A. APPENDIX:

Aantekeningen uit College, niet erg overzichtelijk, wel mooi geschreven.

Vrije werkingen

Def Als G werkt op Ω dan werkt G <u>vrij</u> op Ω als de stabilisatoren $G_\omega := \{g \in G \mid g\omega = \omega\}$ allen gelijk zijn aan $\{e\}$

Opm voor $G_\omega = \{e\}$ is $G(\omega) := \{g\omega \in \Omega \mid g \in G\}$ (de <u>baan</u>) in bijectie met G onder $g\omega \leftrightarrow g$

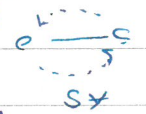
Def Werkingen op <u>niet-gerichte</u> grafen: G werkt op $E(\Gamma)$ of en op $V(\Gamma)$

er blijkt: G werkt vrij op $V(\Gamma)$, $\Longrightarrow$
G werkt vrij op $E(\Gamma)$ als er geen inversie is van een lijn, $ge \neq \bar{e}$ $\forall e \in E(\Gamma)$

Opm Als G zonder inversie op $E(\Gamma)$ $\Longrightarrow$ er is een G-invariante oriëntatie op Γ mogelijk.
(namelijk: kies een oriëntatie van e en deel uit naar $G(e)$)

Def G <u>werkt vrij op</u> Γ (een graaf) als G als
- G vrij werkt op $V(\Gamma)$
- G zonder inversie op $E(\Gamma)$

Vbd G werkt vrij op $\Gamma(G,S)$ mits er geen voortbrenger $s \in S$ is met orde 2 : $s^2 = e$.
immers alleen dan wordt e onder s-werking op s en
s onder s-werking op e afgebeeld

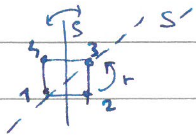


Def G werkt op graaf Γ. Dan is de quotiëntengraaf $G \backslash \Gamma$:

- knopen zijn de banen $G(v)$
- lijnen zijn uit de banen $G(e)$ genomen

voor een lijn e met eindpunten v, w zijn knopen $G(v)$ en $G(w)$ verbonden met $G(e)$

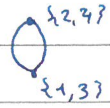
Vbd neem $\Gamma = C_4$:



$\mathrm{Aut}(\Gamma) = D_4 = \langle r, s \rangle$

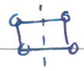
neem nu $G = \langle r^2 \rangle$, dan zijn de banen op $V(\Gamma)$

deze werking is vrij → ~~xxxxx~~ $\{2,4\}$ en $\{1,3\}$: $G\backslash\Gamma$:



banen op $E(\Gamma)$: ~~transitief~~

deze niet → neem $G = \langle s \rangle$

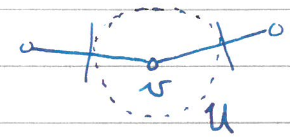


dumbell-werking

neem $G = \langle s' \rangle$

neem $G = \langle r \rangle$

Def de open ster $\mathcal{U}$ van een knoop $v \in V(\Gamma)$ is v samen met de helft van de lijnen uitgaande in v ("de lokale omgeving van v in Γ")



Stelling (lokale isomorfie G en $G\backslash\Gamma$)
Als G vrij werkt op Γ en $p : \Gamma \to G\backslash\Gamma$ de canonieke projectie is $v \mapsto G(v)$ $e \mapsto G(e)$
Dan beeldt p de open ster van v in Γ isomorf af op de open ster van $G(v)$ in $G\backslash\Gamma$

Bew p is surjectief ✓.
Zij e_1 en e_2 lijnen met $\alpha(e_1) = \alpha(e_2) = v$
Dan liggen e_1 en e_2 in verschillende

A

Vbd $H \subseteq F_2$ ondergroep van woorden even lengte. (neem $F_2 = F(a,b)$)
wat is dan $G\backslash\Gamma$?

Banen van $V(\Gamma)$ onder G zijn: H en $F_2 - H$
want

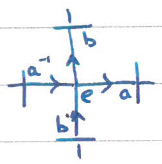
Doel is nu: G werkt vrij op een boom $\Rightarrow$ G is een vrije groep.

Is geïnspireerd door stelling uit de topologie: zij X enkelvoudig samenhangend en G vrij werkend op X
$\Rightarrow \pi_1(G\backslash X) \cong G$

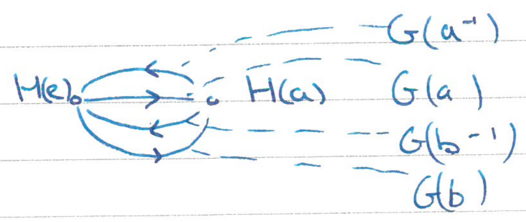
Wij bekijken alleen de concrete versie uit grafentheorie.

Def (Lift) Zij G werkend op Γ met natuurlijke projectie $p: \Gamma \to G\backslash\Gamma$. en zij $\Gamma' = G\backslash\Gamma$.
Voor $\Lambda' \subseteq \Gamma'$ een deelgraaf van Γ' heet $\Lambda \subseteq \Gamma$ een lift van Λ' als $p|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda'$ en een isomorfisme is.

Vbd F_2 : $T(F_2, \{a,b\})$ Γ"



$H\backslash\Gamma$



$H \subseteq F_2$ "even lengte woorden" $\Lambda' = H(e) \xrightarrow{G(a)} H(a)$

$\Lambda = e \xrightarrow{a} a \subseteq \Gamma$

— Stelling: Als G vrij werkt op Γ met $\Gamma' = G\backslash\Gamma$
dan heeft elke boom $T' \subseteq \Gamma'$ een lift $T \subseteq \Gamma$
(zonder bewijs)

Hoofdstelling waar we naar toe werken:

G werkt vrij op een boom Γ, $\Gamma' = G\backslash\Gamma$,
T' een opspannende boom in Γ'.
Zij T de in vorige st. geponeerde lift van T en
neem een G-invariante oriëntatie op Γ

Zij $S = \{ g \in G \mid g \neq 1_G,\ \exists e \in E(\Gamma)$ met $\alpha(e) \in T,\ \omega(e) \in gT \}$

Dan is G vrij op S (basis)
Als Γ' eindig is, dan is G vrij van rang
$r = \#E(\Gamma') - \#V(\Gamma') + 1$

Bew G werkt vrij op $\Gamma \Longrightarrow T \cap gT = \emptyset$ als
$g \neq 1_G$

$e' \in \Gamma'$, $e' \notin T'$ heeft een unieke lift $e \in \Gamma$
met $\alpha(e) \in T$ $\omega(e) \notin T$ $e \notin T$.
$\Rightarrow$ e is een "brug" tussen T en gT

Zij $B = \{ e \in \Gamma \mid \alpha(e) \in T\ \omega(e) \notin T \}$ dan is B in bijectie
met $\{ e' \in \Gamma' \mid e' \notin T' \}$:
voor iedere $e \in B$ is er een unieke $g_e \in G$ met
$\omega(e) \in g_e T$
Zij $S = \{ g_e \mid e \in B \}$

Maak nu een nieuwe graaf Γ_T door gT
voor $g \in G$ tot één punt te verklaren:
$V(\Gamma_T)$: gT voor $g \in G$
$E(\Gamma_T)$: $g_1 T$, $g_2 T$ zijn verbonden als er een
$f \in E(\Gamma)$ is met $\alpha(f) \in g_1 T$, $\omega(f) \in g_2 T$

voor $s = g_1^{-1} g_2$ is $\alpha(g_1^{-1} f) \in T$
$\omega(g_1^{-1} f) \in g_1^{-1} g_2 T = sT$
dus $g_1^{-1} f$ is brug van T naar sT

A

Γ_T is daarmee samenhangend. Γ_T is ook een boom : want
$gT \mapsto g$ is een bijectie
twee knopen g_1T g_2T zijn verbonden $\Leftrightarrow$ $g_e = g_1^{-1}g_2$
voor een $g_e \in G$ e een brug.
Maar dit zijn precies de lijnen van de cayleygraaf
$\Gamma(G,S)$
dus $\Gamma_T \cong \Gamma(G,S)$.
Γ_T en dus ook $\Gamma(G,S)$ is een boom $\Rightarrow$ G is
vrij op S (basis) $\square$

Gevolg Stelling van Nielson - Schreier.

1) Zij F vrije groep $H \subseteq F$ een ondergroep
Dan is H een vrije groep

2) En als F_m vrij van rang m is, dan voor $H \subseteq F_n$ o.g. met
index $n \in \mathbb{N}$, dan is H vrij van rang $n(m-1)+1$

Bew H werkt vrij op $\Gamma(F,S)$ $\Rightarrow$ de 1) volgt.
H heeft index ~~n~~ n ~~...~~ $\Rightarrow$ n banen op knopen en
nm banen op de lijnen
$\Rightarrow$ opspannende boom op $H \backslash \Gamma(F,S)$ heeft
$n-1$ lijnen $\Rightarrow$ rang $nm - n + 1$.

$\overline{\alpha+\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ Map<Fields, Move>

$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$

inputHandler

$\overline{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n} = 0$ Piece piecemenu

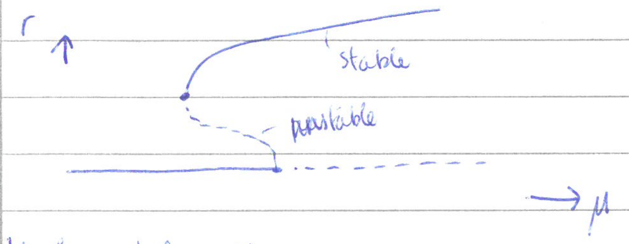
$\bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \cdots + \bar{a}_n\bar{\alpha}^n = \bar{0} = 0$ }

$a_0 + a_1\bar{\alpha} + \cdots + a_n\bar{\alpha}^n = \bar{0}$

$r' = \mu r + r^3 - r^5 \qquad \theta' = 1$

$r^* = 0 \iff r = 0 \lor \mu + r^2 - r^4 = 0$

$r_\pm^2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4\mu}\right)$

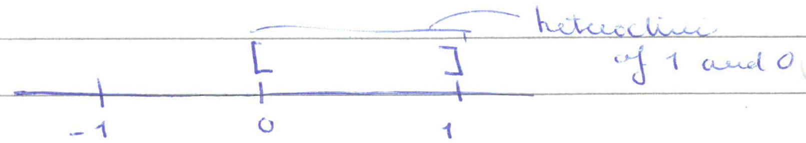


Hopf bifurcation

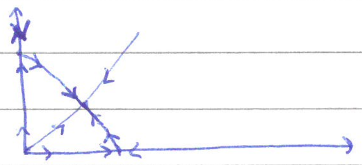
Heteroclinic connection x_1, x_2 fixed p. $W^s(x_1) \cap W^u(x_2)$

Homoclinic connection x fixed p. $W^s(x) \cap W^u(x)$

ex. Heteroclinic in 1D:



example in 2D:



ex. homoclinic: