\frac{1}{2}} \|f\|_2^{\frac{1}{2}}, \text{ pour tout } f \in H^2, \\ |f|_{\infty} \leq C_7 |f|_2^{\frac{1}{2}} \|f\|_3^{\frac{1}{2}}, \text{ pour tout } f \in H^3. \end{cases} \quad (\text{III.2.8})$$

Enfin, rappelons les propriétés de la forme trilinéaire naturellement associée à la formulation faible des équations de Navier-Stokes [30, 31].

Lemme III.2.1

En dimension $d \leq 3$ et pour $u, v, w \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, on définit

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j,$$

alors b possède les propriétés suivantes

$$b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0, \quad \forall u, v, w \in V, \quad (\text{III.2.9})$$

et

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq C\|u\|_1\|v\|_1\|w\|_1 \quad \forall u, v, w \in \mathbb{H}^1(\Omega), \\ |b(u, v, w)| &\leq C|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|_1^{\frac{1}{2}}|v|^{\frac{1}{2}}\|v\|_1^{\frac{1}{2}}\|w\|_{\frac{d}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{H}^1(\Omega), \forall w \in V_{\frac{d}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.2.10})$$

Dans la suite, on note $\mathcal{B}(u, v)$ la forme linéaire continue sur V définie par $\mathcal{B}(u, v).w = b(u, v, w)$. Le résultat précédent montre que \mathcal{B} est bilinéaire et continue de $V \times V$ à valeurs dans V' .

- **Conservation de la moyenne pour l'équation de Cahn-Hilliard**

L'équation de Cahn-Hilliard, et plus généralement, l'équation (III.1.1) associée des conditions aux limites (III.1.5), vérifie la propriété fondamentale suivante.

Lemme III.2.2

Toute solution φ de (III.1.1) vérifiant (III.1.5), avec un champ de vitesse $v(t) \in H$, satisfait

$$\frac{\partial}{\partial t}m(\varphi) = 0,$$

ce qui implique

$$m(\varphi(t)) = m(\varphi_0), \quad \text{tant que } \varphi \text{ existe.}$$

La preuve est immédiate en choisissant la fonction constante égale à 1 comme fonction test pour l'équation (III.1.1). Dorénavant, on utilisera systématiquement cette propriété dans les diverses estimations, sans toujours la rappeler explicitement.

- **Solutions stationnaires**

On peut remarquer que, si on suppose que g est le gradient d'un potentiel \mathcal{G} , alors on peut construire une famille de solutions stationnaires de (III.1.1)-(III.1.4)

$$\varphi^\infty = \omega, \quad v_\infty^U = Uze_x, \quad (\text{III.2.11})$$

où ω est une constante donnée. Dans la suite, on va s'intéresser (à la fois dans le cadre homogène et non-homogène) à la stabilité asymptotique de telles solutions. De plus, l'introduction de ces solutions stationnaires est nécessaire pour pouvoir énoncer précisément les résultats qui vont être prouvés par la suite.

- **Quelques résultats d'analyse fonctionnelle**

Dans la suite, on utilisera très souvent des résultats basiques d'interpolation Hilbertienne, que l'on peut par exemple trouver dans [1, 27], et que l'on rappelle très brièvement ci-dessous avec des notations un peu différentes.

Soient X et Y deux espaces de Hilbert séparables. On suppose que X s'injecte de façon continue et dense dans Y , ce que l'on note pour simplifier $X \subset Y$. Alors il existe un opérateur non borné Λ dans Y de domaine X , autoadjoint, positif, tel que la norme de X soit équivalente à la norme du graphe sur $D(\Lambda) = X$, c'est-à-dire

$$\|u\|_X \sim (\|u\|_Y^2 + \|\Lambda u\|_Y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose alors pour $0 \leq \theta \leq 1$

$$[X, Y]_\theta = [Y, X]_\theta = D(\Lambda^\theta),$$

que l'on munit de la norme du graphe. Cet espace et sa topologie ne dépendent que de X et de Y et pas de l'opérateur Λ choisi (qui n'est pas en général unique). Les espaces ainsi définis sont appelés *espaces interpolés* entre X et Y . Le lemme suivant récapitule les propriétés des espaces interpolés dont on aura besoin dans la suite.

Lemme III.2.3

– Pour tout X, Y, θ vérifiant les hypothèses ci-dessus, on a

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq \|u\|_Y^{1-\theta} \|u\|_X^\theta.$$

– Soit Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^d , $s_1 \leq s_2$ deux réels positifs et $\theta \in [0, 1]$, on a

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Omega).$$

On rappelle de plus les résultats suivants [27, 29].

Lemme III.2.4

Soient $X \subset Y \subset Z$ trois espaces de Hilbert, tels que l'injection de X dans Y est compacte.

i) Pour tout $p_1, p_2 \in]1, +\infty[$ l'injection

$$\{f \in L^{p_1}(0, T; X), \frac{df}{dt} \in L^{p_2}(0, T; Z)\} \hookrightarrow L^{p_1}(0, T; Y)$$

est bien définie et compacte.

ii) Pour tout $p > 1$, l'injection

$$\{f \in L^\infty(0, T; X), \frac{df}{dt} \in L^p(0, T; Z)\} \hookrightarrow C([0, T], Y)$$

est bien définie et compacte.

iii) On a l'injection continue

$$\{f \in L^2(0, T; X), \frac{df}{dt} \in L^2(0, T; Y)\} \hookrightarrow C(0, T; [X, Y]_{\frac{1}{2}})$$

• Lemme de Gronwall uniforme

On rappelle pour terminer l'énoncé et la démonstration du lemme de Gronwall uniforme (voir [32]), qui permet d'obtenir des estimations uniformes en temps sur les solutions fortes du système d'équations considéré.

Lemme III.2.5

Soient a, b et y trois fonctions continues et positives définies sur $[0, +\infty[$. On suppose que y est dérivable et vérifie pour tout $t \geq 0$

$$y'(t) \leq a(t) + b(t)y(t).$$

On suppose de plus qu'il existe trois constantes C_1, C_2, C_3 telles que pour tout $t \geq 0$ on ait

$$\int_t^{t+1} a(s)ds \leq C_1, \quad \int_t^{t+1} b(s)ds \leq C_2, \quad \text{et} \quad \int_t^{t+1} y(s)ds \leq C_3.$$

Alors, pour tout $t \geq 0$, on a l'estimation

$$y(t) \leq (\max(y(0), C_3) + C_1)e^{C_2}.$$

Preuve :

Tout d'abord, pour $t \leq 1$, le lemme de Gronwall nous fournit immédiatement

$$y(t) \leq \left(y(0) + \int_0^1 a(s)ds \right) e^{\int_0^t b(s)ds} \leq (y(0) + C_1)e^{C_2}.$$

Supposons maintenant $t > 1$, et appliquons le lemme de Gronwall sur l'intervalle $[s, t]$ où s est tel que $s \leq t \leq s + 1$. Il vient

$$y(t) \leq \left(y(s) + \int_s^{s+1} a(u)du \right) e^{\int_s^t b(u)du} \leq (y(s) + C_1)e^{C_2}.$$

Cette dernière inégalité est valable pour tout s tel que $t - 1 \leq s \leq t$. On peut donc l'intégrer par rapport à s sur l'intervalle $[t - 1, t]$, de sorte qu'on ait

$$y(t) \leq \left(\int_{t-1}^t y(s) ds + C_1 \right) e^{C_2} \leq (C_3 + C_1) e^{C_2}.$$

On obtient le résultat annoncé en combinant les inégalités obtenues pour $t \leq 1$ et pour $t \geq 1$. ■

3 Résultats principaux dans le cadre homogène

Maintenant que les préliminaires sont établis, on va se consacrer jusqu'à la fin de ce chapitre, exclusivement au problème homogène, c'est-à-dire que l'on considère des écoulements de deux fluides (ou phases) de mêmes densités. Dans ces conditions, le système étudié devient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi - \operatorname{div}(B(\varphi) \nabla \mu) = 0 \quad (\text{III.3.1})$$

$$\mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi) \quad (\text{III.3.2})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v - 2 \operatorname{div}(\eta(\varphi) D(v)) + \nabla p = \mu \nabla \varphi \quad (\text{III.3.3})$$

$$\operatorname{div}(v) = 0 \quad (\text{III.3.4})$$

$$v(0) = v_0 \text{ et } \varphi(0) = \varphi_0 \quad (\text{III.3.5})$$

muni des conditions de périodicité dans les directions x et y et des conditions aux limites (III.1.5),(III.2.1) sur les bords physiques du domaine. Remarquons que l'on a supprimé le terme source g dans le second membre de (III.3.3), car celui-ci est généralement issu d'un potentiel $g = \nabla \mathcal{G}$ et donc peut être incorporé dans le gradient de pression. Dans tous les cas le mouvement est engendré par les conditions aux limites non homogènes de cisaillement.

Dans cette section, on définit les notions de solutions faibles et fortes pour le problème (III.3.1)-(III.3.5), et on énonce les divers résultats obtenus.

3.1 Définitions

Définition III.3.1

Soient $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + H$, $\varphi_0 \in \Phi_1$ donnés. On dit que (φ, v) est une solution faible de (III.3.1)-(III.3.5) sur $[0, T[$ ($0 < T \leq +\infty$), si

– *v et φ satisfont*

$$\begin{aligned} v - v_\infty^U &\in L^\infty(0, T; H) \cap L_{loc}^2(0, T; V) \cap C^0([0, T[; V_{\frac{d-2}{4}}')), \\ \varphi &\in L^\infty(0, T; \Phi_1) \cap L_{loc}^2(0, T; \Phi_3) \cap C^0([0, T[; \Phi_1]). \end{aligned}$$

– *Si on pose*

$$\mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi) \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[\times \Omega), \quad (\text{III.3.6})$$

alors μ satisfait

$$\mu \in L_{loc}^2(0, T; \Phi_1).$$

– *On a les conditions initiales*

$$v(0) = v_0, \text{ et } \varphi(0) = \varphi_0.$$

– *Pour tout w dans V ,*

$$\frac{d}{dt}(v, w) + b(v, v, w) + 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi) D(v) : D(w) = - \int_{\Omega} (w \cdot \nabla \mu) \varphi \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[). \quad (\text{III.3.7})$$

– Pour tout ψ dans Φ_1 ,

$$\frac{d}{dt}(\varphi, \psi) + \int_{\Omega} B(\varphi) \nabla \mu \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega} (v \cdot \nabla \psi) \varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T]). \quad (\text{III.3.8})$$

Les solutions fortes sont cherchées dans les espaces suivants.

Définition III.3.2

Soient $U > 0$, $v_0 \in v_{\infty}^U + V$, $\varphi_0 \in \Phi_2$, on dit que (φ, v) est une solution forte de (III.3.1)-(III.3.5) sur $[0, T[$, si (φ, v) est une solution faible sur $[0, T[$ ($0 < T \leq +\infty$) et si de plus on a

$$\begin{aligned} v - v_{\infty}^U &\in L^{\infty}(0, T; V) \cap L_{loc}^2(0, T; V_2) \cap C^0([0, T[; V), \\ \varphi &\in L^{\infty}(0, T; \Phi_2) \cap L_{loc}^2(0, T; \Phi_4) \cap C^0([0, T[; \Phi_2]). \end{aligned}$$

Remarque III.3.1

Les fonctions de $H^2(\Omega)$ étant continues sur $\overline{\Omega}$, toute solution forte φ est en fait continue sur $[0, T[\times \overline{\Omega}$.

Dans le cas dégénéré que l'on va considérer plus loin (c'est-à-dire que l'on autorise la mobilité $B(\varphi)$ à s'annuler pour certaines valeurs de φ), on pourra aussi admettre que la fonction F (ou une de ses dérivées) soit singulière aux points où B s'annule. Dans ce cadre la définition III.3.1 peut perdre son sens, ainsi si l'on suppose seulement que BF'' est bornée, on peut définir une classe un peu plus faible de solutions plus adaptée au problème dégénéré.

Définition III.3.3

Soient $U > 0$, $v_0 \in v_{\infty}^U + H$, $\varphi_0 \in \Phi_1$ donnés. On dit que (φ, v) est une solution en un sens très faible du problème (III.3.1)-(III.3.5) sur $[0, T[$ ($0 < T \leq +\infty$), si

– v et φ satisfont

$$\begin{aligned} v - v_{\infty}^U &\in L^{\infty}(0, T; H) \cap L_{loc}^2(0, T; V) \cap C^0([0, T[; V_{\frac{d-2}{4}}'), \\ \varphi &\in L^{\infty}(0, T; \Phi_1) \cap L_{loc}^2(0, T; \Phi_2) \cap C^0([0, T[; \Phi_{\frac{1}{2}})). \end{aligned}$$

– On a les conditions initiales

$$v(0) = v_0 \text{ et } \varphi(0) = \varphi_0.$$

– Pour tout w dans V ,

$$\frac{d}{dt}(v, w) + b(v, v, w) + 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi) D(v) : D(w) = -\alpha^2 \int_{\Omega} (w \cdot \nabla \varphi) \Delta \varphi \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T]), \quad (\text{III.3.9})$$

– Pour tout ψ dans V_3 ,

$$\frac{d}{dt}(\varphi, \psi) + \alpha^2 \int_{\Omega} \Delta \varphi \operatorname{div}(B(\varphi) \nabla \psi) + \int_{\Omega} B(\varphi) F''(\varphi) \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega} (v \cdot \nabla \psi) \varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T]). \quad (\text{III.3.10})$$

Remarque III.3.2

Dans cette dernière formulation, le potentiel chimique μ n'apparaît plus. En particulier dans l'équation (III.3.9) on a remplacé $\mu \nabla \varphi$ par $-\alpha^2 \Delta \varphi \nabla \varphi$ dans le second membre, car le terme $F'(\varphi) \nabla \varphi$ est le gradient de $F(\varphi)$ et peut donc être inclus dans le gradient de pression, ce dernier n'étant pas explicitement présent dans la formulation faible grâce à la contrainte de divergence nulle sur les fonctions test.

3.2 Enoncés des résultats

Nous avons vu dans le chapitre 1 que l'hypothèse physique fondamentale pour le potentiel de Cahn-Hilliard F , quand on est en présence d'une séparation de phases, est qu'il doit posséder une forme en double puits, chacun d'entre eux représentant les deux phases du mélange. On trouve essentiellement dans la littérature physique [13, 16, 20] des expressions logarithmiques du type

$$F(x) = \theta_c(1 - x^2) + \theta \left((1 + x) \log(1 + x) + (1 - x) \log(1 - x) \right),$$

ou bien, quand la température est proche de la température critique, une expression polynomiale du type

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2},$$

comme illustré dans la figure I.2.1.

Dans toute la suite de ce travail, on s'efforce de faire des hypothèses sur le potentiel F qui rentrent dans ce cadre physique. Le cas des potentiels polynomiaux est bien sûr le plus simple, cependant on montre comment traiter aussi le cas logarithmique.

En ce qui concerne la mobilité $B(\varphi)$, une des difficultés mathématiques est que celle-ci peut éventuellement dégénérer, c'est-à-dire s'annuler pour les valeurs critiques $\varphi = \pm 1$, un choix physiquement raisonnable étant [14, 18].

$$B(x) = (1 - x^2)^r, r \geq 0.$$

On montre par la suite que l'on peut tout de même obtenir des résultats dans ce cadre, et même préciser les résultats du cadre non dégénéré par l'obtention d'une estimation L^∞ sur φ qui nous assure que la solution obtenue prend des valeurs physiquement admissibles.

Désormais, les fonctions B et η sont supposées, au moins localement Lipschitziennes sur \mathbb{R} . On suppose de plus, que la viscosité vérifie : il existe $\eta_1, \eta_2 > 0$ tels que

$$\eta_1 \leq \eta(x) \leq \eta_2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.2.1 Cas non-dégénéré

On suppose ici, en plus des hypothèses générales précédentes, que

$$\exists B_1, B_2 > 0, B_1 \leq B(x) \leq B_2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.3.11})$$

De plus, on suppose que la fonction F vérifie les hypothèses suivantes

$$F \text{ est de classe } C^2, \text{ et } F \geq 0, \quad (\text{III.3.12})$$

$$\begin{aligned} \exists F_1, F_2 > 0 \text{ telles que } |F'(x)| \leq F_1|x|^p + F_2, |F''(x)| \leq F_1|x|^{p-1} + F_2, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{où } 1 \leq p \leq 3 \text{ si } d = 3 \text{ et } 1 \leq p < +\infty \text{ si } d = 2 \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

$$\begin{aligned} \forall \gamma \in \mathbb{R}, \exists F_3(\gamma) > 0, F_4(\gamma) \geq 0 \text{ telles que,} \\ (x - \gamma)F'(x) \geq F_3(\gamma)F(x) - F_4(\gamma), \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.14})$$

$$\exists F_5 \geq 0 \text{ telle que } F''(x) \geq -F_5, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.3.15})$$

Remarque III.3.3

- Comme nous l'avons vu, les fonctions F physiquement admissibles sont toujours minorées de sorte que l'on peut supposer en toute généralité $F \geq 0$, car ajouter une constante au potentiel F ne change pas les équations.

- Il est clair que toute fonction polynomiale de degré pair pour $d = 2$, ou de degré 4 pour $d = 3$, avec un coefficient dominant strictement positif satisfait ces hypothèses. L'équation de Cahn-Hilliard est habituellement étudiée avec de telles non linéarités dans la littérature [32].
- L'hypothèse (III.3.14) est satisfaite par exemple par toute fonction convexe en prenant $F_3(\gamma) = 1$ et $F_4(\gamma) = F(\gamma)$. Cependant les potentiels de Cahn-Hilliard que l'on considère ont typiquement une structure en double puits et sont évidemment non convexes. Ainsi, cette hypothèse doit être vue comme une généralisation d'une propriété de convexité. On verra que c'est cette hypothèse qui permet d'obtenir les estimations uniformes en temps, et de lire dans les estimations en quoi la convexité (ou la non-convexité) de F intervient (cf. les résultats de stabilité asymptotique qui suivent). Il est facile de voir que les potentiels de Cahn-Hilliard polynomiaux classiquement considérés dans la littérature vérifient cette hypothèse.
- Comme nous le verrons dans la démonstration des théorèmes de stabilité asymptotique, il est important de prouver les théorèmes d'existence et les estimations d'énergie avec des non-linéarités plus générales que les fonctions polynomiales, c'est la raison pour laquelle on a introduit ces hypothèses originales.

Théorème III.3.1 (Existence de solutions faibles globales)

Etant donnés $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + H$, $\varphi_0 \in \Phi_1$, si B satisfait (III.3.11) et F satisfait (III.3.12)-(III.3.15) alors il existe une solution faible (v, φ) à (III.3.1)-(III.3.5) au sens de la définition III.3.1.

Pour prouver l'existence de solutions plus régulières, on doit supposer

$$B \text{ et } \eta \text{ sont de classe } C^1 \text{ et } B', \eta' \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}, \quad (\text{III.3.16})$$

$$F \text{ est de classe } C^3 \text{ et } \exists F_6 > 0, |F'''(x)| \leq F_6(1 + |x|^q), \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{III.3.17})$$

où $q < 3$ si $d = 3$ et $q < +\infty$ si $d = 2$.

Théorème III.3.2 (Solutions fortes)

Etant donnés $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + V$, $\varphi_0 \in \Phi_2$, si B satisfait (III.3.11) et (III.3.16), et F satisfait (III.3.12)-(III.3.15) et (III.3.17), alors

- Si $d = 2$, il existe une unique solution forte globale de (III.3.1)-(III.3.5) sur \mathbb{R}^+ .
- Si $d = 3$, il existe $T_0(v_0, U, \varphi_0) > 0$ et une unique solution forte de (III.3.1)-(III.3.5) sur $[0, T_0[$.

3.2.2 Cas non-dégénéré avec potentiel singulier

Dans ce paragraphe, on veut montrer l'existence de solutions faibles au problème (III.3.1)-(III.3.5) dans le cas d'une mobilité $B(\varphi)$ non-dégénérée mais où le potentiel de Cahn-Hilliard est singulier, c'est-à-dire typiquement de la forme logarithmique suivante [4, 15, 17]

$$F(\varphi) = \theta \left((1 + \varphi) \log(1 + \varphi) + (1 - \varphi) \log(1 - \varphi) \right) + \theta_c(1 - \varphi^2),$$

où θ est la température et θ_c la température critique, de sorte que pour $\theta < \theta_c$ ce potentiel n'est pas convexe et admet la forme en double puits caractéristique des potentiels de Cahn-Hilliard (figure I.2.1).

Le résultat que l'on obtient dans ce cadre (et même pour des potentiels F un peu plus généraux) est le suivant :

Théorème III.3.3

Supposons que B satisfait (III.3.11) et que F est défini comme ci-dessus. Etant donné $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + H$, $\varphi_0 \in \Phi_1$ tel que $|\varphi_0|_\infty \leq 1$ et $|m(\varphi_0)| < 1$, alors il existe une solution faible (v, φ) à (III.3.1)-(III.3.5) sur \mathbb{R}^+ au sens de la définition III.3.1.

Cette solution vérifie de plus

$$|\varphi(t, x)| < 1 \text{ pour presque tout } (t, x) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega,$$

et

$$F'(\varphi) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)),$$

ce qui donne un sens à la définition III.3.1.

L'obtention de l'estimation $|\varphi(t, x)| < 1$ est très importante dans ce cadre, elle justifie la validité physique de telles solutions. On rappelle en effet que par construction (voir le chapitre 1), les valeurs physiques de φ sont celles comprises entre -1 et 1 .

3.2.3 Cas dégénéré

Dans ce cas la situation est assez différente, les solutions que l'on peut espérer obtenir sont nécessairement plus faibles que dans le cas non dégénéré. En revanche, comme on va le voir dans la suite, on peut à nouveau montrer dans ces conditions que si la donnée initiale φ_0 prend ses valeurs dans l'intervalle physiquement raisonnable $[-1, 1]$, alors pour presque tout temps, $\varphi(t)$ prend aussi ses valeurs dans cet intervalle. Pour l'étude menée dans ce cadre, nous suivons la méthode utilisée dans [18] pour l'équation de Cahn-Hilliard avec mobilité dégénérée.

Ainsi, supposons que B est une fonction positive de classe C^1 définie sur $[-1, 1]$ et telle que

$$x \in [-1, 1] \text{ et } B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}. \quad (\text{III.3.18})$$

Pour des raisons techniques (ne serait-ce que pour formuler la définition précise des solutions faibles que nous considérons), on doit étendre la fonction B à \mathbb{R} en posant $B(x) = 0$ si $|x| > 1$. De la même façon, les bonnes hypothèses sur le potentiel F sont un peu différentes dans ce cas, on suppose que

$$F = F_1 + F_2,$$

où F_1 est une fonction convexe définie sur $] -1, 1 [$, de classe C^2 telle que le produit BF_1'' soit continu sur $[-1, 1]$, et F_2 une fonction de classe C^2 sur $[-1, 1]$, celle-ci étant étendue à \mathbb{R} de sorte que $\|F_2''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq F_0$. On suppose aussi que

$$F_1'' \text{ est croissante au voisinage de } x = 1 \text{ et décroissante au voisinage de } x = -1. \quad (\text{III.3.19})$$

Enfin, pour établir les estimations nécessaires à l'obtention de solutions à ce problème, on doit introduire une fonction G définie sur $] -1, 1 [$ par

$$G(0) = 0, G'(0) = 0, G''(x) = B(x)^{-1}, \quad \forall x \in] -1, 1 [.$$

On peut maintenant énoncer le résultat obtenu sur l'existence de solutions faibles dans le cas dégénéré et sur la validité physique des solutions de ce problème.

Théorème III.3.4

Sous les hypothèses (III.3.11),(III.3.18)-(III.3.19), pour tout $0 < T < +\infty$, $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + H$ et $\varphi_0 \in \Phi_1$, tel que $|\varphi_0|_\infty \leq 1$ et

$$\int_\Omega \left(F(\varphi_0) + G(\varphi_0) \right) < +\infty, \quad (\text{III.3.20})$$

il existe une solution faible au problème (III.3.1)-(III.3.5) sur $[0, T [$ au sens de la définition III.3.3. En outre, elle satisfait l'estimation qualitative

$$|\varphi(t, x)| \leq 1 \text{ pour presque tout } (t, x) \in]0, T [\times \Omega.$$

Si on suppose de surcroît que $B'(1) = 0$ et $B'(-1) = 0$, alors pour presque tout $t \in [0, T [$ l'ensemble

$$\{x \in \Omega, |\varphi(t, x)| = 1\}$$

est de mesure nulle.

Remarque III.3.4

1) Si $B'(-1) \neq 0$ et $B'(1) \neq 0$ alors on peut voir aisément que G est bornée sur $[-1, 1]$ et que, comme BF'' est supposée être bornée elle-aussi, la fonction F est elle-même bornée sur $[-1, 1]$. Dans ce cas, (III.3.20) est satisfaite pour toute donnée initiale telle que $|\varphi_0|_\infty \leq 1$. C'est par exemple le cas si nous prenons

$$B(x) = 1 - x^2,$$

et

$$F(x) = \theta_c(1 - x^2) + \theta \left((1+x) \log(1+x) + (1-x) \log(1-x) \right).$$

Dans les autres cas, la condition (III.3.20) est non triviale et impose essentiellement que φ_0 soit suffisamment éloignée des valeurs critiques -1 et 1 . Un cas important dans lequel cette hypothèse est satisfaite est celui où $|\varphi_0|_\infty < 1$.

- 2) On rappelle une fois de plus l'importance de l'estimation L^∞ obtenue dans ce théorème qui prouve que la solution obtenue a un sens physique.
- 3) Si B est suffisamment dégénérée, alors l'hypothèse (III.3.20) nous impose que $\{x, |\varphi(t, x)| = 1\}$ soit de mesure nulle à l'instant initial, et alors le dernier point du théorème implique que ceci est encore vrai pour tout temps. D'un point de vue physique, on peut dire que si l'état initial ne contient aucune zone où l'une des phases est pure, alors le mélange ne contiendra jamais de zones de phase pure.

3.2.4 Comportement qualitatif

Si on considère l'équation de Cahn-Hilliard seule, quelques résultats sont connus sur le comportement asymptotique des solutions. En particulier, l'existence d'une fonction de Lyapunov et d'attracteurs globaux pour cette équation est montrée dans [15, 32].

Dans le cas monodimensionnel ($d = 1$), quelques études [5, 12] existent sur les solutions stationnaires de l'équation de Cahn-Hilliard. On peut par exemple étudier les extrema locaux de l'énergie

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi|^2 + F(\varphi) \right),$$

sous la contrainte de masse imposée. Dans ce cas, on trouve dans [5] l'étude de la stabilité linéaire de telles solutions. Ainsi, il est prouvé que pour une composition moyenne du mélange ω fixée (métastable), les solutions stationnaires monotones sont

- i) la solution constante qui est localement linéairement stable,
- ii) une solution de type couche limite qui est linéairement instable,
- iii) une solution de type couche de transition qui est globalement linéairement stable.

C'est donc la solution où les deux phases sont séparées par une interface de taille α qui est la plus stable pour ce système.

Le théorème qui va suivre s'intéresse au comportement des solutions de type i) sous cisaillement. Les solutions de type ii) et iii) sont assez spécifiques au cas monodimensionnel et l'étude qui suit ne permet pas de conclure sur la stabilité bidimensionnelle de telles solutions non constantes. On s'intéressera dans le chapitre 5 à l'étude de la persistance de petites perturbations de telles solutions monodimensionnelles pour le système bidimensionnel de grand cisaillement dans un canal très étiré.

Même si quelques solutions stationnaires de l'équation de Cahn-Hilliard sont connues en dimension 2 ou 3 [33, 34, 35], très peu de résultats de stabilité sont connus pour l'instant (voir [3]). De plus, on peut voir que si l'on considère l'équation de Cahn-Hilliard avec un terme de transport supplémentaire $v \cdot \nabla \varphi$ où $v(t, x)$ est un champ de vitesse régulier et fixé, alors les résultats cités précédemment en dimension $d = 1$ ne subsistent pas car il n'existe plus de fonction de Lyapunov pour cette équation.

Pour le modèle couplé que l'on étudie ici (III.3.1)-(III.3.5), on est capable de montrer la stabilité de la solution stationnaire obtenue en prenant un paramètre d'ordre φ constant égal à ω , et un champ de vitesse de cisaillement $v = v_\infty^U$ sous l'hypothèse que le cisaillement U n'est pas trop grand et que la composition moyenne du mélange ω est un état métastable du potentiel F [5, 20], c'est-à-dire que F est convexe au voisinage de ω .

Théorème III.3.5

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\omega \in I$ donné. On suppose que B est une fonction positive de classe C^1 définie sur I , F une fonction de classe C^3 définie sur I . Alors, pour $U \geq 0$ assez petit, la solution stationnaire de (III.3.1)-(III.3.5)

donnée par $\varphi_\infty = \omega$ et $v_\infty^U = Uze_x$ est asymptotiquement stable sous les conditions

$$B(\omega) > 0, \quad (\text{III.3.21})$$

$$F''(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ dans un voisinage de } \omega. \quad (\text{III.3.22})$$

Plus précisément, pour tout $\beta > 0$ assez petit, et pour toutes données $U \geq 0, v_0 \in v_\infty^U + V, \varphi_0 \in \Phi_2$ satisfaisant

$$m(\varphi_0) = \omega, |U| \leq \beta, \|v_0\|_1 \leq \beta, \|\varphi_0 - m(\varphi_0)\|_2 \leq \beta,$$

il existe une unique solution forte globale sur \mathbb{R}^+ du problème (III.3.1)-(III.3.5) au sens de la définition III.3.2. Celle-ci vérifie de plus

$$\|v - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V)} + \|\varphi - \varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_2)} \leq h(\beta),$$

où $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue telle que $h(0) = 0$. Enfin, si β est assez petit, on a quand $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\longrightarrow \varphi_\infty \text{ dans } \Phi_s \text{ pour tout } 0 \leq s < 2, \\ v(t) - v_\infty^U &\longrightarrow 0 \text{ dans } V_s \text{ pour tout } 0 \leq s < 1. \end{aligned}$$

Remarque III.3.5

1) Ce théorème est prouvé dans les deux cas $d = 2$ et $d = 3$, et de plus on accepte que la fonction B dégénère loin de ω et que la fonction F soit seulement définie sur un voisinage de ω . Ainsi, ce théorème complète le résultat des théorèmes III.3.2 et III.3.4 car en général, on ne peut ni prouver la globalité des solutions fortes dans le cas tridimensionnel, ni l'existence de solutions fortes dans le cas dégénéré.

2) Typiquement, ce théorème s'applique pour

$$B(x) = (1 - x^2)^r, r \geq 0, \text{ et } F(x) = \theta_c(1 - x^2) + \theta \left((1 + x) \log(1 + x) + (1 - x) \log(1 - x) \right),$$

pour ω dans $] -1, -1 + \delta [$ ou dans $] 1 - \delta, 1 [$ pour un certain $\delta > 0$ assez petit. Ainsi, le mélange homogène où l'une des phases est prédominante, est stable. On retrouve ici le fait connu [25] que des petites inclusions d'une phase dans une autre ne sont pas thermodynamiquement stable et ne peuvent subsister.

3) Supposons que B soit constant [13, 15] et que l'épaisseur de l'interface n'est pas trop petite (par exemple si on est proche du point critique), c'est-à-dire [13, 16] que l'on a

$$-F''(x) \leq \alpha^2 C, \text{ pour tout } x \in I, \quad (\text{III.3.23})$$

où C est une constante connue, ne dépendant que du domaine Ω . On peut alors aisément déduire des estimations données dans la preuve de ce théorème (section 4.6) que pour $U > 0, \varphi_0$ et v_0 donnés non nécessairement petits et sans supposer la métastabilité de $m(\varphi_0)$, si une solution forte globale (φ, v) du problème existe (dans le cas $d = 2$ par exemple), alors on a

$$\varphi(t) - m(\varphi_0) \rightarrow 0 \text{ dans } \Phi_s \text{ pour tout } 0 \leq s < 2.$$

Ceci traduit le fait que si la taille caractéristique de l'interface est plus grande que la taille de Ω (au voisinage du point critique), alors une interface ne peut se développer dans le domaine. Ainsi tout mélange, quelque soit sa composition moyenne, ne peut que devenir uniforme en temps long.

Si de plus on suppose que

$$U \leq C\eta_2,$$

où C peut être elle-aussi explicitement déterminée à partir du domaine Ω (ce qui revient à supposer que le nombre de Reynolds de l'écoulement est petit), alors on a aussi la stabilité du champ de vitesse

$$v(t) - v_\infty^U \rightarrow 0 \text{ dans } V_s \text{ pour tout } 0 \leq s < 1.$$

Ceci est bien sûr cohérent avec les résultats connus sur les équations de Navier-Stokes incompressibles : on sait que la solution stationnaire dans un canal de ce type est stable dans les écoulements laminaires (à petit Reynolds).

4 Preuves des résultats

4.1 Les conditions aux limites non-homogènes

Le premier point-clé des preuves qui vont suivre réside dans la façon dont on va ramener l'étude d'un problème avec des conditions aux limites non-homogènes (III.1.5),(III.2.1) à des conditions aux limites homogènes du type (III.2.2),(III.2.3). On sait en effet que celles-ci sont beaucoup plus adaptées au traitement mathématique des équations. Pour cela, on relève les conditions aux limites (III.2.1) par un relèvement de Hopf du même type que celui proposé dans [28] à la fois en dimension $d = 2$ et $d = 3$. Notons qu'un tel relèvement peut être construit de façon très générale pour des ouverts et des valeurs au bord plus générales, voir par exemple [31].

Lemme III.4.1

Pour tout $\lambda > 0$, il existe une fonction régulière $v_\lambda = f_\lambda(z)e_x$ telle que $f_\lambda(1) = 1$, $f_\lambda(-1) = -1$ et

$$|v_\lambda|_\infty = 1, |v_\lambda|_4 \leq C_\Omega \lambda, \quad (\text{III.4.1})$$

$$|b(u, v_\lambda, u)| \leq C_\Omega \lambda \|u\|_1^2 \text{ pour tout } u \text{ dans } V, \quad (\text{III.4.2})$$

$$|\nabla v_\lambda|_2^2 = 2|D(v_\lambda)|_2^2 \leq C_\Omega \frac{1}{\lambda^4} (1 + \lambda^8), |\Delta v_\lambda|_2^2 \leq C_\Omega \frac{1}{\lambda^{12}} (1 + \lambda^{24}), \quad (\text{III.4.3})$$

où la constante C_Ω dépend seulement de l'ouvert Ω .

Remarque III.4.1

Une telle fonction v_λ est à divergence nulle et vérifie

$$(v_\lambda \cdot \nabla) v_\lambda = 0.$$

4.2 Cas non dégénéré

Dans ce paragraphe, on donne la preuve du théorème III.3.1. Dans la preuve de ce théorème comme dans celle du théorème III.3.2, on va s'efforcer de bien contrôler la dépendance par rapport aux données U , φ_0 et v_0 des bornes que l'on va obtenir. Ceci est indispensable dans l'optique de la preuve du résultat de stabilité asymptotique (théorème III.3.5).

Théorème

Etant donnés $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + H$, $\varphi_0 \in \Phi_1$, si B satisfait (III.3.11) et F satisfait (III.3.12)-(III.3.15) alors il existe une solution faible globale (v, φ) à (III.3.1)-(III.3.5) au sens de la définition III.3.1.

Preuve :

L'idée de la preuve est d'utiliser le lemme III.4.1 en posant, pour un λ fixé (qui sera précisé dans la suite),

$$v = u + Uv_\lambda,$$

de sorte que les conditions aux limites sur u sont homogènes. Donc, comme $Uv_\lambda - v_\infty^U \in V$, le théorème sera prouvé si on montre que pour un λ convenable (dépendant de U), il existe (u, φ) tels que

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; V), \\ \varphi &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_1) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \Phi_2), \end{aligned}$$

satisfaisant la condition initiale, $u(0) = v_0 - Uv_\lambda \equiv u_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, et la formulation faible suivante des équations
– pour tout w dans V

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u, w) + b(u, u, w) + 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi) D(u) : D(w) + Ub(u, v_\lambda, w) + Ub(v_\lambda, u, w) \\ + 2U \int_{\Omega} \eta(\varphi) D(v_\lambda) : D(w) = - \int_{\Omega} (w \cdot \nabla \mu) \varphi \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{+*}), \end{aligned} \quad (\text{III.4.4})$$

- pour tout ψ dans Φ_1

$$\frac{d}{dt}(\varphi, \psi) + \int_{\Omega} B(\varphi) \nabla \mu \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \psi) \varphi - U \int_{\Omega} (v_{\lambda} \cdot \nabla \psi) \varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{+*}), \quad (\text{III.4.5})$$

où μ est toujours donné par (III.3.6).

Pour montrer cela, on utilise une approximation de Galerkin. On considère $(w_i)_{i \geq 1}$ la famille des fonctions propres de l'opérateur de Stokes A comme base de Galerkin de l'espace V et $(\psi_i)_{i \geq 1}$ la famille des fonctions propres de l'opérateur $-\Delta$ muni des conditions aux limites (III.2.2) comme base de Galerkin dans Φ_1 . On peut bien sûr choisir ψ_1 comme étant la fonction constante égale à 1 et on remarque usuellement, que les (ψ_i) sont orthogonales à la fois dans Φ_0 et dans Φ_1 .

On définit alors les sous-espaces d'approximation de dimension n , par

$$\Psi_n = \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_n),$$

et

$$\mathcal{W}_n = \text{Vect}(w_1, \dots, w_n),$$

et les projecteurs orthogonaux P_{Ψ_n} et $P_{\mathcal{W}_n}$ sur ces espaces dans Φ_0 (resp. dans H). Remarquons que le choix des (ψ_i) implique la stabilité de l'espace Ψ_n par l'opérateur $-\Delta$.

Enfin, il est bon de noter que même si Ω n'est pas très régulier, les fonctions propres de l'opérateur de Stokes sont régulières à cause des conditions aux limites périodiques choisies dans $d - 1$ directions.

- **Etape 1:** On cherche trois fonctions de la forme

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) w_i \in \mathcal{W}_n, \quad \varphi_n(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) \psi_i \in \Psi_n, \quad \mu_n(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(t) \psi_i \in \Psi_n,$$

où α_i, β_i et γ_i sont des fonctions numériques de classe C^1 , telles que $u_n(0) = P_{\mathcal{W}_n}(u_0)$, $\varphi_n(0) = P_{\Psi_n}(\varphi_0)$ et

- pour tout w dans \mathcal{W}_n

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d u_n}{dt}, w \right) + b(u_n, u_n, w) + 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi_n) D(u_n) : D(w) + U b(u_n, v_{\lambda}, w) + U b(v_{\lambda}, u_n, w) \\ & + 2U \int_{\Omega} \eta(\varphi_n) D(v_{\lambda}) : D(w) = - \int_{\Omega} (w \cdot \nabla \mu_n) \varphi_n, \end{aligned} \quad (\text{III.4.6})$$

- pour tout ψ dans Ψ_n ,

$$\left(\frac{d \varphi_n}{dt}, \psi \right) + \int_{\Omega} B(\varphi_n) \nabla \mu_n \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega} (u_n \cdot \nabla \psi) \varphi_n - U \int_{\Omega} (v_{\lambda} \cdot \nabla \psi) \varphi_n = 0, \quad (\text{III.4.7})$$

où on a posé

$$\mu_n = -\alpha^2 \Delta \varphi_n + P_{\Psi_n}(F'(\varphi_n)). \quad (\text{III.4.8})$$

Les fonctions B , η et F' étant localement Lipschitziennes, on voit aisément que ce système d'équations est équivalent à un problème de Cauchy pour un système d'équations différentielles ordinaires (en dimension finie) dans les inconnues α_i, β_i et γ_i , de sorte que le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution dans un intervalle maximal $[0, t_n[, t_n > 0$.

• **Etape 2:** On a vu dans le lemme III.2.2, que l'équation de Cahn-Hilliard conservait la moyenne de φ ce qui correspond physiquement à la conservation totale des proportions des deux phases dans le mélange. Grâce au choix des sous-espaces d'approximations que l'on a fait, cette propriété reste vraie sur les solutions approchées. En effet, si on prend $\psi_1 = 1$ comme fonction test dans (III.4.6), on obtient que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [0, t_n[,$ on a

$$\frac{d}{dt} m(\varphi_n) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{d \varphi_n}{dt} \psi_1 = 0,$$

de sorte que

$$m(\varphi_n(t)) = m(\varphi_n(0)) = m(P_{\Psi_n}(\varphi_0)) = m(\varphi_0). \quad (\text{III.4.9})$$

Ainsi $m(\varphi_n)$ est indépendant de t et de n , et ne dépend que de la donnée initiale φ_0 .

• **Etape 3:** On doit maintenant obtenir des estimations *a priori* pour montrer que $t_n = +\infty$ pour tout $n \geq 0$ et que les suites (u_n) , (φ_n) et (μ_n) sont bornées dans des espaces fonctionnels appropriés.

- Tout d'abord, on utilise $\mu_n(t) \in \Psi_n$ comme fonction test dans (III.4.7) pour obtenir

$$\left(\frac{d\varphi_n}{dt}, \mu_n(t) \right) + \int_{\Omega} B(\varphi_n) |\nabla \mu_n|^2 - \int_{\Omega} (u_n \cdot \nabla \mu_n) \varphi_n = -U \int_{\Omega} (v_{\lambda} \cdot \nabla \mu_n) \varphi_n,$$

et ainsi, en utilisant (III.4.8), on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi_n|_2^2 + \int_{\Omega} F(\varphi_n) \right) + \int_{\Omega} B(\varphi_n) |\nabla \mu_n|^2 - \int_{\Omega} (u_n \cdot \nabla \mu_n) \varphi_n = -U \int_{\Omega} (v_{\lambda} \cdot \nabla \mu_n) \varphi_n.$$

- En utilisant $u_n(t)$ comme fonction test dans (III.4.6), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |u_n|_2^2 \right) + 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi_n) D(u_n) : D(u_n) &= -Ub(u_n, v_{\lambda}, u_n) \\ &\quad - 2U \int_{\Omega} \eta(\varphi_n) D(v_{\lambda}) : D(u_n) - \int_{\Omega} (u_n \cdot \nabla \mu_n) (\varphi_n - m(\varphi_n)), \end{aligned}$$

car u_n est à divergence nulle et que donc grâce à (III.2.2)-(III.2.3), on peut voir aisément que

$$\int_{\Omega} u_n \cdot \nabla \mu_n = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu_n u_n) = \int_{\partial\Omega} \mu_n \cdot (u_n \cdot \nu) = 0.$$

Maintenant on utilise (III.2.9) et l'inégalité de Korn (III.2.6), et en sommant les deux dernières estimations, il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi_n|_2^2 + \frac{1}{2} |u_n|_2^2 + \int_{\Omega} F(\varphi_n) \right) + B_1 |\nabla \mu_n|_2^2 + \eta_1 |\nabla u_n|_2^2 \\ \leq U |b(u_n, v_{\lambda}, u_n)| + \sqrt{2} \eta_2 U |D(v_{\lambda})|_2 |\nabla u_n|_2 + U |v_{\lambda}|_4 |\nabla \mu_n|_2 |\varphi_n - m(\varphi_n)|_4. \end{aligned}$$

Si on utilise (III.2.10), (III.4.1), (III.4.2), l'injection de Sobolev $H^1 \subset L^4$ et l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi_n|_2^2 + \frac{1}{2} |u_n|_2^2 + \int_{\Omega} F(\varphi_n) \right) + B_1 |\nabla \mu_n|_2^2 + \eta_1 |\nabla u_n|_2^2 \\ \leq C\lambda U |\nabla u_n|_2^2 + \frac{\eta_1}{2} |\nabla u_n|_2^2 + CU^2 |D(v_{\lambda})|_2^2 + \frac{B_1}{2} |\nabla \mu_n|_2^2 + CU^2 \lambda^2 |\nabla \varphi_n|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{III.4.10})$$

• **Etape 4:** Utilisons $\varphi_n - m(\varphi_0) = \varphi_n - m(\varphi_n)\psi_1$ comme fonction test dans (III.4.8) pour obtenir, en utilisant les conditions au bord pour φ_n ,

$$(\mu_n, \varphi_n - m(\varphi_n)) = \alpha^2 |\nabla \varphi_n|_2^2 + \int_{\Omega} F'(\varphi_n) (\varphi_n - m(\varphi_0)).$$

Mais, comme $m(\varphi_n - m(\varphi_n)) = 0$, cette quantité est aussi égale à $(\mu_n - m(\mu_n), \varphi_n - m(\varphi_n))$. Ainsi, avec (III.2.7), l'inégalité de Young et l'hypothèse (III.3.14), on a

$$\frac{1}{2\alpha^2} |\nabla \mu_n|_2^2 \geq \frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi_n|_2^2 + F_3(m(\varphi_0)) \left(\int_{\Omega} F(\varphi_n) \right) - F_4(m(\varphi_0)) |\Omega|. \quad (\text{III.4.11})$$

De plus, si on multiplie (III.4.8) par $-\Delta\varphi_n$, on obtient en intégrant par parties

$$(\nabla\mu_n, \nabla\varphi_n) = \alpha^2|\Delta\varphi_n|_2^2 + \int_{\Omega} F''(\varphi_n)|\nabla\varphi_n|^2.$$

Finalement l'hypothèse (III.3.15) combinée à l'inégalité de Young, fournit

$$\frac{1}{2}|\nabla\mu_n|_2^2 \geq \alpha^2|\Delta\varphi_n|^2 - (F_5 + \frac{1}{2})|\nabla\varphi_n|_2^2. \quad (\text{III.4.12})$$

Ainsi, les estimations (III.4.11) et (III.4.12) montrent qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$, dépendant seulement de α, B_1 et F_5 telles que

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{2}|\nabla\mu_n|_2^2 &\geq \frac{B_1}{4}|\nabla\mu_n|_2^2 + C_1|\nabla\varphi_n|^2 + C_1|\Delta\varphi_n|_2^2 \\ &\quad + C_1F_3(m(\varphi_0)) \left(\int_{\Omega} F(\varphi_n) \right) - C_2F_4(m(\varphi_0)). \end{aligned} \quad (\text{III.4.13})$$

A partir de maintenant, on choisit λ de la forme

$$\lambda = \lambda(U) = \min(k/U, \sqrt[4]{U}). \quad (\text{III.4.14})$$

où k dépend seulement des fonctions B, η et sera fixé dans la suite. De l'estimation (III.4.10) on déduit à l'aide de (III.4.13) et (III.4.3),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi_n|_2^2 + \frac{1}{2}|u_n|_2^2 + \int_{\Omega} F(\varphi_n) \right) &+ \frac{B_1}{4}|\nabla\mu_n|_2^2 + \frac{\eta_1}{2}|\nabla u_n|_2^2 \\ &+ C_1|\nabla\varphi_n|_2^2 + C_1|\Delta\varphi_n|_2^2 + C_1F_3(m(\varphi_0)) \left(\int_{\Omega} F(\varphi_n) \right) \\ &\leq C\lambda U|\nabla u_n|_2^2 + CU^2\frac{1}{\lambda^4}(1+\lambda^8) + CU^2\lambda^2|\nabla\varphi_n|_2^2 + C_2F_4(m(\varphi_0)) \\ &\leq Ck|\nabla u_n|_2^2 + f_1(U) + Ck^2|\nabla\varphi_n|_2^2 + C_2F_4(m(\varphi_0)), \end{aligned}$$

où $f_1(U) = CU^2(1+\lambda(U)^8)/\lambda(U)^4$ ne dépend que de U et satisfait pour U assez petit $f_1(U) = CU(1+U^2)$ qui tend vers 0 quand U tend vers 0.

Posons maintenant

$$k = \min \left(\frac{\eta_1}{4C}, \sqrt{\frac{C_1}{2C}} \right), \quad (\text{III.4.15})$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi_n|_2^2 + \frac{1}{2}|u_n|_2^2 + \int_{\Omega} F(\varphi_n) \right) &+ \frac{B_1}{4}|\nabla\mu_n|_2^2 + \frac{\eta_1}{4}|\nabla u_n|_2^2 + \frac{C_1}{2}|\nabla\varphi_n|_2^2 + C_1|\Delta\varphi_n|^2 \\ &+ C_1F_3(m(\varphi_0)) \int_{\Omega} F(\varphi_n) \\ &\leq C_2F_4(m(\varphi_0)) + f_1(U). \end{aligned} \quad (\text{III.4.16})$$

De sorte que si on introduit

$$y_n(t) = \frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi_n(t)|_2^2 + \frac{1}{2}|u_n(t)|_2^2 + \int_{\Omega} F(\varphi_n(t)),$$

on a pour un certain $\gamma > 0$ assez petit ne dépendant que des diverses constantes introduites jusqu'à présent, grâce à l'inégalité de Poincaré (III.2.5)

$$y'_n(t) + \gamma y_n(t) \leq C'F_4(m(\varphi_0)) + f_1(U).$$

Comme F est positive (hypothèse (III.3.12)), y_n est une fonction numérique positive. Le lemme de Gronwall montre alors que $t_n = +\infty$ pour tout $n \geq 1$ et

$$y_n(t) \leq y_n(0) + \gamma^{-1} (C' F_4(m(\varphi_0)) + f_1(U)), \quad \forall t \geq 0.$$

Si on utilise le fait que P_{Ψ_n} et $P_{\mathcal{W}_n}$ sont des projecteurs orthogonaux dans les espaces respectifs Φ_0 et H construits sur les fonctions propres respectives du laplacien et de l'opérateur de Stokes, les hypothèses (III.3.12)-(III.3.17), et l'injection $H^1 \subset L^p$ qui est vraie avec le choix de p dans (III.3.13), il vient

$$\begin{aligned} y_n(0) &= \frac{\alpha^2}{2} |\nabla P_{\Psi_n}(\varphi_0)|_2^2 + \frac{1}{2} |P_{\mathcal{W}_n}(u_0)|_2^2 + \int_{\Omega} F(P_{\Psi_n}(\varphi_0)) \\ &\leq \frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi_0|_2^2 + \frac{1}{2} |u_0|_2^2 + \left(F_4(m(\varphi_0)) |\Omega| + \int_{\Omega} |P_{\Psi_n}(\varphi_0) - m(\varphi_0)| |F'(P_{\Psi_n}(\varphi_0))| \right) F_3(m(\varphi_0))^{-1} \\ &\leq C |\nabla \varphi_0|_2^2 + C |u_0|_2^2 + \left(|\Omega| F_4(m(\varphi_0)) + |P_{\Psi_n}(\varphi_0) - m(\varphi_0)|_2 |F_1 + F_2| |P_{\Psi_n}(\varphi_0)|^p |_2 \right) F_3(m(\varphi_0))^{-1} \\ &\leq C |\nabla \varphi_0|_2^2 + C |v_0|_2^2 + C U^2 + \left(|\Omega| F_4(m(\varphi_0)) + C |\varphi_0 - m(\varphi_0)|_2 (1 + \|\varphi_0\|_1^p) \right) F_3(m(\varphi_0))^{-1}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} k_1(v_0, \varphi_0, U) &\equiv C F_4(m(\varphi_0)) + C |\nabla \varphi_0|_2^2 + C |v_0|_2^2 + C f_1(U) + C U^2 \\ &\quad + \left(C F_4(m(\varphi_0)) + C |\varphi_0 - m(\varphi_0)|_2 (1 + \|\varphi_0\|_1^p) \right) F_3(m(\varphi_0))^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{III.4.17})$$

de sorte que l'estimation obtenue précédemment s'écrit

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H)} + \|\varphi_n - m(\varphi_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_1)} \leq k_1(v_0, \varphi_0, U). \quad (\text{III.4.18})$$

En intégrant en temps (III.4.16) et en utilisant (III.4.18), on peut aisément obtenir pour tout $t_0 \geq 0, \tau > 0$,

$$\|u_n\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; V)} + \|\varphi_n - m(\varphi_0)\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; \Phi_2)} + \|\nabla \mu_n\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; L^2(\Omega))} \leq k_2(v_0, \varphi_0, U, \tau), \quad (\text{III.4.19})$$

où

$$k_2(v_0, \varphi_0, U, \tau) \equiv C(1 + \tau) k_1(v_0, \varphi_0, U). \quad (\text{III.4.20})$$

• **Etape 5:** On obtient à partir de (III.4.8),

$$m(\mu_n) = (\mu_n, \psi_1) = \alpha^2 (-\Delta \varphi_n, \psi_1) + (P_{\Psi_n} F'(\varphi_n), \psi_1) = \int_{\Omega} F'(\varphi_n),$$

car le premier terme s'annule grâce aux conditions au bord (III.2.2).

Ainsi, grâce à (III.3.13) et à l'injection $H^1 \subset L^p$, pour presque tout $t \geq 0$

$$|m(\mu_n)| \leq F_1 \int_{\Omega} |\varphi_n|^p + F_2 |\Omega| \leq F_1 |\varphi_n|_p^p + F_2 |\Omega| \leq F_1 \|\varphi_n(t)\|_1^p + F_2 \leq C(u_0, \varphi_0, U).$$

Enfin, l'inégalité de Poincaré (III.2.7) et l'estimation (III.4.19) fournissent

$$\|\mu_n\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; \Phi_1)} \leq C(v_0, \varphi_0, U, \tau). \quad (\text{III.4.21})$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \alpha^4 |\nabla \Delta \varphi_n|_2^2 &\leq 2 |\nabla \mu_n|_2^2 + 2 |\nabla P_{\Psi_n} F'(\varphi_n)|_2^2 \\ &\leq 2 |\nabla \mu_n|_2^2 + 2 |\nabla F'(\varphi_n)|_2^2, \end{aligned}$$

car P_{Ψ_n} est construit sur les fonctions propres de $-\Delta$. En utilisant (III.3.13) il vient

$$\begin{aligned} \|\nabla F'(\varphi_n)\|_2^2 &\leq C \int_{\Omega} (1 + |\varphi_n|^{2p-2}) |\nabla \varphi_n|^2 \leq C \|\nabla \varphi_n\|_2^2 + C \|\varphi_n\|^{2p-2} \|\nabla \varphi_n\|_3^2 \\ &\leq C \|\nabla \varphi_n\|_2^2 + C \|\varphi_n\|_{3p-3}^{2p-2} \|\nabla \varphi_n\|_6^2 \leq C \|\nabla \varphi_n\|_2^2 + C \|\nabla \varphi_n\|_2^{2p-2} \|\Delta \varphi_n\|_2^2, \end{aligned}$$

grâce au choix de p dans (III.3.13) qui implique la validité des injections de Sobolev $H^1 \subset L^6$ et $H^1 \subset L^{3p-3}$ à la fois en dimension $d = 2$ et en dimension $d = 3$.

Finalement, avec (III.4.18), (III.4.19) et (III.4.21) il suit

$$\|\varphi_n - m(\varphi_0)\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; \Phi_3)} \leq C(v_0, \varphi_0, U, \tau). \quad (\text{III.4.22})$$

• **Etape 6:**

- Récrivons l'équation (III.4.6) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d u_n}{dt} + P_{\mathcal{W}_n}^* \left(\mathcal{B}(u_n, u_n) + U \mathcal{B}(u_n, v_\lambda) + U \mathcal{B}(v_\lambda, u_n) \right. \\ \left. + \mathcal{A}(\varphi_n, u_n) + U \mathcal{A}(\varphi_n, v_\lambda) + \varphi_n \nabla \mu_n \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.4.23})$$

où, pour $\varphi \in \Phi_1$, $u \in V$, on définit $\mathcal{A}(\varphi, u) \in V'$ par

$$\mathcal{A}(\varphi, u) \cdot w = 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi) D(u) : D(w), \quad \forall w \in V.$$

On a de plus aisément

$$|\mathcal{A}(\varphi, u)|_{V'} \leq C \|u\|_1.$$

Le fait que $P_{\mathcal{W}_n}$ soit un projecteur dans V_s pour tout $s \geq 0$ implique

$$\|P_{\mathcal{W}_n}\|_{L(V_s, V_s)} \leq 1 \text{ et } \|P_{\mathcal{W}_n}^*\|_{L(V'_s, V'_s)} \leq 1.$$

Et finalement, l'injection de Sobolev $H^1 \subset L^4$ (en dimension $d = 2$ ou 3) permet d'obtenir

$$|\varphi \nabla \mu|_{V'} \leq C |\varphi|_4 |\nabla \mu|_2 \leq C \|\varphi\|_1 |\nabla \mu|_2.$$

En utilisant ces propriétés, l'injection $V' \subset V'_{\frac{d}{2}}$ et (III.2.10) on déduit de (III.4.23) que

$$\left| \frac{d u_n}{dt} \right|_{V'_{\frac{d}{2}}} \leq C + C \|u_n\|_2 \|u_n\|_1 + C \|u_n\|_1 + C \|\varphi_n\|_1 |\nabla \mu_n|_2.$$

Ce qui fournit grâce à (III.4.18)-(III.4.19), et (III.4.21), pour tout $n \geq 1$, $t_0 \geq 0$ et $\tau > 0$,

$$\left\| \frac{d u_n}{dt} \right\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; V'_{\frac{d}{2}})} \leq C(v_0, \varphi_0, U, \tau). \quad (\text{III.4.24})$$

- De la même façon on peut obtenir un contrôle de $\frac{d \varphi_n}{dt}$. On récrit (III.4.7) sous la forme

$$\frac{d \varphi_n}{dt} + P_{\Psi_n}^* \left(\operatorname{div}(B(\varphi_n) \nabla \mu_n) + \operatorname{div}(\varphi_n u_n) + U \operatorname{div}(\varphi_n v_\lambda) \right) = 0, \quad (\text{III.4.25})$$

dans laquelle on a clairement

$$|\operatorname{div}(B(\varphi) \nabla \mu)|_{\Phi'_1} \leq B_2 |\nabla \mu|_2, \text{ et } |\operatorname{div}(\varphi u)|_{\Phi'_1} \leq |\varphi|_4 |u|_4 \leq C \|\varphi\|_1 \|u\|_1.$$

Comme P_{Ψ_n} est un projecteur orthogonal dans Φ_1 , il vient

$$\left| \frac{d\varphi_n}{dt} \right|_{\Phi'_1} \leq C|\nabla\mu_n|_2 + C\|\varphi_n\|_1 + C\|\varphi_n\|_1\|u_n\|_1,$$

ce qui implique, en utilisant (III.4.18)-(III.4.19) que pour tout $t_0 \geq 0$ et $\tau > 0$

$$\left\| \frac{d\varphi_n}{dt} \right\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; \Phi'_1)} \leq C(u_0, \varphi_0, U, \tau). \quad (\text{III.4.26})$$

• **Etape 7:** D'après les estimations (III.4.18)-(III.4.19), (III.4.21), (III.4.24), (III.4.26) et le lemme III.2.4, on peut extraire des sous-suites de (u_n) , (φ_n) et (μ_n) qui satisfont (en les notant encore u_n, φ_n, μ_n)

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \text{ faible-*}, \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; V) \text{ faible}, \\ u_n &\rightarrow u \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; H) \text{ fort}, \\ \frac{du_n}{dt} &\rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; V'_{\frac{d}{2}}) \text{ faible}, \\ \varphi_n &\rightharpoonup \varphi \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \Phi_3) \text{ faible} \\ \varphi_n &\rightharpoonup \varphi \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_1) \text{ faible-*}, \\ \varphi_n &\rightarrow \varphi \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \Phi_0) \text{ fort et presque partout}, \\ \frac{d\varphi_n}{dt} &\rightharpoonup \frac{d\varphi}{dt} \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \Phi'_1) \text{ faible}, \\ \mu_n &\rightharpoonup \mu \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \Phi_1) \text{ faible}. \end{aligned}$$

De plus, grâce aux interpolations $[V_1, V'_{\frac{d}{2}}]_{\frac{1}{2}} = V'_{\frac{d-2}{4}}$, $[\Phi_3, \Phi'_1]_{\frac{1}{2}} = \Phi_1$ et au troisième point du lemme III.2.4, on déduit que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \in C^0([0, T[, V'_{\frac{d-2}{4}}) \text{ faible}, \\ \varphi_n &\rightharpoonup \varphi \in C^0([0, T[, \Phi_1) \text{ faible}, \\ \varphi_n &\rightharpoonup \varphi \in C^0([0, T[, \Phi_s) \text{ fort, pour tout } 0 \leq s < 1]. \end{aligned}$$

En particulier, $u_n(0)$ converge faiblement vers $u(0)$ dans $V'_{\frac{d-2}{4}}$ et ainsi $u(0) = u_0$ car $P_{\mathcal{W}_n}$ converge vers l'identité pour la topologie forte des opérateurs. De la même façon on prouve que $\varphi(0) = \varphi_0$.

Il reste à montrer que les fonctions u, φ et μ vérifient (III.4.4)-(III.4.5).

Pour cela considérons $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{+*})$, et $N \geq 1$. Pour tout $n \geq N$, u_n vérifie (III.4.6) avec $w = w_N$; On multiplie cette équation par $\rho(t)$ et on l'intègre par parties. Il faut s'assurer que les propriétés de convergence des suites (u_n) , (φ_n) et (μ_n) permettent le passage à la limite dans cette équation. Ceci est clairement le cas, le seul terme non trivial étant le terme non-linéaire $b(u_n, u_n, \rho w_N)$ dont la convergence est obtenue grâce à la convergence forte de u_n dans $L^2(\mathbb{R}^+, H)$. L'équation limite étant satisfaite pour tout N et pour tout $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{+*})$, la densité de $\text{Vect}(w_i)_{i \geq 1}$ dans V nous permet de conclure que u, φ et μ satisfont (III.4.4). De la même façon, on montre que l'équation (III.4.5) est satisfaite.

En ce qui concerne (III.3.6), le résultat provient de la convergence des projecteurs P_{Ψ_n} vers l'identité au sens de la topologie forte des opérateurs et du théorème de convergence dominée. ■

4.3 Solutions fortes dans le cas non dégénéré

Prouvons maintenant le théorème III.3.2 que nous rappelons ci-dessous.

Théorème

Etant donnés $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + V$, $\varphi_0 \in \Phi_2$, si B satisfait (III.3.11), (III.3.16), et F satisfait (III.3.12)-(III.3.15) et (III.3.17), alors

- Si $d = 2$, il existe une unique solution forte globale de (III.3.1)-(III.3.5) sur \mathbb{R}^+ .
- Si $d = 3$, il existe $T_0(v_0, U, \varphi_0) > 0$ et une unique solution forte de (III.3.1)-(III.3.5) sur $[0, T_0[$.

Preuve :

Dans la première partie de la preuve, on va montrer l'existence de telles solution fortes ; l'unicité sera étudiée dans un second temps.

- **Etape 1:** Tout d'abord, on remarque que si un couple (φ, v) de fonctions définies sur $[0, T[$, avec $0 < T \leq +\infty$, vérifie

$$v - v_\infty^U \in L^\infty(0, T; V) \cap L_{loc}^2(0, T; V_2), \quad \varphi \in L^\infty(0, T; V_2) \cap L_{loc}^2(0, T; \Phi_4), \quad (\text{III.4.27})$$

et satisfait (III.3.7)-(III.3.8) alors il vérifie aussi des estimations similaires à (III.4.23) et (III.4.25) desquelles on déduit que $\frac{du}{dt}$ appartient à $L_{loc}^2(0, T; H)$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ à $L_{loc}^2(0, T; \Phi_0)$. Ainsi, on peut déduire du troisième point du lemme III.2.4 que

$$v - v_\infty^U \in C^0([0, T[, V), \quad \text{and} \quad \varphi \in C^0([0, T[, \Phi_2),$$

et ainsi, (v, φ) est bien une solution forte du problème au sens de la définition III.3.2. Il suffit donc dans la suite de prouver l'existence d'une solution qui satisfait (III.4.27).

- **Etape 2:** Comme on l'a fait pour les solutions faibles, on cherche une solution forte de la forme $v = u + Uv_\lambda$ et on va chercher de nouvelles estimations *a priori* sur la solution de l'approximation de Galerkin (III.4.6)-(III.4.8) utilisée dans la preuve du théorème III.3.1.

Dans la suite, au lieu de définir λ par (III.4.14), on va voir qu'il faut prendre

$$\lambda = \min(\sqrt[12]{U}, k/U), \quad (\text{III.4.28})$$

où k est toujours donné par (III.4.15). Il est facile de voir qu'avec un tel choix, les estimations dans la preuve du théorème III.3.1 sont strictement identiques, la seule chose qui change étant la valeur de la fonction f_1 dans (III.4.16), qui devient pour U assez petit $f_1(U) = CU^{\frac{5}{3}}(1 + U^{\frac{2}{3}})$. Le point important est de remarquer que $f_1(U)$ tend toujours vers zéro quand U tend vers zéro.

De plus, grâce à ce nouveau choix pour λ , il vient avec (III.4.3), pour U assez petit

$$f_2(U) \equiv U^2 |\Delta v_\lambda|_2^2 \leq CU^2 \frac{1}{\lambda^{12}} (1 + \lambda^{24}) \leq CU(1 + U^2).$$

Dorénavant, f_i représentera systématiquement une fonction continue de U positive, telle que $f_i(0) = 0$.

Les estimations suivantes sont parfaitement justifiées sur les solutions approchées par la méthode de Galerkin que l'on a construites dans la preuve du théorème III.3.1, mais pour simplifier les notations on ne notera plus l'indice n dans u_n, φ_n , ou μ_n .

Utilisons Au comme fonction test dans (III.4.6), il vient après intégration par parties,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2_2 - 2 \int_{\Omega} \eta'(\varphi) \nabla \varphi \cdot (D(u + Uv_\lambda) \cdot Au) - 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi) \Delta(u + Uv_\lambda) \cdot Au \\ + b(u, u, Au) + Ub(v_\lambda, u, Au) + Ub(u, v_\lambda, Au) \\ = -\alpha^2 \int_{\Omega} (Au \cdot \nabla \varphi) \Delta \varphi. \end{aligned} \quad (\text{III.4.29})$$

Remarquons que, si l'action de l'opérateur de Stokes sur u s'écrit $Au = -\Delta u + \nabla \pi$, on a

$$-\int_{\Omega} \eta(\varphi) \Delta u \cdot Au = \int_{\Omega} \eta(\varphi) |Au|^2 - \int_{\Omega} \eta(\varphi) \nabla \pi \cdot Au. \quad (\text{III.4.30})$$

Utilisons maintenant $\Delta^2\varphi$ comme fonction test dans (III.4.7), il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta\varphi|_2^2 + \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \Delta^2 \varphi + U \int_{\Omega} v_{\lambda} \cdot \nabla \varphi \Delta^2 \varphi \\ - \int_{\Omega} B'(\varphi) \nabla \varphi \cdot \nabla \mu \Delta^2 \varphi - \int_{\Omega} B(\varphi) \Delta \mu \Delta^2 \varphi = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.4.31})$$

Les trois estimations (III.4.29)-(III.4.31) fournissent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\Delta\varphi|_2^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2 \right) + \alpha^2 B_1 |\Delta^2 \varphi|_2^2 + 2\eta_1 |Au|_2^2 \\ \leq U \int_{\Omega} |v_{\lambda}| |\nabla \varphi| |\Delta^2 \varphi| + B_2 |\Delta F'(\varphi)|_2 |\Delta^2 \varphi|_2 + 2\eta_2 U |\Delta v_{\lambda}|_2 |Au|_2 \\ + 2\|\eta'\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla \varphi| |D(u + U v_{\lambda})| |Au| + \|B'\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla \varphi| |\nabla \mu| |\Delta^2 \varphi| \\ + |b(u, u, Au)| + U |b(v_{\lambda}, u, Au)| + U |b(u, v_{\lambda}, Au)| \\ + \alpha^2 \int_{\Omega} |Au| |\nabla \varphi| |\Delta^2 \varphi| + \int_{\Omega} |u| |\nabla \varphi| |\Delta^2 \varphi| + \left| \int_{\Omega} \eta(\varphi) \nabla \pi \cdot Au \right|. \end{aligned} \quad (\text{III.4.32})$$

• **Etape 3:** Il faut maintenant estimer chacun des onze termes du membre de droite de (III.4.32), que l'on va noter I_1, \dots, I_{11} .

Comme $|v_{\lambda}|_{\infty} = 1$, on a

$$I_1 \leq U |v_{\lambda}|_{\infty} |\nabla \varphi|_2 |\Delta^2 \varphi|_2 \leq \frac{\alpha^2 B_1}{10} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + C U^2 |\nabla \varphi|_2^2. \quad (\text{III.4.33})$$

En suivant [32], on écrit

$$\begin{aligned} |\Delta F'(\varphi)|_2^2 &\leq |F'''(\varphi)|_{\infty}^2 |\nabla \varphi|_4^4 + |F''(\varphi)|_{\infty}^2 |\Delta \varphi|_2^2 \\ &\leq C(1 + |\varphi - m(\varphi)|_{\infty}^{2q}) |\nabla \varphi|_4^4 + C(1 + |\varphi - m(\varphi)|_{\infty}^{2q+2}) |\Delta \varphi|_2^2. \end{aligned}$$

- Si $d = 2$: choisissons $\delta > 0$ tel que

$$\delta < \frac{2}{q+1}, \quad (\text{III.4.34})$$

et utilisons l'injection de Sobolev $H^{1+\delta} \subset L^{\infty}$, l'interpolation $H^{1+\delta} = [H^1, H^4]_{\frac{\delta}{3}}$ et (III.2.7) afin d'obtenir

$$|\varphi - m(\varphi)|_{\infty} \leq C |\nabla \varphi|_2^{1-\frac{\delta}{3}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{\delta}{3}}.$$

De plus, grâce à l'injection de Sobolev $H^{\frac{1}{2}} \subset L^4$ et à l'interpolation $H^{\frac{1}{2}} = [L^2, H^3]_{\frac{1}{6}}$, on a

$$|\nabla \varphi|_4 = |\nabla(\varphi - m(\varphi))|_4 \leq C |\nabla \varphi|_2^{\frac{5}{6}} \|\varphi - m(\varphi)\|_4^{\frac{1}{6}} \leq C |\nabla \varphi|_2^{\frac{5}{6}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{1}{6}}.$$

De la même façon, on montre

$$|\Delta \varphi|_2 \leq C \|\varphi - m(\varphi)\|_2 \leq C \|\varphi - m(\varphi)\|_1^{\frac{2}{3}} \|\varphi - m(\varphi)\|_4^{\frac{1}{3}} \leq C |\nabla \varphi|_2^{\frac{2}{3}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{III.4.35})$$

Et finalement, il vient

$$\begin{aligned} |\Delta F'(\varphi)|_2^2 &\leq C \left(1 + |\nabla \varphi|_2^{2q(1-\frac{\delta}{3})} |\Delta^2 \varphi|_2^{2q\frac{\delta}{3}} \right) |\nabla \varphi|_2^{\frac{10}{3}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{2}{3}} \\ &\quad + C \left(1 + |\nabla \varphi|_2^{(2q+2)(1-\frac{\delta}{3})} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{\delta}{3}(2q+2)} \right) |\nabla \varphi|_2^{\frac{4}{3}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Grâce à (III.4.34), on voit aisément que toutes les puissances de $|\Delta^2 \varphi|_2$ apparaissant dans cette estimation sont strictement plus petites que 2, de sorte que par l'inégalité de Young et (III.4.18) il reste

$$I_2 \leq C|\nabla \varphi|_2^{\frac{4}{3}}(1 + |\nabla \varphi|_2^{\alpha_1}) + \frac{\alpha^2 B_1}{10}|\Delta^2 \varphi|_2^2, \quad (\text{III.4.36})$$

où $\alpha_1 > 0$ est une constante dépendant de q et de δ .

- Si $d = 3$: on utilise l'inégalité d'Agmon (III.2.8) et l'interpolation $H^2 = [H^1, H^4]_{\frac{1}{3}}$ pour obtenir

$$|\varphi - m(\varphi)|_\infty \leq C|\nabla \varphi|^{\frac{1}{2}}\|\varphi - m(\varphi)\|_2^{\frac{1}{2}} \leq C|\nabla \varphi|_2^{\frac{5}{6}}|\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{1}{6}}.$$

Puis, en utilisant $H^{\frac{3}{4}} \subset L^4$ et $H^{\frac{3}{4}} = [L^2, H^3]_{\frac{1}{4}}$, on a

$$|\nabla \varphi|_4 \leq C|\nabla \varphi|_2^{\frac{3}{4}}|\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{1}{4}}.$$

Donc, avec (III.4.35) qui est aussi valable en dimension 3, il reste

$$\begin{aligned} |\Delta F'(\varphi)|_2^2 &\leq C \left(1 + |\nabla \varphi|_2^{\frac{5}{3}q} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{q}{2}} \right) |\nabla \varphi|_2^3 |\Delta^2 \varphi|_2 \\ &\quad + C \left(1 + |\nabla \varphi|_2^{\frac{5}{3}(q+1)} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{1}{3}(q+1)} \right) |\nabla \varphi|_2^{\frac{4}{3}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse sur (III.3.17) et en particulier au choix de q , on peut à nouveau voir que les puissances de $|\Delta^2 \varphi|_2$ sont encore strictement plus petites que 2 et ainsi par l'inégalité de Young obtenir

$$I_2 \leq C|\nabla \varphi|_2^{\frac{4}{3}}(1 + |\nabla \varphi|_2^{\alpha_2}) + \frac{\alpha^2 B_1}{10}|\Delta^2 \varphi|_2^2, \quad (\text{III.4.37})$$

où $\alpha_2 > 0$ est une constante.

En ce qui concerne le troisième terme, on peut écrire

$$I_3 \leq CU^2|\Delta v_\lambda|_2^2 + \frac{\eta_1}{5}|Au|_2^2 \leq Cf_2(U) + \frac{\eta_1}{5}|Au|_2^2. \quad (\text{III.4.38})$$

Si on utilise $H^{\frac{3}{2}} \subset L^\infty$ en dimension $d = 2$, ou l'inégalité d'Agmon en dimension $d = 3$, et l'interpolation entre L^2 et H^3 , on obtient dans les deux cas

$$|\nabla \varphi|_\infty \leq C|\nabla \varphi|_2^{\frac{1}{2}}|\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{III.4.39})$$

et donc

$$\begin{aligned} I_4 &\leq 2\|\eta'\|_\infty U|D(v_\lambda)|_2|\nabla \varphi|_2^{\frac{1}{2}}|\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{1}{2}}|Au|_2 + 2\|\eta'\|_\infty|\nabla \varphi|_2^{\frac{1}{2}}|\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{1}{2}}|\nabla u|_2|Au|_2 \\ &\leq \frac{\eta_1}{5}|Au|_2^2 + \frac{\alpha^2 B_1}{10}|\Delta^2 \varphi|_2^2 + C|\nabla \varphi|_2^2|\nabla u|_2^4 + f_3(U)|\nabla \varphi|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{III.4.40})$$

On traite le cinquième terme de la façon suivante :

- si $d=2$: on a vu lors de l'estimation du terme I_2 que

$$|\Delta \mu|_2^2 \leq 2\alpha^2|\Delta^2 \varphi|_2^2 + 2|\Delta F'(\varphi)|_2^2 \leq C(1 + |\Delta^2 \varphi|_2^2).$$

On utilise alors une nouvelle fois l'injection $H^1 \subset L^4$ et des résultats d'interpolation pour obtenir

$$\begin{aligned} I_5 &\leq C|\nabla \varphi|_4|\nabla \mu|_4|\Delta^2 \varphi|_2 \leq C|\nabla \varphi|_2^{\frac{1}{2}}|\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}}|\nabla \mu|_2^{\frac{1}{2}}|\Delta \mu|_2^{\frac{1}{2}}|\Delta^2 \varphi|_2 \\ &\leq \frac{\alpha^2 B_1}{10}|\Delta^2 \varphi|_2^2 + C|\nabla \varphi|_2 + C|\nabla \mu|_2^2|\Delta \varphi|_2^2 + C|\nabla \varphi|_2^2|\nabla \mu|_2^2|\Delta \varphi|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{III.4.41})$$

- si $d=3$: il faut remarquer que

$$|\nabla \mu| \leq \alpha^2 |\nabla \Delta \varphi| + |F''(\varphi)| |\nabla \varphi|.$$

Ainsi, les inégalités d'Agmon (III.2.8), et de Poincaré (III.2.7) impliquent

$$\begin{aligned} |\nabla \varphi|_\infty &= |\nabla(\varphi - m(\varphi))|_\infty \leq \|\varphi - m(\varphi)\|_2^{\frac{1}{2}} \|\varphi - m(\varphi)\|_3^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'inégalité d'interpolation suivante

$$|\nabla \Delta \varphi|_2 \leq \|\Delta \varphi\|_1 \leq |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} \|\Delta \varphi\|_2^{\frac{1}{2}} \leq |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{1}{2}},$$

qui permet grâce aux injections $H^1 \subset L^4$ et $H^2 \subset L^\infty$, d'estimer I_5 par

$$\begin{aligned} I_5 &\leq C |\nabla \varphi|_\infty |\nabla \Delta \varphi|_2 |\Delta^2 \varphi|_2 + C |F''(\varphi)|_\infty |\nabla \varphi|_4^2 |\Delta^2 \varphi|_2 \\ &\leq C |\Delta \varphi|_2^{\frac{5}{4}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{7}{4}} + C(1 + |\varphi|_\infty^{q+1}) |\Delta \varphi|_2^2 |\Delta^2 \varphi|_2 \\ &\leq C |\Delta \varphi|_2^{\frac{5}{4}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{7}{4}} + C(1 + |\Delta \varphi|_2^{q+1}) |\Delta \varphi|_2^2 |\Delta^2 \varphi|_2 \\ &\leq \frac{\alpha^2 B_1}{10} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + C |\Delta \varphi|_2^{10} + C(1 + |\Delta \varphi|_2^{2q+2}) |\Delta \varphi|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{III.4.42})$$

Pour estimer le terme I_6 , on doit à nouveau l'étudier séparément en fonction de la dimension de l'espace.

- si $d=2$: il suffit d'utiliser l'injection $H^{\frac{1}{2}} \subset L^4$ et l'interpolation $H^{\frac{1}{2}} = [L^2, H^1]_{\frac{1}{2}}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} I_6 = |b(u, u, Au)| &\leq C |u|_4 |\nabla u|_4 |Au|_2 \leq C |u|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla u|_2 |Au|_2^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{\eta_1}{5} |Au|_2^2 + C |u|_2^2 |\nabla u|_2^4. \end{aligned} \quad (\text{III.4.43})$$

- si $d=3$: il faut dans ce cas, utiliser $H^1 \subset L^6$ et $H^{\frac{1}{2}} \subset L^3$ ainsi que des résultats d'interpolation, afin d'obtenir aisément

$$\begin{aligned} I_6 = |b(u, u, Au)| &\leq C |u|_6 |\nabla u|_3 |Au|_2 \leq C |\nabla u|_2^{\frac{3}{2}} |Au|_2^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{\eta_1}{5} |Au|_2^2 + C |\nabla u|_2^6. \end{aligned} \quad (\text{III.4.44})$$

Il est facile de voir que

$$I_7 \leq U |v_\lambda|_\infty |\nabla u|_2 |\Delta u|_2 \leq \frac{\eta_1}{5} |Au|_2^2 + CU^2 |\nabla u|_2^2, \quad (\text{III.4.45})$$

et que grâce à l'inégalité d'Agmon, on a

$$\begin{aligned} I_8 &\leq U |u|_\infty |\nabla v_\lambda|_2 |Au|_2 \leq U |\nabla u|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla v_\lambda|_2 |Au|_2^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{\eta_1}{5} |Au|_2^2 + f_4(U) |\nabla u|_2^2, \end{aligned} \quad (\text{III.4.46})$$

mais aussi

$$\begin{aligned} I_9 &\leq \alpha^2 |Au|_2 |\nabla \varphi|_\infty |\Delta \varphi|_2 \leq C |Au|_2 |\Delta \varphi|_2^{\frac{3}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\eta_1}{5} |Au|_2^2 + C |\Delta \varphi|_2^3 |\nabla \Delta \varphi|_2. \end{aligned} \quad (\text{III.4.47})$$

Si on utilise (III.4.39), il vient

$$\begin{aligned} I_{10} &\leq |u|_2 |\nabla \varphi|_\infty |\Delta^2 \varphi|_2 \leq |u|_2 |\nabla \varphi|_2^{\frac{1}{2}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{\alpha^2 B_1}{10} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + C |u|_2^4 |\nabla \varphi|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{III.4.48})$$

Enfin, grâce à la régularité de l'opérateur de Stokes (inégalités (III.2.4)) on déduit en intégrant par parties, l'estimation suivante

$$\begin{aligned} I_{11} &= \left| \int_{\Omega} \eta'(\varphi) \pi \nabla \varphi \cdot A u \right| \\ &\leq \|\eta'\|_{L^\infty} \|\nabla \varphi\|_\infty \|\pi\|_{L^2/\mathbb{R}} |A u|_2 \leq C |\nabla \Delta \varphi|_2 \|u\|_1 |A u|_2 \end{aligned} \quad (\text{III.4.49})$$

$$\leq \frac{\eta_1}{5} |A u|_2^2 + C |\nabla \Delta \varphi|_2^2 |\nabla u|_2^2. \quad (\text{III.4.50})$$

• **Etape 4 - Etude du cas bidimensionnel:**

Posons

$$y(t) = \frac{\alpha^2}{2} |\Delta \varphi|_2^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2,$$

de sorte que, grâce à (III.4.33)-(III.4.50), l'estimation (III.4.32) peut s'écrire

$$\begin{aligned} y'(t) &+ \frac{\alpha^2 B_1}{10} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + \frac{\eta_1}{5} |A u|_2^2 \\ &\leq C |\nabla \varphi|_2 + C |\nabla \varphi|_2^2 + C |u|_2^4 |\nabla \varphi|_2^2 + (C + f_3(U)) |\nabla \varphi|_2^{\frac{4}{3}} (1 + |\nabla \varphi|_2^{\alpha_1}) + C f_2(U) \\ &+ C \left(U^2 + f_4(U) + |\nabla \varphi|_2^2 |\nabla u|_2^2 + |\nabla \mu|_2^2 + |\nabla \varphi|_2^2 |\nabla \mu|_2^2 \right. \\ &\left. + |u|_2^2 |\nabla u|_2^2 + |\Delta \varphi|_2 |\nabla \Delta \varphi|_2 + |\nabla \Delta \varphi|_2^2 \right) y(t) \\ &\equiv k_3(v_0, \varphi_0, U) + g(t) y(t). \end{aligned} \quad (\text{III.4.51})$$

en ayant défini grâce aux estimations sur les solutions faibles (III.4.18)-(III.4.19), la constante

$$k_3(v_0, \varphi_0, U) = C(k_1 + k_1^2 + k_1^6) + (C + f_3(U)) k_1^{\frac{4}{3}} (1 + k_1^{\alpha_1}) + C f_2(U). \quad (\text{III.4.52})$$

De même, si on pose

$$k_4(v_0, \varphi_0, U, \tau) = C(U^2 + f_4(U)) \tau + C(k_1^2 k_2^2 + k_2^2), \quad (\text{III.4.53})$$

il vient pour tout $t_0 \geq 0, \tau > 0$

$$\int_{t_0}^{t_0 + \tau} g(s) ds \leq k_4(v_0, \varphi_0, U, \tau).$$

Le point-clé est d'utiliser maintenant, le lemme de Gronwall uniforme (lemme III.2.5) et (III.4.19) pour déduire que pour tout $t \geq 0$,

$$y(t) \leq (\max(y(0), k_2^2) + k_3) e^{k_4}.$$

Rappelons que dans toutes les estimations qui précèdent, les fonctions u et φ sont en fait les approximations de Galerkin de la solution faible du problème, et que donc on a $u(0) = P u_0$ et $\varphi(0) = P' \varphi_0$ où P et P' sont les projecteurs sur les espaces de Galerkin adéquats et non pas $u(0) = u_0$ et $\varphi(0) = \varphi_0$. Néanmoins, comme on l'a fait pour les solutions faibles, on peut obtenir avec (III.4.3) et (III.4.28), une borne sur $y(0)$ qui ne dépende que des données initiales du problème et non pas de leur projection sur les espaces d'approximation. Ainsi, il vient

$$y(0) \leq \frac{\alpha^2}{2} |\Delta \varphi_0|_2^2 + \frac{1}{2} |\nabla u_0|_2^2 \leq \frac{\alpha^2}{2} |\Delta \varphi_0|_2^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_0|_2^2 + f_5(U).$$

Si finalement, on pose

$$k_5(v_0, \varphi_0, U) \equiv \left(\max \left(\frac{\alpha^2}{2} |\Delta \varphi_0|_2^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_0|_2^2 + f_5(U), k_2^2 \right) + k_3 \right) e^{k_4}, \quad (\text{III.4.54})$$

il reste

$$\|\Delta\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_0)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \leq C.k_5(v_0, \varphi_0, U),$$

ce qui permet de déduire de (III.4.51) que φ et u sont bornées dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \Phi_4)$ et $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; V_2)$ respectivement. Il est maintenant immédiat d'en déduire l'existence d'une solution forte globale du problème dans le cas bidimensionnel.

• **Etape 5 - Etude du cas tridimensionnel:**

D'après (III.4.33)-(III.4.50), l'estimation (III.4.32) peut se récrire dans ce cas à l'aide de la fonctionnelle y de la façon suivante

$$\begin{aligned} y'(t) &+ \frac{\alpha^2 B_1}{10} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + \frac{\eta_1}{5} |Au|_2^2 \\ &\leq C |\nabla \varphi|_2^2 + C |u|_2^4 |\nabla \varphi|_2^2 + (C + f_3(U)) |\nabla \varphi|_2^{\frac{4}{3}} (1 + |\nabla \varphi|_2^{\alpha_2}) + Cf_2(U) \\ &+ C \left(U^2 + f_4(U) + |\nabla \varphi|_2^2 |\nabla u|_2^2 + |u|_2^2 |\nabla u|_2^2 + |\Delta \varphi|_2 |\nabla \Delta \varphi|_2 + |\nabla \Delta \varphi|_2^2 \right) y(t) \\ &+ C_1(y^3(t) + y^5(t)) \\ &\equiv \tilde{k}_3(v_0, \varphi_0, U) + \tilde{g}(t)y(t) + C_1(y^3(t) + y^5(t)). \end{aligned} \quad (\text{III.4.55})$$

Grâce à un argument standard de comparaison sur les équations différentielles ordinaires, on déduit qu'il existe un temps $T_0 = T_0(v_0, \varphi_0, U)$ tel que y est bornée sur tout intervalle compact de $[0, T_0[$, ce qui prouve l'existence d'une solution forte locale au problème définie sur l'intervalle de temps $[0, T_0[$.

• **Etape 6 - Unicité :**

On suppose données deux solutions fortes v_1, φ_1, μ_1 et v_2, φ_2, μ_2 de (III.3.6)-(III.3.8) définies sur l'intervalle $[0, T[$.

Par la remarque III.3.1 on a en fait $\varphi_1, \varphi_2 \in C^0([0, T] \times \overline{\Omega})$ de sorte qu'il existe $R > 0$ tel que

$$|\varphi_1(t, x)| \leq R, \quad |\varphi_2(t, x)| \leq R, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\|\varphi_1(t)\|_2 \leq R, \quad \|\varphi_2(t)\|_2 \leq R, \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T],$$

$$\|v_1(t)\|_1 \leq R, \quad \|v_2(t)\|_1 \leq R, \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T].$$

Si on pose $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ et $v = v_1 - v_2$, on peut obtenir de (III.3.9) et (III.3.10), les équations vérifiées par φ et \mathbf{v}

– Pour tout w dans V ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v, w) + b(v, v_1, w) + b(v_2, v, w) + 2 \int_{\Omega} (\eta(\varphi_1) - \eta(\varphi_2)) D(v_1) : D(w) + 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi_2) D(v) : D(w) \\ = -\alpha^2 \int_{\Omega} (w \cdot \nabla \varphi_1) \Delta \varphi - \alpha^2 \int_{\Omega} (w \cdot \nabla \varphi) \Delta \varphi_2. \end{aligned} \quad (\text{III.4.56})$$

– Pour tout ψ dans V_3 ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi, \psi) - \int_{\Omega} (v \cdot \nabla \psi) \varphi_1 - \int_{\Omega} (v_2 \cdot \nabla \psi) \varphi \\ - \alpha^2 \int_{\Omega} (B(\varphi_1) - B(\varphi_2)) \nabla \Delta \varphi_1 \cdot \nabla \psi - \alpha^2 \int_{\Omega} B(\varphi_2) \nabla \Delta \varphi \cdot \nabla \psi \\ + \int_{\Omega} (BF''(\varphi_1) - BF''(\varphi_2)) \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \psi + \int_{\Omega} BF''(\varphi_2) \nabla \varphi \cdot \nabla \psi = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.4.57})$$

Comme les solutions que nous considérons sont régulières, on peut choisir $w = v$ comme fonction test dans (III.4.56) et $\psi = -\alpha^2 \Delta \varphi$ comme fonction test dans (III.4.57) (en remarquant que $v \in V$). Si on somme les estimations obtenues

après intégrations par parties, il vient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi|_2^2 + \frac{1}{2} |v|_2^2 \right) + \eta_1 |\nabla v|_2^2 + \alpha^4 B_1 |\nabla \Delta \varphi|_2^2 \\
& \leq |b(v, v_1, v)| + 2 \|\eta'\|_\infty \int_\Omega |\varphi| |D(v_1)| |D(v)| \\
& \quad + \alpha^2 \int_\Omega |v_2| |\nabla \varphi| |\Delta \varphi| + \alpha^2 \int_\Omega |v| |\nabla \varphi| |\Delta \varphi_2| \\
& \quad + \alpha^2 \int_\Omega |B(\varphi_1) F''(\varphi_1) - B(\varphi_2) F''(\varphi_2)| |\nabla \varphi_1| |\nabla \Delta \varphi| \\
& \quad + \alpha^2 \int_\Omega |B(\varphi_2) F''(\varphi_2)| |\nabla \varphi| |\nabla \Delta \varphi| \\
& \quad + \alpha^4 \|B'\|_\infty \int_\Omega |\varphi| |\nabla \Delta \varphi_1| |\nabla \Delta \varphi|.
\end{aligned} \tag{III.4.58}$$

Une fois de plus, on va estimer chacun des sept termes J_1, \dots, J_7 du second membre de cette dernière inégalité. Il est important de voir que les estimations qui vont suivre seront effectuées dans les deux cas $d = 2$ et $d = 3$.

On utilise tout d'abord l'injection $H^{\frac{3}{4}} \subset L^4$ et l'interpolation $H^{\frac{3}{4}} = [L^2, H^1]_{\frac{3}{4}}$, il vient

$$\begin{aligned}
J_1 & \leq |\nabla(v_1)|_2 |v|_4^2 \leq C(R) |v|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla v|_2^{\frac{3}{2}} \\
& \leq \frac{\eta_1}{8} |\nabla v|_2^2 + C(R) |v|_2^2.
\end{aligned} \tag{III.4.59}$$

Pour le second terme, ce sont les injections $H^{\frac{1}{2}} \subset L^3$ et $H^1 \subset L^6$ qui permettent de conclure

$$\begin{aligned}
J_2 & \leq \|\eta'\|_\infty |\varphi|_6 |D(v_1)|_3 |D(v)|_2 \leq C |\nabla \varphi|_2 |\nabla v|_2 |\nabla v_1|^{\frac{1}{2}}_2 \|v_1\|_2^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{\eta_1}{8} |\nabla v|_2^2 + C(R) |\nabla \varphi|_2^2.
\end{aligned} \tag{III.4.60}$$

Grâce à l'injection $H^2 \subset L^\infty$, on peut aisément obtenir

$$\begin{aligned}
J_3 & \leq \alpha^2 |\nabla \varphi|_\infty |\Delta \varphi_2| |v|_2 \leq \alpha^2 |\nabla \Delta \varphi|_2 |\Delta \varphi_2|_2 |v|_2 \\
& \leq \frac{\alpha^4 B_1}{8} |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + C(R) |v|_2^2,
\end{aligned} \tag{III.4.61}$$

et

$$\begin{aligned}
J_4 & \leq \alpha^2 |v_2|_2 |\nabla \varphi|_\infty |\Delta \varphi|_2 \leq C(R) |\nabla \Delta \varphi|_2 |\nabla \varphi|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{\alpha^4 B_1}{8} |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + C(R) |\nabla \varphi|_2^2.
\end{aligned} \tag{III.4.62}$$

Pour estimer le cinquième terme, on se sert du théorème des accroissements finis

$$\begin{aligned}
J_5 & \leq \left(\sup_{|x| \leq R} |(BF'')'(x)| \right) |\varphi|_3 |\nabla \varphi_1|_6 |\nabla \Delta \varphi|_2 \leq C(R) |\nabla \varphi|_2 |\Delta \varphi_1|_2 |\nabla \Delta \varphi|_2 \\
& \leq \frac{\alpha^4 B_1}{8} |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + C(R) |\nabla \varphi|_2^2.
\end{aligned} \tag{III.4.63}$$

On a de façon similaire

$$\begin{aligned}
J_6 & \leq \left(\sup_{|x| \leq R} |BF''(x)| \right) |\nabla \varphi|_2 |\nabla \Delta \varphi|_2 \\
& \leq \frac{\alpha^4 B_1}{8} |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + C(R) |\nabla \varphi|_2^2.
\end{aligned} \tag{III.4.64}$$

En utilisant enfin une fois de plus l'inégalité

$$|f|_\infty \leq C \|f\|_1^{\frac{3}{4}} \|f\|_3^{\frac{1}{4}},$$

satisfait par toute fonction $f \in H^3(\Omega)$, d'après l'inégalité d'Agmon et l'interpolation $H^2 = [H^1, H^3]_{\frac{1}{2}}$, et en remarquant que $m(\varphi) = m(\varphi_1) - m(\varphi_2) = 0$, il vient avec les inégalités (III.2.7)

$$\begin{aligned} J_7 &\leq \alpha^4 \|B'\|_\infty |\varphi|_\infty |\nabla \Delta \varphi_1|_2 |\nabla \Delta \varphi|_2 \\ &\leq C |\nabla \varphi|_2^{\frac{3}{4}} |\Delta \varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} |\Delta^2 \varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{5}{4}} \\ &\leq \frac{\alpha^4 B_1}{8} |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + C |\Delta \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\Delta^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\Delta \varphi|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{III.4.65})$$

Finalement, en rassemblant les estimations (III.4.59)-(III.4.65), l'inégalité (III.4.58) s'écrit, après intégration par rapport au temps t ,

$$z(t) \leq z(0) + \int_0^t h(s) z(s) ds, \quad \forall 0 \leq t < T,$$

où

$$z(t) = \frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi|_2^2 + \frac{1}{2} |v|^2,$$

et où $h(t) = C(R) + C(R) |\Delta^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} \in L^1(0, T)$.

Une application directe du lemme de Gronwall donne

$$z(t) \leq z(0) e^{\int_0^t h(u) du} \quad \forall 0 \leq t < T.$$

Ainsi, comme (φ_1, v_1) et (φ_2, v_2) ont les mêmes données initiales (φ_0, v_0) , on a $z(0) = 0$ et donc $z(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$ ce qui implique l'unicité des solutions fortes du problème sur leur intervalle de temps d'existence. ■

4.4 Cas non-dégénéré avec un potentiel logarithmique

Comme on l'a vu plus haut, on s'intéresse maintenant à l'étude du problème dans le cas d'un potentiel logarithmique de la forme

$$F(\varphi) = \theta \left((1 + \varphi) \log(1 + \varphi) + (1 - \varphi) \log(1 - \varphi) \right) + \theta_c (1 - \varphi^2). \quad (\text{III.4.66})$$

De façon plus générale, on va considérer des potentiels de la forme suivante

$$F = F_1 + F_2,$$

où F_2 une fonction de classe C^2 sur $[-1, 1]$ et F_1 est une fonction continue sur $[-1, 1]$, strictement convexe et de classe C^2 sur $] -1, 1 [$ et vérifiant

$$|F'_1(x)|, |F''_1(x)| \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow \pm 1.$$

On suppose en outre qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$F''_1(x)(1 - x)^2 \leq M \text{ au voisinage de } x = 1 \text{ et } F''_1(x)(1 + x)^2 \leq M \text{ au voisinage de } x = -1.$$

Par analogie avec (III.4.66), on introduit deux constantes positives

$$\theta = \inf_{]-1, 1[} F''_1, \quad \text{et} \quad \theta_c = \inf_{[-1, 1]} F''_2,$$

de sorte que quand $\theta \geq \theta_c$ le potentiel F est convexe et la séparation des phases n'a alors pas lieu. Le cas physiquement intéressant est bien sûr le cas $\theta < \theta_c$.

Contrairement aux paragraphes précédents, le potentiel F n'est ici défini par nature que sur $[-1, 1]$. On va voir, et c'est un point fondamental, que c'est en fait suffisant car on va montrer sous ces hypothèses l'existence de solutions prenant leurs valeurs dans cet intervalle physiquement admissible, qui permettent de donner un sens à $F'(\varphi)$. Pour simplifier, et comme cela ne change rien au problème étudié on suppose que F_1 et F_2 sont positives.

Le principe de la preuve est d'introduire un problème régularisé pour lequel l'existence de solutions est connue et qui approche le problème de départ. La démonstration proposée ici est une adaptation d'un résultat obtenu dans [4] pour l'équation de Cahn-Hilliard seule. On va voir que le couplage avec l'équation de Navier-Stokes et le fait que les conditions aux limites soient non-homogènes sur la vitesse permettent malgré tout d'obtenir l'existence de solutions qui soient uniformément bornées en temps.

La clé de la preuve réside dans l'utilisation du fait que la partie F_1 du potentiel F qui dégénère en ± 1 est convexe. Ainsi, la dégénérence du potentiel ne peut créer d'instabilité supplémentaire dans les équations, car c'est la partie non convexe du potentiel de Cahn-Hilliard qui est à l'origine de la séparation des phases et de l'instabilité de certaines configurations. En revanche, elle contraint la solution à prendre ses valeurs dans $[-1, 1]$ ce qui est nouveau par rapport aux résultats précédents.

On prouve donc le théorème III.3.3 :

Théorème

Supposons que B satisfait (III.3.11) et que F est défini comme ci-dessus. Etant donnés $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + H$, $\varphi_0 \in \Phi_1$ tel que $|\varphi_0|_\infty \leq 1$ et $|m(\varphi_0)| < 1$, alors il existe une solution faible (v, φ) à (III.3.1)-(III.3.5) sur \mathbb{R}^+ au sens de la définition III.3.1.

Cette solution vérifie de plus

$$|\varphi(t, x)| < 1 \text{ pour presque tout } (t, x) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega,$$

et

$$F'(\varphi) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)),$$

ce qui donne un sens à la définition III.3.1.

Preuve :

Tout d'abord, commençons par prolonger de façon C^2 la fonction F_2 à \mathbb{R} tout entier en supposant que ses restrictions à $[2, +\infty[$ (resp. à $] -\infty, -2]$) sont polynomiales de degré 2 et convexes. Dans ce cas, on a

$$F_2 \geq 0, \text{ et } F_2'' \geq -\theta_c.$$

Il s'agit maintenant d'introduire une approximation de la partie convexe F_1 du potentiel F . Pour cela pour tout $\delta \in]0, 1[$, on construit une fonction F_1^δ de la façon suivante

$$F_1^\delta(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{si } |x| \leq 1 - \delta \\ F_1(1 - \delta) + F_1'(1 - \delta)(x - 1 + \delta) + \frac{F_1''(1 - \delta)}{2}(x - 1 + \delta)^2 & \text{si } x \geq 1 - \delta \\ F_1(-1 + \delta) + F_1'(-1 + \delta)(x + 1 - \delta) + \frac{F_1''(-1 + \delta)}{2}(x + 1 - \delta)^2 & \text{si } x \leq -1 + \delta. \end{cases}$$

Le potentiel de Cahn-Hilliard approché que l'on va considérer dorénavant est $F^\delta = F_1^\delta + F_2$ défini sur tout \mathbb{R} .

Il est clair d'après cette construction que le potentiel F^δ vérifie les hypothèses (III.3.12)-(III.3.15). Le point fondamental à remarquer est que les coefficients apparaissant dans (III.3.14) sont indépendants de δ pour $\gamma \in] -1, 1[$.

En effet, la fonction F_2 étant polynomiale de degré 2 et convexe à l'infini, les fonctions $(x - \gamma)F_2'(x)$ et $F_2(x)$ sont toutes les deux polynomiales de degré 2 à coefficient dominant positif sur chaque composante connexe de $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$. Ainsi, il existe une constante $C_1(\gamma) > 0$ telle que

$$(x - \gamma)F_2'(x) \geq C_1(\gamma)F_2(x), \quad \forall |x| \geq 2.$$

De plus la fonction $x \mapsto (x - \gamma)F_2'(x) - C_1(\gamma)F_2(x)$ est continue sur $[-2, 2]$ elle y est donc minorée par une constante $-C_2(\gamma) \leq 0$ de sorte que l'on ait pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(x - \gamma)F_2'(x) \geq C_1(\gamma)F_2(x) - C_2(\gamma). \tag{III.4.67}$$

Mais par construction, la fonction F_1^δ est convexe sur \mathbb{R} tout entier. Elle vérifie donc l'inégalité de la tangente au point γ

$$(x - \gamma)F_1^{\delta'}(x) \geq F_1^\delta(x) - F_1^\delta(\gamma), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si on suppose que $\gamma \in]-1, 1[$, il est facile de voir que $F_1^\delta(\gamma)$ converge vers $F_1(\gamma)$ quand δ tend vers zéro. Il existe donc une constante $C_3(\gamma)$ telle que

$$(x - \gamma)F_1^{\delta'}(x) \geq F_1^\delta(x) - C_3(\gamma), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.4.68})$$

Ainsi, en sommant (III.4.67) et (III.4.68) il vient

$$(x - \gamma)F_1^{\delta'}(x) \geq F_1^\delta(x) + C_1(\gamma)F_2(x) - C_2(\gamma) - C_3(\gamma),$$

ce qui fournit (III.3.14) avec des coefficients $F_3(\gamma) = \min(1, C_1(\gamma))$ et $F_4(\gamma) = C_2(\gamma) + C_3(\gamma)$ indépendants de δ .

D'après le théorème III.3.1, on peut construire une famille de solutions faibles du problème approché $(\varphi_\delta, v_\delta)$ pour toutes données $U, \varphi_0 \in \Phi$ et $v_0 \in v_\infty^U + H$. Le reste de la preuve consiste à obtenir des estimations uniformes en δ afin de passer à la limite dans les équations approchées.

• Etape 1:

Ecrivons tout d'abord l'estimation d'énergie (III.4.10) obtenue en multipliant l'équation de Cahn-Hilliard par μ_δ et celle de Navier-Stokes par u_δ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi_\delta|_2^2 + \frac{1}{2} |u_\delta|_2^2 + \int_{\Omega} F^\delta(\varphi_\delta) \right) &+ \frac{B_1}{2} |\nabla \mu_\delta|_2^2 + \frac{\eta_1}{2} |\nabla u_\delta|_2^2 \\ &\leq CU^2 |D(v_\lambda)|_2^2 + C\lambda U |\nabla u_\delta|_2^2 + CU^2 \lambda^2 |\nabla \varphi_\delta|_2^2. \end{aligned}$$

On a vu dans le théorème d'existence de solutions faibles dans ce qui a précédé, que la clé de la preuve de l'uniformité en temps consiste à établir le contrôle de diverses quantités par le gradient du potentiel chimique (inégalité (III.4.13)). Il faut ici s'assurer qu'un tel contrôle est possible uniformément en δ .

Comme on l'a vu plus haut l'hypothèse (III.3.14) est vérifiée indépendamment de δ ce qui permet d'écrire (grâce à l'hypothèse que $m(\varphi_0) \in]-1, 1[$),

$$\frac{1}{2\alpha^2} |\nabla \mu_\delta|_2^2 \geq \frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi_\delta|_2^2 + F_3(m(\varphi_0)) \left(\int_{\Omega} F^\delta(\varphi_\delta) \right) - F_4(m(\varphi_0)) |\Omega|.$$

Comme pour la démonstration du théorème III.3.1, en calculant le produit scalaire L^2 de μ_δ par $-\Delta \varphi_\delta$, il vient

$$\frac{1}{2} |\nabla \mu_\delta|_2^2 \geq \alpha^2 |\Delta \varphi_\delta|_2^2 - (\theta + \frac{1}{2}) |\nabla \varphi_\delta|_2^2,$$

car l'inégalité

$$F^{\delta''}(x) \geq \theta - \theta_c,$$

est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ uniformément en δ . Rappelons au passage que dans le cas physiquement intéressant, on a $\theta < \theta_c$.

Au final, on obtient une estimation de la forme

$$\frac{B_1}{4} |\nabla \mu_\delta|_2^2 \geq C |\nabla \varphi_\delta|_2^2 + C |\Delta \varphi_\delta|_2^2 + CF_3(m(\varphi_0)) \left(\int_{\Omega} F^\delta(\varphi_\delta) \right) - CF_4(m(\varphi_0)),$$

qui permet, comme pour le théorème III.3.1, d'obtenir suffisamment de coercivité dans l'estimation d'énergie pour établir les bornes uniformes en temps et en δ suivantes :

$$\|\varphi_\delta - m(\varphi_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, \Phi_1)} + \|v_\delta - v_\infty^U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, H)} \leq C(U, \varphi_0, v_0), \quad (\text{III.4.69})$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left(\int_{\Omega} F^\delta(\varphi_\delta) \right) \leq C(U, \varphi_0, v_0), \quad (\text{III.4.70})$$

$$\|\varphi_\delta - m(\varphi_0)\|_{L^2(t_0, t_0+\tau, \Phi_2)} + \|\nabla \mu_\delta\|_{L^2(t_0, t_0+\tau, L^2(\Omega))} + \|v_\delta - v_\infty^U\|_{L^2(t_0, t_0+\tau, V)} \leq C(U, \varphi_0, v_0, \tau). \quad (\text{III.4.71})$$

Remarque III.4.2

Il faut tout de même vérifier que $\int_{\Omega} F^{\delta}(\varphi_{\delta}(0))$ est uniformément bornée par rapport à δ . C'est ici qu'intervient l'hypothèse $|\varphi_0|_{\infty} \leq 1$.

En effet, si $|1 - \varphi_0(x)| \geq \delta$ on a

$$F^{\delta}(\varphi_0(x)) \leq \|F_2\|_{L^{\infty}([-1,1])} + \|F_1\|_{L^{\infty}([-1,1])},$$

alors que si $1 - \delta \leq \varphi_0(x) \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} F^{\delta}(\varphi_0(x)) &= F_2(\varphi_0(x)) + F_1(1 - \delta) + F'_1(1 - \delta)(\varphi_0(x) - 1 + \delta) + \frac{F''_1(1 - \delta)}{2}(\varphi_0(x) - 1 + \delta)^2 \\ &\leq \|F_2\|_{L^{\infty}([-1,1])} + F_1(\varphi_0(x)) + \frac{F''_1(1 - \delta)}{2}\delta^2 \\ &\leq \|F_2\|_{L^{\infty}([-1,1])} + \|F_1\|_{L^{\infty}([-1,1])} + M, \end{aligned}$$

grâce à l'hypothèse sur le comportement de $F''_1(x)$ au voisinage de ± 1 .

La même démonstration pour $\varphi_0(x) \in [-1, -1 + \delta]$ montre finalement que pour δ assez petit, et grâce à l'hypothèse $|\varphi_0|_{\infty} \leq 1$, on a

$$\int_{\Omega} F^{\delta}(\varphi_{\delta}(0)) = \int_{\Omega} F^{\delta}(\varphi_0) \leq C|\Omega|,$$

où C ne dépend que de F_1 et F_2 .

Grâce à ces estimations, on voit qu'il existe des fonctions φ, μ, v et des sous-suites de $(\varphi_{\delta}, \mu_{\delta}, v_{\delta})$ (que l'on note toujours $\varphi_{\delta}, \mu_{\delta}$ et v_{δ} pour simplifier les écritures), telles que :

$$\begin{aligned} \varphi_{\delta} &\rightarrow \varphi \text{ dans } L^{\infty}(\mathbb{R}^+, \Phi_1) \text{ faible étoile,} \\ \varphi_{\delta} &\rightarrow \varphi \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \Phi_2) \text{ faible,} \\ v_{\delta} &\rightarrow v \text{ dans } L^{\infty}(\mathbb{R}^+, H) \text{ faible étoile,} \\ v_{\delta} &\rightarrow v \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, V) \text{ faible,} \\ \mu_{\delta} &\rightarrow \mu \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \Phi_2) \text{ faible,} \\ \varphi_{\delta} &\rightarrow \varphi \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \Phi_1) \text{ fort,} \\ v_{\delta} &\rightarrow v \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H) \text{ fort.} \end{aligned}$$

• Etape 2:

Grâce aux propriétés de convergence précédentes, on peut aisément passer à la limite dans les équations approchées vérifiées par φ_{δ} et v_{δ} de la même manière que dans le théorème III.3.1 à l'exception notable du terme $F'^{\delta}(\varphi_{\delta})$ dans l'expression de μ_{δ} . Dans ce qui suit on justifie ce passage à la limite délicat.

Montrons tout d'abord que pour tout $T > 0$, $F'^{\delta}(\varphi_{\delta})$ est bornée dans $L^2([0, T] \times \Omega)$ indépendamment de δ . Pour cela calculons le produit scalaire L^2 de μ_{δ} par $F'^{\delta}(\varphi_{\delta}) - m(F'^{\delta}(\varphi_{\delta}))$ il vient après intégrations par parties

$$\int_{[0, T] \times \Omega} \mu_{\delta}(F'^{\delta}(\varphi_{\delta}) - m(F'^{\delta}(\varphi_{\delta}))) = \int_{[0, T] \times \Omega} F'^{\delta}(\varphi_{\delta}) |\nabla \varphi_{\delta}|^2 + \int_0^T |F'^{\delta}(\varphi_{\delta}) - m(F'^{\delta}(\varphi_{\delta}))|^2_2,$$

et comme $F'^{\delta} \geq \theta - \theta_c$ uniformément en δ , on a avec l'inégalité de Poincaré (III.2.7) et les estimations qui ont précédé

$$\begin{aligned} \int_0^T |F'^{\delta}(\varphi_{\delta}) - m(F'^{\delta}(\varphi_{\delta}))|^2_2 &\leq |\theta - \theta_c| \int_0^T |\nabla \varphi_{\delta}|^2_2 + \int_0^T |\mu_{\delta} - m(\mu_{\delta})|^2_2 \\ &\leq |\theta - \theta_c| \int_0^T |\nabla \varphi_{\delta}|^2_2 + C \int_0^T |\nabla \mu_{\delta}|^2_2 \\ &\leq |\theta - \theta_c| T C(U, \varphi_0, v_0) + C(U, \varphi_0, v_0, T). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $(F^{\delta'}(\varphi_\delta) - m(F^{\delta'}(\varphi_\delta)))$ est bornée dans $L^2(]0, T[\times\Omega)$. Il reste à étudier la moyenne de $F^{\delta'}(\varphi_\delta)$.

Calculons, à t fixé, le produit scalaire L^2 de μ_δ par $(\varphi_\delta - m(\varphi_0))$, il vient

$$\int_{\Omega} (\varphi_\delta - m(\varphi_0)) F^{\delta'}(\varphi_\delta) + \alpha^2 |\nabla \varphi_\delta|_2 \leq C(\mu_\delta - m(\mu_\delta), \varphi_\delta - m(\varphi_0)) \leq C |\nabla \mu_\delta|_2 |\nabla \varphi_\delta|_2.$$

D'autre part on a, par l'hypothèse (III.3.14), et pour $\gamma \in]-1, 1[$,

$$\int_{\Omega} (\varphi_\delta - \gamma) F^{\delta'}(\varphi_\delta) \geq F_3(\gamma) \int_{\Omega} F^\delta(\varphi_\delta) - |\Omega| F_4(\gamma) \geq -|\Omega| F_4(\gamma).$$

On déduit en soustrayant ces deux inégalités que

$$(\gamma - m(\varphi_0)) \int_{\Omega} F^{\delta'}(\varphi_\delta) \leq C |\nabla \varphi_\delta|_2 |\nabla \mu_\delta|_2 + C F_4(\gamma).$$

Comme par hypothèse $m(\varphi_0) < 1$, il existe $\beta > 0$ tel que $[m(\varphi_0) - \beta, m(\varphi_0) + \beta] \subset]-1, 1[$. En appliquant l'inégalité précédente à $\gamma = m(\varphi_0) - \beta$ et $\gamma = m(\varphi_0) + \beta$ successivement, il vient

$$\beta \left| m(F^{\delta'}(\varphi_\delta)) \right| \leq C |\nabla \varphi_\delta|_2 |\nabla \mu_\delta|_2 + C \max(F_4(m(\varphi_0) - \beta), F_4(m(\varphi_0) + \beta)).$$

En utilisant les bornes (III.4.69)-(III.4.71) obtenues précédemment, on obtient alors

$$\forall T > 0, \quad \int_0^T m(F^{\delta'}(\varphi_\delta))^2 \leq C \int_0^T |\nabla \varphi_\delta|_2^2 |\nabla \mu_\delta|_2^2 + C(\varphi_0, \beta, T)^2 \leq C(U, \varphi_0, v_0, \beta, T).$$

Ceci prouve que la moyenne de $F^{\delta'}(\varphi_\delta)$ est bornée dans $L^2(0, T)$ indépendamment de δ car par définition β ne dépend que de φ_0 . Au final, on a bien obtenu que

$$\|F^{\delta'}(\varphi_\delta)\|_{L^2(]0, T[\times\Omega)} \leq C(U, \varphi_0, v_0, T).$$

On peut donc en déduire l'existence d'une fonction G dans $L^2(]0, T[\times\Omega)$ telle que $F^{\delta'}(\varphi_\delta)$ converge faiblement vers G dans ce même espace. Pour conclure la preuve, il faut identifier G et plus précisément, montrer que $G = F'(\varphi)$ où F est le potentiel de départ, et φ la limite de φ_δ .

En fait le potentiel F^δ est composé de deux parties. La convergence de la partie $F'_2(\varphi_\delta)$ vers $F'_2(\varphi)$ se traite de façon immédiate grâce à la borne obtenue sur φ_δ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, \Phi_1)$, à la croissance au plus polynomiale d'ordre 2 de F_2 à l'infini et enfin au théorème de convergence dominée. Il reste donc à démontrer que $F_1^{\delta'}(\varphi_\delta)$ converge dans $L^2(]0, T[\times\Omega)$ vers $F'_1(\varphi)$. On va pour cela utiliser de façon cruciale la convexité de F_1 et de F_1^δ en utilisant un argument de type dualité.

En effet, par construction, $F_1^{\delta''} \geq \theta > 0$, ce qui implique que $F_1^{\delta'}$ est strictement croissante et donc bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (pour δ assez petit). De plus par l'inégalité des accroissements finis, il est facile de voir que $(F_1^{\delta'})^{-1}$ est Lipschitzienne de constante de Lipschitz $\frac{1}{\theta}$. Ainsi pour toute fonction test $\psi \in L^2(]0, T[\times\Omega)$ on a

$$\int_{]0, T[\times\Omega} \left(\varphi_\delta - (F_1^{\delta'})^{-1}(\psi) \right) \left(F_1^{\delta'}(\varphi_\delta) - \psi \right) \geq 0, \tag{III.4.72}$$

l'existence de l'intégrale étant assurée car, comme $(F_1^{\delta'})^{-1}$ est Lipschitzienne, $(F_1^{\delta'})^{-1}(\varphi_\delta)$ appartient à $L^2(]0, T[\times\Omega)$.

Montrons que l'on peut passer à la limite dans cette inégalité. Pour cela montrons l'inégalité suivante

$$|(F_1^{\delta'})^{-1}(x) - (F_1')^{-1}(x)| \leq \frac{1}{\min(F_1''(1-\delta), F_1''(-1+\delta))} |x|.$$

Tout d'abord, si $F'_1(-1 + \delta) \leq x \leq F'_1(1 - \delta)$ l'inégalité est évidente car pour ces valeurs de x les fonctions $(F'_1)^{-1}$ et $(F'^{\delta'})^{-1}$ coïncident. Traitons maintenant le cas $x \geq F'_1(1 - \delta)$, l'autre cas pouvant s'obtenir de la même manière. Le réel $z = (F'^{\delta'})^{-1}(x)$ est, par définition de $F'^{\delta'}$ l'unique solution de l'équation linéaire

$$F'_1(1 - \delta) + F''_1(1 - \delta)(z - 1 + \delta) = x,$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{x - F'_1(1 - \delta)}{F''_1(1 - \delta)} + 1 - \delta.$$

Comme $x \geq F'_1(1 - \delta)$ et que F'_1 est croissante, il vient

$$|z - (F'_1)^{-1}(x)| = z - (F'_1)^{-1}(x) = \frac{x - F'_1(1 - \delta)}{F''_1(1 - \delta)} + 1 - \delta - (F'_1)^{-1}(x) \leq \frac{x - F'_1(1 - \delta)}{F''_1(1 - \delta)} \leq \frac{x}{F''_1(1 - \delta)}.$$

D'où l'inégalité annoncée.

On en déduit que

$$\int_{]0, T[\times\Omega} |(F'_1)^{-1}(\psi) - (F'^{\delta'})^{-1}(\psi)|^2 \leq \frac{1}{\min(F''_1(1 - \delta), F''_1(-1 + \delta))^2} \|\psi\|_{L^2(]0, T[\times\Omega)},$$

et donc, comme $F''_1(x)$ tend vers $+\infty$ en 1 et -1 , on obtient la convergence forte dans $L^2(]0, T[\times\Omega)$ de $(F'^{\delta'})^{-1}(\psi)$ vers $(F'_1)^{-1}(\psi)$. Cette convergence associée aux différentes propriétés de convergence de φ_δ permet de passer à la limite dans l'inégalité (III.4.72) et donc d'obtenir pour tout ψ

$$\int_{]0, T[\times\Omega} \left(\varphi - (F'_1)^{-1}(\psi) \right) \left(G - \psi \right) \geq 0. \quad (\text{III.4.73})$$

Prolongeons pour un instant la fonction F'_1 par $+\infty$ en dehors de l'intervalle $] -1, 1 [$, alors $F'^{\delta'}_1(\varphi_\delta)$ converge presque partout vers $F'_1(\varphi)$. En effet, φ_δ converge presque partout vers φ dans $]0, T[\times\Omega$ et donc pour presque tout (t, x) dans $]0, T[\times\Omega$ on a

- Soit $|\varphi(t, x)| \geq 1$ et alors $F'_1(\varphi(t, x)) = +\infty$ et il est facile de voir que $F'^{\delta'}_1(\varphi_\delta)$ converge vers $+\infty$.
- Soit $|\varphi(t, x)| < 1$ et alors pour δ assez petit, on a l'égalité $F'^{\delta'}_1(\varphi_\delta) = F'_1(\varphi_\delta)$ et donc la convergence souhaitée par continuité de F'_1 .

On a donc bien la convergence simple de $F'^{\delta'}_1(\varphi_\delta)$ vers $F'_1(\varphi)$ moyennant la convention que $F'_1 = +\infty$ en dehors de $] -1, 1 [$. En appliquant le lemme de Fatou, il vient

$$\int_{]0, T[\times\Omega} |F'_1(\varphi)|^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_{]0, T[\times\Omega} |F'^{\delta'}_1(\varphi_\delta)|^2 \leq C(U, \varphi_0, v_0, T),$$

d'après ce que l'on a vu plus haut.

Ainsi, la fonction $F'_1(\varphi)$ appartient à $L^2(]0, T[\times\Omega)$ et en particulier, elle est finie presque partout ce qui implique que

$$|\varphi(t, x)| < 1, \text{ pour presque tout } (t, x) \in]0, T[\times\Omega.$$

De plus, on peut maintenant utiliser $\psi = (G + F'_1(\varphi))/2 \in L^2(]0, T[\times\Omega)$ comme fonction test dans (III.4.73). On obtient alors

$$\int_{]0, T[\times\Omega} \left(\varphi - (F'_1)^{-1} \left(\frac{G + F'_1(\varphi)}{2} \right) \right) \left(G - F'_1(\varphi) \right) \geq 0. \quad (\text{III.4.74})$$

Pour $(t, x) \in]0, T[\times\Omega$, deux cas se produisent :

- Ou bien $G(t, x) > F'_1(\varphi(t, x))$ et alors comme $(F'_1)^{-1}$ est strictement croissante on a

$$(F'_1)^{-1} \left(\frac{G(t, x) + F'_1(\varphi(t, x))}{2} \right) > (F'_1)^{-1}(F'_1(\varphi(t, x))) = \varphi(t, x).$$

Ainsi la fonction sous le signe intégral dans (III.4.74) est négative au point (t, x) .

– Ou bien $G(t, x) \leq F'_1(\varphi(t, x))$ et comme dans le cas précédent on montre que la fonction sous le signe intégral dans (III.4.74) est négative au point (t, x) .
Ainsi (III.4.74) montre que l'intégrale d'une fonction négative est positive, ce qui implique la nullité de la fonction considérée. Ainsi pour presque tout (t, x) dans $]0, T[\times \Omega$ on a

$$\left(\varphi(t, x) - (F'_1)^{-1} \left(\frac{G(t, x) + F'_1(\varphi(t, x))}{2} \right) \right) \left(G(t, x) - F'_1(\varphi(t, x)) \right) = 0.$$

Supposons que $G(t, x) \neq F'_1(\varphi(t, x))$, alors on a $(F'_1)^{-1}((G(t, x) + F'_1(\varphi(t, x)))/2) = \varphi(t, x)$, ce qui implique que

$$\frac{G(t, x) + F'_1(\varphi(t, x))}{2} = F'_1(\varphi(t, x)),$$

et donc que $G(t, x) = F'_1(\varphi(t, x))$, ce qui est contraire à l'hypothèse. En résumé, on a montré que G , limite faible dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$ de $F_1^{\delta'}(\varphi_\delta)$ est égale presque partout à $F'_1(\varphi)$. Ceci conclut la preuve du théorème en justifiant de la validité du passage à la limite dans l'équation définissant μ_δ . ■

4.5 Solutions faibles dans le cas dégénéré

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la preuve du théorème III.3.4.

Théorème

Sous les hypothèses (III.3.11),(III.3.18)-(III.3.19), pour tout $0 < T < +\infty$, $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + H$ et $\varphi_0 \in \Phi_1$, tel que $|\varphi_0|_\infty \leq 1$ et

$$\int_{\Omega} \left(F(\varphi_0) + G(\varphi_0) \right) < +\infty, \quad (\text{III.4.75})$$

il existe une solution faible au problème (III.3.1)-(III.3.5) sur $[0, T[$ au sens de la définition III.3.3 qui satisfait de plus

$$|\varphi(t, x)| \leq 1 \text{ pour presque tout } (t, x) \in]0, T[\times \Omega.$$

Si on suppose de surcroît que $B'(1) = 0$ et $B'(-1) = 0$, alors pour presque tout $t \in [0, T[$ l'ensemble

$$\{x \in \Omega, |\varphi(t, x)| = 1\}$$

est de mesure nulle.

Preuve :

Dans cette démonstration, on utilise la méthode exposée dans [18], en introduisant une approximation non dégénérée de ce problème. Ainsi pour $0 < \delta < 1$, soit

$$\begin{aligned} B_\delta(x) &= B(-1 + \delta) && \text{si } x \leq -1 + \delta \\ B_\delta(x) &= B(x) && \text{si } -1 + \delta \leq x \leq 1 - \delta \\ B_\delta(x) &= B(1 - \delta) && \text{si } x \geq 1 - \delta. \end{aligned}$$

On a supposé que F_2 pouvait être prolongée en une fonction sur \mathbb{R} de classe C^2 telle que $\|F_2\|_{C^2(\mathbb{R})} \leq C$, et on introduit une approximation de F_1 , définie sur tout \mathbb{R} par

$$\begin{aligned} F_1^\delta(0) &= F_1(0) && \text{et } F_1^{\delta'}(0) = F'_1(0) \\ F_1^{\delta''}(x) &= F_1''(-1 + \delta) && \text{si } x \leq -1 + \delta \\ F_1^{\delta''}(x) &= F_1''(x) && \text{si } -1 + \delta \leq x \leq 1 - \delta \\ F_1^{\delta''}(x) &= F_1''(1 - \delta) && \text{si } x \geq 1 - \delta. \end{aligned}$$

On peut remarquer que $F_1(x) = F_1^\delta(x)$ si $|x| \leq 1 - \delta$. La fonction G est aussi approchée par G_δ définie sur \mathbb{R} par

$$G_\delta(0) = 0, G'_\delta(0) = 0, G''_\delta(x) = B_\delta(x)^{-1}.$$

On peut aisément vérifier que B_δ satisfait (III.3.11) et que $F_\delta = F_1^\delta + F_2$ satisfait (III.3.12)-(III.3.15) avec $p = 2$. Ainsi, le théorème III.3.1 permet d'obtenir l'existence d'une solution $\varphi_\delta, \mu_\delta$ et v_δ du problème approché obtenu en remplaçant B par B_δ et F par F_δ , au sens de la définition III.3.1.

• **Etape 1:**

Il faut maintenant montrer de nouvelles estimations sur $\varphi_\delta, \mu_\delta$ et v_δ uniformes en δ . En réalité, on note que, comme dans la preuve du théorème III.3.1, les calculs qui suivent doivent être effectués en toute rigueur sur les approximations de Galerkin de $\varphi_\delta, \mu_\delta$ et v_δ pour être complètement justifiés.

On utilise tout d'abord $\mu_\delta(t) \in \Phi_1$ comme fonction test dans (III.3.8) et $u_\delta = v_\delta(t) - Uv_\lambda \in V$ dans (III.3.7), λ étant fixé dans la suite. En sommant les résultats, il vient de la même façon que dans la preuve du théorème III.3.1,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi_\delta|_2^2 + \frac{1}{2} |u_\delta|_2^2 + \int_{\Omega} F_\delta(\varphi_\delta) \right) + \int_{\Omega} B_\delta(\varphi_\delta) |\nabla \mu_\delta|^2 + \eta_1 |\nabla u_\delta|_2^2 \\ \leq \alpha^2 U \int_{\Omega} |v_\lambda| |\nabla \varphi_\delta| |\Delta \varphi_\delta| + U |b(u_\delta, v_\lambda, u_\delta)| \\ + 2U \eta_2 \int_{\Omega} |D(v_\lambda)| |D(u_\delta)|. \end{aligned}$$

Comme G''_δ est bornée, $G'_\delta(\varphi_\delta)$ appartient à Φ_1 et peut donc être utilisée comme fonction test dans (III.3.8) de sorte qu'en utilisant la relation $B_\delta G''_\delta = 1$, il vienne

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} G_\delta(\varphi_\delta) \right) + \int_{\Omega} \nabla \mu_\delta \cdot \nabla \varphi_\delta = 0.$$

Après intégration par parties, cette dernière estimation s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} G_\delta(\varphi_\delta) \right) + \alpha^2 |\Delta \varphi_\delta|_2^2 + \int_{\Omega} (F_1^\delta)''(\varphi_\delta) |\nabla \varphi_\delta|^2 \leq \|F_2''\|_\infty |\nabla \varphi_\delta|_2^2.$$

Choisissons maintenant $\lambda = \min(k/U, \sqrt[4]{U})$, où k est une constante qui sera précisée ultérieurement, et grâce à la convexité de F_1^δ et à (III.4.2)-(III.4.3), écrivons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi_\delta|_2^2 + \frac{1}{2} |u_\delta|_2^2 + \int_{\Omega} F_\delta(\varphi_\delta) + \int_{\Omega} G_\delta(\varphi_\delta) \right) + \int_{\Omega} B_\delta(\varphi_\delta) |\nabla \mu_\delta|^2 + \alpha^2 |\Delta \varphi_\delta|_2^2 + \frac{\eta_1}{2} |\nabla u_\delta|_2^2 \\ \leq \|F_2''\|_\infty |\nabla \varphi_\delta|_2^2 + \alpha^2 k |\Delta \varphi_\delta|_2^2 \\ + f_1(U) + k |\nabla u_\delta|_2^2, \end{aligned}$$

où $f_1(U)$ tend vers zéro quand U tend vers zéro. Donc, si on fixe maintenant $k = \min(1/2, \eta_1/4)$, on a finalement obtenu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi_\delta|_2^2 + \frac{1}{2} |u_\delta|_2^2 + \int_{\Omega} F_\delta(\varphi_\delta) + \int_{\Omega} G_\delta(\varphi_\delta) \right) + \frac{\alpha^2}{2} |\Delta \varphi_\delta|_2^2 + \frac{\eta_1}{2} |\nabla u_\delta|_2^2 + \int_{\Omega} B_\delta(\varphi_\delta) |\nabla \mu_\delta|^2 \\ \leq \|F_2''\|_\infty |\nabla \varphi_\delta|_2^2 + f_1(U). \end{aligned} \quad (\text{III.4.76})$$

L'hypothèse technique (III.3.19) permet pour $\delta > 0$ assez petit, de montrer que $F_\delta^1(x) \leq F^1(x)$ et $G_\delta(x) \leq G(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Par le lemme de Gronwall et (III.4.75), on obtient à partir de (III.4.76) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u_\delta\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\varphi_\delta\|_{L^\infty(0,T;\Phi_1)} \leq C, \quad (\text{III.4.77})$$

$$\|u_\delta\|_{L^2(0,T;V)} + \|\varphi_\delta\|_{L^2(0,T;\Phi_2)} \leq C, \quad (\text{III.4.78})$$

$$\left\| \int_{\Omega} G_\delta(\varphi_\delta) \right\|_{L^\infty(0,T)} \leq C, \quad (\text{III.4.79})$$

$$\|B_\delta(\varphi_\delta) \nabla \mu_\delta\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} \leq C. \quad (\text{III.4.80})$$

On peut comme dans la preuve du théorème III.3.1, en utilisant (III.4.80), obtenir aisément les estimations

$$\left\| \frac{d\varphi_\delta}{dt} \right\|_{L^2(0,T;\Phi'_1)} \leq C, \quad (\text{III.4.81})$$

$$\left\| \frac{du_\delta}{dt} \right\|_{L^2(0,T;V'_{\frac{d}{2}})} \leq C. \quad (\text{III.4.82})$$

Ainsi, on peut extraire des sous-suites de (u_δ) et (φ_δ) toujours notées (u_δ) et (φ_δ) telles que, grâce au lemme III.2.4,

$\varphi_\delta \rightharpoonup \varphi$ dans $L^2(0,T;\Phi_1)$ fort et presque partout,

$\Delta\varphi_\delta \rightharpoonup \Delta\varphi$ dans $L^2([0,T]\times\Omega)$ faible,

$\varphi_\delta \rightharpoonup \varphi$ dans $C^0([0,T],\Phi_{\frac{1}{2}})$ faible,

$u_\delta \rightharpoonup u$ dans $L^2(0,T;H)$ fort et presque partout,

$u_\delta \rightharpoonup u$ dans $L^2(0,T;V)$ faible,

$u_\delta \rightharpoonup u$ dans $C^0([0,T],V_{\frac{d-2}{4}})$ faible.

Finalement, le choix de λ étant indépendant de δ , on voit que si on pose $v = u + Uv_\lambda$ on a

$v_\delta \rightharpoonup v$ dans $L^2([0,T]\times\Omega)$ fort et presque partout,

$v_\delta - v_\infty^U \rightharpoonup v - v_\infty^U$ dans $L^2(0,T;V)$ faible.

• **Etape 2 - Estimation L^∞ :**

Par définition, $G(x) \geq 0$, $G'(x) \geq 0$ si $x \geq 0$ et $G(x) \geq 0$, $G'(x) \leq 0$ si $x \leq 0$. Ainsi, si $x > 1$ on a

$$\begin{aligned} G_\delta(x) &= G_\delta(1-\delta) + G'_\delta(1-\delta)(x-(1-\delta)) + \frac{1}{2}G''_\delta(1-\delta)(x-(1-\delta))^2 \\ &= G(1-\delta) + G'(1-\delta)(x-(1-\delta)) + \frac{1}{2}G''(1-\delta)(x-(1-\delta))^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{1}{B(1-\delta)}(x-1)^2, \end{aligned}$$

et de façon similaire, si $x < -1$ on a

$$\begin{aligned} G_\delta(x) &= G_\delta(-1+\delta) + G'_\delta(-1+\delta)(x-(-1+\delta)) + \frac{1}{2}G''_\delta(-1+\delta)(x-(-1+\delta))^2 \\ &= G(-1+\delta) + G'(-1+\delta)(x-(-1+\delta)) + \frac{1}{2}G''(-1+\delta)(x-(-1+\delta))^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{1}{B(-1+\delta)}(x+1)^2. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\int_\Omega (|\varphi_\delta| - 1)_+^2 \leq 2 \max(B(1-\delta), B(-1+\delta)) \int_\Omega G_\delta(\varphi_\delta),$$

et que donc, avec (III.4.79), et le fait que $B(1-\delta)$ et $B(-1+\delta)$ tendent vers zéro quand δ tend vers zéro, on déduit que

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_\Omega ((|\varphi_\delta| - 1)^+)^2 \rightarrow 0.$$

Grâce, par exemple, au lemme de Fatou, on obtient

$$\sup_{t \in]0, T[} \int_{\Omega} ((|\varphi| - 1)^+)^2 = 0,$$

ce qui prouve que $|\varphi| \leq 1$ pour presque tout temps t et presque tout $x \in \Omega$.

• **Etape 3 - Passage à la limite dans les équations :**

Pour conclure la preuve du théorème, il faut vérifier que les fonctions limites φ et v obtenues sont solutions du problème dégénéré de départ.

L'équation (III.3.9) étant vérifiée par v_δ on a pour tout $w \in V$ et $\rho \in \mathcal{D}(]0, T[)$,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (v_\delta, \rho'(t)w) dt + \int_0^T b(v_\delta, v_\delta, \rho(t)w) + 2 \int_{]0, T[\times \Omega} \eta(\varphi_\delta) D(v_\delta) : D(\rho w) \\ & = -\alpha^2 \int_{]0, T[\times \Omega} ((\rho w) \cdot \nabla \varphi_\delta) \Delta \varphi_\delta. \end{aligned}$$

Le passage à la limite est classique dans les deux premiers termes. Pour le troisième terme, on remarque que d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\eta(\varphi_\delta) D(\rho w)$ converge vers $\eta(\varphi) D(\rho w)$ dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$ fortement et que donc la convergence faible de $D(v_\delta)$ vers $D(v)$ dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$ permet d'effectuer le passage à la limite.

Finalement, le lemme III.2.4 associé à (III.4.78), (III.4.81) permet de montrer (quitte à extraire de nouvelles sous-suites) que φ_δ converge vers φ dans $L^2(0, T, H^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ fortement. Donc grâce aux injections de Sobolev, $\nabla \varphi_\delta$ converge vers $\nabla \varphi$ dans $L^2(0, T, \mathbb{L}^3(\Omega))$ fortement. Ainsi, comme $\rho.w \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^6(\Omega))$ et que $\Delta \varphi_\delta$ converge faiblement vers $\Delta \varphi$ dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$, on peut passer à la limite dans le dernier terme. Ceci prouve que φ et v satisfont (III.3.9).

En ce qui concerne l'équation (III.3.10), on a pour tout $\psi \in \Phi_2$ et $\rho \in \mathcal{D}(]0, T[)$

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\varphi_\delta, \rho(t)\psi) dt + \alpha^2 \int_{]0, T[\times \Omega} B_\delta(\varphi_\delta) \Delta \varphi_\delta (\rho \Delta \psi) + \alpha^2 \int_{]0, T[\times \Omega} B'_\delta(\varphi_\delta) \Delta \varphi_\delta \nabla \varphi_\delta \cdot (\rho \nabla \psi) \\ & + \int_{]0, T[\times \Omega} (B_\delta F''_\delta)(\varphi_\delta) \nabla \varphi_\delta \cdot (\rho \nabla \psi) - \int_{]0, T[\times \Omega} (v_\delta \cdot \nabla (\rho \psi)) \varphi_\delta = 0. \end{aligned} \tag{III.4.83}$$

Le passage à la limite dans le premier terme est immédiat. De plus, les fonctions B_δ sont, par construction, uniformément bornées par $\|B\|_\infty$ et la suite de fonctions B_δ converge uniformément vers B sur \mathbb{R} . Ceci implique avec le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que $B_\delta(\varphi_\delta)(\rho \Delta \psi)$ converge vers $B(\varphi)(\rho \Delta \psi)$ dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$ fortement ce qui joint à la convergence faible de $\Delta \varphi_\delta$ dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$, permet de passer à la limite dans le second terme.

Le traitement du troisième terme est un peu plus délicat. Il faut d'abord noter que $\rho \cdot \nabla \psi \in L^\infty(]0, T[\times \Omega)$ car $\psi \in V_3$, et que $\Delta \varphi_\delta$ converge faiblement vers $\Delta \varphi$ dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$. On pourra donc passer à la limite dans ce troisième terme si on montre que $B'_\delta(\varphi_\delta) \nabla \varphi_\delta$ converge fortement vers $B'(\varphi) \nabla \varphi$ dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$. Il faut pour cela utiliser l'estimation L^∞ obtenue sur φ à l'étape précédente, et écrire

$$\begin{aligned} \int_{]0, T[\times \Omega} |B'_\delta(\varphi_\delta) \nabla \varphi_\delta - B'(\varphi) \nabla \varphi|^2 &= \int_{]0, T[\times \Omega \cap \{|\varphi| < 1\}} |B'_\delta(\varphi_\delta) \nabla \varphi_\delta - B'(\varphi) \nabla \varphi|^2 \\ &+ \int_{]0, T[\times \Omega \cap \{|\varphi| = 1\}} |B'_\delta(\varphi_\delta) \nabla \varphi_\delta - B'(\varphi) \nabla \varphi|^2. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, comme $|\varphi| < 1$ on a $B'_\delta(\varphi_\delta) \rightarrow B'(\varphi)$ et $\nabla \varphi_\delta \rightarrow \nabla \varphi$ presque partout et

$$|B'_\delta(\varphi_\delta) \nabla \varphi_\delta - B'(\varphi) \nabla \varphi|^2 \leq 2 \|B'\|_\infty (|\nabla \varphi_\delta|^2 + |\nabla \varphi|^2).$$

Comme le membre de droite de cette inégalité converge dans $L^2([0, T] \times \Omega)$ on peut, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, la dominer uniformément en δ par une fonction de $L^2([0, T] \times \Omega)$. Ceci permet de passer à la limite dans l'intégrale considérée.

De plus, un lemme classique [19] affirme que $\nabla \varphi = 0$ presque partout dans $\{|\varphi| = 1\}$, ce qui permet d'écrire la seconde intégrale de la façon suivante

$$\begin{aligned} \int_{[0, T] \times \Omega \cap \{|\varphi| = 1\}} |B'_\delta(\varphi_\delta) \nabla \varphi_\delta|^2 &\leq \|B'\|_\infty^2 \int_{[0, T] \times \Omega \cap \{|\varphi| = 1\}} |\nabla \varphi_\delta|^2 \\ &\longrightarrow \|B'\|_\infty^2 \int_{[0, T] \times \Omega \cap \{|\varphi| = 1\}} |\nabla \varphi|^2 = 0. \end{aligned}$$

Ce qui établit le passage à la limite dans le troisième terme de (III.4.83).

On a supposé que BF'' était continue sur $[-1, 1]$, ce qui entraîne que $B_\delta F''_\delta$ est uniformément bornée par rapport à δ , de sorte que pour passer à la limite dans le quatrième terme de (III.4.83), il ne reste plus qu'à montrer que $(B_\delta F''_\delta)(\varphi_\delta)$ converge vers $(BF'')(\varphi)$ presque partout. Ce dernier point est évident si $|\varphi| < 1$ car alors pour δ assez petit on a l'égalité $(B_\delta F''_\delta)(\varphi_\delta) = (BF'')(\varphi_\delta)$ et on conclut par continuité. Montrons que cela reste vrai si, par exemple, $\varphi(t, x) = 1$ (le cas $\varphi = -1$ étant traité de façon identique).

– Si δ est tel que $0 \leq \varphi_\delta(t, x) \leq 1 - \delta$ alors on a l'égalité

$$(B_\delta F''_\delta)(\varphi_\delta(t, x)) = (BF'')(\varphi_\delta(t, x)).$$

– Si δ est tel que $\varphi_\delta > 1 - \delta$ alors on a

$$(B_\delta F''_\delta)(\varphi_\delta(t, x)) = (BF_1'')(1 - \delta) + B(1 - \delta)F_2''(\varphi_\delta(t, x)).$$

Dans les deux cas on peut conclure que $(B_\delta F''_\delta)(\varphi_\delta)$ converge vers $(BF'')(\varphi)$ presque partout.

Enfin, le passage à la limite dans le cinquième et dernier terme de (III.4.83) est immédiat car $\rho \cdot \nabla \psi \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$ et v_δ, φ_δ convergent toutes les deux fortement dans $L^2([0, T] \times \Omega)$.

On a donc bien prouvé que les fonctions v, φ sont des solutions faibles du problème au sens de la définition III.3.3.

• **Etape 4:**

Dans cette dernière partie de la preuve, on suppose que $B'(1) = B'(-1) = 0$. Cela implique immédiatement que $G(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 ou -1 . Grâce à (III.4.79) et au lemme de Fatou, on a pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\int_{\Omega} \liminf_{\delta \rightarrow 0} G_\delta(\varphi_\delta) \leq C. \quad (\text{III.4.84})$$

- Si $|\varphi(t, x)| < 1$ alors pour δ assez petit on a $G_\delta(\varphi_\delta(t, x)) = G(\varphi_\delta(t, x))$ et ainsi par continuité

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} G_\delta(\varphi_\delta(t, x)) = G(\varphi(t, x)).$$

- Si $\varphi(t, x) = 1$ par exemple, alors pour tout $\delta > 0$,

$$G_\delta(\varphi_\delta(t, x)) \geq \min(G(1 - \delta), G(\varphi_\delta(t, x))).$$

Et donc, comme $G(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 1$, on voit que

$$G_\delta(\varphi_\delta(t, x)) \rightarrow +\infty, \quad (\text{III.4.85})$$

- De même quand $\varphi(t, x) = -1$, on a aussi (III.4.85).

Pour finir, (III.4.84) et (III.4.85) donnent exactement le fait que l'ensemble

$$\{x \in \Omega, |\varphi(t, x)| = 1\}$$

est de mesure nulle, ce qui conclut la démonstration du théorème. ■

4.6 Un résultat asymptotique

On termine ce chapitre par la preuve du théorème III.3.5.

Théorème

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\omega \in I$ donné. On suppose que B est une fonction positive de classe C^1 définie sur I , F une fonction de classe C^3 définie sur I . Alors, pour $U \geq 0$ assez petit, la solution stationnaire de (III.3.1)-(III.3.5) donnée par $\varphi_\infty = \omega$ et $v_\infty^U = Uze_x$ est asymptotiquement stable sous les conditions

$$\begin{aligned} B(\omega) &> 0, \\ F''(x) &\geq 0 \text{ pour tout } x \text{ dans un voisinage de } \omega. \end{aligned}$$

Plus précisément, pour tout $\beta > 0$ assez petit, et pour toutes données $U \geq 0$, $v_0 \in v_\infty^U + V$, $\varphi_0 \in \Phi_2$ satisfaisant

$$m(\varphi_0) = \omega, |U| \leq \beta, \|v_0\|_1 \leq \beta, \|\varphi_0 - m(\varphi_0)\|_2 \leq \beta,$$

il existe une unique solution forte globale sur \mathbb{R}^+ du problème (III.3.1)-(III.3.5) au sens de la définition III.3.2. Celle-ci vérifie de plus

$$\|v - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V)} + \|\varphi - \varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_2)} \leq h(\beta),$$

où $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue telle que $h(0) = 0$. Enfin, si β est assez petit, on a quand $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\longrightarrow \varphi_\infty \text{ dans } \Phi_s \text{ pour tout } 0 \leq s < 2, \\ v(t) - v_\infty^U &\longrightarrow 0 \text{ dans } V_s \text{ pour tout } 0 \leq s < 1. \end{aligned}$$

Preuve :

La démonstration s'effectue en quatre étapes. Dans la première on introduit le problème modifié que l'on va étudier pour établir le résultat, dans les deux suivantes on montre que l'on peut en effet obtenir ainsi des solutions fortes du problème de départ (y compris en dimension 3), ainsi que de nouvelles estimations sur ces solutions. Dans la dernière partie, on montre le résultat de convergence proprement dit pour les solutions issues de données initiales proches de la solution stationnaire considérée.

- **Etape 1 - Troncature :**

Soit $\delta > 0$ tel que

$$I_\delta = [\omega - \delta, \omega + \delta] \subset I,$$

$$F'' \geq 0, B > 0 \text{ dans un voisinage de } I_\delta.$$

On peut aisément construire une fonction F_ω de classe C^3 telle que

$$F_\omega(\omega) = 0, F'_\omega(\omega) = 0, F''_\omega(x) = F''(x) \text{ sur } I_\delta, F''_\omega(x) \geq 0 \text{ si } x \notin I_\delta,$$

et telle que F'''_ω est bornée sur \mathbb{R} . Cette fonction vérifie les hypothèses (III.3.12)-(III.3.15) et (III.3.17) et de plus, la convexité de F_ω entraîne

$$0 = F_\omega(\omega) \geq F(x) + (\omega - x)F'(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

de sorte que dans (III.3.14) on peut prendre les constantes égales

$$F_3(\omega) = 1, \quad F_4(\omega) = 0. \tag{III.4.86}$$

On peut aussi construire une fonction B_ω de classe C^1 satisfaisant (III.3.11) et (III.3.16) et telle que

$$B_\omega(x) = B(x), \forall x \in I_\omega.$$

On peut donc appliquer le théorème III.3.2 en remplaçant dans les équations, F par F_ω et B par B_ω pour obtenir l'existence d'une solution forte $(\varphi_\omega, v_\omega)$ pour ce problème modifié.

- **Etape 2 - Estimations dans le cas bidimensionnel :**

Le point clé de la preuve réside dans (III.4.86). En effet, dans (III.4.17) les termes en $F_4(m(\varphi_0)) = F_4(\omega)$ s'annulent d'après ce que l'on vient de voir, ce qui implique que $k_1(v_0, \varphi_0, U)$ converge vers zéro quand U , $|v_0|_2$ et $\|\varphi_0 - \omega\|_1$ convergent vers zéro. En utilisant (III.4.20), (III.4.52), (III.4.53) et (III.4.54) on montre que $k_5(v_0, \varphi_0, U)$ tend aussi vers zéro quand U , $\|v_0\|_1$ et $\|\varphi_0 - \omega\|_2$ tendent vers zéro.

Tout ceci implique l'existence d'une fonction continue h , telle que $h(0) = 0$, telle que pour tout $\beta > 0$, si on suppose

$$|U| \leq \beta, \|v_0\|_1 \leq \beta, \|\varphi_0 - \omega\|_2 \leq \beta,$$

on a

$$\|v_\omega - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V)} + \|\varphi_\omega - \varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_2)} \leq h(\beta),$$

Si β est suffisamment petit, on peut assurer que $|\varphi_\omega(t, x) - \omega| \leq \delta$ pour tout t, x (voir la remarque III.3.1) et que donc, pour tout t, x on a

$$B_\omega(\varphi_\omega(t, x)) = B(\varphi_\omega(t, x)),$$

et

$$F_\omega(\varphi_\omega(t, x)) = F(\varphi_\omega(t, x)) - F(\omega) - (\varphi_\omega(t, x) - \omega)F'(\omega).$$

Remarquons que dans (III.3.7) et (III.3.8), le potentiel F n'intervient que dans le terme $\nabla\mu$ et que donc, l'ajout d'une fonction affine à F ne change pas les équations ni leurs solutions. On en déduit que φ_ω et v_ω sont des solutions fortes du problème original avec le potentiel F et la mobilité B .

• **Etape 3 - Existence de solutions fortes globales en dimension $d = 3$:**

Reprendons les estimations effectuées dans la démonstration du théorème général sur les solutions fortes du problème (théorème III.3.2), pour le problème modifié introduit plus haut. On a obtenu l'estimation (III.4.55) que l'on peut écrire

$$y'(t) + \gamma y(t) \leq \tilde{k}_3(v_0, \varphi_0, U) + \tilde{g}(t)y(t) + C(y^2(t) + y^4(t))y(t), \quad (\text{III.4.87})$$

où γ est une constante dépendant seulement de B_1 , η_1 et Ω , et où g vérifie l'estimation uniforme

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} g(s)ds \leq \tilde{k}_4(v_0, \varphi_0, U, \tau).$$

On a de plus, comme dans le cas de la dimension $d = 2$ ci-dessus, k_1 , k_2 , \tilde{k}_3 et \tilde{k}_4 qui tendent vers zéro quand $\|v_0\|_1$, $\|\varphi_0 - \omega\|_2$ et U tendent vers zéro.

L'idée est alors d'absorber le terme non linéaire du second membre de l'inéquation différentielle (III.4.87), par le terme coercif γy dans le membre de gauche. C'est en effet, à cause du terme non linéaire dans cette estimation que l'on ne peut en général pas prouver la globalité des solutions fortes du problème. Choisissons donc $\beta > 0$ assez petit pour que dès que $U \leq \beta$, $\|v_0\|_1 \leq \beta$ et $\|\varphi_0 - \omega\|_2 \leq \beta$ on ait

$$C(y(0)^2 + y(0)^4) \leq \frac{\gamma}{2}.$$

Par un argument de continuité, on sait qu'il existe un temps $T_1 > 0$ tel que pour tout $0 \leq t < T_1$, on a

$$C(y(t)^2 + y(t)^4) < \gamma. \quad (\text{III.4.88})$$

Supposons que T soit le temps maximal pour lequel cette propriété reste vraie. Sur l'intervalle $[0, T[$, (III.4.87) devient

$$y'(t) + \gamma y(t) \leq \tilde{k}_3 + \tilde{g}(t)y(t) + \gamma y(t),$$

ou encore

$$y'(t) \leq \tilde{k}_3 + \tilde{g}(t)y(t).$$

et par le lemme de Gronwall uniforme (lemme III.2.5), de la même façon que pour l'étude du cas bidimensionnel dans la preuve du théorème III.3.2, on a

$$y(t) \leq \tilde{k}_5(v_0, \varphi_0, U), \quad \forall 0 \leq t < T,$$

où

$$\tilde{k}_5(v_0, \varphi_0, U) = \left(\max \left(\frac{\alpha^2}{2} |\Delta \varphi_0|_2^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_0|_2^2 + f_5(U), k_2^2 \right) + \tilde{k}_3 \right) e^{\tilde{k}_4}.$$

Comme dans le cas bidimensionnel qui a précédé, on déduit de (III.4.86) et des estimations obtenues sur les solutions faibles et fortes, que \tilde{k}_5 tend vers zéro quand $U, \|v_0\|_1$ et $\|\varphi_0 - \omega\|_2$ tendent vers zéro. Donc, en supposant que β est assez petit pour que l'on ait

$$C(\tilde{k}_5^2 + \tilde{k}_5^4) < \gamma,$$

on voit que le temps maximal pour lequel (III.4.88) est vraie est $T = +\infty$. Ceci prouve l'existence d'une solution forte globale pour le problème modifié, et cette solution satisfait

$$y(t) \leq \tilde{k}_5(v_0, \varphi_0, U), \quad \forall t \geq 0,$$

ce qui implique que l'on a, pour une certaine fonction h continue positive et nulle en 0,

$$\|v_\omega - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V)} + \|\varphi_\omega - \varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_2)} \leq h(\beta),$$

La conclusion s'obtient alors comme à la fin de l'étape 2 : φ_ω et v_ω sont en fait des solutions fortes du problème initial.

Ceci termine la preuve du premier point du théorème sur la stabilité de la solution stationnaire envisagée.

• **Etape 4 - Comportement asymptotique :**

La fin de la preuve qui va suivre est valable aussi bien en dimension $d = 2$ qu'en dimension $d = 3$. On rappelle qu'on a montré que pour tout (t, x) , $\varphi(t, x)$ est dans l'intervalle $[\omega - \delta, \omega + \delta]$ dans lequel B et B_ω coïncident et F'' est positive.

On déduit de l'équation (III.3.10) que pour tout $\psi \in \Phi_2$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi - \omega, \psi) + \alpha^2 \int_{\Omega} B'_\omega(\varphi) \Delta \varphi \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \alpha^2 \int_{\Omega} B_\omega(\varphi) \Delta \varphi \Delta \psi \\ + \int_{\Omega} B_\omega(\varphi) F''(\varphi) \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega} (v \cdot \nabla \psi)(\varphi - \omega) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne avec $\psi = \varphi - \omega$ et grâce au théorème de la divergence

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi - \omega|_2^2 + \alpha^2 B_1 |\Delta \varphi|_2^2 \leq \alpha^2 \int_{\Omega} |B'_\omega(\varphi)| |\Delta \varphi| |\nabla \varphi|^2,$$

en se souvenant que B_ω est minorée par une constante B_1 . Finalement, on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi - \omega|_2^2 + B_1 |\Delta \varphi|_2^2 \leq \alpha^2 \|B'_\omega\|_\infty |\Delta \varphi|_2 |\nabla \varphi|_4^2 \leq C \|\varphi - \omega\|_2 |\Delta \varphi|_2^2 \leq Ch(\beta) |\Delta \varphi|_2^2.$$

Si on choisit β assez petit pour que $Ch(\beta) \leq \frac{B_1}{2}$, on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi - \omega|_2^2 + \frac{B_1}{2} |\Delta \varphi|_2^2 \leq 0,$$

et donc avec les inégalités (III.2.7), il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$|\varphi - \omega|_2 \leq C e^{-\gamma t},$$

de sorte que $\varphi(t) \rightarrow \varphi_\infty$ dans Φ_0 . En fait $\varphi(t) - \varphi_\infty$ est dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_2)$, ce qui permet de déduire par interpolation que $\varphi(t) \rightarrow \varphi_\infty$ dans Φ_s pour tout $0 \leq s < 2$.

Si on note que $(v_\infty^U \cdot \nabla) v_\infty^U = 0$ et $\Delta v_\infty^U = 0$, l'équation (III.3.7) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v - v_\infty^U, w) + b(v, v - v_\infty^U, w) + b(v - v_\infty^U, v_\infty^U, w) + 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi) D(v - v_\infty^U) : D(w) \\ + \int_{\Omega} (\eta(\varphi) - \eta(\omega)) D(v_\infty^U) : D(w) = -\alpha^2 \int_{\Omega} (w \cdot \nabla \varphi) \Delta \varphi \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+), \forall w \in V \end{aligned}$$

ce qui avec $w = v - v_\infty^U \in V$ fournit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v - v_\infty^U|_2^2 + 2\eta_1 |\nabla(v - v_\infty^U)|_2^2 \leq |b(v - v_\infty^U, v_\infty^U, v - v_\infty^U)| + \int_{\Omega} |\eta(\varphi) - \eta(\omega)| |D(v - v_\infty^U)| |D(v_\infty^U)| \\ + \alpha^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi| |\Delta \varphi| |v - v_\infty^U|. \end{aligned}$$

Donc, comme $|\nabla v_\infty^U|_1 = |\Omega| U$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v - v_\infty^U|_2^2 + 2\eta_1 |\nabla(v - v_\infty^U)|_2^2 &\leq C \|v_\infty^U\|_1 \|v - v_\infty^U\|_1^2 + \|\eta'\|_\infty |\varphi - \varphi_\infty|_\infty |D(v - v_\infty^U)|_2 |D(v_\infty^U)|_2 \\ &\quad + |\nabla \varphi|_3 |\Delta \varphi|_2 \|v - v_\infty^U\|_1 \\ &\leq CU |\nabla(v - v_\infty^U)|_2^2 + CU^2 |\nabla(v - v_\infty^U)|_2^2 + C |\varphi - \varphi_\infty|_\infty^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} |\Delta \varphi|_2^2 |\nabla(v - v_\infty^U)|_2^2 + |\nabla(\varphi - \varphi_\infty)|_3^2. \end{aligned}$$

On a vu que $|\Delta \varphi|_2 \leq h(\beta)$ et $U \leq \beta$ par hypothèse, ainsi si on impose à β d'être assez petit, l'injection de Sobolev $H^{\frac{1}{2}} \subset L^3$ permet d'écrire

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v - v_\infty^U|_2^2 + \frac{\eta_1}{2} |\nabla(v - v_\infty^U)|_2^2 \leq C |\varphi - \varphi_\infty|_\infty^2 + C \|\varphi - \varphi_\infty\|_{\frac{3}{2}}^2. \quad (\text{III.4.89})$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré (III.2.5) et à la convergence de $\varphi(t)$ vers φ_∞ dans Φ_s pour tout $s < 2$ on obtient de (III.4.89)

$$\frac{d}{dt} |v - v_\infty^U|_2^2 + \gamma |v - v_\infty^U|_2^2 \leq f(t),$$

où $\gamma > 0$ est une constante, et $f(t)$ tend vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$. Un argument classique d'équations différentielles ordinaires permet d'obtenir

$$|v - v_\infty^U|_2^2 \leq |v_0 - v_\infty^U|_2^2 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{\gamma(s-t)} f(s) ds,$$

et donc, comme $f(t) \rightarrow 0$, on déduit aisément que $v(t) - v_\infty^U$ converge vers zéro dans H .

Comme de plus $v(t) - v_\infty^U$ est uniformément bornée dans V_1 par rapport à t , on obtient la convergence de $v(t) - v_\infty^U$ vers zéro dans tous les espaces intermédiaires V_s pour tout $0 \leq s < 1$. ■

Bibliographie du chapitre 3

- [1] S. Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems*, volume 2 of *Mathematical Studies*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1965.
- [2] N. Alikakos, P. Bates, and G. Fusco. Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension. *Journal of Differential Equation*, 90 :pp 71–135, 1991.
- [3] N. Alikakos and G. Fusco. Slow dynamics for the Cahn-Hilliard equation in higher space dimensions : The motion of bubbles. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 141 :pp 1–61, 1998.
- [4] H. W. Barrett and J. F. Blowey. Finite elements approximation of the Cahn-Hilliard equation with concentration dependent mobility. *Mathematics of Computation*, 68 :pp 487–517, 1999.
- [5] P. W. Bates and P. C. Fife. The dynamics of nucleation for the Cahn-Hilliard equation. *SIAM Journal of Applied Maths*, 53 :pp 990–1008, 1993.
- [6] F. Boyer. Mathematical study of multiphase flow under shear through order parameter formulation. *Asymptotic Analysis*, 20 :pp 175–212, 1999.
- [7] F. Boyer. Diphasic flow with a logarithmic Cahn-Hilliard potential. *en préparation*, 2001.
- [8] F. Boyer. Nonhomogeneous Cahn-Hilliard fluids. *Annales de l'IHP : Analyse non linéaire*, sous presse, 2001.
- [9] F. Boyer. A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows. *Computers and Fluids*, sous presse, 2001.
- [10] F. Boyer and P. Fabrie. Persistency of 1D solutions for a Cahn-Hilliard flow under high shear in a stretched 2D domain. *en préparation*, 2001.
- [11] J. W. Cahn and J. E. Hilliard. Free energy of a Nonuniform System. III. Nucleation in a two-component incompressible fluid. *J. Chem. Phys.*, 31 :pp 688–699, 1959.
- [12] J. Carr, M. Gurtin, and M. Slemrod. Structured phase transitions on a finite interval. *Archive for Rational Mechanical Analysis*, 86 :pp 317–351, 1984.
- [13] R. Chella and J. Vinals. Mixing of a two-phase fluid by a cavity flow. *Physical Review E*, 53 :p 3832, 1996.
- [14] A. Colin and P. Panizza. communication personnelle.
- [15] A. Debussche and L. Dettori. On the Cahn-Hilliard equation with a logarithmic free energy. *Nonlinear Analysis*, 10 :pp 1491–1514, 1995.
- [16] M. Doi. Dynamics of domains and textures. *Theoretical Challenges in the Dynamics of Complex Fluids*, pages 293–314, 1997.
- [17] C. Dupaix. A singularly perturbed phase field model with a logarithmic nonlinearity : Upper-semicontinuity of the attractor. *Nonlinear Analysis*, 41 :pp 725–744, 2000.
- [18] C. M. Elliott and H. Garcke. On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility. *Siam Journal on Mathematical Analysis*, 27 :pp 404–423, 1996.
- [19] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [20] D. Gunton, P. S. Sahni, and M. San Miguel. The dynamics of first-order phase transitions. In *Phase transitions and critical phenomena*, Vol. 8, pages 267–482. Domb and Lebowitz (Academic press, London), 1983.
- [21] M. E. Gurtin, D. Polignone, and J. Vinals. Two-phase binary fluids and immiscible fluids described by an order parameter. *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, 6 :p 815, 1996.
- [22] T. Hagstrom and J. Lorenz. All-time existence of classical solutions for slightly compressible flows. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(3) :pp 652–672, 1998.
- [23] E. Hopf. On nonlinear partial differential equations. In *Lecture Series of the Symposium on Partial Differential Equations, Berkeley, 1955*, pages 1–29. The University of Kansas, 1957.

- [24] C. O. Horgan. Korn's inequalities and their applications in continuum mechanics. *SIAM Review*, 37 :pp 491–511, 1995.
- [25] D. Jamet. *Etude des potentialités de la théorie du second gradient pour la simulation numérique directe des écoulements liquide-vapeur avec changement de phase*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, CEA Grenoble, 1998.
- [26] D. Jasnow and J. Vinals. Coarse-grained description of thermo-capillary flow. *Phys. Fluids*, 8 :p 660, 1996.
- [27] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, 1968.
- [28] A. Miranville. Upper bound on the dimension of the attractor for the shear-layer flow in space dimension 3. In *Dynamical systems (Stockholm, 1992)*, pages 61–74. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1993.
- [29] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 146 :pp 65–96, 1987.
- [30] L. Tartar. *Topics in Nonlinear Analysis*. Publications Mathématiques d'Orsay 78-13, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1978.
- [31] R. Temam. *Navier-Stokes equations*, volume 2 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Comp., 1977.
- [32] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Applied Mathematical Science*. Springer-Verlag, 1997.
- [33] J. Wei and M. Winter. On the stationary Cahn-Hilliard equation : bubble solutions. *SIAM J. Math. Anal.*, 29 :pp 1492–1518, 1998.
- [34] J. Wei and M. Winter. On the stationary Cahn-Hilliard equation : interior spike solutions. *J. Differential Equations*, 148 :pp 231–267, 1998.
- [35] J. Wei and M. Winter. Stationary solutions for the Cahn-Hilliard equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré : Analyse non linéaire*, 15 :pp 459–492, 1998.

Chapitre 4

Cas faiblement non-homogène

1 Introduction

Dans ce chapitre, on revient à l'étude du modèle général qui a été établi dans la première partie de la thèse. Rappelons que si φ est le paramètre d'ordre, μ le potentiel chimique et v le champ de vitesse moyen alors le système s'écrit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \right) \right) = 0, \quad (\text{IV.1.1})$$

$$\mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi), \quad (\text{IV.1.2})$$

$$\rho_\varepsilon(\varphi) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) - 2 \operatorname{div} (\eta(\varphi) D(v)) + \nabla p = \mu \nabla \varphi + \varepsilon \frac{1 - \varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \right) + \rho_\varepsilon(\varphi) g, \quad (\text{IV.1.3})$$

$$\operatorname{div} (v) = 0, \quad (\text{IV.1.4})$$

où la densité adimensionnée est donnée par

$$\rho_\varepsilon(\varphi) = 1 + \varepsilon \frac{\varphi - 1}{2}, \quad (\text{IV.1.5})$$

avec

$$\varepsilon = \frac{|\rho_1^0 - \rho_2^0|}{\max(\rho_1^0, \rho_2^0)}.$$

Remarquons que dans les équations précédentes, on fait l'hypothèse, comme dans tout ce chapitre, que la mobilité dans l'équation de Cahn-Hilliard est constante $B(\varphi) \equiv 1$ par exemple.

On a vu dans le chapitre précédent qu'en général si la mobilité ne dégénère pas et si le potentiel F n'est pas singulier (même dans le cas homogène $\varepsilon = 0$), on ne peut pas prouver que le paramètre d'ordre prend ses valeurs dans l'intervalle physique $[-1, 1]$. Ceci est essentiellement dû au fait que l'opérateur bilaplaciens ne vérifie pas un principe du maximum [9].

Cela implique que si on se contente de définir la densité ρ_ε par (IV.1.5), on ne pourra pas assurer que celle-ci reste positive au cours du temps, ce qui n'est pas mathématiquement acceptable (l'équation de Navier-Stokes pourrait alors devenir rétrograde et donc mal posée). C'est la raison pour laquelle, on introduit une définition de la densité légèrement différente. On suppose que ρ_ε est une fonction régulière qui coïncide avec la définition (IV.1.5) sur l'intervalle $[-1, 1]$, telle que

$$|\rho'_\varepsilon|_\infty \leq \varepsilon$$

et qui vérifie de plus

$$0 < \rho_1 \leq \rho_\varepsilon(\varphi) \leq \rho_2,$$

indépendamment de ε .

Si dans certains cas précis (voir par exemple le résultat de stabilité asymptotique à la fin du chapitre), on peut montrer *a posteriori* que la solution φ obtenue reste dans l'intervalle $[-1, 1]$ alors la densité $\rho_\varepsilon(\varphi)$ coïncide avec la densité physique au cours du temps.

Dans ce chapitre comme dans le précédent, on se concentre sur l'étude du système dans le cadre du cisaillement. Autrement dit, les conditions aux limites choisies sont les mêmes que dans le cadre homogène.

Le premier objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions à ce problème. Sans hypothèse sur le paramètre ε , on sait montrer l'existence et l'unicité locale de solutions régulières (théorème IV.4.1). Dans ce cas l'existence de solutions faibles même locale reste un problème ouvert.

Néanmoins, en régime faiblement non-homogène, c'est-à-dire si on suppose ε petit, on peut améliorer très significativement les résultats. En effet, on va voir que si ε est assez petit, il existe une solution faible globale et uniformément bornée en temps dans les espaces appropriés (théorème IV.4.2). De plus, cette solution converge quand $\varepsilon \rightarrow 0$, à une extraction de sous-suite près, vers une solution faible du problème homogène étudié dans le chapitre précédent.

De plus, on montre dans le théorème IV.4.3, toujours sous la condition que ε est assez petit, l'existence et l'unicité de solutions fortes (globales en 2D et locales en 3D) pour des données initiales régulières.

Enfin, on va voir dans le théorème IV.4.4, que les propriétés de stabilité asymptotique des états métastables du potentiel de Cahn-Hilliard sous cisaillement que l'on a obtenues dans le cas homogène (théorème III.3.5) sont encore valables dans le cas faiblement non-homogène. Ce théorème étant prouvé aussi bien en dimension 2 qu'en dimension 3.

2 Rappels sur le modèle de fluides non-homogènes incompressibles

Avant de commencer l'étude proprement dite de notre modèle, on rappelle ici quelques résultats fondamentaux connus sur un modèle classique, à la fois proche et assez différent de celui que l'on considère ici. Ce modèle est celui des fluides visqueux non-homogènes incompressibles étudié par exemple dans [15] ou bien [18]. Dans ce cadre les inconnues sont la densité ρ , le champ de vitesse v et la pression p . Les équations considérées sont une équation de conservation de la masse classique pour la densité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = 0, \quad (\text{IV.2.1})$$

une équation de conservation de la quantité de mouvement du type Navier-Stokes incompressible non homogène

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \frac{1}{Re} \Delta v + \nabla p = \rho g, \quad (\text{IV.2.2})$$

accompagnée de la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div}(v) = 0. \quad (\text{IV.2.3})$$

Ce modèle est un modèle dans lequel l'interface n'a pas d'épaisseur et n'est pas active, c'est-à-dire que les forces capillaires ne sont pas prises en compte. La difficulté principale dans l'étude de ces équations est l'obtention d'estimations et de compacité sur la densité ρ .

On verra que dans le modèle qui nous concerne, c'est plutôt l'obtention d'estimations sur la vitesse qui est délicate.

A titre de comparaison, on rappelle ici sans démonstration (voir [18]) le principal résultat d'existence et d'unicité de solutions faibles sur les solutions de (IV.2.1)-(IV.2.3) avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène.

Théorème IV.2.1

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3) et $T > 0$. On suppose que $g \in L^2([0, T] \times \Omega)$.

Soit $v_0 \in H$ et $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ positive presque partout. Alors il existe une solution faible de (IV.2.1)-(IV.2.3) au sens où

$$v \in L^2(0, T; V), \quad \rho \in L^\infty([0, T] \times \Omega),$$

$$\rho v \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)),$$

$$\inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho \leq \sup_{\Omega} \rho_0,$$

$$\rho(0) = \rho_0,$$

et

$$(\rho v)(0) = \rho_0 v_0, \text{ en un sens faible dans } V'.$$

Si de plus $\inf_{\Omega} \rho_0 > 0$, alors

$$v \in L^\infty(0, T; H).$$

On peut en fait, préciser la borne L^∞ obtenue sur ρ grâce au résultat suivant [15].

Théorème IV.2.2

Il existe une solution (ρ, v) du problème précédent qui vérifie : pour tout $0 \leq \alpha \leq \beta < +\infty$, la quantité

$$\text{mes} \left(\left\{ x \in \Omega, \alpha \leq \rho(t, x) \leq \beta \right\} \right)$$

est indépendante du temps.

Malheureusement, ce type de propriétés très fortes n'est pas envisageable pour le problème étudié dans ce travail, à cause de la présence d'un terme parabolique du quatrième ordre dans l'équation sur le paramètre d'ordre (c'est-à-dire essentiellement de la densité) pour lequel on sait que le principe du maximum est faux.

3 Hypothèses générales

On rappelle que dans ce chapitre, on utilise à nouveau les notations et les préliminaires établis dans la section 2 du chapitre 3.

Dans ce qui suit, on fait les mêmes hypothèses sur les fonctions η et F que dans le cadre homogène, c'est-à-dire pour la viscosité

$$\eta \text{ est de classe } C^1 \text{ et } \|\eta'\|_\infty \leq C,$$

$$0 < \eta_1 \leq \eta(x) \leq \eta_2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et pour le potentiel de Cahn-Hilliard

$$F \text{ est de classe } C^2, \text{ et } F \geq 0, \tag{IV.3.1}$$

$$\exists F_1, F_2 > 0 \text{ telles que } |F'(x)| \leq F_1|x|^p + F_2, |F''(x)| \leq F_1|x|^{p-1} + F_2, \forall x \in \mathbb{R}, \tag{IV.3.2}$$

où $1 \leq p \leq 3$ si $d = 3$ et $1 \leq p < +\infty$ si $d = 2$

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}, \exists F_3(\gamma) > 0, F_4(\gamma) \geq 0 \text{ telles que,} \tag{IV.3.3}$$

$$(x - \gamma)F'(x) \geq F_3(\gamma)F(x) - F_4(\gamma), \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\exists F_5 \geq 0 \text{ telle que } F''(x) \geq -F_5, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{IV.3.4}$$

Comme dans le cas homogène, pour obtenir des solutions fortes on a besoin d'un peu plus de régularité sur F , plus précisément on suppose que

$$F \text{ est de classe } C^3 \text{ et } \exists F_6 > 0, |F'''(x)| \leq F_6(1 + |x|^q), \forall x \in \mathbb{R}, \tag{IV.3.5}$$

où $q < 3$ si $d = 3$ et $q < +\infty$ si $d = 2$.

Enfin, on suppose que le terme de forces extérieures est indépendant du temps et dérive d'un potentiel de H^1

$$g = \nabla \mathcal{G}.$$

4 Mélanges faiblement non-homogènes

Dans le cas de mélanges non-homogènes généraux, on sait seulement prouver un résultat d'existence et unicité locale de solutions régulières. En fait, les solutions obtenues sont plus régulières que les solutions “fortes” obtenues dans la suite (théorème IV.4.3) pour le cas faiblement non-homogène. On donne sans preuve le résultat suivant.

Théorème IV.4.1

Pour tout $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + V$ et $\varphi_0 \in \Phi_4$, il existe un temps $T > 0$ dépendant de U , $\|v_0\|_1$ et de $\|\varphi_0\|_4$ tel que pour tout $\varepsilon \leq 1$ il existe une unique solution régulière $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon)$ au problème (IV.1.1)-(IV.1.4) sur $[0, T[$, satisfaisant

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; \Phi_4)} + \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \Phi_6)} + \|v_\varepsilon - v_\infty^U\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|v_\varepsilon - v_\infty^U\|_{L^2(0, T; V_2)} \leq C,$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; \Phi_1)} + \left\| \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H)} \leq C,$$

où $C > 0$ est indépendant de ε .

Remarque IV.4.1

La démonstration consiste essentiellement à utiliser différemment les estimations que l'on va obtenir au cours des preuves des théorèmes IV.4.2 et IV.4.3.

Pour obtenir des résultats plus pertinents, on s'intéresse jusqu'à la fin du chapitre, à l'étude du système (IV.1.1)-(IV.1.4) quand le paramètre ε est petit (cas faiblement non-homogène). Ceci revient à supposer que les deux phases du système ont des densités proches. Dans ces conditions, on peut montrer l'existence de solutions faibles globales et l'existence et l'unicité de solutions fortes (globales en 2D et locales en 3D).

4.1 Solutions faibles

Ce paragraphe est consacré à la preuve du résultat suivant.

Théorème IV.4.2

Soyons $U > 0$, $v_0^\varepsilon \in v_\infty^U + H$, $\varphi_0^\varepsilon \in \Phi_3$, telle que $m(\varphi_0^\varepsilon)$ est indépendant de ε . On suppose qu'il existe C_0 indépendant de ε tel que

$$\|\varphi_0^\varepsilon\|_1 + |v_0^\varepsilon|_2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\varphi_0^\varepsilon\|_2 + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|\varphi_0^\varepsilon\|_3 \leq C_0.$$

Alors, il existe ε_0 dépendant seulement de C_0 , U et F tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une solution faible $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon)$ de (IV.1.1)-(IV.1.4) sur \mathbb{R}^+ pour la donnée initiale $(\varphi_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon)$, satisfaisant

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_1)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_2)} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_3)} + \|v_\varepsilon - v_\infty^U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H)} \leq C, \quad (\text{IV.4.1})$$

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; \Phi_3)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; L^2)} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left\| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; H^1)} \\ + \|\mu_\varepsilon\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; \Phi_1)} + \|v_\varepsilon - v_\infty^U\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; V)} \leq C(\tau), \text{ pour tout } t_0 \geq 0, \tau > 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.2})$$

$$\left\| \mathcal{P} \frac{\partial \rho_\varepsilon v_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; V'_\frac{d}{2})} \leq M(T), \quad (\text{IV.4.3})$$

où $C, C(\tau), M(T)$ sont indépendants de ε et de t_0 . On rappelle que \mathcal{P} est le projecteur dans $L^2(\Omega)$ sur l'espace H .

Remarque IV.4.2

Le preuve qui suit est donnée dans le cas $d = 3$. Les estimations dans le cas bidimensionnel peuvent être obtenues de la même façon et sont même plus faciles à obtenir. A titre exceptionnel, on soulignera la différence entre le cas 2D et le cas 3D, pour les inégalités (IV.4.27) et (IV.4.28), qui sont sensiblement différentes.

Preuve :

Par souci de simplification des écritures, on ne note plus l'exposant ε pour $\varphi_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon$ et l'indice ε pour $\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon$ et ρ_ε , mais il faut garder à l'esprit le fait que toutes les quantités qui vont être estimées dépendent de ε . De plus, lorsque cela ne portera pas à confusion, on notera simplement ρ la densité $\rho(\varphi)$.

On va se contenter de la dérivation formelle des estimations d'énergie (IV.4.1)-(IV.4.3). La preuve complète pouvant être classiquement effectuée comme dans le chapitre précédent par un procédé d'approximation de Galerkin. Pour être rigoureux, on précisera à la fin de la preuve comment obtenir la compacité nécessaire pour passer à la limite dans les solutions approchées.

Dans un premier temps, on établit les estimations (IV.4.1)-(IV.4.2).

• **Etape 1:** De la même façon que dans le cas homogène (lemme III.4.1), on introduit pour $\lambda > 0$ à déterminer, un champ de vecteur v_λ relevant les conditions aux limites.

Soit $v = u + U v_\lambda$, u vérifie les conditions homogènes (III.2.3) et les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \cdot \nabla \varphi - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right) = -U v_\lambda \cdot \nabla \varphi, \quad (\text{IV.4.4})$$

$$\mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi), \quad (\text{IV.4.5})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) - 2 \operatorname{div} (\eta(\varphi) D(u)) + \nabla p &= -U \rho v_\lambda \cdot \nabla u - U \rho u \cdot \nabla v_\lambda + 2U \operatorname{div} (\eta(\varphi) D(v_\lambda)) \\ &\quad + \mu \nabla \varphi + \varepsilon \frac{1 - \varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \rho g, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.6})$$

$$\operatorname{div} (u) = 0. \quad (\text{IV.4.7})$$

• **Etape 2:** On écrit tout d'abord les estimations classiques pour l'équation de Cahn-Hilliard et celle de Navier-Stokes, c'est-à-dire celles qui ont été utilisées dans le cadre homogène. Prenons le produit scalaire de (IV.4.4) dans L^2 par μ et celui de (IV.4.6) dans \mathbb{L}^2 avec u , il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi|_2^2 + \frac{1}{2} |\sqrt{\rho} u|_2^2 + \int_{\Omega} F(\varphi) \right) + 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi) |D(u)|^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} |\nabla \mu|^2 \\ = \int_{\Omega} \mu \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} \nabla \varphi \cdot \nabla \mu + \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega} (1 - \varphi^2) \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \cdot u \\ + \int_{\Omega} \rho g \cdot u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho \right) \\ - U \int_{\Omega} (v_\lambda \cdot \nabla \varphi) \mu - U \int_{\Omega} \rho (u \cdot \nabla v_\lambda) u - U \int_{\Omega} (v_\lambda \cdot \nabla u) u \\ + 2U \int_{\Omega} \eta(\varphi) D(v_\lambda) : D(u). \end{aligned} \quad (\text{IV.4.8})$$

Remarque IV.4.3

Il est facile de voir que cette estimation est insuffisante si on ne sait pas contrôler $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Ceci constitue la principale différence avec les preuves concernant le modèle de fluides non-homogènes (théorème IV.2.1 et [15, 18]) : comme le modèle prend en compte les phénomènes d'échange à l'interface, la densité ne satisfait pas l'équation de conservation usuelle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = 0,$$

ce qui fait que l'on a

$$\int_{\Omega} \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) \right) \cdot u = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} \rho |u|^2 \right) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho \right),$$

où le dernier terme n'est pas nul contrairement au modèle de fluides non-homogènes.

Néanmoins, on a la conservation en moyenne du paramètre d'ordre et de la densité physique (IV.1.5) au sens où (lemme III.2.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} \varphi \right) = 0.$$

Il faut donc obtenir une estimation sur $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et pour cela, on multiplie (IV.4.4) par $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ pour obtenir après intégration

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \int_{\Omega} (v_{\lambda} \cdot \nabla \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &= - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &= -\alpha^2 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} \Delta \varphi \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} \Delta \varphi \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{F'(\varphi)}{\rho(\varphi)} \right) \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} |\Delta \varphi|^2 \right) + \alpha^2 \int_{\Omega} |\Delta \varphi|^2 \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &\quad - \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} \Delta \varphi \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{F'(\varphi)}{\rho(\varphi)} \right) \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.9})$$

Cette estimation est encore insuffisante pour espérer conclure si on n'a pas d'informations sur $\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. C'est la raison pour laquelle, on multiplie (IV.4.4) par $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{\rho} \right)$ et on intègre sur Ω pour obtenir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 \right) + \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + U \int_{\Omega} (v_{\lambda} \cdot \nabla \varphi) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) - \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &= \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Delta \varphi}{\rho} \right) - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F'(\varphi)}{\rho(\varphi)} \right) - \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &= \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \Delta \varphi \\ &\quad - \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \left(\frac{F''(\varphi)}{\rho(\varphi)} - \frac{F'(\varphi) \rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \right) - \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &= -\alpha^2 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 - \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \nabla \varphi - \alpha^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \Delta \varphi \\ &\quad - \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \left(\frac{F''(\varphi)}{\rho(\varphi)} - \frac{F'(\varphi) \rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \right) - \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.10})$$

En utilisant les hypothèses (IV.3.1)-(IV.3.4) sur le potentiel F , on déduit comme dans le cas homogène (voir l'estimation (III.4.13) et sa preuve)

$$C F_4(m(\varphi_0)) + \frac{1}{\rho_2^2} |\nabla \mu|_2^2 \geq \frac{1}{2\rho_2^2} |\nabla \mu|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^2 + C |\Delta \varphi|_2^2 + C F_3(m(\varphi_0)) \left(\int_{\Omega} F(\varphi) \right), \quad (\text{IV.4.11})$$

et

$$\begin{aligned} |m(\mu)| &= \left| -\alpha^2 \int_{\Omega} \Delta \varphi + \int_{\Omega} F'(\varphi) \right| \\ &\leq C(1 + |\varphi|_p^p) \leq C(1 + |\nabla \varphi|_2^p), \end{aligned} \quad (\text{IV.4.12})$$

car dans tous les cas, le choix de p implique $H^1 \subset L^p$.

Finalement on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 &\leq \frac{1}{4\rho_2^2} |\nabla \mu|_2^2 + C\varepsilon^2 |\mu \nabla \varphi|_2^2 \leq \frac{1}{4\rho_2^2} |\nabla \mu|_2^2 + C\varepsilon^2 |\nabla \mu|_2^2 |\Delta \varphi|_2^2 + C\varepsilon^2 m(\mu)^2 |\nabla \varphi|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{4\rho_2^2} |\nabla \mu|_2^2 + C\varepsilon^2 |\nabla \mu|_2^2 |\Delta \varphi|_2^2 + C\varepsilon^2 (1 + |\nabla \varphi|_2^{2p}) |\nabla \varphi|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.13})$$

Si on somme (IV.4.8), $\varepsilon \times$ (IV.4.9), $\varepsilon^{\frac{3}{2}} \times$ (IV.4.10), (IV.4.11) et (IV.4.13) on obtient l'estimation d'énergie dont on a besoin pour conclure

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi|_2^2 + \frac{1}{2} |\sqrt{\rho} u|_2^2 + \int_{\Omega} F(\varphi) + \varepsilon \frac{\alpha^2}{2} \left| \frac{1}{\rho} \Delta \varphi \right|_2^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 \right) \\ &+ 2 \int_{\Omega} \eta(\varphi) |D(u)|^2 + \frac{1}{4\rho_2^2} |\nabla \mu|^2 + \frac{1}{4} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^2 \\ &+ C |\Delta \varphi|_2^2 + C \left(\int_{\Omega} F(\varphi) \right) + \varepsilon \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \\ &\leq C F_4(m(\varphi_0)) + C\varepsilon^2 |\nabla \mu|_2^2 |\Delta \varphi|_2^2 + C\varepsilon^2 m(\mu)^2 |\nabla \varphi|_2^2 \\ &+ \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega} (1 - \varphi^2) \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) . u + \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} \mu \nabla \varphi . \nabla \mu + \int_{\Omega} \rho g . u \\ &- \varepsilon \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} \Delta \varphi \nabla \varphi . \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho'(\varphi) |u|^2 u . \nabla \varphi + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho'(\varphi) |u|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &- \varepsilon \int_{\Omega} u . \nabla \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} |\Delta \varphi|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{F'(\varphi)}{\rho(\varphi)} \right) . \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &- \varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{\Omega} u . \nabla \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) - \varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} . \nabla \varphi - \varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \Delta \varphi \\ &- \varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \left(\frac{F''(\varphi)}{\rho(\varphi)} - \frac{F'(\varphi) \rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \right) - \varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &- U \int_{\Omega} (v_{\lambda} . \nabla \varphi) \mu - U \int_{\Omega} \rho(u . \nabla v_{\lambda}) u - U \int_{\Omega} (v_{\lambda} . \nabla u) u + 2U \int_{\Omega} \eta(\varphi) D(v_{\lambda}) : D(u) \\ &- \varepsilon U \int_{\Omega} (v_{\lambda} . \nabla \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon^{\frac{3}{2}} U \int_{\Omega} (v_{\lambda} . \nabla \varphi) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.4.14})$$

• **Etape 3:** Introduisons les fonctionnelles suivantes

$$y_{\varepsilon}(t) = \frac{\alpha^2}{2} |\nabla \varphi|_2^2 + \frac{1}{2} |\sqrt{\rho} u|_2^2 + \int_{\Omega} F(\varphi) + \varepsilon \frac{\alpha^2}{2} \left| \frac{1}{\rho} \Delta \varphi \right|_2^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2,$$

$$z_{\varepsilon}(t) = \eta_1 |\nabla u|_2^2 + \frac{1}{4\rho_2^2} |\nabla \mu|^2 + \frac{1}{4} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^2 + C |\Delta \varphi|_2^2 + C \left(\int_{\Omega} F(\varphi) \right) + \varepsilon \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \frac{\alpha^2}{\rho_2} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2.$$

On a alors le résultat suivant

Lemme IV.4.1

Il existe $\beta, C > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, on a

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^2 \leq C(y_\varepsilon + y_\varepsilon^\beta), \quad (\text{IV.4.15})$$

$$\varepsilon^{\frac{3}{4}} |\Delta \varphi|_2^2 \leq C(y_\varepsilon + y_\varepsilon^\beta), \quad (\text{IV.4.16})$$

et

$$y_\varepsilon \leq C z_\varepsilon. \quad (\text{IV.4.17})$$

Preuve (du lemme): De l'équation (IV.4.5), il vient

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\alpha^2} (-\mu + F'(\varphi)),$$

et donc

$$\nabla \Delta \varphi = -\frac{1}{\alpha^2} \rho \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\mu}{\rho} \nabla \rho + \frac{F''(\varphi)}{\alpha^2} \nabla \varphi,$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} |\nabla \Delta \varphi|_2^2 &\leq C \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 + C \varepsilon^2 \left| \frac{\mu}{\rho} \nabla \varphi \right|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^2 + C \int_{\Omega} |\varphi|^{2p-2} |\nabla \varphi|^2 \\ &\leq C \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 + C \varepsilon^2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 |\Delta \varphi|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^2 + C |\varphi|_{3p-3}^{2p-2} |\nabla \varphi|_6^2 \\ &\leq C \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 + C \varepsilon^2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 |\Delta \varphi|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^{2p-2} |\Delta \varphi|_2^2. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^2 \leq C(y_\varepsilon + \varepsilon y_\varepsilon^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} y_\varepsilon^p),$$

de sorte que l'on obtient (IV.4.15) avec $\beta = \max(2, p) > 1$. Pour montrer (IV.4.16) il suffit d'intégrer par parties et d'utiliser (IV.4.15),

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{3}{4}} |\Delta \varphi|_2^2 &\leq \varepsilon^{\frac{3}{4}} \int_{\Omega} |\nabla \varphi| |\nabla \Delta \varphi| \leq \varepsilon^{\frac{3}{4}} |\nabla \varphi|_2 |\nabla \Delta \varphi|_2 \leq \frac{1}{2} |\nabla \varphi|_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^2 \\ &\leq C(y_\varepsilon + y_\varepsilon^{\frac{\beta+1}{2}}) \leq C(y_\varepsilon + y_\varepsilon^\beta). \end{aligned}$$

Le dernier point est une conséquence immédiate des définitions de y_ε et de z_ε . ■

Remarque IV.4.4

- Le premier point du lemme permet de contrôler la norme H^3 de φ en fonction de y_ε et de ε , ce qui n'est pas évident *a priori*.
- Le second point va jouer un rôle capital dans la suite car, si on regarde la définition de y_ε on a

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\Delta \varphi|_2^2 \leq C y_\varepsilon,$$

alors que (IV.4.16) permet d'estimer $|\Delta \varphi|_2^2$ avec une plus petite puissance de ε (précisément $\varepsilon^{\frac{3}{4}}$) à condition d'accepter la présence de puissances de y_ε plus grandes que 1 dans l'estimation.

- Enfin, le troisième point est en fait le point-clé de la fin de la preuve, pour laquelle on doit utiliser un argument de comparaison de solutions d'équations différentielles ordinaires pour conclure. Remarquons que l'unique raison d'être des estimations (IV.4.11) et (IV.4.13), est justement la possibilité de contrôler y_ε par z_ε .

Revenons à la preuve du théorème IV.4.2. L'estimation (IV.4.14) se récrit au moyen de y_ε et z_ε sous la forme d'une inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt}y_\varepsilon + z_\varepsilon \leq C F_4(m(\varphi_0)) + C\varepsilon y_\varepsilon z_\varepsilon + C\varepsilon^2(1 + y_\varepsilon^p)z_\varepsilon + I_1 + \dots + I_{20}, \quad (\text{IV.4.18})$$

où I_1, \dots, I_{20} représente les vingt intégrales du second membre de (IV.4.14). On va maintenant estimer chacun de ces termes en fonction de ε , y_ε et z_ε .

En utilisant (IV.4.7) et les conditions au bord sur u , le premier terme s'écrit après intégrations par parties

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left| \int_{\Omega} \frac{\varphi}{\rho(\varphi)} \mu \nabla \varphi \cdot u \right| = \frac{\varepsilon}{2} \left| \int_{\Omega} \frac{\varphi}{\rho(\varphi)} (\mu - m(\mu)) \nabla \varphi \cdot u \right| \\ &\leq C\varepsilon (|\varphi|_6 + |m(\varphi_0)|) |\nabla \varphi|_2 |\mu - m(\mu)|_6 |u|_6 \\ &\leq C\varepsilon (|\nabla \mu|_2^2 + |\nabla u|_2^2) (|\nabla \varphi|_2^2 + |\nabla \varphi|_2) \leq C\varepsilon (y_\varepsilon + y_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) z_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.19})$$

Grâce au fait que $|\rho'(\varphi)| \leq \varepsilon$ on obtient, avec l'injection de Sobolev $H^{\frac{1}{2}} \subset L^3$ (en dimension $d \leq 3$),

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{\varepsilon}{\rho_1^2} (|\mu - m(\mu)|_6 + |m(\mu)|) |\nabla \varphi|_3 |\nabla \mu|_2 \leq C\varepsilon |\nabla \mu|_2 (1 + |\nabla \mu|_2 + |\nabla \varphi|_2^p) |\nabla \varphi|_3 \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{3}{4}} |\nabla \mu|_2 (1 + |\nabla \mu|_2 + |\nabla \varphi|_2^p) \left(|\nabla \varphi|_2^{\frac{1}{2}} \right) \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{3}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon + C\varepsilon z_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.20})$$

Le troisième terme s'estime immédiatement grâce à (IV.4.17) et à l'inégalité de Young

$$|I_3| \leq \rho_2 |g|_2 |u|_2 \leq C |g|_2 y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq C |g|_2^2 + \frac{1}{8} z_\varepsilon. \quad (\text{IV.4.21})$$

Grâce au lemme précédent et en particulier à (IV.4.15), il vient

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq C\varepsilon^2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 |\nabla \varphi|_4 |\Delta \varphi|_4 \leq C\varepsilon^2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 |\Delta \varphi|_2 |\nabla \Delta \varphi|_2 \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 |\Delta \varphi|_2 \right) \left(\varepsilon^{\frac{3}{4}} |\nabla \Delta \varphi|_2 \right) \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} (y_\varepsilon + y_\varepsilon^\beta) z_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.22})$$

En utilisant encore une fois le fait que $|\rho'(\varphi)| \leq \varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u|^3 |\nabla \varphi| \leq C\varepsilon |u|_5^3 |\nabla \varphi|_6 \\ &\leq C\varepsilon \|u\|_2^3 \|\nabla \varphi\|_1 \leq C\varepsilon |u|_2 |\nabla u|_2^2 |\Delta \varphi|_2 \\ &\leq C\sqrt{\varepsilon} |\nabla u|_2^2 (|u|_2^2 + \varepsilon |\Delta \varphi|_2^2) \leq C\sqrt{\varepsilon} y_\varepsilon z_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.23})$$

Les sixième et septième termes s'estiment de la façon suivante

$$\begin{aligned} |I_6| &\leq C\varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \leq C\varepsilon |u|_3^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_3 \\ &\leq C\varepsilon |u|_2 |\nabla u|_2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{8}} |u|_2 \left(|\nabla u|_2 \varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{8}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \varepsilon^{\frac{3}{8}} |u|_2 \left(|\nabla u|_2^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 \right) \leq C\varepsilon^{\frac{3}{8}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.24})$$

$$\begin{aligned}
|I_7| &\leq \varepsilon |u|_4 |\nabla \varphi|_2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_4 \leq C\varepsilon |\nabla u|_2 |\nabla \varphi|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}} |\nabla \varphi|_2 \left(|\nabla u|_2^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 \right) \leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}} y_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} z_{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{IV.4.25}$$

Avec (IV.4.15), on obtient

$$\begin{aligned}
|I_8| &\leq \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2\rho_1^2} |\Delta \varphi|_3^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_3 \leq C\varepsilon^2 |\Delta \varphi|_2 |\nabla \Delta \varphi|_2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{5}{8}} (\varepsilon^{\frac{3}{4}} |\nabla \Delta \varphi|_2) \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \right) \left(\varepsilon^{\frac{3}{8}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \right) |\Delta \varphi|_2 \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{5}{8}} \left(y_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} + y_{\varepsilon}^{\frac{3}{2}} \right) z_{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{IV.4.26}$$

Afin d'estimer le terme suivant, on doit d'abord obtenir des estimations sur $|\nabla F(\varphi)|_2$ et $|\nabla F'(\varphi)|_2$. Plus précisément, grâce à l'hypothèse (IV.3.2) sur F on a

- si $d = 2$, ou $d = 3$ et $p \leq 2$, l'injection de Sobolev $H^1 \subset L^{3p}$ est vraie, il s'ensuit

$$\begin{aligned}
|\nabla F(\varphi)|_2^2 &= \int_{\Omega} |F'(\varphi)|^2 |\nabla \varphi|^2 \leq C |\nabla \varphi|_2^2 + C \int_{\Omega} |\varphi - m(\varphi_0)|^{2p} |\nabla \varphi|^2 \\
&\leq C |\nabla \varphi|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^{2p} |\Delta \varphi|_2^2.
\end{aligned} \tag{IV.4.27}$$

- si $d = 3$ et $2 < p \leq 3$, grâce à l'injection $H^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}} \subset L^{3p}$

$$|\nabla F(\varphi)|_2^2 \leq |\nabla \varphi|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^{p+2} |\Delta \varphi|_2^p. \tag{IV.4.28}$$

De la même façon, en dimensions $d = 2$ et $d = 3$, l'injection de Sobolev $H^1 \subset L^{3p-3}$ fournit

$$\begin{aligned}
|\nabla F'(\varphi)|_2^2 &= \int_{\Omega} |F''(\varphi)|^2 |\nabla \varphi|^2 \leq C |\nabla \varphi|_2^2 + C \int_{\Omega} |\varphi - m(\varphi_0)|^{2p-2} |\nabla \varphi|^2 \\
&\leq C |\nabla \varphi|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^{2p-2} |\Delta \varphi|_2^2.
\end{aligned} \tag{IV.4.29}$$

On déduit de ces estimations que

$$\begin{aligned}
|I_9| &\leq \varepsilon \left| \nabla \left(\frac{F'(\varphi)}{\rho(\varphi)} \right) \right|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \leq C\varepsilon |\nabla F'(\varphi)|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + C\varepsilon^2 |\nabla F(\varphi)|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \\
&\leq C\varepsilon (|\nabla \varphi|_2 + |\nabla \varphi|_2^{p-1} |\Delta \varphi|_2) \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + C\varepsilon^2 (|\nabla \varphi|_2 + |\nabla \varphi|_2^p |\Delta \varphi|_2) \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}} (1 + y_{\varepsilon}^{\frac{p-1}{2}}) z_{\varepsilon} + C\varepsilon^{\frac{5}{4}} (1 + y_{\varepsilon}^{\frac{p}{2}}) z_{\varepsilon} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}} (1 + y_{\varepsilon}^{\frac{p}{2}}) z_{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{IV.4.30}$$

Majorons maintenant le dixième terme de la façon suivante

$$|I_{10}| \leq \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \left(\frac{F''(\varphi)}{\rho(\varphi)} - \frac{F'(\varphi)\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| + \alpha^2 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Delta \varphi}{\rho(\varphi)} \right) \right|.$$

On estime séparément chacun des deux termes A et B de cette inégalité en utilisant (IV.4.16), (IV.4.28) et (IV.4.29). Le calcul qui suit est valable dans le cas $d = 3$ et $2 < p \leq 3$, mais le même genre d'estimations peut être facilement obtenu

dans les autres cas en utilisant (IV.4.27). Il vient

$$\begin{aligned}
|A| &\leq \varepsilon^{\frac{3}{2}} |u|_3 |\nabla F'(\varphi)|_2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_6 + \varepsilon^{\frac{5}{2}} |u|_3 |\nabla F(\varphi)|_2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_6 \\
&\leq C |u|^{\frac{1}{2}} |\nabla u|^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\nabla F'(\varphi)|_2 + \varepsilon^{\frac{5}{2}} |\nabla F(\varphi)|_2 \right) \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \\
&\leq C |u|^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon^{\frac{3}{4}} (|\nabla \varphi|^{\frac{1}{2}} + |\nabla \varphi|_2^{p-1} |\Delta \varphi|^{\frac{1}{2}}) + \varepsilon^{\frac{7}{4}} (|\nabla \varphi|^{\frac{1}{2}} + |\nabla \varphi|_2^{\frac{p}{2}+1} |\Delta \varphi|_2^{\frac{p-1}{2}}) \right) \left(\varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 |\nabla u|^{\frac{1}{2}} |\Delta \varphi|^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq C \varepsilon^{\frac{3}{8}} y_{\varepsilon}^{\frac{1}{4}} (y_{\varepsilon}^{\frac{1}{4}} + y_{\varepsilon}^{\frac{p+1+\beta}{2}}) z_{\varepsilon},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|B| &\leq \varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \left| \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} u \cdot \nabla \varphi \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} \right| + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \left| \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \Delta \varphi \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \\
&\leq \varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \left| \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{1}{\rho} u \cdot \nabla \varphi \right) \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \left| \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \Delta \varphi \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \\
&\leq \varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \varphi) \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \left| \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla(u \cdot \nabla \varphi) \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \left| \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \Delta \varphi \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \\
&\leq C \varepsilon^{\frac{5}{2}} |\nabla \varphi|_6^2 |u|_6 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + C \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\nabla(u \cdot \nabla \varphi)|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + C \varepsilon^{\frac{5}{2}} |u|_6 |\nabla \varphi|_6 |\Delta \varphi|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \\
&\leq C \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left(\varepsilon |\Delta \varphi|_2^2 \right) \left(|\nabla u|_2 \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \right) + C \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\nabla(u \cdot \nabla \varphi)|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2.
\end{aligned}$$

De plus, grâce aux inégalités d'Agmon (III.2.8) et à l'injection de Sobolev $H^{\frac{3}{4}} \subset L^4$ valable en dimension 2 et 3, on a

$$\begin{aligned}
|\nabla(u \cdot \nabla \varphi)|_2 &\leq |\nabla u|_2 |\nabla \varphi|_{\infty} + |u \cdot D^2 \varphi|_2 \leq |\nabla u|_2 |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} + |u|_4 |D^2 \varphi|_4 \\
&\leq |\nabla u|_2 |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} + |u|_2^{\frac{1}{4}} |\nabla u|_2^{\frac{3}{4}} |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{4}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{3}{4}},
\end{aligned}$$

de sorte que finalement, il vient

$$\begin{aligned}
|B| &\leq C \varepsilon^{\frac{3}{4}} y_{\varepsilon} z_{\varepsilon} + C \varepsilon^{\frac{3}{16}} \left(\varepsilon^{\frac{3}{16}} |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{8}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} \right) \left(|\nabla u|_2 \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \right) \\
&\quad + C \varepsilon^{\frac{3}{16}} \left(|u|_2^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{\frac{9}{16}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{3}{4}} \right) \left(|\nabla u|_2^{\frac{3}{4}} |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \right) \\
&\leq C \varepsilon^{\frac{3}{4}} y_{\varepsilon} z_{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{3}{16}} (y_{\varepsilon} + y_{\varepsilon}^{\frac{\beta}{2}}) z_{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

En conséquence, on obtient l'estimation suivante pour le dixième terme

$$|I_{10}| \leq C \varepsilon^{\frac{3}{16}} (y_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} + y_{\varepsilon}^{\frac{p+1+\beta}{2}}) z_{\varepsilon}. \quad (\text{IV.4.31})$$

Les estimations pour les deux termes suivants sont immédiates

$$\begin{aligned}
|I_{11}| &\leq C \varepsilon^{\frac{5}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_6 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 |\nabla \varphi|_3 \leq C \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left(|\nabla \varphi|_2^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}} |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} \right) \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 \right) \\
&\leq C \varepsilon^{\frac{3}{4}} y_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} z_{\varepsilon},
\end{aligned} \quad (\text{IV.4.32})$$

et

$$\begin{aligned}
|I_{12}| &\leq C \varepsilon^{\frac{5}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_3^2 |\Delta \varphi|_3 \leq C \varepsilon^{\frac{1}{8}} \left(\varepsilon^{\frac{3}{8}} |\Delta \varphi|_2 \varepsilon^{\frac{3}{4}} |\nabla \Delta \varphi|_2 \right) \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \right) \\
&\leq C \varepsilon^{\frac{1}{8}} (y_{\varepsilon} + y_{\varepsilon}^{\beta}) z_{\varepsilon}.
\end{aligned} \quad (\text{IV.4.33})$$

En utilisant l'hypothèse (IV.3.2) sur F , on obtient

$$\begin{aligned}
 |I_{13}| &\leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 |F''(\varphi)| + C\varepsilon^{\frac{5}{2}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 |F'(\varphi)| \\
 &\leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 |\varphi|^{p-1} + C\varepsilon^{\frac{5}{2}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 |\varphi|^p \\
 &\leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_3^2 |\varphi|_{3p-3}^{p-1} + C\varepsilon^{\frac{5}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_4^2 |\varphi|_{2p}^p \\
 &\leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 |\nabla \varphi|_2^{p-1} + C\varepsilon^{\frac{5}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{3}{2}} |\nabla \varphi|_2^p \\
 &\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_{\varepsilon} + C\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_{\varepsilon} y_{\varepsilon}^{\frac{p-1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{9}{8}} z_{\varepsilon} y_{\varepsilon}^{\frac{p}{2}}.
 \end{aligned} \tag{IV.4.34}$$

On obtient de l'équation de Cahn-Hilliard (IV.4.4)

$$\Delta \left(\frac{\mu}{\rho} \right) = \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \cdot \nabla \varphi + U v_{\lambda} \cdot \nabla \varphi + \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \nabla \varphi \cdot \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right),$$

et donc,

$$\left| \Delta \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 \leq C \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + |u|_2^2 |\nabla \varphi|_{\infty}^2 + U^2 |\nabla \varphi|_2^2 + \varepsilon^2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_3^2 |\nabla \varphi|_6^2 \right),$$

de sorte que grâce à l'injection $H^{\frac{1}{2}} \subset L^3$ on a

$$\left| \Delta \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \leq C \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + |u|_2 |\nabla \Delta \varphi|_2 + U |\nabla \varphi|_2 + \varepsilon^2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 |\Delta \varphi|_2^2 \right). \tag{IV.4.35}$$

Finalement, on obtient pour le terme suivant

$$\begin{aligned}
 |I_{14}| &\leq C\varepsilon^{\frac{5}{2}} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_3^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_3 \leq C\varepsilon^{\frac{5}{2}} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \left| \Delta \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C\varepsilon^{\frac{5}{2}} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + |u|_2 |\nabla \Delta \varphi|_2 + U |\nabla \varphi|_2 + \varepsilon^2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 |\Delta \varphi|_2^2 \right) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C\varepsilon^{\frac{5}{8}} \left(\varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \right) \left(\varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{3}{2}} \right) \left(\varepsilon^{\frac{3}{8}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + C\varepsilon^{\frac{5}{8}} |u|_2 \left(\varepsilon^{\frac{3}{4}} |\nabla \Delta \varphi|_2 \right) \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \right) \left(\varepsilon^{\frac{3}{8}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + C\varepsilon^{\frac{15}{8}} |\nabla \varphi|_2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \right) \left(\varepsilon^{\frac{3}{8}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + C\varepsilon^{\frac{19}{8}} \left(\varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \right) \left(\varepsilon^{\frac{3}{4}} |\Delta \varphi|_2^2 \right) \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \right) \left(\varepsilon^{\frac{3}{8}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &\leq C\varepsilon^{\frac{5}{8}} y_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} z_{\varepsilon} + C\varepsilon^{\frac{5}{8}} (y_{\varepsilon} + y_{\varepsilon}^{\frac{\beta+1}{2}}) z_{\varepsilon} + C\varepsilon^{\frac{15}{8}} y_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} z_{\varepsilon} + C\varepsilon^{\frac{19}{8}} (y_{\varepsilon}^{\frac{3}{2}} + y_{\varepsilon}^{\beta+\frac{1}{2}}) z_{\varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{IV.4.36}$$

Les cinq termes suivants s'estiment sans difficulté par

$$\begin{aligned}
 |I_{15}| &= \left| \int_{\Omega} U v_{\lambda} \cdot \nabla \varphi (\mu - m(\mu)) \right| \\
 &\leq U |v_{\lambda}|_4 |\nabla \varphi|_2 |\mu - m(\mu)|_4 \leq U \lambda |\nabla \varphi|_2 |\nabla \mu|_2 \leq U \lambda z_{\varepsilon},
 \end{aligned} \tag{IV.4.37}$$

$$\begin{aligned} |I_{16}| &\leq \left| U \int_{\Omega} \rho'(\varphi) (u \cdot \nabla \varphi) (u \cdot v_{\lambda}) \right| + \left| U \int_{\Omega} \rho(u \cdot \nabla) u v_{\lambda} \right| \\ &\leq \varepsilon U |\nabla \varphi|_2 |\nabla u|_2^2 |v_{\lambda}|_{\infty} + U |v_{\lambda}|_4 |\nabla u|_2^2 \leq \varepsilon C_0 y_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} z_{\varepsilon} + \lambda U z_{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.38})$$

$$|I_{17}| \leq U |v_{\lambda}|_4 |\nabla u|_2^2 \leq \lambda U z_{\varepsilon}, \quad (\text{IV.4.39})$$

$$|I_{18}| \leq CU |D(u)|_2 |D(v_{\lambda})|_2 \leq \frac{1}{8} z_{\varepsilon} + CU^2 |D(v_{\lambda})|_2^2, \quad (\text{IV.4.40})$$

$$|I_{19}| \leq \varepsilon^{\frac{1}{4}} U |v_{\lambda}|_4 |\nabla \varphi|_2 \left(\varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \right) \leq \varepsilon^{\frac{1}{4}} U \lambda z_{\varepsilon}. \quad (\text{IV.4.41})$$

Enfin, en utilisant (IV.4.27)-(IV.4.29) et les inégalités d'Agmon (III.2.8), on peut conclure sur le dernier terme de la façon suivante, dans le cas $d = 2$ ou $d = 3$ et $p \leq 2$

$$\begin{aligned} |I_{20}| &\leq \varepsilon^{\frac{3}{2}} U \left| \int_{\Omega} v_{\lambda} \cdot \nabla \varphi \left(\frac{F'}{\rho} \right)'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| + \varepsilon^{\frac{3}{2}} U \left| \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla(v_{\lambda} \cdot \nabla \varphi) \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{3}{2}} U \left| \int_{\Omega} v_{\lambda} \cdot \nabla \varphi \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi \right| \\ &\leq CU \varepsilon^{\frac{3}{2}} |v_{\lambda}|_{\infty} |\nabla F'(\varphi)|_2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + C \varepsilon^{\frac{5}{2}} U |v_{\lambda}|_{\infty} |\nabla F(\varphi)|_2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + C \varepsilon^{\frac{3}{2}} U |\nabla v_{\lambda}|_2 |\nabla \varphi|_{\infty} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \\ &\quad + C \varepsilon^{\frac{3}{2}} U |v_{\lambda}|_{\infty} |\Delta \varphi|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + C \varepsilon^{\frac{5}{2}} U |v_{\lambda}|_{\infty} |\Delta \varphi|_2^2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \quad (\text{IV.4.42}) \\ &\leq C \varepsilon (1 + |\nabla \varphi|_2^{p-1}) \left(|\Delta \varphi|_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \right) + C \varepsilon^2 (1 + |\nabla \varphi|_2^p) \left(|\Delta \varphi|_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \right) \\ &\quad + C \varepsilon^{\frac{3}{2}} U |\nabla v_{\lambda}|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} + C \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left(|\Delta \varphi|_2 \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \right) \\ &\quad + C \varepsilon^{\frac{5}{4}} \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\Delta \varphi|_2 \right) \left(|\Delta \varphi|_2 \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \right) \\ &\leq C \varepsilon (1 + y_{\varepsilon}^{\frac{p-1}{2}}) z_{\varepsilon} + C \varepsilon^2 (1 + y_{\varepsilon}^{\frac{p}{2}}) z_{\varepsilon} + CU |\nabla v_{\lambda}|_2 \varepsilon^{\frac{3}{16}} (1 + y_{\varepsilon}^{\frac{\beta-1}{2}}) z_{\varepsilon} + C \varepsilon^{\frac{3}{4}} z_{\varepsilon} + C \varepsilon^{\frac{5}{4}} y_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} z_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dans l'autre cas $d = 3$ et $2 < p \leq 3$, on utilise (IV.4.28) à la place de (IV.4.27) et on obtient aisément le même type d'estimations.

- **Etape 4:** En rassemblant (IV.4.19)-(IV.4.42), l'estimation d'énergie initiale (IV.4.18) devient

$$\frac{d}{dt} y_{\varepsilon} + \frac{1}{4} z_{\varepsilon} \leq CF_4(m(\varphi_0)) + C|g|_2^2 + CU^2 |D(v_{\lambda})|_2^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{2}} z_{\varepsilon} + C \lambda U z_{\varepsilon} + C(1 + U |\nabla v_{\lambda}|_2) \varepsilon^{\frac{1}{8}} (1 + y_{\varepsilon}^q) z_{\varepsilon}, \quad (\text{IV.4.43})$$

où $q > 0$ dépend seulement de p et de β .

A partir de maintenant, imposons $\varepsilon < \varepsilon_1 = \frac{1}{(16C)^2}$ et comme dans le cas homogène choisissons λ de la façon suivante

$$\lambda = \min \left(\frac{1}{16CU}, \sqrt[4]{U} \right),$$

de sorte que l'estimation précédente devient

$$\frac{d}{dt} y_{\varepsilon} + \frac{1}{8} z_{\varepsilon} \leq CF_4(m(\varphi_0)) + C|g|_2^2 + f_1(U) + C \varepsilon^{\frac{1}{8}} (1 + y_{\varepsilon}^q) z_{\varepsilon}, \quad (\text{IV.4.44})$$

où pour U petit, $f_1(U) \equiv U^2 |D(v_{\lambda})|_2^2 = CU(1 + U^2)$ d'après le lemme III.4.1

Soit $M_\varepsilon > 0$ l'unique solution positive (pour ε assez petit) de

$$C\varepsilon^{\frac{1}{8}}(1+M_\varepsilon^q) = \frac{1}{16}.$$

Il est clair que

$$M_\varepsilon \rightarrow +\infty, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

De plus, l'hypothèse sur les données initiales permet de constater que

$$y_\varepsilon(0) \leq K(C_0 + U),$$

où K est une constante universelle, de sorte qu'il existe $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ on a

$$y_\varepsilon(0) \leq \frac{1}{2}M_\varepsilon.$$

Donc, si on choisit maintenant $\varepsilon < \varepsilon_0$, il existe un temps maximal $T^* \in]0, +\infty]$ tel que $y_\varepsilon(t) < M_\varepsilon$ pour tout $t \in [0, T^*]$. Cette propriété et la définition de M_ε associées à (IV.4.44) montrent que pour tout $t \in [0, T^*[$ on a

$$\frac{d}{dt}y_\varepsilon + \frac{1}{16}z_\varepsilon \leq CF_4(m(\varphi_0)) + C|g|_2^2 + f_1(U),$$

ce qui grâce à (IV.4.17), permet d'écrire pour tout $t \in [0, T^*[$

$$\frac{d}{dt}y_\varepsilon + C'y_\varepsilon \leq CF_4(m(\varphi_0)) + C|g|_2^2 + f_1(U).$$

De cette inégalité différentielle il vient aisément

$$y_\varepsilon(t) \leq y_\varepsilon(0)e^{-C't} + \frac{CF_4(m(\varphi_0)) + C|g|_2^2 + f_1(U)}{C'} \leq K(C_0 + U) + \frac{CF_4(m(\varphi_0)) + C|g|_2^2 + f_1(U)}{C'},$$

et donc si ε est assez petit pour que

$$\frac{1}{2}M_\varepsilon > K(C_0 + U) + \frac{CF_4(m(\varphi_0)) + C|g|_2^2 + f_1(U)}{C'}$$

on a pour tout $t \in [0, T^*[$ l'inégalité

$$y_\varepsilon(t) \leq \frac{1}{2}M_\varepsilon.$$

Si T^* était fini, ceci serait en contradiction avec la maximalité de T^* . On a donc prouvé que nécessairement

$$T^* = +\infty,$$

c'est-à-dire que l'on a l'estimation globale et uniforme en temps suivante

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} y_\varepsilon(t) \leq K(C_0 + U) + \frac{CF_4(m(\varphi_0)) + C|g|_2^2 + f_1(U)}{C'},$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_t^{t+\tau} z_\varepsilon(s) ds \leq 16 \left(K(C_0 + U) + \frac{CF_4(m(\varphi_0)) + C|g|_2^2 + f_1(U)}{C'} + (C|g|_2^2 + f_1(U))\tau \right),$$

qui implique les estimations (IV.4.1) et (IV.4.2), par définition de y_ε et de z_ε .

• **Etape 5:** Comme c'est assez classique (voir le chapitre précédent), on donne seulement les grandes lignes de la preuve de l'estimation (IV.4.3) à partir de (IV.4.1)-(IV.4.2) dans le cas $U = 0$ pour simplifier, (on a donc $v = u$).

Si on note Ω_T l'ensemble $]0, T[\times \Omega$, et si on prend une fonction test $w \in L^2(0, T; V_{\frac{d}{2}})$ dans l'équation de Navier-Stokes non-homogène (IV.4.6), il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \mathcal{P} \left(\frac{\partial \rho v}{\partial t} \right) \cdot w &= \int_{\Omega_T} \frac{\partial \rho v}{\partial t} \cdot w = \int_{\Omega_T} \frac{\partial \rho}{\partial t} v \cdot w - \int_{\Omega_T} \rho v \cdot \nabla v \cdot w - \int_{\Omega_T} 2\eta(\varphi) D(v) : D(w) \\ &\quad + \int_{\Omega_T} \mu \nabla \varphi \cdot w - \varepsilon \int_{\Omega_T} \frac{\varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \cdot w + \int_{\Omega_T} \rho g \cdot w. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.45})$$

Comme $\|\rho'\|_\infty \leq \varepsilon$, on a l'estimation

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_T} \frac{\partial \rho}{\partial t} v \cdot w \right| &\leq \varepsilon \int_{\Omega_T} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| |v| |w| \\ &\leq \varepsilon \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^6(\Omega))} \|v\|_{L^\infty(0, T; H)} \|w\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^3(\Omega))} \leq M(T) \|w\|_{L^2(0, T; V_{\frac{d}{2}})}, \end{aligned}$$

et comme ρ et $\frac{1}{\rho}$ sont bornées uniformément par rapport à ε , il vient

$$\left| \int_{\Omega_T} \mathcal{P} \left(\frac{\partial \rho v}{\partial t} \right) \cdot w \right| \leq M(T) \|w\|_{L^2(0, T; V_{\frac{d}{2}})}.$$

En effet, tous les autres termes dans (IV.4.45) peuvent être estimés de façon classique (voir le chapitre précédent), le choix de l'espace $V_{\frac{d}{2}}$ étant issu de l'estimation (III.2.10) sur le terme non-linéaire dans l'équation de Navier-Stokes

Ceci permet de montrer par dualité l'estimation (IV.4.3).

• **Etape 6:** Le passage à la limite dans les équations satisfaites par les solutions approchées (φ_n, ρ_n, v_n) (après extraction de sous-suites faiblement convergentes dans les espaces adéquats) est classique et se fait comme dans le cas homogène à la condition que l'on puisse obtenir de la compacité sur (v_n) . Cette compacité ne peut s'obtenir directement en appliquant le lemme III.2.4.

On procède alors comme dans [15]. Tout d'abord, on remarque que la compacité sur φ_n et ρ_n est une conséquence immédiate de (IV.4.1) et de (IV.4.2). Ensuite, on déduit de (IV.4.2) et (IV.4.3) que

$$\mathcal{P}(\rho_n v_n) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; V),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{P}(\rho_n v_n)) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; V'_{\frac{d}{2}}),$$

ce qui implique par le lemme III.2.4 que

$$\mathcal{P}(\rho_n v_n) \text{ est relativement compacte dans } L^2(0, T; H),$$

et que donc, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on a

$$\mathcal{P}(\rho_n v_n) \rightarrow \mathcal{P}(\rho v) \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ fort.}$$

De plus, grâce à (IV.4.2), $(\sqrt{\rho_n} v_n)$ et donc (v_n) convergent faiblement dans $L^2(\Omega_T)$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} |\sqrt{\rho_n} v_n|^2 &= \int_{\Omega_T} \rho_n |v_n|^2 = \int_{\Omega_T} \mathcal{P}(\rho_n v_n) \cdot v_n \\ &\rightarrow \int_{\Omega_T} \mathcal{P}(\rho v) \cdot v = \int_{\Omega_T} \rho |v|^2 = \int_{\Omega_T} |\sqrt{\rho} v|^2. \end{aligned}$$

En résumé, $(\sqrt{\rho_n} v_n)$ converge faiblement vers $(\sqrt{\rho} v)$ dans $L^2(\Omega_T)$ et $\|\sqrt{\rho_n} v_n\|_{L^2(\Omega_T)}$ tend vers $\|\sqrt{\rho} v\|_{L^2(\Omega_T)}$. Ceci implique la convergence forte de $(\sqrt{\rho_n} v_n)$ vers $(\sqrt{\rho} v)$ dans $L^2(\Omega_T)$. Cette convergence suffit pour le passage à la limite dans le terme non linéaire de l'équation de Navier-Stokes (IV.4.6).

Ceci termine la preuve de l'existence d'une solution faible au problème. ■

Corollaire 4.1 (Convergence vers le modèle homogène)

Soient $U > 0$, $v_0^\varepsilon \in v_\infty^U + H$, $\varphi_0^\varepsilon \in \Phi_3$ telle que $m(\varphi_0^\varepsilon)$ ne dépend pas de ε . On suppose qu'il existe $C_0 > 0$ indépendante de ε telle que

$$\|\varphi_0^\varepsilon\|_1 + |v_0^\varepsilon|_2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\varphi_0^\varepsilon\|_2 + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\|\varphi_0^\varepsilon\|_3 \leq C_0,$$

et qu'en outre

$$\varphi_0^\varepsilon \rightarrow \varphi_0 \text{ dans } \Phi_1, \text{ et } v_0^\varepsilon \rightarrow v_0 \text{ dans } \mathbb{H}^1, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

alors, à une extraction de sous-suite près, la solution $(v_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ obtenue précédemment, converge vers une solution du système limite homogène (i.e. pour $\varepsilon = 0$) pour la donnée initiale (φ_0, v_0) .

Preuve :

Le point-clé est de voir que l'on a assez de compacité sur le champ de vitesse v_ε grâce au fait que les estimations (IV.4.1), (IV.4.2) et (IV.4.3) sont uniformes en ε .

De plus, les inégalités (IV.4.1), (IV.4.2), et le fait que $|\rho'_\varepsilon|_\infty \leq \varepsilon$ impliquent que

$$\rho_\varepsilon \rightarrow 1, \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1) \text{ fort,}$$

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} \rightarrow 0, \text{ dans } L^2(\Omega_T) \text{ fort pour tout } T > 0,$$

ce qui permet de passer à la limite dans le terme

$$\rho_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}$$

de l'équation de Navier-Stokes.

Il est clair que le passage à la limite dans les équations pour les autres termes ne posent pas de problèmes particuliers. ■

Remarque IV.4.5

Dans les démonstrations précédentes nous n'avons pas utilisé le fait que g dérivait d'un potentiel.

4.2 Solutions fortes

Dans ce paragraphe, on suppose en plus que F vérifie l'hypothèse (IV.3.5) et que $|\rho''_\varepsilon|_\infty \leq \varepsilon$. Cette dernière hypothèse est très raisonnable car on rappelle que ρ_ε est essentiellement linéaire (voir (IV.1.5)) dans l'intervalle physique $[-1, 1]$.

Théorème IV.4.3

Soient $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + V$, $\varphi_0 \in \Phi_3$ satisfaisant les conditions aux bords. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ dépendant seulement de U , $\|v_0\|_1$, $\|\varphi_0\|_3$ et F , tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une unique solution forte $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon)$ du problème pour la donnée initiale (φ_0, v_0) .

- Si $d = 2$, cette solution est globale et vérifie

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_3)} + \|v_\varepsilon - v_\infty^U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V)} \leq C,$$

$$\begin{aligned} & \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; \Phi_4)} + \|v_\varepsilon - v_\infty^U\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; V_2)} \\ & + \left\| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; \Phi_1)} + \left\| \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; H)} \leq C(\tau), \text{ pour tout } t_0, \tau > 0, \end{aligned}$$

où C et $C(\tau)$ sont indépendantes de ε .

- Si $d = 3$, la solution est locale (définie sur un temps T indépendant de ε) et satisfait sur $[0, T[$ les mêmes estimations de régularité que dans le cas 2D.

Preuve :

Dans ce qui suit, on concentre nos efforts sur la démonstration de l'existence de solutions fortes. En effet, la preuve de l'unicité est immédiate grâce à la régularité obtenue sur ces solutions (voir le cas homogène dans le précédent chapitre).

• **Etape 1:** En appliquant le théorème IV.4.2, on obtient l'existence globale de solutions faibles dans le cas particulier de données initiales (φ_0, v_0) indépendantes de ε . Ces solutions vérifient donc les estimations d'énergie suivantes

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_1)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_2)} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_3)} + \|v_\varepsilon - v_\infty^U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H)} \leq C, \quad (\text{IV.4.46})$$

$$\begin{aligned} & \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; \Phi_3)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; L^2)} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left\| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; H^1)} \\ & + \|\mu_\varepsilon\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; \Phi_1)} + \|v_\varepsilon - v_\infty^U\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; V)} \leq C(\tau), \text{ pour tout } t_0, \tau > 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.47})$$

• **Etape 2:** En utilisant le fait que $\|\varphi_0\|_3$ et $\|v_0\|_1$ sont indépendants de ε , on peut obtenir de nouvelles estimations d'énergie.

Tout d'abord, multiplions (IV.4.4) par $\Delta^2 \varphi$ pour obtenir après intégrations par parties

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta \varphi|_2^2 = \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right) \Delta^2 \varphi - \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \Delta^2 \varphi - U \int_{\Omega} v_\lambda \cdot \nabla \varphi \Delta^2 \varphi. \quad (\text{IV.4.48})$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right) &= -\frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \nabla \varphi \cdot \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \Delta \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \\ &= -\frac{\rho'(\varphi)}{\rho^2(\varphi)} \nabla \varphi \cdot \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \Delta \mu + 2 \frac{(\rho'(\varphi))^2}{\rho^4(\varphi)} |\nabla \varphi|^2 \mu - \frac{\rho''(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} |\nabla \varphi|^2 \mu \\ &\quad - 2 \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} \nabla \varphi \cdot \nabla \mu - \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} \mu \Delta \varphi, \end{aligned}$$

avec

$$\Delta \mu = -\alpha^2 \Delta^2 \varphi + \Delta F'(\varphi).$$

Finalement, en utilisant le fait que $|\rho'|_\infty \leq \varepsilon$ et $|\rho''|_\infty \leq \varepsilon$, on obtient à partir de l'estimation précédente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta \varphi|_2^2 + \frac{\alpha^2}{\rho_1^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 &\leq \frac{\varepsilon}{\rho_1^2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi| \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right| |\Delta^2 \varphi| + \frac{1}{\rho_1^2} \int_{\Omega} |\Delta F'(\varphi)| |\Delta^2 \varphi| \\ &\quad + \left(\frac{2\varepsilon^2}{\rho_1^4} + \frac{\varepsilon}{\rho_1^3} \right) \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 |\mu| |\Delta^2 \varphi| \\ &\quad + 2 \frac{\varepsilon}{\rho_1^3} \int_{\Omega} |\nabla \varphi| |\nabla \mu| |\Delta^2 \varphi| + \frac{\varepsilon}{\rho_1^3} \int_{\Omega} |\Delta \varphi| |\mu| |\Delta^2 \varphi| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \Delta^2 \varphi \right| + U \left| \int_{\Omega} v_\lambda \cdot \nabla \varphi \Delta^2 \varphi \right|. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.49})$$

On note J_1, \dots, J_7 les sept termes du second membre de cette inégalité. Chacun d'entre eux est alors estimé séparément comme suit.

Tout d'abord on a immédiatement

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C\varepsilon |\nabla \varphi|_\infty \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 |\Delta^2 \varphi|_2 \leq C\varepsilon |\nabla \Delta \varphi|_2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 |\Delta^2 \varphi|_2 \\ &\leq \frac{\alpha^2}{10\rho_1^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + C\varepsilon^2 |\nabla \Delta \varphi|_2^2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.50})$$

Pour le second terme, on procède comme dans le cas homogène, il vient

$$J_2 \leq \frac{\alpha^2}{10\rho_1^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^{\frac{4}{3}} (1 + |\nabla \varphi|_2^q). \quad (\text{IV.4.51})$$

Le troisième terme s'estime à l'aide de (IV.4.12)

$$\begin{aligned} J_3 &\leq C\varepsilon |\nabla \varphi|_6^2 |\mu - m(\mu)|_6 |\Delta^2 \varphi|_2 + C\varepsilon |m(\mu)| |\nabla \varphi|_4^2 |\Delta^2 \varphi|_2 \\ &\leq \frac{\alpha^2}{10\rho_1^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + C\varepsilon^2 |\Delta \varphi|_2^4 (1 + |\nabla \mu|_2^2 + |\nabla \varphi|_2^{2p}). \end{aligned} \quad (\text{IV.4.52})$$

Pour les deux termes suivants il vient

$$J_4 \leq C\varepsilon |\nabla \varphi|_\infty |\nabla \mu|_2 |\Delta^2 \varphi|_2 \leq \frac{\alpha^2}{10\rho_1^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + C\varepsilon^2 |\nabla \Delta \varphi|_2^2 |\nabla \mu|_2^2, \quad (\text{IV.4.53})$$

et

$$\begin{aligned} J_5 &\leq C\varepsilon |\Delta \varphi|_3 |\mu - m(\mu)|_6 |\Delta^2 \varphi|_2 + C\varepsilon |m(\mu)| |\Delta \varphi|_2 |\Delta^2 \varphi|_2 \\ &\leq \frac{\alpha^2}{10\rho_1^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + C\varepsilon^2 |\nabla \mu|_2^2 |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + C\varepsilon^2 (1 + |\nabla \varphi|_2^{2p}) |\Delta \varphi|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.54})$$

En utilisant l'inégalité d'Agmon (III.2.8)

$$|\nabla \varphi|_\infty \leq C |\nabla \varphi|_2^{\frac{1}{2}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$\begin{aligned} J_6 &\leq |u|_2 |\nabla \varphi|_\infty |\Delta \varphi|_2 \leq C |u|_2 |\nabla \varphi|_2^{\frac{1}{2}} |\Delta^2 \varphi|_2^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{\alpha^2}{10\rho_1^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^2 |u|_2^4, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.55})$$

et enfin

$$J_7 \leq \frac{\alpha^2}{10\rho_1^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 + CU^2 |\nabla \varphi|_2^2. \quad (\text{IV.4.56})$$

Au final, l'estimation d'énergie s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta \varphi|_2^2 + \frac{\alpha^2}{10\rho_2^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 &\leq C\varepsilon^2 |\nabla \Delta \varphi|_2^2 \left(|\nabla \mu|_2^2 + \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 \right) \\ &+ C |\nabla \varphi|_2^{\frac{4}{3}} (1 + |\nabla \varphi|_2^q) + C\varepsilon^2 (1 + |\nabla \varphi|_2^{2p}) |\Delta \varphi|_2^2 + C |\nabla \varphi|_2^2 |u|_2^4, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.57})$$

ou encore grâce à (IV.4.46), (IV.4.47)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta \varphi|_2^2 + \frac{\alpha^2}{10\rho_2^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 \leq f_\varepsilon(t), \quad (\text{IV.4.58})$$

où $f_\varepsilon(t)$ est bornée dans $L^1(t_0, t_0 + \tau)$ uniformément en ε et en t_0 , pour tout $\tau > 0$. Mais on sait aussi par (IV.4.47) que $\Delta \varphi$ est borné dans $L^2(t_0, t_0 + \tau; L^2)$ indépendamment de t_0 et de ε . On peut alors conclure grâce au lemme de Gronwall uniforme (lemme III.2.5) que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, \Phi_2)} &\leq C, \\ \|\varphi\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; \Phi_4)} &\leq C(\tau), \end{aligned} \quad (\text{IV.4.59})$$

où $C, C(\tau)$ sont indépendants de ε .

Remarquons que pour établir ces estimations on a juste utilisé le fait que $\|\varphi_0\|_2$ est indépendant de ε , mais pas la régularité de u_0 ni la régularité H^3 de φ_0 . On a donc obtenu l'existence de solutions possédant une régularité intermédiaire entre les solutions faibles et les solutions fortes.

• **Etape 3:** Il faut maintenant obtenir plus de régularité sur la vitesse en vue de l'unicité. Pour cela, on multiplie l'équation de Navier-Stokes (IV.4.6) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ pour obtenir après intégrations par parties

$$\begin{aligned} \rho_1 \left| \frac{d u}{dt} \right|_2^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} \eta(\varphi) |D(u)|^2 \right) &\leq \left| \int_{\Omega} \rho(u \cdot \nabla) u \frac{\partial u}{\partial t} \right| + \left| \int_{\Omega} \eta'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} |D(u)|^2 \right| \\ &\quad + U \left| \int_{\Omega} \rho(v_{\lambda} \cdot \nabla) u \frac{\partial u}{\partial t} \right| + U \left| \int_{\Omega} \rho(u \cdot \nabla) v_{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} \right| + 2U \left| \int_{\Omega} \operatorname{div}(\eta(\varphi) D(v_{\lambda})) \frac{\partial u}{\partial t} \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} \mu \nabla \varphi \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right| + \varepsilon \left| \int_{\Omega} \frac{1 - \varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right| + \left| \int_{\Omega} \rho g \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right|. \end{aligned}$$

Un paramètre γ étant donné (qui sera fixé par la suite), chaque terme de cette inégalité peut être estimé pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \eta(\varphi) |D(u)|^2 \right) + \frac{\rho_1}{10} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2^2 &\leq \gamma \frac{\eta_1}{20} |Au|_2^2 + \frac{\alpha^2}{20\rho_2} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + \frac{1}{\gamma} I \\ &\quad + CU^2 |\nabla u|_2^2 + CU^2 |\Delta v_{\lambda}|_2^2 |\nabla u|_2^2 \\ &\quad + CU^2 |D(v_{\lambda})|_2^2 |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + CU^2 |\Delta v_{\lambda}|_2^2 \\ &\quad + C(1 + \|\varphi\|_2^2)^2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 + C|g|_2^2, \end{aligned} \tag{IV.4.60}$$

où I désigne le terme

$$\begin{aligned} I &= C|u|_2^2 |\nabla u|_2^4, & \text{si } d = 2, \\ I &= C|\nabla u|_2^6, & \text{si } d = 3. \end{aligned} \tag{IV.4.61}$$

L'estimation (IV.4.60) doit être accompagnée d'une estimation sur la norme \mathbb{H}^2 de u , c'est la raison pour laquelle on multiplie l'équation de Navier-Stokes par $Au = -\Delta u + \nabla \pi$ pour obtenir

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \eta(\varphi) \Delta u \cdot Au &= 2 \int_{\Omega} \eta'(\varphi) (D(u) \cdot \nabla \varphi) Au + 2U \int_{\Omega} \eta'(\varphi) (D(v_{\lambda}) \cdot \nabla \varphi) Au + U \int_{\Omega} \eta(\varphi) \Delta v_{\lambda} \cdot Au - \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot Au \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho(u \cdot \nabla) u \cdot Au - U \int_{\Omega} \rho(v_{\lambda} \cdot \nabla) u \cdot Au - U \int_{\Omega} \rho(u \cdot \nabla) v_{\lambda} \cdot Au \\ &\quad + \int_{\Omega} \mu \nabla \varphi \cdot Au + \varepsilon \int_{\Omega} \frac{1 - \varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \cdot Au + \int_{\Omega} \rho g \cdot Au, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \eta_1 |Au|_2^2 &\leq \left| \int_{\Omega} \eta(\varphi) \nabla \pi Au \right| + C \int_{\Omega} |D(u)| |\nabla \varphi| |Au| \\ &\quad + CU \int_{\Omega} |D(v_{\lambda})| |\nabla \varphi| |Au| + CU \int_{\Omega} |\Delta v_{\lambda}| |Au| + C \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| |Au| \\ &\quad + C \int_{\Omega} |u| |\nabla u| |Au| + CU \int_{\Omega} |v_{\lambda}| |\nabla u| |Au| + CU \int_{\Omega} |u| |\nabla v_{\lambda}| |Au| \\ &\quad + \int_{\Omega} |\mu - m(\mu)| |\nabla \varphi| |Au| + \varepsilon \int_{\Omega} \left| \frac{1 - \varphi^2}{4} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right| |Au| + C \int_{\Omega} |g| |Au|. \end{aligned}$$

Après intégration par parties (en utilisant $\operatorname{div}(Au) = 0$ et $Au \cdot \nu = 0$ au bord), le premier terme du second membre de cette inégalité peut s'écrire avec (III.2.4)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \eta(\varphi) \nabla \pi \cdot Au \right| &= \left| \int_{\Omega} \eta'(\varphi) \pi \nabla \varphi \cdot Au \right| \\ &\leq C |\pi|_{L^2/\mathbb{R}} |\nabla \varphi|_{\infty} |Au|_2 \leq \frac{\eta_1}{10} |Au|_2^2 + C |\nabla \Delta \varphi|_2^2 |\nabla u|_2^2, \end{aligned}$$

les autres termes étant aisément majorés, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1}{10} |Au|_2^2 &\leq C |\nabla \Delta \varphi|_2^2 |\nabla u|_2^2 + CU^2 |D(v_{\lambda})|_2^2 |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + C \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2^2 + I \\ &\quad + CU^2 |\nabla u|_2^2 + CU^2 |\Delta v_{\lambda}|_2^2 |\nabla u|_2^2 + C |\nabla \mu|_2^2 |\Delta \varphi|_2^2 + C \varepsilon^2 (1 + \|\varphi\|_2^2) \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 + C |g|_2^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.62})$$

où I est toujours donné par (IV.4.61).

Dans le but d'absorber le terme $\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2^2$ par le membre de gauche de (IV.4.60), on fixe le paramètre γ (indépendamment de ε) afin que $\gamma C \leq \frac{\rho_1}{20}$. On obtient en sommant (IV.4.60) et $\gamma^*(\text{IV.4.62})$, grâce à (IV.4.59)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \eta(\varphi) |D(u)|^2 \right) + \frac{\rho_1}{20} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2^2 + \gamma \frac{\eta_1}{20} |Au|_2^2 \\ \leq \frac{\alpha^2}{20\rho_2} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \right) I + CU^2 |\nabla u|_2^2 + CU^2 |\Delta v_{\lambda}|_2^2 |\nabla u|_2^2 \\ + C(1 + \gamma) U^2 |D(v_{\lambda})|_2^2 |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + CU^2 |\Delta v_{\lambda}|_2^2 + C(1 + \|\varphi\|_2^2)^2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 \\ + C\gamma |\nabla \Delta \varphi|_2^2 |\nabla u|_2^2 + C |g|_2^2 \\ \leq \frac{\alpha^2}{20\rho_2} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + C |g|_2^2 + f_2(U) + f_1(U) |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \right) I \\ + (CU^2 + f_2(U)) |\nabla u|_2^2 + C \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.63})$$

où on a noté comme dans le théorème précédent $f_1(U) = U^2 |\nabla v_{\lambda}|_2^2$ et $f_2(U) = U^2 |\Delta v_{\lambda}|_2^2$. Malheureusement, cette estimation ne suffit pas pour conclure. En effet, à cause du premier terme du second membre de cette inégalité, on voit qu'il faut une estimation H^1 sur $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ indépendante de ε .

– L'équation de Cahn-Hilliard (IV.4.4) fournit

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 \leq |u|_2^2 |\nabla \varphi|_{\infty}^2 + U^2 |\nabla \varphi|_2^2 + \left| \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right) \right|_2^2,$$

et avec le même genre d'estimations que pour obtenir (IV.4.50)-(IV.4.56), on déduit que

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; L^2)} \leq C(\tau), \quad (\text{IV.4.64})$$

indépendamment de t_0 et de ε . Ce résultat est clairement plus fort que (IV.4.47).

– Revenons alors à l'estimation (IV.4.10) obtenue pour les solutions faibles, et réécrivons-la sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 \right) + \frac{\alpha^2}{\rho_2} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 &\leq C\varepsilon \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| |\nabla \varphi| + C\varepsilon \int_{\Omega} |\Delta \varphi| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \\ &+ C \int_{\Omega} |F''(\varphi)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 + C\varepsilon \int_{\Omega} |F'(\varphi)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \\ &+ C\varepsilon \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| + \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \varphi) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right| \\ &+ \left| U \int_{\Omega} (v_\lambda \cdot \nabla \varphi) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.65})$$

On estime alors chacun des sept termes K_1, \dots, K_7 de cette inégalité de la façon suivante

$$K_1 \leq C\varepsilon \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 |\nabla \varphi|_\infty \leq \frac{\alpha^2}{10\rho_2} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + C\varepsilon^2 |\nabla \Delta \varphi|_2^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2, \quad (\text{IV.4.66})$$

$$K_2 \leq C\varepsilon |\Delta \varphi|_3 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_3^2 \leq C\varepsilon |\nabla \Delta \varphi|_2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 \leq \frac{\alpha^2}{10\rho_2} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + C\varepsilon^2 |\nabla \Delta \varphi|_2^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2, \quad (\text{IV.4.67})$$

$$K_3 \leq C |F''(\varphi)|_\infty \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 \leq C(1 + |\varphi|_\infty^{p-1}) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 \leq C(1 + \|\varphi\|_2^{p-1}) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2, \quad (\text{IV.4.68})$$

$$K_4 \leq C\varepsilon |F'(\varphi)|_\infty \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 \leq C\varepsilon(1 + \|\varphi\|_2^p) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2, \quad (\text{IV.4.69})$$

$$\begin{aligned} K_5 &\leq C\varepsilon \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_3^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_3 \leq C\varepsilon \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \left| \Delta \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\alpha^2}{10\rho_1} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + C \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + C\varepsilon^2 \left| \Delta \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.70})$$

On procède pour le sixième terme comme pour le terme I_{10} (IV.4.31) au cours de la preuve du théorème IV.4.2

$$\begin{aligned} K_6 &\leq \frac{\alpha^2}{10\rho_2} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + C|u|_2 (|\nabla \varphi|_2 + |\nabla \varphi|_2^{q_1} |\Delta \varphi|_2^{q_2}) |\nabla u|_2 \\ &+ C|\Delta \varphi|_2^4 |\nabla u|_2^2 + (|\nabla \Delta \varphi|_2 |\Delta \varphi|_2 + |\Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla \Delta \varphi|_2^{\frac{1}{2}}) |\nabla u|_2^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.71})$$

et de la même manière

$$\begin{aligned} K_7 &\leq CU |\nabla \varphi|_2 (|F''(\varphi)|_\infty + \varepsilon |F'(\varphi)|_\infty) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + C\varepsilon U^2 |\nabla v_\lambda|_2^2 |\Delta \varphi|_2^4 \\ &+ CU^2 |\Delta \varphi|_2^2 + CU^2 |\nabla v_\lambda|_2^2 |\nabla \Delta \varphi|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.72})$$

Grâce à (IV.4.46) et à (IV.4.59), l'inégalité (IV.4.65) fournit donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 \right) + \frac{\alpha^2}{10\rho_2} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 &\leq f_3(U) + C \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + Cf_1(U) |\nabla \Delta \varphi|_2^2 + C |\nabla u|_2^2 \\ &+ C |\nabla \Delta \varphi|_2^2 |\nabla u|_2^2 + C\varepsilon^2 \left| \Delta \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2 \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.73})$$

où $f_3(U)$ est une certaine fonction de U qui tend vers zéro quand U tend vers 0.

On a maintenant établi toutes les estimations nécessaires à la conclusion. En effet, si on somme (IV.4.63) et (IV.4.73) il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 + \int_{\Omega} \eta(\varphi) |D(u)|^2 \right) + \frac{\alpha^2}{20\rho_2} \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2^2 + \frac{\rho_1}{20} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2^2 + \gamma \frac{\eta_1}{20} |Au|_2^2 \\ \leq g_1(t) + g_2(t) (|\nabla u|_2^2 + |\nabla \mu|_2^2) + \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \right) I, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.74})$$

où $g_1(t)$ et $g_2(t)$ sont deux fonctions bornées dans $L^1(t_0, t_0 + \tau)$ indépendamment de ε et de t_0 pour tout $\tau > 0$. Ceci provient, plus précisément, de (IV.4.35) et (IV.4.64).

La conclusion est alors immédiate en se servant de (IV.4.47).

- Si la dimension est $d = 2$, le terme I (voir (IV.4.61)) est de la forme $g_3(t)|\nabla u|_2^2$ avec $g_3(t)$ bornée dans $L^1(t_0, t_0 + \tau)$ indépendamment de t_0 et de ε . On obtient la régularité et la globalité désirée grâce au lemme de Gronwall uniforme (lemme III.2.5).
- Si la dimension est $d = 3$, comme pour l'équation de Navier-Stokes incompressible homogène usuelle, c'est le terme $I = C|\nabla u|_2^6$ qui contraint les estimations à n'être que locales.

Dans chaque cas, les estimations obtenues sont indépendantes de ε et en particulier, dans le cas 3D, le temps d'existence de la solution est indépendant de ε .

■

4.3 Comportement asymptotique

Dans ce paragraphe, on va montrer que dans le cas faiblement non-homogène en dimensions $d = 2$ et $d = 3$, on a le même comportement qualitatif des solutions que dans le cas homogène (voir le chapitre 3). Plus précisément, on va établir la stabilité asymptotique des états métastables du potentiel sous cisaillement. On rappelle que l'on a fait l'hypothèse que le terme de forces extérieures g dérive d'un potentiel $\mathcal{G} \in H^1$, c'est-à-dire qu'on a

$$g = \nabla \mathcal{G}. \quad (\text{IV.4.75})$$

Typiquement, g représente la pesanteur et dérive donc bien d'un potentiel.

Théorème IV.4.4

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, et F une fonction de classe C^3 tels que $F''(\omega) > 0$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, la solution stationnaire $\varphi = \omega$ et $v = v_\infty^U$ du problème (IV.1.1)-(IV.1.4) est asymptotiquement stable.

Plus précisément, si $\varepsilon < \varepsilon_0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour toutes données $U > 0$, $v_0 \in v_\infty^U + V$ et $\varphi_0 \in \Phi_3$ avec $m(\varphi_0) = \omega$ vérifiant

$$U + \|v_0\|_1 + \|\varphi_0 - \omega\|_3 \leq \delta,$$

il existe une unique solution forte globale $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon)$ au problème (IV.1.1)-(IV.1.4) (même en 3D) ayant pour donnée initiale (φ_0, v_0) . De plus, si δ est choisi assez petit, cette solution vérifie

$$\varphi_\varepsilon(t) \rightarrow \omega, \quad v_\varepsilon(t) \rightarrow v_\infty^U, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Preuve :

• **Etape 1:** De la même façon que dans le cas homogène, on doit travailler avec un potentiel de Cahn-Hilliard modifié. Plus précisément, introduisons R_ε la primitive de ρ_ε qui s'annule en ω . On se donne $\xi > 0$ suffisamment petit, et on construit alors, au voisinage du point $x = \omega$ une fonction F_ω donnée par

$$F_\omega(x) = F(x) - \frac{F'(\omega)}{\rho_\varepsilon(\omega)} R_\varepsilon(x) - F(\omega), \quad \forall x \in [\omega - \xi, \omega + \xi].$$

On peut aisément voir que

$$F_\omega(\omega) = 0, \quad F'_\omega(\omega) = 0, \quad F''_\omega(\omega) > 0,$$

à la condition que ε satisfasse

$$\varepsilon < \frac{F''(\omega)}{|F'(\omega)|} \rho_1.$$

Cette fonction F_ω est strictement convexe au voisinage de ω , et il est donc facile d'étendre F_ω de façon convexe à \mathbb{R} tout entier, de sorte que F_ω satisfasse les hypothèses (IV.3.1)-(IV.3.4) et (IV.3.5).

Le point important est de voir que dans l'hypothèse (IV.3.3), on peut prendre $F_4(\omega) = 0$ (car F_ω est convexe, et $F_\omega(\omega) = 0$).

• **Etape 2:** On obtient les mêmes estimations que dans la preuve du théorème IV.4.2 avec le potentiel modifié F_ω , à l'exception du terme I_3 , que l'on récrit grâce à (IV.4.75) sous la forme

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \int_{\Omega} \rho \nabla \mathcal{G}.u \right| = \left| \int_{\Omega} \mathcal{G} \rho'(\varphi) \nabla(\varphi - m(\varphi)).u \right| \\ &\leq \varepsilon |\mathcal{G}|_2 |\Delta \varphi|_2 |\nabla u|_2 \leq C \varepsilon z_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.76})$$

Avec cette nouvelle estimation, l'inégalité (IV.4.43) devient

$$\frac{d}{dt} y_\varepsilon + \frac{1}{4} z_\varepsilon \leq CU^2 |D(v_\lambda)|_2^2 + C\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon + C\lambda U z_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{1}{8}} (1 + y_\varepsilon^q) z_\varepsilon. \quad (\text{IV.4.77})$$

En effet, on a $F_4(\varphi_0) = F_4(\omega) = 0$ dans (IV.4.11) et (IV.4.14), et le terme $C|g|_2^2$ qui apparaît dans (IV.4.21) n'est plus présent grâce à la nouvelle estimation du terme I_3 (IV.4.76).

Rappelons que dans la démonstration du théorème IV.4.2, on a choisi

$$\lambda = \min\left(\frac{1}{16CU}, \sqrt[4]{U}\right),$$

mais en fait on a besoin dans la suite d'un λ un peu différent, c'est la raison pour laquelle on va choisir dorénavant

$$\lambda = \min\left(\frac{1}{16CU}, \sqrt[12]{U}\right),$$

de sorte qu'avec (III.4.3), on ait toujours

$$f_1(U) \equiv CU^2 |D(v_\lambda)|_2^2 \rightarrow 0, \text{ quand } U \rightarrow 0,$$

mais en plus

$$f_2(U) \equiv CU^2 |\Delta v_\lambda|_2^2 \rightarrow 0, \text{ quand } U \rightarrow 0.$$

Il est facile de voir que ce nouveau choix de λ est tout à fait compatible avec la démonstration du théorème IV.4.2.

Dans toute la suite, f_i représentera toujours une fonction positive continue telle que $f_i(0) = 0$. De la même façon que dans la preuve du théorème (IV.4.2), en supposant $\varepsilon < \frac{1}{(16C)^2}$, on obtient

$$\frac{d}{dt} y_\varepsilon + \frac{1}{8} z_\varepsilon \leq f_1(U) + C\varepsilon^{\frac{1}{8}} (1 + y_\varepsilon^q) z_\varepsilon,$$

et finalement, avec la même définition de M_ε , on voit que si ε est assez petit pour que $K\delta \leq \frac{1}{2}M_\varepsilon$, on a pour tout temps t l'estimation

$$\frac{d}{dt} y_\varepsilon + \frac{1}{16} z_\varepsilon \leq f_1(U),$$

et donc avec (IV.4.17)

$$\frac{d}{dt} y_\varepsilon + C' y_\varepsilon \leq f_1(U).$$

Enfin, grâce à l'hypothèse sur les données (en particulier $U \leq \delta$), on déduit du lemme de Gronwall que

$$y_\varepsilon(t) \leq K\delta + \frac{f_1(U)}{C'} \equiv f_3(\delta).$$

Ceci implique que les estimations sur les solutions faibles pour ce nouveau problème s'écrivent

$$\|\varphi_\varepsilon - \omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_1)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\varphi_\varepsilon - \omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_2)} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|\varphi_\varepsilon - \omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_3)} + \|v_\varepsilon - v_\infty^U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H)} \leq f_3(\delta), \quad (\text{IV.4.78})$$

$$\begin{aligned} & \|\varphi_\varepsilon - \omega\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; \Phi_3)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; L^2)} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left\| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; H^1)} \\ & + \|\mu_\varepsilon\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; \Phi_1)} + \|v_\varepsilon - v_\infty^U\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; V)} \\ & \leq (1 + \tau) f_3(\delta), \text{ pour tout } t_0, \tau > 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.79})$$

• **Etape 3:** On reprend maintenant l'estimation (IV.4.57) pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta \varphi|_2^2 + \frac{\alpha^2}{10\rho_2^2} |\Delta^2 \varphi|_2^2 \leq f_\varepsilon^\delta(t),$$

où f_ε^δ est estimée indépendamment de ε de la façon suivante, en utilisant (IV.4.78)-(IV.4.79) :

$$\|f_\varepsilon^\delta\|_{L^1(t_0, t_0 + \tau)} \leq (1 + \tau) f_3(\delta),$$

et ce car $f_1(U)$ et $f_2(U)$ tendent vers zéro quand U tend vers zéro (donc quand δ tend vers zéro) grâce au nouveau choix de $\lambda(U)$ effectué plus haut.

En appliquant alors le lemme de Gronwall uniforme, il vient

$$\begin{aligned} \|\varphi - \omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_2)} & \leq f_4(\delta), \\ \|\varphi - \omega\|_{L^2(t_0, t_0 + \tau; \Phi_4)} & \leq (1 + \tau) f_4(\delta). \end{aligned} \quad (\text{IV.4.80})$$

Comme H^2 s'injecte dans L^∞ (en dimension $d = 2$ ou $d = 3$), on déduit de (IV.4.80) que

$$\|\varphi - \omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \leq f_4(\delta),$$

et qu'on peut donc choisir δ_0 assez petit tel que pour tout $\delta < \delta_0$ on ait

$$f_4(\delta) < \xi,$$

et ainsi pour presque tout (t, x) , $\varphi(t, x)$ est dans l'intervalle $[\omega - \xi, \omega + \xi]$ dans lequel le potentiel modifié est défini par

$$F_\omega(x) = F(x) - \frac{F'(\omega)}{\rho_\varepsilon(\omega)} R_\varepsilon(x) - F(\omega).$$

Ainsi φ est solution de l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \nabla \left(\frac{-\alpha^2 \Delta \varphi + F'_\omega(\varphi)}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \right) \right) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \nabla \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \left(-\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi) - \frac{F'(\omega)}{\rho_\varepsilon(\omega)} \rho_\varepsilon(\varphi) \right) \right) \right) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \nabla \left(\frac{-\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi)}{\rho_\varepsilon(\varphi)} \right) \right) &= 0. \end{aligned}$$

On reconnaît bien les équations initiales (IV.1.1)-(IV.1.2) avec le potentiel original F , et donc finalement, les solutions construites ici sont solutions du problème de départ (IV.1.1)-(IV.1.4).

• **Etape 4:** L'existence d'une solution forte globale en 2D est donnée par le théorème IV.4.3, on doit par contre montrer que dans le cas 3D la solution obtenue est une solution forte en vitesse, définie globalement. Pour cela on utilise le fait que la donnée initiale est proche d'une solution stationnaire, et que le terme source g dérive d'un potentiel.

Posons

$$h(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|^2 + \int_{\Omega} \eta(\varphi) |D(u)|^2,$$

et récrivons l'estimation (IV.4.74) dans le cas 3D sous la forme

$$\frac{d}{dt} h \leq g_1(t) + g_2(t)h(t) + Ch(t)^3, \quad (\text{IV.4.81})$$

où g_1 et g_2 sont bornées indépendamment de t_0 et de ε de la façon suivante

$$\int_{t_0}^{t_0+1} g_i(t) dt \leq f_5(\delta), \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

et grâce à (IV.4.79), on a aussi

$$\int_{t_0}^{t_0+1} h(t) dt \leq f_5(\delta).$$

De plus, l'hypothèse sur les données implique qu'il existe C' tel que

$$h(0) < C' \delta^2.$$

Introduisons alors

$$f_6(\delta) = (\max(C' \delta^2, f_5(\delta)) + f_5(\delta)) e^{1+f_5(\delta)}.$$

Il est immédiat de voir que

$$f_6(\delta) \rightarrow 0, \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0.$$

Choisissons alors δ_0 assez petit pour que $Cf_6(\delta)^2 < 1$ pour tout $\delta < \delta_0$. Dans ces conditions, on a

$$Ch(0)^2 < 1.$$

Si on appelle T le temps maximal tel que

$$Ch(t)^2 < 1, \quad \forall t \in [0, T[,$$

on obtient de (IV.4.81), pour tout $t \in [0, T[$,

$$\frac{d}{dt} h \leq g_1(t) + (1 + g_2(t))h(t),$$

de sorte que par le lemme de Gronwall uniforme, on a pour tout $t \in [0, T[$

$$h(t) \leq f_6(\delta).$$

Mais, par choix de δ_0 , on a $Cf_6(\delta)^2 < 1$, ce qui implique que le temps d'existence T de la solution forte est $+\infty$. De plus, on déduit les estimations suivantes sur la solution (φ, v)

$$\begin{aligned} \|\varphi - m(\varphi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_3)} + \|v - v_\infty^U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V)} &\leq f_7(\delta), \\ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; \Phi_1)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; H)} + \|v\|_{L^2(t_0, t_0+\tau; V_2)} &\leq f_7(\delta)(1 + \tau). \end{aligned} \quad (\text{IV.4.82})$$

On a donc montré l'existence globale et uniforme en temps d'une solution forte pour le problème (IV.1.1)-(IV.1.4).

• **Etape 5:** Dans l'étape précédente, on a obtenu la stabilité de la solution stationnaire que l'on étudie. Pour montrer en plus la stabilité asymptotique de cette solution, on doit étudier la convergence de la solution quand t tend vers l'infini.

Etudions tout d'abord la convergence du paramètre d'ordre φ . Si on prend le produit scalaire de (IV.1.1) avec $\varphi - \omega$ dans L^2 , on obtient avec (IV.1.4) et les conditions au bord satisfaites par v ,

$$\frac{d}{dt}|\varphi - \omega|_2^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \cdot \nabla \varphi = 0,$$

ce que l'on peut écrire, en utilisant le fait que $\mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'_\omega(\varphi)$ (ou $F'(\varphi)$, on a vu que c'était strictement équivalent),

$$\frac{d}{dt}|\varphi - \omega|_2^2 - \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{\Delta \varphi}{\rho} \right) \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{F'_\omega(\varphi)}{\rho} \right) \cdot \nabla \varphi.$$

On a

$$\frac{d}{dt}|\varphi - \omega|_2^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} |\Delta \varphi|^2 = \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} \Delta \varphi |\nabla \varphi|^2 - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} F''_\omega(\varphi) |\nabla \varphi|^2 + \int_{\Omega} \frac{F'_\omega(\varphi) \rho'(\varphi)}{\rho^3(\varphi)} |\nabla \varphi|^2,$$

et donc, comme F_ω est convexe (par construction), et φ bornée dans L^∞ , on déduit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\varphi - \omega|_2^2 + \frac{1}{\rho_2^2} |\Delta \varphi|_2^2 &\leq C\varepsilon |\Delta \varphi|_2^3 + C\varepsilon |F'_\omega(\varphi)|_\infty |\nabla \varphi|_2^2 \\ &\leq C\varepsilon f_4(\delta) |\Delta \varphi|_2^2 + C\varepsilon f_4(\delta) |\nabla \varphi|_2^2, \end{aligned}$$

car on a

$$|F'_\omega(\varphi)| = |F'_\omega(\varphi) - F'_\omega(\omega)| \leq \left(\sup_{[\omega-\xi, \omega+\xi]} |F''_\omega| \right) |\varphi - \omega|,$$

ou encore avec (IV.4.80)

$$|F'_\omega(\varphi)|_\infty \leq Cf_4(\delta).$$

Si δ est assez petit pour que $2C\varepsilon_0 f_4(\delta) \leq \frac{1}{2\rho_2^2}$, on en déduit que l'on a

$$\frac{d}{dt}|\varphi - \omega|_2^2 + C|\Delta \varphi|_2^2 \leq 0,$$

ce qui implique par (III.2.7) que

$$\frac{d}{dt}|\varphi - \omega|_2^2 + C|\varphi - \omega|_2^2 \leq 0,$$

et finalement

$$|\varphi - \omega|_2^2 \leq |\varphi_0 - \omega|_2^2 e^{-Ct},$$

ce qui donne la convergence désirée dans Φ_0 . La convergence dans Φ_s pour tout $s < 2$ provient directement de la convergence précédente et du fait que $(\varphi - \omega)$ est bornée uniformément en temps dans Φ_2 .

• **Etape 6:** Il reste à prouver la convergence du champ de vitesse. Pour cela écrivons l'équation satisfait par $v - v_\infty^U$ de la manière suivante (rappelons que $\Delta v_\infty^U = 0$ et que $g = \nabla \mathcal{G}$)

$$\begin{aligned} \rho(\omega) \left(\frac{\partial(v - v_\infty^U)}{\partial t} + (v - v_\infty^U) \cdot \nabla(v - v_\infty^U) \right) - 2 \operatorname{div} (\eta(\varphi) D(v - v_\infty^U)) + \nabla p \\ = 2 \operatorname{div} ((\eta(\varphi) - \eta(\omega)) D(v_\infty^U)) \\ - \rho(\omega)(v_\infty^U \cdot \nabla(v - v_\infty^U) + (v - v_\infty^U) \cdot \nabla v_\infty^U) \\ - (\rho(\varphi) - \rho(\omega)) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) \\ + (\mu - m(\mu)) \nabla \varphi + \varepsilon \left(\frac{1 - \varphi^2}{4} - \frac{1 - \omega^2}{4} \right) \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \\ + (\rho(\varphi) - \rho(\omega)) g, \end{aligned}$$

d'où on déduit immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\omega)}{2} \frac{d}{dt} |v - v_\infty^U|_2^2 + \eta_1 |\nabla(v - v_\infty^U)|_2^2 &\leq 2 \int_{\Omega} |\eta(\varphi) - \eta(\omega)| |D(v_\infty^U)| |D(v - v_\infty^U)| \\ &\quad + \rho(\omega) \int_{\Omega} |v_\infty^U| |v - v_\infty^U| |\nabla(v - v_\infty^U)| + \rho(\omega) \int_{\Omega} |v - v_\infty^U|^2 |\nabla v_\infty^U| \\ &\quad + \int_{\Omega} |\rho(\varphi) - \rho(\omega)| \left| \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right| |v - v_\infty^U| \\ &\quad + \int_{\Omega} |\mu - m(\mu)| |\nabla \varphi| |v - v_\infty^U| + \varepsilon \int_{\Omega} \left| \frac{\varphi^2 - \omega^2}{4} \right| \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right| |v - v_\infty^U| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} (\rho(\varphi) - \rho(\omega)) g(v - v_\infty^U) \right|. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité implique

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\omega)}{2} \frac{d}{dt} |v - v_\infty^U|_2^2 + \eta_1 |\nabla(v - v_\infty^U)|_2^2 &\leq 2 \|\eta'\|_\infty |\varphi - \omega|_\infty |D(v_\infty^U)|_2 |\nabla(v - v_\infty^U)|_2 + C |v_\infty^U|_\infty |\nabla(v - v_\infty^U)|_2^2 \\ &\quad + C |\nabla v_\infty^U|_\infty |v - v_\infty^U|_2 + C \varepsilon |\varphi - \omega|_\infty \left(\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|_2 + |\nabla v|_2 |Av|_2 \right) |v - v_\infty^U|_2 \quad (\text{IV.4.83}) \\ &\quad + C |\nabla \mu| |\nabla \varphi|_4 |v - v_\infty^U|_2 + C \varepsilon |\varphi^2 - \omega^2|_\infty \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2 |v - v_\infty^U|_2 \\ &\quad + C \varepsilon |\varphi - \omega|_\infty |g|_2 |v - v_\infty^U|_2, \end{aligned}$$

En utilisant (III.2.4), (IV.4.80), (IV.4.82) et le fait que

$$|v_\infty^U|_\infty = |\nabla v_\infty^U|_\infty = U \leq \delta,$$

on obtient, pour δ assez petit, l'estimation

$$\frac{d}{dt} |v - v_\infty^U|_2^2 + |v - v_\infty^U|_2^2 \leq g_1(t) + C' e^{-C_1 t} g_2(t),$$

où $g_1(t) \rightarrow 0$ quand t tend vers l'infini, et g_2 est donné par

$$g_2(t) = \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|_2^2 + |Av|_2^2 + |\nabla \mu|_2^2 + \left| \nabla \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right|_2^2,$$

de sorte que grâce à (IV.4.79) et à (IV.4.82) il vienne

$$\int_0^t g_2(s) ds \leq C(1 + t).$$

On peut bien sûr supposer $C_1 < 1$, alors on sait que toute fonction $y(t)$ vérifiant

$$y'(t) + y(t) \leq g_1(t) + C e^{-C_1 t} g_2(t),$$

tend nécessairement vers zéro quand t tend vers l'infini. En effet, on a

$$y(t) \leq e^{-t} y(0) + e^{-t} \int_0^t e^s g_1(s) ds + C e^{-t} \int_0^t e^{(1-C_1)s} g_2(s) ds.$$

Dans cette inégalité, il est clair que le premier terme converge vers zéro, mais aussi le second terme par le théorème de Cesaro et le fait que $g_2(t) \rightarrow 0$. Pour le troisième terme on a

$$e^{-t} \int_0^t e^{(1-C_1)s} g_2(s) ds = e^{-t} e^{(1-C_1)t} \int_0^t g_2(s) ds \leq C e^{-C_1 t} (1+t).$$

La conclusion est immédiate : le champ de vitesse v converge vers la solution stationnaire dans H et donc dans V_s pour tout $s < 1$ car on a vu que $(v - v_\infty^U)$ est borné uniformément en temps dans l'espace $V = V_1$. ■

Bibliographie du chapitre 4

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*, volume 65 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] N. Alikakos, P. Bates, and G. Fusco. Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension. *Journal of Differential Equation*, 90 :pp 71–135, 1991.
- [3] P. W. Bates and P. C. Fife. The dynamics of nucleation for the Cahn-Hilliard equation. *SIAM Journal of Applied Maths*, 53 :pp 990–1008, 1993.
- [4] F. Boyer. Mathematical study of multiphase flow under shear through order parameter formulation. *Asymptotic Analysis*, 20 :pp 175–212, 1999.
- [5] F. Boyer. Nonhomogeneous Cahn-Hilliard fluids. *Annales de l'IHP : Analyse non linéaire*, sous presse, 2001.
- [6] F. Boyer. A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows. *Computers and Fluids*, sous presse, 2001.
- [7] J. Carr, M. Gurtin, and M. Slemrod. Structured phase transitions on a finite interval. *Archive for Rational Mechanical Analysis*, 86 :pp 317–351, 1984.
- [8] A. Colin and P. Panizza. communication personnelle.
- [9] R. Dal Passo, H. Garcke, and G. Grün. On a fourth-order degenerate parabolic equation : global entropy estimates, existence, and qualitative behavior of solutions. *SIAM J. Math. Anal.*, 29 :pp 321–342, 1998.
- [10] A. Debussche and L. Dettori. On the Cahn-Hilliard equation with a logarithmic free energy. *Nonlinear Analysis*, 10 :pp 1491–1514, 1995.
- [11] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [12] M. E. Gurtin, D. Polignone, and J. Vinals. Two-phase binary fluids and immiscible fluids described by an order parameter. *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, 6 :p 815, 1996.
- [13] C. O. Horgan. Korn's inequalities and their applications in continuum mechanics. *SIAM Review*, 37 :pp 491–511, 1995.
- [14] D. Jasnow and J. Vinals. Coarse-grained description of thermo-capillary flow. *Phys. Fluids*, 8 :p 660, 1996.
- [15] P. L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics : Vol. 1 Incompressible models*. Oxford Science Publications, 1996.
- [16] A. Miranville. A model of Cahn-Hilliard equation based on a microforce balance. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328 :pp 1247–1252, 1999.
- [17] B. Nicolaenko, B. Scheurer, and R. Temam. Some global dynamical properties of a class of pattern formation equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 14 :pp 245–297, 1989.
- [18] J. Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids : existence of velocity, density, and pressure. *SIAM J. Math. Anal.*, 21 :pp 1093–1117, 1990.
- [19] J. Wei and M. Winter. On the stationary Cahn-Hilliard equation : bubble solutions. *SIAM J. Math. Anal.*, 29 :pp 1492–1518, 1998.
- [20] J. Wei and M. Winter. On the stationary Cahn-Hilliard equation : interior spike solutions. *J. Differential Equations*, 148 :pp 231–267, 1998.
- [21] J. Wei and M. Winter. Stationary solutions for the Cahn-Hilliard equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré : Analyse non linéaire*, 15 :pp 459–492, 1998.

Chapitre 5

Persistance des perturbations de solutions 1D à grand cisaillement

Dans ce qui suit le paramètre ε est différent de celui utilisé dans le chapitre 4. Les résultats suivants concernent en effet le modèle homogène étudié dans le chapitre 3.

1 Introduction

On s'intéresse à l'étude du problème précédent dans un domaine bidimensionnel donné par

$$\Omega_\varepsilon = \left] 0, \frac{1}{\varepsilon} \right[\times] -1, 1[,$$

correspondant au cas d'une cellule de Couette (voir par exemple la figure II.4.5) où la différence entre les rayons des deux cylindres (ordre ~ 1) est petite devant le rayon moyen de la cellule (ordre $\sim 1/\varepsilon$). Si on place un mélange à l'intérieur de cette cellule et que l'on met en rotation l'un des deux cylindres avec une vitesse angulaire de l'ordre de 1, on est dans la situation où le taux de cisaillement est d'ordre $1/\varepsilon$. Ainsi, dans tout ce qui suit, ε est un paramètre destiné à être petit et qui est tout le temps supposé inférieur à 1.

On souhaite comprendre l'influence du grand cisaillement sur la stabilité de solutions monodimensionnelles du problème. Ces solutions correspondent aux solutions en "bandes" que l'on obtient numériquement et expérimentalement (voir [2] et le chapitre 2).

Afin de respecter les notations des chapitres précédents la première coordonnée sera notée x et la seconde z .

Dans la suite on va faire les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le potentiel de Cahn-Hilliard est un potentiel polynomial [8, 9]

$$F(\varphi) = \frac{\varphi^4}{4} - \frac{\varphi^2}{2}. \quad (\text{V.1.1})$$

- Les termes d'inertie sont négligés dans l'équation de Navier-Stokes. Cette hypothèse correspond au cas d'un écoulement laminaire.
- La mobilité B et la viscosité η sont constantes (égales à 1 pour simplifier).

On note les inconnues dans le domaine physique Ω_ε par $\tilde{\varphi}_\varepsilon$, $\tilde{\mu}_\varepsilon$ et \tilde{V}_ε . Le système de cisaillement s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}_\varepsilon}{\partial t} + \tilde{V}_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon - \Delta \tilde{\mu}_\varepsilon &= 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ \tilde{\mu}_\varepsilon &= -\alpha^2 \Delta \tilde{\varphi}_\varepsilon + F'(\tilde{\varphi}_\varepsilon) \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial \tilde{V}_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \tilde{V}_\varepsilon + \nabla \tilde{p}_\varepsilon &= -\alpha^2 \Delta \tilde{\varphi}_\varepsilon \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ \operatorname{div}(\tilde{V}_\varepsilon) &= 0, \\ \tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{\mu}_\varepsilon \text{ et } \tilde{V}_\varepsilon &\text{ périodiques en } x, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}_\varepsilon}{\partial \nu} = \frac{\partial \tilde{\mu}_\varepsilon}{\partial \nu} &= 0, \text{ sur } \{z = \pm 1\}, \\ \tilde{V}_\varepsilon &= \pm \frac{1}{\varepsilon} e_x, \text{ pour } z = \pm 1. \end{aligned}$$

On relève les conditions aux limites par le champ de vitesse stationnaire $\frac{z}{\varepsilon} e_x$ où e_x est le vecteur unitaire selon la direction x . On écrit alors le champ de vitesse sous la forme $\tilde{V}_\varepsilon = \frac{z}{\varepsilon} e_x + \tilde{U}_\varepsilon$. Avec ce changement de fonction, les équations dans le domaine Ω_ε deviennent

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_\varepsilon}{\partial t} + \frac{z}{\varepsilon} \partial_x \tilde{\varphi}_\varepsilon + \tilde{U}_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon - \Delta \tilde{\mu}_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \quad (\text{V.1.2})$$

$$\tilde{\mu}_\varepsilon = -\alpha^2 \Delta \tilde{\varphi}_\varepsilon + F'(\tilde{\varphi}_\varepsilon) \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \quad (\text{V.1.3})$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \tilde{U}_\varepsilon + \nabla \tilde{p}_\varepsilon = -\alpha^2 \Delta \tilde{\varphi}_\varepsilon \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \quad (\text{V.1.4})$$

$$\operatorname{div}(\tilde{U}_\varepsilon) = 0, \quad (\text{V.1.5})$$

+ périodicité et conditions aux limites homogènes sur $\tilde{\varphi}_\varepsilon$, $\tilde{\mu}_\varepsilon$ et \tilde{U}_ε .

Remarquons qu'il est préférable, pour simplifier les calculs, d'écrire le terme de forces capillaires sous la forme $-\alpha^2 \Delta \tilde{\varphi}_\varepsilon \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon$ plutôt que $\tilde{\mu}_\varepsilon \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon$. Ceci est tout à fait licite car le terme $F'(\tilde{\varphi}_\varepsilon) \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon$ peut être ajouté au terme de pression. On a déjà utilisé cette transformation lors de l'étude du problème homogène dans le cas dégénéré (chapitre 3 définition III.3.3).

Dans la suite, on note

$$\tilde{U}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \tilde{u}_\varepsilon \\ \tilde{v}_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

2 Solutions 1D du système

On s'intéresse à l'étude des solutions 1D du problème (V.1.2)-(V.1.5), c'est-à-dire à des solutions qui ne dépendent que de z . Soit $(\tilde{\varphi}_0(t, z), \tilde{U}_0(t, z))$ une telle solution, avec

$$\tilde{U}_0(t, z) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0(t, z) \\ \tilde{v}_0(t, z) \end{pmatrix},$$

alors la condition (V.1.5) sur \tilde{U}_0 et le fait que $\partial_x \tilde{u}_0 = 0$, montre que nécessairement

$$\partial_z \tilde{v}_0 = 0.$$

Ainsi, comme $\tilde{U}_0 = 0$ sur les bords $\{z = \pm 1\}$, il vient

$$\tilde{v}_0 = 0.$$

Comme \tilde{U}_0 est dirigé suivant l'axe des x et que $\partial_x \varphi_0 = 0$, les termes de transport disparaissent dans (V.1.2) et il reste

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial t} - \partial_z^2 \tilde{\mu}_0 &= 0, \\ \tilde{\mu}_0 &= -\alpha^2 \partial_z^2 \tilde{\varphi}_0 + F'(\tilde{\varphi}_0).\end{aligned}$$

L'équation (V.1.4) devient dans ces conditions

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial t} - \Delta \tilde{u}_0 + \partial_x \tilde{p}_0 &= 0, \\ \partial_z \tilde{p}_0 &= -\alpha^2 \partial_z^2 \tilde{\varphi}_0 \partial_z \tilde{\varphi}_0.\end{aligned}$$

La pression et le champ de vitesse donnés par

$$\tilde{p}_0 = -\frac{\alpha^2}{2} |\partial_z \tilde{\varphi}_0|^2, \quad (\text{V.2.1})$$

et

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial t} - \Delta \tilde{u}_0 = 0,$$

sont à l'évidence l'unique solution de ce problème.

Ainsi, les solutions monodimensionnelles du système (V.1.2)-(V.1.5) sont obtenues comme solutions de deux équations découpées : une équation de Cahn-Hilliard 1D classique pour $\tilde{\varphi}_0$ et une équation de la chaleur pour \tilde{u}_0 . Remarquons, en outre, que ces solutions ne dépendent pas de ε . On va ainsi s'intéresser au comportement du système (V.1.2)-(V.1.5) pour des données initiales bidimensionnelles proches de données monodimensionnelles à grand cisaillement, c'est-à-dire pour ε petit.

Dans toute la suite, on considère $(t, z) \mapsto \tilde{\varphi}_0(t, z)$ solution dans $]-1, 1[$ de l'équation de Cahn-Hilliard 1D

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial t} - \partial_z^2 \tilde{\mu}_0 = 0, \quad (\text{V.2.2})$$

$$\tilde{\mu}_0 = -\alpha^2 \partial_z^2 \tilde{\varphi}_0 + F'(\tilde{\varphi}_0), \quad (\text{V.2.3})$$

avec la donnée initiale

$$\tilde{\varphi}_0(0) = \varphi_0^0 \in H^1(]-1, 1[),$$

et les conditions au bord

$$\partial_z \tilde{\varphi}_0 = \partial_z^3 \tilde{\varphi}_0 = 0, \text{ pour } z = \pm 1.$$

L'existence et l'unicité d'une telle solution est très classique [1, 9], et celle-ci vérifie

$$\forall t \geq 0, \quad m(\tilde{\varphi}_0(t)) = m(\varphi_0^0),$$

$$\forall t \geq 0, \quad |\partial_z \tilde{\varphi}_0|_2^2(t) + \int_{-1}^1 F(\tilde{\varphi}_0(t)) \leq C_0, \quad (\text{V.2.4})$$

$$\forall T \geq 0, \quad \int_0^T |\partial_z^3 \tilde{\varphi}_0|_2^2 \leq C_0(1 + T), \quad (\text{V.2.5})$$

$$\sup_{t,z} |\tilde{\varphi}_0(t, z)| \leq C_0, \quad (\text{V.2.6})$$

pour une certaine constante C_0 ne dépendant que de φ_0^0 .

On associe à cette solution le champ de pression \tilde{p}_0 défini par (V.2.1) ainsi que la solution de l'équation de la chaleur monodimensionnelle suivante

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial t} - \partial_z^2 \tilde{u}_0 = 0, \quad (\text{V.2.7})$$

avec la donnée initiale

$$\tilde{u}_0(0) = u_0^0 \in L^2([-1, 1]),$$

et les conditions aux limites de Dirichlet homogène

$$\tilde{u}_0(z = \pm 1) = 0.$$

L'existence et l'unicité de solutions pour ce problème de Cauchy sont classiques et on rappelle les estimations suivantes

$$\|\tilde{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2([-1, 1]))} + \|\tilde{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H^1([-1, 1]))} \leq C|u_0^0|_2. \quad (\text{V.2.8})$$

Par l'injection de Sobolev $H^1 \subset L^\infty$ en dimension 1, il vient alors

$$\|\tilde{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^\infty([-1, 1]))} \leq C|u_0^0|_2. \quad (\text{V.2.9})$$

Dans ce qui suit, on va montrer, pour ε petit, la persistance sur des temps significatifs de petites perturbations de la solution 1D du problème (V.1.2)-(V.1.5) donnée par $\tilde{\varphi}_0$ et par

$$\tilde{U}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0(t, z) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{V.2.10})$$

3 Changement de variables et d'inconnues

Afin de tenir compte du caractère allongé du domaine que l'on considère, on est naturellement amené à effectuer le changement de variables suivant pour tout $(x, z) \in \Omega_0 =]0, 1[\times]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(t, x, z) &= \tilde{\varphi}_\varepsilon(t, \frac{x}{\varepsilon}, z) \\ U_\varepsilon(t, x, z) &= \begin{pmatrix} \tilde{u}_\varepsilon(t, \frac{x}{\varepsilon}, z) \\ \frac{1}{\varepsilon} \tilde{v}_\varepsilon(t, \frac{x}{\varepsilon}, z) \end{pmatrix} \\ \mu_\varepsilon(t, x, z) &= \tilde{\mu}_\varepsilon(t, \frac{x}{\varepsilon}, z) \\ p_\varepsilon(t, x, z) &= \tilde{p}_\varepsilon(t, \frac{x}{\varepsilon}, z). \end{aligned}$$

Le choix du coefficient $\frac{1}{\varepsilon}$ dans la définition de la seconde composante de U_ε est fait pour assurer que la condition de divergence nulle dans Ω_0 pour le champ de vitesse U_ε s'écrit encore sous la forme

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot U_\varepsilon = 0.$$

Remarque V.3.1

Comme d'après ce qui précède, les solutions monodimensionnelles $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{U}_0)$ du système vérifient $\tilde{v}_0 = 0$, il est facile de voir qu'elles sont invariantes par le changement de variables et d'inconnues précédent.

Ainsi dans toute la suite ces solutions seront indifféremment notées $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{U}_0)$ ou (φ_0, U_0) .

On vérifie que, dans les nouvelles variables, le système (V.1.2)-(V.1.5) devient

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} + z\partial_x \varphi_\varepsilon + \varepsilon U_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_x^2 \mu_\varepsilon - \partial_z^2 \mu_\varepsilon = 0, \text{ dans } \Omega_0, \quad (\text{V.3.1})$$

$$\mu_\varepsilon = -\alpha^2 \varepsilon^2 \partial_x^2 \varphi_\varepsilon - \alpha^2 \partial_z^2 \varphi_\varepsilon + F'(\varphi_\varepsilon) \text{ dans } \Omega_0, \quad (\text{V.3.2})$$

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \partial_x^2 U_\varepsilon - \partial_z^2 U_\varepsilon + \begin{pmatrix} \varepsilon \partial_x p_\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_z p_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 \varepsilon (\varepsilon^2 \partial_x^2 \varphi_\varepsilon + \partial_z^2 \varphi_\varepsilon) \partial_x \varphi \\ -\frac{\alpha^2}{\varepsilon} (\varepsilon^2 \partial_x^2 \varphi_\varepsilon + \partial_z^2 \varphi_\varepsilon) \partial_z \varphi_\varepsilon \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega_0, \quad (\text{V.3.3})$$

$$\operatorname{div}(U_\varepsilon) = 0, \quad (\text{V.3.4})$$

associé aux conditions de périodicité en x et aux conditions aux limites

$$\partial_z \varphi_\varepsilon = \partial_z^3 \varphi_\varepsilon = 0 \text{ sur } \{z = \pm 1\},$$

$$U_\varepsilon = 0 \text{ sur } \{z = \pm 1\}.$$

En effet, comme $\partial_z \varphi_\varepsilon = 0$ la condition de Neumann pour μ_ε sur les bords $\{z = \pm 1\}$, s'écrit bien

$$0 = \partial_z(-\alpha^2 \varepsilon^2 \partial_x^2 \varphi_\varepsilon - \alpha^2 \partial_z^2 \varphi_\varepsilon) + F''(\varphi_\varepsilon) \partial_z \varphi_\varepsilon = -\alpha^2 \partial_z^3 \varphi_\varepsilon.$$

4 Rappels sur les inégalités de Sobolev anisotropes

Le domaine initial dépend de ε , et il est donc judicieux de ramener les inconnues et les calculs à un domaine fixe Ω_0 comme on vient de le faire. Ainsi, les constantes qui apparaissent dans les inégalités de Sobolev et de Poincaré utilisées dans la suite sur Ω_0 ne dépendent pas de ε . Cependant, si on utilise les inégalités de Sobolev classiques, on perd le fait que le domaine initial est anisotrope.

C'est la raison pour laquelle on va, dans la suite, utiliser des inégalités de Sobolev anisotropes (voir [10]) que l'on rappelle ci-dessous.

- **Notation :** Dans toute la suite $|\cdot|_p$ désigne la norme sur $L^p(\Omega_0)$.

Lemme V.4.1 (Inégalités de Sobolev anisotropes)

- Pour tout $2 \leq p < +\infty$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour toute fonction f de $H^1(\Omega_0)$, on a

$$|f|_p \leq C_p |f|_2^{\frac{2}{p}} (|f|_2 + |\partial_x f|_2)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} (|f|_2 + |\partial_z f|_2)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}. \quad (\text{V.4.1})$$

- Pour tout $2 \leq p \leq \infty$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour toute fonction f de $H^2(\Omega_0)$, on a

$$|f|_p \leq C_p |f|_2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} (|f|_2 + |\partial_x f|_2 + |\partial_x^2 f|_2)^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2p}} (|f|_2 + |\partial_z f|_2 + |\partial_z^2 f|_2)^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2p}}. \quad (\text{V.4.2})$$

Remarque V.4.1

Dans ce qui suit, l'inégalité (V.4.2) est appliquée à des fonctions f vérifiant les conditions de périodicité en x et des conditions aux limites homogènes (Dirichlet ou Neumann) sur les bords $\{z = \pm 1\}$ de Ω_0 . Ainsi, on peut montrer par intégration par parties que l'on a

$$|\partial_x f|_2 \leq |f|_2^{\frac{1}{2}} |\partial_x^2 f|_2^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} (|f|_2 + |\partial_x^2 f|_2),$$

$$|\partial_z f|_2 \leq |f|_2^{\frac{1}{2}} |\partial_z^2 f|_2^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} (|f|_2 + |\partial_z^2 f|_2),$$

de sorte que (V.4.2) sera utilisée sous la forme

$$|f|_p \leq C_p |f|_2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} (|f|_2 + |\partial_x^2 f|_2)^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2p}} (|f|_2 + |\partial_z^2 f|_2)^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2p}}. \quad (\text{V.4.3})$$

Preuve :

On se contente ici de donner l'esquisse de la preuve de la première inégalité. La démonstration complète se trouve par exemple dans [10].

• Etape 1 - Cas de \mathbb{R}^2

On prouve tout d'abord le résultat pour une fonction $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ à support compact, par un argument d'homogénéité. On sait que pour tout $p \in [2, +\infty[$, on a

$$H_0^1(\mathbb{R}^2) \subset L^p(\mathbb{R}^2).$$

Il existe donc $C_p > 0$ telle que

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C_p (\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_x g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_z g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}).$$

Pour tout couple (λ, μ) de réels positifs on pose

$$h(x, z) = g(\lambda x, \mu z),$$

de sorte que $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. De plus, on obtient aisément

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &= \frac{1}{(\lambda\mu)^{\frac{1}{p}}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \\ \|\partial_x h\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \\ \|\partial_z h\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \|\partial_z g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

et donc d'après l'inégalité précédente appliquée à la fonction h on a

$$\frac{1}{(\lambda\mu)^{\frac{1}{p}}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C_p \left(\frac{1}{(\lambda\mu)^{\frac{1}{2}}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \|\partial_z g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right),$$

ce qui donne

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C_p \left((\lambda\mu)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + (\lambda\mu)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + (\lambda\mu)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \|\partial_z g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right). \quad (\text{V.4.4})$$

Comme on souhaite obtenir dans le membre de droite un produit de termes, il faut s'arranger pour que tous les termes qui y apparaissent soient égaux. Ceci donne les relations

$$\begin{aligned} (\lambda\mu)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= (\lambda\mu)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \\ (\lambda\mu)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= (\lambda\mu)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \|\partial_z g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Ces équations admettent pour solution

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\|\partial_x g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}, \\ \mu &= \frac{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\|\partial_z g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}. \end{aligned}$$

En reportant dans (V.4.4), il vient

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C_p \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2}{p}} \|\partial_x g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|\partial_z g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, \quad (\text{V.4.5})$$

ce qui prouve le résultat pour les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Pour prouver le résultat sur Ω_0 , il faut utiliser une technique de prolongement puis de troncature.

• **Etape 2 - Prolongement**

Pour $f \in C^1(\overline{\Omega}_0)$, on construit un prolongement \bar{f} de classe C^1 sur $\overline{\Omega}_1$, où $\Omega_1 =]-1/2, 3/2[\times]-2, 2[$, qui vérifie

$$\|\bar{f}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega_0)}, \quad (\text{V.4.6})$$

$$\|\partial_x \bar{f}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\|\partial_x f\|_{L^2(\Omega_0)}, \quad (\text{V.4.7})$$

$$\|\partial_z \bar{f}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\|\partial_z f\|_{L^2(\Omega_0)}, \quad (\text{V.4.8})$$

où C est une constante universelle. Ce qui est important ici c'est de pouvoir contrôler la dérivée par rapport à x de \bar{f} uniquement par la dérivée par rapport à x de f , c'est-à-dire sans mélanger les directions. Cette construction s'effectue par réflexion successivement dans la direction x puis dans la direction z grâce aux opérateurs de Babitch (voir [10]). Par exemple, et sans rentrer dans les détails, on pose pour $x \in]-1/2, 3/2[$ et $z \in]-1, 1[$

$$\bar{f}(x, z) = \begin{cases} f(x, z) & \text{si } x \in [0, 1] \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i f(-ix, z) & \text{si } x \in [-1/2, 0[\\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i f(1 - i(x-1), z) & \text{si } x \in]1, 3/2[\end{cases}$$

où les α_i sont solutions de

$$\sum_{i=1}^2 (-i)^k \alpha_i = 1, \text{ pour } k = 0 \text{ et } k = 1.$$

Cette dernière condition assure le caractère C^1 du prolongement \bar{f} et il est facile de voir que l'on a bien des estimations du type (V.4.6)-(V.4.8). On procède de la même manière dans la direction z .

• **Etape 3 - Troncature**

Dans cette dernière étape on doit tronquer la fonction \bar{f} pour qu'elle coïncide encore avec f sur $\overline{\Omega}_0$, tout en étant à support compact dans \mathbb{R}^2 . Pour cela, il faut localiser \bar{f} séparément dans chaque direction afin de ne pas coupler les dérivées en x et celles en z . On souhaite en effet dans le résultat final obtenir un produit de termes dans lesquels les directions x et z sont séparées. La méthode consiste à introduire

$$g(x, z) = \xi_1(x)\xi_2(z)\bar{f}(x, z),$$

avec ξ_1 et ξ_2 régulières, à support compact respectivement dans $] -1/2, 3/2[$ et $] -2, 2[$ et qui valent 1 respectivement sur $[0, 1]$ et $[-1, 1]$. Il est facile de vérifier que l'on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega_0)} &\leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \\ \|\partial_x g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\leq C(\|\bar{f}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\partial_x \bar{f}\|_{L^2(\Omega_1)}), \\ \|\partial_z g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\leq C(\|\bar{f}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\partial_z \bar{f}\|_{L^2(\Omega_1)}), \end{aligned}$$

ce qui, en utilisant (V.4.5) et (V.4.6)-(V.4.8), fournit le résultat attendu

$$\|f\|_{L^p(\Omega_0)} \leq C_p \|f\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{2}{p}} (\|f\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\partial_x f\|_{L^2(\Omega_0)})^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} (\|f\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\partial_z f\|_{L^2(\Omega_0)})^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}.$$

■

5 Solution bidimensionnelle de l'équation linéarisée

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, considérons φ_1 (qui dépend de ε de façon implicite) solution de l'équation de Cahn-Hilliard (V.3.1)-(V.3.2) avec $U_\varepsilon = U_0$ linéarisée autour de la solution (non forcément stationnaire) $\varphi_\varepsilon = \varphi_0$. Celle-ci s'écrit

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + z\partial_x \varphi_1 + \varepsilon u_0(t, z)\partial_x \varphi_1 - \varepsilon^2 \partial_x^2 \mu_1 - \partial_z^2 \mu_1 = 0, \quad (\text{V.5.1})$$

$$\mu_1 = -\alpha^2 \varepsilon^2 \partial_x^2 \varphi_1 - \alpha^2 \partial_z^2 \varphi_1 + F''(\varphi_0(t, z))\varphi_1. \quad (\text{V.5.2})$$

On prouve sans difficulté, par les mêmes techniques que dans le chapitre 3, l'existence et l'unicité d'une solution faible globale pour ce problème, pour une donnée initiale dans $H^1(\Omega_0)$. On note $\tilde{\varphi}_1$ et $\tilde{\mu}_1$ les fonctions définies sur Ω_ε obtenues par le changement de variables inverse de celui effectué dans la section 3. On s'attend à ce que φ_1 régit l'évolution de la partie principale de la perturbation au cours du temps.

Dans la suite C_0 désigne une constante qui ne dépend que de φ_0 (c'est-à-dire de φ_0^0) et de u_0 (c'est-à-dire de u_0^0), et C une constante universelle. Ces constantes qui peuvent éventuellement changer d'une ligne sur l'autre.

Lemme V.5.1 (Estimations sur φ_1)

- La solution 1D (φ_0, u_0) du problème étant fixée, l'unique solution à (V.5.1)-(V.5.2) vérifie les estimations suivantes pour tout $T > 0$,

$$\forall 0 \leq t \leq T, |\varphi_1|_2^2(t) \leq |\varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T}, \quad (\text{V.5.3})$$

$$\forall 0 \leq t \leq T, |\partial_x \varphi_1|_2^2(t) \leq |\partial_x \varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T}, \quad (\text{V.5.4})$$

$$\forall 0 \leq t \leq T, |\partial_z \varphi_1|_2^2(t) \leq C_0 \left(|\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2 \right) e^{C_0 T}, \quad (\text{V.5.5})$$

$$\int_0^T \left(\varepsilon^4 |\partial_x^2 \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 \right) \leq C_0 |\varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T}, \quad (\text{V.5.6})$$

$$\int_0^T \left(\varepsilon^4 |\partial_x^3 \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 \right) \leq C_0 |\partial_x \varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T}, \quad (\text{V.5.7})$$

$$\int_0^T \left(\varepsilon^4 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + 2\varepsilon^2 |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^3 \varphi_1|_2^2 \right) \leq C_0 \left(|\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2 \right) e^{C_0 T}. \quad (\text{V.5.8})$$

- En outre, si on suppose que φ_0 est une solution stationnaire, constante et métastable de l'équation de Cahn-Hilliard, c'est-à-dire $\varphi_0(t, z) = \omega$ pour tout (t, z) avec $F''(\omega) > 0$, alors les estimations sur φ_1 deviennent

$$\forall t \geq 0, |\varphi_1|_2^2(t) \leq |\varphi_1^0|_2^2,$$

$$\forall t \geq 0, |\partial_x \varphi_1|_2^2(t) \leq |\partial_x \varphi_1^0|_2^2,$$

$$\forall t \geq 0, |\partial_z \varphi_1|_2^2(t) \leq |\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{C_0}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2,$$

$$\int_0^T \left(\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_2^2 + |\partial_z \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^4 |\partial_x^2 \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 \right) \leq C_0 |\varphi_1^0|_2^2,$$

$$\int_0^T \left(\varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^4 |\partial_x^3 \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 \right) \leq C_0 |\partial_x \varphi_1^0|_2^2,$$

$$\int_0^T \left(\varepsilon^2 |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^4 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + 2\varepsilon^2 |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^3 \varphi_1|_2^2 \right) \leq C_0 \left(|\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2 \right).$$

Preuve :

- **Etape 1:**

Multiplions l'équation (V.5.1) par $(-1)^k \partial_x^{2k} \varphi_1$ (pour $k = 0$ ou 1), il vient, comme φ_0 et u_0 ne dépendent que de z , et après intégrations par parties

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_x^k \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^4 |\partial_x^{k+2} \varphi_1|_2^2 + 2\alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_x^{k+1} \partial_z \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 |\partial_x^k \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 \leq |F''(\varphi_0)|_\infty |\partial_x^k \varphi_1|_2 (\varepsilon^2 |\partial_x^{k+2} \varphi_1|_2 + |\partial_x^k \partial_z^2 \varphi_1|_2),$$

Ce qui fournit par le lemme de Gronwall

$$\forall 0 \leq t \leq T, |\partial_x^k \varphi_1|_2^2 \leq |\partial_x^k \varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T},$$

où $C_0 = \sup_{(t,z)} |F''(\varphi_0(t,z))|$ (qui est fini car $\varphi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$). On a de plus

$$\int_0^T \varepsilon^4 |\partial_x^{k+2} \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x^{k+1} \partial_z \varphi_1|_2^2 + |\partial_x^k \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 \leq |\partial_x^k \varphi_1^0|_2^2 (1 + e^{C_0 T}) \leq C_0 |\partial_x^k \varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T}.$$

• **Etape 2:**

Si maintenant on multiplie l'équation (V.5.1) par $-\partial_z^2 \varphi_1$, il vient après intégrations par parties

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_z \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^4 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + 2\alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 |\partial_z^3 \varphi_1|_2^2 \\ & \leq \left| \int_{\Omega_0} \varphi_1 \partial_x \partial_z \varphi_1 \right| + \varepsilon \left| \int_{\Omega_0} u_0 \varphi_1 \partial_x \partial_z^2 \varphi_1 \right| \\ & \quad + |F''(\varphi_0)|_\infty |\partial_z \varphi_1|_2 (\varepsilon^2 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2 + |\partial_z^3 \varphi_1|_2) \\ & \quad + |F'''(\varphi_0) \partial_z \varphi_0|_\infty |\varphi_1|_2 (\varepsilon^2 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2 + |\partial_z^3 \varphi_1|_2), \end{aligned}$$

ce qui fournit après absorption par les termes coercifs

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_z \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^4 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 |\partial_z^3 \varphi_1|_2^2 \\ & \leq \frac{C_0}{\varepsilon} (|\varphi_1|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2^2) + C |u_0|_\infty^2 |\varphi_1|_2^2 + C_0 |\partial_z \varphi_1|_2^2. \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, t]$, il vient avec (V.2.8) et les estimations précédentes sur φ_1 ,

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \quad & |\partial_z \varphi_1|_2^2(t) + \alpha^2 \int_0^t (\varepsilon^4 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^3 \varphi_1|_2^2) \\ & \leq |\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{C_0}{\varepsilon} \left(\int_0^T |\varphi_1|_2^2 + \varepsilon^2 \int_0^T |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2^2 \right) + C \int_0^T |\partial_z u_0|_2^2 |\varphi_1|_2^2 + C_0 \int_0^t |\partial_z \varphi_1|_2^2 \\ & \leq |\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{C_0}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T} + C |\varphi_1^0|_2^2 |u_0|_2^2 e^{C_0 T} + C_0 \int_0^t |\partial_z \varphi_1|_2^2. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \quad & |\partial_z \varphi_1|_2^2 \leq \left(|\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{C_0}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T} \right) e^{C_0 T} \\ & \leq C_0 \left(|\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2 \right) e^{C_0 T} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \int_0^T (\varepsilon^4 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + 2\varepsilon^2 |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^3 \varphi_1|_2^2) & \leq C_0 \left(|\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T} \right) e^{C_0 T} \\ & \leq C_0 \left(|\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2 \right) e^{C_0 T} \end{aligned}$$

• **Etape 3:**

Dans le cas particulier où φ_0 est une constante ω telle que $F''(\omega) > 0$, alors le terme en $F''(\varphi_0) \varphi_1$ qui apparaît dans μ_1 est un terme coercif. En conséquence, les estimations deviennent uniformes en temps. Ainsi, on a

$$\forall t \geq 0, \quad |\partial_x^k \varphi_1|_2^2(t) \leq |\partial_x^k \varphi_1^0|_2^2,$$

$$\forall T \geq 0, \int_0^T \varepsilon^2 |\partial_x^{k+1} \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^{k+1} \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^4 |\partial_x^{k+2} \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x^{k+1} \partial_z \varphi_1|_2^2 + |\partial_x^k \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 \leq C_0 |\partial_x^k \varphi_1^0|_2^2.$$

De plus, on peut récrire les estimations sur la dérivée par rapport à z de φ_1 de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_z \varphi_1|_2^2 + F''(\omega) \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2^2 + F''(\omega) |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^4 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 |\partial_z^3 \varphi_1|_2^2 \\ \leq \left| \int_{\Omega_0} \partial_x \varphi_1 \partial_z \varphi_1 \right| + \varepsilon \left| \int_{\Omega_0} u_0 \varphi_1 \partial_x \partial_z^2 \varphi_1 \right|. \end{aligned}$$

Ceci devient après absorption par les termes coercifs

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_z \varphi_1|_2^2 + F''(\omega) \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2^2 + F''(\omega) |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^4 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + 2\alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + \alpha^2 |\partial_z^3 \varphi_1|_2^2 \\ \leq \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_2^2 + |\partial_z \varphi_1|_2^2) + C |u_0|_\infty^2 |\varphi_1|_2^2, \end{aligned}$$

pour obtenir après intégration en temps, en utilisant (V.2.8) et les bornes obtenues sur les dérivées en x

$$\forall t \geq 0, |\partial_z \varphi_1|_2^2(t) \leq |\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{C_0}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2.$$

Enfin, il vient

$$\forall T \geq 0, \int_0^T \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^4 |\partial_x^2 \partial_z \varphi_1|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2^2 + |\partial_z^3 \varphi_1|_2^2 \leq |\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + \frac{C_0}{\varepsilon} |\varphi_1^0|_2^2.$$

■

6 Résultats principaux

Les théorèmes ci-dessous sont énoncés par rapport au problème initial posé dans Ω_ε . Pour mieux apprécier le sens physique des résultats, on introduit une norme L^2 invariante par rapport au domaine, c'est-à-dire par rapport à ε .

Définition V.6.1 (Norme invariante)

Pour toute fonction $\tilde{f}_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, on définit la norme suivante

$$|\tilde{f}_\varepsilon|_{2,\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} \|\tilde{f}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Remarque V.6.1

Si on applique à \tilde{f}_ε le changement de variables que l'on a opéré sur les inconnues du problème, on obtient une fonction f_ε définie par

$$\forall (x, z) \in \Omega_0, f_\varepsilon(x, z) = \tilde{f}_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, z\right).$$

Il est immédiat de constater que f_ε appartient à $L^2(\Omega_0)$ et qu'elle vérifie

$$|f_\varepsilon|_2 = |\tilde{f}_\varepsilon|_{2,\varepsilon}.$$

- **Cas général :**

On obtient, sans hypothèse particulière sur la solution 1D (φ_0, U_0) considérée, la persistance de perturbations de taille ε de cette solution sur des temps $O(1)$. Les difficultés proviennent essentiellement des termes non linéaires : celui de Cahn-Hilliard $F'(\varphi)$ mais aussi celui de forces capillaires, qui sont la cause principale de la croissance des petites perturbations des solutions monodimensionnelles. Le résultat précis est le suivant.

Théorème V.6.1

Soit φ_0 une solution 1D de l'équation de Cahn-Hilliard (V.2.2)-(V.2.3), pour la donnée initiale φ_0^0 . On se donne une famille de données initiales de la forme

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(0) = \varphi_0^0 + \varepsilon \tilde{\varphi}_1^0,$$

$$\tilde{U}_\varepsilon(0) = u_0^0(z)e_x + \tilde{W}_\varepsilon^0,$$

pour les équations (V.1.2)-(V.1.5) dans le domaine Ω_ε . On suppose que $m(\tilde{\varphi}_1^0) = 0$ et qu'il existe une constante K_0 ne dépendant que de φ_0^0 telle que

$$|\tilde{\varphi}_1^0|_{2,\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\nabla \tilde{\varphi}_1^0|_{2,\varepsilon} \leq K_0, \quad (\text{V.6.1})$$

$$|\tilde{W}_\varepsilon^0|_{2,\varepsilon} \leq K_0 \varepsilon. \quad (\text{V.6.2})$$

Alors, pour tout $T > 0$, il existe $\varepsilon_0(T) > 0$ et $M_0(T) > 0$ tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, l'unique solution $\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{U}_\varepsilon$ du problème (V.1.2)-(V.1.5) dans Ω_ε vérifie

$$\sup_{t \in [0,T]} \left(|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon \tilde{\varphi}_1|_{2,\varepsilon} + |\tilde{U}_\varepsilon - U_0|_{2,\varepsilon} \right) \leq M_0(T) \varepsilon,$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \left(|\nabla(\tilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon \tilde{\varphi}_1)|_{2,\varepsilon} \right) \leq M_0(T) \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

- **Cas $\varphi_0 \equiv \omega$, avec $F''(\omega) \leq 0$:**

Dans ce cadre, le résultat précédent est amélioré car, en plus de la persistance des perturbations de taille ε , on prouve la validité en temps $O(1)$ du développement asymptotique

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon \equiv \varphi_0 + \varepsilon \tilde{\varphi}_1 + o(\varepsilon).$$

Ainsi, l'évolution de la perturbation initiale est bien décrite à l'ordre ε par $\tilde{\varphi}_1$.

On va voir dans les estimations qui vont suivre que la différence par rapport au cas général réside dans l'absence de forces capillaires importantes dans ce cadre sur des temps $O(1)$. En effet une solution constante de l'équation de Cahn-Hilliard ne présente pas d'interface et donc pas de forces capillaires. Ceci subsiste sous l'effet une petite perturbation tant que l'interface ne s'est pas créée. Ainsi le temps de validité du développement précédent est régi par la déstabilisation de l'état non-métastable $\varphi_0 = \omega$ pour l'équation de Cahn-Hilliard.

Théorème V.6.2

On considère une solution constante $\varphi_0 = \varphi_0^0 \equiv \omega$ de l'équation de Cahn-Hilliard 1D (V.2.2)-(V.2.3), avec $F''(\omega) \leq 0$ (i.e. ω n'est pas métastable). Soit alors une famille de données initiales de la forme

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(0) = \varphi_0^0 + \varepsilon \tilde{\varphi}_1^0 = \omega + \varepsilon \tilde{\varphi}_1^0,$$

$$\tilde{U}_\varepsilon(0) = u_0^0(z)e_x + \tilde{W}_\varepsilon^0,$$

pour les équations (V.1.2)-(V.1.5) dans le domaine Ω_ε . On suppose que $m(\tilde{\varphi}_1^0) = 0$ et qu'il existe une constante K_0 ne dépendant que de $\varphi_0^0 = \omega$ telle que

$$|\tilde{\varphi}_1^0|_{2,\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\nabla \tilde{\varphi}_1^0|_{2,\varepsilon} \leq K_0, \quad (\text{V.6.3})$$

$$|\tilde{W}_\varepsilon^0|_{2,\varepsilon} \leq K_0 \varepsilon^{\frac{5}{4}}. \quad (\text{V.6.4})$$

Alors, pour tout $T > 0$, il existe $\varepsilon_0(T) > 0$ et $M_0(T) > 0$ tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, la solution $\tilde{\varphi}_\varepsilon$, \tilde{U}_ε à (V.1.2)-(V.1.5) dans Ω_ε vérifie

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon \tilde{\varphi}_1|_{2,\varepsilon} + |\tilde{U}_\varepsilon - U_0|_{2,\varepsilon} \right) \leq M_0(T) \varepsilon^{\frac{5}{4}},$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(|\nabla(\tilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon \tilde{\varphi}_1)|_{2,\varepsilon} \right) \leq M_0(T) \varepsilon^{\frac{3}{4}}.$$

- Cas $\varphi_0 \equiv \omega$, avec $F''(\omega) > 0$:

Ici encore, on améliore les résultats précédents en montrant que dans ce cas, on a persistance des perturbations de taille ε sur tout temps et qu'on peut, justifier le développement asymptotique

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon \tilde{\varphi}_1 + o(\varepsilon),$$

sur \mathbb{R}^+ tout entier.

Dans ce cadre, l'état initial $\varphi_0 = \omega$ est métastable pour l'équation de Cahn-Hilliard et donc une petite perturbation de cet état ne va pas engendrer l'apparition progressive d'une interface et donc de forces capillaires qui déstabiliseraient le système.

Théorème V.6.3

On considère une solution constante $\varphi_0 = \varphi_0^0 \equiv \omega$ de l'équation de Cahn-Hilliard 1D (V.2.2)-(V.2.3), avec $F''(\omega) > 0$, c'est-à-dire que ω est un état métastable du potentiel F . Soit alors une famille de données initiales de la forme

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(0) = \varphi_0^0 + \varepsilon \tilde{\varphi}_1^0 = \omega + \varepsilon \tilde{\varphi}_1^0,$$

$$\tilde{U}_\varepsilon(0) = u_0^0(z) e_x + \tilde{W}_\varepsilon^0,$$

pour les équations (V.1.2)-(V.1.5) dans le domaine Ω_ε . On suppose que $m(\tilde{\varphi}_1^0) = 0$ et qu'il existe une constante K_0 ne dépendant que de $\varphi_0^0 = \omega$ telle que

$$|\tilde{\varphi}_1^0|_{2,\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\nabla \tilde{\varphi}_1^0|_{2,\varepsilon} \leq K_0, \quad (\text{V.6.5})$$

$$|\tilde{W}_\varepsilon^0|_{2,\varepsilon} \leq K_0 \varepsilon^{\frac{5}{4}}. \quad (\text{V.6.6})$$

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $M_0 > 0$ tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, la solution $\tilde{\varphi}_\varepsilon$, \tilde{U}_ε à (V.1.2)-(V.1.5) dans Ω_ε vérifie

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left(|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon \tilde{\varphi}_1|_{2,\varepsilon} + |\tilde{U}_\varepsilon - U_0|_{2,\varepsilon} \right) \leq M_0 \varepsilon^{\frac{5}{4}},$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left(|\nabla(\tilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon \tilde{\varphi}_1)|_{2,\varepsilon} \right) \leq M_0 \varepsilon^{\frac{3}{4}}.$$

La suite de ce chapitre est consacré à la preuve de ces résultats. Pour cela on cherche les équations vérifiées par les restes du développement asymptotique. Ensuite, on effectue les estimations d'énergie sur ces restes qui permettent de conclure dans les deux premiers cas. La preuve du troisième résultat nécessite d'adapter certaines estimations, elle est donc effectuée dans une section séparée, à la fin de ce chapitre.

7 Estimations d'énergie

7.1 Equations sur les restes

On s'attend à ce que la solution φ_ε , U_ε au problème (V.3.1)-(V.3.4) se comporte quand ε est petit comme φ_0 corrigé à l'ordre ε par la solution φ_1 de l'équation linéarisée. On écrit donc la solution du problème sous la forme

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon, \quad (\text{V.7.1})$$

$$\mu_\varepsilon = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon M_\varepsilon, \quad (\text{V.7.2})$$

$$p_\varepsilon = p_0 + P_\varepsilon, \quad (\text{V.7.3})$$

$$U_\varepsilon = U_0 + W_\varepsilon, \quad (\text{V.7.4})$$

et on cherche les équations satisfaites par les restes $R_\varepsilon, M_\varepsilon, W_\varepsilon$. Pour cela on introduit les développements précédents (V.7.1)-(V.7.4) dans les équations (V.3.1)-(V.3.4).

Remarque V.7.1

Par analogie avec les notations employées dans ce chapitre on note $\tilde{R}_\varepsilon, \tilde{M}_\varepsilon$, et \tilde{W}_ε les restes pour ce problème dans les variables initiales.

• Equation en R_ε

L'équation en φ_ε (V.3.1) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) + z \partial_x(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) + \varepsilon U_0 \cdot \nabla(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) + \varepsilon W_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) \\ - \varepsilon^2 \partial_x^2(\mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon M_\varepsilon) - \partial_z^2(\mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon M_\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

Si on utilise l'équation en φ_0 (V.2.2), l'équation en φ_1 (V.5.1), le fait que $\partial_x \varphi_0 = 0$ et la forme de U_0 (V.2.10), l'équation satisfait par R_ε s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_\varepsilon + z \partial_x R_\varepsilon + \varepsilon u_0 \partial_x R_\varepsilon + W_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_0 + \varepsilon W_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_1 + \varepsilon W_\varepsilon \cdot \nabla R_\varepsilon \\ - \varepsilon^2 \partial_x^2 M_\varepsilon - \partial_z^2 M_\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.7.5})$$

En outre, d'après le choix des conditions initiales dans les trois théorèmes (section 6), la donnée initiale pour le reste R_ε est nulle

$$R_\varepsilon(0) = 0,$$

et il est facile de voir que R_ε vérifie les mêmes conditions aux limites que φ_ε , c'est-à-dire la périodicité dans la direction x et dans la direction z les conditions de Neumann

$$\partial_z R_\varepsilon = 0 \text{ sur } \{z = \pm 1\}.$$

Remarquons enfin que comme $m(R_\varepsilon(0)) = 0$, la moyenne de R_ε reste nulle au cours du temps.

• Equation en M_ε

L'équation en μ_ε (V.3.2) s'écrit

$$(\mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon M_\varepsilon) = -\alpha^2 \varepsilon^2 \partial_x^2(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) - \alpha^2 \partial_z^2(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) + F'(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon \varphi_\varepsilon),$$

ce qui en vertu des équations (V.2.3) et (V.5.2) peut se récrire

$$M_\varepsilon = -\alpha^2 \varepsilon^2 \partial_x^2 R_\varepsilon - \alpha^2 \partial_z^2 R_\varepsilon + \frac{F'(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) - F'(\varphi_0) - \varepsilon F''(\varphi_0) \varphi_1}{\varepsilon}.$$

Or, la formule de Taylor fournit

$$F'(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) = F'(\varphi_0) + \varepsilon F''(\varphi_0)(\varphi_1 + R_\varepsilon) + \varepsilon^2 \int_0^1 (1-s) F'''(\varphi_0 + \varepsilon s(\varphi_1 + R_\varepsilon))(\varphi_1 + R_\varepsilon)^2 ds,$$

ce qui permet d'obtenir, avec (V.1.1), l'équation vérifiée par M_ε :

$$M_\varepsilon = -\alpha^2 \varepsilon^2 \partial_x^2 R_\varepsilon - \alpha^2 \partial_z^2 R_\varepsilon + \varepsilon F''(\varphi_0) R_\varepsilon + \varepsilon (\varphi_1 + R_\varepsilon)^2 (3\varphi_0 + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon)). \quad (\text{V.7.6})$$

En outre, d'après les conditions aux limites sur μ_ε , le reste M_ε est périodique dans la direction x et vérifie

$$\partial_z M_\varepsilon = 0, \quad \text{sur } \{z = \pm 1\},$$

ce qui est équivalent, d'après l'équation précédente et la condition de Neumann sur R_ε , à la condition

$$\partial_z^3 R_\varepsilon = 0, \quad \text{sur } \{z = \pm 1\}.$$

• Equation en W_ε

Tout d'abord, il est clair que d'après (V.3.4) et la forme de U_0 (V.2.10), on a

$$\operatorname{div}(W_\varepsilon) = \partial_x W_\varepsilon + \partial_z W_\varepsilon = 0. \quad (\text{V.7.7})$$

Ensuite, écrivons l'équation vérifiée par U_ε et p_ε de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(U_0 + W_\varepsilon) - \varepsilon^2 \partial_x^2(U_0 + W_\varepsilon) - \partial_z^2(U_0 + W_\varepsilon) + \begin{pmatrix} \varepsilon \partial_x(p_0 + P_\varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_z(p_0 + P_\varepsilon) \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} \varepsilon^2(-\alpha^2 \varepsilon^2 \partial_x^2(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) - \alpha^2 \partial_z^2(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon)) \partial_x(\varphi_1 + R_\varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon}(-\alpha^2 \varepsilon^2 \partial_x^2(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) - \alpha^2 \partial_z^2(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon)) \partial_z(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et grâce à (V.2.7) et (V.2.1), il reste

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W_\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_x^2 W_\varepsilon - \partial_z^2 W_\varepsilon + \begin{pmatrix} \varepsilon \partial_x P_\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_z P_\varepsilon \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} \varepsilon^2(-\alpha^2 \varepsilon^3 \partial_x^2(\varphi_1 + R_\varepsilon) - \alpha^2 \partial_z^2(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon)) \partial_x(\varphi_1 + R_\varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon}(-\alpha^2 \varepsilon^3 \partial_x^2(\varphi_1 + R_\varepsilon) \partial_z(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon) - \alpha^2 \varepsilon \partial_z^2(\varphi_1 + R_\varepsilon) \partial_z(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon R_\varepsilon)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{V.7.8})$$

On déduit de la forme adoptée pour les conditions initiales sur \tilde{U}_ε dans les énoncés des théorèmes de la section 6, que l'on a

$$W_\varepsilon(0) = W_\varepsilon^0,$$

où $W_\varepsilon^0(x, z) = \tilde{W}_\varepsilon^0(x/\varepsilon, z)$. De plus, les conditions aux limites sur W_ε sont les mêmes que celles sur U_ε , c'est-à-dire la périodicité en x et les conditions de Dirichlet homogène sur $\{z = \pm 1\}$.

Dorénavant les deux composantes de W_ε sont notées

$$W_\varepsilon = \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ v_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

7.2 Estimation L^2 sur R_ε

Elle s'obtient tout naturellement en multipliant par R_ε l'équation (V.7.5), dans laquelle on remplace M_ε par la valeur donnée par (V.7.6), et en intégrant sur Ω_0

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |R_\varepsilon|_2^2 + \varepsilon^2 \int_{\Omega_0} \partial_x^2 (-\alpha^2 \varepsilon^2 \partial_x^2 R_\varepsilon - \alpha^2 \partial_z^2 R_\varepsilon + F''(\varphi_0) R_\varepsilon + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon)^2 (3\varphi_0 + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon))) R_\varepsilon \\ - \int_{\Omega_0} \partial_z^2 (-\alpha^2 \varepsilon^2 \partial_x^2 R_\varepsilon - \alpha^2 \partial_z^2 R_\varepsilon + F''(\varphi_0) R_\varepsilon + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon)^2 (3\varphi_0 + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon))) R_\varepsilon \\ + \int_{\Omega_0} W_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_0 R_\varepsilon + \varepsilon \int_{\Omega_0} W_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_1 R_\varepsilon \\ = 0. \end{aligned}$$

On peut récrire cette estimation sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^4 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^2 + 2\alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^2 = \\
& - \varepsilon^2 \int_{\Omega_0} \partial_x (F''(\varphi_0) R_\varepsilon) \partial_x R_\varepsilon - \int_{\Omega_0} \partial_z (F''(\varphi_0) R_\varepsilon) \partial_z R_\varepsilon \\
& + \varepsilon^3 \int_{\Omega_0} (\varphi_1 + R_\varepsilon)^2 (3\varphi_0 + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon)) \partial_x^2 R_\varepsilon \\
& + \varepsilon \int_{\Omega_0} (\varphi_1 + R_\varepsilon)^2 (3\varphi_0 + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon)) \partial_z^2 R_\varepsilon \\
& - \int_{\Omega_0} v_\varepsilon \partial_z \varphi_0 R_\varepsilon - \varepsilon \int_{\Omega_0} W_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_1 R_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{V.7.9}$$

7.3 Estimation L^2 sur W_ε

Afin d'utiliser le fait que W_ε est à divergence nulle et donc de faire disparaître la pression P_ε des estimations, on doit multiplier l'équation (V.7.8) par

$$\begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon^2} \\ v_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions on a

$$\int_{\Omega_0} \begin{pmatrix} \varepsilon \partial_x P_\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_z P_\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon^2} \\ v_\varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} \partial_x P_\varepsilon u_\varepsilon + \partial_z P_\varepsilon v_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} \nabla P_\varepsilon \cdot W_\varepsilon = 0.$$

De plus, on s'attend à ce que le reste sur le champ de vitesse dans les variables initiales \tilde{W}_ε soit d'ordre ε dans le résultat final (pour la norme $|\cdot|_{2,\varepsilon}$), c'est donc ce choix des puissances de ε qui vient naturellement à l'esprit d'après le choix du changement de variables et d'inconnues effectué. Il vient donc

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2^2 + |v_\varepsilon|_2^2 \right) + \varepsilon^2 \left| \partial_x \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2^2 + \left| \partial_z \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x v_\varepsilon|_2^2 + |\partial_z v_\varepsilon|_2^2 \\
& = -\alpha^2 \varepsilon \int_{\Omega_0} \partial_z^2 \varphi_0 \partial_x (\varphi_1 + R_\varepsilon) \left(\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) - \alpha^2 \int_{\Omega_0} \partial_z^2 \varphi_0 \partial_z (\varphi_1 + R_\varepsilon) v_\varepsilon \\
& - \alpha^2 \varepsilon^2 \int_{\Omega_0} \partial_z^2 (\varphi_1 + R_\varepsilon) \partial_x (\varphi_1 + R_\varepsilon) \left(\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) - \alpha^2 \varepsilon^4 \int_{\Omega_0} \partial_x^2 (\varphi_1 + R_\varepsilon) \partial_x (\varphi_1 + R_\varepsilon) \left(\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \\
& - \alpha^2 \varepsilon^2 \int_{\Omega_0} \partial_x^2 (\varphi_1 + R_\varepsilon) \partial_z \varphi_0 v_\varepsilon - \alpha^2 \int_{\Omega_0} \partial_z^2 (\varphi_1 + R_\varepsilon) \partial_z \varphi_0 v_\varepsilon \\
& - \alpha^2 \varepsilon \int_{\Omega_0} \partial_z^2 (\varphi_1 + R_\varepsilon) \partial_z (\varphi_1 + R_\varepsilon) v_\varepsilon - \alpha^2 \varepsilon^3 \int_{\Omega_0} \partial_x^2 (\varphi_1 + R_\varepsilon) \partial_z (\varphi_1 + R_\varepsilon) v_\varepsilon
\end{aligned} \tag{V.7.10}$$

Cette estimation ne peut être raisonnablement exploitée que si on a, en plus, avec une estimation H^1 sur le reste R_ε . A cause de l'anisotropie du problème et de la forme particulière des termes de transport dans (V.3.1), on estime séparément $\partial_x R_\varepsilon$ et $\partial_z R_\varepsilon$.

7.4 Estimation L^2 sur $\partial_x R_\varepsilon$

Elle s'obtient en multipliant l'équation (V.7.5) par $-\partial_x^2 R_\varepsilon$ et en intégrant par parties. Comme on l'a vu lors de l'estimation sur φ_1 , on ne voit pas les termes issus de l'opérateur antisymétrique de transport $(z + \varepsilon u_0) \partial_x$. Ainsi l'estimation

s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_x R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^4 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_x^2 \partial_z R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 |\partial_x \partial_z^2 R_\varepsilon|_2^2 = \\ - \varepsilon^2 \int_{\Omega_0} \partial_x^2 (F''(\varphi_0) R_\varepsilon) \partial_x^2 R_\varepsilon - \int_{\Omega_0} \partial_z^2 (F''(\varphi_0) R_\varepsilon) \partial_x^2 R_\varepsilon \\ + \varepsilon \int_{\Omega_0} W_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi_1 + R_\varepsilon) \partial_x^2 R_\varepsilon + \int_{\Omega_0} v_\varepsilon \partial_z \varphi_0 \partial_x^2 R_\varepsilon \\ - \varepsilon^3 \int_{\Omega_0} \partial_x ((\varphi_1 + R_\varepsilon)^2 (3\varphi_0 + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon))) \partial_x^3 R_\varepsilon \\ - \varepsilon \int_{\Omega_0} \partial_z ((\varphi_1 + R_\varepsilon)^2 (3\varphi_0 + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon))) \partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{V.7.11})$$

7.5 Estimation L^2 sur $\partial_z R_\varepsilon$

On multiplie maintenant l'équation (V.7.5) par $-\partial_z^2 R_\varepsilon$ et on l'intègre par parties. A la différence du cas précédent, on voit apparaître les termes issus de l'opérateur de transport dans la direction x . En effet, l'estimation obtenue s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_z R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^4 |\partial_x^2 \partial_z R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z^2 R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 |\partial_z^3 R_\varepsilon|_2^2 = \\ \int_{\Omega_0} R_\varepsilon \partial_x \partial_z R_\varepsilon - \varepsilon \int_{\Omega_0} \partial_z u_0 R_\varepsilon \partial_x \partial_z R_\varepsilon \\ - \varepsilon^2 \int_{\Omega_0} \partial_x^2 (F''(\varphi_0) R_\varepsilon) \partial_z^2 R_\varepsilon - \int_{\Omega_0} \partial_z^2 (F''(\varphi_0) R_\varepsilon) \partial_z^2 R_\varepsilon \\ + \varepsilon \int_{\Omega_0} W_\varepsilon \cdot \nabla (R_\varepsilon + \varphi_1) \partial_z^2 R_\varepsilon + \int_{\Omega_0} v_\varepsilon \partial_z \varphi_0 \partial_z^2 R_\varepsilon \\ - \varepsilon^3 \int_{\Omega_0} \partial_x ((\varphi_1 + R_\varepsilon)^2 (3\varphi_0 + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon))) \partial_x \partial_z^2 R_\varepsilon \\ - \varepsilon \int_{\Omega_0} \partial_z ((\varphi_1 + R_\varepsilon)^2 (3\varphi_0 + \varepsilon(\varphi_1 + R_\varepsilon))) \partial_z^3 R_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{V.7.12})$$

L'idée est maintenant de contrôler le premier terme du second membre de cette estimation par les termes coercifs apparaissant dans l'estimation L^2 sur R_ε (V.7.9). Pour cela il faut multiplier l'estimation précédente par ε et donc l'estimation (V.7.11) par ε^3 , afin de conserver l'anisotropie du problème et retrouver dans les variables initiales le carré de la norme du gradient du reste.

Cette façon de faire est plus favorable que d'écrire ce terme sous la forme

$$\int_{\Omega_0} \partial_x R_\varepsilon \partial_z R_\varepsilon,$$

et de le contrôler uniquement par le biais des estimations (V.7.11) et (V.7.12), ce qui nécessiterait de multiplier l'estimation précédente par ε^2 et l'estimation (V.7.11) par ε^4 . Ces trop grandes puissances de ε nécessaires pour contrôler les termes $\partial_x R_\varepsilon$ et $\partial_z R_\varepsilon$ nuiraient à l'obtention d'estimations indépendantes de ε par la suite.

7.6 Estimation finale

On va donc maintenant évaluer la quantité suivante

$$y_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} |R_\varepsilon|_2^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2^2 + \frac{1}{2} |v_\varepsilon|_2^2 + \varepsilon^3 |\partial_x R_\varepsilon|_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon |\partial_z R_\varepsilon|_2^2, \quad (\text{V.7.13})$$

qui correspond dans les inconnues et les variables initiales à

$$y_\varepsilon(t) = |\tilde{R}_\varepsilon|_{2,\varepsilon}^2 + \left| \frac{\tilde{W}_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_{2,\varepsilon}^2 + \varepsilon |\nabla \tilde{R}_\varepsilon|_{2,\varepsilon}^2. \quad (\text{V.7.14})$$

Les termes coercifs associés à l'estimation de y_ε sont rassemblés dans

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(t) = & \alpha^2 \varepsilon^4 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^2 + 2\alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^2 \\ & + \alpha^2 \varepsilon^7 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^5 |\partial_x^2 \partial_z R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^3 |\partial_x \partial_z^2 R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon |\partial_z^3 R_\varepsilon|_2^2 \\ & + \varepsilon^2 \left| \partial_x \left(\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right|_2^2 + \left| \partial_z \left(\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x v_\varepsilon|_2^2 + |\partial_z v_\varepsilon|_2^2. \end{aligned}$$

Ainsi, l'estimation finale s'obtient en sommant (V.7.9), (V.7.10), $\varepsilon \times$ (V.7.12) et $\varepsilon^3 \times$ (V.7.11),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_\varepsilon + z_\varepsilon = & I_1 + \dots + I_6 \\ & + J_1 + \dots + J_8 \\ & + K_1 + \dots + K_6 \\ & + L_1 + \dots + L_8, \end{aligned}$$

où I_1, \dots, I_6 désignent les six intégrales du second membre de (V.7.9), J_1, \dots, J_8 les huit intégrales de l'estimation (V.7.9), K_1, \dots, K_6 les six intégrales de l'estimation (V.7.11) multipliées par ε^3 et enfin L_1, \dots, L_8 les huit termes du second membre de (V.7.12) multipliés par ε .

On va maintenant estimer ces vingt-huit termes en fonction de y_ε et de z_ε .

Remarquons tout d'abord que R_ε étant à moyenne nulle, la régularité de l'opérateur de Laplace avec conditions aux limites de Neumann donne

$$|R_\varepsilon|_2 \leq C(|\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2). \quad (\text{V.7.15})$$

L'inégalité de Poincaré pour les fonctions à moyenne nulle dans Ω_0 fournit quant à elle

$$|R_\varepsilon|_2 \leq C(|\partial_x R_\varepsilon|_2 + |\partial_z R_\varepsilon|_2). \quad (\text{V.7.16})$$

• Etape 1 - Contrôle des termes de l'estimation L^2 sur R_ε

On intègre par parties les deux premiers termes pour obtenir

$$\begin{aligned} |I_1| \leq & \varepsilon^2 |F''(\varphi_0)|_\infty |R_\varepsilon|_2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 \leq \frac{\alpha^2}{10} \varepsilon^4 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^2 + C |F''(\varphi_0)|_\infty^2 |R_\varepsilon|_2^2 \\ \leq & \frac{1}{50} z_\varepsilon + C |F''(\varphi_0)|_\infty^2 y_\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{V.7.17})$$

et

$$\begin{aligned} |I_2| \leq & |F''(\varphi_0)|_\infty |R_\varepsilon|_2 |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 \leq \frac{\alpha^2}{10} |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^2 + C |F''(\varphi_0)|_\infty^2 |R_\varepsilon|_2^2 \\ \leq & \frac{1}{50} z_\varepsilon + C |F''(\varphi_0)|_\infty^2 y_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{V.7.18})$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Sobolev anisotrope (V.4.3) avec $p = 4$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{4}} |R_\varepsilon|_4 \leq & C |R_\varepsilon|_2^{\frac{3}{4}} (\varepsilon^2 |R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{8}} (|R_\varepsilon|_2 + |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{8}} \\ \leq & C y_\varepsilon^{\frac{3}{8}} (y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + z_\varepsilon^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} \\ \leq & C y_\varepsilon^{\frac{3}{8}} (y_\varepsilon^{\frac{1}{8}} + z_\varepsilon^{\frac{1}{8}}), \end{aligned} \quad (\text{V.7.19})$$

puis avec $p = 6$, il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{3}} |R_\varepsilon|_6 &\leq C |R_\varepsilon|_2^{\frac{2}{3}} (\varepsilon^2 |R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{6}} (|R_\varepsilon|_2 + |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{6}} \\ &\leq C y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} (y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + z_\varepsilon^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \\ &\leq C y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} (y_\varepsilon^{\frac{1}{6}} + z_\varepsilon^{\frac{1}{6}}). \end{aligned} \quad (\text{V.7.20})$$

Ainsi, grâce à (V.7.19) et (V.7.20) on a

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \varepsilon^3 |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^3 |\varphi_0|_\infty |R_\varepsilon|_4^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^4 |\varphi_1|_6^3 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^4 |R_\varepsilon|_6^3 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 \\ &\leq \varepsilon |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4^2 (\varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\varphi_0|_\infty (\varepsilon^{\frac{1}{4}} |R_\varepsilon|_4)^2 (\varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2) \\ &\quad + \varepsilon^2 |\varphi_1|_6^3 (\varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2) + \varepsilon (\varepsilon^{\frac{1}{3}} |R_\varepsilon|_6)^3 (\varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2) \\ &\leq \varepsilon |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4^2 z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\varphi_0|_\infty y_\varepsilon^{\frac{3}{4}} (y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} + z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}) z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^2 |\varphi_1|_6^3 z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C \varepsilon y_\varepsilon (y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + z_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon^2 |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^4 + C \varepsilon^4 |\varphi_1|_6^6 + C \varepsilon |\varphi_0|_\infty^2 y_\varepsilon^2 + C \varepsilon^2 (1 + |\varphi_0|_\infty^4) y_\varepsilon^3 + C \varepsilon y_\varepsilon z_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{V.7.21})$$

Le terme suivant se traite de façon identique en remplaçant $\varepsilon^2 \partial_x^2 R_\varepsilon$ par $\partial_z^2 R_\varepsilon$, il vient la même estimation

$$|I_4| \leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon^2 |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^4 + C \varepsilon^4 |\varphi_1|_6^6 + C \varepsilon |\varphi_0|_\infty^2 y_\varepsilon^2 + C \varepsilon^2 (1 + |\varphi_0|_\infty^4) y_\varepsilon^3 + C \varepsilon y_\varepsilon z_\varepsilon. \quad (\text{V.7.22})$$

Le cinquième terme se majore aisément par

$$|I_5| \leq |\partial_z \varphi_0|_\infty |v_\varepsilon|_2 |R_\varepsilon|_2 \leq |\partial_z \varphi_0|_\infty y_\varepsilon. \quad (\text{V.7.23})$$

En utilisant les inégalités

$$\begin{aligned} |\partial_z R_\varepsilon|_2 &\leq |R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}}, \\ |\partial_x R_\varepsilon|_2 &\leq |R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}}, \\ |\partial_x \partial_z R_\varepsilon|_2 &\leq |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

obtenues en intégrant par parties, et l'inégalité de Sobolev anisotrope (V.4.1) avec $p = 4$, on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} |\partial_x R_\varepsilon|_4 &\leq C |\partial_x R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} (|\partial_x R_\varepsilon|_2 + |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} (|\partial_x R_\varepsilon|_2 + |\partial_x \partial_z R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq C |R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{4}} |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{4}} (|R_\varepsilon|_2 + |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} (|R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} + |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} \\ &\leq C |R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{3}{8}} (|R_\varepsilon|_2 + |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} (|R_\varepsilon|_2 + |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{8}}, \end{aligned}$$

qui fournit, en utilisant l'inégalité (V.7.15) et en répartissant les puissances de ε en fonction des définitions de y_ε et z_ε

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{5}{4}} |\partial_x R_\varepsilon|_4 &\leq C |R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{4}} (\varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{3}{8}} (\varepsilon^2 |R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} (|R_\varepsilon|_2 + |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{8}} \\ &\leq C y_\varepsilon^{\frac{1}{8}} z_\varepsilon^{\frac{5}{16}} (y_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + z_\varepsilon^{\frac{1}{16}}) \\ &\leq C y_\varepsilon^{\frac{3}{16}} z_\varepsilon^{\frac{5}{16}} + C y_\varepsilon^{\frac{1}{8}} z_\varepsilon^{\frac{3}{8}}. \end{aligned} \quad (\text{V.7.24})$$

De manière similaire on montre que

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}} |\partial_z R_\varepsilon|_4 \leq C y_\varepsilon^{\frac{3}{16}} z_\varepsilon^{\frac{5}{16}} + C y_\varepsilon^{\frac{1}{8}} z_\varepsilon^{\frac{3}{8}}. \quad (\text{V.7.25})$$

De la même façon on obtient par l'inégalité de Sobolev (V.4.1) pour $p = 4$,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 &\leq C \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2 + \varepsilon \left| \partial_x \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2 \right)^{\frac{1}{4}} \left(\left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2 + \left| \partial_z \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2 \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq C y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (\text{V.7.26})$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{4}}|v_\varepsilon|_4 &\leq C|v_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}}(\varepsilon|v_\varepsilon|_2 + \varepsilon|\partial_x v_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}}(|v_\varepsilon|_2 + |\partial_z v_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq Cy_\varepsilon^{\frac{1}{4}}z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (\text{V.7.27})$$

Remarquons au passage, qu'on a utilisé le fait que u_ε et v_ε sont nulles sur les bords $\{z = \pm 1\}$, et qu'on a donc par l'inégalité de Poincaré (dans la direction z)

$$|u_\varepsilon|_2 \leq C|\partial_z u_\varepsilon|_2, \quad \text{et} \quad |v_\varepsilon|_2 \leq C|\partial_z v_\varepsilon|_2.$$

Ainsi, grâce à (V.7.24)-(V.7.27), le sixième et dernier terme se majore de la façon suivante

$$\begin{aligned} |I_6| &\leq \varepsilon^2|\varphi_1|_2 \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 |\partial_x R_\varepsilon|_4 + \varepsilon|\varphi_1|_2|v_\varepsilon|_4|\partial_z R_\varepsilon|_4 \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}|\varphi_1|_2 \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 \right) (\varepsilon^{\frac{5}{4}}|\partial_x R_\varepsilon|_4) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}|\varphi_1|_2(\varepsilon^{\frac{1}{4}}|v_\varepsilon|_4)(\varepsilon^{\frac{1}{4}}|\partial_z R_\varepsilon|_4) \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\varphi_1|_2(y_\varepsilon^{\frac{7}{16}}z_\varepsilon^{\frac{9}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{3}{8}}z_\varepsilon^{\frac{5}{8}}) \\ &\leq \frac{1}{50}z_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{8}{7}}|\varphi_1|_2^{\frac{16}{7}}y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{4}{3}}|\varphi_1|_2^{\frac{8}{3}}y_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{V.7.28})$$

• Etape 2 - Contrôle des termes de l'estimation L^2 sur W_ε

Les deux premiers termes s'estiment sans difficulté de la façon suivante

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \alpha^2\varepsilon|\partial_z^2\varphi_0|_\infty|\partial_x\varphi_1|_2 \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2 + \alpha^2\varepsilon|\partial_z^2\varphi_0|_\infty|\partial_x R_\varepsilon|_2 \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2 \\ &\leq \alpha^2\varepsilon|\partial_z^2\varphi_0|_\infty|\partial_x\varphi_1|_2y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha^2|\partial_z^2\varphi_0|_\infty|R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}}(\varepsilon^2|\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_2 \\ &\leq \frac{1}{50}z_\varepsilon + C|\partial_z^2\varphi_0|_\infty^{\frac{4}{3}}y_\varepsilon + C\varepsilon|\partial_z^2\varphi_0|_\infty|\partial_x\varphi_1|_2y_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{V.7.29})$$

et

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \alpha^2|\partial_z^2\varphi_0|_\infty|\partial_z\varphi_1|_2|v_\varepsilon|_2 + \alpha^2|\partial_z^2\varphi_0|_\infty|\partial_z R_\varepsilon|_2|v_\varepsilon|_2 \\ &\leq \alpha^2|\partial_z^2\varphi_0|_\infty|\partial_z\varphi_1|_2y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha^2|\partial_z^2\varphi_0|_\infty|R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}}|\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}}|v_\varepsilon|_2 \\ &\leq \frac{1}{50}z_\varepsilon + C|\partial_z^2\varphi_0|_\infty|\partial_z\varphi_1|_2y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C|\partial_z^2\varphi_0|_\infty^{\frac{4}{3}}y_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{V.7.30})$$

On a alors besoin d'une nouvelle estimation sur $|\partial_x R_\varepsilon|_4$ qui requiert une plus grande puissance de ε mais au final comprend une plus petite puissance de z_ε , ce qui est absolument nécessaire en vue de l'absorption de ces termes par les termes coercifs de l'estimation. Ainsi, par l'inégalité de Sobolev (V.4.1) il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{3}{2}}|\partial_x R_\varepsilon|_4 &\leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}|\partial_x R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}}(|\partial_x R_\varepsilon|_2 + |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}}(|\partial_x R_\varepsilon|_2 + |\partial_x \partial_z R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq C(\varepsilon^{\frac{3}{2}}|\partial_x R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}}(\varepsilon^2|\partial_x R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^2|\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} \left(|R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}}(\varepsilon^2|\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} + |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}}(\varepsilon^2|\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq Cy_\varepsilon^{\frac{1}{4}}(y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + z_\varepsilon^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}(y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} + z_\varepsilon^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} \\ &\leq Cy_\varepsilon^{\frac{1}{4}}(y_\varepsilon^{\frac{3}{16}} + z_\varepsilon^{\frac{3}{16}})z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} \leq Cy_\varepsilon^{\frac{7}{16}}z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + Cy_\varepsilon^{\frac{1}{4}}z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (\text{V.7.31})$$

Le troisième terme s'estime lors en utilisant (V.7.26) et (V.7.31) de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 |J_3| &\leq \alpha^2 \varepsilon^{\frac{7}{4}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2 |\partial_x \varphi_1|_4 \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 \right) + \alpha^2 \varepsilon^{\frac{1}{4}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 \right) \\
 &\quad + \alpha^2 \varepsilon^{\frac{7}{4}} |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 |\partial_x \varphi_1|_4 \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 \right) + \alpha^2 \varepsilon^{\frac{1}{4}} |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 \right) \\
 &\leq C \varepsilon^{\frac{7}{4}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2 |\partial_x \varphi_1|_4 y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}} + C \varepsilon^{\frac{1}{4}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2 (y_\varepsilon^{\frac{7}{16}} z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}) y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}} \\
 &\quad + C \varepsilon^{\frac{7}{4}} |\partial_x \varphi_1|_4 y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{3}{4}} + C \varepsilon^{\frac{1}{4}} (y_\varepsilon^{\frac{7}{16}} z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}) y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{3}{4}} \\
 &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{7}{3}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} + C \varepsilon^{\frac{4}{11}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{16}{11}} y_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 y_\varepsilon \\
 &\quad + C \varepsilon^7 |\partial_x \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{11}{3}} + C \varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{V.7.32}$$

Le quatrième terme se majore de façon identique en remplaçant formellement $\partial_z^2 \varphi_1$ par $\varepsilon^2 \partial_x^2 \varphi_1$ et $\partial_z^2 R_\varepsilon$ par $\varepsilon^2 \partial_x^2 R_\varepsilon$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
 |J_4| &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{15}{3}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} + C \varepsilon^{\frac{36}{11}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^{\frac{16}{11}} y_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{9}{2}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^2 y_\varepsilon \\
 &\quad + C \varepsilon^7 |\partial_x \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{11}{3}} + C \varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{V.7.33}$$

Pour les cinquième et sixième termes, on procède de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 |J_5| &\leq \alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty |\partial_x^2 \varphi_1|_2 |v_\varepsilon|_2 + \alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 |v_\varepsilon|_2 \\
 &\leq \alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty |\partial_x^2 \varphi_1|_2 y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty |\partial_x^2 \varphi_1|_2 y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C |\partial_z \varphi_0|_\infty^2 y_\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{V.7.34}$$

et

$$\begin{aligned}
 |J_6| &\leq \alpha^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty |\partial_z^2 \varphi_1|_2 |v_\varepsilon|_2 + \alpha^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 |v_\varepsilon|_2 \\
 &\leq \alpha^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty |\partial_z^2 \varphi_1|_2 y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C |\partial_z \varphi_0|_\infty |\partial_z^2 \varphi_1|_2 y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C |\partial_z \varphi_0|_\infty^2 y_\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{V.7.35}$$

Enfin, les deux derniers termes s'estiment de façon similaire au troisième et au quatrième. Tout d'abord on doit établir une nouvelle estimation sur $|\partial_z R_\varepsilon|_4$, grâce à (V.4.1)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z R_\varepsilon|_4 &\leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} (|\partial_z R_\varepsilon|_2 + |\partial_x \partial_z R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} (|\partial_z R_\varepsilon|_2 + |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} \\
 &\leq C (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon |\partial_z R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} + (\varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{4}} (|\partial_z R_\varepsilon|_2 + |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} \\
 &\leq C y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} (y_\varepsilon^{\frac{3}{16}} + z_\varepsilon^{\frac{3}{16}}) \\
 &\leq C y_\varepsilon^{\frac{7}{16}} z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + C y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}.
 \end{aligned} \tag{V.7.36}$$

Ainsi, via (V.7.27) et (V.7.36), on obtient

$$\begin{aligned}
 |J_7| &\leq \alpha^2 \varepsilon |\partial_z^2 \varphi_1|_2 |\partial_z \varphi_1|_4 |v_\varepsilon|_4 + \alpha^2 \varepsilon |\partial_z^2 \varphi_1|_2 |\partial_z R_\varepsilon|_4 |v_\varepsilon|_4 \\
 &\quad + \alpha^2 \varepsilon |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 |\partial_z \varphi_1|_4 |v_\varepsilon|_4 + \alpha^2 \varepsilon |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 |\partial_z R_\varepsilon|_4 |v_\varepsilon|_4 \\
 &\leq C \varepsilon^{\frac{3}{4}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2 |\partial_z \varphi_1|_4 y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}} + C \varepsilon^{\frac{1}{4}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2 (y_\varepsilon^{\frac{7}{16}} z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}) y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}} \\
 &\quad + C \varepsilon^{\frac{3}{4}} |\partial_z \varphi_1|_4 y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{3}{4}} + C \varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} (y_\varepsilon^{\frac{7}{16}} z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}) y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}} \\
 &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_z \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} + C \varepsilon^{\frac{4}{11}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{16}{11}} y_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 y_\varepsilon \\
 &\quad + C \varepsilon^3 |\partial_z \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{11}{3}} + C \varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon
 \end{aligned} \tag{V.7.37}$$

et de la même façon en changeant $\partial_z^2 R_\varepsilon$ et $\varepsilon^2 \partial_x^2 R_\varepsilon$ et $\partial_z^2 \varphi_1$ par $\varepsilon^2 \partial_x^2 \varphi_1$, il vient

$$\begin{aligned} |J_8| &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{11}{3}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_z \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} + C\varepsilon^{\frac{36}{11}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^{\frac{16}{11}} y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{9}{2}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^2 y_\varepsilon \\ &\quad + C\varepsilon^3 |\partial_z \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{11}{3}} + C\varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{V.7.38})$$

On a vu à l'occasion de la majoration de ces derniers termes (et en particulier pour l'obtention de (V.7.31) et de (V.7.36)), la nécessité absolue d'avoir des estimations sur $\varepsilon^3 |\partial_x R_\varepsilon|_2$ et $\varepsilon |\partial_z R_\varepsilon|_2$.

• **Etape 3 - Contrôle des termes de l'estimation sur $\varepsilon^3 |\partial_x R_\varepsilon|_2^2$**

Les deux premiers termes ne posent aucun problème

$$|K_1| \leq \varepsilon^5 |F''(\varphi_0)|_\infty |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^2 \leq \varepsilon |F''(\varphi_0)|_\infty z_\varepsilon, \quad (\text{V.7.39})$$

et

$$\begin{aligned} |K_2| &\leq \varepsilon^3 |F''(\varphi_0)|_\infty |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^3 |\partial_z F''(\varphi_0)|_\infty |\partial_z R_\varepsilon|_2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^3 |\partial_z^2 F''(\varphi_0)|_\infty |R_\varepsilon|_2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 \\ &\leq C\varepsilon |F''(\varphi_0)|_\infty z_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z F''(\varphi_0)|_\infty y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon |\partial_z^2 F''(\varphi_0)|_\infty y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C\varepsilon |F''(\varphi_0)|_\infty z_\varepsilon + C\varepsilon |\partial_z F''(\varphi_0)|_\infty^2 y_\varepsilon + C\varepsilon^2 |\partial_z^2 F''(\varphi_0)|_\infty^2 y_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{V.7.40})$$

Le troisième terme ne demande pas de travail supplémentaire car un tel terme a déjà été traité (avec une puissance de ε inférieure) lors des estimations (V.7.33) et (V.7.38). Ainsi, on obtient ici

$$\begin{aligned} |K_3| &= \varepsilon^4 \left| \int_{\Omega_0} W_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_1 \partial_x^2 R_\varepsilon \right| + \varepsilon^4 \left| \int_{\Omega_0} W_\varepsilon \cdot \nabla R_\varepsilon \partial_x^2 R_\varepsilon \right| \\ &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{20}{3}} y_\varepsilon^{\frac{11}{3}} + C\varepsilon^{\frac{5}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon + C\varepsilon^{11} |\partial_x \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + C\varepsilon^7 |\partial_z \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{V.7.41})$$

Le quatrième terme s'estime par

$$|K_4| \leq \varepsilon^3 |\partial_z \varphi_0|_\infty |v_\varepsilon|_2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 \leq \varepsilon |\partial_z \varphi_0|_\infty y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C\varepsilon^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty^2 y_\varepsilon. \quad (\text{V.7.42})$$

Avant d'estimer les deux termes suivants, on doit d'abord écrire une majoration de $|R_\varepsilon|_4$ et $|R_\varepsilon|_8$ à l'aide de l'inégalité de Sobolev anisotrope (V.4.3) pour $p = 8$, et en se servant des termes coercifs issus des estimations sur $\varepsilon^3 |\partial_x R_\varepsilon|_2^2$ et sur $\varepsilon |\partial_z R_\varepsilon|_2^2$, il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{9}{16}} |R_\varepsilon|_8 &\leq C\varepsilon^{\frac{9}{16}} |R_\varepsilon|_2^{\frac{5}{8}} (|R_\varepsilon|_2 + |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{3}{16}} (|R_\varepsilon|_2 + |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{3}{16}} \\ &\leq C|R_\varepsilon|_2^{\frac{5}{8}} \left(\varepsilon^{\frac{10}{4}} |R_\varepsilon|_2 + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{16}} \\ &\quad \times \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} |R_\varepsilon|_2 + (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z^3 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{16}} \\ &\leq C y_\varepsilon^{\frac{5}{16}} \left(y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{3}{8}} \\ &\leq C y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C y_\varepsilon^{\frac{13}{32}} z_\varepsilon^{\frac{3}{32}}. \end{aligned} \quad (\text{V.7.43})$$

On peut alors majorer le cinquième terme de $\varepsilon^3 \times (\text{V.7.11})$ de la façon suivante

$$\begin{aligned}
|K_5| &\leq C\varepsilon^6 |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 |\partial_x \varphi_1|_4 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2 + C\varepsilon^6 |\varphi_0|_\infty |R_\varepsilon|_4 |\partial_x \varphi_1|_4 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2 \\
&\quad + C\varepsilon^6 |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 |\partial_x R_\varepsilon|_4 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2 + C\varepsilon^6 |\varphi_0|_\infty |R_\varepsilon|_4 |\partial_x R_\varepsilon|_4 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2 \\
&\quad + C\varepsilon^7 |\varphi_1|_8^2 |\partial_x \varphi_1|_4 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2 + C\varepsilon^7 |\varphi_1|_8^2 |\partial_x R_\varepsilon|_4 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2 \\
&\quad + C\varepsilon^7 |R_\varepsilon|_8^2 |\partial_x \varphi_1|_4 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2 + C\varepsilon^7 |R_\varepsilon|_8^2 |\partial_x R_\varepsilon|_4 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2 \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 |\partial_x \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) + C\varepsilon^{\frac{9}{4}} |\varphi_0|_\infty (\varepsilon^{\frac{1}{4}} |R_\varepsilon|_4) |\partial_x \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) \\
&\quad + C\varepsilon |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) + C\varepsilon^{\frac{3}{4}} |\varphi_0|_\infty (\varepsilon^{\frac{1}{4}} |R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\varphi_1|_8^2 |\partial_x \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) + C\varepsilon^2 |\varphi_1|_8^2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{19}{8}} (\varepsilon^{\frac{9}{16}} |R_\varepsilon|_8)^2 |\partial_x \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) + C\varepsilon^{\frac{7}{8}} (\varepsilon^{\frac{9}{16}} |R_\varepsilon|_8)^2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2),
\end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant (V.7.19) et (V.7.43), la majoration suivante

$$\begin{aligned}
|K_5| &\leq C\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 |\partial_x \varphi_1|_4 z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{9}{4}} |\varphi_0|_\infty |\partial_x \varphi_1|_4 (y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon^{\frac{3}{8}} z_\varepsilon^{\frac{1}{8}}) z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C\varepsilon |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 (y_\varepsilon^{\frac{7}{16}} z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}) z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{3}{4}} |\varphi_0|_\infty (y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon^{\frac{3}{8}} z_\varepsilon^{\frac{1}{8}}) (y_\varepsilon^{\frac{7}{16}} z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}) z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\varphi_1|_8^2 |\partial_x \varphi_1|_4 z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^2 |\varphi_1|_8^2 (y_\varepsilon^{\frac{7}{16}} z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}) z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{19}{8}} |\partial_x \varphi_1|_4 \left(y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon^{\frac{13}{32}} z_\varepsilon^{\frac{3}{32}} \right)^2 z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{7}{8}} \left(y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon^{\frac{13}{32}} z_\varepsilon^{\frac{3}{32}} \right)^2 (y_\varepsilon^{\frac{7}{16}} z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}) z_\varepsilon^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{V.7.44}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C\varepsilon^5 |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + C\varepsilon^{\frac{9}{2}} |\varphi_0|_\infty^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 y_\varepsilon + C\varepsilon^6 |\varphi_0|_\infty^{\frac{8}{3}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{8}{3}} y_\varepsilon \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{16}{7}} |\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}} |\varphi_1|_4^{\frac{16}{7}} y_\varepsilon + C\varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty^4 |\varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{12}{7}} |\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}} y_\varepsilon^{\frac{15}{7}} + C\varepsilon^6 |\varphi_0|_\infty^8 y_\varepsilon^5 \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\varphi_1|_8^4 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + C\varepsilon^{\frac{32}{7}} |\varphi_1|_8^{\frac{32}{7}} y_\varepsilon + C\varepsilon^8 |\varphi_1|_8^8 y_\varepsilon \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{19}{4}} |\partial_x \varphi_1|_4^2 y_\varepsilon^2 + C\varepsilon^{\frac{38}{5}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{16}{5}} y_\varepsilon^{\frac{13}{5}} + C\varepsilon^2 y_\varepsilon^{\frac{23}{7}} + C\varepsilon^{14} y_\varepsilon^{17}.
\end{aligned}$$

Le sixième terme est tout à fait similaire au précédent à l'exception du fait que $\partial_z \varphi_0$ n'est pas nul en général contrairement à $\partial_x \varphi_0$, ainsi dans un premier temps on écrit

$$\begin{aligned}
|K_6| &\leq C\varepsilon^4 |\partial_z \varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4^2 |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + C\varepsilon^4 |\partial_z \varphi_0|_\infty |R_\varepsilon|_4^2 |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2 \\
&\quad + C\varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 |\partial_z \varphi_1|_4 |\partial_x \partial_z^2 R_\varepsilon|_2 + C\varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty |R_\varepsilon|_4 |\partial_z \varphi_1|_4 |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2 \\
&\quad + C\varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 |\partial_z R_\varepsilon|_4 |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + C\varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty |R_\varepsilon|_4 |\partial_z R_\varepsilon|_4 |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2 \\
&\quad + C\varepsilon^5 |\varphi_1|_8^2 |\partial_z \varphi_1|_4 |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + C\varepsilon^5 |\varphi_1|_8^2 |\partial_z R_\varepsilon|_4 |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2 \\
&\quad + C\varepsilon^5 |R_\varepsilon|_8^2 |\partial_z \varphi_1|_4 |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + C\varepsilon^5 |R_\varepsilon|_8^2 |\partial_z R_\varepsilon|_4 |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2 \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_z \varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4^2 (\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2) + C\varepsilon |\partial_z \varphi_0|_\infty (\varepsilon^{\frac{1}{4}} |R_\varepsilon|_4)^2 (\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2) \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 |\partial_z \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2) + C\varepsilon^{\frac{5}{4}} |\varphi_0|_\infty (\varepsilon^{\frac{1}{4}} |R_\varepsilon|_4) |\partial_z \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2) \\
&\quad + C\varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2) + C\varepsilon^{\frac{3}{4}} |\varphi_0|_\infty (\varepsilon^{\frac{1}{4}} |R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2) \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\varphi_1|_8^2 |\partial_z \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2) + C\varepsilon^2 |\varphi_1|_8^2 (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2) \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{11}{8}} (\varepsilon^{\frac{9}{16}} |R_\varepsilon|_8)^2 |\partial_z \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2) + C\varepsilon^{\frac{7}{8}} (\varepsilon^{\frac{9}{16}} |R_\varepsilon|_8)^2 (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\partial_z \partial_x^2 R_\varepsilon|_2)
\end{aligned}$$

puis on utilise (V.7.19) et (V.7.43) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 |K_6| &\leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}|\partial_z\varphi_0|_\infty|\varphi_1|_4^2z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon|\partial_z\varphi_0|_\infty(y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon^{\frac{3}{8}}z_\varepsilon^{\frac{1}{8}})z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + C\varepsilon^{\frac{3}{2}}|\varphi_0|_\infty|\varphi_1|_4|\partial_z\varphi_1|_4z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{5}{4}}|\varphi_0|_\infty|\partial_z\varphi_1|_4(y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon^{\frac{3}{8}}z_\varepsilon^{\frac{1}{8}})z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + C\varepsilon|\varphi_0|_\infty|\varphi_1|_4(y_\varepsilon^{\frac{7}{16}}z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}}z_\varepsilon^{\frac{1}{4}})z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{3}{4}}|\varphi_0|_\infty(y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon^{\frac{3}{8}}z_\varepsilon^{\frac{1}{8}})(y_\varepsilon^{\frac{7}{16}}z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}}z_\varepsilon^{\frac{1}{4}})z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + C\varepsilon^{\frac{5}{2}}|\varphi_1|_8^2|\partial_z\varphi_1|_4z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^2|\varphi_1|_8^2(y_\varepsilon^{\frac{7}{16}}z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}}z_\varepsilon^{\frac{1}{4}})z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + C\varepsilon^{\frac{11}{8}}|\partial_z\varphi_1|_4\left(y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon^{\frac{13}{32}}z_\varepsilon^{\frac{3}{32}}\right)^2z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{7}{8}}\left(y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon^{\frac{13}{32}}z_\varepsilon^{\frac{3}{32}}\right)^2(y_\varepsilon^{\frac{7}{16}}z_\varepsilon^{\frac{1}{16}} + y_\varepsilon^{\frac{1}{4}}z_\varepsilon^{\frac{1}{4}})z_\varepsilon^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{V.7.45}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{50}z_\varepsilon + C\varepsilon^3|\partial_z\varphi_0|_\infty^2|\varphi_1|_4^4 + C\varepsilon^2|\partial_z\varphi_0|_\infty^2y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{5}{3}}|\partial_z\varphi_0|_\infty^{\frac{8}{3}}y_\varepsilon \\
 &\quad + C\varepsilon^3|\varphi_0|_\infty^2|\varphi_1|_4^2|\partial_z\varphi_1|_4^2 + C\varepsilon^{\frac{5}{2}}|\varphi_0|_\infty^2|\partial_z\varphi_1|_4^2y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{10}{3}}|\varphi_0|_\infty^{\frac{8}{3}}|\partial_z\varphi_1|_4^{\frac{8}{3}}y_\varepsilon \\
 &\quad + C\varepsilon^{\frac{16}{7}}|\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}}|\varphi_1|_4^{\frac{16}{7}}y_\varepsilon + C\varepsilon^4|\varphi_0|_\infty^4|\varphi_1|_4^4y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{12}{7}}|\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}}y_\varepsilon^{\frac{15}{7}} + C\varepsilon^6|\varphi_0|_\infty^8y_\varepsilon^5 \\
 &\quad + C\varepsilon^5|\varphi_1|_8^4|\partial_z\varphi_1|_4^2 + C\varepsilon^{\frac{32}{7}}|\varphi_1|_8^{\frac{32}{7}}y_\varepsilon + C\varepsilon^8|\varphi_1|_8^8y_\varepsilon \\
 &\quad + C\varepsilon^{\frac{11}{4}}|\partial_z\varphi_1|_4^2y_\varepsilon^2 + C\varepsilon^{\frac{22}{5}}|\partial_z\varphi_1|_4^{\frac{16}{5}}y_\varepsilon^{\frac{13}{5}} + C\varepsilon^2y_\varepsilon^{\frac{23}{7}} + \varepsilon^{14}y_\varepsilon^{17}.
 \end{aligned}$$

Ceci clôture l'étude des termes issus de l'estimation sur $\varepsilon^3|\partial_x R_\varepsilon|_2^2$.

• **Etape 4 - Contrôle des termes de l'estimation sur $\varepsilon|\partial_z R_\varepsilon|_2^2$**

Les deux premiers termes sont nouveaux par rapport à ce qui précède. En effet, on rappelle que lors de l'estimation des dérivées en x de R_ε , les termes de cisaillement n'interviennent pas. On majore ces deux intégrales en utilisant les termes coercifs issus de l'estimation L^2 sur R_ε de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 |L_1| &\leq \varepsilon|R_\varepsilon|_2|\partial_x\partial_z R_\varepsilon|_2 \leq |R_\varepsilon|_2(\varepsilon|\partial_x\partial_z R_\varepsilon|_2) \\
 &\leq y_\varepsilon^{\frac{1}{2}}z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{50}z_\varepsilon + Cy_\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{V.7.46}$$

et en intégrant par parties il vient

$$\begin{aligned}
 |L_2| &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}|u_0|_\infty(\varepsilon^{\frac{3}{2}}|\partial_x R_\varepsilon|_2)|\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}|u_0|_\infty y_\varepsilon^{\frac{1}{2}}z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{1}{50}z_\varepsilon + C\varepsilon|u_0|_\infty^2y_\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{V.7.47}$$

Tous les termes suivants de cette estimation se traitent de façon tout à fait identique à l'estimation précédente. On se contente donc dans la suite de donner le résultat sans refaire le calcul complet.

La majoration des quatre termes suivants s'obtient en remplaçant formellement $\varepsilon^2\partial_x^2 R_\varepsilon$ par $\partial_z^2 R_\varepsilon$ respectivement dans (V.7.39), (V.7.40), (V.7.41) et (V.7.42). On obtient donc les mêmes résultats, à savoir :

$$|L_3| \leq \varepsilon|F''(\varphi_0)|_\infty z_\varepsilon, \tag{V.7.48}$$

$$|L_4| \leq \frac{1}{50}z_\varepsilon + \varepsilon|F''(\varphi_0)|_\infty z_\varepsilon + C\varepsilon|\partial_z F''(\varphi_0)|_\infty^2y_\varepsilon + C\varepsilon^2|\partial_z^2 F''(\varphi_0)|_\infty^2y_\varepsilon, \tag{V.7.49}$$

$$|L_5| \leq \frac{1}{50}z_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{20}{3}}y_\varepsilon^{\frac{11}{3}} + C\varepsilon^{\frac{5}{4}}y_\varepsilon^{\frac{1}{2}}z_\varepsilon + C\varepsilon^{11}|\partial_x\varphi_1|_4^4y_\varepsilon + C\varepsilon^7|\partial_z\varphi_1|_4^4y_\varepsilon, \tag{V.7.50}$$

et enfin

$$|L_6| \leq \frac{1}{50}z_\varepsilon + C\varepsilon^2|\partial_z\varphi_0|_\infty^2y_\varepsilon. \tag{V.7.51}$$

L'estimation pour le septième terme s'effectue encore une fois de façon identique à (V.7.44) en substituant $\varepsilon^3 \partial_x^3 R_\varepsilon$ par $\varepsilon \partial_x \partial_z^2 R_\varepsilon$, ce qui donne le même résultat final

$$\begin{aligned} |L_7| &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C\varepsilon^5 |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + C\varepsilon^{\frac{9}{2}} |\varphi_0|_\infty^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 y_\varepsilon + C\varepsilon^6 |\varphi_0|_\infty^{\frac{8}{3}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{8}{3}} y_\varepsilon \\ &\quad + C\varepsilon^{\frac{16}{7}} |\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}} |\varphi_1|_4^{\frac{16}{7}} y_\varepsilon + C\varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty^4 |\varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{12}{7}} |\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}} y_\varepsilon^{\frac{15}{7}} + C\varepsilon^6 |\varphi_0|_\infty^8 y_\varepsilon^5 \\ &\quad + C\varepsilon^7 |\varphi_1|_8^4 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + C\varepsilon^{\frac{32}{7}} |\varphi_1|_8^{\frac{32}{7}} y_\varepsilon + C\varepsilon^8 |\varphi_1|_8^8 y_\varepsilon \\ &\quad + C\varepsilon^{\frac{19}{4}} |\partial_x \varphi_1|_4^2 y_\varepsilon^2 + C\varepsilon^{\frac{38}{5}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{16}{5}} y_\varepsilon^{\frac{13}{5}} + C\varepsilon^2 y_\varepsilon^{\frac{23}{7}} + C\varepsilon^{14} y_\varepsilon^{17}. \end{aligned} \quad (\text{V.7.52})$$

Et de même, le dernier terme fournit comme dans (V.7.45)

$$\begin{aligned} |L_8| &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C\varepsilon^3 |\partial_z \varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^4 + C\varepsilon^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty^2 y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{8}{3}} |\partial_z \varphi_0|_\infty^{\frac{8}{3}} y_\varepsilon \\ &\quad + C\varepsilon^3 |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 |\partial_z \varphi_1|_4^2 + C\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\varphi_0|_\infty^2 |\partial_z \varphi_1|_4^2 y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{10}{3}} |\varphi_0|_\infty^{\frac{8}{3}} |\partial_z \varphi_1|_4^{\frac{8}{3}} y_\varepsilon \\ &\quad + C\varepsilon^{\frac{16}{7}} |\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}} |\varphi_1|_4^{\frac{16}{7}} y_\varepsilon + C\varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty^4 |\varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{12}{7}} |\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}} y_\varepsilon^{\frac{15}{7}} + C\varepsilon^6 |\varphi_0|_\infty^8 y_\varepsilon^5 \\ &\quad + C\varepsilon^5 |\varphi_1|_8^4 |\partial_z \varphi_1|_4^2 + C\varepsilon^{\frac{32}{7}} |\varphi_1|_8^{\frac{32}{7}} y_\varepsilon + C\varepsilon^8 |\varphi_1|_8^8 y_\varepsilon \\ &\quad + C\varepsilon^{\frac{11}{4}} |\partial_z \varphi_1|_4^2 y_\varepsilon^2 + C\varepsilon^{\frac{22}{5}} |\partial_z \varphi_1|_4^{\frac{16}{5}} y_\varepsilon^{\frac{13}{5}} + C\varepsilon^2 y_\varepsilon^{\frac{23}{7}} + \varepsilon^{14} y_\varepsilon^{17}. \end{aligned} \quad (\text{V.7.53})$$

• Etape 5 - Obtention de l'estimation finale

On rassemble maintenant les résultats obtenus jusqu'à présent.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_\varepsilon + \frac{1}{2} z_\varepsilon &\leq \\ I_1, \dots, I_6 \left\{ \begin{array}{l} C\varepsilon y_\varepsilon z_\varepsilon + C\varepsilon^2 |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^4 + C\varepsilon^4 |\varphi_1|_6^6 \\ + C|F''(\varphi_0)|_\infty^2 y_\varepsilon + |\partial_z \varphi_0|_\infty y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{8}{7}} |\varphi_1|_2^{\frac{16}{7}} y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{4}{3}} |\varphi_1|_2^{\frac{8}{3}} y_\varepsilon \\ + C\varepsilon |\varphi_0|_\infty^2 y_\varepsilon^2 + C\varepsilon^2 (1 + |\varphi_0|_\infty^4) y_6^3 \end{array} \right. \\ J_1, \dots, J_8 \left\{ \begin{array}{l} + C\varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon + C|\partial_z^2 \varphi_0|_\infty^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon + C|\partial_z \varphi_0|_\infty^2 y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{4}{11}} (|\partial_z^2 \varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{16}{11}} y_\varepsilon \\ + C\varepsilon^{\frac{1}{2}} (|\partial_z^2 \varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^2 y_\varepsilon + C\varepsilon^3 (\varepsilon^4 |\partial_x \varphi_1|_4^4 + |\partial_z \varphi_1|_4^4) y_\varepsilon \\ + C|\partial_z^2 \varphi_0|_\infty (\varepsilon |\partial_x \varphi_1|_2 + |\partial_z \varphi_1|_2) y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C|\partial_z \varphi_0|_\infty (\varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2) y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{11}{3}} \\ + C(\varepsilon^{\frac{7}{3}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^{\frac{15}{3}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} + \varepsilon |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_z \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^{\frac{11}{3}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_z \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}}) y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} \end{array} \right. \\ K_1, \dots, K_6 \left\{ \begin{array}{l} + C\varepsilon |F''(\varphi_0)|_\infty z_\varepsilon + C\varepsilon^3 |\partial_z \varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^4 \\ + C\varepsilon^3 |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + |\partial_z \varphi_1|_4^2) + C\varepsilon^5 |\varphi_1|_8^4 (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + |\partial_z \varphi_1|_4^2) \\ + C(\varepsilon |\partial_z F''(\varphi_0)|_\infty^2 + \varepsilon^2 |\partial_z^2 F''(\varphi_0)|_\infty^2 + \varepsilon^2 |\partial_z \varphi_0|_\infty^2 + \varepsilon^{\frac{8}{3}} |\partial_z \varphi_0|_\infty^{\frac{8}{3}}) y_\varepsilon \\ + C\varepsilon^{\frac{5}{2}} |\varphi_0|_\infty^2 (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + |\partial_z \varphi_1|_4^2) y_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{16}{7}} |\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}} |\varphi_1|_4^{\frac{16}{7}} y_\varepsilon + C\varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty^4 |\varphi_1|_4^4 y_\varepsilon \\ + C\varepsilon^{\frac{10}{3}} |\varphi_0|_\infty^{\frac{8}{3}} (\varepsilon |\partial_x \varphi_1|_4 + |\partial_z \varphi_1|_4) y_\varepsilon^{\frac{8}{3}} + C\varepsilon^{\frac{32}{7}} |\varphi_1|_8^{\frac{32}{7}} y_\varepsilon + C\varepsilon^8 |\varphi_1|_8^8 y_\varepsilon \\ + C\varepsilon^{\frac{11}{4}} (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + |\partial_z \varphi_1|_4^2) y_\varepsilon^2 + C\varepsilon^{\frac{22}{5}} (\varepsilon |\partial_x \varphi_1|_4 + |\partial_z \varphi_1|_4) y_\varepsilon^{\frac{13}{5}} \\ + C\varepsilon^{\frac{12}{7}} |\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}} y_\varepsilon^{\frac{15}{7}} + C\varepsilon^6 |\varphi_0|_\infty^8 y_\varepsilon^5 + C\varepsilon^2 y_\varepsilon^{\frac{23}{7}} + C\varepsilon^{14} y_\varepsilon^{17} \end{array} \right. \\ \text{et } L_3, \dots, L_8 \left\{ \begin{array}{l} + C y_\varepsilon + C\varepsilon |u_0|_\infty^2 y_\varepsilon. \end{array} \right. \\ L_1 \text{ et } L_2 \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Mettons cette estimation sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_\varepsilon + \frac{1}{2} z_\varepsilon &\leq C\varepsilon |F''(\varphi_0)|_\infty z_\varepsilon + C(\varepsilon y_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) z_\varepsilon + g_1(t) + g_2(t) y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} + g_3(t) y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + g_4(t) (y_\varepsilon^2 + y_\varepsilon^{\frac{15}{7}} + y_\varepsilon^{\frac{13}{5}} + y_\varepsilon^3 + y_\varepsilon^{\frac{23}{7}} + y_\varepsilon^{\frac{11}{3}} + y_\varepsilon^5 + y_\varepsilon^{17}) + g_5(t) y_\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{V.7.54})$$

où

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= C\varepsilon^2|\varphi_0|_\infty^2|\varphi_1|_4^4 + C\varepsilon^3|\partial_z\varphi_0|_\infty^2|\varphi_1|_4^4 + C\varepsilon^4|\varphi_1|_6^6 \\
&\quad + C\varepsilon^3|\varphi_0|_\infty^2|\varphi_1|_4^2(\varepsilon^2|\partial_x\varphi_1|_4^2 + |\partial_z\varphi_1|_4^2) + C\varepsilon^5|\varphi_1|_8^4(\varepsilon^2|\partial_x\varphi_1|_4^2 + |\partial_z\varphi_1|_4^2), \\
g_2(t) &= C\varepsilon^{\frac{7}{3}}|\partial_z^2\varphi_1|_2^{\frac{4}{3}}|\partial_x\varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} + C\varepsilon^{\frac{15}{3}}|\partial_x^2\varphi_1|_2^{\frac{4}{3}}|\partial_x\varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} + C\varepsilon|\partial_z^2\varphi_1|_2^{\frac{4}{3}}|\partial_z\varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} + C\varepsilon^{\frac{11}{3}}|\partial_x^2\varphi_1|_2^{\frac{4}{3}}|\partial_z\varphi_1|_4^{\frac{4}{3}}, \\
g_3(t) &= C|\partial_z^2\varphi_0|_\infty(\varepsilon|\partial_x\varphi_1|_2 + |\partial_z\varphi_1|_2) + C|\partial_z\varphi_0|_\infty(\varepsilon^2|\partial_x^2\varphi_1|_2 + |\partial_z^2\varphi_1|_2), \\
g_4(t) &= C\varepsilon|\varphi_0|_\infty^2 + C\varepsilon^2|\varphi_0|_\infty^4 + C\varepsilon^{\frac{4}{3}} + C\varepsilon^{\frac{12}{7}}|\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}} + C\varepsilon^6|\varphi_0|_\infty^8 \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{11}{4}}(\varepsilon^2|\partial_x\varphi_1|_4^2 + |\partial_z\varphi_1|_4^2) + C\varepsilon^{\frac{22}{5}}(\varepsilon|\partial_x\varphi_1|_4 + |\partial_z\varphi_1|_4)^{\frac{16}{5}}, \\
g_5(t) &= C|F''(\varphi_0)|_\infty^2 + |\partial_z\varphi_0|_\infty + C\varepsilon^{\frac{8}{7}}|\varphi_1|_2^{\frac{16}{7}} + C\varepsilon^{\frac{4}{3}}|\varphi_1|_2^{\frac{8}{3}} \\
&\quad + C|\partial_z^2\varphi_0|_\infty^{\frac{4}{3}} + C|\partial_z\varphi_0|_\infty^2 + C\varepsilon^{\frac{4}{11}}(|\partial_z^2\varphi_1|_2 + \varepsilon^2|\partial_x^2\varphi_1|_2)^{\frac{16}{11}} \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{1}{2}}(|\partial_z^2\varphi_1|_2 + \varepsilon^2|\partial_x^2\varphi_1|_2)^2 + C\varepsilon^3(\varepsilon^4|\partial_x\varphi_1|_4^4 + |\partial_z\varphi_1|_4^4) \\
&\quad + C(\varepsilon|\partial_z F''(\varphi_0)|_\infty^2 + \varepsilon^2|\partial_z^2 F''(\varphi_0)|_\infty^2 + \varepsilon^{\frac{8}{3}}|\partial_z\varphi_0|_\infty^{\frac{8}{3}}) \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{5}{2}}|\varphi_0|_\infty^2(\varepsilon^2|\partial_x\varphi_1|_4^2 + |\partial_z\varphi_1|_4^2) + C\varepsilon^{\frac{16}{7}}|\varphi_0|_\infty^{\frac{16}{7}}|\varphi_1|_4^{\frac{16}{7}} + C\varepsilon^4|\varphi_0|_\infty^4|\varphi_1|_4^4 \\
&\quad + C\varepsilon^{\frac{10}{3}}|\varphi_0|_\infty^{\frac{8}{3}}(\varepsilon|\partial_x\varphi_1|_4 + |\partial_z\varphi_1|_4)^{\frac{8}{3}} + C\varepsilon^{\frac{32}{7}}|\varphi_1|_2^{\frac{32}{7}} + C\varepsilon^8|\varphi_1|_8^8 \\
&\quad + C + C\varepsilon|u_0|_\infty^2.
\end{aligned}$$

8 Preuves dans le cas général et dans le cas homogène non-métastable

Il s'agit maintenant d'obtenir des bornes sur les g_i dans $L^1(0, T)$ en utilisant les estimations sur φ_0 , φ_1 et u_0 obtenues plus haut.

- **Etape 1 - Estimations sur g_1**

Grâce à l'inégalité de Sobolev (V.4.3) et aux estimations (V.2.6), (V.5.3) et (V.5.6), on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_0^T |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^4 &\leq C_0 \int_0^T |\varphi_1|_2^3 (\varepsilon^2 |\varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2\varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (|\varphi_1|_2 + |\partial_z\varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_0 |\varphi_1|_2^4 e^{C_0 T},
\end{aligned}$$

puis avec (V.2.5),

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_0^T |\partial_z\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^4 &\leq \int_0^T |\partial_z\varphi_0|_2^{\frac{3}{2}} |\partial_z^3\varphi_0|_2^{\frac{1}{2}} |\varphi_1|_2^3 (\varepsilon^2 |\varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2\varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (|\varphi_1|_2 + |\partial_z\varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_0 (1+T) |\varphi_1|_2^4 e^{C_0 T}.
\end{aligned}$$

De la même façon avec l'inégalité de Sobolev (V.4.3), on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \int_0^T |\varphi_1|_6^6 &\leq C \int_0^T |\varphi_1|_2^4 (\varepsilon^2 |\varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2\varphi_1|_2) (|\varphi_1|_2 + |\partial_z^2\varphi_1|_2) \\
&\leq |\varphi_1|_2^4 e^{2C_0 T} \int_0^T (\varepsilon^2 |\varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2\varphi_1|_2) (|\varphi_1|_2 + |\partial_z^2\varphi_1|_2) \\
&\leq |\varphi_1|_2^6 e^{3C_0 T}.
\end{aligned}$$

En utilisant cette fois les deux inégalités (V.4.1) et (V.4.3), il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \int_0^T |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 &\leq C_0 \int_0^T |\varphi_1|_2^{\frac{3}{2}} (\varepsilon^2 |\varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{4}} (|\varphi_1|_2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\quad \times |\varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(|\varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} + |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_0 |\varphi_1|_2^4 e^{C_0 T}, \end{aligned}$$

et de la même façon

$$\varepsilon \int_0^T |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 |\partial_z \varphi_1|_4^2 \leq C_0 |\varphi_1|_2^4 e^{C_0 T}.$$

Enfin, toujours en utilisant judicieusement les deux inégalités de Sobolev anisotrope on montre que

$$\begin{aligned} \varepsilon^5 \int_0^T |\varphi_1|_8^4 |\partial_x \varphi_1|_4^2 &\leq \int_0^T |\varphi_1|_2^{\frac{5}{2}} (\varepsilon^2 |\varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{3}{4}} (|\varphi_1|_2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2)^{\frac{3}{4}} \\ &\quad \times (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2)^{\frac{3}{2}} (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{4}} (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \partial_z^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq |\varphi_1|_2^4 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2)^2 e^{3C_0 T}, \end{aligned}$$

puis que

$$\varepsilon^3 \int_0^T |\varphi_1|_8^4 |\partial_z \varphi_1|_4^2 \leq |\varphi_1|_2^4 (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1|_2 + |\varphi_1|_2)^2 e^{3C_0 T}.$$

• Etape 2 - Estimations sur g_2

Tous les termes de g_2 se traitent de la même manière, en écrivant

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \int_0^T |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} &\leq \int_0^T |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2)^{\frac{2}{3}} (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{3}} (\varepsilon |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq |\varphi_1|_2^2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{4}{3}C_0 T}, \end{aligned}$$

ce qui donne au final

$$\int_0^T g_2 \leq C_0 \varepsilon^{\frac{1}{3}} |\varphi_1|_2^2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1|_2 + |\varphi_1|_2)^{\frac{2}{3}} e^{C_0 T}.$$

• Etape 3 - Estimations sur g_3

En utilisant les estimations (V.2.4) et (V.2.5) sur φ_0 et l'injection de H^1 dans L^∞ (en dimension 1), il vient

$$\begin{aligned} \int_0^T g_3(t) &\leq C \int_0^T |\partial_z^3 \varphi_0|_2 |\varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} ((\varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} + |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{1}{2}}) + C \int_0^T |\partial_z^3 \varphi_0|_2 (\varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2) \\ &\leq C_0 |\varphi_1|_2 \sqrt{1+T} e^{C_0 T} \\ &\leq C_0 |\varphi_1|_2 e^{C_0 T}. \end{aligned}$$

• Etape 4 - Estimations sur g_4

Les cinq premiers termes se majorent de manière immédiate dans $L^1(0, T)$ par $C_0 \varepsilon T$.

Par l'inégalité (V.4.1) et le lemme V.5.1, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{5}{2}} \int_0^T |\partial_x \varphi_1|_4^2 &\leq |\varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C |\varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T}, \end{aligned}$$

et de même

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^T |\partial_z \varphi_1|_4^2 \leq C |\varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T}.$$

Enfin de façon similaire, il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{24}{5}} \int_0^T |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{16}{5}} &\leq C \int_0^T (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2)^{\frac{8}{5}} (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{4}{5}} (\varepsilon |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2)^{\frac{4}{5}} \\ &\leq C (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1^0|_2)^{\frac{8}{5}} |\varphi_1^0|_2^{\frac{8}{5}} e^{C_0 T}, \end{aligned}$$

et

$$\varepsilon^{\frac{8}{5}} \int_0^T |\partial_z \varphi_1|_4^{\frac{16}{5}} \leq C (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1^0|_2 + |\varphi_1^0|_2)^{\frac{8}{5}} |\varphi_1^0|_2^{\frac{8}{5}} e^{C_0 T}.$$

• Etape 5 - estimations sur g_5

La majorité des termes s'estime aisément de la même façon. Les seuls qui n'ont pas déjà été traités sont les suivants. Tout d'abord avec (V.4.1) il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \int_0^T |\partial_z \varphi_1|_4^4 &\leq C \int_0^T (\varepsilon |\partial_z \varphi_1|_2^2) (\varepsilon |\partial_z \varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2) (|\varphi_1|_2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2) \\ &\leq C (\varepsilon |\partial_z \varphi_1^0|_2^2 + C_0 |\varphi_1^0|_2^2) |\varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T}, \end{aligned}$$

et de la même façon

$$\varepsilon^6 \int_0^T |\partial_x \varphi_1|_4^4 \leq C (\varepsilon^3 |\partial_x \varphi_1^0|_2^2) |\varphi_1^0|_2^2 e^{C_0 T}.$$

Enfin, grâce à l'injection de Sobolev anisotrope (V.4.3) avec $p = 8$, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{9}{2}} \int_0^T |\varphi_1|_8^8 &\leq C \varepsilon^{\frac{9}{2}} \int_0^T |\varphi_1|_2^5 (|\varphi_1|_2 + |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{3}{2}} (|\varphi_1|_2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2)^{\frac{3}{2}} \\ &\leq C \int_0^T |\varphi_1|_2^5 \left(|\varphi_1|_2 + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(|\varphi_1|_2 + (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z^3 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\leq C_0 |\varphi_1^0|_2^5 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1^0|_2)^{\frac{3}{2}} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1^0|_2 + |\varphi_1^0|_2)^{\frac{3}{2}} e^{C_0 T}. \end{aligned}$$

• Etape 6 - Bilan - fin des démonstrations

On peut maintenant prouver les deux premiers théorèmes énoncés dans la section 6.

Le terme en $F''(\varphi_0)$ provient de l'opérateur de Cahn-Hilliard et caractérise le fait que l'on n'a pas nécessairement choisi une solution φ_0 de Cahn-Hilliard 1D qui soit un état constant et métastable du potentiel F . Enfin, les termes contenant des dérivées en z de φ_0 montrent que la non-uniformité de la solution 1D considérée intervient comme un terme source dans l'équation sur les restes.

Preuve (du théorème V.6.1):

L'hypothèse (V.6.1) sur $\tilde{\varphi}_1^0$, peut se récrire dans les nouvelles variables (définies sur Ω_0), de la façon suivante

$$|\varphi_1^0|_2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1^0|_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1^0|_2 \leq K_0.$$

Ainsi les estimations précédentes sur g_1, \dots, g_5 montrent que

$$\begin{aligned} \int_0^T g_1 &\leq \varepsilon K'_0 e^{C_0 T}, \\ \int_0^T g_2 &\leq \varepsilon^{\frac{1}{3}} K'_0 e^{C_0 T}, \\ \int_0^T g_3 &\leq K'_0 e^{C_0 T}, \\ \int_0^T g_4 &\leq \varepsilon K'_0 e^{C_0 T}, \\ \int_0^T g_5 &\leq C_0 T + K'_0 e^{C_0 T}, \end{aligned}$$

où K'_0 est une constante ne dépendant que de φ_0 et de K_0 .

A ce stade on peut constater que deux types de termes empêchent donc d'obtenir un résultat significatif sur des temps longs.

- D'une part le terme en g_3 , issu du fait que la solution φ_0 considérée n'est pas constante en z , apparaît comme un terme source dans l'équation sur le reste W_ε dû aux forces capillaires. En d'autres termes les forces capillaires créées par l'inhomogénéité de la solution de référence φ_0 sont la source principale de croissance du reste W_ε . Le théorème suivant va confirmer ce fait.
- En plus de la non-homogénéité de φ_0 , le fait que $F''(\varphi_0)$ ne soit pas nécessairement positif apparaît aussi comme un terme source dans les équations (voir le terme g_5).

Soit donc

$$M_\varepsilon(T) = 2(y_\varepsilon(0) + C_0 e^{C_0 T}) e^{C_0 T + C_0 e^{C_0 T}}.$$

Comme $R_\varepsilon(0) = 0$ et $W_\varepsilon(0) = W_\varepsilon^0$, l'hypothèse (V.6.2) montre que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad y_\varepsilon(0) \leq K_0^2.$$

Il existe donc $M_0(T)$ ne dépendant que de φ_0 , u_0 , de K_0 et de T telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall T > 0, \quad M_\varepsilon(T) \leq M_0(T).$$

Fixons $T > 0$, comme $M_\varepsilon(T)$ est bornée uniformément par rapport à ε , il est clair qu'il existe $\varepsilon_0(T)$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ on ait

$$C(M_\varepsilon(T) + (M_\varepsilon(T))^{16}) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \text{et} \quad (\varepsilon M_\varepsilon(T) + \varepsilon^{\frac{1}{4}} M_\varepsilon(T)^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{4}.$$

Supposons de plus que ε_0 est suffisamment petit pour que

$$C\varepsilon_0 |F''(\varphi_0)|_\infty \leq \frac{1}{4}.$$

Soit alors $[0, T^*]$ l'intervalle de temps maximal dans $[0, T]$ sur lequel on a

$$y_\varepsilon(t) \leq M_\varepsilon(T).$$

Sur cet intervalle, en utilisant l'inégalité de Young et les propriétés précédentes de $M_\varepsilon(T)$ qui permettent d'absorber les termes en z_ε qui subsistaient au membre de droite de l'inégalité (V.7.54), il reste

$$\frac{d}{dt}y_\varepsilon \leq g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}g_4(t) + g_2(t) + g_3(t) + g_5(t) \right) y_\varepsilon(t).$$

Ainsi on a pour tout $t \in [0, T^*] \subset [0, T]$,

$$y_\varepsilon(t) \leq y_\varepsilon(0) + \int_0^T (g_1 + g_2 + g_3) + \int_0^t \left(g_2 + g_3 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}g_4 + g_5 \right) y_\varepsilon,$$

et donc par le lemme de Gronwall, en utilisant les bornes dans $L^1(0, T)$ sur les fonctions g_i ci-dessus, il vient

$$y_\varepsilon(t) \leq (y_\varepsilon(0) + C_0 e^{C_0 T}) e^{C_0 e^{C_0 T}} \leq \frac{1}{2} M_\varepsilon(T),$$

ce qui implique par un argument de continuité que $T^* = T$. Ainsi, on a finalement

$$\sup_{t \in [0, T]} y_\varepsilon(t) \leq M_0(T),$$

pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0(T)$.

Ceci fournit le résultat annoncé en utilisant (V.7.14), c'est-à-dire l'expression de y_ε en fonction des inconnues initiales. ■

Preuve (du théorème V.6.2):

On suppose donc maintenant que la solution 1D de Cahn-Hilliard qui nous intéresse est $\varphi_0 = \omega$ une constante indépendante de t, x et de z , autrement dit physiquement, on s'intéresse à un état initial du système qui soit homogène. On suppose de plus que le mélange homogène considéré n'est pas un état métastable du potentiel c'est-à-dire que $F''(\omega) < 0$.

Dans ce cas, un certain nombre de termes deviennent nuls dans les estimations qui ont précédé. On a vu en effet que le fait que φ_0 dépende de z crée un terme source dans les équations.

Plus précisément, le terme $g_3(t)$ dans l'estimation (V.7.54) est identiquement nul, ainsi qu'un certain nombre de termes dans g_5 . Il reste en utilisant les hypothèses sur φ_1^0 données par (V.6.3)

$$\begin{aligned} \int_0^T g_1 &\leq \varepsilon C_0 e^{C_0 T}, \\ \int_0^T g_2 &\leq \varepsilon^{\frac{1}{3}} C_0 e^{C_0 T}, \\ g_3 &= 0, \\ \int_0^T g_4 &\leq \varepsilon C_0 e^{C_0 T}, \\ \int_0^T g_5 &\leq C_0 T + C_0 e^{C_0 T}. \end{aligned}$$

Le terme issu de la non-convexité de F au voisinage de ω , est encore présent dans l'estimation sur g_5 et nous interdit donc tout résultat raisonnable sur des temps grands (c'est l'instabilité du mélange pour Cahn-Hilliard 1D qui dirige la croissance des restes). Cependant la nullité du terme g_3 , c'est-à-dire de certains termes sources dans les équations sur les restes permet d'améliorer le résultat du théorème V.6.1.

On pose cette fois

$$M_\varepsilon(T) = 2(y_\varepsilon(0) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} C_0 e^{C_0 T}) e^{C_2 T + C_0 e^{C_0 T}}.$$

Comme $R_\varepsilon(0) = 0$ et que $W_\varepsilon(0)$ vérifie (V.6.4), on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$y_\varepsilon(0) \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} K_0^2,$$

ce qui implique qu'il existe $M_0(T)$ ne dépendant que de K_0 , φ_0 , u_0 et T telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall T > 0, M_\varepsilon(T) \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} M_0(T).$$

Ainsi si $T > 0$ est fixé, il existe $\varepsilon_0(T)$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ on ait

$$C(M_\varepsilon(T) + (M_\varepsilon(T))^{16}) \leq 1, \text{ et } (\varepsilon M_\varepsilon(T) + \varepsilon^{\frac{1}{4}} M_\varepsilon(T)^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{4}$$

et supposons de plus que ε_0 est suffisamment petit pour que

$$C\varepsilon_0 |F''(\varphi_0)|_\infty \leq \frac{1}{4}.$$

Soit $[0, T^*]$ l'intervalle maximal dans $[0, T]$ sur lequel on a

$$y_\varepsilon(t) \leq M_\varepsilon(T).$$

En utilisant une inégalité de Young

$$\varepsilon^{\frac{1}{3}} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} \leq C(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon),$$

et après absorption des termes en z_ε dans l'estimation (V.7.54), on obtient

$$\frac{d}{dt} y_\varepsilon \leq g_1(t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} g_2(t) \right) + \left(g_4(t) + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} g_2(t) + g_5(t) \right) y_\varepsilon(t).$$

Ainsi on a, après intégration, pour tout $t \in [0, T^*] \subset [0, T]$,

$$y_\varepsilon(t) \leq y_\varepsilon(0) + \int_0^T \left(g_1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} g_2 \right) \right) + \int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} g_2 + g_4 + g_5 \right) y_\varepsilon,$$

et donc en utilisant le lemme de Gronwall, il vient

$$y_\varepsilon(t) \leq (y_\varepsilon(0) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} C_0 e^{C_0 T}) e^{C_0 e^{C_0 T}} \leq \frac{1}{2} M_\varepsilon(T).$$

Finalement $T^* = T$, et

$$\sup_{t \in [0, T]} y_\varepsilon(t) \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} M_0(T),$$

pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0(T)$.

Ceci constitue bien le résultat annoncé en revenant aux variables initiales. ■

9 Preuve dans le cas homogène métastable

Cette section est consacrée à la preuve du théorème V.6.3.

On suppose à nouveau que $\varphi_0 = \omega$ est une solution constante de l'équation de Cahn-Hilliard mono-dimensionnelle, mais on fait l'hypothèse supplémentaire que $F''(\omega) > 0$. Comme on l'a vu dans les chapitres précédents ce sont ces états qui sont les états homogènes stables du système. Ce sont en particulier des minimiseurs locaux de l'énergie de Cahn-Hilliard sous la contrainte de masse constante.

Rappelons que dans ce cas les estimations sur φ_1 sont différentes (lemme V.5.1), elles sont en particulier uniformes en temps. En outre, les termes I_1, I_2, K_1, K_2, L_3 et L_4 deviennent coercifs, on n'a donc plus à les estimer et de plus, la fonctionnelle z_ε se renforce en

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(t) &= \alpha^2 \varepsilon^4 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2^2 + 2\alpha^2 \varepsilon^2 |\partial_x \partial_z R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2^2 \\ &\quad + \alpha^2 \varepsilon^7 |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^5 |\partial_x^2 \partial_z R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon^3 |\partial_x \partial_z^2 R_\varepsilon|_2^2 + \alpha^2 \varepsilon |\partial_z^3 R_\varepsilon|_2^2 \\ &\quad + \varepsilon^2 \left| \partial_x \left(\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right|_2^2 + \left| \partial_z \left(\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_x v_\varepsilon|_2^2 + |\partial_z v_\varepsilon|_2^2 \\ &\quad + \varepsilon^2 F''(\omega) |\partial_x R_\varepsilon|_2^2 + F''(\omega) |\partial_z R_\varepsilon|_2^2. \end{aligned}$$

En effet, seuls les termes I_1 et I_2 apportent des éléments nouveaux.

Il faut maintenant reprendre l'estimation de certains des vingt-huit termes I_1, \dots, L_8 , en tenant compte à présent des termes $\varepsilon^2 |\partial_x R_\varepsilon|_2^2$ et $|\partial_z R_\varepsilon|_2^2$ dans la fonctionnelle z_ε . Ceci implique en particulier, grâce à l'inégalité de Poincaré (V.7.16), que l'on a

$$\varepsilon^2 |R_\varepsilon|_2^2 \leq C(\varepsilon^2 |\partial_x R_\varepsilon|_2^2 + \varepsilon^2 |\partial_z R_\varepsilon|_2^2) \leq Cz_\varepsilon, \quad (\text{V.9.1})$$

ce qui permet d'améliorer les estimations sur les normes L^4, L^6 et L^8 de R_ε en fonction de y_ε et z_ε , grâce aux inégalités de Sobolev (V.4.1) et (V.4.3), de la façon suivante

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{2}} |R_\varepsilon|_4 &\leq C |R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} (\varepsilon |R_\varepsilon|_2 + \varepsilon |\partial_x R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} (\varepsilon |R_\varepsilon|_2 + \varepsilon |\partial_z R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq Cy_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (\text{V.9.2})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{2}} |R_\varepsilon|_6 &\leq C |R_\varepsilon|_2^{\frac{2}{3}} (\varepsilon^2 |R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{6}} (\varepsilon |R_\varepsilon|_2 + \varepsilon |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{6}} \\ &\leq Cy_\varepsilon^{\frac{1}{3}} z_\varepsilon^{\frac{1}{6}}, \end{aligned} \quad (\text{V.9.3})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{5}{8}} |R_\varepsilon|_8 &\leq C |R_\varepsilon|_2^{\frac{9}{16}} (\varepsilon |R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{16}} \left(\varepsilon^2 (\varepsilon |R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} |R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{16}} \\ &\quad \times \left((\varepsilon |R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} |R_\varepsilon|_2^{\frac{1}{2}} + (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z^3 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{16}} \\ &\leq Cy_\varepsilon^{\frac{9}{32}} z_\varepsilon^{\frac{1}{32}} (y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}})^{\frac{3}{16}} (y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}})^{\frac{3}{16}} \\ &\leq Cy_\varepsilon^{\frac{3}{8}} z_\varepsilon^{\frac{1}{8}}. \end{aligned} \quad (\text{V.9.4})$$

On peut aussi améliorer les estimations sur la norme L^4 des dérivées de R_ε de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{5}{4}} |\partial_x R_\varepsilon|_4 &\leq C(\varepsilon |\partial_x R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} (\varepsilon |\partial_x R_\varepsilon|_2 + \varepsilon |\partial_x \partial_z R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq Cz_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{V.9.5})$$

ou bien

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4 &\leq C(\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} (\varepsilon |\partial_x R_\varepsilon|_2 + \varepsilon |\partial_x \partial_z R_\varepsilon|_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq Cy_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (\text{V.9.6})$$

et de la même façon on obtient

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}} |\partial_z R_\varepsilon|_4 \leq Cz_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{V.9.7})$$

et

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z R_\varepsilon|_4 \leq Cy_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{V.9.8})$$

Munis de ces nouvelles estimations, regardons ce que deviennent les différents termes de l'estimation d'énergie sur les restes.

Tout d'abord les termes I_1 et I_2 , on l'a déjà vu, sont devenus des termes coercifs et ne nécessitent donc pas d'estimation. Le terme I_3 , après une intégration par parties, peut s'estimer grâce à (V.9.2) et (V.9.3) de la façon suivante

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \varepsilon^3 |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 |\partial_x \varphi_1|_4 |\partial_x R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^3 |\varphi_0|_\infty |R_\varepsilon|_2^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^4 |\varphi_1|_6^3 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 + \varepsilon^4 |R_\varepsilon|_6^3 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2 \\ &\leq \varepsilon^2 |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 |\partial_x \varphi_1|_4 (\varepsilon |\partial_x R_\varepsilon|_2) + |\varphi_0|_\infty (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |R_\varepsilon|_4)^2 (\varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2) \\ &\quad + \varepsilon^2 |\varphi_1|_6^3 (\varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |R_\varepsilon|_6)^3 (\varepsilon^2 |\partial_x^2 R_\varepsilon|_2) \\ &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + \varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + |\varphi_0|_\infty y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon + \varepsilon^4 |\varphi_1|_6^6 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} y_\varepsilon z_\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{V.9.9})$$

et on procède à l'identique pour I_4 , il vient alors

$$|I_4| \leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + \varepsilon^2 |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 |\partial_z \varphi_1|_4^2 + |\varphi_0|_\infty y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon + \varepsilon^4 |\varphi_1|_6^6 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} y_\varepsilon z_\varepsilon. \quad (\text{V.9.10})$$

Le terme I_5 est nul à cause du fait que $\partial_z \varphi_0 = 0$, et grâce aux estimations (V.7.26)-(V.7.27), (V.9.5) et (V.9.7), on montre

$$|I_5| \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\varphi_1|_2 z_\varepsilon. \quad (\text{V.9.11})$$

D'autre part, les termes J_1, J_2, J_5 et J_6 sont nuls à cause de l'uniformité de φ_0 . L'estimation sur le terme J_3 devient dans ce cadre, avec l'aide de (V.9.6)

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \varepsilon^{\frac{7}{4}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2 |\partial_x \varphi_1|_4 \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 \right) + \varepsilon^{\frac{1}{4}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 \right) \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{7}{4}} |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 |\partial_x \varphi_1|_4 \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 \right) + \varepsilon^{\frac{1}{4}} |\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left| \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \right|_4 \right) \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{7}{4}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2 |\partial_x \varphi_1|_4 y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{1}{4}} + C \varepsilon^{\frac{1}{4}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2 y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C \varepsilon^{\frac{7}{4}} |\partial_x \varphi_1|_4 y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{3}{4}} + C \varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{7}{3}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 y_\varepsilon + \varepsilon^7 |\partial_x \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{V.9.12})$$

Les termes J_4, J_7 et J_8 donnent de manière similaire

$$|J_4| \leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{15}{3}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_x \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^{\frac{9}{2}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^2 y_\varepsilon + \varepsilon^7 |\partial_x \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon, \quad (\text{V.9.13})$$

$$|J_7| \leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon |\partial_z^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_z \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z^2 \varphi_1|_2^2 y_\varepsilon + \varepsilon^3 |\partial_z \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon, \quad (\text{V.9.14})$$

$$|J_8| \leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon^{\frac{11}{3}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^{\frac{4}{3}} |\partial_z \varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^{\frac{9}{2}} |\partial_x^2 \varphi_1|_2^2 y_\varepsilon + \varepsilon^3 |\partial_z \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{4}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon. \quad (\text{V.9.15})$$

Les termes K_1, K_2, L_3 et L_4 sont devenus coercifs, on n'a donc plus besoin de les estimer, le terme K_3 se traite de la même façon que J_4 et J_8 (les puissances de ε sont même supérieures) et les termes K_4 et L_6 sont nuls car $\partial_z \varphi_0 = 0$.

L'estimation de K_5 se simplifie et devient

$$\begin{aligned} |K_5| &\leq C \varepsilon^{\frac{5}{2}} |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 |\partial_x \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) + C \varepsilon^2 |\varphi_0|_\infty (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |R_\varepsilon|_4) |\partial_x \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) \\ &\quad + C \varepsilon |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) + C \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\varphi_0|_\infty (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) \\ &\quad + C \varepsilon^{\frac{7}{2}} |\varphi_1|_8^2 |\partial_x \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) + C \varepsilon^2 |\varphi_1|_8^2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) \\ &\quad + C \varepsilon^{\frac{9}{4}} (\varepsilon^{\frac{5}{8}} |R_\varepsilon|_8)^2 |\partial_x \varphi_1|_4 (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) + C \varepsilon^{\frac{3}{4}} (\varepsilon^{\frac{5}{8}} |R_\varepsilon|_8)^2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x R_\varepsilon|_4) (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 R_\varepsilon|_2) \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{5}{2}} |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C \varepsilon^2 |\varphi_0|_\infty |\partial_x \varphi_1|_4 y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{3}{4}} \\ &\quad + C \varepsilon |\varphi_0|_\infty |\varphi_1|_4 y_\varepsilon^{\frac{1}{4}} z_\varepsilon^{\frac{3}{4}} + C |\varphi_0|_\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon \\ &\quad + C \varepsilon^{\frac{7}{2}} |\varphi_1|_8^2 |\partial_x \varphi_1|_4 z_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C \varepsilon^2 |\varphi_1|_8^2 y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon^{\frac{3}{4}} \\ &\quad + C \varepsilon^{\frac{9}{4}} |\partial_x \varphi_1|_4 y_\varepsilon^{\frac{3}{4}} z_\varepsilon^{\frac{3}{4}} + C \varepsilon^{\frac{3}{4}} y_\varepsilon z_\varepsilon \\ &\leq \frac{1}{50} z_\varepsilon + C \varepsilon^5 |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + C \varepsilon^8 |\varphi_0|_\infty^4 |\partial_x \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + C \varepsilon^4 |\varphi_0|_\infty^4 |\varphi_1|_4^4 y_\varepsilon + C |\varphi_0|_\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}} y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} z_\varepsilon \\ &\quad + C \varepsilon^7 |\varphi_1|_8^4 |\partial_x \varphi_1|_4^2 + C \varepsilon^8 |\varphi_1|_8^8 y_\varepsilon + C \varepsilon^9 |\partial_x \varphi_1|_4^4 y_\varepsilon^3 + C \varepsilon^{\frac{3}{4}} y_\varepsilon z_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{V.9.16})$$

Le terme K_6 s'estime de la même façon

$$\begin{aligned} |K_6| &\leq \frac{1}{50}z_\varepsilon + C\varepsilon^3|\varphi_0|_\infty^2|\varphi_1|_4^2|\partial_z\varphi_1|_4^2 + C\varepsilon^4|\varphi_0|_\infty^4|\partial_z\varphi_1|_4^4y_\varepsilon + C\varepsilon^4|\varphi_0|_\infty^4|\varphi_1|_4^4y_\varepsilon + C|\varphi_0|_\infty\varepsilon^{\frac{1}{2}}y_\varepsilon^{\frac{1}{2}}z_\varepsilon \\ &\quad + C\varepsilon^5|\varphi_1|_8^4|\partial_z\varphi_1|_4^2 + C\varepsilon^8|\varphi_1|_8^8y_\varepsilon + C\varepsilon^5|\partial_z\varphi_1|_4^4y_\varepsilon^3 + C\varepsilon^{\frac{3}{4}}y_\varepsilon z_\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{V.9.17})$$

et on a déjà vu que les termes L_7 et L_8 vérifient exactement les mêmes estimations que K_5 et K_6 . De même L_5 vérifie la même estimation que K_3 .

Il reste à traiter les deux termes L_1 et L_2 . Pour le premier, on procède façon vraiment différente à ce qui précède en se servant de manière fondamentale des nouveaux termes coercifs dont on dispose dans l'estimation d'énergie. On écrit donc, en intégrant par parties

$$|L_1| \leq (\varepsilon|\partial_x R_\varepsilon|_2)(|\partial_z R_\varepsilon|_2) \leq Cz_\varepsilon.$$

Il faut alors remarquer que l'on peut s'arranger pour que cette constante C soit aussi petite que l'on veut (inférieure à $1/50$) par exemple en multipliant l'estimation de départ (V.7.9) sur $|R_\varepsilon|_2$ par une constante β suffisamment grande qui ne dépend que de $|F''(\varphi_0)| = |F''(\omega)|$. En effet, le terme L_1 provient de l'estimation sur $|\partial_z R_\varepsilon|_2^2$, et la majoration précédente ne fait intervenir que des termes coercifs issus de l'estimation sur $|R_\varepsilon|_2^2$.

Toutes les autres estimations effectuées jusqu'à présent ne changent pas (à part que les constantes qui y apparaissent sont modifiées à cause de la constante β , mais elles ne dépendent toujours que de φ_0 et u_0).

Donc, après cette légère modification des fonctionnelles y_ε et z_ε , l'estimation sur L_1 s'écrit

$$|L_1| \leq \frac{1}{50}z_\varepsilon. \quad (\text{V.9.18})$$

Enfin, de façon similaire, le second terme est majoré par

$$|L_2| \leq \varepsilon|u_0|_\infty(\varepsilon|\partial_x R_\varepsilon|_2)|\partial_z^2 R_\varepsilon|_2 \leq C\varepsilon|u_0|_\infty z_\varepsilon. \quad (\text{V.9.19})$$

En résumé, l'estimation d'énergie s'écrit à nouveau sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y_\varepsilon + \frac{1}{2}z_\varepsilon &\leq (|\varphi_0|_\infty y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}y_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{2}}|\varphi_1|_2 + \varepsilon^{\frac{1}{4}}y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C|\varphi_0|_\infty\varepsilon^{\frac{1}{2}}y_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{3}{4}}y_\varepsilon)z_\varepsilon \\ &\quad + g_1(t) + g_2(t)y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} + g_4(t)y_\varepsilon^3 + g_5(t)y_\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{V.9.20})$$

avec

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \varepsilon^2|\varphi_0|_\infty^2|\varphi_1|_4^2(\varepsilon^2|\partial_x\varphi_1|_4^2 + |\partial_z\varphi_1|_4^2) + C\varepsilon^4|\varphi_1|_6^6 + C\varepsilon^5|\varphi_1|_8^4(\varepsilon^2|\partial_x\varphi_1|_4^2 + |\partial_z\varphi_1|_4^2), \\ g_2(t) &= C\varepsilon^{\frac{7}{3}}|\partial_z^2\varphi_1|_2^{\frac{4}{3}}|\partial_x\varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} + C\varepsilon^{\frac{15}{3}}|\partial_x^2\varphi_1|_2^{\frac{4}{3}}|\partial_x\varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} + C\varepsilon|\partial_z^2\varphi_1|_2^{\frac{4}{3}}|\partial_z\varphi_1|_4^{\frac{4}{3}} + C\varepsilon^{\frac{11}{3}}|\partial_x^2\varphi_1|_2^{\frac{4}{3}}|\partial_z\varphi_1|_4^{\frac{4}{3}}, \\ g_4(t) &= C\varepsilon^9|\partial_x\varphi_1|_4^4 + C\varepsilon^5|\partial_z\varphi_1|_4^4, \\ g_5(t) &= C\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\varepsilon^2|\partial_x^2\varphi_1|_2 + |\partial_z^2\varphi_1|_2)^2 + C\varepsilon^3(\varepsilon|\partial_x\varphi_1|_4 + |\partial_z\varphi_1|_4)^4 + C\varepsilon^4|\varphi_0|_\infty^4|\varphi_1|_4^4 + C\varepsilon^8|\varphi_1|_8^8. \end{aligned}$$

On peut maintenant obtenir grâce aux estimations uniformes en temps sur φ_1 (lemme V.5.1) des estimations sur les g_i dans $L^1(\mathbb{R}^+)$.

Notons que comme φ_1 est à moyenne nulle, on a une inégalité de Poincaré du type

$$|\varphi_1|_2 \leq C(|\partial_x\varphi_1|_2 + |\partial_z\varphi_1|_2),$$

qui permet d'obtenir avec les résultats de la deuxième partie du lemme V.5.1, la borne

$$\int_0^{+\infty} \varepsilon^2|\varphi_1|^2 \leq C|\varphi_1|_2^2,$$

qui va être utilisée dans tout ce qui va suivre de façon systématique.

• **Estimations sur g_1**

Ecrivons tout d'abord grâce aux inégalités de Sobolev anisotropes (V.4.1) et (V.4.3),

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{13}{4}} \int_0^{+\infty} |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 |\partial_x \varphi_1|_4^2 &\leq C_0 \int_0^{+\infty} |\varphi_1|_2^{\frac{3}{2}} (\varepsilon^2 |\varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{4}} (\varepsilon |\varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_z^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\quad \times |\varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_0 |\varphi_1|_2^0 \int_0^\infty (\varepsilon^2 |\varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{4}} (\varepsilon |\varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_z^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\quad \times |\varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_0 |\varphi_1|_2^0, \end{aligned}$$

et de la même façon il vient

$$\varepsilon^{\frac{5}{4}} \int_0^{+\infty} |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^2 |\partial_z \varphi_1|_4^2 \leq C_0 |\varphi_1|_2^0.$$

De même on a

$$\varepsilon^3 \int_0^{+\infty} |\varphi_1|_6^6 \leq C_0 \int_0^{+\infty} |\varphi_1|_2^4 (\varepsilon^2 |\varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2) (\varepsilon |\varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_z^2 \varphi_1|_2) \leq C_0 |\varphi_1|_2^6.$$

Enfin, en reprenant ce qu'on a obtenu sur le même type de terme dans l'étude du cas général (section 8), il vient immédiatement

$$\varepsilon^{\frac{15}{4}} \int_0^{+\infty} |\varphi_1|_8^4 |\partial_x \varphi_1|_4^2 \leq C_0 |\varphi_1|_2^0 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2)^2,$$

et

$$\varepsilon^{\frac{7}{4}} \int_0^{+\infty} |\varphi_1|_8^4 |\partial_z \varphi_1|_4^2 \leq C_0 |\varphi_1|_2^0 (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1|_2 + |\varphi_1|_2)^2.$$

• **Estimations sur g_2**

On les effectue exactement de la même façon que dans le cas général (en tenant compte de l'uniformité des bornes sur φ_1) et il vient

$$\int_0^{+\infty} g_2 \leq C_0 \varepsilon^{\frac{1}{3}} |\varphi_1|_2^0 (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1|_2 + |\varphi_1|_2)^{\frac{2}{3}}.$$

• **Estimations sur g_4**

En utilisant l'inégalité de Sobolev (V.4.1) avec $p = 4$, il vient

$$\varepsilon^6 \int_0^{+\infty} |\partial_x \varphi_1|_4^4 \leq \int_0^+ \infty (\varepsilon^3 |\partial_x \varphi_1|_2^2) (\varepsilon^2 |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon^2 |\partial_x^2 \varphi_1|_2) (\varepsilon |\partial_x \varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_x \partial_z \varphi_1|_2) \leq C_0 (\varepsilon^3 |\partial_x \varphi_1|_2^2) |\varphi_1|_2^2,$$

et

$$\varepsilon^2 \int_0^{+\infty} |\partial_x \varphi_1|_4^4 \leq C_0 (\varepsilon |\partial_z \varphi_1|_2^2 + |\varphi_1|_2^2) |\varphi_1|_2^2.$$

• **Estimations sur g_5**

Le premier terme se majore de façon immédiate grâce au lemme V.5.1, et le second vient d'être traité pour l'étude de g_4 . Le troisième se majore par

$$\varepsilon^2 \int_0^{+\infty} |\varphi_0|_\infty^2 |\varphi_1|_4^4 \leq C_0 \int_0^{+\infty} |\varphi_1|_2^2 (\varepsilon |\varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_x \varphi_1|_2) (\varepsilon |\varphi_1|_2 + \varepsilon |\partial_z \varphi_1|_2) \leq C_0 |\varphi_1|_2^4,$$

et le dernier par

$$\begin{aligned} \varepsilon^5 \int_0^{+\infty} |\varphi_1|_8^8 &\leq C\varepsilon^5 \int_0^{+\infty} |\varphi_1|_2^5 (|\varphi_1|_2 + |\partial_x^2 \varphi_1|_2)^{\frac{3}{2}} (|\varphi_1|_2 + |\partial_z^2 \varphi_1|_2)^{\frac{3}{2}} \\ &\leq C \int_0^{+\infty} |\varphi_1|_2^{\frac{9}{2}} (\varepsilon |\varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon^2 |\varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} (\varepsilon |\varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\partial_x^3 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad \times \left(|\varphi_1|_2^{\frac{1}{2}} (\varepsilon |\varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} + (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z^3 \varphi_1|_2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\leq C_0 |\varphi_1|_2^5 (|\varphi_1^0|_2^3 + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1^0|_2)^3 + (\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1^0|_2)^3). \end{aligned}$$

On a maintenant tous les ingrédients nécessaires à la démonstration proprement dite du théorème V.6.3.

Preuve (du théorème V.6.3):

Comme pour les théorèmes précédents, on constate que l'hypothèse (V.6.5), se récrit dans les nouvelles variables sous la forme

$$|\varphi_1^0|_2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\partial_z \varphi_1^0|_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\partial_x \varphi_1^0|_2 \leq K_0,$$

uniformément en ε . Ainsi les résultats obtenus sur les g_i précédemment s'écrivent

$$\int_0^{+\infty} g_1 \leq \varepsilon^{\frac{3}{4}} K'_0,$$

$$\int_0^{+\infty} g_2 \leq \varepsilon^{\frac{1}{3}} K'_0,$$

$$\int_0^{+\infty} g_4 \leq \varepsilon^3 K'_0,$$

et

$$\int_0^{+\infty} g_5 \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} K'_0,$$

où K'_0 est une constante dépendant uniquement de K_0 .

Appliquons le même type de raisonnement que dans les démonstrations des résultats précédents. Posons

$$M_\varepsilon = 2(y_\varepsilon(0) + \varepsilon^{\frac{3}{4}} K'_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} K'_0) e^{\varepsilon^3 K'_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} K'_0 + K'_0}.$$

D'après l'hypothèse (V.6.6), et le fait que $R_\varepsilon(0) = 0$, on a

$$y_\varepsilon(0) \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} K_0,$$

ce qui montre l'existence d'une constante M_0 ne dépendant que de φ_0 , u_0 et K_0 telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$M_\varepsilon \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} M_0.$$

Ainsi, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, on a

$$M_\varepsilon \leq 1,$$

et

$$(|\varphi_0|_\infty M_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} M_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\varphi_1^0|_2 + \varepsilon^{\frac{1}{4}} M_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C|\varphi_0|_\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}} M_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{3}{4}} M_\varepsilon) \leq \frac{1}{4}.$$

Soit alors $T^* \in]0, +\infty]$ le temps maximal pour lequel on a, pour tout $t \in [0, T^*]$,

$$y_\varepsilon(t) \leq M_\varepsilon.$$

D'après les propriétés précédentes de M_ε pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, et grâce à l'inégalité de Young

$$\varepsilon^{\frac{1}{3}} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} + y_\varepsilon,$$

l'estimation d'énergie peut s'écrire maintenant

$$\frac{d}{dt} y_\varepsilon \leq g_1(t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} g_2(t) \right) + \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} g_2(t) + g_4(t) + g_5(t) \right) y_\varepsilon.$$

Après intégration, il vient pour tout $t \leq T^*$, en utilisant les bornes obtenues sur les g_i précédemment,

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &\leq y_\varepsilon(0) + \int_0^{T^*} g_1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^{T^*} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} g_2 \right) + \int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} g_2 + g_4 + g_5 \right) y_\varepsilon \\ &\leq y_\varepsilon(0) + \varepsilon^{\frac{3}{4}} K'_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} K'_0 + \int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} g_2 + g_4 + g_5 \right) y_\varepsilon \end{aligned}$$

et via le lemme de Gronwall, on obtient

$$y_\varepsilon(t) \leq (y_\varepsilon(0) + \varepsilon^{\frac{3}{4}} K'_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} K'_0) e^{K'_0 + \varepsilon^3 K'_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} K'_0} \leq \frac{1}{2} M_\varepsilon.$$

Ceci prouve que l'intervalle maximal $[0, T^*]$ sur lequel $y_\varepsilon(t) \leq M_\varepsilon$ est \mathbb{R}^+ tout entier. Ainsi on a prouvé

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} y_\varepsilon(t) \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} M_0,$$

ce qui constitue le résultat annoncé si on revient à la définition de y_ε dans les variables initiales. ■

Bibliographie du chapitre 5

- [1] N. Alikakos, P. Bates, and G. Fusco. Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension. *Journal of Differential Equation*, 90 :pp 71–135, 1991.
- [2] G. Cristobal Azkarate. *Etude de quelques changements structuraux dans les fluides complexes à l'équilibre et hors équilibre*. Thèse de Doctorat, CPMOH, Univ. Bordeaux 1, 2000.
- [3] F. Boyer. Mathematical study of multiphase flow under shear through order parameter formulation. *Asymptotic Analysis*, 20 :pp 175–212, 1999.
- [4] F. Boyer. Diphasic flow with a logarithmic Cahn-Hilliard potential. *en préparation*, 2001.
- [5] F. Boyer. Nonhomogeneous Cahn-Hilliard fluids. *Annales de l'IHP : Analyse non linéaire*, sous presse, 2001.
- [6] F. Boyer. A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows. *Computers and Fluids*, sous presse, 2001.
- [7] F. Boyer and P. Fabrie. Persistency of 1D solutions for a Cahn-Hilliard flow under high shear in a stretched 2D domain. *en préparation*, 2001.
- [8] R. Chella and J. Vinals. Mixing of a two-phase fluid by a cavity flow. *Physical Review E*, 53 :p 3832, 1996.
- [9] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Applied Mathematical Science*. Springer-Verlag, 1997.
- [10] R. Temam and M. Ziane. Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions. *Adv. Differential Equations*, 1(4) :pp 499–546, 1996.

Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous avons développé un nouveau modèle pour l'étude des écoulements diphasiques incompressibles. Il s'agit d'un modèle "à interface diffuse", c'est-à-dire dans lequel l'interface entre les deux phases est supposée avoir une épaisseur petite mais non nulle.

La thermodynamique d'une telle interface est décrite par le choix d'une énergie libre pour le mélange. Une telle énergie a été introduite par Cahn et Hilliard dans les années 1960, et fait intervenir le gradient d'un paramètre d'ordre (grandeur thermodynamique qui caractérise la composition du mélange en tout point et à tout instant), choisi dans notre cas comme étant la fraction volumique d'une phase dans le mélange.

Dans la première partie, nous avons détaillé l'obtention des équations à partir des lois fondamentales de la mécanique des fluides. Puis nous avons validé qualitativement le modèle via la mise en place d'un schéma numérique.

Nous avons vu qu'il fallait apporter un soin particulier à la discréétisation du terme de transport dans l'équation sur le paramètre d'ordre afin d'éviter, autant que faire se peut, que la diffusion numérique ne vienne perturber le calcul de la position de l'interface. Le schéma choisi pour discréétiser ce terme (dû à P. Rasetarinera) ainsi que le caractère naturellement antidiffusif de l'équation de Cahn-Hilliard, permettent de capturer proprement l'interface de fine, même sur des temps longs.

Pour terminer cette partie, nous avons montré assez rapidement comment étendre, sans trop de difficultés, la méthode numérique mise en place précédemment, pour le calcul d'écoulements dans un domaine avec obstacle. Il s'agit d'une méthode de domaine fictif pour laquelle on résout en fait les équations sur un domaine de géométrie simple.

La partie Cahn-Hilliard du système est traitée par la mise en place d'une condition aux limites originale qui assure la conservation de la composition du mélange au cours du temps, alors que la partie Navier-Stokes est traitée par pénalisation L^2 de l'obstacle considéré.

Dans la seconde partie, nous avons étudié les propriétés mathématiques du modèle. Nous avons montré l'existence (et parfois l'unicité) de solutions pour le problème considéré dans des situations variées chacune d'entre elles s'appuyant sur des situations physiques particulières :

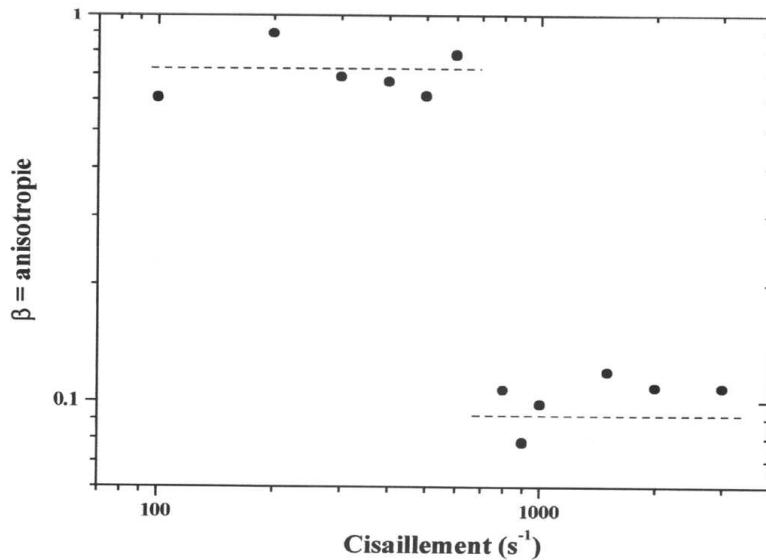
- Cas homogène, avec une mobilité non dégénérée et un potentiel de Cahn-Hilliard polynomial.
- Cas homogène, avec mobilité dégénérée et potentiel éventuellement singulier.
- Cas homogène, avec mobilité non-dégénérée et un potentiel de Cahn-Hilliard singulier (de type logarithmique par exemple).
- Cas non-homogène, et plus particulièrement le cas faiblement non-homogène.

Nous avons de surcroît obtenu deux théorèmes qui prouvent la stabilité asymptotique des états métastables du potentiel de Cahn-Hilliard sous faible cisaillement, dans tous les cas qui précédent.

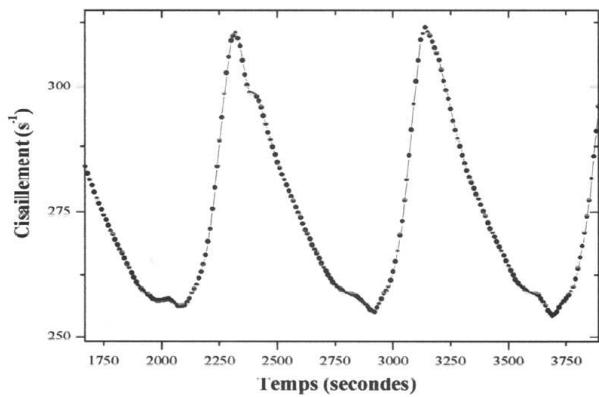
Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons prouvé, sous l'hypothèse d'un écoulement laminaire mais à grand cisaillement, la persistance de petites perturbations de solutions 1D (transverses à l'écoulement) du système dans un domaine 2D très étiré sur des temps $O(1)$ dans le cas général et sur des temps infinis dans le cas d'une solution de référence constante et métastable pour le potentiel F considéré.

Ces derniers résultats constituent le point de départ pour l'étude future d'un problème plus général dont l'intérêt est fondamental. Il s'agit de comprendre l'évolution du système en fonction du cisaillement.

Nous avons vu que numériquement et expérimentalement (voir la thèse de G. Cristobal indiquée dans la bibliographie du chapitre 2) de nombreux phénomènes peuvent se produire, on sait par exemple qu'il existe un cisaillement critique au-delà duquel le système va tendre systématiquement vers un mélange homogène. Les mesures expérimentales suivantes montrent qu'à faible cisaillement le facteur d'anisotropie β est fort, ce qui montre la structure lamellaire du mélange, alors qu'au franchissement d'un taux de cisaillement critique, l'anisotropie du mélange devient faible et caractéristique d'une mixture mélangée.



On observe aussi des différences importantes dans le comportement du système lorsqu'au lieu d'imposer la vitesse de cisaillement, on impose la contrainte dans la cellule de couette considérée. On peut alors observer des phénomènes d'hystérésis lors de mesures de viscosité, ou encore l'apparition de cycles qui présentent une alternance entre un mélange quasi homogène (grand cisaillement), et un mélange à structure lamellaire (cisaillement plus faible). La figure ci-dessous montre les mesures prises dans la thèse de G. Cristobal, du taux de cisaillement, à contrainte imposée, en fonction du temps.



Ceci nous amène naturellement à mettre en oeuvre, dans un futur proche, l'étude numérique du modèle considéré à contrainte imposée.

L'extension du modèle à des situations plus générales est elle-aussi envisageable. On peut par exemple penser à des modèles "triphasiques" que l'on peut traiter sous deux aspects différents.

- Si l'une des phases est solide, la méthode numérique proposée à la fin du chapitre 2 permet d'ores et déjà d'obtenir des résultats. L'étude d'écoulements diphasiques en milieu poreux, où la phase solide est traitée comme un obstacle dans un écoulement diphasique, devrait aboutir à partir de ces travaux préliminaires.
- Un deuxième aspect est l'extension de l'énergie de Cahn-Hilliard au cas triphasique. De très rares travaux existent sur ce thème. Une modélisation semblable à celle proposée dans le premier chapitre étendue au cas triphasique semble non triviale et pourrait aboutir à de nombreuses applications.

Enfin, dans tout ce qui précède, on n'a pas tenu compte du caractère non-Newtonien des phases polymères dont les molécules très longues peuvent s'entremêler. La rhéologie de ces mélanges peut être très complexe et l'extension du modèle précédent au cadre non-Newtonien est d'un grand intérêt d'un point de vue des applications.

Résumé

Dans la première partie de la thèse, on établit un nouveau modèle pour l'étude des écoulements diphasiques basé sur la théorie de Cahn et Hilliard pour la description d'une interface diffuse et sur les principes fondamentaux de la mécanique des fluides. Ce modèle est ensuite validé par la mise en place d'une méthode numérique qui permet de vérifier que le modèle proposé est pertinent dans des cas physiques variés. On peut par exemple retrouver des résultats expérimentaux concernant la décomposition spinodale sous cisaillement qui rendent compte du couplage entre la thermodynamique et l'hydrodynamique.

Dans une seconde partie, on mène l'étude théorique du modèle. En particulier on s'intéresse aux problèmes d'existence et d'unicité de solutions, ainsi qu'aux propriétés de stabilité et de stabilité asymptotique de certaines solutions particulières. Certains résultats prennent en compte le caractère éventuellement dégénéré du terme de diffusion dans l'équation de Cahn-Hilliard ou encore la singularité logarithmique du potentiel de Cahn-Hilliard. Toute l'étude est menée dans le cadre d'un écoulement de cisaillement dans un canal, le dernier chapitre étant consacré au comportement du système à grand cisaillement.

Mots-Clés

Ecoulement diphasique, Interface diffuse, Equation de Navier-Stokes, Equation de Cahn-Hilliard, Forces capillaires, Cisaillement, Décomposition Spinodale

Abstract

In the first part of this thesis, we derive a new model for the study of diphasic flows based on the Cahn-Hilliard theory for the description of a diffuse interface and on the basic principles of fluid mechanics. Then, this model is validated by the implementation of a numerical method which confirms that the equations proposed here are pertinent in various physical cases. For instance, we are able to obtain numerical solutions which match experimental results concerning spinodal decomposition under shear, accounting for the coupling between thermodynamics and hydrodynamics.

In a second part, we deal with the theoretical study of the model. We are interested, in particular, in the problems of existence and uniqueness, but also in the properties of stability and asymptotic stability of some specific solutions. Some results take into account the fact that the diffusion term in the Cahn-Hilliard equation may degenerate but also that the Cahn-Hilliard potential may present a logarithmic singularity. The whole study is performed in the case of a shear flow in a channel, the last chapter being particularly concerned with the behavior of the system at high shear.

Keywords

Diphasic flow, Diffuse interface, Navier-Stokes equation, Cahn-Hilliard equation, Capillary forces, Shear flow, Spinodal Decomposition