TD Algorithmique: Algorithm récursif et programmation dynamique

Induction mathématique

En mathématiques, on rencontre souvent des définitions récursives:

- Factorielle de n (n!) : Si n = 0 alors n! = 1 ; si n > 0 alors n ! = n.(n-1) !
- Le nombre d'éléments d'un ensemble fini S est |S| : Si S = ∅ alors |S| = 0 ; Si S ≠ ∅ il doit y avoir un élément x ∈ S, alors |S| = |S\{x}| + 1.

Algorithm récursif

Si la solution d'un problème P est réalisée par la solution d'un problème P' de même forme que P alors c'est une solution récursive. L'algorithme correspondant est appelé l'algorithme récursif. Le point clé à noter est le suivant: bien que P' ait la même forme que P, mais dans un certain sens, il doit être "plus petit" que P, plus facile à résoudre que P, et sa résolution n'est pas nécessaire recourir à P.

La définition d'une fonction récursive ou d'une procédure récursive se compose de deux parties:

- Partie "ancre": Cette partie est effectuée lorsque la tâche est trop simple et peut être résolue directement, sans avoir à recourir à des sous-problèmes.
- Partie "récursive": Si le problème ne peut pas être résolu à l'aide de la partie "ancre", nous déterminons des sous-problèmes et appelle récursivement pour résoudre ces sous-problèmes. Quand on a la solution des sous-problèmes, on peut les combiner pour résoudre le problème initial. La partie récursive montre le caractère "inductif" de la solution.

1. Élevage de couples de lapins.

Le problème est posé comme suit: Les lapins ne meurent jamais. Deux mois après la naissance, chaque nouveau couple de lapins donnera naissance à un couple de bébés lapins (un mâle, une femelle). Une fois que le couple accouche, il donnent naissance à un nouveau couple de bébés chaque mois. Supposons qu'il y a un couple début janvier, combien de couples y aura-t-il au milieu du nième mois ?

Par exemple, n = 5, on voit:

- Au milieu du 1er mois: 1 couple (ab) (couple initial).
- Au milieu du 2ème mois: 1 couple (ab) (le couple initial n'accouche pas encore).
- Au milieu du 3ème mois: 2 couples (AB)(cd) (le couple initial donne naissance à 1 nouveau couple de bébés).
- Au milieu du 4ème mois: 3 couples (AB)(cd)(ef) (le couple initial continue d'accoucher).
- Au milieu du 5ème mois: 5 couples (AB)(CD)(ef)(gh)(ik) (les deux couples (AB) et (CD) accouchent ensemble).

Calculer le nombre de couples de lapins au cours du mois n.

1.1. Proposez un algorithme récursif pour résoudre le problème. Vous détaillerez les notations à utiliser, la solution pour la partie “ancre”, et les étapes à construire la formule pour la partie “récursive”.

1.2. Écrivez l’algorithme en 1.1.

2. Transformation magique de nombres

Étant donné un entier strictement positif X et deux opérations suivantes:

- * 2: Multiplication par 2.
- / 3: Division par 3.

Le problème posé est de trouver une solution pour transformer 1 en X.

Par exemple, si X = 10, une solution possible est la suivante:

1 * 2 * 2 * 2 * 2 / 3 * 2 = 10

Le programme doit afficher la chaîne de caractères “1 * 2 * 2 * 2 * 2 / 3 * 2 = 10”. X est donné à partir du clavier.

2.1. Proposez un algorithm récursif pour trouver la transformation pour un X donné. Vous détaillerez les notations à utiliser, la solution pour la partie “ancre”, et les étapes à construire la formule pour la partie “récursive”.

2.2. Écrivez l’algorithme en 2.1.

3. Tour de Hanoï

C'est un problème de type jeu, on dit qu'au temple de Bénarès il y avait trois piquets de diamant. Quand le monde est né, Dieu a placé n plaques d'or les unes sur les autres par ordre décroissant de diamètre de bas en haut, le plus grand disque étant placé sur un piquet.

Les moines déplacent les disques vers un autre piquet selon les règles :

- Lors du déplacement d'un disque, il doit être placé dans l'un des trois piquets.
- Un seul disque peut être déplacé à la fois et doit être le disque en dessus.
- Le disque déplacé doit être placé sur le dessus.
- Un disque ne doit jamais être placé sur un disque plus petit.

La fin du monde viendra lorsque toute la pile de disques sera déplacée vers un autre piquet.

Dans le cas où il y a 2 disques, la solution est simple: Déplacez le petit disque vers le piquet 3, le grand disque vers le piquet 2, puis déplacez le petit disque du piquet 3 vers le piquet 2.

3.1. Proposez un algorithme récursif pour résoudre le problème. Vous détaillerez les notations à utiliser, la solution pour la partie “ancre”, et les étapes à construire la formule pour la partie “récursive”.

3.2. Écrivez l'algorithme en 3.1.

3.2. Combien de déplacements faudra-t-il pour résoudre le problème avec n disques ?

4. Le plus grand commun diviseur

Le plus grand commun diviseur ou PGCD de deux nombres entiers non nuls est le plus grand entier qui les divise tous les deux. Par exemple, le PGCD de 35 et de 45 est 5, puisque leurs diviseurs communs sont 1 et 5.

4.1. Proposez un algorithm récursif pour calculer le PGCD de deux nombres entiers donnés. Vous détaillerez les notations à utiliser, la solution pour la partie "ancre", et les étapes à construire la formule pour la partie "récursive".

4.2. Écrivez l'algorithme en 4.1.

5. Thomas et les amis

Thomas a 11 amis. Il veut inviter 5 personnes du groupe de venir chez lui pour fêter son anniversaire. Parmi ses 11 amis, il y a 2 personnes qui ne s'entendent pas et ne veulent pas se voir. Thomas veut savoir combient de façons différentes pour inviter ses amis afin que la fête soit parfaite.

5.1. Proposez des algorithmes récursifs pour aider Thomas à résoudre son problème. On s'intéresse à une situation plus générale où il a n amis et m personnes parmi ces amis ne s'entendent pas. Proposer au moins 2 solutions. Vous détaillerez les notations à utiliser, la solution pour la partie "ancre", et les étapes à construire la formule pour la partie "récursive".

5.2. Écrivez les algorithmes en 5.1.

6. Sous-séquences

Étant donné une séquence d'entiers A = a[1..n] ($n \leq 5\,000$, $-10000 \leq a[i] \leq 10000$). Une sous-séquence de A est une séquence contenant un certain nombre d'éléments de A qui conservent leur ordre. Trouvez la sous-séquence monotone (croissante) de A la plus longue.

Par exemple, si A = (1, 2, 3, 4, 9, 10, 5, 6, 7), la sous-séquence monotone (croissante) la plus longue est (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

6.1. Proposez un algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème. Vous détaillerez les étapes à construire la formule récursive.

7. Proposer un algorithme de programmation dynamique pour résoudre chaque exercice 1 et 5.