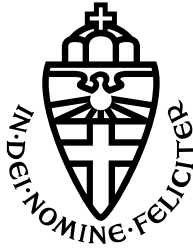


RADBOD UNIVERSITEIT NIJMEGEN



FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN, WISKUNDE EN INFORMATICA

Percolatie op een nieuw georiënteerd rooster

BACHELORSRIPTIE WISKUNDE

Auteur:
Matthijs NEUTELINGS

Begeleider:
Henk DON

Tweede lezer:
TBA TBA

Juni 2021

Inhoud

1	Introductie	2
1.1	Definities	3
2	Bewijs dat $p_c = \frac{1}{2}$	5
2.1	Lemma's die nodig zijn voor het bewijs dat $p_c = \frac{1}{2}$	6
2.2	Stellingen die nodig zijn voor het bewijs dat $p_c = \frac{1}{2}$	10
2.3	Bewijs dat $p_c = \frac{1}{2}$	12
3	Gerichte percolatie	14
3.1	Grenzen voor \vec{p}_c	16
4	numerieke benadering \vec{p}_c	20
4.1	Kritieke exponenten	21
4.2	Resultaten	22

1 Introductie

Percolatie vindt zijn oorsprong in een artikel van Simon Broadbent en John Hammersley uit 1957 [1]. Hierin beschouwden zij de verspreiding van een *vloeistof* door een *medium*. Hierbij kan vloeistof breed worden opgevat: Alles dat zich kan verspreiden kunnen we als vloeistof zien. Voorbeelden hiervan zijn

1. De verspreiding van water door een poreuze steen
2. De verspreiding van een brand door een bos
3. De verspreiding van het coronavirus tussen passagiers in een trein

Het medium bestaat uit verschillende knopen waarover de vloeistof zich kan verspreiden. In het Engels worden deze punten "sites" genoemd. Aangezien er geen algemeen geaccepteerde Nederlandse vertaling lijkt te zijn, zullen we ook hier de benaming "site" gebruiken. Bovenstaande voorbeelden kunnen de volgende sites bevatten:

1. De kruispunten tussen de poriën
2. De bomen in het bos
3. Treinreizigers in een wagon¹

Een aantal van deze sites zijn verbonden, en de vloeistof verspreidt zich tussen sites via deze verbindingen. Deze verbindingen geven aan dat de twee knopen op een bepaalde manier 'dichtbij' zijn. We noemen deze verbindingen "bonds". In de voorbeelden zijn er bonds tussen

1. Twee kruispunten die verbonden worden door een porie
2. Twee bomen die naast elkaar staan
3. Twee mensen die dicht bij elkaar in de trein zitten

Een manier om dit proces te modelleren is door de vloeistof een kans te geven om zich via een bond van de ene site naar de andere te verplaatsen. Dit model wordt diffusie genoemd. In het geval van het coronavirus kan deze kans gebruikt worden om het reproductiegetal te berekenen (hoeveel mensen gemiddeld besmet worden door één patiënt). Als de kans dat het virus bij een contactmoment overslaat 0.01 is, en de gemiddelde geïnfecteerde heeft contact met 80 mensen in de besmettelijke periode, dan is het reproductiegetal $0.01 * 80 = 0.8$.

Tot het artikel van Broadbent en Hammersley was diffusie de standaard manier om dit soort processen te modelleren. Voor een proces als de verspreiding van een virus is dit ook een voor de hand liggende methode. Het gedrag van een virus is onvoorspelbaar, en dus is het logisch om daar een kansverdeling voor te

¹Sites mogen niet bewegen, dus we nemen aan dat alle passagiers op hun plek blijven zitten

gebruiken. Bij de poreuze steen ligt dit anders. Daar wordt de verspreiding van het water bepaald door de breedte van de poriën. Het onvoorspelbare aspect van dit model hoort dus niet bij de *vloeistof*, maar bij het *medium*. Voor dit soort systemen introduceerden Broadbent en Hammersley het percolatiemodel. Hierbij heeft iedere bond in het medium een bepaalde kans om de vloeistof door te laten. De vloeistof beweegt zich vervolgens door het medium via alle open bonds.

Bij sommige systemen zijn er argumenten voor zowel een diffusiemodel als een percolatiemodel. Onderstaand voorbeeld uit het artikel van Broadbent en Hammersley [1] maakt duidelijk dat deze keuze van grote invloed zijn op de eigenschappen van het model.

Voorbeeld 1.1 (Pólya wandeling (diffusie)). We bekijken de lijn \mathbb{R} , en we laten een vloeistof los in de oorsprong. De vloeistof beweegt zich met stappen van lengte 1 over \mathbb{Z} , door iedere stap met kans 0,5 naar links of naar rechts te gaan. Als er oneindig veel stappen gezet worden, zal de vloeistof elk punt van \mathbb{Z} oneindig vaak bezoeken.

Voorbeeld 1.2 (percolatie). We hebben dezelfde lijn en vloeistof als in voorbeeld 1.1, maar nu wordt de richting waarin de vloeistof zich beweegt bepaald door het medium: ieder punt van \mathbb{Z} heeft een oriëntatie naar links of naar rechts. Als de vloeistof hier langs komt, beweegt deze zich in de richting van de oriëntatie. nu geldt dat de vloeistof slechts eindig veel punten bezoekt.

1.1 Definities

In het artikel van Broadbent en Hammersley wordt ook de basis gelegd voor percolatie op een oneindig groot vierkant rooster. We zullen de definities gebruiken zoals deze voorkomen in Percolation van Geoffrey Grimmett [5]. Definities en bewijzen van Grimmett zullen gedurende dit werk vaker voorbij komen.

Definitie 1.3. $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, B)$, met B als in de volgende definitie:

Definitie 1.4. $B = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}^2, \|x - y\|_2 = 1\}$, de bonds van \mathbb{L}^2

\mathbb{L}^2 is historisch gezien het belangrijkste medium voor percolatie en vormt ook het uitgangspunt voor dit werk. Iedere bond binnen \mathbb{L}^2 heeft dezelfde kans om de vloeistof door te laten. Dit wordt bond-percolatie genoemd. Naast bond-percolatie bestaat er ook site-percolatie, waarbij de sites een kans hebben om de vloeistof door te laten. Dit werk gaat over bond-percolatie, maar we zullen site-percolatie nog tegenkomen bij een bewijs in hoofdstuk 3.

Definitie 1.5. De kans dat een bond de vloeistof doorlaat noemen we p . Deze kans is gelijk voor iedere bond. We noemen deze bonds *open*. Bonds die geen vloeistof doorlaten noemen we *gesloten*.

We kunnen dit ook formeler definiëren aan de hand van een kansruimte:

Definitie 1.6. $\Omega = \prod_{b \in B} \{0, 1\}$ is de kansruimte die hoort bij \mathbb{L}^2 .

We kunnen ieder element in Ω weergeven als $\omega = (\omega(b) : b \in B)$, de *configuraties* van \mathbb{L}^2 . $\omega(b) = 0$ betekent dan dat b gesloten is, en $\omega(b) = 1$ dat b open is.

Voor de verzameling gebeurtenissen \mathcal{F} nemen we de sigma-algebra van de deelverzamelingen van Ω die gegenereerd worden door de eindig-dimensionale cilinders. Op de elementen uit \mathcal{F} definiëren we de volgende productmaat:

Definitie 1.7. $P_p = \prod_{b \in B} u_b$ is de kansmaat die hoort bij \mathbb{L}^2 . E_p is de corresponderende verwachting.

Hierbij is $u_b = p$ als $\omega(b) = 1$ en $u_b = q = 1 - p$ als $\omega(b) = 0$.

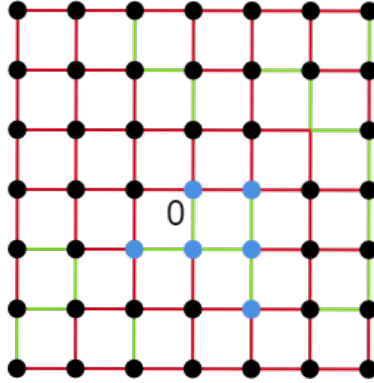
We kunnen een gebeurtenis ook karakteriseren door zijn indicatorfunctie:

Definitie 1.8. De *indicatorfunctie* van een gebeurtenis A is $I_A(\omega) = (0 \text{ als } \omega \notin A; 1 \text{ als } \omega \in A)$

Definitie 1.9. Er loopt een *open pad* tussen sites x en y , of $x \leftrightarrow y$, als er een rij sites $(s_n)_{n=1}^{n=k}$ bestaat met $s_1 = x$, $s_k = y$, $(s_i, s_{i+1})_{1 \leq i < k} \in B$ en $\omega((s_i, s_{i+1}))_{1 \leq i < k} = 1$.

We laten onze vloeistof los in de oorsprong 0 van \mathbb{L}^2 (het punt $(0,0)$). We kijken naar alle sites die de vloeistof kan bereiken:

Definitie 1.10. *Het cluster rond de oorsprong* C bestaat uit alle sites met een open pad naar de oorsprong: $C := \{x \in \mathbb{Z}^2 : x \leftrightarrow 0\}$



Figuur 1: Een deel van een configuratie van \mathbb{L}^2 voor $p = 0,25$. De rode bonds zijn gesloten en de groene bonds open. De site 0 is de oorsprong. De blauwe sites zijn onderdeel van het cluster rond de oorsprong.

We zijn geïnteresseerd in de grootte van C , en in het bijzonder in de vraag of $|C|$ eindig of oneindig is. Daarom introduceren we de volgende definitie:

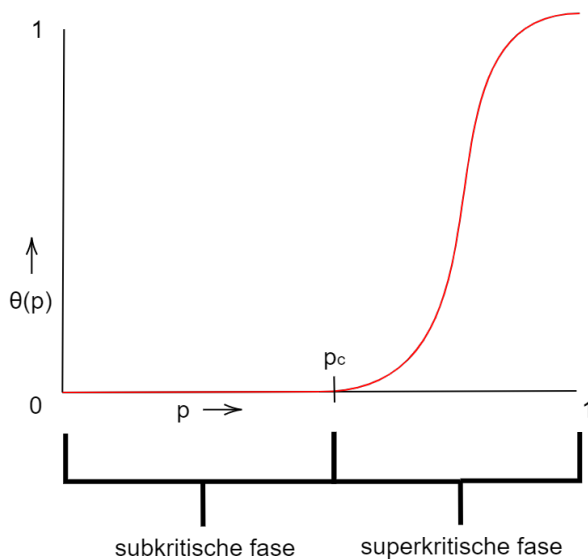
Definitie 1.11. De *percolatiekans* $\theta(p)$ is de kans dat het cluster rond de oorsprong oneindig groot is: $\theta(p) = P_p(|C| = \infty)$.

$\theta(p)$ is een stijgende functie, met $\theta(0) = 0$ en $\theta(1) = 1$. Als we p op laten lopen van 0 naar 1, doorlopen we twee fasen: de subkritische fase waarbij $\theta(p) = 0$ en de superkritische fase waarbij $\theta(p) > 0$.

Definitie 1.12. De kritieke kans $p_c = \sup\{p : \theta(p) = 0\}$. Dit is dus de overgang van de subkritische naar de superkritische fase.

Een definitie die vaak gebruikt wordt in bewijzen is die van het duale rooster:

Definitie 1.13. Het *duale rooster* \mathbb{L}_d^2 is het rooster dat verkregen wordt door in elk vierkant in \mathbb{L}^2 een site te plaatsen, en de sites die naast elkaar liggen te verbinden. Dit kunnen we ook zien als het rooster op de sites $\{(x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \mid x \in \mathbb{Z}^2\}$.



Figuur 2: een schets van p tegenover $\theta(p)$. De kritieke kans p_c is waar de subkritische fase overgaat in de superkritische fase.

Het vinden van de waarde van p_c voor verschillende mediums is een van de belangrijkste bezigheden binnen de percolatietheorie. De zoektocht naar de waarde van p_c voor \mathbb{L}^2 begon bijna direct na de introductie van het begrip in 1957. Uiteindelijk bewees Harry Kesten in 1980 dat $p_c = \frac{1}{2}$ [8].

2 Bewijs dat $p_c = \frac{1}{2}$

In dit hoofdstuk geven we een bewijs voor $p_c = \frac{1}{2}$. Hierbij volgen we de stappen van Grimmett [5]. Na de introductie van de term percolatie duurde het meer

dan twintig jaar voordat er een bewijs gevonden werd, ook al werd al veel langer vermoed dat de kritieke kans gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Het bewijs is dan ook niet eenvoudig, en we zullen eerst een aantal lemma's en stellingen moeten behandelen die we nodig zullen hebben.

2.1 Lemma's die nodig zijn voor het bewijs dat $p_c = \frac{1}{2}$

De volgende lemma's worden vaak gebruikt voor bewijzen binnen percolatietheorie, en ook bij het bewijs dat $p_c = \frac{1}{2}$.

We kijken eerst naar de FKG ongelijkheid, die ons iets verteld over stijgende variabelen. We noemen een variabele X stijgend in p als $X(p) \leq X(p')$ wanneer $p \leq p'$. Door een partiële ordening op configuraties te plaatsen, kunnen we ook over stijgende gebeurtenissen praten. We stellen dat $\omega \leq \omega'$ wanneer $\omega(b) \leq \omega'(b)$ voor alle $b \in B$. Een gebeurtenis A is dan stijgend als $A(\omega) \leq A(\omega')$ wanneer $\omega \leq \omega'$.

Lemma 2.1. *FKG ongelijkheid*

- Als X en Y stijgende stochastische variabelen zijn in p met $E_p(X^2) < \infty$ en $E_p(Y^2) < \infty$, dan geldt $E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y)$
- Als A en B stijgende gebeurtenissen zijn, dan geldt $P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B)$

bewijs. Deel 2 volgt uit het toepassen van de indicatorfuncties van A en B op deel 1. We bewijzen eerst deel 1 voor stochasten die afhankelijk zijn van de staat van eindig veel bonds, e_1, e_2, \dots, e_n . We maken gebruik van inductie naar n . Als $n = 1$, dan zijn X en Y alleen afhankelijk van de staat van e_1 . Dan geldt voor alle paren van configuraties van e_1 : ω_1, ω_2 dat

$$(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \geq 0 \quad (1)$$

want uit de monotoniciteit volgt dat $X(\omega_1) - X(\omega_2) \geq 0 \iff Y(\omega_1) - Y(\omega_2) \geq 0$

0. Voor de verwachtingen van X en Y geldt dat

$$\begin{aligned}
& 2\left(E_p(XY) - E_p(X)E_p(Y)\right) &= \\
& \sum_{\omega_1} \left(X(\omega_1)Y(\omega_1)P_p\left(\omega(e_1) = \omega_1\right)\right) + \sum_{\omega_2} \left(X(\omega_2)Y(\omega_2)P_p\left(\omega(e_1) = \omega_2\right)\right) &- \\
& \sum_{\omega_1} \left(X(\omega_1)P_p\left(\omega(e_1) = \omega_1\right)\right) \sum_{\omega_2} \left(Y(\omega_2)P_p\left(\omega(e_1) = \omega_2\right)\right) &- \\
& \sum_{\omega_2} \left(X(\omega_2)P_p\left(\omega(e_1) = \omega_2\right)\right) \sum_{\omega_1} \left(Y(\omega_1)P_p\left(\omega(e_1) = \omega_1\right)\right) &= \\
& \sum_{\omega_1, \omega_2} \left(X(\omega_1)Y(\omega_1) - X(\omega_1)Y(\omega_2) - X(\omega_2)Y(\omega_1) + X(\omega_2)Y(\omega_2)\right) \\
& \quad \times P_p\left(\omega(e_1) = \omega_1\right)P_p\left(\omega(e_1) = \omega_2\right) &= \\
& \sum_{\omega_1, \omega_2} \left(X(\omega_1) - X(\omega_2)\right)\left(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)\right) \\
& \quad \times P_p\left(\omega(e_1) = \omega_1\right)P_p\left(\omega(e_1) = \omega_2\right) &\geq 0
\end{aligned}$$

vanwege (1), en dus geldt dat

$$E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y) \quad (2)$$

Stel nu dat het lemma waar is voor alle $n < k$, en dat X en Y stijgende stochastische variabelen zijn die alleen afhangen van de staten $\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_k)$. Dan geldt dat hoewel

$E_p\left(XY|\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1})\right)$ afhankelijk is van de waarden van $\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1})$, de verwachting hiervan nog steeds gelijk is aan die van XY . Dus

$$\begin{aligned}
E_p(XY) &= E_p\left(E_p\left(XY|\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1})\right)\right) \\
&\geq E_p\left(E_p\left(X|\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1})\right)\right. \\
&\quad \left.\times E_p\left(Y|\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1})\right)\right)
\end{aligned}$$

want X en Y hangen nu alleen af van $\omega(e_k)$ waardoor we vergelijking 2 toe kunnen passen. We kunnen nu

$E_p\left(X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1})\right)$ en $E_p\left(Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1})\right)$ zelf bekijken als stochastische variabelen. Deze variabelen zijn dan afhankelijk van de staat van bonds e_1, \dots, e_{k-1} en stijgend, omdat X en Y stijgend zijn. Daarom volgt uit de in-

ductiehypothese dat

$$\begin{aligned} E_p(XY) &\geq E_p\left(E_p\left(X|\omega_1(e_1), \dots, \omega_{k-1}(e_{k-1})\right)\right) \\ &\quad \times E_p\left(E_p\left(Y|\omega_1(e_1), \dots, \omega_{k-1}(e_{k-1})\right)\right) \\ &= E_p(X)E_p(Y). \end{aligned}$$

Nu laten we de conditie vallen dat X en Y afhankelijk zijn van de staat van eindig veel bonds. Geef de bonds van \mathbb{L}^2 een ordening e_1, e_2, \dots . Definieer

$$X_n = E_p\left(X|\omega_1(e_1), \dots, \omega_n(e_n)\right) \text{ en } Y_n = E_p\left(Y|\omega_1(e_1), \dots, \omega_n(e_n)\right).$$

Uit het resultaat hierboven volgt dan dat $E_p(X_n Y_n) \geq E_p(X_n)E_p(Y_n)$. Uit de martingale convergentiestelling [6] volgt dat $X_n \rightarrow X$ en $Y_n \rightarrow Y$ als $n \rightarrow \infty$, P_p a.s. en in $L^2(P_p)$. Dus geldt dat $E_p(X_n) \rightarrow E_p(X)$ en $E_p(Y_n) \rightarrow E_p(Y)$ als $n \rightarrow \infty$. Uit de driehoeksongelijkheid (1) en de Cauchy-Schwartz ongelijkheden (2) volgt nu dat

$$\begin{aligned} E_p|X_n Y_n - XY| &\leq E_p\left(|(X_n - X)(Y_n)| + |X(Y_n - Y)|\right) \\ &\leq \sqrt{E_p\left((X_n - X)^2\right)E_p(Y_n^2)} + \sqrt{E_p(X_n^2)E_p\left((Y_n - Y)^2\right)} \\ &\rightarrow 0 \text{ als } n \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{3}$$

En dus geldt dat $E_p(X_n Y_n) \rightarrow E_p(XY)$. Als we dit toepassen op $E_p(X_n Y_n) \geq E_p(X_n)E_p(Y_n)$ volgt $E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y)$. \square

Het volgende lemma zegt iets over bonds die *bepalend* zijn voor een gebeurtenis.

Definitie 2.2. Een bond b is *bepalend* voor gebeurtenis A en configuratie ω als $I_A(\omega) \neq I_A(\omega')$ waarbij ω' de configuratie is die op alle bonds gelijk is aan ω behalve op b .

Lemma 2.3. *Russo's formule*

Stel dat A een stijgende stochastische variabele is die afhangt van de staat van eindig veel bonds van \mathbb{L}^2 . Dan geldt

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = E_p(N(A)), \tag{4}$$

waarbij $N(A)$ het aantal bonds is die bepalend zijn voor A . Dit kan worden herschreven tot

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = \sum_{e \in \mathbb{E}^d} P_p(e \text{ is bepalend for } A). \tag{5}$$

bewijs. Definieer $\mathbf{p} := (p(e) : e \in \mathbb{E}^d)$, waarbij $0 \leq p(e) \leq 1$ voor alle e . Laat $X(e) : e \in \mathbb{E}^d$ onafhankelijke stochasten zijn met de uniforme distributie op $[0, 1]$. We definiëren de configuratie $\eta_{\mathbf{p}}$ door $\eta_{\mathbf{p}}(e) = 1$ als $X(e) < p(e)$ en $\eta_{\mathbf{p}}(e) = 0$ als $X(e) \geq p(e)$. $P_{\mathbf{p}}$ is de kansmaat op Ω waarbij de kans dat de staat van een bond $\omega(e)$ gelijk is aan 1 met kans $p(e)$. Het volgt direct dat

$$P_{\mathbf{p}}(A) = P(\eta_{\mathbf{p}} \in A).$$

Voor een bond f definiëren we $\mathbf{p}' = (p'(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ als volgt:

$$p'(e) = \begin{cases} p(e) & \text{als } e \neq f, \\ p'(f) & \text{als } e = f, \end{cases}$$

dus \mathbf{p} en \mathbf{p}' mogen alleen verschillen op bond f . Als $p(f) \leq p'(f)$ dan geldt

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{p}'}(A) - P_{\mathbf{p}}(A) &= P(\eta_{\mathbf{p}} \notin A, \eta_{\mathbf{p}'} \in A) \\ &= (p'(f) - p(f)) P_{\mathbf{p}}(f \text{ is bepalend voor } A) \end{aligned} \quad (6)$$

We nemen de partiële afgeleide naar $p(f)$ door te delen door $p'(f) - p(f)$ en dit naar 0 te laten gaan:

$$\frac{\partial}{\partial p(f)} P_{\mathbf{p}}(A) = P_{\mathbf{p}}(f \text{ is bepalend voor } A).$$

A is afhankelijk van de staat van eindig veel bonds, en dus is $P_{\mathbf{p}}(A)$ een functie van de kansen $(p(f_i) : 1 \leq i \leq m)$. Uit de kettingregel volgt dan dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} P_p(A) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial p(f_i)} P_{\mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}=(p,p,\dots,p)} \\ &= \sum_{i=1}^m P_p(f_i \text{ is bepalend voor } A) \\ &= E_p(N(A)) \end{aligned} \quad (7)$$

□

Lemma 2.4 (wortel truc). *Als A_1, A_2, \dots, A_n stijgende gebeurtenissen zijn met gelijke kans, dan geldt*

$$P_p(A_1) \geq 1 - \left(1 - P_p\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \right)^{\frac{1}{m}} \quad (8)$$

bewijs.

$$\begin{aligned} 1 - P_p\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) &= P_p\left(\bigcap_{i=1}^m \overline{A_i}\right) \\ &\geq^{FKG} \prod_{i=1}^m P_p(\overline{A_i}) \\ &= (1 - P_p(A_1))^m. \end{aligned} \quad (9)$$

□

2.2 Stellingen die nodig zijn voor het bewijs dat $p_c = \frac{1}{2}$

We hebben een aantal stellingen nodig om het bewijs rond te maken. Voor een aantal stellingen behandelen we slechts een schets van het bewijs, omdat het complete bewijs erg technisch is. De geïnteresseerde lezer kan de complete bewijzen terugvinden in het boek van Grimmett [5].

Stelling 2.5 (Exponentieel verval). *(stelling 5.4 in Grimmett) A_n is de gebeurtenis dat er een open pad vanaf de oorsprong is naar een punt met afstand n tot de oorsprong. Als $p < p_c$, dan bestaat er een $\Psi(p) > 0$ zodat*

$$P_p(A_n) < e^{-n\Psi(p)} \text{ voor alle } n \quad (10)$$

schets van het bewijs. We definiëren $g_p(n) := P_p(A_n)$. De gebeurtenis A_n is stijgend en alleen afhankelijk van de bonds met afstand kleiner of gelijk aan n tot de oorsprong, en dus kunnen we Russo's formule gebruiken:

$$g'_p(n) = E_p(N(A_n)) = \sum_e P_p(e \text{ is cruciaal voor } A_n).$$

De gebeurtenis e is cruciaal voor A_n is onafhankelijk van de staat van e . Dus geldt

$$\sum_e P_p(e \text{ is cruciaal voor } A_n) = \frac{1}{p} \sum_e P_p(e \text{ is open en } e \text{ is cruciaal voor } A_n).$$

Dit kunnen we verder herschrijven tot

$$\begin{aligned} g_p(n) &= \frac{1}{p} \sum_e P_p(e \text{ is open en } e \text{ is cruciaal voor } A_n) \\ &= \frac{1}{p} \sum_e P_p(e \text{ is cruciaal voor } A_n | A_n) P_p(A_n) \\ &= \frac{1}{p} E_p(N(A_n) | A_n) P_p(A_n) \end{aligned}$$

Dit komt neer op

$$\frac{1}{g_p(n)} g'_p(n) = \frac{1}{p} E_p(N(A_n) | A_n)$$

We nemen $0 < \alpha < \beta < 1$. Als we dit integreren van $p = \alpha$ tot $p = \beta$ krijgen we

$$\begin{aligned} g_\alpha(n) &= g_\beta(n) \exp\left(-\int_\alpha^\beta \frac{1}{p} E_p(N(A_n) | A_n) dp\right) \\ &\leq g_\beta(n) \exp\left(-\int_\alpha^\beta E_p(N(A_n) | A_n) dp\right). \end{aligned}$$

Nu moeten we nog bewijzen dat $E_p(N(A_n)|A_n)$ lineair groeit in n als $p < p_c$. Het bewijs hiervan is vrij technisch en is te vinden in het boek van Grimmett. Het is intuïtief echter wel te begrijpen waarom dit zo is: Als $n \rightarrow \infty$ dan gaat $P_p(A_n) \rightarrow 0$. Als A_n dan toch gebeurt, zoals in onze voorwaardelijke kans, dan gebeurt het waarschijnlijk maar 'net': er zijn waarschijnlijk veel cruciale punten voor deze gebeurtenis. Aangezien een pad naar een punt op afstand $2n$ een twee keer zo lange afstand moet afleggen als een pad naar een punt op afstand n , is het plausibel dat zo'n pad ook twee zo veel cruciale punten heeft, en dus dat $N(A_n)$ lineair in n is. De gewenste ongelijkheid krijgen we nu door $g_\beta(n)$ van boven af te schatten met 1. □

Stelling 2.6 (Uniciteit van het oneindige open cluster). *(stelling 8.1 in Grimmett) Als voor p geldt dat $\theta(p) > 0$, dan geldt*

$$P_p(\text{Er bestaat exact één open cluster}) = 1. \quad (11)$$

schets van het bewijs. Noem N het aantal oneindige open clusters, en $k \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$. De gebeurtenis $(N = k)$ is dan translatie-invariant. Dat wil zeggen dat een verschuiving van het rooster het aantal oneindige clusters niet beïnt. Vanwege translatie-invariantie geldt dan dat $P_p(N = k) \in \{0, 1\}$ (voor het bewijs hiervan, zie [2]). Dit is equivalent met de volgende uitspraak:

$$\text{er bestaat een } k \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\} \text{ zodat } P_p(N = k) = 1$$

We bewijzen nu dat als k eindig is, dan $k \in \{0, 1\}$. Voor het bewijs dat $k \neq \infty$ verwijs ik naar Grimmett. Laat B een eindige verzameling punten zijn, en \mathbb{E}_B een verzameling bonds zodat $G = (B, \mathbb{E}_B)$ een samenhangende deelverzameling is van \mathbb{L}^2 . We noemen $N_B(0)$ (respectievelijk $N_B(1)$) het aantal oneindige clusters als alle bonds in \mathbb{E}_B gesloten (respectievelijk open) zijn. M_B is het aantal oneindige clusters dat B snijdt. Aangezien er een k bestaat met $P_p(N = k) = 1$, geldt dat

$$P_p(N_B(0) = N_B(1) = k) = 1.$$

Dit kan alleen als B ten hoogste één oneindig open cluster doorsnijdt (mits $k < \infty$, hetgeen we hebben aangenomen). Dus

$$P_p(M_B \geq 2) = 0.$$

Er geldt dat als $B \uparrow \mathbb{Z}^2$, dan $M_B \rightarrow N$. We nemen voor B de 'ruit' $S(n) = \{x \in \mathbb{Z}^2 : \|x\|_1 \leq n\}$. Als we $n \rightarrow \infty$ nemen, zien we dat

$$0 = P_p(M_{S(n)} \geq 2) \rightarrow P_p(N \geq 2),$$

en dus geldt $k \leq 1$. □

Stel dat G een samenhangende deelverzameling is van \mathbb{L}^2 . Samenhangend wordt hierbij op dezelfde manier gebruikt als bij een graaf, namelijk dat er tussen ieder paar punten een pad loopt. Noem ΔG de bond-grens van G , gedefinieerd als de verzameling bonds die niet in G liggen maar een gemeenschappelijk eindpunt hebben met ten minste één bond uit G .

Propositie 2.7. *Stel dat G een eindige samenhangende deelverzameling is van \mathbb{L}^2 . Dan bestaat er een uniek circuit $\Sigma(G)$ in \mathbb{L}_d^2 dat G bevat en met de eigenschap dat iedere bond van $\Sigma(G)$ een bond van $\Delta(G)$ kruist.*

Voor het bewijs van deze propositie verwijst Grimmett naar Kesten [7], hetgeen we hier ook doen.

2.3 Bewijs dat $p_c = \frac{1}{2}$

Nu we al onze hulplemma's en -stellingen hebben behandeld, kunnen we overgaan naar het bewijs dat $p_c = \frac{1}{2}$.

Stelling 2.8 ($p_c = \frac{1}{2}$). *bewijs.* We bewijzen eerst dat $p_c \geq \frac{1}{2}$. We maken gebruik van een bewijs uit het ongerijmde, dus stel dat $\theta(\frac{1}{2}) > 0$. Voor alle $n \geq 1$, definiëren we $A^l(n)$ als de gebeurtenis dat er een punt is op de linkerkant van de rand van het vierkant $T(N) := [0, n]^2$ dat in een oneindig lang open pad ligt dat verder geen punt van $T(N)$ bevat. Op dezelfde manier definiëren we $A^r(n)$, $A^t(n)$ en $A^b(n)$ voor rechts, boven en beneden (right, top, bottom). Dit zijn stijgende gebeurtenissen, en $A^l(n) \cup A^r(n) \cup A^t(n) \cup A^b(n)$ is de gebeurtenis dat een punt uit de rand van $T(N)$ in een oneindig open cluster ligt. Uit onze aanname dat $\theta(\frac{1}{2}) > 0$ volgt dat er een oneindig open cluster bestaat met kans 1, dus

$$P_{\frac{1}{2}}\left(A^l(n) \cup A^r(n) \cup A^t(n) \cup A^b(n)\right) \rightarrow 1 \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

Uit de wortel truc (8) volgt dat

$$P_{\frac{1}{2}}(A^u(n)) \rightarrow 1 \text{ als } n \rightarrow \infty \text{ voor } u = l, r, t, b. \quad (12)$$

Dus kunnen we een $N \in \mathbb{N}$ kiezen zodat

$$P_{\frac{1}{2}}(A^u(N)) \geq \frac{7}{8} \text{ voor } u = l, r, t, b. \quad (13)$$

We bekijken het duale rooster, en definiëren

$$T(n)_d = \left\{x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) : 0 \leq x_1, x_2 \leq n\right\}.$$

Ook definiëren we $A_d^l(n)$ als de gebeurtenis dat er een punt op de linkerkant van $T(n)_d$ ligt in een oneindig lang gesloten pad dat geen ander punt van $T(n)_d$ gebruikt. Op dezelfde manier definiëren we A_d^r , A_d^t en A_d^b voor rechts, boven en beneden. Aangezien de kans dat een bond open is net zo groot is als de kans dat een bond gesloten is, geldt

$$P_{\frac{1}{2}}(A_d^u(N)) = P_{\frac{1}{2}}(A^u(N)) \geq \frac{7}{8} \text{ voor } u = l, r, t, b. \quad (14)$$

We gaan nu kijken naar de gebeurtenis $A := A^l(N) \cap A^r(N) \cap A_d^t(N) \cap A_d^b(N)$. De kans dat A niet gebeurt voldoet aan

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{2}}(\bar{A}) &= P_{\frac{1}{2}}\left(\overline{A^l(N)} \cup \overline{A^r(N)} \cup \overline{A_d^t(N)} \cup \overline{A_d^b(N)}\right) \\ &\leq P_{\frac{1}{2}}\left(\overline{A^l(N)}\right) + P_{\frac{1}{2}}\left(\overline{A^r(N)}\right) + P_{\frac{1}{2}}\left(\overline{A_d^t(N)}\right) + P_{\frac{1}{2}}\left(\overline{A_d^b(N)}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \text{ vanwege (13) en (14),} \end{aligned} \quad (15)$$

en dus geldt $P_{\frac{1}{2}}(A) \geq \frac{1}{2}$. We hebben nu twee unieke open clusters op $\mathbb{L}^2 \setminus T(N)$; gescheiden door twee oneindig grote gesloten paden in $\mathbb{L}_d^2 \setminus T(N)$. Een open pad dat deze twee open clusters verbindt moet namelijk een bond van zo'n gesloten pad doorkruisen, wat onmogelijk is. Aangezien het oneindige open cluster in \mathbb{L}^2 uniek is, moet er een open pad lopen door $T(N)$ om de twee oneindige open clusters te verbinden. Het oneindige gesloten cluster van \mathbb{L}_d^2 moet echter ook uniek zijn, maar een gesloten verbinding tussen de twee oneindige clusters in $\mathbb{L}_d^2 \setminus T(N)$ moet dan de open verbinding kruisen, wat niet mogelijk is. De aanname dat $\theta(\frac{1}{2}) > 0$ is dus incorrect, en dus is $p_c \geq \frac{1}{2}$.

Nu gaan we bewijzen dat $p_c \leq \frac{1}{2}$. Stel dat $p < p_c$. Dan geldt voor de verwachte grootte van het open cluster rond de oorsprong dat

$$\chi(p) = \sum_{n=1}^{\infty} P_p(|C| \geq n) < \infty. \quad (16)$$

Voor alle $M \geq 1$, definieer A_M als de gebeurtenis dat er een open pad π bestaat dat een punt van de vorm $(k, 0)$ met $k < 0$ verbindt met een punt van de vorm $(l, 0)$ met $l \geq M$, waarbij alle punten (op de eindpunten na) boven de horizontale as liggen. Er geldt dat

$$\begin{aligned} P_p(A_M) &\leq P_p\left(\bigcup_{l=M}^{\infty} \left((l, 0) \iff (k, 0) \text{ voor een } k < 0\right)\right) \\ &\leq \sum_{l=M}^{\infty} P_p(|C| \geq l) \end{aligned} \quad (17)$$

aangezien een pad van van $(l, 0)$ naar $(k, 0)$ een cluster betekent dat minimaal l groot is. Als gevolg van (17) kunnen we M groot genoeg kiezen zodat $P_p(A_M) \leq \frac{1}{2}$. We beweren nu dat als A^M niet voorkomt, er een gesloten oneindig cluster bestaat in de duale graaf. Definieer $L := \{(m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : 0 \leq m < M\}$; een verzameling punten in het duale rooster, en $C(L)$ is de verzameling punten die met een punt uit L zijn verbonden met een gesloten pad. Als $|C(L)| < \infty$ volgt uit propositie 1 dat $C(L)$ wordt omringd door een open circuit Σ in \mathbb{L}^2 . Zo'n circuit moet dan een open pad hebben dat voldoet aan de voorwaarden van A_M . Dus

$$P_p(|C(L)| < \infty) \leq P_p(A_M) \leq \frac{1}{2}.$$

Dus $P_p(|C(L)| = \infty) > \frac{1}{2}$. Als $|C(L)| = \infty$, dan geldt voor een van de M lijnen in L dat deze in een oneindig gesloten cluster van \mathbb{L}_d^2 ligt, en dus geldt

$$\begin{aligned} P_p(0_d \text{ is bevat in een oneindig gesloten cluster}) &\geq \frac{1}{M} P_p(|C(L)| = \infty) \\ &> \frac{1}{2M}, \end{aligned} \quad (18)$$

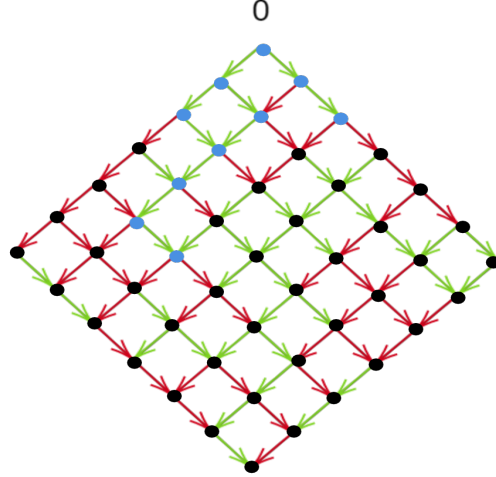
en dus geldt $\theta(1-p) > 0$, en dus geldt $(1-p) \geq p_c$ wanneer $p < p_c$. Dit is alleen mogelijk als $p_c \leq \frac{1}{2}$. \square

3 Gerichte percolatie

Door iedere bond in \mathbb{L}^2 een oriëntatie te geven, krijgen we een gericht percolatiemodel, $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$. De vloeistof kan zich dan alleen verplaatsen door een bond in de richting van zijn oriëntatie. Gerichte percolatie is al sinds de jaren 70 populair bij natuurkundigen om bijvoorbeeld het effect van zwaartekracht op de vloeistof te modelleren (figuur 3). Het cluster rond de oorsprong C bestaat uit alle punten die vanuit de oorsprong bereikt kunnen worden via een gericht open pad. Net als bij gewone percolatie hebben we een percolatiekans en een kritieke kans:

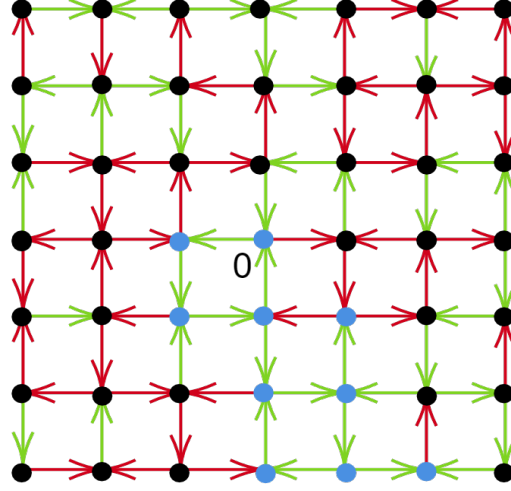
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\theta}(p) &= P_p(|C| = \infty), \\ \overrightarrow{p}_c &= \sup\{p : \overrightarrow{\theta}(p) = 0\}. \end{aligned}$$

Hoewel het bekend is dat de kritieke kans van \mathbb{L}^2 gelijk is aan $\frac{1}{2}$, blijkt het vaak erg lastig te zijn om voor een bepaald percolatiemodel de kritieke kans exact te bepalen. Dit geldt ook voor $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$. We kunnen dus alleen wat zeggen over de kritieke kans door een numerieke benadering. In 1986 berekenden Essam, De'Bell, Adler en Bhatti dat $\overrightarrow{p}_c = 0,6447\dots$ [4]



Figuur 3: Een configuratie van $\vec{\mathbb{L}}^2$ voor $p = 0, 5$

Een model waar nog geen onderzoek naar lijkt te zijn gedaan, is een gerichte versie van \mathbb{L}^2 waarbij de vloeistof niet twee keer achter elkaar dezelfde kant op kan lopen. Dit wordt bereikt door twee bonds die een eindpunt gemeen hebben en een x -coördinaat of y -coördinaat gemeen hebben een tegengestelde oriëntatie te geven (figuur 4). We noemen dit model $\vec{\mathbb{L}}^2$. C , $\vec{\theta}(p)$ en \vec{p}_c worden hierbij op dezelfde manier gedefinieerd als voor $\vec{\mathbb{L}}^2$. Dit model is de focus van de laatste twee hoofdstukken.



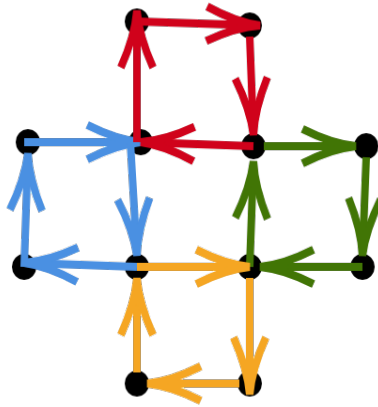
Figuur 4: Een configuratie van $\mathbb{L}_{\rightarrow}^2$ voor $p = 0, 5$

3.1 Grenzen voor \vec{p}_c

Stelling 3.1. $\vec{p}_c \leq \sqrt[4]{p_{c(site)}}$

bewijs. We beschouwen in $\mathbb{L}_{\rightarrow}^2$ alle vierkanten (4 bonds en 4 sites) waarvan de richting met de klok mee is. We noemen zo'n vierkant open als alle bonds open zijn. We noemen twee vierkanten verbonden als ze een gemeenschappelijke site hebben. We hebben een oneindig cluster van open vierkanten als we een oneindige samenhangende verzameling open vierkanten hebben, waarbij de samenhang wordt bepaald door de verbindingen tussen de vierkanten. Het is duidelijk dat als we een oneindig cluster van open vierkanten hebben, we ook een oneindig cluster in $\mathbb{L}_{\rightarrow}^2$ hebben, en dus geldt

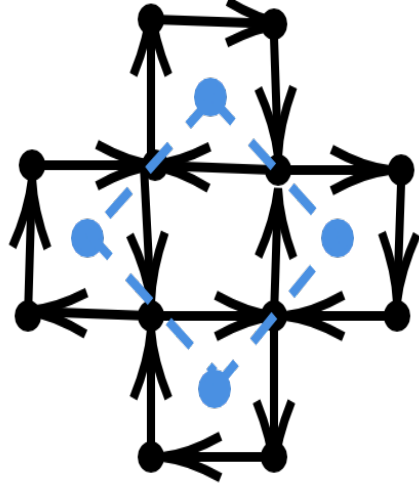
$$p_{c(vierkanten)} \geq \vec{p}_c. \quad (19)$$



Figuur 5: Iedere kleur stelt een vierkant in \mathbb{Z}^2 voor

Bovendien, als we ieder vierkant representeren door een punt, en de punten verbinden zoals we de vierkanten verbinden, hebben we het site-percolatie model. Als de kans dat een bond van een vierkant open is gelijk is aan p , dan is dan kans dat het hele vierkant open is gelijk aan p^4 . Dus

$$\sqrt[4]{p_{c(site)}} = p_{c(vierkanten)}. \quad (20)$$



Figuur 6: vierkanten in \mathbb{Z}^2 in het zwart, de corresponderende site percolatie in het blauw

Als we vergelijking (19) en (20) combineren krijgen we het resultaat van de stelling. □

We hebben nu een bovengrens voor \vec{p}_c . Voor de ondergrens hebben we eerst wat theorie nodig:

Definitie 3.2. $\sigma(n)$ is het aantal paden van lengte n die zichzelf niet kruisen.

Definitie 3.3. $N(n)$ is het aantal paden van lengte n die zichzelf niet kruisen en open zijn.

Merk op dat $\sigma(n)$ vast staat, maar $N(n)$ een stochastische variabele is.

Lemma 3.4. $\frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(m)^{1/m}} \leq \vec{p}_c$

bewijs. We merken eerst op dat $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(m)^{1/m}$ bestaat. Eerst merken we op dat we een pad van lengte $n + m$ kunnen opdelen in een pad van lengte n en een pad van lengte m , en dus geldt dat $\sigma(n + m) \leq \sigma(n)\sigma(m)$. Het bestaan van de limiet volgt dan uit toepassing van Fekete's lemma [9] op $\log(\sigma(n + m)) \leq \log(\sigma(n)\sigma(m))$. De kans dat een pad van lengte n open is staat gelijk aan p^n . Dus geldt $E_p(N(n)) = p^n \sigma(n)$. Als er een oneindig cluster rond de oorsprong ontstaat, dan bestaan er paden die open zijn en zichzelf niet kruisen van iedere lengte n . Dus:

$$\theta(p) \leq P_p(N(n) \geq 1) \stackrel{\text{Markov-ongelijkheid}}{\leq} E_p(N(n)) = p^n \sigma(n) \quad (21)$$

voor alle $n > 0$. Verder kunnen we $\sigma(n)$ schrijven als

$$\sigma(n) = \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(m)^{\frac{1}{m}} + o(1) \right)^n \quad (22)$$

voor $n \rightarrow \infty$. Door (21) en (22) te combineren krijgen we

$$\theta(p) \leq \left(p \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(m)^{\frac{1}{m}} + o(1) \right)^n. \quad (23)$$

De rechter kant convergeert naar 0 als $p \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma^{\frac{1}{m}}$ kleiner is dan 1. Dus

$$\frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(m)^{1/m}} \leq \vec{p}_c \quad (24)$$

□

Stelling 3.5. $\vec{p}_c \geq \frac{2}{1+\sqrt{5}}$

bewijs. We schatten $\sigma(n)$ van boven af met het aantal paden dat geen vierkant bevat. Door de oriëntatie van het medium doen we om en om een horizontale en een verticale stap. We kunnen een pad zien als een binaire rij, waarbij een stap naar rechts of omhoog met een 1 wordt aangeduid en een stap naar links of beneden met een 0. Het pad bevat een vierkant als we in vier stappen een keer naar links, een keer naar rechts, een keer omhoog en een keer naar beneden gaan. Dit is equivalent met de volgende rijtjes:

$$1001, 0110, 0011, 1100. \quad (25)$$

We bekijken een willekeurig pad met 4 of meer stappen en bijbehorende rij $(a_k)_{k=1}^n$. We noemen de kans dat dit pad een vierkant bevat $F(n)$. We onderscheiden nu 3 gevallen:

1. $a_n = a_{n-2}$ (kans = $\frac{1}{2}$)
2. $a_n \neq a_{n-2}$ en $a_{n-3} = a_{n-1}$ (kans = $\frac{1}{4}$)
3. $a_n \neq a_{n-2}$ en $a_{n-3} \neq a_{n-1}$ (kans = $\frac{1}{4}$).

In geval 1 kan a_n geen onderdeel zijn van een deelrij uit (25). Daarom is de kans dat $(a_k)_{k=1}^n$ een deelrij uit (25) bevat in dit geval gelijk aan $F(n-1)$. In geval 2 kunnen zowel a_n als a_{n-1} geen onderdeel zijn van een deelrij uit (25), en dus is de kans dat $(a_k)_{k=1}^n$ een deelrij uit (25) bevat gelijk aan $F(n-2)$. In geval 3 vormen de laatste 4 termen van $(a_k)_{k=1}^n$ een vierkant. Deze drie gevallen geven de volgende recursieve formule:

$$F(n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(n-1) + \frac{1}{4}F(n-2). \quad (26)$$

laat $A(n)$ het aantal binaire rijtjes zijn van lengte n zonder een deelrij uit (25). Met (26) kunnen we nu aantonen dat $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$:

$$\begin{aligned}
A(n) &= 2^n(1 - F(n)) \\
&= 2^n\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}F(n-1) - \frac{1}{4}F(n-2)\right) \\
&= 2^n\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(n-2) + \frac{1}{4}F(n-3)\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(n-3) + \frac{1}{4}F(n-4)\right)\right) \\
&= 2^n\left(\frac{9}{16} - \frac{1}{4}F(n-2) - \frac{1}{4}F(n-3) - \frac{1}{16}F(n-4)\right) \\
&= 2^n\left(\frac{6}{16} - \frac{1}{4}F(n-2) - \frac{1}{8}F(n-3)\right) + 2^n\left(\frac{3}{16} - \frac{1}{8}F(n-3) - \frac{1}{16}F(n-4)\right) \\
&= 2^{n-1}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}F(n-2) - \frac{1}{4}F(n-3)\right) + 2^{n-2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}F(n-3) - \frac{1}{4}F(n-4)\right) \\
&= 2^{n-1}(1 - F(n-1)) + 2^{n-2}(1 - F(n-2)) \\
&= A(n-1) + A(n-2)
\end{aligned}$$

Deze relatie geldt voor $n \geq 4$. Aangezien rijen van lengte kleiner dan 4 geen deelrij kunnen hebben van lengte 4, geldt dat $A(n) = 2^n$ als $n < 4$. Dus $A(2) = 4$ en $A(3) = 8$. Met deze startwaarden zien we dat $A(n) = 4Fib(n)$, waarbij $Fib(n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$, de rij van Fibonacci. Nu geldt

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} A(n)^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (4 * Fib(n))^{1/n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (Fib(n))^{1/n} \\
&= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (de gulden snede)}
\end{aligned}$$

Aangezien $\sigma(n) \geq A(n)$ geldt $\lambda \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, en dus $\frac{2}{1+\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \overrightarrow{p_c}$. □

We hebben nu de volgende grenzen voor $\overrightarrow{p_c}$:

$$0,618 \approx \frac{2}{1+\sqrt{5}} \leq \overrightarrow{p_c} \leq \sqrt[4]{p_{c(site)}} \approx 0,877.$$

4 numerieke benadering $\overrightarrow{p_c}$

Percolatie wordt gedaan op talloze verschillende roosters. Ieder rooster heeft een kritieke waarde, maar roosters waarvan de kritieke waarde exact bekend is zijn een uitzondering. Het is ook niet duidelijk of er voor ieder rooster wel een exacte waarde bestaat, of dat sommige kritieke waarden irrationele getallen zijn. Om deze reden is er veel interesse voor het numeriek benaderen van de kritieke waarde. Onderzoekers gebruiken computersimulaties om de kritieke waarde van een percolatiemodel tot op grote precisie te benaderen. Helaas is het niet mogelijk om een compleet rooster te simuleren, omdat deze immers

oneindig groot is. We hebben dus een manier nodig om onze resultaten op het eindige rooster door te trekken naar het oneindige rooster. Een populaire methode hiervoor is door gebruik te maken van de *kritieke exponenten voor percolatietheorie*,

4.1 Kritieke exponenten

De kritieke exponenten worden gebruikt om het gedrag van percolatiemodellen te beschrijven wanneer p in de buurt ligt van \vec{p}_c . Het bestaan van deze exponenten is een vermoeden, maar ze worden veel gebruikt voor het doen van simulaties. Een van deze kritische exponenten beschrijft de kans op het voorkomen van clusters van bepaalde grootte (formule 9.9 in Grimmett).

$$P_{\vec{p}_c}^\rightarrow(n \leq |C| < \infty) \approx n^\sigma. \quad (27)$$

σ is hierbij een kritieke exponent. Het linker deel van de formule noemen we de *cluster distributie*. Concreet betekent dit dat er constanten $0 < \sigma, C_1, C_2, N$ bestaan zodat

$$C_1 n^\sigma < P_{\vec{p}_c}^\rightarrow(n \leq |C| < \infty) < C_2 n^\sigma \quad (28)$$

voor alle $n > N$. We gebruiken de aanpak van Dhar en Barma [3] om de cluster distributie te simuleren. Dit doen we door binnen een rooster van 2000 bij 2000 punten een configuratie te simuleren, waarbij elke bond open is met een kans p , die gebruikt wordt als parameter. We simuleren 10000 configuraties, en bekijken steeds de grootte van het cluster rond de oorsprong. Als het cluster groter dan 50000 punten wordt stoppen we de simulatie. De keuze voor deze parameters stelt ons in staat om binnen enkele minuten de kritieke waarde tot op meerdere decimalen te benaderen. De verdeling van al deze clusters wordt gebruikt om de cluster distributie te schatten:

$$P_{\vec{p}_c}^\rightarrow(n \leq |C| < \infty) \approx \#\{C_{sim} : n < |C_{sim}|\}/10000 := F(n). \quad (29)$$

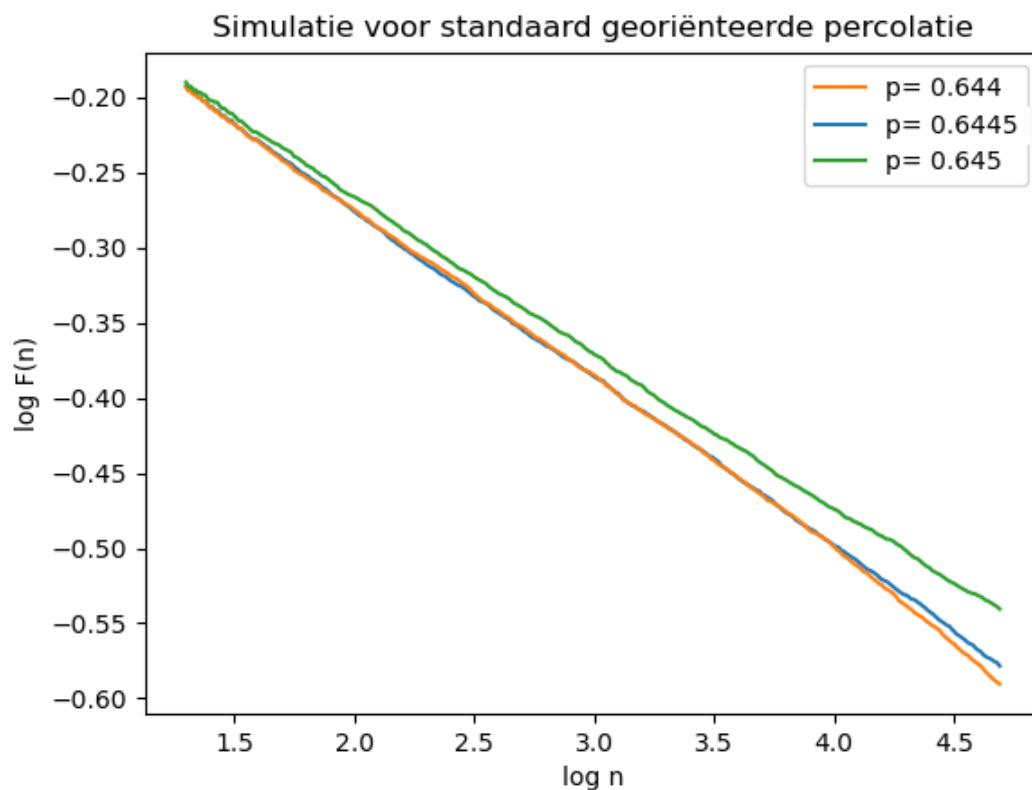
Als we dit invullen in (27) en aan beide kanten de log nemen, krijgen we een lineair verband:

$$\log F(n) \approx \sigma \log n. \quad (30)$$

Nadat we onze simulatie voor een bepaalde p waarde hebben gedaan, plotten we $\log F(n)$ en $\log n$ tegenover elkaar voor $n \in [20, 50000]$. Als we onze simulatie gedaan hebben met een waarde voor p die dicht bij de kritieke waarde ligt, verwachten we een rechte lijn. Als $p > \vec{p}_c$, is er geen lineair verband als $n \rightarrow \infty$, aangezien $P_{\vec{p}_c}^\rightarrow(n \leq |C| < \infty)$ dan convergeert naar $\theta(p) > 0$. Bovendien verwachten we dat voor $p < \vec{p}_c$ op basis van stelling 2.5 de clustergrootte exponentieel hard daalt, en niet polynomiaal, waardoor er ook geen rechte lijn verwachten. Dhar en Barma [3] hebben dit gebruikt om de kritieke waarde van het standaard georiënteerde percolatiemodel te benaderen. Om er zeker van te zijn dat dit werk hun methode goed gebruikt, simuleren we ook naast ons eigen model het standaard georiënteerde percolatiemodel.

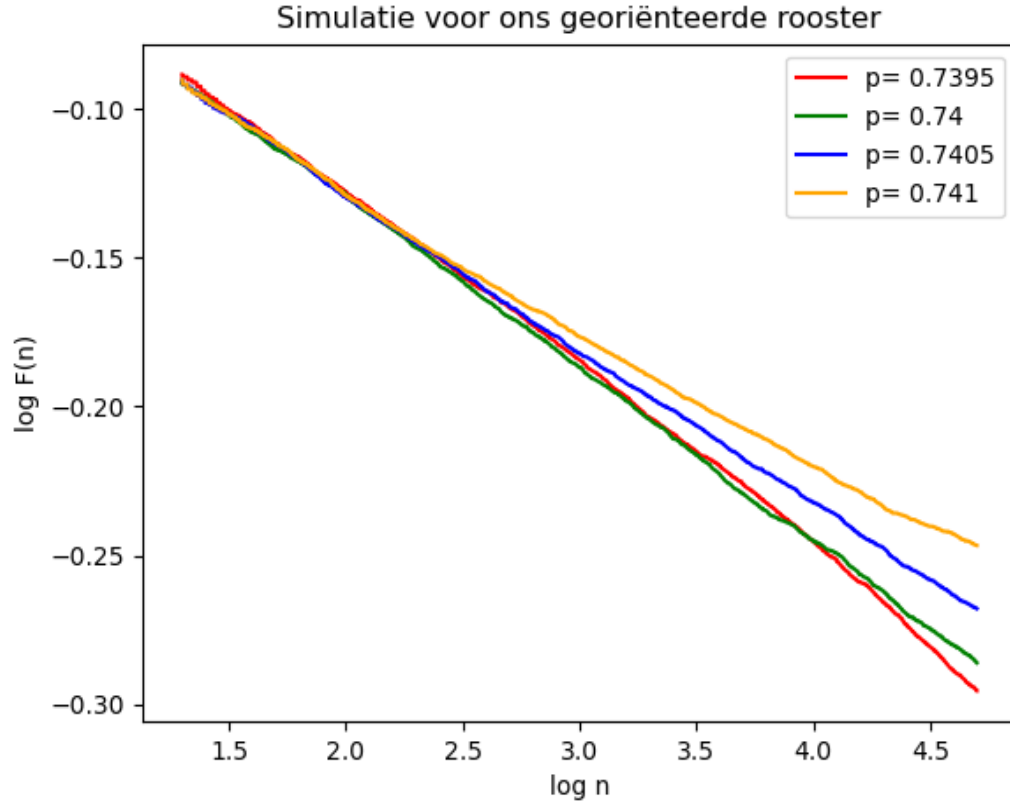
4.2 Resultaten

We beginnen met de plots voor het standaard georiënteerde percolatiemodel:



Figuur 7: Simulatie van $\vec{\mathbb{L}}^2$ voor verschillende p waarden.

We zien dat bij $p = 0,6540$ en $p = 0,6440$ de lijnen respectievelijk naar boven en naar beneden afbuigen. Op basis hiervan concludeerden de auteurs dat $p = 0,6445 \pm 0,0005$. Dit werd geverifieerd door andere onderzoeken die binnen dit interval uitkwamen zoals in [4]. Dit brengt ons bij de simulatie waar het eigenlijk om gaat, namelijk die voor percolatie op $\vec{\mathbb{L}}^2$. Na verschillende waarden voor p te hebben geprobeerd, is dit het resultaat:

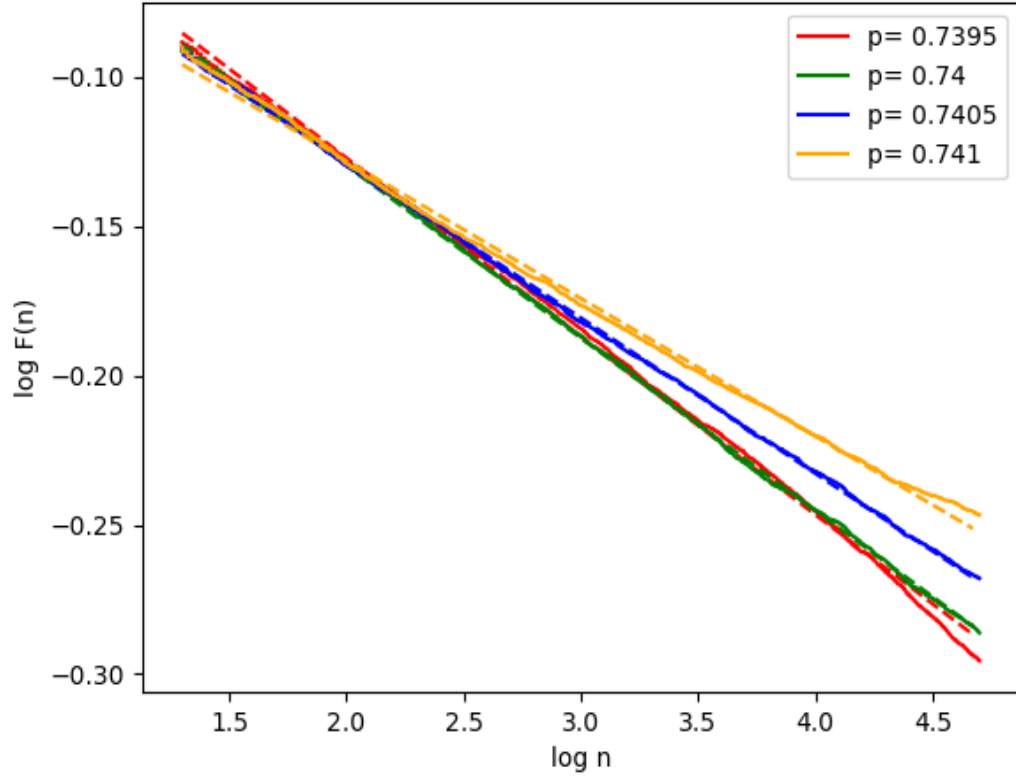


Figuur 8: Simulatie van $\mathbb{L}_{\rightarrow}^2$ voor verschillende p waarden.

De groene en blauwe lijn lijken recht te lopen, terwijl de gele en rode lijn af lijken te buigen. Om dit te illustreren fitten we een eerstegraads polynoom (rechte lijn) door deze grafieken. Als het vermoeden klopt, moet de fit voor de blauwe en groene lijnen beter zijn dan die van de gele en rode lijnen.²

²Dat de rode lijn in het begin boven de groene lijn ligt is waarschijnlijk het toeval dat hoort bij een stochastisch proces. In identieke simulaties bleken de lijnen voor lage n -waardes ook door elkaar te lopen, maar uiteindelijk kwamen de lijnen met hogere p -waardes ook hoger uit dan lijnen met lagere p -waardes. Op de Github pagina, waarnaar aan het einde gelinkt is, staan de extra simulaties voor $p = 0,74$ en $p = 0,7395$ waarop deze uitspraak gebaseerd is

Simulatie voor ons georiënteerde rooster met eerstegraads polynoom fit



Figuur 9: Simulatie van \mathbb{L}^2 voor verschillende p waardes. De stippellijnen zijn eerstegraads polynomen, die gefit zijn op de grafieken. De gele en rode grafiek buigen aan het einde af van de stippellijn.

De polynomen zijn gefit om de Mean Squared Error (MSE) te minimaliseren. De MSE voor de verschillende p -waardes is te zien in onderstaande tabel:

p	MSE
0,7395	0.0194
0,7400	0.0025
0,7405	0.0024
0,7410	0.0177

Er is dus een groot verschil in de 'rechtheid' voor $p \in \{0,74; 0,7405\}$ en $p \in \{0,7395; 0,7415\}$. Op basis hiervan concluderen we dat $\vec{p} = 0,74025 \pm 0,00075$. De code die gebruikt is voor de simulaties kan gevonden worden op <https://github.com/Matthijs99/bachelor-thesis>.

Referenties

- [1] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. “Percolation processes: I. Crystals and mazes”. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 53.3 (1957), pp. 629–641. DOI: 10.1017/S0305004100032680.
- [2] R. M. Burton and M. Keane. “Density and uniqueness in percolation”. In: *Communications in Mathematical Physics* 121.3 (1989), pp. 501–505. DOI: [cmp/1104178143](https://doi.org/10.1007/BF01206802). URL: [https://doi.org/](https://doi.org/10.1007/BF01206802).
- [3] D Dhar and M Barma. “Monte Carlo simulation of directed percolation on a square lattice”. In: *Journal of Physics C: Solid State Physics* 14.1 (Jan. 1981), pp. L1–L6. DOI: 10.1088/0022-3719/14/1/001. URL: <https://doi.org/10.1088/0022-3719/14/1/001>.
- [4] J. W. Essam et al. “Analysis of extended series for bond percolation on the directed square lattice”. In: 33.3 (Feb. 1986), pp. 1982–1986. DOI: 10.1103/PhysRevB.33.1982.
- [5] Geoffrey Grimmett. *Percolation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. DOI: 10.1007/978-3-662-03981-6.
- [6] Geoffrey Grimmett and D.R. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. 2nd ed. Oxford University Press, 1992, p. 309.
- [7] Harry Kesten. *Percolation Theory for Mathematicians*. Birkhäuser Basel, 1982, p. 386. DOI: 10.1007/978-1-4899-2730-9.
- [8] Harry Kesten. “The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$ ”. In: *Commun.Math. Phys.* 74 (1980), pp. 41–59. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01197577>.
- [9] Frank R. Kschischang. *The Subadditivity Lemma*. Nov. 2009. URL: <https://www.comm.utoronto.ca/frank/notes/subadditivity.pdf>.