



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI MILANO

Stima dell'Accelerazione Gravitazionale Locale

Mattia Ballico 35203A - Gruppo 4G

CdS. Fisica L30

7 luglio 2024

Indice

1	Abstract	1
2	Introduzione	2
3	Modello Teorico	2
3.1	Correzioni	2
4	Strumentazione	3
5	Misure Effettuate	4
5.1	Angoli diversi	5
6	Analisi Dati	6
6.1	Cronometro	7
6.2	Fototraguardo	8
7	Conclusione	9

1 Abstract

In questo esperimento misureremo il valore del modulo dell'accelerazione gravitazionale locale g , tramite un pendolo. Misureremo direttamente la lunghezza e il periodo del pendolo, per poi effettuare una regressione lineare per ricavare il valore di g . Con diversi strumenti e diversi metodi abbiamo ottenuto che il valore di g fosse nei casi con incertezza più grossolana compatibile con il valore atteso di 9.806m/s^2 , e nei casi con incertezza più fine non fosse compatibile.

In particolare utilizzando la regressione lineare ottenuta con il fototraguardo abbiamo ottenuto $g = 9.786 \pm 0.002\text{m/s}^2$, eseguendo un t-test di compatibilità con il valore atteso risulta avere p -value: 0.00002% , ovvero di non essere compatibile con il valore atteso. Calcolando il χ^2 troviamo che esso è pari a 437, da cui deduciamo che i nostri set di misura non seguono un andamento lineare all'incertezza del fototraguardo, ciò è probabilmente dovuto agli allungamenti del filo, indesiderati, che abbiamo osservato.

2 Introduzione

L'obiettivo di questo esperimento è di determinare il valore del modulo del vettore accelerazione gravitazionale $g := |\vec{g}|$, utilizzando un pendolo.

Misureremo direttamente la lunghezza del pendolo e il periodo di oscillazione, da una regressione lineare è possibile estrarre il valore del modulo dell'accelerazione gravitazionale locale.

Considereremo in particolare i termini correttivi di: inerzia, attrito e piccole oscillazioni.

Misureremo i periodi con due strumenti diversi e confronteremo i risultati ottenuti.

Infine confronteremo i risultati, da noi ottenuti, con il valore che ci aspettiamo dell'accelerazione gravitazionale: 9.806m/s^2 .

3 Modello Teorico

Per la stima del vettore accelerazione gravitazionale \vec{g} , utilizzeremo il moto armonico di un pendolo semplice.

In un pendolo semplice abbiamo un punto fisso, attorno al quale oscilla una piccola massa tenuta da un filo.

Consideriamo il sistema di riferimento polare

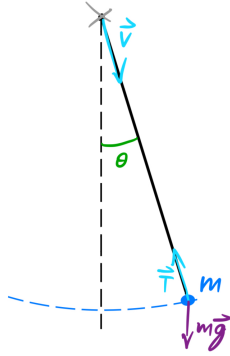


Figura 1: Schema delle forze

con origine nel punto fisso (in figura segnato con una x di colore grigio), e angolo polare θ , rispetto alla verticale.

Nell'immagine [Figura 1](#) sono rappresentate le forze che agiscono sul sistema. Sulla massa m agisce la forza peso $m\vec{g}$, e la tensione del filo \vec{T} . Il filo, lo considereremo inestensibile e di massa trascurabile.

Utilizzando la seconda legge di Newton troviamo l'equazione del moto:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

In cui ℓ è la lunghezza del filo e t il tempo.

Tuttavia questa equazione non è analiticamente risolvibile, però possiamo utilizzare l'approssimazione: $\sin \theta \approx \theta$ per $0 \leq |\theta| \ll 0$, perciò:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{\ell} \theta \quad (2)$$

che è l'equazione differenziale del moto armonico, da cui ricaviamo che:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Dove ω è la pulsazione dell'oscillazione e T il suo periodo.

3.1 Correzioni

Approssimazione $\sin \theta \approx \theta$

Per $\theta \approx 0[\text{rad}]$ possiamo espandere il $\sin \theta$ con la serie di McLaurin: $\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + o(\theta^4)$, sostituendo nella (1) otteniamo:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{\ell} \theta + \frac{g}{\ell} \frac{1}{6} \theta^3$$

Da cui si può dimostrare che il periodo di oscillazione è pari a:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} K$$

In cui K è l'integrale ellittico completo di prima specie valutato in $\sin^2(\frac{\theta_{\max}}{2})$, il periodo è quindi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} + o(\theta_{\max}^3) \right)$$

Attrito

Con l'attrito nell'equazione del moto (1) si aggiunge il termine di smorzamento viscoso, dato dalla relazione: $F_{\text{smorzamento}} = -2\gamma v$, in cui γ è il coefficiente di smorzamento e v è la velocità.

Perciò otteniamo l'equazione del moto:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \gamma \frac{\ell}{m} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

Da cui otteniamo che il periodo è:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\ell}{g} \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2} \right) = T_0^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2} \right)$$

In cui T_0 è il periodo senza attrito.

Momento di inerzia

Siccome il pendolo semplice è un modello ideale non riproducibile nella realtà, dobbiamo considerare anche la correzione del momento di inerzia.

Considerando che la massa del nostro pendolo è di forma cilindrica possiamo applicare il teorema di Huygens-Steiner e ricaviamo la correzione del momento di inerzia, che dobbiamo applicare sia al periodo, sia sulla lunghezza del pendolo.

$$T = \sqrt{\frac{I}{mgL_0}} = \sqrt{\frac{\ell_{\text{eq}}}{g}}$$

$$\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{4R^2 + h^2}{16\ell_0}$$

In cui I è il momento d'inerzia, ℓ_{eq} la lunghezza equivalente, ℓ_0 la lunghezza reale, R il raggio del cilindro e h l'altezza del cilindro.

Valore di g

Perciò considerando tutte le correzioni il valore dell'accelerazione gravitazionale diventa:

$$g_{\text{reale}} = g_{\text{moto armonico}} + \Delta g_{\text{angolo max}} + \Delta g_{\text{attrito}} + \Delta g_{\text{inerzia}}$$

In cui Δg sono le varie correzioni applicate.

4 Strumentazione

Montaggio

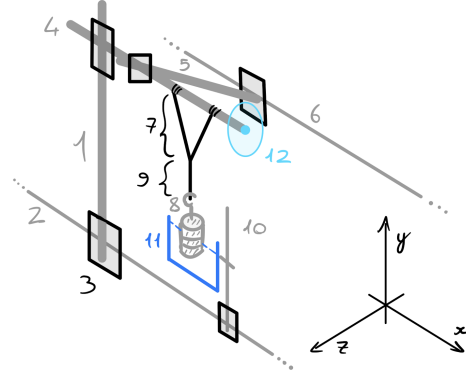


Figura 2: Strumentazione utilizzata, in prospettiva.

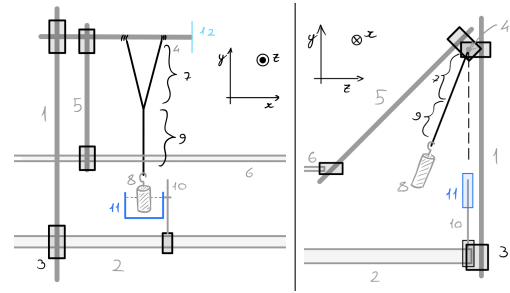


Figura 3: Strumentazione utilizzata, dal fronte (sinistra) e dal lato (destra).

Struttura di supporto

In Figura 2 e Figura 3^[1] è illustrato uno schema della strumentazione utilizzata.

Per costruire la struttura di supporto abbiamo fissato un'asta metallica {1} al banco di lavoro {2} in verticale, tramite un morsetto {3}. All'asta verticale è stata fissata un'asta orizzontale {4} tramite un secondo morsetto. Per aumentare la stabilità del sistema abbiamo fissato una terza asta {5}, inclinata di circa 45° rispetto all'orizzontale, al banco di lavoro {6} e all'asta orizzontale.

^[1]Nella Figura 3, dal lato, non abbiamo disegnato il goniometro per complicare ulteriormente la figura.

In questo modo la struttura di supporto è sufficientemente rigida da non oscillare lungo il piano $\vec{y} \times \vec{z}$ durante il moto del pendolo^[2].

Pendolo

Per quanto riguarda il pendolo, abbiamo fissato all'asta orizzontale {4} i due estremi di un filo {7}, tenendoli a una distanza ravvicinata (circa 2cm) dall'asta orizzontale e obliqua, e mantenendo circa 5cm tra i due estremi del filo.

Il filo deve essere sufficientemente spesso da non avere proprietà elastiche^[3] ma sufficientemente sottile da non avere proprietà rigide^[4].

Al centro del filo abbiamo posizionato il gancio con le masse {8}, in questo punto poi andremo ad aggiungere pezzi di filo {9} per allungare la lunghezza del pendolo (questa procedura verrà spiegata meglio nella sezione [Misure Effettuate](#)).

La lunghezza totale del pendolo così costruito, per questioni pratiche, deve essere tale che il punto più basso della massa appesa sia entro la portata dello strumento di misura, il calibro (portata massima: 230.00mm, risoluzione: 0.02mm), da un riferimento fisso, nel nostro caso il banco di lavoro {2}.

Il gancio con le masse utilizzate deve essere di un materiale con densità elevata (noi abbiamo utilizzato masse con densità di circa 7.8g/cm³), per un totale di circa 100g.

Apparecchiatura di misura

Per il fototraguardo (risoluzione: 0.0001s), abbiamo fissato la sua asta di supporto {10} al banco di lavoro con un morsetto, in modo tale che l'asta di supporto sia posizionata (in verticale) sotto l'asta orizzontale {4}. Il fototraguardo {11} l'abbiamo montato sulla sua asta di supporto, così che possa essere spostato verticalmente tra i vari set di misura.

Inoltre abbiamo posizionato un goniometro {12}

^[2]La struttura potrebbe comunque oscillare lungo l'asse \vec{x} , perciò abbiamo tenuto il pendolo il più vicino possibile alle due aste, per ridurre al minimo tale oscillazione.

^[3]Il filo è inestensibile

^[4]Il filo non si oppone al moto del pendolo.

sull'asta orizzontale per conoscere l'angolo massimo di oscillazione.

5 Misure Effettuate

Tutte le misure effettuate si trovano nella cartella `data\` su una [Repository:Accelerazione-gravitazionale](#) su GitHub.

Prima di effettuare le misure abbiamo pesato le masse tramite una bilancia, le masse sono riportate in [Tabella 1](#), e saranno le stesse per tutte le misure.

Oggetto	Massa [g]
gancio	19,88±0,01
masse	79,56±0,01
massa totale	99,44±0,02

Tabella 1: Masse utilizzate

Partendo dalla configurazione descritta nella sezione precedente ([Montaggio](#)) abbiamo misurato la lunghezza totale del filo: $\ell_m = 405 \pm 1\text{mm}$ con il metro (risoluzione 1mm); e con il calibro la distanza delle masse da un riferimento fisso $\ell_{\text{rif}} = 206,10 \pm 0,02\text{mm}$, il banco di lavoro, così da poter ottenere una precisione maggiore utilizzando poi una regressione lineare sulle lunghezze del calibro, mentre la lunghezza totale con il metro ci servirà per fare un controllo sul parametro dell'intercetta della regressione.

Successivamente abbiamo portato il pendolo a circa 3° dalla verticale e l'abbiamo lasciato libero di oscillare.

Prima di effettuare le misure abbiamo lasciato trascorrere circa 5 periodi, così da ridurre le oscillazioni "spurie".

Passati i primi 5 periodi abbiamo preso le misure con il cronometro (risoluzione: 0.01s) e il fototraguardo contemporaneamente^[5].

Raccolti i dati del primo sperimentatore, abbiamo misurato la lunghezza del pendolo dal

^[5]Inizialmente non abbiamo eseguito le misure con il cronometro e con il fototraguardo contemporaneamente quindi abbiamo meno set di misura con il fototraguardo rispetto ai set con il cronometro

riferimento, e abbiamo ripetuto la stessa procedura per gli altri due sperimentatori con lo stessa configurazione.

Osservazioni sul cronometro

Per il cronometro abbiamo preso i periodi rispetto a un riferimento comune agli sperimentatori, ovvero quando il gancio del pendolo attraversava (in una direzione a scelta) il piano generato dall'asta verticale e dall'asta di supporto del fototraguardo.

Osservazioni sul fototraguardo

Per il fototraguardo, l'abbiamo posizionarlo in modo che sia perpendicolare al piano di oscillazione, inoltre abbiamo posizionato il fascio di fotoni emessi, in modo tale che intercettasse l'asta del gancio, e non le masse utilizzate; questo perché l'astina ha un diametro molto inferiore alle masse e ciò ci permette di osservare oscillazioni con angoli più piccoli.

Configurazioni successive

Per passare alla configurazione successiva di lunghezza, abbiamo aggiunto al centro del filo una sezione circolare di filo, per allungare di circa 3cm il pendolo, e abbiamo spostato le masse all'estremo di questo pezzo di filo aggiunto; come ultima cosa abbiamo abbassato il fototraguardo per mantenerlo nel range di funzionamento.

A questo punto abbiamo eseguito nuovamente la procedura descritta in precedenza: abbiamo misurato la lunghezza del pendolo, lasciato passare 5 periodi, effettuato le misure con fototraguardo e cronometro, controllato la lunghezza del filo, e ripetuto per gli altri 2 sperimentatori.

Abbiamo ripetuto tutta la procedura per le lunghezze del filo riportate in [Tabella 2](#), tale tabella contiene le misure effettuate con il calibro della distanza dal punto più basso delle masse al riferimento fisso.

Per l'ultimo set di misure, ovvero la sesta riga della tabella, non abbiamo effettuato misure

idx	Prima	exp. 1	exp. 2	exp. 3
1	206,10	206,10	206,10	206,10
2	172,58	172,58	172,58	172,58
3	**	128,24	127,06	127,46
4	99,26	99,22	99,08	99,06
5	68,00	67,90	67,86	67,56
6	31,00	30,00	29,60*	29,20*

Tabella 2: Lunghezze delle varie configurazioni, dal riferimento fisso. Ogni riga contiene (in ordine) le lunghezze prima del set di misure, dopo che lo sperimentatore (exp) 1 ha eseguito le misure, dopo l'exp 2 e dopo l'exp 3; tutte le misure sono in mm e hanno incertezza pari a $\pm 0.02\text{mm}$.

* Sono state effettuate prima quelle dell'exp. 3 e poi quelle dell'exp. 2.

** Il valore è mancante.

con il fototraguardo.

5.1 Angoli diversi

Per stimare l'attrito viscoso abbiamo effettuato più misure mantenendo la stessa lunghezza del filo, ma utilizzando angoli di rilascio del pendolo differenti, in [Tabella 3](#), sono riportate le lunghezze, prima e dopo ogni oscillazione partendo dagli angoli indicati.

prima	3°	5°	7°	10°	15°
31,00	*	30,56	30,56	30,00	30,00

Tabella 3: Lunghezze delle varie configurazioni per angoli diversi; tutte le misure sono in mm e hanno incertezza pari a $\pm 0.02\text{mm}$.

* Il valore è mancante.

Come ultima cosa abbiamo misurato nuovamente la lunghezza del filo, nella prima configurazione per osservare se il filo si fosse allungato durante l'esperimento. La lunghezza del filo misurata è di 205,72mm, quindi il filo si è allungato durante l'esperimento (da 206,10mm), perciò il filo non è perfettamente inestensibile.

Nota sugli allungamenti

Durante l'esperimento, oltre all'allungamento dall'inizio alla fine dell'esperimento, abbiamo osservato anche allungamenti maggiori e addirittura delle contrazioni (lunghezze: righe 3 e 6, nelle colonne exp. 2 → exp. 3 nella tabella Tabella 2).

Non sappiamo giustificare a cosa siano dovuti questi allungamenti e accorciamenti del filo. Tuttavia escludiamo che siano dovuti ad uno spostamento lungo l'asse x , quindi che le masse non fossero nella posizione centrale ma leggermente spostate (verso destra o sinistra osservando dal fronte, Figura 3), perché facendo la costruzione geometrica del sistema, rappresentata schematicamente su Desmos, se consideriamo uno spostamento orizzontale di 1.5cm dalla posizione di minimo (quindi uno spostamento visibile ad occhio nudo) osserveremmo una differenza di lunghezza pari a 0,03cm, che non è sufficiente a giustificare le differenze di lunghezza del pendolo, che arrivano fino a 0.18cm.

6 Analisi Dati

Nel file `script.ipynb` sulla Repository: [Accelerazione-gravitazionale](#) è contenuto il codice python utilizzato per fare l'analisi statistica, inoltre tutte le immagini^[6] sono salvate nella directory `images\`.

Correzione del momento d'inerzia

La correzione del momento di inerzia incide sul periodo del pendolo, tuttavia possiamo utilizzare la lunghezza equivalente, andando così a correggere il valore della lunghezza del pendolo, come mostrato nella sezione 3.1.

Per calcolare la lunghezza reale però abbiamo prima dovuto trasformare le lunghezze misurate con il calibro nella lunghezza reale del pendolo $\ell_{0,i}$ tramite la formula:

$$\ell_{0,i} = \ell_m - CM + \Delta\ell_{\text{rif},i}$$

^[6]Le immagini dell'analisi dati sono in formato vettoriale, quindi se ci fossero difficoltà ad osservarle si possono ingrandire a piacere.

In cui $\Delta\ell_{\text{rif},i}$ è la differenza dalla misura iniziale ($\ell_{\text{rif}} = 206,10\text{mm}$) alla i -esima misura effettuata con il calibro, ℓ_m è la lunghezza del pendolo misurata con il metro, e il CM è il centro di massa calcolato dalla formula: $CM = \frac{\sum_j m_j L_j}{m_j}$, in cui m_j e L_j sono le masse e posizioni dei singoli componenti del sistema di masse, che risulta essere pari a 23.78mm per tutte le misure effettuate.

A ℓ_0 abbiamo quindi applicato la correzione del momento di inerzia:

$$\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{4R^2 + h^2}{16\ell_0}$$

Correzione per angoli piccoli

Riprendendo la formula espressa in 3.1:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_{\text{max}}^2}{16}\right) = T_0\left(1 + \frac{\theta_{\text{max}}^2}{16}\right)$$

Considerando un angolo di partenza di 3° , quindi $\theta_{\text{max}} = 3[\text{deg}] \approx 0,052[\text{rad}]$, otteniamo che la differenza tra il periodo osservato T e il periodo armonico T_0 è pari a $T - T_0 = 0,00017T_0$.

Regressione lineare

Per il calcolo di g abbiamo effettuato una regressione lineare tra i periodi al quadrato e le relative lunghezze del pendolo, utilizzando la formula:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\ell = A\ell + B$$

Dalla quale ricaviamo $g = \frac{4\pi^2}{A}$, $\sigma_g = \frac{4\pi^2\sigma_A}{A^2}$, e troviamo che $\sigma_{T^2} = 2T\sigma_T$ e $\sigma_{\ell, \text{prop.}} = A\sigma_\ell$, infine ci aspettiamo che il parametro B sia circa zero.

Per ottenere un A -test con cui propagare le incertezze della lunghezza sui periodi abbiamo considerato la prima e l'ultima lunghezza e abbiamo calcolato che il parametro $A \approx 0.004\text{s}^2/\text{mm}$ per tutti i set.

Quindi abbiamo propagato l'errore sulle lunghezze sui periodi, tramite somma in quadratura di σ_{T^2} e $\sigma_{\ell, \text{prop.}}$, e così abbiamo potuto svolgere una regressione lineare pesata.

Media mobile

Per minimizzare l'incertezza sul periodo, abbiamo applicato la media mobile su ogni set di misure effettuato con finestra di $M=39$ (circa $2/3N$, in cui $N=59$, è il numero delle misure per ogni set), abbiamo potuto utilizzare la media mobile perché le misure effettuate sono *set storici*, ovvero le misure sono state effettuate in modo contiguo e quindi ogni singolo valore del periodo è influenzato dall'errore del periodo precedente e di quello successivo.

Sia $K = N - M + 1$ il numero di finestre considerate.

Allora formule utilizzate sono le seguenti:

$$\langle T_{MM} \rangle = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \langle T_k \rangle = \frac{1}{K} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^M T_{k+i}$$

$$\sigma_{MA} = \frac{\langle \sigma_k \rangle}{M\sqrt{K}}$$

In cui $\langle T_{MM} \rangle$ è il periodo medio del set di misure, $\langle T_k \rangle$ è il periodo medio di una finestra di misure, e T_j è il periodo della misura j -esima, l'incertezza della media mobile è σ_{MA} .

6.1 Cronometro

Per ogni set di misure abbiamo calcolato il periodo medio con media semplice e media mobile, che risulta essere uguale per entrambi i casi, su cui è stata applicata la correzione per angoli piccoli.

In [Tabella 4](#) sono riportate i valori dei periodi medi, prese con il cronometro dallo sperimentatore 1, alle varie lunghezze del pendolo. La relativa incertezza è stata calcolata con media semplice (**MS**) e media mobile (**MM**).

I valori dei periodi per i set degli sperimentatori 2 e 3 non sono stati inseriti, sono però consultabili, nella sezione “Analisi, per il cronometro” sul file `script.ipynb`.

Abbiamo poi effettuato una regressione lineare ([Figura 4](#)) sulle misure effettuate di ogni sperimentatore, e abbiamo ottenuto i valori dei parametri A e B , riportati in [Tabella 5](#), da cui

L [mm]	Periodi [s]	σ_T MS [s]	σ_T MM [s]
381.40	1.2395	± 0.009	± 0.0003
414.91	1.2930	± 0.007	± 0.0003
460.01	1.3614	± 0.006	± 0.0002
488.40	1.4022	± 0.006	± 0.0002
519.89	1.4474	± 0.007	± 0.0003
558.24	1.4977	± 0.006	± 0.0002

Tabella 4: Misure effettuate con il cronometro, dello sperimentatore 1, le lunghezze (**L**) hanno tutte incertezza $\pm 0.02\text{mm}$

abbiamo potuto ricavare i valori dell'accelerazione gravitazione g mostrati in [Tabella 6](#).

exp	Metodo	Parametri
1	MS	$A = 0.00402 \pm 0.00014$ $B = 0.005 \pm 0.064$
	MM	$A = 0.004018 \pm 0.000005$ $B = 0.0054 \pm 0.0024$
2	MS	$A = 0.00401 \pm 0.00012$ $B = 0.010 \pm 0.056$
	MM	$A = 0.003982 \pm 0.000004$ $B = 0.0225 \pm 0.0019$
3	MS	$A = 0.00398 \pm 0.00011$ $B = 0.021 \pm 0.053$
	MM	$A = 0.003993 \pm 0.000004$ $B = 0.0186 \pm 0.0018$

Tabella 5: Parametri della regressione per ciascun set del cronometro e metodo.

A ha unità di misura s^2/mm e B ha unità di misura s^2 .

Possiamo ora calcolare la p-value riferita alla confidenza con cui i valori di g ottenuti dai vari metodi e sperimentatori siano compatibili con il valore atteso 9.806m/s^2 , i p-value sono indicati in [Tabella 7](#), inoltre abbiamo anche controllato se il parametro B della regressione lineare fosse compatibile con lo zero^[7].

^[7]Nel calcolare la compatibilità di B sullo zero abbiamo considerato anche il fatto che la lunghezza totale è stata misurata con il metro, con risoluzione di 1mm, tale incertezza è stata sommata in quadratura all'incertezza di B della regressione σ_B .

exp	g (MS) [m/s ²]	g (MM) [m/s ²]
1	9.82 ± 0.33	9.824 ± 0.013
2	9.85 ± 0.30	9.913 ± 0.010
3	9.91 ± 0.28	9.888 ± 0.010

Tabella 6: Tabella dei valori di g ottenuti con il cronometro dagli sperimentatori (exp)

Dai p -value notiamo che, i valori di g calcolati con il cronometro e media semplice sono compatibili (p -value $> 5\%$) con il valore atteso e con lo zero, tuttavia utilizzando la media mobile, i valori per gli sperimentatori 2 e 3 sono incompatibili. In particolare l'incompatibilità con lo zero ci suggerisce la presenza di un errore sistematico, ipotizziamo sia causato dall'allungamento del filo durante il corso dell'esperimento.

exp	Metodo	$p(g = 9.806\text{m/s}^2)$	$p(B = 0)$
1	MS	97%	94%
	MM	21%	9.6%
2	MS	88%	86%
	MM	0.04%	0.02%
3	MS	73%	70%
	MM	0.10%	0.20%

Tabella 7: p -value di compatibilità con g attesa e p -value di compatibilità di B con lo zero, per ciascun sperimentatore e metodo.

Valore di χ^2

Calcolando i χ^2 della regressione lineare per ogni sperimentatore otteniamo i valori indicati in Tabella 8, i valori più alti indicano un andamento non lineare. Come ci aspettavamo, i valori di χ^2_{rid} della media mobile sono molto più alti rispetto a quelli ottenuti con la media semplice.

6.2 Fototrapiuardo

Per quanto riguarda le misure effettuate con il fototrapiuardo, siccome il numero di set di misura per ogni sperimentatore è insufficiente a fare 3 regressioni lineari abbiamo deciso di fare

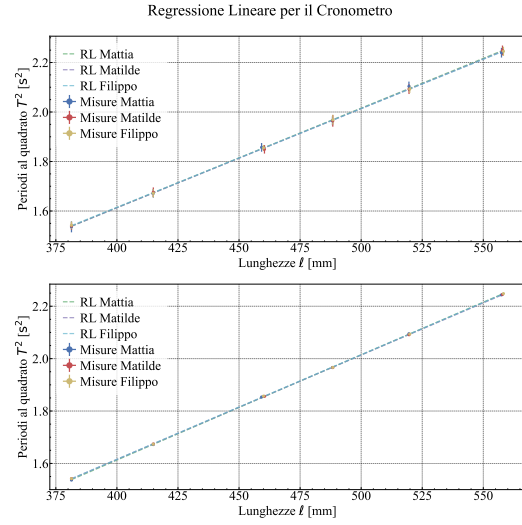


Figura 4: Regressione lineare (RL) per le misure effettuate con il cronometro; sopra utilizzando la media semplice, sotto utilizzando la media mobile.

exp	Metodo	χ^2_{rid}
1	MS	0.14
	MM	10.3
2	MS	0.05
	MM	2.35
3	MS	0.011
	MM	8.01

Tabella 8: Valori di χ^2_{red} per ciascun sperimentatore e metodo.

una regressione lineare sola, con tutti i set di misure a disposizione.

Come con il cronometro, abbiamo calcolato per ogni set il periodo medio, stavolta utilizzando unicamente la media semplice, siccome il fototrapiuardo ha risoluzione molto inferiore, utilizzare la media mobile non ha nessun fine pratico.

I valori dei periodi, con relativa incertezza, per tutti i set non sono stati inseriti, sono però consultabili, nella sezione "Analisi, per il fototrapiuardo" sul file `script.ipynb`.

Con i valori dei periodi e le relative lunghezze

del pendolo abbiamo effettuato una regressione lineare, mostrata in Figura 5, ottenendo i valori dei parametri: $A = 0.004034 \pm 0.000004 \text{ s}^2/\text{mm}$, $B = 0.0007 \pm 0.0018 \text{ s}^2$.

Dai parametri abbiamo ricavato il valore di $g = 9.786 \pm 0.002 \text{ m/s}^2$.

Allo stesso modo di come abbiamo fatto per il cronometro, abbiamo calcolato le p-value, tramite t-Student, di compatibilità con il valore atteso e con lo zero della regressione, ottenendo: $p(g = 9.806 \text{ m/s}^2) = 0.00002\%$, e $p(B = 0) = 69\%$; quindi il parametro B è compatibile con zero, ma non è compatibile il valore di g da noi ottenuto, con il valore atteso.

E il valore del $\chi^2_{\text{rid}} = 437$ della regressione lineare, ci indica che all'incertezza del fototraguardo la regressione ha un andamento sub-lineare.

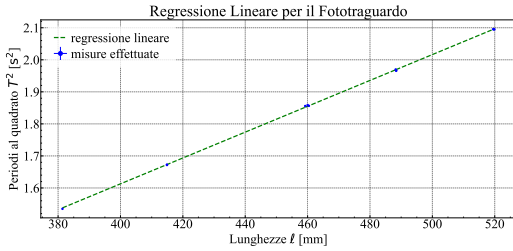


Figura 5: Regressione lineare per i set di misure effettuate con il fototraguardo.

Attrito

Utilizzando la misura con il fototraguardo effettuata con angoli differenti (mostrata in Figura 6), tramite un fit lineare abbiamo stimato che il coefficiente di attrito γ , per la misura effettuata partendo da 15° è pari a 0.00502 ± 0.00008 , utilizzando la formula mostrata in 3.1:

$$T^2 = T_0^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2} \right)$$

Risulta che $T = T_0$ fino al settimo decimale, perciò questa differenza è molto inferiore all'incertezza sui singoli periodi (l'incertezza è al terzo decimale), e quindi è trascurabile l'effetto dell'attrito per la misura con 15° . Siccome maggiore è l'angolo di partenza, maggiore sarà

l'attrito viscoso, allora sarà trascurabile in tutte le altre misure effettuate con angoli di partenza inferiori.

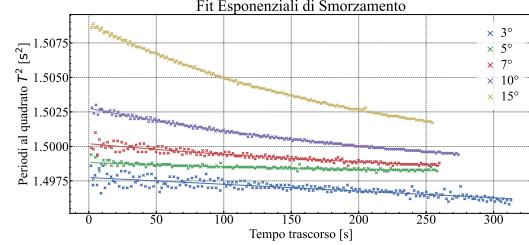


Figura 6: Fit esponenziale ad angoli iniziali diversi, per la stima dell'attrito viscoso.

Osservazione sulle misure effettuate

Abbiamo notato che le misure effettuate per 3° e 7° presentano battimenti, probabilmente sono dovuti al fatto che le oscillazioni del pendolo erano "spurie" e quindi hanno impiegato più oscillazioni a stabilizzarsi.

7 Conclusione

In conclusione, possiamo affermare che è stato possibile calcolare il valore di g con incertezza molto piccola, come nel caso del fototraguardo e della media mobile per il cronometro. Tuttavia, nonostante l'aggiunta dei termini correttivi, i valori di g ricavati facendo uso della media mobile e con il fototraguardo non risultano compatibili con il test di Student al 95% di confidenza (tranne il valore di g dello sperimentatore 1 con media mobile per il cronometro). Evidentemente, con la media mobile e il fototraguardo siamo giunti ad una incertezza troppo bassa per le condizioni sperimentali in cui abbiamo svolto le misure.