

Schémas Compact Hermitiens sur la Sphère

Séminaire Doctorants de Reims

Brachet Matthieu

Institut Elie Cartan de Lorraine

Vendredi 16 Octobre 2015



- 1 Introduction
- 2 Ce qui existe déjà...
- 3 Maillage "Cube-Sphere"
- 4 Calcul du gradient sphérique
- 5 Dérivées Hermitiennes
- 6 Benchmark
- 7 Conclusion et perspectives

Introduction

Quoi ?

Calcul des opérateurs différentiels classiques sur la sphère par des méthodes numériques

Pourquoi ?

Applications numériques en océanographie, climatologie, ...

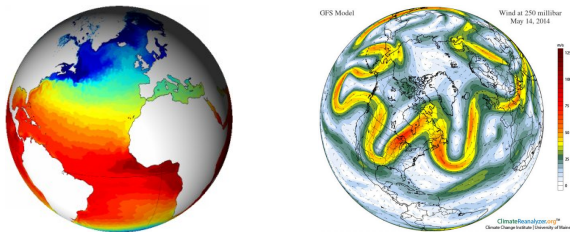


Figure: (a) Océanographie(Image Mercator océan) - (b) Jet-Stream
(ClimateReanalyzer.orgTM)

Introduction

Quoi ?

Calcul des opérateurs différentiels classiques sur la sphère par des méthodes numériques

Pourquoi ?

Applications numériques en océanographie, climatologie, ...

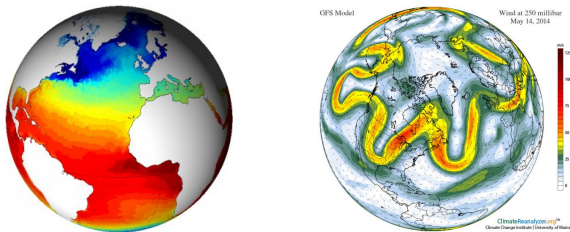
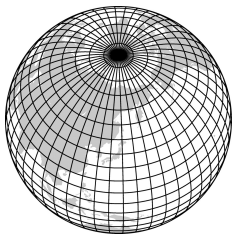


Figure: (a) Océanographie(Image Mercator océan) - (b) Jet-Stream (ClimateReanalyzer.orgTM)

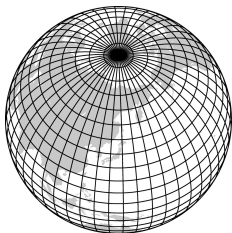
→ Maillage Longitude/Latitude



- Construction naturelle,
- Facile à manipuler,
- Problème des pôles.

Figure: Maillage Longitude/Latitude

→ Maillage Longitude/Latitude

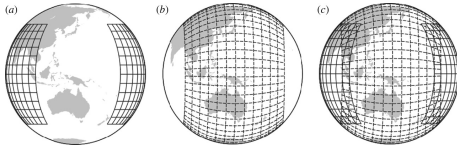


- Construction naturelle,
- Facile à manipuler,
- Problème des pôles.

Figure: Maillage Longitude/Latitude

→ Maillage Ying/Yang

Introduit par Akira Kageyama et Tetsuya Sato en 2004.

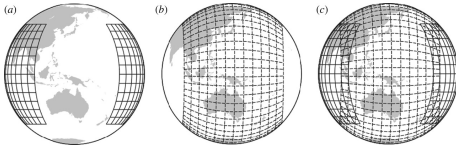


- Pas de problèmes de pôles,
- Hautement parallélisable,
- Fort coût en calculs.

Figure: Maillage Ying/Yang

→ Maillage Ying/Yang

Introduit par Akira Kageyama et Tetsuya Sato en 2004.

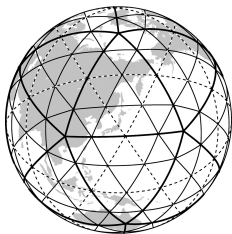


- Pas de problèmes de pôles,
- Hautement parallélisable,
- Fort coût en calculs.

Figure: Maillage Ying/Yang

→ Maillage Isocahedrale

Introduit par Robert Sadourny, Akio Arakawa et Yale Mintz en 1968.



- Coût en calcul faible,
- Volume des éléments constant,
- Problème des pôles toujours présent.

Figure: Maillage Isocahedrale

→ Maillage Isocahedrale

Introduit par Robert Sadourny, Akio Arakawa et Yale Mintz en 1968.

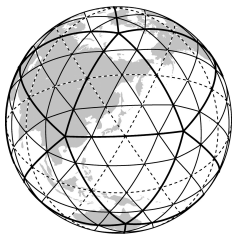


Figure: Maillage Isocahedrale

- Coût en calcul faible,
- Volume des éléments constant,
- Problème des pôles toujours présent.

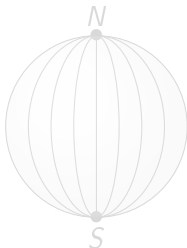
Maillage "Cube-Sphere"

Idée :

Construire une méthode rapide, précise et efficace pour calculer des opérateurs différentiels sur la sphère.

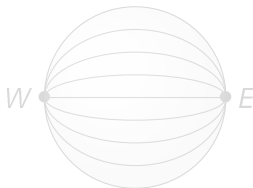
Poles :

- Nord : $N(0, 0, R)$,
- Sud : $S(0, 0, -R)$.



Poles :

- East : $E(0, R, 0)$,
- West : $W(0, -R, 0)$.



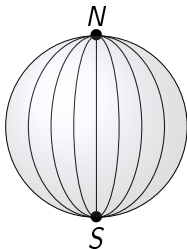
Maillage "Cube-Sphere"

Idée :

Construire une méthode rapide, précise et efficace pour calculer des opérateurs différentiels sur la sphère.

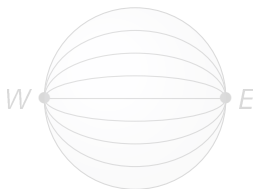
Poles :

- Nord : $N(0, 0, R)$,
- Sud : $S(0, 0, -R)$.



Poles :

- East : $E(0, R, 0)$,
- West : $W(0, -R, 0)$.



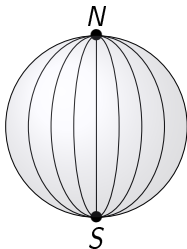
Maillage "Cube-Sphere"

Idée :

Construire une méthode rapide, précise et efficace pour calculer des opérateurs différentiels sur la sphère.

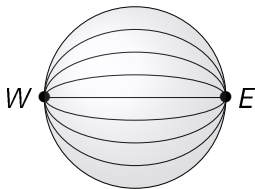
Poles :

- Nord : $N(0, 0, R)$,
- Sud : $S(0, 0, -R)$.



Poles :

- East : $E(0, R, 0)$,
- West : $W(0, -R, 0)$.



Création d'un maillage couvrant une partie de la sphère.



Figure: Cube-Sphere - Front (gauche) et Complet (droite)

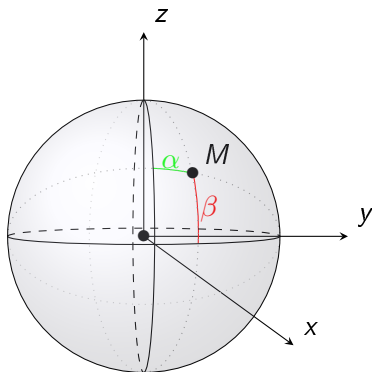


Figure: Coordonnées sur la CS

Dans ce système de coordonnées M est donné par :

- α abscisse curviligne le long du grand cercle "horizontal".
- η angle longitudinal.
- β abscisse curviligne le long du grand cercle "vertical".
- ξ angle latitudinal.

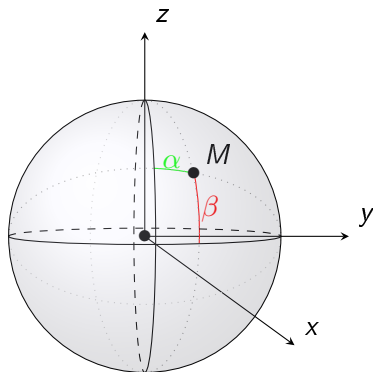


Figure: Coordonnées sur la CS

Dans ce système de coordonnées M est donné par :

- α abscisse curviligne le long du grand cercle "horizontal".
- η angle longitudinal.
- β abscisse curviligne le long du grand cercle "vertical".
- ξ angle latitudinal.

Calcul du gradient sphérique

Gradient :

$$\nabla_s u = \frac{\partial u}{\partial \xi}|_\eta g^\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}|_\xi g^\eta$$

→ $\frac{\partial u}{\partial \xi}|_\eta$ et $\frac{\partial u}{\partial \eta}|_\xi$: pas le long des grands cercles. Exprimer dans (α, β) .

Gradient sur la CS

$$\nabla_s u = \frac{\partial u}{\partial \alpha}|_\eta \left(\cos \eta \frac{1 + \tan^2 \xi}{1 + \cos^2 \eta \tan^2 \xi} \right) g^\xi + \frac{\partial u}{\partial \beta}|_\xi \left(\cos \xi \frac{1 + \tan^2 \eta}{1 + \cos^2 \xi \tan^2 \eta} \right) g^\eta$$

→ Évaluer $\frac{\partial u}{\partial \alpha}|_\eta$ et $\frac{\partial u}{\partial \beta}|_\xi$ en chaque point du maillage.

Calcul du gradient sphérique

Gradient :

$$\nabla_s u = \frac{\partial u}{\partial \xi|_\eta} g^\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta|_\xi} g^\eta$$

→ $\frac{\partial u}{\partial \xi|_\eta}$ et $\frac{\partial u}{\partial \eta|_\xi}$: pas le long des grands cercles. Exprimer dans (α, β) .

Gradient sur la CS

$$\nabla_s u = \frac{\partial u}{\partial \alpha|_\eta} \left(\cos \eta \frac{1 + \tan^2 \xi}{1 + \cos^2 \eta \tan^2 \xi} \right) g^\xi + \frac{\partial u}{\partial \beta|_\xi} \left(\cos \xi \frac{1 + \tan^2 \eta}{1 + \cos^2 \xi \tan^2 \eta} \right) g^\eta$$

→ Évaluer $\frac{\partial u}{\partial \alpha|_\eta}$ et $\frac{\partial u}{\partial \beta|_\xi}$ en chaque point du maillage.

Calcul du gradient sphérique

Gradient :

$$\nabla_s u = \frac{\partial u}{\partial \xi}|_\eta g^\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}|_\xi g^\eta$$

→ $\frac{\partial u}{\partial \xi}|_\eta$ et $\frac{\partial u}{\partial \eta}|_\xi$: pas le long des grands cercles. Exprimer dans (α, β) .

Gradient sur la CS

$$\nabla_s u = \frac{\partial u}{\partial \alpha}|_\eta \left(\cos \eta \frac{1 + \tan^2 \xi}{1 + \cos^2 \eta \tan^2 \xi} \right) g^\xi + \frac{\partial u}{\partial \beta}|_\xi \left(\cos \xi \frac{1 + \tan^2 \eta}{1 + \cos^2 \xi \tan^2 \eta} \right) g^\eta$$

→ Évaluer $\frac{\partial u}{\partial \alpha}|_\eta$ et $\frac{\partial u}{\partial \beta}|_\xi$ en chaque point du maillage.

u assez régulière et périodique. Alors :

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6} \underbrace{u^{(3)}(x)}_{=(u'(x))''} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6} \frac{u'(x-h) - 2u'(x) + u'(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^4)$$

Après simplification :

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = \frac{1}{6} [u'(x-h) + 4u'(x) + u'(x+h)] + \mathcal{O}(h^4)$$

u assez régulière et périodique. Alors :

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6} \underbrace{u^{(3)}(x)}_{=(u'(x))''} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6} \frac{u'(x-h) - 2u'(x) + u'(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^4)$$

Après simplification :

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = \frac{1}{6} [u'(x-h) + 4u'(x) + u'(x+h)] + \mathcal{O}(h^4)$$

u assez régulière et périodique. Alors :

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6} \underbrace{u^{(3)}(x)}_{=(u'(x))''} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6} \frac{u'(x-h) - 2u'(x) + u'(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^4)$$

Après simplification :

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = \frac{1}{6} [u'(x-h) + 4u'(x) + u'(x+h)] + \mathcal{O}(h^4)$$

Schéma compact

- $U' = [u'_1, \dots, u'_N]^T \approx [u'(x_1), \dots, u'(x_N)]^T$
- $U = [u_1, \dots, u_N]^T$

Alors :

$$\frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & -1 & 0 \end{pmatrix} U = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & 1 \\ 1 & 4 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & 1 & 4 & 1 \\ 1 & & & 1 & 4 \end{pmatrix} U'$$

→ Résolution d'un système linéaire sur chaque grand cercle.

→ Existence d'un solveur rapide combinant l'algorithme de Thomas et la formule de Shermann-Morisson-Woodbury.

Schéma compact

- $U' = [u'_1, \dots, u'_N]^T \approx [u'(x_1), \dots, u'(x_N)]^T$
- $U = [u_1, \dots, u_N]^T$

Alors :

$$\frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & -1 & 0 \end{pmatrix} U = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & 1 \\ 1 & 4 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & 1 & 4 & 1 \\ 1 & & & 1 & 4 \end{pmatrix} U'$$

→ Résolution d'un système linéaire sur chaque grand cercle.

→ Existence d'un solveur rapide combinant l'algorithme de Thomas et la formule de Shermann-Morisson-Woodbury.

Schéma compact

- $U' = [u'_1, \dots, u'_N]^T \approx [u'(x_1), \dots, u'(x_N)]^T$
- $U = [u_1, \dots, u_N]^T$

Alors :

$$\frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & -1 & 0 \end{pmatrix} U = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & 1 \\ 1 & 4 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & 1 & 4 & 1 \\ 1 & & & 1 & 4 \end{pmatrix} U'$$

→ Résolution d'un système linéaire sur chaque grand cercle.

→ Existence d'un solveur rapide combinant l'algorithme de Thomas et la formule de Sherman-Morisson-Woodbury.

Problème...

Les points des cercles ne coïncident pas avec les points du maillage

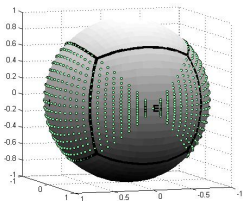


Figure: grand cercle

Solution

- Interpolation d'Hermite
→ Faible coût en calcul.
→ Phénomène de Runge...
Grosse erreur due au grand nombre de points.
- Choix du spline cubique
→ Systèmes linéaires à résoudre.
→ Erreur en $\mathcal{O}(h^4)$.

Problème...

Les points des cercles ne coïncident pas avec les points du maillage

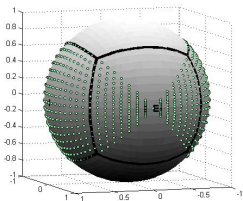


Figure: grand cercle

Solution

- Interpolation d'Hermite
→ Faible coût en calcul.
→ Phénomène de Runge...
Grosse erreur due au grand nombre de points.
- Choix du spline cubique
→ Systèmes linéaires à résoudre.
→ Erreur en $\mathcal{O}(h^4)$.

Résolution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla_S h &= 0 \\ h(\mathbf{x}, t = 0) &= h_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \mathbf{x} \text{ sur la sphère, } t > 0$$

Discrétisation :

- En espace : comme vu plus tôt,
- En temps : méthode RK4 (ordre 4 et explicite) avec filtrage en espace des hautes fréquences (ordre 10).

Résolution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla_S h &= 0 \\ h(\mathbf{x}, t = 0) &= h_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \mathbf{x} \text{ sur la sphère, } t > 0$$

Discrétisation :

- En espace : comme vu plus tôt,
- En temps : méthode RK4 (ordre 4 et explicite) avec filtrage en espace des hautes fréquences (ordre 10).

Test 1 : BUMP en rotation

Idée :

- c et h_0 donnés,
- faire tourner une "cloche" (le BUMP) autour de la sphère.

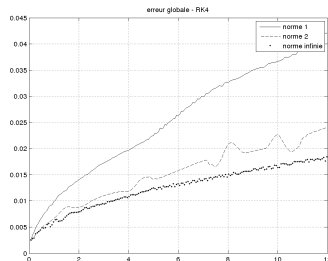


Figure: Test 1 : Bump en rotation -
40 mailles par face - CFL=0.9

Test 2 : Vortex stationnaire

Idée :

- c et h_0 donnés,
- Formation d'une "tempête" (vortex) sur une zone localisée de la sphère.

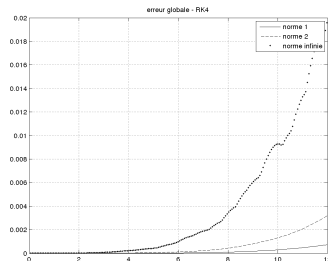


Figure: Test 2 : Vortex stationnaire -
40 mailles par face - CFL=0.9

Bilan

- Méthode rapide (solveurs rapides) et précise (ordre 4),
- Bons résultats sur les tests.

Avenir...

- Accélération du calcul,
- Mise en place d'un zoom LDC,
- Résolution de l'équation de Saint-Venant.

Bilan

- Méthode rapide (solveurs rapides) et précise (ordre 4),
- Bons résultats sur les tests.

Avenir...

- Accélération du calcul,
- Mise en place d'un zoom LDC,
- Résolution de l'équation de Saint-Venant.

Merci de votre attention :)