Fonctions de deux variables

Matthieu Guilhot

24 novembre 2021

Table des matières

Introduction **1**

1 Représentation des fonctions de deux variables **2**
- 1.1 Champs scalaires . . . 2
- 1.2 Champ vectoriel . . . 2

2 Différentiation **3**
- 2.1 Dérivées partielles . . . 3
- 2.2 Différentielle d'un champ scalaire . . . 4
- 2.3 Gradient d'un champ scalaire . . . 7
- 2.4 Interprétation géométrique . . . 10
- 2.5 Gradient d'un champ vectoriel . . . 11
- 2.6 Divergence et rotationnel . . . 12

3 Différentiation à l'ordre 2. Extrema d'un champ scalaire **12**
- 3.1 Dérivées partielles d'ordre 2 . . . 12
- 3.2 Laplacien . . . 13
- 3.3 Extrema d'un champ scalaire . . . 13

4 Théorèmes de composition **14**

5 Travaux dirigés **14**

Introduction

Comme son nom l'indique, une fonction de plusieurs variables est une fonction qui à plusieurs valeurs x, y, $z \cdots$ associe une grandeur qui en dépend. Cette grandeur peut être de nature scalaire (un nombre) ou vectorielle (un vecteur).

Une fonction de plusieurs variables à valeurs réelles est appelé un champ scalaire. La température est une champ scalaire : à tout point $M(x,y,z)$, on associe la température $T(M) = T(x,y,z)$ qui dépend de la position de M. La pression et l'altitude sont d'autre exemples de champs scalaires.

Une fonction de plusieurs variables à valeurs vectorielles est appelé un champ vectoriel (ou champ de vecteur). Le déplacement d'un fluide (le vent, le courant d'une rivière) est un exemple de champ de vecteur. Le champ gravitationnel ou électromagnétique sont encore des exemples de champs vectoriels. Se donner un champ vectoriel, c'est en tout point M d'un domaine inclus dans le plan ou de l'espace, associer un vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ indiquant une direction, un sens et une norme, donnant par exemple la direction et le sens du déplacement d'une particule et la vitesse de ce déplacement.

Dans cette leçon, comme le titre nous l'indique, nous étudions le cas des fonctions de deux variables.

Le domaine Ω sera donc un sous-ensemble du plan.

1 Représentation des fonctions de deux variables

1.1 Champs scalaires

Définition 1 (Champ scalaire). Un champ scalaire f est une fonction de 2 variables définie sur Ω à valeurs réelles.

Définition 2 (Représentation d'un champ scalaire par sa surface.). Soit f un champ scalaire à deux variables. La surface représentative du champ f est l'ensemble des points de l'espace noté Σ_f, définie par :

$$\Sigma_f = \{(x,y,z) \ ; \ z = f(x,y)\}$$

Représenter le champ scalaire f par sa surface consiste à effectuer un dessin en perspective.

Définition 3 (Représentation d'un champ scalaire par ses lignes de niveau). Soit f un champ scalaire à deux variables et α un réel. La ligne de niveau de paramètre α est la courbe des points du plan M tel que $f(M) = \alpha$. On note C_α cette courbe. On a :

$$C_\alpha = \{(x,y) \ ; \ f(x,y) = \alpha\}$$

Représenter le champ scalaire par ses lignes de niveau f consiste effectuer un dessin en traçant dans le plan plusieurs lignes de niveau de manière significative.

Exemple 1. On considère le champ scalaire f défini sur le domaine $\Omega = [0;1] \times [0;1]$ par $f(x) = xy(1-x)(1-y)$. Voici sa surface représentative (à gauche) et ses lignes de niveau (à droite) :

1.2 Champ vectoriel

Définition 4 (Champ vectoriel). Un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ en dimension 2 est une fonction de 2 variables définie sur un domaine Ω qui à tout point $M(x,y)$ associe un vecteur $\overrightarrow{V}(M)$. On note V_1 et V_2 les composantes de $\overrightarrow{V}$. Pour un point $M(x,y)$, on a ainsi :

$$\overrightarrow{V}(M) = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ V_2(x,y) \end{pmatrix}$$

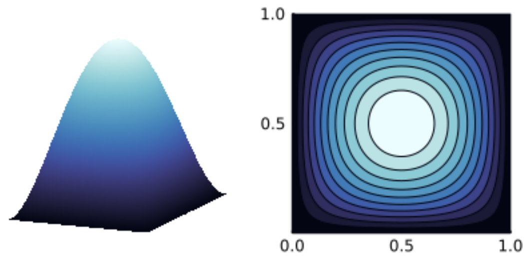


FIGURE 1 – Représentation d'un champ scalaire

Remarque 1. Pour des questions de place, souvent, on écrit en ligne le vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ au lieu de l'écrire en colonne, ce qui donne :$\overrightarrow{V}(M) = (V_1(x, y), V_2(x, y)$

Définition 5 (Représentation d'un champ vectoriel). On représente un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ en représentant les vecteurs $\overrightarrow{V}(M)$ pour des points M choisis de manière significative, sachant que chaque vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ prend son origine en M

Définition 6 (Lignes de champ). Les lignes de champ du champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ sont les courbes γ telles qu'en tout point $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ d'une de ces courbes, le vecteur tangent à γ en $\gamma(t)$ est donné par $\overrightarrow{V}(\gamma(t))$. On a ainsi :

$$\overrightarrow{\gamma'(t)} = \overrightarrow{V}(\gamma(t))$$

Ce qui se traduit par le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) & = V_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) & = V_2(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Représenter les lignes de champ d'un champ de vecteur offre une bonne la visualisation et une bonne compréhension du champ en question.

Exemple 2. On considère le champ $\overrightarrow{V}$ défini par : $\overrightarrow{V}(M) = (\frac{-y}{2\pi}, \frac{x}{2\pi})$. La ligne de champ passant par le point $(R, 0)$ en $t = 0$ est donnée par la solution de :

$$\begin{cases} x'(t) & = -\frac{y(t)}{2\pi} \\ y'(t) & = \frac{x(t)}{2\pi} \end{cases}$$

Avec : $(x(0); y(0) = (R; 0)$. On démontre sans difficulté que :

$$\begin{cases} x(t) & = R\cos\left(\frac{t}{2\pi}\right) \\ y(t) & = R\sin\left(\frac{t}{2\pi}\right) \end{cases}$$

Les lignes de champs sont donc des cercles centrés en l'origine. Voici sa représentation :

2 Différentiation

2.1 Dérivées partielles

Définition 7 (Dérivée directionnelle selon le vecteur $\overrightarrow{v}$.). Soit f un champ scalaire, M un point et $\overrightarrow{v}$ un vecteur. La dérivée directionnelle de f en M selon vecteur $\overrightarrow{v}$ est notée :

$$\frac{\partial f(M)}{\partial v}$$

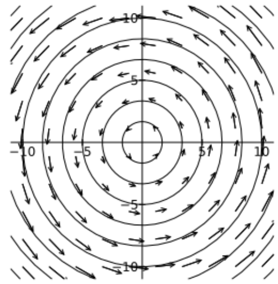


FIGURE 2 – Représentation d'un champ vectoriel et de ses lignes de champ

Elle est définie par :

$$\frac{\partial f(M)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(M + t\overrightarrow{v}) - f(M)}{t}$$

Définition 8 (Dérivées partielles d'un champ scalaire.). Soit f un champ scalaire de 2 variables. Les dérivées partielles de f par rapport aux variables x et y sont les dérivées directionnelles selon les vecteurs de la base canonique $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. On les note :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}$$

Précisément, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Remarque 2. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée de f lorsque x varie alors que y est fixé et inversement la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est la dérivée de f lorsque y varie alors que x est fixé. Aussi, dans la pratique, on ne calcule pas les dérivées partielles en utilisant la définition précédente, mais en dérivant comme lorsqu'on dérive une fonction d'une seule variable.

Définition 9. Le champ scalaire est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsqu'il possède des dérivées partielles continues.

2.2 Différentielle d'un champ scalaire

2.2.1 Point de départ au calcul différentiel

Définition 10 (Formes linéaires). Une forme linéaire φ en dimension 2 est une application linéaire définie sur l'espace des vecteurs à 2 composantes à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tous scalaires λ et μ la propriété de linéarité :

$$\varphi(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{u}) + \mu\varphi(\overrightarrow{v})$$

Soit φ une forme linéaire en dimension 2. Notons $a_1 = \varphi(\overrightarrow{i})$ et $a_2 = \varphi(\overrightarrow{j})$. Alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\overrightarrow{u}) &= \varphi(u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j}) \\
&= u_1\varphi(\overrightarrow{i}) + u_2\varphi(\overrightarrow{j}) \\
&= u_1 a_1 + u_2 a_2 \\
&= \langle \overrightarrow{a} . \overrightarrow{u} \rangle
\end{aligned}$$

On note plus simplement ce dernier produit scalaire en adoptant la notation : $\langle \overrightarrow{a}.\overrightarrow{u} \rangle = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{u}$. De plus, le vecteur $\overrightarrow{a}$ que l'on vient de définir est unique. En effet, si la forme linéaire φ est telle que pour tout $\overrightarrow{u}$ on ait : $\varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}.\overrightarrow{u}$, alors pour tout $\overrightarrow{u}$, on a : $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{b}.\overrightarrow{u} = 0$, soit pour tout $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}.\overrightarrow{u} = 0$, en particulier : $\langle \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \rangle = 0$, signifiant que : $\| \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \|^2 = 0$, puis que : $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 0$, soit : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} = 0$.

On peut donc énoncer :

Théorème 1 (Théorème de dualité). Pour toute forme linéaire, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{a}$ telle que :

$$\overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{a}.\overrightarrow{u}$$

Précisément, les composantes de $\overrightarrow{a}$ sont données par les images par φ des vecteurs de la base canonique.

Remarque 3. C'est pour cette raison qu'on notera souvent pour une forme linéaire $\varphi(\overrightarrow{u}) = \langle \varphi.\overrightarrow{u} \rangle$ ou plus simplement : $\varphi(\overrightarrow{u}) = \varphi.\overrightarrow{u}$

Définition 11 (Base duale). On définit les deux formes linéaires de base notées dx et dy en posant :

$$dx.\overrightarrow{u} = u_1 \text{ et } dy.\overrightarrow{u} = u_2$$

Théorème 2. Soit φ une forme linéaire en dimension 2 et $\overrightarrow{a}$ l'unique vecteur tel que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on ait $\varphi.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{u}$. On a alors :

$$\varphi = a_1 dx + a_2 dy$$

Définition 12 (Variation d'un champ). Soit f un champ scalaire. La variation de ce champ entre deux points M et N est donnée par la différence :

$$f(N) - f(M)$$

La variation de position entre le point M et le point N est dite infinitésimale lorsqu'elle tend vers 0. Notons dans ce cas, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{h}$, le point N est alors donné par $N = M + \overrightarrow{h}$. La variation du champ $f(N) - f(M)$ est alors dite locale et se note :

$$\delta f(M)$$

Entre les deux points M et N, la variation locale du champ s'écrit alors lorsque $\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0}$:

$$\delta f(M) = f(M + \overrightarrow{h}) - f(M)$$

Le but principal et ultime du calcul différentiel est de remplacer δf par un opérateur linéaire équivalent : la différentielle de f en M.

Définition 13 (Différentielle de f en M). Le champ scalaire f est différentiable en M s'il existe une forme linéaire notée $df(M)$, appelée différentielle de f en M et vérifiant :

$$\lim_{\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0}} \frac{1}{\| \overrightarrow{h} \|} \left(f(M + \overrightarrow{h}) - f(M) - df(M).\overrightarrow{h} \right) = 0$$

Posons :

$$\varepsilon(\overrightarrow{h}) = \frac{1}{\| \overrightarrow{h} \|} \left(f(M + \overrightarrow{h}) - f(M) - df(M).\overrightarrow{h} \right)$$

Alors f est différentiable si et seulement si il existe une forme linéaire notée $df(M)$ telle que :

$$f(M + \overrightarrow{h}) - f(M) = df(M).\overrightarrow{h} + \| \overrightarrow{h} \| \varepsilon(\overrightarrow{h})$$

Avec :

$$\lim_{\overrightarrow{h}\to\overrightarrow{0}} \varepsilon(\overrightarrow{h}) = 0$$

Le terme $||\overrightarrow{h}||\varepsilon(\overrightarrow{h})$ sera remplacer par l'expression :

$$o(\overrightarrow{h})$$

Ce terme est négligeable lorsque $\overrightarrow{h}$ tend vers $\overrightarrow{0}$. En le supprimant, on obtient :

$$f(M+\overrightarrow{h}) - f(M) \simeq df(M).\overrightarrow{h}$$

Définition 14 (Linéarisation de la variation locale). Remplacer $\delta f(M)$ par $df(M).\overrightarrow{h}$ consiste à linéariser $\delta f(M)$. On obtient alors deux façon de calculer la variation locale :

- en utilisant la variation locale vraie $\delta f(M)$
- en utilisant la différentielle appliquée en $\overrightarrow{h}$, c'est à dire $df(M).\overrightarrow{h}$, désignée comme étant la variation locale estimée

Questions : comment sait-on qu'un champ scalaire est différentiable ? Et dans ce cas, comment s'écrit simplement $df(M)$ à partir de f ?. La réponse est donnée dans le paragraphe suivant...

2.2.2 Différentielle et différentielle totale

Théorème 3. Soit f un champ scalaire. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Alors f est différentiable en tout point M et pour tout $\overrightarrow{h}$, on a :

$$df(M).\overrightarrow{h} = \frac{\partial f(M)}{\partial x}.h_1 + \frac{\partial f(M)}{\partial y}.h_2$$

Ce théorème nous invite à définir la différentielle totale d'un champ scalaire f de classe $\mathcal{C}^1$.

en M est donnée par l'écriture de sa différentielle $df(M)$, exprimée à partir des formes linéaires de base (dans le système de coordonnées dans lequel on se place). Nous avons donc la définition suivante :

Définition 15 (Différentielle totale d'un champ scalaire). Soit f un champ scalaire. La différentielle totale de f en M est la forme différentielle définie par :

$$df(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(M)}{\partial y}dy$$

On a retrouve alors :

$$\begin{aligned} df(M).\overrightarrow{h} &= \frac{\partial f(M)}{\partial x}dx.\overrightarrow{h} + \frac{\partial f(M)}{\partial y}dx.\overrightarrow{h} \\ &= \frac{\partial f(M)}{\partial x}.h_1 + \frac{\partial f(M)}{\partial y}.h_2 \end{aligned}$$

Définition 16 (Développement limité de f au voisinage de M à l'ordre 1). La différentielle exprimée à l'aide de se qui précède permet d'écrire le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de M :

$$f(M+\overrightarrow{h}) - f(M) = df(M).\overrightarrow{h} + \|\overrightarrow{h}\|\varepsilon(\overrightarrow{h})$$

Par troncature, la variation vraie $\delta f(M)$ au voisinage de M est équivalente à la variation estimée $df(M).\overrightarrow{h}$:

$$f(M+\overrightarrow{h}) - f(M) \simeq df(M).\overrightarrow{h}$$

Désormais, dans la suite, on supposera toujours que les champs sclaires considéré sont de classe $\mathcal{C}^1$.

2.3 Gradient d'un champ scalaire

2.3.1 Gradient d'un champ scalaire dans le cas général

Le gradient d'un champ scalaire peut être défini dans un cadre très général relativement à un système de coordonnées quelconque. Le gradient d'un champ scalaire f est noté :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

Le gradient s'exprime également en utilisant l'opérateur "nabla" noté ∇. On retient que :

$$\nabla f = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

Pour souligner le caractère vectoriel, on rencontre également la notation :

$$\vec{\nabla} f$$

Dans la suite, nous adopterons la notation ∇.

Supposons que l'on dispose d'un système de coordonnées défini de manière général par :

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$$

Il faut comprendre que les coordonnées du point M qui sont $(x;y)$ sont données par deux fonctions prenant le même nom, définies par deux paramètres notées u et v (on peut penser par exemple aux coordonnées polaires). La position du point M est ainsi donnée par des coordonnées dites curvilignes. A partir de là, on obtient alors l'expression du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = x(u,v)\overrightarrow{e_u} + y(u,v)\overrightarrow{e_v}$$

A ce vecteur position fonction des coordonnées curvilignes, on associe l'élément différentiel :

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} du + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} dv$$

Muni des ces éléments, le gradient de f est défini alors de manière très général par la formulation implicite suivant la définition ci-dessous.

Définition 17 (Gradient dans le cas général). Soit f un champ scalaire. Le gradient de f dans le système de coordonnées curviligne $(x(u;v);y(u;v))$ est le vecteur noté :

$$\nabla f$$

tel que :

$$df = \nabla f . d\overrightarrow{OM}$$

Sachant que :

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

2.3.2 Gradient d'un champ scalaire en coordonnées cartésienne

Définition 18 (Gradient d'un champ scalaire). Le gradient d'un champ scalaire exprimé en coordonnées cartésiennes au point M, noté $\nabla f(M)$, est donné par :

$$\nabla f(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(M)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(M)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Remarque 4. Le gradient d'un champ scalaire est par nature un champ vectoriel. De plus, pour alléger les écritures, on notera souvent :

$$\nabla f(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Définition 19 (Opérateur Nabla). L'opérateur Nabla en coordonnées cartésiennes s'écrit alors :

$$\nabla = \overrightarrow{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$$

Théorème 4 (Lien avec la dérivée directionnelle). Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, la dérivée directionnelle s'exprime à l'aide du produit scalaire suivant :

$$\frac{\partial f(M)}{\partial v} = \langle \overrightarrow{\nabla} f(M).\overrightarrow{v} \rangle$$

2.3.3 Gradient en coordonnées polaires

Définition 20 (Coordonnées polaires). Les coordonnées polaires locales dans le plan pour un point $M(x;y)$ données à l'aide de ses coordonnées cartésiennes sont définies par les relations :

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \end{cases}$$

Avec :

$$(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$$

Le vecteur associé $\overrightarrow{OM}$ exprimé dans la base canonique s'en déduit directement :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Définition 21 (Repère local). Le repère local en coordonnées polaires est donnée par les vecteurs locaux obtenus en divisant les vecteurs dérivées pat leurs normes.

- Vecteurs dérivés associé aux coordonnées polaires sont :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho\sin(\varphi) \\ \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

- Normes des vecteurs dérivées :

$$N_\rho = \|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\rho}\| = 1\,;\ N_\varphi = \|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\varphi}\|\rho$$

- Vecteurs locaux en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{e_\rho} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{e_\varphi} = \begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

Proposition 1 (Equivalence entre les coordonnées cartésiennes et polaires). Les formules suivantes permettent de passer d'une écriture en coordonnées cartésiennes à une écriture en coordonnées polaires pour un vecteur ou pour un point :

- Vecteurs locaux en fonction des vecteurs de la base canonique :

$$\begin{cases}\overrightarrow{e_\rho} & = \cos(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \sin(\varphi)\overrightarrow{e_y}\\ \overrightarrow{e_\varphi} & = -\sin(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \cos(\varphi)\overrightarrow{e_y}\end{cases}$$

- Vecteurs de la base canoniques en fonction des vecteurs locaux :

$$\begin{cases}\overrightarrow{e_x} & = \cos(\varphi)\overrightarrow{e_\rho} - \sin(\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}\\ \overrightarrow{e_y} & = \sin(\varphi)\overrightarrow{e_\rho} + \cos(\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}\end{cases}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$$

- Les coordonnées cartésienne en fonction des coordonnées polaires :

$$\begin{cases}x & = \rho\cos(\varphi)\\ y & = \rho\sin(\varphi)\end{cases}$$

- Les coordonnées polaires en fonction des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases}\rho & = \sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi & = 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{cases}$$

Proposition 2 (Orthogonalité). On a :

$$e_\rho \perp e_\varphi$$

Proposition 3 (Dérivation des vecteurs locaux en coordonnées polaires). On a :

$$\frac{\partial\overrightarrow{e_\rho}}{\partial\rho} = \overrightarrow{0}\,;\ \frac{\partial\overrightarrow{e_\rho}}{\partial\varphi} = \overrightarrow{e_\varphi}\,;\ \frac{\partial\overrightarrow{e_\varphi}}{\partial\rho} = \overrightarrow{0}\,;\ \frac{\partial\overrightarrow{e_\varphi}}{\partial\varphi} = -\overrightarrow{e_\rho}$$

Théorème 5 (Gradient en coordonnées polaires).

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

Définition 22 (Opérateur Nabla). L'opérateur Nabla en coordonnées polaires s'écrit alors :

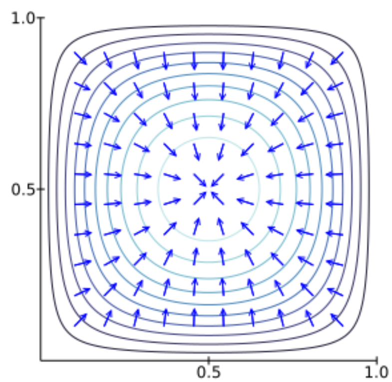
$$\nabla = \overrightarrow{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \overrightarrow{e_\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

2.4 Interprétation géométrique

2.4.1 Gradient et lignes de niveau

Soit f un champ scalaire et $\mathcal{C}_\alpha$ la ligne de niveau $f(x;y)=\alpha$. Soit $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ un paramétrage de cette ligne de niveau et g la fonction réelle définie par $g(t)=f(\gamma(t))-\alpha$. Clairement, $g(t)=0$ pour tout t, donc $g'(t)=0$ également. Or, par dérivation de fonction composée, on a : $g'(t)=\nabla f(\gamma(t)).\overrightarrow{\gamma'}(t)$, donc $\nabla f(\gamma(t)).\overrightarrow{\gamma'}(t)=0$ et donc $\nabla f(\gamma(t))\perp\overrightarrow{\gamma'}(t)$. Le vecteur $\overrightarrow{\gamma'}(t)$ dirigeant la tangente à la courbe de niveau, on peut donc énoncer :

Théorème 6. En tout point $M(x,y)$ de l'un ligne de niveau d'un champ scalaire f, la normale à la ligne de niveau est dirigée par $\nabla f(M)$



2.4.2 Gradient et plus forte pente

La dérivée directionnelle selon le vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit :

$$\frac{\partial f(M)}{\partial v}=\langle\nabla f(M),v\rangle$$

On en déduit que le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de M s'écrit alors :

$$\begin{aligned}f(M+t\overrightarrow{v})&=f(M)+\langle\nabla f(M),t\overrightarrow{v}\rangle+t\varepsilon(t)\\&=f(M)+t\langle\nabla f(M),\overrightarrow{v}\rangle+t\varepsilon(t)\\&=f(M)+t\frac{\partial f(M)}{\partial v}+t\varepsilon(t)\end{aligned}$$

avec : $\lim_{t\to0}\varepsilon(t)=0$

Définition 23 (Direction de descente). De manière générale, on dira que $\overrightarrow{d}$ est une direction de descente si il existe $\eta>0$ tel que : $f(M+t_2\overrightarrow{d})\leq f(M+t_1\overrightarrow{d})\leq f(M)$ pour tous $(t_1,t_2)\in]0,\eta]^2$ avec $t_1<t_2$, signifiant que la fonction $t\mapsto f(M+t\overrightarrow{d})$ est décroissante lorsque t varie dans l'intervalle $[0,\eta]$, pour des valeurs donc de t proche de 0. On a :

$$f(M+t\overrightarrow{d})=f(x)+t\langle\nabla f(M),d\rangle+\varepsilon(t)$$

Ainsi, lorsque t est positif, petit et tend vers 0, on obtient :

- Lorsque $\langle \nabla f(M), d\rangle > 0$, alors $f(M + t\overrightarrow{d}) > f(M)$
- Lorsque $\langle \nabla f(M), d\rangle < 0$, alors $f(M + t\overrightarrow{d}) < f(M)$

Autrement dit :

- Si $\langle \nabla f(M), \overrightarrow{d}\rangle > 0$, alors f est croissante dans la direction de $\overrightarrow{d}$
- Inversement, si $\langle \nabla f(M), \overrightarrow{d}\rangle < 0$, alors f est décroissante dans la direction de $\overrightarrow{d}$. Dans ce cas, on dira que $\overrightarrow{d}$ est une direction de descente de f.

On a reteindra, pour résumer, que : $\overrightarrow{d}$ est une direction de descente si et seulement si $\langle \nabla f(x), \overrightarrow{d}\rangle < 0$.

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, essentielle pour la suite. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

$$|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

L'égalité étant réalisée si et seulement si x et y sont colinéaires.

Théorème 7 (Direction de plus forte descente). Soit $\overrightarrow{d}$ un vecteur tel que $\|\overrightarrow{d}\| = \|\nabla f(M)\|$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$-\|\nabla f(M)\|^2 \leq \langle \nabla f(M), \overrightarrow{d}\rangle \leq \|\nabla f(M)\|^2$$

En utilisant à nouveau $f(x + t\overrightarrow{d}) = f(x) + t\langle \nabla f(x), \overrightarrow{d}\rangle + \varepsilon(t)$, toujours avec $t > 0$, pour toutes les directions données par les vecteurs de norme fixée égale à $\|\nabla f(x)\|$, la direction du gradient, dans son sens donne l'accroissement le plus fort, et à contre sens donne la direction de descente la plus forte sur un voisinage de M.

2.5 Gradient d'un champ vectoriel

2.5.1 Gradient d'un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ vectoriel en dimension 2. Le gradient de $\overrightarrow{V}$ est noté :

$$\overline{\overline{\nabla}}\overrightarrow{V}$$

On a par définition :

$$\overline{\overline{\nabla}}\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_1}{\partial x} & \dfrac{\partial V_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x} & \dfrac{\partial V_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Théorème 8. On a :

$$\overrightarrow{V}(M + \overrightarrow{h}) = \overrightarrow{V}(M) + \overline{\overline{\nabla}}\overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{h} + o(||\overrightarrow{h}||)$$

2.5.2 Gradient d'un champ vectoriel en coordonnées polaires

$$\overline{\overline{\nabla}}\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_\rho}{\partial \rho} & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} - \dfrac{V_\varphi}{\rho} \\ \dfrac{\partial V_\varphi}{\partial \rho} & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{V_\rho}{\rho} \end{pmatrix}$$

2.6 Divergence et rotationnel

Définition 24. Soit $\overrightarrow{V}$ un champ vectoriel. La divergence de $\overrightarrow{V}$ est notée $\mathrm{div}(\overrightarrow{V})$ et elle est définie par le produit scalaire suivant :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) = \langle \overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{V} \rangle$$

- En coordonnées cartésiennes, la divergence d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ est donnée par :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

- En coordonnées polaires, la divergence d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ est donnée par :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

Définition 25. Soit $\overrightarrow{V}$ un champ vectoriel. Le rotationnel de $\overrightarrow{V}$ est noté $\mathrm{rot}(\overrightarrow{V})$ et elle est définie par le déterminant suivant :

$$\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = \det\left(\overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{V}\right)$$

- En coordonnées cartésiennes, le rotationnel d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ est donné par :

$$\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}$$

- En coordonnées polaires, le rotationnel d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ est donné par :

$$\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}$$

3 Différentiation à l'ordre 2. Extrema d'un champ scalaire

3.1 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 26. Soit f un champ scalaire. On suppose que les dérivées partielles de f sont dérivables. Alors f admet 4 dérivées partielles à l'ordre 2 définies par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) ; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) ; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Définition 27. On dit qu'un champ scalaire est de classe $\mathcal{C}^2$ lorsque les dérivées partielles à l'ordre 2 sont continues.

Théorème 9 (Schwarz). Soit f un champ scalaire est de classe $\mathcal{C}^2$. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Dans la suite, on supposera, sauf mention du contraire, que le champ f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Définition 28. On assemble les 4 dérivées partielles d'ordre 2 dans un tableau noté $H(f)$, appelé matrice Hessienne de f, comme suit :

$$Hess(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

En conséquence du théorème de Schwarz, cette matrice est symétrique.

Définition 29. Le Laplacien en coordonnées cartésiennes de f, noté Δf, est la trace de la matrice Hessienne, c'est à dire la somme de ses éléments diagonaux. On a donc :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

3.2 Laplacien

Définition 30. Soit f un champ scalaire. Le Laplacien de f, notée Δf s'obtient en effectuant la divergence de $\overrightarrow{\nabla}$. On a ainsi :

$$\Delta f = \overrightarrow{\nabla}.(\overrightarrow{\nabla} f)$$

3.2.1 Laplacien en coordonnées cartésiennes

Définition 31. En coordonnées cartésienne, le laplacien d'un champ scalaire f est donné par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

3.2.2 Laplacien en coordonnées polaires

Définition 32. En coordonnées polaire, le laplacien d'un champ scalaire f est donné par :

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(r\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

3.3 Extrema d'un champ scalaire

Dans la suite, f est un champ scalaire défini sur un domaine Ω ouvert.

Définition 33 (Extrema d'un champ scalaire). - f réalise un minimum (respectivement maximum) local en A s'il existe une boule $\mathcal{B}(A;r)$ centrée en A de rayon r incluse dans Ω et telle que $f(A) \leq f(M)$ (respectivement $f(A) \geq f(M)$) pour tout $M \in \mathcal{B}(A;r)$

- f réalise un minimum (respectivement maximum) global en A si $f(A) \leq f(M)$ (respectivement $f(A) \geq f(M)$) pour tout $M \in \omega$
- un extremum est un minimum ou un maximum

Définition 34 (Point critique d'un champ scalaire). Un point critique pour le champ f est un point A tel que $\nabla f(A) = \overrightarrow{0}$.

Théorème 10. Si f réalise un extremum local en A, alors ce point A est un point critique.

Remarque 5. La réciproque du théorème précédent est fausse. Ce théorème donne une condition nécessaire pour que f réalise un extremum, mais non suffisante.

Définition 35 (Notation de Monge). Les notation de Monge associées au dérivées partielles en un point A sont :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}; q = \frac{\partial f}{\partial x}; r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

On a $\det(Hess(f) = rt - s^2$ et $\Delta f = r + t$

Théorème 11. Le champ f admet un point critique en A lorsque $p = q = 0$. Dans ce cas :
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f ne réalise pas d'extremum en A
- Si $rt - s^2 > 0$, et si $r > 0$ alors f réalise un maximum en A
- Si $rt - s^2 > 0$, et si $r < 0$ alors f réalise un minimum en A
- Si $rt - s^2 = 0$, le cas est douteux et on ne peut pas conclure a priori

4 Théorèmes de composition

Théorème 12 (Linéarité). Les opérateurs ∇, div, rot et Δ sont des opérateurs linéaires.

Théorème 13 (Schwarz). L'égalité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ permet d'énoncer :

i) $\mathrm{rot}\,(\nabla f) = \overrightarrow{0}$

ii) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{V}) = 0$

Définition 36 (Potentiel scalaire). Un champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire f tel que $\overrightarrow{V} = \nabla f$.

Définition 37 (Domaine étoilé). Un domaine Ω est étoilé si dans ce domaine, il existe un point A, appelé centre, tel que pour tout point $M \in \Omega$, on a $[AM] \subset \Omega$.

Théorème 14 (Poincaré). Sur un ouvert étoilé, un champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f s'il et seulement si $\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{0}$.

5 Travaux dirigés

Exercice 1. Soient f et g les deux champs scalaires définis par : $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $g(x, y) = x^2 - y^2$. Représenter les deux champs scalaires f et g à l'aide de leurs surfaces représentatives, puis à l'aide de leurs lignes de niveau. Préciser la normale aux lignes de niveau.

Exercice 2. Dans chaque cas, déterminer les lignes de champ du champ $\overrightarrow{V}$ et dessiner une représentation.

1. $\overrightarrow{V}(x, y) = (x; 2y)$
2. $\overrightarrow{V}(x, y) = (x, -2y)$
3. $\overrightarrow{V}(x, y) = (x + y, 2y)$
4. $\overrightarrow{V}(x, y) = (x + y, -2y)$
5. $\overrightarrow{V}(x, y) = (x + y, y)$
6. $\overrightarrow{V}(x, y) = (y, x)$
7. $\overrightarrow{V}(x, y) = (x - y, x + y)$
8. $\overrightarrow{V}(x, y) = (-y, x)$
9. $\overrightarrow{V}(x, y) = (ax, ay)$

Exercice 3. Soit f le champ scalaire défini par : $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$.

i) Calculer ∇f en coordonnées cartésiennes puis en coordonnées polaires.

ii) Dans le même repère, représenter les lignes de niveaux de f et le champ vectoriel ∇f.

iii) Vérifier que ∇f est bien normal aux lignes de niveaux.

iv) Notons : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Remarquer que : $f(M) = ||\overrightarrow{OM}||$ puis prouver que $\forall t > 0$, on a : $f(M) \leq f(M + t\nabla f)$

v) On introduit alors :

$$\overrightarrow{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

Prouver que $\forall \overrightarrow{v}$ unitaire : $\dfrac{\partial f}{\partial v} \leq \dfrac{\partial f}{\partial n}$

vi) Soit $\overrightarrow{v}$ unitaire. On définit alors l'accroissement de f à partir de M selon $\overrightarrow{v}$ par :

$$g_v(h) = |f(M + h\overrightarrow{v}) - f(M)|$$

Prouver que $\forall \overrightarrow{v}$ unitaire :

$$g_v(h) \leq g_n(h)$$

vii) Conclure.

Exercice 4. Soit f le champ scalaire défini par : $f(x, y) = x^2 - y^2$. On note Σ_f sa surface représentative.

i) Calculer ∇f en coordonnées cartésiennes.

ii) Représenter Σ_f.

iii) Dans le même repère, représenter les lignes de niveaux de f et le champ vectoriel ∇f.

iv) Soit B une petite bille placée sur Σ_f au point de départ $P_0\left(10; -\frac{1}{2}; f(10, -\frac{1}{2})\right)$. On lâche cette bille sans vitesse initiale. Déterminer la trajectoire de cette bille.

Exercice 5. Pour chaque champ scalaire f :

1. f est $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
2. f est $f(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2)$

i) Calculer ∇f en coordonnées cartésiennes.

ii) Résoudre l'équation $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{0}$.

iii) Dans le même repère, représenter les lignes de niveaux de f et le champ vectoriel $\overrightarrow{\nabla} f$.

Exercice 6. On considère les champs scalaires définis par :

1. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
2. $f(x, y) = -(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$

Dans chaque cas :

i) Calculer ∇f en coordonnées cartésiennes puis polaires.

ii) Résoudre l'équation $\nabla f = \overrightarrow{0}$

Exercice 7. Soit α un réel non nul. On considère les champs vectoriels définis par :

1. $\overrightarrow{V}(x, y) = (\dfrac{\alpha x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{\alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$
2. $\overrightarrow{V}(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$
3. $\overrightarrow{V}(x, y) = (-\omega y, \omega x)$

Dans chaque cas : calculer le gradient, la divergence et le rotationnel en coordonnées cartésiennes puis en polaire.

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, étudier les extrema du champ scalaire f.

1. $x^2 y^2$
2. $x^2 + y^2 + xy + 1$
3. $xy(1 - x - y)$
4. $\sqrt{x^2 + y^2}$
5. $\sqrt{x^2 + y^2 - x^3}$
6. $\sqrt{x^3 - 3xy^2}$
7. $\sqrt{x^4 + y^4 - 4xy}$
8. $x \exp(y) + y \exp(x)$

Exercice 9. Soit f le champ scalaire défini par : $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$.

i) Calculer son laplacien en coordonnées cartésiennes puis en polaires.

ii) Résoudre $\Delta f = 0$

Exercice 10. Soit f le champ scalaire défini par : $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

i) Calculer son laplacien en coordonnées cartésiennes puis en polaires.

ii) Résoudre $\Delta f = 1$

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le champ vectoriel dérive d'un potentiel scalaire. Si tel est le cas, déterminer alors ce champ scalaire.

1. $\overrightarrow{V}(x,y) = (-y,x)$
2. $\overrightarrow{V}(x,y) = (y,x)$
3. $\overrightarrow{V}(x,y) = (x,y)$
4. $\overrightarrow{V} = (xy^2, x^2y)$
5. $\overrightarrow{V} = (x(x^2+y^2)^{-1/2}, y(x^2+y^2)^{-1/2})$
6. $\overrightarrow{V} = (x(x^2+y^2)^{-1}, y(x^2+y^2)^{-1})$