1 Speltheorie: TU-spellen (Coöperatief)

met wiskundige methoden strategieën analyseren:
Twee deelgebieden * niet-coöperatief (conflict 2e helft)
* coöperatief (samenwerken)
(verdeling van winst wanneer je kunt samenwerken.

— TU-spel

Def een TU-spel is een paar (N, v) met
$N = \{1, \dots n\}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ en karakteristieke functie
$v: P(N) \to \mathbb{R}$ met de eis $v(\emptyset) = 0$

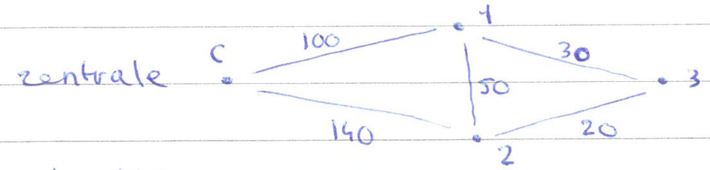
— Opm: TU staat voor "transferrable utility", "overdraagbaar nut"
Interpretatie van (N, v): N is de verz. van spelers,
def. en een $C \subseteq N$ heet een coalitie
def en N heet de grote coalitie grand coalition
def en $v(C)$ is de waarde van coalitie $C \subseteq N$

en voor singleton-coalitie $\{i\}$ schrijven we meestal
$v(i)$, maar $v(\{i\})$ is wat we bedoelen!

Note: Gegeven voorbeelden zijn zijn prototypisch maar eigenlijk te simpel voor de "echte wereld".

Vbd (Kostenbesparingsspel)(Vbd komen later terug)

Stel we willen 3 steden verbinden met elektriciteitscentral.
We nemen aan dat verbindingslijnen onbeperkende capaciteit heeft:



we nemen nu als $k_\sigma(S)$ de kosten van de minimale opspannende boom van $S \cup \{c\}$

S	∅	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
k	0	100	140	130	150	130	160	150
v	0	0	0	0	90	100	120	220

$k(\{1\}) + k(\{2\}) - k(\{1,2\})$, besparing t.o.v niet-samenwerking

Vbd (Handschoenenspel)

3 spelers:
- 1,2 bezitten een linkerhandschoen,
- 3 bezit een rechterhandschoen.

Een paar handschoenen heeft waarde 1 en geen paar waarde 0. Wat zou de bijdrage van elke speler kunnen "zijn" ?

S	∅	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v	0	0	0	0	0	1	1	1

– klein ~~Vbd~~ : maar stel bedrijf produceert met N grondstoffen (geen handschoenen..) K producten met bepaalde prijs. Wat is de "waarde" van deze grondstoffen voor het bedrijf?

Def Een verdeling voor een TU-spel (N, v) is een vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Notatie Voor een $S \subseteq N$ noteren we $x(S) = \sum_{s \in S} x_s$
Het induceert dus een functie $x : P(N) \to \mathbb{R}$

Def (Eis op verdeling) Een verdeling $x \in \mathbb{R}^n$ voor TU-spel (N, v) heet een imputatie als

(i) $\forall i \in N \; x_i \geq v(\{i\}) \quad (v(i))$

Deze eis heet "individueel rationeel" , spelers kiezen alleen voor een coalitie als ze er meer uithalen dan alleen spelen.

(ii) $x(N) = v(N)$ dit heet "efficiënt", de uitbetaling kan niet groter zijn dan wat er "te verdelen" is.

Notatie $I(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ is een imputatie van $(N, v)\}$

(Stelling over bestaan van imputaties)

$I(v) = \emptyset$ alleen als $v(N) < \sum_{s \in N} v(s)$

Bew "$\Rightarrow$" Stel er is geen imputatie $x \in \mathbb{R}^n$ van v.

Neem dan een individueel rationele verdeling $x \in \mathbb{R}^n$, die is dan niet efficiënt. Dus $x_i \geq v(i) \ \forall i \in N$ maar $x(N) \neq v(N)$, en we zien dat als $x(N) < v(N)$, dan kunnen we $x' \in \mathbb{R}^n$ definiëren door $x_1' = v(N) - x(N - \{1\})$ en $x_i' = v_i$ voor $i > 1$, en dan zien we dat x' een imputatie is, dus volgt $x(N) > v(N)$. Dan kiezen we verder zo'n $x_i = v(i)$ want dan is x nog steeds individueel rationeel en dus niet-efficiënt want geen imputatie en volgt dus

$$\sum_{i \in N} v(i) = \sum_{i \in N} x_i = x(N) > v(N).$$

"$\Leftarrow$"

Stel er is een imputatie $x \in \mathbb{R}^n$, dan volgt $x_i \geq v(i) \ \forall i \in N$ en $x(N) = v(N)$, dus $v(N) = x(N) = \sum_{i \in N} x_i \geq \sum_{i \in N} v(i)$ tegenspraak. dus $I(v) = \emptyset$

$\square$

Def een TU-spel heet essentieel ("essential") als $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(i)$ ($\Leftrightarrow$ er is een imputatie)

Notatie: (N, v) essentieel.

definieer voor $i \in N$, $x^i \in \mathbb{R}^n$ door (voor $j \in N$)

$$(x^i)_j = \begin{cases} v(j) & j \neq i \text{ en} \\ v(N) - \sum_{k \neq i} v(k) & \text{als } j = i \end{cases}$$

(Opgave) elke imputatie $I(v) \ni x$ kan als convexe lineaire combinatie $x = \sum_{i \in N} \lambda_i x^i$ met $\lambda_i \geq 0 \ \forall i \in N$, $\sum_{i \in N} \lambda_i = 1$ worden geschreven.

Def een TU-spel heet additief als $\forall S,T \subseteq N$:
$v(S \cup T) = v(S) + v(T)$.

— Deze spellen zijn saai, want de enige imputatie is $x_i = v(i)$

$\square$

Vbd In VN-veiligheidsraad zijn 5 permanente leden met veto-recht en 10 niet-permanente leden zonder veto-recht.
9 stemmen zijn nodig en alle 5 permanente leden moeten instemmen.

15-speler TU-spel met waarden 0, 1 voor de karakteristieke functie en

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{als } \{1,..,5\} \subseteq S \text{ en } |S| \geq 9 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Wat is dan de verdeling? Dat is nu de machtsverdeling (hier vinden we een kwantificatie van machtsverhoudingen in politiek dmv TU-spellen).

!

Def een TU-spel heet enkelvoudig $\boxed{\text{als } v(N) = 1}$ en $v(S) = 1$ of $v(S) = 0$ voor alle $S \subseteq N$

we noemen een coalitie met waarde
1 : winnend   0: verliezend

- een speler $i \in N$ is een dictator als
  $\forall S \subseteq N \ (v(S) = 1 \Leftrightarrow i \in S)$

- " ——— " is een veto-speler als
  $\forall S \subseteq N \ (v(S) = 1 \Rightarrow i \in S$

Def (N, v) enkelvoudig heet monotoon als
$v(S) \leq v(T)$ als $S \subseteq T$

Notatie $W = \{ S \subseteq N : v(S) = 1 \}$ $(\subseteq P(N))$

- de minimaal winnende coalities:
- $W^{min} = \{ S \in W : \forall_T (T \in W \text{ en } T \subseteq S) \Rightarrow T = S \}$

de verzameling van alle winnende coalities die geen "strikt kleinere" winnende coalities bevatten (i.e. we kunnen geen spelers "weglaten").

— (Lemma) Zij (N, v) enkelvoudig.

(i) $v : P(N) \to \mathbb{R}$ kan worden teruggevonden uit W

(ii) Als (N, v) monotoon is, kan v worden teruggevonden uit W^{min}.

Bew (i) definieer $v'(S) = \begin{cases} 1 & \text{als } S \in W \\ 0 & \text{als } S \notin W \end{cases}$

dan $v'(S) = 1 \Leftrightarrow S \in W \Leftrightarrow v(S) = 1$

dus $v = v'$ want $v'(S) = 0 \Leftrightarrow v'(S) \neq 1 \Leftrightarrow$ $v(S) \neq 1 \Leftrightarrow v(S) = 0$.

(ii) definieer $v'(S) = \begin{cases} 1 & \text{als } \exists T \in W^{min} \; T \subseteq S \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$

dan $v'(S) = 1 \Leftrightarrow \exists T \in W^{min} \; T \subseteq S$

$\underline{\Rightarrow}$ $v(T) = 1$ en $T \subseteq S$ dus $v(S) = 1$ wegens monotoniciteit

"$\Leftarrow$" en als $v(S) = 1$, dan zij $V = \{ T \subseteq S : v(T) = 1 \}$ en zij $L \in V$ zodat $|L|$ minimaal is (in $\mathbb{N}$, dat kan op grond van minimaalprincipe).

Dan $L \in W$ en als er een $L' \subseteq L$ is met $L' \in W$ dan $L' \in W$, $L' \subseteq S$ dus $L' \in V$, dus $|L'| \geq |L|$ dus $L' = L$ $\Rightarrow L \in W^{min}$ dus.

dus $\exists T \in W^{min}$ (n.l. L) met $T \subseteq S$ $\Rightarrow v'(S) = 1$

hiermee is bewezen $v'(S) = 1 \Leftrightarrow v(S) = 1$ dus

$v' = v$ want $v(S) = 0 \Leftrightarrow v(S) \neq 1$
$\Leftrightarrow v'(S) \neq 1 \Leftrightarrow v(S) = 0$. $\square$

Dit betekent dat monotone enkelvoudige spelen gerepresenteerd kunnen worden door hun W^{min}, wat veel kleiner is (meestal) dan v.

Twee spellen zijn hetzelfde als W^{min} gelijk zijn!

— Vbd een ander TU-spel:

Def zij $q_1 \dots q_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $0 < q \leq \sum_{i=1}^{n} q_i$

Hiermee definiëren we een enkelvoudig TU-spel geheten een gewogen meerderheidsspel met

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{als } \sum_{i \in S} q_i \geq q \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

weighted majority

$\boxed{\text{is monotoon!}}$

Vbd de VN-veiligheidsraad kan als gewogen meerderheidsspel worden beschreven, door vetospelers grote q_i te geven.

Ihb neem $q_i = 7$ als $i = 1, \dots 5$
$q_i = 1$ als $i \in \{6, \dots, 15\}$
en $q = 39$

Dan zien we $v(S) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i \in S} q_i \geq 39$

$\Leftrightarrow$ je hebt alle $i = 1 \dots 5$ nodig anders kom je nooit over 39 (want $4 \cdot 7 + 10 = 38 < 39$) en dan minstens 4 anderen

$\Leftrightarrow \{1, \dots, 5\} \subseteq S$ en $|S| \geq 9$

Vbd Rechterhandschoenspel: is monotoon, want als S een paar heeft, dan $S' \supseteq S$ ook.
Dus beschrijven we met $W^{min} = \{\{1,3\}, \{2,3\}\}$

Neem nu parlement met stemmende partijen 1,2,3:
$q_1 = 49$, $q_2 = 1$, $q_3 = 50$, $q = 51$:
Dan is dit ook monotoon (immers heeft S genoeg stemmen dan $S' \supseteq S$ ook) en $W^{min} = \{\{1,3\}, \{2,3\}\}$

Def Zij (N, v) een TU-spel. De <u>kern</u> van (N, v) is

$$C(v) = \{ x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N) \text{ en } x(S) \geq v(S) \}$$

voor alle $\emptyset \neq S \subseteq N$

We zien dat als $x \in C(v)$, dan ihb
$x_i = x(\{i\}) \geq v(\{i\})$ voor elke i dus $C(v) \subseteq I(v)$

Vbd Handschoenenspel, monotoon enkelvoudig met $W^{min} = \{\{1,3\},\{2,3\}\}$
neem $x \in C(v)$, dan

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 && \text{en} \\ x_1 + x_3 &\geq 1 && \text{, maar ook } \leq 1 \\ x_2 + x_3 &\geq 1 && \phantom{\text{, maar ook }} \leq 1 \end{aligned} \Bigg\} \text{ wegens efficiëntie}$$

$$\Rightarrow \text{ stelsel } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow x_3 = 1, x_2 = 0, x_1 = 0$$

dus $C(v) = \{(0,0,1)\}$

maar is dit overtuigend?

3 is een vetospeler maar geen dictator, dus "alle winst opeisen" is niet echt reëel.

Vbd (Kostenbesparing)

S	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
0	90	100	120	220

dus
$$C(v) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 220 \\ x_1 + x_2 &\geq 90 \\ x_1 + x_3 &\geq 100 \\ x_2 + x_3 &\geq 120 \end{aligned} \right\}$$

Dit is in $\mathbb{R}^3$ een polyëder die ihb convex is.
Belangrijk is dat $C(v)$ hier uit heel veel verdelingen bestaat: er is nog geen optimale oplossing.

Vbd $n = 3$

$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
	0	0	1	2	1	1	2

is dit essentieel? $v(\{1,2,3\}) = 2 \geq 1 = \sum_{i \in N} v(i)$. Ja,
er zijn <u>imputaties</u>. Maar de kern is leeg.

Stel $x \in C(v)$ dan $x_3 \geq 1$, $x_1 + x_2 \geq 2$, maar dan
$x(N) \geq 1+2 = 3 > v(N)$ dus x is niet efficiënt,
dus $x \notin C(v)$ tegenspraak

$$\Longrightarrow C(v) = \emptyset$$

— (Algemene vorm van kernen van enkelvoudige TU-spellen)

Lemma Zij (N,v) enkelvoudig TU-spel. Als (N,v) geen
(i) vetospelers heeft, is $C(v) = \emptyset$
(ii) als $V = \{i \in N : i \text{ is een vetospeler}\} \neq \emptyset$
dan geldt

$$C(v) = \Big\{ \sum_{i \in V} \lambda_i e_i \;:\; \lambda_i \geq 0 \,, \sum_{i \in V} \lambda_i = 0 \Big\}$$

met e_i standaardbasisvector i $(e_i)_j = \delta_{ij}$ van $\mathbb{R}^n$

Bew (i) Stel $x \in C(v)$ bestaat, neem $i \in N$, dan is
i geen vetospeler, dus er is een $S \in W$ met $i \notin S$.
dan $0 \leq x_i = x(\{i\}) = x(N) - x(S) - x(T)$
voor $N = S \cup T \cup \{i\}$ als disjuncte vereniging
$\leq x(N) - x(S)$ (want $x(T) \geq 0$ want $v(T) \geq 0$)
$= 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow x_i = 0$ voor will. dus alle i, dus
$x = 0$ in $\mathbb{R}^n$, dus $x(N) = 0 \neq 1 = v(N)$

(ii) neem $x = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \geq 0$ $\forall i \in V$, $\sum_{i \in V} \lambda_i = 1$

$\Rightarrow$ als S winnend is, dan $V \subseteq S$, dus
$x(S) = 0 + x(V) = \sum_{i \in V} \lambda_i = 1 = v(S)$
en als S verliezend is, dan $x(S) \geq 0 = v(S)$
geldt nog steeds omdat $\lambda_i \geq 0$ termsgewijs
in de som $x(S)$ dus positief. $\Rightarrow x \in C(v)$

$\Leftarrow$ neem $x \in C(v)$. Het is voldoende om aan
te tonen dat $x_i = 0$ voor elke niet-vetospeler i

maar dit zagen we al onder (i) wegens

$0 \le x_i = x(\{i\}) \le x(N) - x(S) = 1 - 1 = 0$

en dus volgt, omdat $\forall i \in N \ \ x_i \ge 0$ en

$\sum_{i \in N} x_i = v(N) = 1$, dat wel moet gelden $x = \sum_{i \in V} \lambda_i e_i$

voor $\lambda_i \ge 0$, $\sum_{i \in V} \lambda_i = 1$.

OPGAVEN

1.1 Zij (N,v) een monotone enkelvoudige 5-speler TU-spel met $W^{min} = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$
Laat zien dat (N,v) geen gewogen meerderheids-spel kan zijn.

Bewijs: stel het is er wel een. Dan zijn er $q, q_1, q_2 \dots q_5 \in \mathbb{R}$ met $q_i \ge 0$, $q > 0$ voor alle $i \in N$ en voor alle $S \in P(N)$:

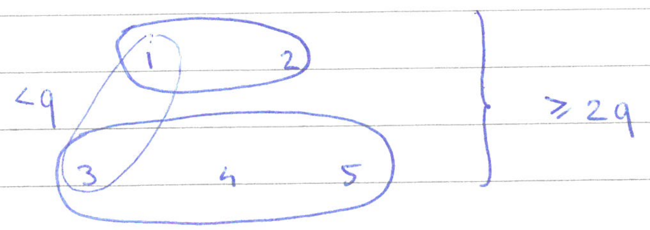
$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{als } \sum_{i \in S} q_i \ge q \\ 0 & \text{als } \sum_{i \in S} q_i < q \end{cases}$$

omdat tevens geldt dat $v(S) = 1 \Leftrightarrow S \supseteq \{1,2\}$ of $\{3,4,5\} \subseteq S$, aangezien (N,v) monotoon is dus gekarakteriseerd wordt door W^{min}, volgt:

$q_3 + q_4 + q_5 \ge q$ $\quad q_1 + q_2 \ge q.$ $\quad q_1 + q_3 < q$

dan $q \ge q_2 + q_4 + q_5 = (q_1 + q_2) + (q_3 + q_4 + q_5) - (q_1 + q_3)$
$> q + q - q = q$

tegenspraak



1.2 voor $x \in \mathbb{R}^3$ geldt $x \in C(v)$ alleen als:

x is efficient, dus $x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\}) = 22$

x is rationeel per coalitie, dus

$\{1\}: \quad x_1 \geq 2 \qquad \{1,2\}: \quad x_1 + x_2 \geq 12$

$\{2\}: \quad x_2 \geq 5 \qquad \{1,3\}: \quad x_1 + x_3 \geq 16$

$\{3\}: \quad x_3 \geq 4 \qquad \{2,3\}: \quad x_2 + x_3 \geq 7$

we zien dat $x_2 \geq 5$ en $x_3 \geq 5$ impliceert dat $x_2 + x_3 \geq 7$, dus deze ongelijkheid laten we vallen.

Uit $x_1 + x_2 + x_3 = 22$ met $x_1 + x_3 \geq 16$ volgt $x_2 \leq 6$

en met $x_1 + x_2 \geq 12$ volgt $x_3 \leq 10$

De ongelijkheden impliceren dus het stelsel

$$\begin{cases} 5 \leq x_2 \leq 6 \\ 4 \leq x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 22 \end{cases}$$

maar impliceert andersom dit stelsel ook het eerste stelsel?

Ja, want als $x_2 \leq 6$, $x_3 \leq 10$, dan $x_1 = 22 - x_2 - x_3 \geq 6 \geq 2$ en $x_2 \geq 5$, $x_3 \geq 4$ is voldaan. Verder $x_1 + x_2 = 22 - x_3 \geq 12$ is voldaan, $x_1 + x_3 = 22 - x_2 \geq 16$ en $x_2 + x_3 \geq 5 + 4 = 9$ is voldaan. Tenslotte ook $x_1 + x_2 + x_3 = 22$. Dus de twee stelsels zijn equivalent!

daarmee vinden we precies dat $a_2 = 5$, $b_2 = 6$

$a_3 = 4$, $b_3 = 10$ $\square$

$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) : 5 \leq x_2 \leq 6,\ 4 \leq x_3 \leq 10,\ x_1 + x_2 + x_3 = 22\}$$

1.3 Zij (N,v) een essentiële TU-spel. Zij voor $i \in N$, $x^i \in \mathbb{R}^n$ de vector $(x^i)_j = \begin{cases} v(N) - \sum_{k \neq i} v(k) & i = j \\ v(j) & \text{anders } (i \neq j) \end{cases}$

Definieer het "convexe opspansel" van $\{x^1, .. x^n\}$ als $C(x^1, .. x^n) = \left\{ \sum_{i \in N} \lambda_i x^i : \forall i \; \lambda_i \geq 0 , \sum_{i \in N} \lambda_i = 1 \right\}$

Doel van de opgave: laten zien $C(x^1, .. x^n) = I(v)$

(i) aantonen dat $C(x^1, .. x^n) \subseteq I(v)$: zij $x = \sum_{i \in N} \lambda_i x^i$ met λ_i zoals gegeven. Dan:

x is efficiënt, want $\sum_{j \in N} x_j = \sum_{j \in N} \left(\sum_{i \in N} \lambda_i x^i \right)_j$

$$= \sum_{j \in N} \sum_{i \in N} \lambda_i (x^i)_j = \sum_{i \in N} \lambda_i \sum_{j \in N} (x^i)_j = v(N) \overbrace{\sum_{i \in N} \lambda_i}^{1} = v(N)$$

en $$\sum_{j \in N} (x^i)_j = \left(v(N) - \sum_{k \neq i} v(k) \right) + \sum_{j \neq i} (x^i)_j$$

$$= v(N) - \sum_{k \neq i} v(k) + \sum_{j \neq i} v(j) = v(N)$$

en x is individueel rationeel, want

$$x_j = \left(\sum_{i \in N} \lambda_i x^i \right)_j = \sum_{i \in N} \lambda_i (x^i)_j = \lambda_j \left(v(N) - \sum_{k \neq j} v(k) \right) + \sum_{i \neq j} \lambda_i (x^i)_j$$

$$= \lambda_j \left(v(N) - \sum_{k \neq j} v(k) \right) + \underbrace{\sum_{k \neq j} \lambda_k v(k)}$$

$$= \lambda_j \left(v(N) - \sum_{k \neq j} v(k) \right)$$

2

Herh: (N,v) TU-spel $N=\{1,..,n\}$ $v: P(N) \to \mathbb{R}$ met $v(\emptyset)=0$

Nu: vinden van verdelingen $x=(x_1 .. x_n) \in \mathbb{R}^n$

— Naïeve aanpak: kies $x_i = -v(\{1,..i-1\}) + v(\{1,...i\})$
Dan is x efficiënt want $x(N) = \sum_{i=0}^{n} (-v(\{1,..i-1\}) + v(\{1,..i\}))$
$= v(N) - v(\emptyset) = v(N)$

We willen dit nu middellen over alle volgordes waarin we spelers toevoegen aan de coalitie: het is nu immers voordelig / nadelig om "ver" in de verzameling genummerd te zijn

— tool: permutaties. een permutatie $\sigma: N \to N$ is een bijectieve afbeelding van eindige verz. naar zichzelf. er zijn $|N|!$ zulke permutaties.

notatie bijv. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Def Zij $\sigma: N \to N$ permutatie. Dan is de verz. van voorgangers van $i \in N$ in de permutatie:

$$P_\sigma(i) = \{k \in N : \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(i)\}$$

— Vbd $i=2$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ dan
$P_\sigma(i) = \{k \in N : \sigma^{-1}(k) < 3\}$
$= \{3, 5\}$

Dus, de j-de speler die aankomt is $\sigma(j)$ en alle k met $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(i)$ "komen vóór i aan"

Def voor (N,v) TU-spel en $\sigma: N \to N$ permutatie. Dan is de marginaalvector $m^\sigma(v) \in \mathbb{R}^n$:
$(m^\sigma(v))_i = v(P_\sigma(i) \cup \{i\}) - v(P_\sigma(i))$

Opm voor $\sigma = id$ krijgen we de "naïeve aanpak" terug.

Def (Shapleywaarde) $\Phi(v)$ van een TU-spel (N, v) is $\Phi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} m^\sigma(v)$

— interpretatie: verwachte waarde van "toetreden tot grote coalitie" als alle volgordes van toetreden $\sigma \in S_n$ even waarschijnlijk zijn.

— Maar er zijn ook andere motivaties, welke we zodirect zullen zien.

Vbd $n=2$, dan is v bepaald door $2^2-1=3$ reële getallen, $v(1)$, $v(2)$, $v(\{1,2\})$ en $S_2 = \{id, (12)\}$

$$m^{id}(v) = (v(1) - v(\emptyset),\ v(\{1,2\}) - v(1))$$
$$m^{(12)}(v) = (v(\{1,2\}) - v(2),\ v(2) - v(\emptyset))$$

dus
$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\left(v(1) + v(N) - v(2),\ v(2) + v(N) - v(1)\right)$$
$$= \left(v(1) + \frac{v(N) - v(1) - v(2)}{2},\ v(2) + \frac{v(N) - v(1) - v(2)}{2}\right)$$

En de spelers zullen dus alleen voor de grote coalitie kiezen als $\frac{v(N) - v(1) - v(2)}{2} > 0$

de Shapleywaarde verdeeld hier de toegevoegde waarde van de grote coalitie gelijk over de spelers.

Vbd (Handschoenenspel) $W^{min} = \{\{1,3\},\{2,3\}\}$
monotoon, enkelvoudig. in S_3 zijn 6 permutaties:
$\{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. tabel:

$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\sigma(3)$	$(m^\sigma(v))_1$	$(m^\sigma(v))_2$	$(m^\sigma(v))_3$
1	2	3	0	0	1
1	3	2	0	0	1
2	1	3	0	0	1
2	3	1	0	0	1
3	1	2	1	0	0
3	2	1	0	1	0

$\Phi(v) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$

ihb $\Phi(v) \notin C(v)$
!

- Dus iha hoeft de Shapley-waarde niet in de kern te liggen

- Praktisch probleem: Shapleywaarde is moeilijk te berekenen ($n!$ termen in de som)

Lemma (Berekenen shapleywaarde) (N, v) TU-spel, $i \in N$

Dan
$$\Phi(v)_i = \sum_{i \notin S \subseteq N} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \Big(v(S \cup \{i\}) - v(S) \Big)$$

Bew
$$\Phi(v)_i = \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} m^\sigma(v) \right)_i$$

Als $i \notin S$ voor een coalitie S, dan verschijnt $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ als $m^\sigma(v)_i$ precies $|S|!(n-1-|S|)!$ keer.
Want de spelers kunnen precies op $|S|!$ volgorden binnenkeden, dat geeft $|S|!$ keuzes voor $\sigma(1) \dots \sigma(|S|)$, n.l. het aantal permutaties van S.
En ná i treden nog alle spelers uit $(N - \{i\}) - S$ spelers toe, dat kan op $(n-1-|S|)!$ volgordes
dus met de productregel uit combinatoriek zijn er $|S|!(n-1-|S|)!$ permutaties σ waarvoor $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ als $m^\sigma(v)_i$ optreedt. En elke σ geeft ook aanleiding tot een $S = P_\sigma(i)$ gekarakteriseerd door $P_\sigma(i) \subseteq N$, $i \notin P_\sigma(i)$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} m^\sigma(v) \right)_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} m^\sigma(v)_i =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{i \notin S \subseteq N} |S|!(n-1-|S|)! \big(v(S \cup \{i\}) - v(S) \big) =$$

$$\sum_{i \notin S \subseteq N} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \big(v(S \cup \{i\}) - v(S) \big)$$

$\square$

nu nog slechts $|\mathcal{P}(N - \{i\})| = 2^{n-1}$ termen per $i \in N$,
dus $n 2^{n-1}$ ipv $n!$

Vbd (Veiligheidsraad VN) alle permutaties bekijken is heel slecht idee! Maar de 5 vetospelers zijn niet verschillend op nummering na en de niet vaste leden ook.

Zij $i \in N$ niet-vast lid. Wanneer is, voor $i \notin S \subseteq N$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 1$? Eigenlijk alleen wanneer $\{1, .., 5\} \subseteq S$ én $|S| = 8$, en dat kan op (kies er 3 uit $|N - \{1, .., 5, i\}| = 15 - 6 = 9$) $\binom{9}{3} = 84$ manieren. Anders is $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$,

$$\Rightarrow \Phi(v)_i = 84 \cdot \frac{1}{15\binom{14}{8}} \cdot 1 = \frac{84}{15 \cdot 3003} = \frac{28}{15015}$$

En omdat $\Phi(v)$ efficient is volgt dat voor de vetospelers geldt $\Phi(v)_i = \frac{1}{5}\left(1 - 10 \cdot \frac{28}{15015}\right)$

$$= \frac{1}{5} - \frac{56}{15015} = \frac{2947}{15015} = \frac{421}{2145}$$

→ Eigenschappen van de Shapleywaarde

we hebben een formule. Maar we willen deze graag ontwikkelen uit de gewenste eigenschappen

Def Zij G^N de verzameling van alle (N, v), TU-spellen met spelersverz. N.

Dit is een $\mathbb{R}$-lineaire ruimte, voor $v_1, v_2 \in G^N$ is het somspel

- $v_1 + v_2 \in G^N$ geg. door $\forall S \subseteq N \; (v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$
- $\lambda v_1 \in G^N$ geg. door $\forall S \subseteq N \; (\lambda v_1)(S) = \lambda \cdot v_1(S)$

dus gewoon als functieruimte

$$\{v : P(N) \to \mathbb{R} : v(\emptyset) = 0\}$$

Def een waarde op $\mathcal{G}^N$ is een afb. $\psi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^n$

Vbd marginaalvector vH $m^\sigma(v)$ is een waarde

Vbd shapleywaarde $v \mapsto \Phi(v)$

Notatie voor $S \subseteq N$, $v \in \mathcal{G}^N$ noteert men $\psi(v)(S) := \sum_{i \in S} \psi(v)_i$

Een waarde kan aan verschillende axioma's voldoen

(EFF) efficiëntie : als $\psi(v)(S) = v(S)$

Lemma (Shapleywaarde voldoet aan EFF)

Bewijs: voor marginaalvector $m^\sigma(v)$ geldt

$$m^\sigma(v)(S) = \sum_{i \in N} m^\sigma(v)_{\sigma(i)}$$

volgorde maakt niet uit

$$= \sum_{i=1} \left(v(\sigma(\{1,..i\})) - v(\sigma(\{1,..i-1\})) \right)$$

$$= v(\sigma(N)) - \sigma(\emptyset) = v(N)$$ dus m^σ is (EFF)

$$\Longrightarrow \sum_{i \in N} \Phi(v)_i = \sum_{i \in N} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} m^\sigma(v) \right)_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{i \in N} m^\sigma(v)_i$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} v(N) = \frac{1}{n!} n! \, v(N) = v(N)$$

$\square$

Def een speler $i \in N$ heet een <u>nulspeler</u> als $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ voor alle $i \notin S \subseteq N$.

(NP) nulspeleraxioma: waarde voldoet hieraan als $\psi(v)_i = 0$ als $i \in N$ nulspeler is.

Lemma (Shapleywaarde voldoet aan NP)

Bewijs: we gebruiken niet de definitie maar de afgeleide formule:

$$\Phi(v)_i = \sum_{i \notin S \subseteq N} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S) \right)$$

voor i een nulspeler wordt elke term 0, dus $\Phi(v)_i = 0$

$\square$

(SYMM) (N,v) TU-spel. twee spelers $i,j \in N$ zijn symmetrisch als $v(S\cup\{i\}) = v(S \cup \{j\})$ voor alle $i,j \notin S \subseteq N$

Een waarde $\psi : \mathcal{G}^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heet symmetrisch (SYM) als $\psi(v)_i = \psi(v)_j$ wanneer i,j symmetrische spelers zijn.

lemma : Shapleywaarde is (SYM)

Bewijs : zij $v \in \mathcal{G}^N$ en $i,j \in N$ symmetrisch:

$$\text{dan} \quad \Phi(v)_i = \sum_{i \notin S \subseteq N} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \big(v(S\cup\{i\}) - v(S) \big)$$

$$\text{dus} \quad \Phi(v)_i - \Phi(v)_j = \sum_{\substack{i \notin S \subseteq N \\ j \in S}} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \big(v(S\cup\{i\}) - v(S) \big)$$

$$- \sum_{\substack{j \notin S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \big(v(S\cup\{j\}) - v(S) \big)$$

want alle S met $i,j \notin S \subseteq N$ vallen al tegen elkaar weg.

Echter, als $i \notin S \subseteq N$, $j \in S$, dan $S = T \cup \{j\}$ voor $T \subseteq N$, $i,j \notin T$. Dus $v(S) = v(T\cup\{i\})$ wegens i,j symmetrisch. Dus we kunnen in plaats van over S sommeren ook over $T \subseteq N$ sommeren met $T \not\ni i,j$:

$$= \sum_{i,j \notin T \subseteq N} \frac{1}{n\binom{n-1}{|T|+1}} \big(\underset{\shortparallel}{v(T\cup\{i,j\})} - \underset{\shortparallel}{v(T\cup\{j\})} \big)$$

$$- \sum_{i,j \notin T \subseteq N} \frac{1}{n\binom{n-1}{|T|+1}} \big(v(T\cup\{i,j\}) - v(T\cup\{i\}) \big)$$

$$= 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi(v)_i = \Phi(v)_j \qquad \square$$

Def (ADD) Een waarde $\psi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^n$ heet additief (ADD) als $\forall v, w \in \mathcal{G}^N$ $\underbrace{\psi(v+w)}_{\text{in } \mathcal{G}^N} = \underbrace{\psi(v) + \psi(w)}_{\text{in } \mathbb{R}^n}$

— Idee: als je het spel in twee delen deelt en als je dan de waarde voor de twee aparte spellen berekent en vervolgens de waarden optelt, komt er hetzelfde uit.

Lemma Shapleywaarde voldoet aan (ADD)

Bew. voor alle $i \in N$ en $S \subseteq N$, $i \notin S$, geldt

$$(v+w)(S \cup \{i\}) - (v+w)(S) =$$
$$v(S \cup \{i\}) - v(S) + w(S \cup \{i\}) - w(S)$$

dus
$$\Phi_i(v+w)_i = \sum_{i \notin S \subseteq N} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \Big((v+w)(S \cup \{i\}) - (v+w)(S) \Big)$$
$$= \sum_{i \notin S \subseteq N} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \Big(v(S \cup \{i\}) - v(S) \Big) + \sum_{i \notin S \subseteq N} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \Big(w(S \cup \{i\}) - w(S) \Big)$$
$$= \Phi(v)_i + \Phi(w)_i, \quad \forall i \implies \Phi(v+w) = \Phi(v) + \Phi(w)$$

$\square$

— volgende keer: (Stelling) De Shapleywaarde is de unieke waarde die aan EFF, NP, SYM en ADD voldoet.

Hiertoe gebruiken we extensief de eigenschappen van $\mathcal{G}^N$ als (we zullen zien eindigdim.) v.r. over $\mathbb{R}$.

3 # Axiomatische Shapley-waarde Φ

De verzameling $\mathrm{map}(X,K) = \{f : X \to K\}$ voor K een lichaam is een K-vectorruimte met de $+ : \mathrm{map} \times \mathrm{map} \to \mathrm{map}$ en $\cdot\ K \times \mathrm{map} \to \mathrm{map}$ door:

- $\lambda \in K$, $f : X \to K$ dan $\lambda f : X \to K$ door $x \mapsto \lambda \cdot f(x)$
- $f, g : X \to K$ dan $(f+g) : X \to K$ door $x \mapsto f(x) + g(x)$

St. Bovendien $\dim_K(\mathrm{map}(X,K)) = |X|$, in elk geval als X <u>eindig is</u>.

Bew Definieer, voor $X = \{x_1, .. x_n\}$, $f_i : X \to K$ door $f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \neq x_i \\ 0 & \text{als } x = x_i \end{cases}$ Dan gaan we aantonen dat $\{f_1, \dots, f_n\}$ een basis vormt:

- Als $f \in \mathrm{map}$, zij dan voor $i = 1, .. n$ $\lambda_i := f(x_i)$
  Dan geldt voor $f' : X \to K$ door $f' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$
  dat $f'(x_i) = \lambda_i \cdot 1 + \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot 0 = \lambda_i = f(x_i)$
  dus $f' = f$ op X, dus $\mathrm{map} = \mathrm{span}\{f_1, \dots, f_n\}$
- Nu dat $\{f_1, .. f_n\}$ lineair onafh. is: Stel
  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ de nulfunctie, voor $\lambda_i \in K$.
  evalueer in x_i, dan geeft dit $\lambda_1 f(x_i) + \dots + \lambda_n f_n(x_i) = 0$
  $\Rightarrow \lambda_i \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$. Dit voor well.
  dus alle $i \in \{1, .. n\}$

$\Rightarrow \{f_1, .. f_n\}$ is basis, met kard. $|X|$ $\square$

Gevolg $\mathcal{G}^N = \{v : \mathcal{P}(N) - \{\emptyset\} \to \mathbb{R}\}$ is een $\mathbb{R}$-v.r. met dimensie $|\mathcal{P}(N) - \{\emptyset\}| = 2^n - 1$ $\square$

Def (T-unanimiteitsspel) $\emptyset \neq T \subseteq N$. Een T-un.teitsspel is een $u_T \in \mathcal{G}^N$ met $u_T(S) = 1$ alleen als $T \subseteq S$ en $u_T(S) = 0$ anders.

— Dit is een monotoon enkelvoudig spel dat we ook kunnen beschrijven met $W^{\min} = \{T\}$

Lemma De collectie unanimiteitsspellen $\{u_T\}_{T \in P(N) - \{\emptyset\}}$ is een basis voor $\mathcal{G}^N$

Bew Het voldoet om aan te tonen dat alle u_T verschillend zijn en dat $\{u_T\}_{T \in P(N) - \{\emptyset\}}$ lineair onafh. is, want een lin. onafh. verz. van $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{G}^N$ elementen moet wel een basis zijn.

$u_T \neq u_{T'}$ voor $T \neq T'$ omdat $W^{min}_{u_T} \neq W^{min}_{u_{T'}}$ en deze monotone enkelvoudige spellen worden door W^{min} gekarakteriseerd. Dus alle u_T zijn verschillend.

Stel nu $\sum_{\emptyset = T \subseteq N} \lambda_T u_T = 0 \left(: P(N) - \{\emptyset\} \to \mathbb{R} \quad S \mapsto 0 \right)$

We bewijzen met inductie naar $|T| \geq 1$ dat $\lambda_T = 0$. IB : $|T| = 1$ geeft : Evalueer de functie in $\{i\}$ voor $i \in N$ willl. dan $u_T(\{i\}) = 1 \Leftrightarrow T \subseteq \{i\} \Leftrightarrow T = \{i\}$ dus $\lambda_{\{i\}} = 0$ voor will. $i \in N$. dus voor alle T met $|T| = 1$ is $T = \{j\}$ van die vorm en dus $\lambda_T = 0$.

$\boxed{IS}$ stel voor $|T| < n$ blijkt $\lambda_T = 0$.
Bekijk dan een $S \subseteq N$ willekeurig met $|S| = n$.
we weten al dat $\lambda_T = 0$ voor alle $T \subsetneq S$ want deze T hebben $|T| < n$. Dan volgt

$$\sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T| \geq n}} \lambda_T u_T(S) = 0$$, want voor alle $S \subseteq N$.

maar $u_T(S) = 1 \Leftrightarrow T \subseteq S$, $|T| = n = |S| \Leftrightarrow T = S$

dus hier staat $\lambda_S u_S(S) = \lambda_S = 0 \Rightarrow$ voor alle $S \subseteq N$ $|S| = n$ geldt $\lambda_S = 0$. Dus met inductie geldt voor alle $S \subseteq N$ dat $\lambda_S = 0$

$\square$

Stelling : De shapleywaarde Φ is de unieke waarde $\mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^n$ die voldoet aan

EFF $\Phi(v)(N) = v(N)$, $\forall v \in \mathcal{G}^N$
NP $\forall i \in N \; (\forall S \subseteq N, i \notin S \quad v(S \cup \{i\}) = v(S)) \Rightarrow \Phi(v)_i = 0$
SYM $\forall i,j \in N \; (\forall S \subseteq N, i,j \notin S \quad v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})) \Rightarrow \Phi(v)_i = \Phi(v)_j$
ADD $\forall v,w \in \mathcal{G}^N \quad \Phi(v+w) = \Phi(v) + \Phi(w)$

Bewijs : dat Φ voldoet, zagen we vorig hoofdstuk al. Stel nu $\Psi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^n$ voldoet ook aan EFF, NP, SYM, ADD. We laten zien dat $\Psi(u_T) = \Phi(u_T)$ voor elk unanimiteitsspel u_T, $T \subseteq N, T \neq \emptyset$. Omdat Ψ, Φ aan ADD voldoen én EFF, volgt voor $\lambda \in \mathbb{R}$ dat voor elke $v \in \mathcal{G}^N$ $\Psi, \Phi(\lambda v)(N) = \lambda v(N)$. Hiermee bewijzen we met inductie naar $|T|$ dat voor $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $\Psi(\lambda u_T) = \lambda \Psi(u_T)$

Bew: voor $|T| = 1$ is $T = \{i\}$. Elke speler behalve i is dan een nulspeler , dus $\Psi(\lambda u_T)_j = 0$ en $\Psi(\lambda u_T)_i = \lambda$ wegens eff.
maar hetzelfde voor $\Psi(u_T)_j = 0$ en $\Psi(u_T)_i = 1$
$\Rightarrow \Psi(\lambda u_T) = \lambda \Psi(u_T)$

IH stel voor alle T met $|T| < n$ geldt de uitspraak $\Psi(\lambda u_T) = \lambda \Psi(u_T)$

IS Dan neem $T \subseteq N$, $|T| = n$. Wederom, als $j \notin T$ dan wegens (NUL) $\Psi(\lambda u_T)_j = 0$
voor $i,j \in T$, $j \neq i$, geldt als $S \subseteq N$ en $i \notin S$, $j \notin S$, dan $v(S \cup \{i\}) = 0$ en $v(S \cup \{j\}) = 0$
want $j \notin S \cup \{i\}, j \in T$, $i \notin S \cup \{j\} \subsetneq T \ni i$.
Dus i,j zijn symmetrisch $\Rightarrow \Phi(\lambda u_T)_i = \Phi(\lambda u_T)_j \quad \forall i,j \in T$
en dit is $\lambda / |T| = v(N) / |T|$.
maar dan voor $\lambda = 1$ is dit $\Psi(u_T)_i = \frac{1}{|T|}$
$\Longrightarrow \Psi(\lambda u_T) = \lambda \Psi(u_T) \quad \forall T \subseteq N, T \neq \emptyset$

We hebben nu dus, dat voor $v, w \in \mathcal{G}^N$:
schrijf $v = \sum \lambda_T u_T$ $w = \sum \mu_T u_T$, dan : voor $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Psi(\alpha v + w) = \Psi\left(\sum \alpha \lambda_T u_T + \sum \mu_T u_T\right)$$
$$= \sum \Psi(\alpha \lambda_T u_T) + \sum \Psi(\mu_T u_T)$$
$$= \sum \alpha \lambda_T \Psi(u_T) + \Psi\left(\sum \mu_T u_T\right) = \alpha \Psi\left(\sum \lambda_T u_T\right) + \Psi\left(\sum \mu_T u_T\right)$$
$$= \alpha \Psi(v) + \Psi(w)$$

dus Ψ is lineair.

Als we kunnen laten zien $\Psi(v) = \Phi(v)$ op een basis zoals $\{u_T\}_{T \subseteq N, T \neq \emptyset}$, dan zijn we dus klaar want dan $\Psi \equiv \Phi$ op $\mathcal{G}^N$

Bewijs hiervan : we zagen dat wegens NP gold $\Psi(u_T)_i = 0$ als $i \notin T$ en anders dus wegens SYM $\Psi(u_T)_j = 1/|T|$ voor $j \in T$. Omdat Φ ook aan NP en SYM voldoet , geldt noodzakelijk $\Phi(u_T)_i = \begin{cases} 0 & i \notin T \\ 1/|T| & i \in T \end{cases}$

$\Rightarrow \Psi(u_T) = \Phi(u_T)$ QED

— Sleutelpunten : 1) lineariteit wegens ADD & wat extra's.
2) NP en SYM leggen Ψ vast op u_T
$\Rightarrow$ omdat Φ ook lineair, en vastligt op u_T volgt $\Phi \equiv \Psi$ op basis van $\mathcal{G}^N$, maar dan op heel $\mathcal{G}^N$

$\square$

Vbd beschouw $\Psi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^n$ door $\Psi(v) = 2 \cdot \Phi(v)$, Φ Shapleyw.
dan voldoet Ψ aan ADD, SYM, NP maar niet ~~EFF~~

Vbd beschouw $\Psi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^n$ door $\Psi(v) = m^{id}(v)$ marginaalvector bij $id \in S_n$
dan ADD, NP, ~~SYM~~ EFF.

andere vbd: hw. Het is dus niet voldoende om de Shapleywaarde door slechts drie / vier axioma's te karakteriseren.

bij welke spelen is het redelijk om de Shapleywaarde te kiezen als verdeling?

— herh: de kern: $C(v) = \{ x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N)$ en $x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N \}$

en $\Phi(v) \in C(v)$ <u>hoeft niet te gelden!</u>

def een TU-spel (N,v) heet convex als geldt
$\forall S,T \subseteq N \qquad v(S) + v(T) \leq v(T \cup S) - v(T \cap S)$

Prop 4.1 (karakterisering) (N,v) convex $\iff$
voor alle $i \in N$ en alle $S \subseteq T \subseteq N - \{i\}$ geldt
$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$

als een speler "later" in de coalitie stapt (in een super-coalitie dan wordt zijn bijdrage niet kleiner)

Bew zie later □

Stell. 4.2 TFAE voor TU-spel (N,v):

1. (N,v) is convex
2. $\forall \sigma \in S_n \qquad m^\sigma(v) \in C(v)$
3. $C(v) = \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma m^\sigma(v) : \lambda_\sigma \geq 0 \ \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma = 1 \right\}$

meetkundig: $C(v)$ is een $n-1$-dim vlak in $\mathbb{R}^n$ met zwaartepunt $\Phi(v)$ □

bew. zie ook later $\square$

— Andere benadering machtsverdeling bij enkelvoudige monotone TU-spel (stemming, bijv.)

def enk. mon. TU-spel (N,v). Een <u>swing</u> voor een speler $i \in N$ is een $S \subseteq N$ met $v(S)=1$, $v(S-\{i\})=0$

Lemma Zij (N,v) enk. mon. TU-spel. Dan geldt voor Shapleywaarde:

$$\Phi(v)_i = \sum_{\substack{S \subseteq N \text{ swing} \\ \text{voor } i}} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|-1}}$$

bew. we hadden al de formule $\Phi(v)_i = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \not\ni i}} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S) \right)$

maar voor enkv. mon. TU-spel is $v(S \cup \{i\}) - v(S) =$ 1 als $S \cup \{i\}$ swing is en <u>anders</u> $1-1$ of $0-0 = 0$

Dus we kunnen net zo goed tellen: over $S \subseteq N$ $S \not\ni i$ waarvoor $S \cup \{i\}$ swing is: $= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \not\ni i}} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \cdot 1$

nu bijectie $S \mapsto S \cup \{i\}$ $S \cup \{i\}$ swing.
van $\{S \subseteq N : S \cup \{i\} \text{ swing}\} \to \{S \subseteq N : S \text{ swing}\}$
maar dan wel $|S \cup \{i\}| = |S| + 1$, dus -1:

$$= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \text{ swing}}} \frac{1}{n\binom{n-1}{|S|}} \qquad \square$$

— nu vragen we ons af: Waarom weegt de Shapleywaarde swings door hun grootte?

— Alternatief: tel gewoon de swings, zonder wegen met hun grootte def Zij voor (N,v) TU-spel $i \in N$, θ_i het aantal swings van speler i, dwz $\theta_i = |\{S \subseteq N : i \in S, v(S)=1, v(S-\{i\})=0\}|$

def Zij voor (N,v) TU-spel, $\beta: G^N \to \mathbb{R}^n$ geg. door
$\beta(v)_i = \dfrac{\theta_i}{\sum_{j\in N} \theta_j}$ de genormaliseerde Banzhaf-Coleman index.
dus (EFF)

vbd (Handschoenenspel) 1 en 2 hebben L, 3 heeft R
1 heeft 1 swing, 2 ook, 3 heeft 3 swings.
n.l. $\{1,3\}, \{1,2,3\}, \{2,3\}$
$\beta(v) = (\frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{3}{5})$
terwijl $\Phi(v) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6})$ en $C(v) = \{(0,0,1)\}$

— wat is het redelijkst? geld: Shapleywaarde, macht: BC-index.
mon. enkv.!

vbd (veiligheidsraad) $n=15$ niet-permanent lid heeft swing in S $\Leftrightarrow$ als
$|S| = 9$ en $\{1,2,3,4,5\} \subset S$. Dus je kunt 3 niet-vaste leden vrij kiezen uit $15-5-1 = 9$ spelers $\binom{9}{3}$
voor vast lid in S swing $\Leftrightarrow$ als $\{1,..5\} \subseteq S$ en en minstens (niet precies! zoals bij niet-vast) 4 niet-vaste, van de 10 (10-5) te kiezen, in zitten, dus $\binom{10}{4} + \binom{10}{5} + .. + \binom{10}{10}$
$= 2^{10} - \binom{10}{3} - \binom{10}{2} - \binom{10}{1} - \binom{10}{0}$

$\theta_i = \binom{9}{3} = 84$ voor i niet-vast
$\theta_i = 2^{10} - \binom{10}{3} - \binom{10}{2} - \binom{10}{1} - \binom{10}{0} = 848 =$
$32^2 - \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} - \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} - 10 - 1 = 964 - 120 - 45 - 11$

totaal swings $10 \cdot 88 + 5 \cdot 848 = 880 + 4240 = 5080$

$\Rightarrow \beta(v)_i = \frac{84}{5080} \approx 0.0165$
$\beta(v)_i = \frac{848}{5080} \approx 0.1669$

1. vraag: is $N(v) \neq \emptyset$?
2. vraag: hoe groot is de nucleolus $N(v)$?

— Stelling: voor (N,v) essentieel is $N(v) = \{\Theta\}$ met Θ horend bij één preciese verdeling die minimaliseert de maximale excessen.

Bew: begrijp je pas in jaar 2 na voldoende Analyse II.

— Stelling: voor (N,v) essentieel $N(v) = \{\Theta\}$ geldt: als $C(v) \neq \emptyset$ dan $\eta(v) = \Theta$ heeft: $\eta(v) \in C(v)$

Bew. voor $y \in \mathbb{R}^n$ geldt $y(S) \geq v(S) \iff \underbrace{e(S,y)}_{= y(S) - v(S)} \leq 0$
dus als $y \in C(v)$ bestaat dan zijn alle $\theta(y)_i \leq 0$ voor alle $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ voor $x := \eta(v) \in N(v)$ uniek geldt $\theta(y) \geq_{lex} \theta(x)$ voor alle $y \in C(v)$, en er is een $y \in C(v)$, dus ($\neq \emptyset$)
volgt alle componenten $\theta(x)_i \leq \theta(y)_1 = 0$
want waarden $\theta(x)_i$ lopen af. ↖ bestaat
dus volgt voor elke $S \subseteq N$ dat $\underbrace{x(S) - v(S)}_{= e(S,x)} \geq 0$ dus $\eta(v) \in C(v)$. $\square$

def een faillisementsprobleem (bankrupcy problem) is een paar (E,d) met $E \in \mathbb{R}$ en $d \in \mathbb{R}^n$ en $0 \leq E \leq \sum_{i \in N} d_i$ met $N = \{1, \dots, n\}$

idee: na faillisement is er een vermogen E over en schuldeisers die $d_1 \dots d_n$ eisen (meer dan wat er te verdelen is)

$\square$

Hoe verdeel je de E onder de $i = 1, \dots, n$ schuldeisers ?

def een verdelingsregel is afb $(E, d) \mapsto f(E,d) \in \mathbb{R}^n$
met $0 \leq f(E,d)_i \leq d_i \quad \forall i = 1,..,n$ en $\sum_{i \in N} f(E,d)_i = E$

def De proportionale verdelingsregel f^{PR} is de afbeelding
$$f^{PR}(E,d)_i = \frac{d_i}{\sum_{i \in N} d_i} E .$$
(niet echt handig bij asymmetrie)

def Zij (E,d) faillissementprobleem. Dan is het faillissementspel $v \in G^N$ gegeven door: (meest pessimistische insteek: $v(S)$ is wat over is nadat $N-S$ al hun deel hebben opgeëist)

$v : \mathcal{P}(N) - \emptyset \to \mathbb{R}$ door $v(S) = \left(E - \sum_{i \notin S} d_i\right)^+$
met $(x)^+ = \max\{x, 0\}$

def Zij f^{RA} de verdelingsregel met $f^{RA}(E,d) = \Phi(v)$ de shapleywaarde bij het f. spel.
klopt dit wel? *

lemma Zij (E,d) faill. probleem. Dan is precies:
$$f^{RA}(E,d)_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \min\{d_i, (E - \sum_{j \in P^\sigma(i)} d_j)^+\}$$
RA staat voor "random arrival" rule
idee: als speler i op tijd komt dan is er: of nog genoeg over, dan pakt hij d_i, of er is nog wat, dan pakt hij wat er over is, of er is niets meer, dan pakt hij niets.

$\square$

* lemma geeft: f^{RA} is een verdelingsregel,
1. want lemma geeft $0 \leq f^{RA}(E,d)_i \leq d_i$ en EFF van shapleywaarde geeft
2. $\sum_{i \in N} f^{RA}(E,d)_i = \sum_{i \in N} \Phi(v)_i = v(N) = (E - 0)^+ = E$

vbd $200 =: E$, $d \in \mathbb{R}^3$ met $d_1 = 100, d_2 = 200$ $d_3 = 300$.

$f^{PR}(E,d) = \frac{1}{3}(100,200,300)$

f^{RA} : $v(S) = \begin{cases} 200 & S = N \\ 100 & S = \{2,3\} \\ 0 & S \text{ anders (niet } \emptyset) \end{cases}$

$\Rightarrow \Phi(v) = \frac{1}{3}(100, 250, 250)$ we hebben dit eerder berekend.

— Algemene eigenschap: als eisers teveel eisen, dan krijgen ze allemaal evenveel.

Lemma zij (E,d) f.probleem en zij (E,d') door $d_i^{x} = \min\{E, d_i\}$. Dan $f^{RA}(E,d) = f^{RA}(E,d')$

bewijs: $f^{RA}(E,d)_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \min\{d_i, (E - \sum_{j \in P^\sigma(i)} d_j)^+\}$

er geldt: als $\exists j \in P^\sigma(i)$ met $d_j \geq E$, dan $(E - \sum_{j \in P^\sigma(i)} d_j)^+ = 0$ en wordt heel de term 0, precies hetzelfde als wanneer we d_j vervangen door d_j' want $(\overset{\geq}{E} - E)^+ = 0$ nog steeds. En als $\nexists$ zo'n $j \notin P^\sigma(i)$ dan is voor elke $j \in P^\sigma(i)$ gewoon $d_j' = d_j$ dus staat er hetzelfde:

$$\Rightarrow (E - \sum_{j \in P^\sigma(i)} d_j)^+ = \underline{(E - \sum_{j \in P^\sigma(i)} d_j')^+}.$$

evenzo: $(E - \sum_{j \in P^\sigma(i)} d_j)^+ = \underline{\leq E}$

dus als $d_i \geq E$ dan $\min\{d_i, (E - \Sigma)^+\} = (E - \Sigma)^+$
$= \min\{E, (E - \Sigma)^+\} = \min(d_i', (E-\Sigma)^+\}$

en als $d_i \ngeq E$ dan is $d_i = d_i'$, gewoon hetzelfde!

$\Rightarrow$ vervang d_j door d_j' en d_i door d_i' zonder gevolgen voor de uitkomst!

$\square$

def definieer $f^{TA} : (E,d) \mapsto f^{TA}(E,d) \in \mathbb{R}^n$ door
$f^{TA}(E,d) = \eta(v)$ met $\eta(v)$ nucleolus uniek

$\eta(v) \in I(v) \implies \sum_{i \in N} f^{TA}(E,d)_i = E$

maar je moet wel eerst aantonen dat failissementsspel voldoet aan convexiteit. dan kun je ook bewijzen
$0 \leq f^{TA}(E,d)_i \leq d_i$.

$\square$

f^{TA} is afkomstig uit Talmud,

def Luchthavenspelen: (opdelen van kosten voor gemeensch. infrastructuur)

m vliegtuigtypes
voor type $i = 1, .., m$ zijn er n_i vliegtuigen die een landingsbaan van lengtekosten $c_i \in \mathbb{R}$ nodig hebben.
Hoe verdelen we de kosten voor de aanleg?

neem aan $0 < c_1 < c_2 < .. < c_m$

maak spel van $n = n_1 + .. + n_m$, $N = \{1, .., n\}$
met $v(S) = -c_i$ als i minimaal is
met $S \subseteq \{1, 2, .., \underline{n_1 + n_2 + .. + n_i}\}$?

dus de kosten voor het grootste vliegtuig in de coalitie

Vbd $m = 3$ $n_1 = 1$ $n_2 = 2$ $n_3 = 1$
$c_1 = 50$ $c_2 = 100$ $c_3 = 200$

$$v(S) = \begin{cases} 0 & S = \emptyset \\ -50 & S = \{1\} \\ -200 & \text{als } 4 \in S \\ -100 & \text{anders} \end{cases}$$

Stelling: zij $c_0 = 0$, $\gamma_i = n_i + n_{i+1} + .. + n_m$

dan $\Phi(v)_j = \sum_{k=1}^{i} \frac{-(c_k - c_{k-1})}{\gamma_k}$ als j van type i is $\square$