# REPORT PROGETTO REGOLATORE

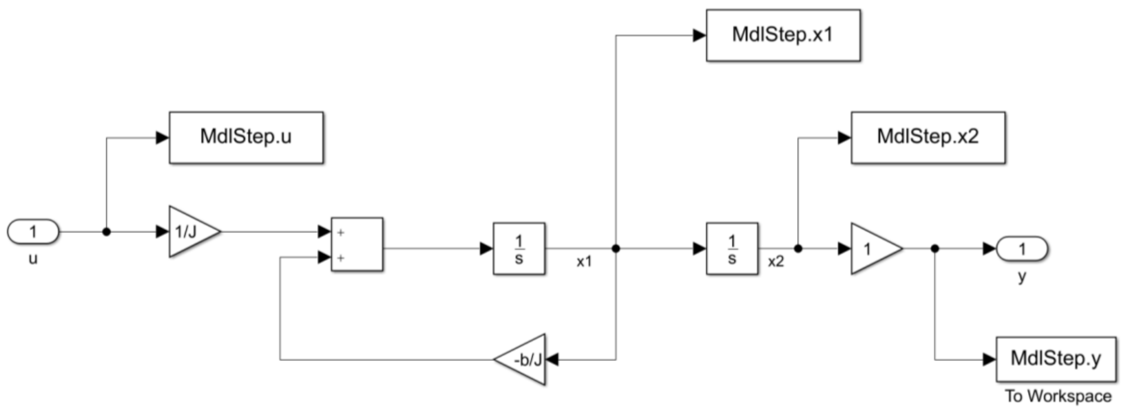
I DUE DI PICCHE

Per prima cosa abbiamo valutato il caso che ci veniva proposto: controllare la posizione di un disco che ruota sottoposto ad inerzia e resistenza aerodinamica.
Il primo passo è stato identificare il tipo di sistema attraverso uscita ed ingresso. Come ingresso abbiamo considerato la coppia fornita dal motore elettrico mentre come uscita veniva richiesto che venisse usata la posizione. Il sistema è quindi SISO. Inoltre, conoscevamo la relazione che lega l'accelerazione angolare all'ingresso quindi abbiamo deciso di considerare la velocità angolare come la variabile di stato.
Attraverso le equazioni del moto circolare sappiamo che la velocità angolare è la derivata della posizione angolare, quindi possiamo esprimere l'uscita come l'integrale della variabile di stato. Così facendo però si creava un sistema non lineare e tempo variante.
Abbiamo quindi deciso di aggiungere una seconda variabile di stato che era appunto la posizione angolare θ.
Così facendo abbiamo potuto scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -\dfrac{b}{J}\omega + \dfrac{1}{J}\tau_m \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x_1} = -\dfrac{b}{J}x_1 + \dfrac{1}{J}u \\ \dot{x_2} = x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

Il sistema considerato ora è un sistema LTI.

È stato poi creato il modello del sistema su Simulink:




Per semplicità nei passaggi successi abbiamo racchiuso il nostro sistema in un subsystem in modo da renderlo più facile da maneggiare per i punti successivi del nostro progetto.

Per calcolare la funzione di trasferimento del nostro sistema abbiamo utilizzato il comando matlab *tf* che ci ha restituito il seguente risultato:

$$G(s) = \frac{1000}{s(s+2)}$$

La funzione di trasferimento può esser calcolata anche  algebricamente col seguente metodo:

$$sx_1 = -\frac{b}{j}x_1 + \frac{u}{j}$$
$$sx_2 = x_1$$

*Sostituendo nelle equazioni i valori noti*

$$sx_1 = -\frac{0{,}002}{0{,}001}x_1 + \frac{u}{0{,}001}$$
$$sx_2 = x_1$$

*Mettendole a sistema ricavo la funzione di riferimento che rappresenta il sistema*

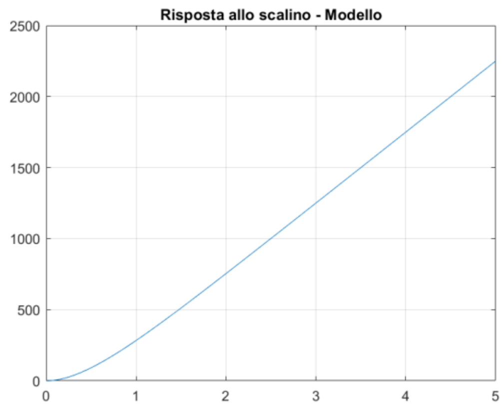
$$s\left(\frac{0{,}001s + 0{,}002}{0{,}001}\right)X_1(s) = \frac{U(s)}{0{,}001} \qquad \rightarrow \qquad X_1(s) = \frac{1}{s(0{,}001s + 0{,}002)}U(s)$$

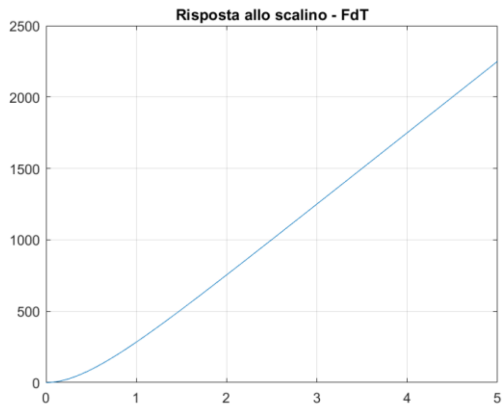
Ottengo così una funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1000}{s(s+2)}$$

Come si può notare i due risultati sono equivalenti.
Come prima cosa abbiamo voluto valutare l'eventuale esistenza di una posizione di equilibrio del sistema, facendo fare i calcoli a matlab. La posizione di equilibrio di questo sistema per un ingresso diverso da zero non esiste a causa della natura fisica del sistema: l'ingresso è una coppia motrice quindi finché è presente (diversa da zero) il sistema è in moto e, di conseguenza non vi è una posizione angolare di equilibrio.

A questo punto abbiamo effettuato un test con risposta allo scalino unitario di entrambi i sistemi, modello e FdT calcolata.




Dai due grafici che vengono generati possiamo vedere come la risposta allo scalino di entrambi sia la stessa. Questo ci da l'indicazione che i due metodi di vedere il nostro problema sono equivalenti.
Come possiamo vedere la risposta allo scalino, una volta a regime, è una retta con coefficiente angolare costante. La spiegazione a questo comportamento deriva dalla natura fisica del sistema. L'ingresso è una coppia motrice che rimane costante e, di conseguenza, genera una velocità che diventa costante quando vengono superate le inerzie del disco. L'uscita è costituita dalla posizione angolare e con il disco che si muove di moto circolare uniforme questa tende ad aumentare. In realtà poi si può considerare che la posizione si "resetta" ogni 360° perché viene compiuto un giro completo.
Valutando la stabilità del sistema esso è semplicemente stabile, questo perché gli autovalori della matrice A sono uno a parte reale negativa ed uno è uno zero regolare.

La stima della risposta a scalino può esser effettuata anche usando il calcolo simbolico di matlab e valutarne quindi i valori iniziale e finale usando il comando *limit*. Questi valori risultano essere rispettivamente 0 e NaN, deduciamo quindi che la risposta allo scalino parte da zero ed arriva all'infinito.
Per stimare la banda del sistema abbiamo considerato l'intervallo delle frequenze in cui $|G(s)| \geq 0dB$. Per trovare tale intervallo abbiamo utilizzato il comando *bode* per trovare i vettori del modulo e delle frequenze, poi attraverso un ciclo abbiamo selezionato le frequenze che ci interessavano in base al valore

massimo del modulo ed al valore più vicino allo zero. La banda del sistema che abbiamo così ottenuto è [0.1, 33.45] rad/s.

Abbiamo poi realizzato un regolatore per poter rendere asintoticamente stabile in anello chiuso il sistema in modo da poter raggiungere una posizione determinata (setpoint). Per realizzare il nostro regolatore dovevamo rispettare le seguenti richieste:

a) Sistema in anello chiuso asintoticamente stabile.
b) Pulsazione critica $\omega_c \geq\ 10$ rad/s.
c) Margine di fase $\geq 65°$.
d) Reiezione dei disturbi $\mathrm{d(t)}\ =\ \sin(\omega \mathrm{t})$ con $\omega \in [0.5\ ,5]$ rad/s di un fattore 10.

Per rispettare la richiesta d abbiamo imposto che il diagramma di Bode del modulo passasse per il punto (5rad/s , 20⁺ dB) in modo da rispettare la condizione per cui, per la reiezione dei disturbi, deve valere $|L(s)| \geq \frac{\varepsilon}{d}$ dove d=1. Abbiamo supposto l'assenza di poli nell'origine per il regolatore, in quanto il nostro sistema ne possedeva già uno.

Considerando che si tratta un regolatore per controllare un disco rigido che si trova all'interno di un computer abbiamo deciso di dare al sistema un tempo di assestamento basso, per questo abbiamo scelto di eliminare il polo in -2 del sistema, operazione possibile perché si tratta di un polo stabile, e di sostituirlo con un polo in -500.

Il nostro regolatore ha una funzione di trasferimento:

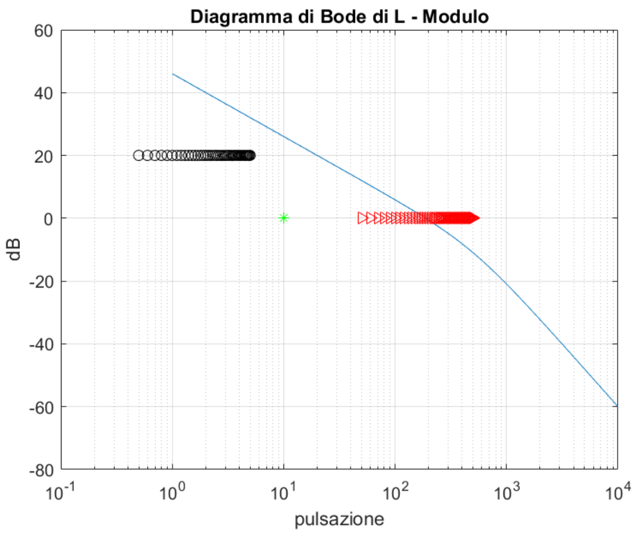
$$R(s)\ = 10^2 \frac{(s+2)}{(s+500)}$$

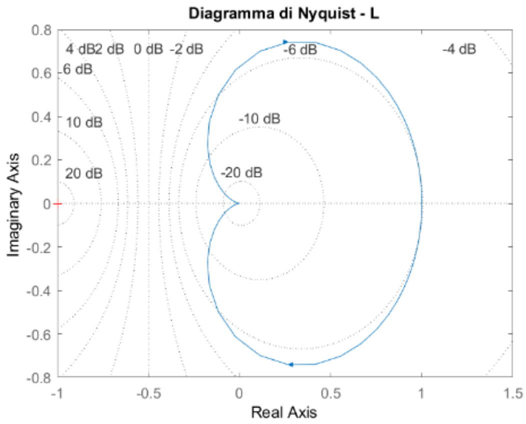
Mentre l'intero sistema ha funzione:

$$L(s)\ = \frac{10^5}{s(s+500)}$$

A questo punto abbiamo verificato di aver rispettato tutte le condizioni:

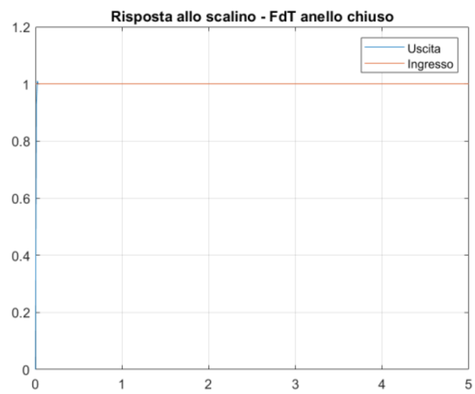
a) Rispettata perché il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per il criterio di Bode.
b) Rispettata perché abbiamo una pulsazione critica $\omega_c = 187.3 > 10$ (valutata col comando *margin*).
c) Rispettata perché il margine di fase vale $\varphi_m\ =\ 69{,}5°\ >\ 65$ (valutato col comando *margin*).
d) Rispettata per le condizioni imposte alla L(s) descritte sopra.






Si può verificare l'asintotica stabilità del sistema anche attraverso l'analisi del diagramma di Nyquist della funzione ed anche attraverso lo studio delle radici di 1+L(s) = 0. Per eseguire questa ultima verifica abbiamo creato una funzione *ztf (tf)* che trova le radici del polinomio 1+tf e stampa sulla command window se il sistema è stabile o meno. Per essere asintoticamente stabile le radici dell'equazione devono avere tutte parte reale negativa.

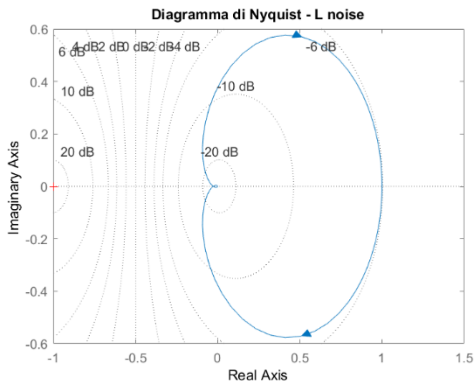
La risposta allo scalino di L(s) ha questo aspetto:

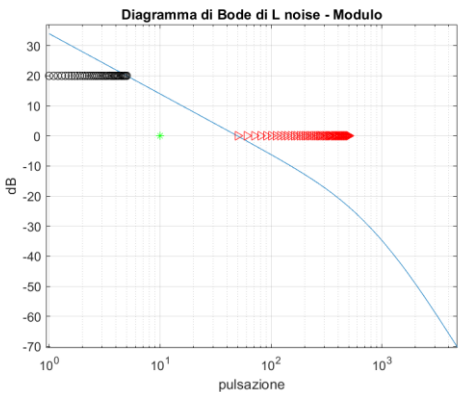



Questa funzione di trasferimento rispettava quindi tutte le condizioni ma risultava particolarmente suscettibile ad eventuali rumori generati dal dispositivo di misura, rumori che si potevano generare alle frequenze comprese nell'intervallo [50, 500]. Abbiamo quindi valutato la creazione di una soluzione più adatta a questa situazione. Per farlo abbiamo aggiunto alla precedente condizione sul modulo una seconda condizione del tipo $|L(s)| < \frac{\epsilon}{n} \; con \; \epsilon \; = \; 0$, in questo modo la funzione L_noise(s) si trova a $20^+$ dB in 5 rad/s e a $0^-$ dB in 50 rad/s. Il guadagno risultato per il regolatore è pari a 35000 ed è stata necessaria l'aggiunta di un secondo polo veloce in -1400.
L_noise(s) ha quindi la seguente forma:

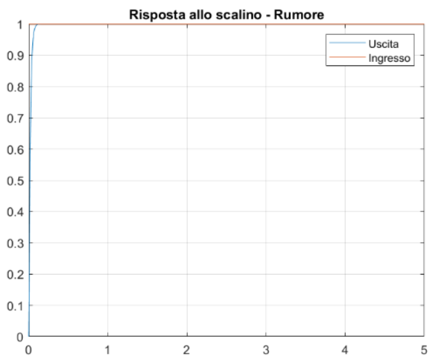
$$L\_noise(s) \; = \; \frac{3.5 \cdot 10^7}{s(s+500)(s+1400)}$$

Anche questa funzione è stabile per il criterio di Bode, inoltre, i vincoli b e c della richiesta precedente sono ancora rispettati.

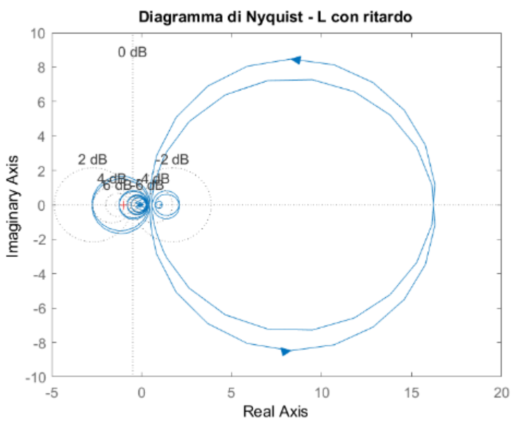



In questo caso la risposta allo scalino era la seguente



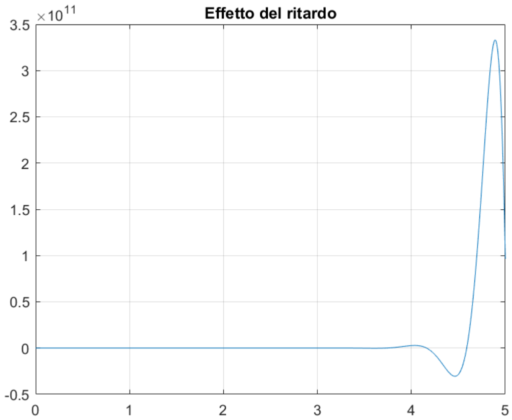

Abbiamo poi valutato la presenza di un ritardo puro nel sistema da controllare.
Il ritardo, che nel dominio di Laplace viene indicato con $e^{-\delta s}$, rende il sistema instabile come si può valutare dal diagramma di Nyquist.




La G(s) assume una forma del tipo:

$$G(s) = e^{-\delta s}\frac{1000}{s(s+2)}$$

Il ritardo ha un effetto negativo sull'azione del regolatore, questo avviene perché l'azione effettiva è ritardata ma l'errore su cui agisce il regolatore no. In pratica il regolatore legge l'errore attuale ma non sa che la sua azione di correzione agisce con certo ritardo.




Una possibile soluzione a questo problema prende il nome di predittore di Smith e consiste nel creare un sottosistema fittizio, che abbiamo chiamato P(s), che ha le stesse caratteristiche del sistema da controllare ma il cui segnale di uscita si esaurisce nel tempo. Il segnale di uscita di questo sottosistema fittizio viene inserito in retroazione positiva sul regolatore e l'esaurimento del segnale è dato da un ritardo del tipo $1 - e^{-\delta s}$.

In questo modo il sistema P(s) all'istante '0' rappresenta perfettamente il sistema da controllare G(s) e la retroazione positiva permette al regolatore di non sovra-correggere il segnale di ingresso, al contrario ad esponenziale esaurito, quindi quando il sistema da controllare G(s) non subisce più l'effetto del ritardo, il sistema P(s) ha effetto nullo ed il regolatore agisce solo sul sistema da controllare.

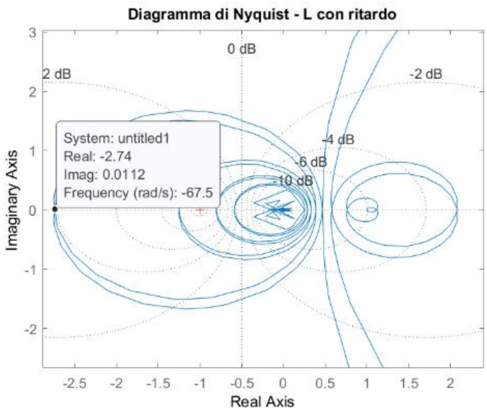
Il regolatore da implementare è quindi costituito da una FdT R(s) analoga alla precedente che è posta in retroazione positiva con una funzione P(s) definita come:

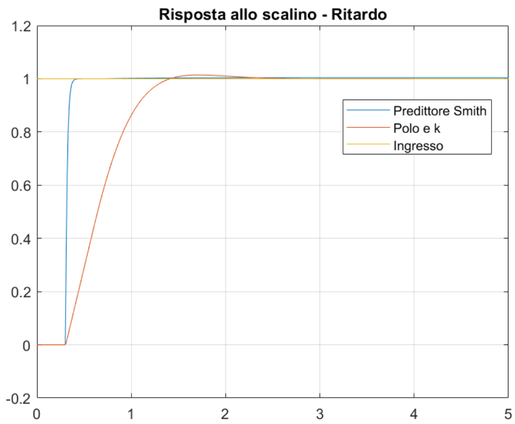
$$P(s) \; = \; (1 - e^{-\delta s}) \frac{1000}{s(s+2)}$$

Con questa soluzione si può osservare come la risposta allo scalino sia esattamente la stessa di quella ottenuta al punto precedente.

Un'altra soluzione per ripristinare la stabilità del sistema è quella di valutare il guadagno ad anello del sistema con ritardo. Il sistema in anello ha forma: $\frac{k \cdot \mu}{1+k\mu e^{-\delta s}} e^{-\delta s}$ dove μ è il guadagno del sistema da controllare G(s) mentre k è un fattore da aggiungere al guadagno d'anello per rendere il sistema stabile. Il valore di k è dato dall'inverso della frequenza in cui il diagramma di Nyquist del sistema con ritardo interseca il semiasse reale negativo. Nel nostro caso la frequenza in questione è 67.5 rad/s e ne risulta un k pari a 0.0148. Per fare in modo che il sistema N(s) risponda con un tempo di risposta simile al sistema senza ritardo abbiamo aggiunto un ulteriore polo a -500.

Con questa soluzione più matematica riportiamo la stabilità del sistema, come si può osservare dal diagramma di Nyquist sottostante, ma la risposta non è rapida come la soluzione precedente.



Dal diagramma di Nyquist di N(s) abbiamo la conferma che il sistema con il nuovo guadagno k è asintoticamente stabile.