De MINIMAX-STELLING (Noncooperatief : 0-Sum Games)

def een minimax-strategie is een strategie $\underline{q} \in \Delta^n$ met
$$\max_{p\in\Delta^m} pA\underline{q}^t = \min_{q\in\Delta^n} \max_{p\in\Delta^m} pAq^t$$

Speler 2 kan zijn verlies beperken tot $(-)\min\max$ door $\underline{q}$ te spelen

def een maximin-strategie is een strategie $\overline{p}\in\Delta^m$ met
$$\min_{q\in\Delta^n} \overline{p}Aq^t = \max_{p\in\Delta^m} \min_{q\in\Delta^n} pAq^t .$$

Speler 1 kan zijn winst gegarandeerd op max min krijgen door $\overline{p}$ te spelen.

lemma
$$\max_{p\in\Delta^m} \min_{q\in\Delta^n} pAq^t \leq \min_{q\in\Delta^n} \max_{p\in\Delta^m} pAq^t$$

bew stel van niet, dan zijn er P en Q met $(P,Q)\in\Delta^m\times\Delta^n$
en $\max_p pAQ^t < \min_q PAq^t$

Dan: $PAQ^t \leq \max_p pAQ^t < \min_q PAq^t \leq PAQ^t$ $\lightning$ $\boxtimes$

— De andere kant uit vereist wat lemma's :

def $C\subseteq\mathbb{R}^k$ heet <u>convex</u> als voor $\forall x,y\in C$ en $\forall\lambda\in[0,1]$
ook $\lambda x+(1-\lambda)y\in C$

vbd Δ^m, $m\in\mathbb{N}$, het convexe omhulsel van $e_1\cdots e_m\in\mathbb{R}^m$

lemma (Hyperplane Separation Lemma) $C\subseteq\mathbb{R}^k$ <u>gesloten en</u>
<u>convex</u>, $0\notin C$ $\Rightarrow$ $\exists y\in\mathbb{R}^k$ $\langle y,x\rangle > 0$, $\forall x\in C$

bew neem $C\neq\emptyset$ anders zijn we klaar. Neem een $z\in C$
en $C' = \{c\in C \mid |c|\leq|z|\}$ met $|\cdot|$ euclidische norm.
Omdat C gesloten is, is C' dit ook en daarbij is
C' bgd. $\Rightarrow$ C' compact.

dus $|\cdot| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ als cont. fuie neemt zijn minimum aan op C.
Dus er is een $y \in C' \subseteq C$ met $\forall x \in C'$ $|y| \leq |x|$ en dus ook $|y| \leq |x|$ voor alle $x \in C$.

Dan wegens minimaliteit van $|y|$ in C volgt voor alle $x \in C, \lambda \in [0,1]$

$$|y|^2 \leq |y + \lambda(x-y)|^2 = |y|^2 + 2\langle y, \lambda(x-y)\rangle + \lambda^2 |x-y|^2$$
$$= |y|^2 + 2\lambda\langle y, x\rangle - 2\lambda|y|^2 + \lambda^2|x-y|^2$$

$\Rightarrow$ $0 \leq \lambda\left(2\langle y,x\rangle - 2|y|^2 + \lambda|x-y|^2\right)$
$\Rightarrow$ als we $\lambda > 0$ nemen, dan
$0 \leq 2\langle y,x\rangle - 2|y|^2 + \lambda|x-y|^2$.

als $|x-y|^2 = 0$ zijn we klaar want $y = x$ dus $\langle x,y\rangle = |y|^2 > 0$ want $y \neq 0$ omdat $0 \notin C$.

als $|x-y|^2 = \varepsilon > 0$ dan is er een $\lambda > 0$ met $\lambda\varepsilon < 2|y|^2$ wegens $2|y|^2 > 0$ en de Archimedische eigenschap. voor die λ hebben we dan

$$2\langle y,x\rangle \geq 2|y|^2 - \lambda\varepsilon > 0$$ en zijn we ook klaar. $\square$

lemma (Lemma of Alternatives for Matrixes) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Dan xor:

1) $\exists y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, $z \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$:
i) $[y_i, z_i \geq 0 \ \forall i$ dus$]$
ii) $(y,z) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+m}$
iii) $Ay^t + z^t = 0$

$\Leftrightarrow$ $0 \in C(A_{-1}, A_{-2}, \ldots A_{-n}, e_1^t, e_2^t \ldots e_M^t)$

convex hull.

2) $\exists x \in \mathbb{R}^m_{>0}$: $xA \in \mathbb{R}^n_{>0}$ dus $x_i > 0 \ \forall i$, $(xA)_i > 0 \ \forall i$

bew 1) + 2) $\Rightarrow$ ↯ want dan $Ay^t + z^t = 0$ dus
$xAy^t = -xz^t$ en "$y \geq 0$", "$z \geq 0$"
en "$x > 0$", "$xA > 0$" dus zeker $xAy^t \geq 0$ $xz^t \geq 0$
en dat kan niet.

dus neem aan dat 1 niet geldt, dan is $0 \in \mathbb{R}^m$ dus geen convexe lineaire combinatie van $\{Ae_i^t, e_j \mid i,j \in \{1..n\}\}$ maar dan is dus $0 \notin C(Ae_i^t, e_j \mid i,j \in \{1..n\})$, het convexe omhulsel. $\subseteq \mathbb{R}^m$

Dus pas het lemma "Hyperplane Separation" toe: er is dus een vector $x \in \mathbb{R}^m$ met $\langle x, Ae_i^t \rangle > 0 \ \forall i$ en $\langle x, e_i^t \rangle > 0 \ \forall i$, en dwz $(xA)_i > 0$, $x_i > 0 \ \forall i$.

$\boxtimes$

vervolgens merk op dat $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ een nulsomspel definieert met winst pAq^t voor 1 en $-pAq^t$ voor 2.

def Noem: $v_1(p) := \min_{q \in \Delta^n} pAq^t$ $\quad v_2(q) := \max_{p \in \Delta^m} pAq^t$

$v_1(p)$ is de minste winst 1 als 1 p speelt,
$v_2(q)$ is de maxim. winst 1 als 2 q speelt.

We hadden al

$$v_1(A) := \max_{p \in \Delta^m} v_1(p) \leq \min_{q \in \Delta^n} v_2(q) =: v_2(q)$$

lemma (Alternatieven voor $v_1(A), v_2(A)$):

xor:
1) $v_2(A) \leq 0$
2) $v_1(A) > 0$

bew. matrix A voldoet aan een vd twee alternatieven van het voorgaande "matrixlemma v alternatieven"

1) $\Longleftrightarrow$ $Ay^t = -z^t$ in $\mathbb{R}^m$ dus $y \neq 0$ anders $z=0$ en $(y,z) \neq 0$ ↯

dus zij $\hat{y} = \frac{y}{\sum_{i=1}^n y_i}$ dan $\hat{y} \in \Delta^n$. Omdat $z_i^t \leq 0 \ \forall i$ volgt voor alle $p \in \Delta^m$ dat $pA\hat{y}^t = -pz^t \leq 0$

dus v_2 kan zeker een winst ≤ 0 afdwingen, wat 1 ook voor p kiest.

2) als 2) geldt, dan zetten we $p = \frac{x}{\sum_{i=1}^{m} x_i}$ wat kan want $x_i > 0$ $\forall i$, en $p_i > 0$ $\forall i$, $p \in \Delta^m$.

Dan $v_1(p) = \min_{q \in \Delta^m} pAq^t$, en $q_i > 0$ $\exists i$ en alle $(pA)_i > 0$ dus zeker voor alle $q \in \Delta^m$ $pAq^t > 0$ zodat $v_1(p) > 0$ en dus $v_1(A) = \max_p v_1(p) > 0$ $\square$

Tenslotte:

St (Minimax-stelling)

voor $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $v_1(A) = v_2(A)$

bew we weten al $v_1(A) \leq v_2(A)$. Neem aan $v_1(A) < v_2(A)$.

Zij $a = v_1(A)$ en $B = A - a\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Dan blijven de $p, q, \tilde{p}, \hat{q}$ die minimax en maximin geven hetzelfde (een constante aftrekken geeft $pBq^t = pAq^t - ap\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}q^t = pAq^t - a$ $\forall (p,q) \in \Delta^m \times \Delta^n$ dus dit verandert min/max. niet).

Maar dus $v_1(B) = 0$ en $v_2(B) > 0$, dus $v_1(B) \not> 0$ en $v_2(B) \not\leq 0$ in tegenspraak met het alternatievenlemma voor $v_1(B), v_2(B)$ $\lightning$

$\Rightarrow$ "$<$" kan niet, dus "$=$" $\square$

6 Bimatrix - Games (part of non-0-sum games)

6.4 een bimatrix-spel is een paar $(A,B) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$

de interpretatie is: speler 1 heeft strategie $p \in \Delta^m$, $q \in \Delta^n$ is van sp. 2 en de verwachte winst is voor 1: pAq^t, voor 2: pBq^t.

Dit is een nulsomspel als $\forall (p,q) \in \Delta^m \times \Delta^n \quad pAq^t + pBq^t = 0$
dus als $A_{ij} = e_i A e_j^t = -e_i B e_j^t = -B_{ij} \quad \forall i,j \iff A = -B$.
[een bms $(A,-A)$ is dus eq. met een matrixspel A]

6.2 Hoe bepalen we wat een goede strategie is?
Een vereenvoudiging is mogelijk door te kijken naar strikt gedomineerde strategieën:

6.1 voor $i \in \{1..m\}$ heet e_i strikt gedomineerd (voor sp. 1: A) wanneer
$\exists p \in \Delta^m \quad \forall j \in \{1..n\} \quad (pA)_j > (e_iA)_j$ en $p_i = 0$ voor sp. 2: $\underline{B}$

lemma wanneer e_i s.d. is dan geldt voor het matrixspel van A (dus bms $(A,-A)$) dat de maximin-strategie van sp 1, zeg $\hat{p}$, heeft dat $\hat{p}_i = 0$

bew want stel $\hat{p}_i > 0$. Dan kijken we naar p uit 6.1 en zien we met $\tilde{p} = \hat{p} + \hat{p}_i \cdot (p - e_i)$, dat
$\tilde{p}_i = \hat{p}_i + \hat{p}_i (p_i - e_{ii}) = 0$ en de overige $\tilde{p}_j = \hat{p}_j \geq 0$
en $\sum_i \tilde{p}_i = 1$. $\boxed{0}$ dus $\tilde{p} \in \Delta^m$, maar $\tilde{p}$ is beter dan $\hat{p}$:

$$\tilde{p} A e_j^t = \hat{p} A e_j^t + \underset{\neq 0}{\hat{p}_i} \overbrace{\left[pAe_j^t - e_i A e_j^t \right]}^{>0 \text{ per aanname}} > \hat{p} A e_j^t \quad \text{voor alle } j.$$

$$\text{dus} \quad \tilde{p} A q^t = \sum_{j=1}^{n} q_j \tilde{p} A e_j^t > \sum_{j=1}^{n} q_j \hat{p} A e_j^t = \hat{p} A q^t \quad \text{↯} \quad \square$$

Analoog noemen we een $e_j \in \mathbb{R}^n$ voor speler 2 strikt gedomineerd als er een $q \in \Delta^n$ is met $\forall i \in \{1..m\}$, en $q_j = 0$
$(Aq^t)_i < (Ae_j)_i$. Dus een kolom die

groter is dan een zekere convexe combinatie (een strategie voor 2) van de andere kolommen.

Een minimax-strategie voor speler 2 zal kans 0 op e_j leggen, want we kunnen speler 2 zien als speler 1 in het spel $\boxed{-A^t}$ en voor $-A^t$ is e_j juist strikt gedomineerd voor speler 1, zoals in lemma 6.2.
Dus concluderen we dat de maximinstrategie kans 0 op e_j legt, en dit is precies een minimaxstrategie voor speler 2 in het spel A.

$\boxtimes$

vbd $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$ geeft: $p = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12}, 0)$ domineert e_3 (rij $(3\ 2\ 1) < pA$)

dus halen we deze optie eruit: $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Dan volgt:

$q = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$ domineert e_3 (kolom $\binom{2}{4} < Aq^t$)
dus halen we deze kolom eruit: $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

en dit is nu veel makkelijker. We gaan te werk als in lecture 5.

Terug naar bimatrixspellen. Kunnen we minimax/maximin-definities maken voor deze veralgemenisering?

6.6 (i) als $q \in \Delta^n$ een gemengde strategie voor sp. 2 is, dan is

$$\beta_1(q) = \{ p \in \Delta^m \mid pAq^t \geq p'Aq^t \ \forall p' \in \Delta^m \}$$

de verzameling beste antwoorden van sp. 1

(ii) Als $p \in \Delta^m$ een gemengde strategie voor sp. 1 is, dan is

$$\beta_2(p) = \{ q \in \Delta^n \mid pBq^t \geq pBq'^t \ \forall q^t \in \Delta^n \}$$

dit definieert dus f'cies $\beta_1 : \Delta^n \to \mathcal{P}(\Delta^m)$
$\beta_2 : \Delta^m \to \mathcal{P}(\Delta^n)$

6.7 Een paar van strategieën $(p,q) \in \Delta^m \times \Delta^n$ heet een Nash-equilibrium als $p \in \beta_1(q)$ en
$\beta_2(p) \ni q$.

Als we naar een gewoon matrix spel kijken, zien we $B = -A$
en

$$p \in \beta_1(q) \iff pAq^t = \max_{\tilde{p}} \tilde{p}Aq^t$$
$$q \in \beta_2(p) \iff -pAq^t = \max_{\tilde{q}} -pA\tilde{q}^t$$
$$\iff pAq^t = \min_{\tilde{q}} pA\tilde{q}^t .$$

een nash-eq. is "stabiel", niet persé "optimaal"

6.8 (Criterium voor Nash-equilibrium) TFAE voor $(p,q) \in \Delta^m \times \Delta^n$:

1) (p,q) is Nash evenw. $\iff$ $p \in \beta_1(q) \wedge q \in \beta_2(p)$

2) $pAq^t \geq e_i Aq^t \quad \forall i \in \{1..m\}$
$pBq^t \geq pBe_j^t \quad \forall j \in \{1..n\}$

bew $1 \Rightarrow 2)$ volgt omdat als één van de e_i of e_j < heeft, dan zou e_i of e_j voor sp 1 resp. sp 2 "een beter antwoord zijn" dan p resp. q, dus kan $p \notin \beta_1(q)$ of $q \notin \beta_2(p)$

$2 \Rightarrow 1)$ Stel $p' \in \Delta^m$ is gemengde strategie voor sp. 1.
Dan $pAq^t = 1 \cdot pAq^t = \left(\sum_{i=1}^m p_i'\right) \cdot pAq^t = \sum_{i=1}^m \left(p_i' \cdot pAq^t\right)$
en $pAq^t \geq e_i Aq^t \; \forall i$, dus $\geq \sum_{i=1}^m \left(p_i' e_i Aq^t\right) = p'Aq^t$

Analoog is $pBq^t \geq pBq'^t \quad \forall q' \in \Delta^n$. $\boxtimes$

vbd 6.9 $(A,B) = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$, schrijf $p = (x, 1-x)$, $q = (y, 1-y)$ voor $(x,y) \in [0,1]^2$

– bekijk voor vaste y de best reply van speler 1, en def $B_1 = \{(x,y) \mid p_x \in \beta_1(q_y)\}$
– bekijk voor vaste x de best reply van speler 2 en def $B_2 = \{(x,y) \mid q_y \in \beta_2(p_x)\}$
dan per definitie $B_1 \cap B_2$ bestaat uit alle nash-eq.

voorbeeld: voor vaste y is met keuze x de winst voor sp. 1:

$$pAq^t = (x, 1-x)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = (3x-1,\ 1-x)\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = 3xy - y + 1 - x - y + xy = (4y-1)x + (1-2y)$$

$$pBq^t = (x, 1-x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = (2x-1,\ 2-2x)\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \ldots = 2xy - y + 2 - 2x - 2y + 2xy = (4x-3)y + (2-2x)$$

X: We zien dat als $4y-1<0$ $\Leftrightarrow y\in[0,\frac{1}{4})$ dan moet $x=0$

als $4y-1>0$ dan moet $x=1$ $\Leftrightarrow y\in(\frac{1}{4},1]$

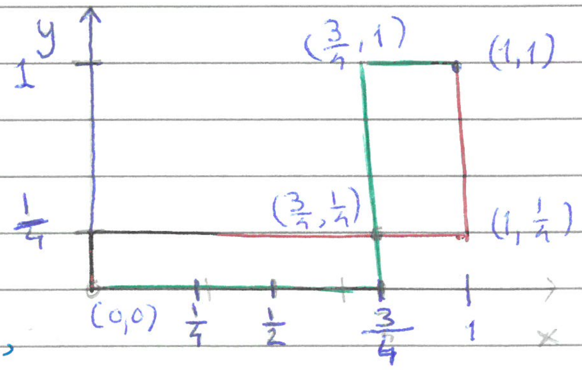
als $4y-1=0$ dan kan $x\in[0,1]$ $\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}$

y: En als $4x-3<0$ dan moet $y=0$ $\Leftrightarrow x\in[0,\frac{3}{4})$

$4x-3>0$ dan moet $y=1$ $\Leftrightarrow x\in(\frac{3}{4},1]$

$4x-3=0$ dan kan $y\in[0,1]$ $\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

Schetsen van B_1 en B_2:



$B_1 \cap B_2 =$

$\{ ((0,1),(0,1)),$
$((\frac{3}{4},\frac{1}{4}),(\frac{1}{4},\frac{3}{4})),$
$((1,0),(1,0)) \}$

met outcomes: $(1,2)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(2,1)$

de winsten (totaal/som/hoe je wilt) zijn dus zeker niet uniek bepaald: er is geen "waarde" aan een bimatrixspel toe te kennen..