Étude asymptotique de modèles de carnets d'ordre

Stage de recherche

Encadré par Xavier Erny

Matthieu Gurrisi

Telecom SudParis

12 décembre 2025

Table des matières

1 Premier modèle : achat sans vente

1.1 Dynamique du modèle

On note $N \in \mathbb{N}$ le nombre d'agents. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n^N désigne le prix de l'actif à la date n. La dynamique est donnée par

$$X_{n+1}^N = X_n^N + b(X_n^N) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P_n^{N,j}. \tag{1}$$

Ici, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction (déterministe) et, pour tout n et j,

$$P_n^{N,j} \text{ est une variable de Poisson de paramètre } f(X_n^N),$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

1.1.1 Proposition 1.1

Proposition 1.1 (Convergence vers un système limite)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C_n > 0$ tel que*

$$\mathbb{E}\big[|X_n^N - \bar{x}_n|\big] \le C_n\, N^{-1/2},$$

où le système limite $(\bar{x}_n)_n$ est défini par

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + b(\bar{x}_n) + f(\bar{x}_n), \qquad \bar{x}_0 = x_0.$$

1.2 Premier cas particulier

Dans cette section, on suppose f constante.

1.2.1 Proposition 1.2

Proposition 1.2. *Soit b lipschitzienne et f constante. Alors, pour tout n, il existe C_n tel que*

$$\mathbb{E}\big[|X_n^N - \bar{x}_n|\big] \le C_n\, N^{-1/2},$$

avec

$$C_n = \frac{\sqrt{f}\,(1+L_b)^n}{L_b},$$

où L_b est une constante de Lipschitz pour b.

Démonstration. Partons du terme apparaissant dans l'espérance. Par inégalité triangulaire, et en posant

$$\Delta_N := \left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P_n^{N,j} - f\right|,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|X_{n+1}^N - \bar{x}_{n+1}| &\le |X_n^N - \bar{x}_n| + |b(X_n^N) - b(\bar{x}_n)| + \Delta_N \\
&\le |X_n^N - \bar{x}_n|(1+L_b) + \Delta_N,
\end{aligned}$$

car b est L_b-lipschitzienne.

D'autre part, par positivité de la variance et par la formule de König, on a

$$\mathbb{E}(\Delta_N) \le \left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P_n^{N,j} - f\right)^2\right]\right)^{1/2}.$$

En notant $S_n := \sum_{j=1}^N P_n^{N,j}$, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{N}-f\right)^2\right] &= \frac{1}{N^2}\mathrm{Var}(S_n) + \left(\frac{1}{N}\mathbb{E}(S_n)-f\right)^2 \\ &= \frac{1}{N^2}Nf = \frac{f}{N},\end{aligned}$$

puisque les variables $P_n^{N,j}$ sont indépendantes et de loi de Poisson de paramètre f. Ainsi,

$$\mathbb{E}(\Delta_n) \leq \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{N}}.$$

On obtient alors, par monotonie de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(|X_{n+1}^N - \bar{x}_{n+1}|\big) &\leq (1+L_b)\mathbb{E}\big(|X_n^N - \bar{x}_n|\big) + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{N}} \\ &\leq \mathbb{E}\big(|X_0^N - \bar{x}_0|\big)(1+L_b)^{n+1} + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{n}(1+L_b)^k.\end{aligned}$$

par une récurrence immédiate. Comme $X_0^N = \bar{x}_0$, le premier terme est nul, et l'on obtient finalement

$$\mathbb{E}\big(|X_{n+1}^N - \bar{x}_{n+1}|\big) \leq \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{N}}\frac{(1+L_b)^{n+1}-1}{L_b} \leq C_{n+1}N^{-1/2},$$

ce qui conclut la preuve. □

1.2.2 Proposition 1.3

Proposition 1.3. *Soit f constante et*

$$b(x) := -\lambda(x - x_0),$$

avec $x_0 > 0$ et $\lambda \in \,]0,1[$. Alors il existe $C > 0$ telle que, pour tout n,

$$\mathbb{E}\big[|X_n^N - \bar{x}_n|\big] \leq C\, N^{-1/2}.$$

Démonstration. Partons du terme apparaissant dans l'espérance. Par inégalité triangulaire, et en posant

$$\Delta_N := \left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N P_n^{N,j} - f\right|,$$

on a

$$|X_{n+1}^N - \bar{x}_{n+1}| \leq \big|X_n^N - \bar{x}_n + b(X_n^N) - b(\bar{x}_n)\big| + \Delta_N.$$

Or, comme $b(x) = -\lambda(x - x_0)$, on obtient

$$x + b(x) = x - \lambda(x - x_0) = (1-\lambda)x + \lambda x_0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\big|X_n^N - \bar{x}_n + b(X_n^N) - b(\bar{x}_n)\big| &= \big|(X_n^N + b(X_n^N)) - (\bar{x}_n + b(\bar{x}_n))\big| \\ &= \big|(1-\lambda)X_n^N + \lambda x_0 - ((1-\lambda)\bar{x}_n + \lambda x_0)\big| \\ &= (1-\lambda)\,|X_n^N - \bar{x}_n|.\end{aligned}$$

Donc

$$|X_{n+1}^N - \bar{x}_{n+1}| \leq (1-\lambda)|X_n^N - \bar{x}_n| + \Delta_N.$$

D'autre part, comme dans la Proposition 1.2, on a

$$\mathbb{E}(\Delta_n) \leq \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{N}}.$$

On obtient alors, par monotonie de l'espérance,

$$\mathbb{E}\big(|X_{n+1}^N - \bar{x}_{n+1}|\big) \leq (1-\lambda)\mathbb{E}\big(|X_n^N - \bar{x}_n|\big) + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{N}}.$$

En itérant,

$$\mathbb{E}\big(|X_{n+1}^N - \bar{x}_{n+1}|\big) \leq (1-\lambda)^{n+1}\mathbb{E}\big(|X_0^N - \bar{x}_0|\big) + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda)^k.$$

Comme $X_0^N = \bar{x}_0$, le premier terme est nul, et

$$\mathbb{E}\big(|X_{n+1}^N - \bar{x}_{n+1}|\big) \leq \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{N}} \, \frac{1-(1-\lambda)^{n+1}}{\lambda} \leq \frac{\sqrt{f}}{\lambda} \, N^{-1/2}.$$

En posant $C := \frac{\sqrt{f}}{\lambda}$, on a bien pour tout n,

$$\mathbb{E}\big(|X_n^N - \bar{x}_n|\big) \leq C \, N^{-1/2}.$$

□

1.2.3 Proposition 1.4

Proposition 1.4. *Soit b lipschitzienne et f constante. Alors, pour tout n, il existe C_n tel que pour toute fonction $g \in C^2$ de dérivée seconde bornée,*

$$\big|\mathbb{E}[g(X_n^N)] - g(\bar{x}_n)\big| \leq \|g''\|_\infty \, C_n \, N^{-1}.$$

Démonstration. □