Scomposizione di Polinomi di Secondo Grado

Premessa

La **formula generale del polinomio di secondo grado** è:

$$ax^2 + bx + c$$

Di cui a, b, c sono i **coefficienti**.
Se a o b valgono 1, allora sono sottintesi.
Se uno degli elementi della formula manca vuol dire che il suo coefficiente vale 0.

`Esempio`:
In $x^2 - 1$:

- $a = 1$
- $b = 0$
- $c = -1$

Passaggi preliminari:

1. Cambiare il segno in modo da avere a positivo

`Esempio`:

$$-2x^2 + 5x - 6 \to -(2x^2 - 5x + 6)$$

2. Ridurre ai minimi termini

`Esempio`:

$$4x^2 - 2x + 6 \to 2(2x^2 - x + 3)$$

Scomposizione

I polinomi di secondo grado possono dividere in due sottogruppi:

- `incompleti`, se almeno uno tra b e c è nullo
- `completi`, se $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$

Formula Incompleta

Pura ($b = 0$)

$$ax^2 + c$$

- Se $c < 0$ Si può applicare la differenza di due quadrati:
$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

`Esempio`:
$x^2 - 1 \rightarrow (x - 1)(x + 1)$
$4x^2 - 3 \rightarrow (2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

- Se $c > 0$
  Il binomio **<u>non</u> è scomponibile** (ed è sempre posivivo)

Spuria ($c = 0$)

$$ax^2 + bx$$

Si raccoglie la x:
$ax^2 + bx \rightarrow x(ax + b)$

Formula Completa

$$ax^2 + bx + c$$

Di seguito verranno elencati vari metodi di scomposizione. L'ordine non è casuale: si parte con il primo e si verifica se si può applicare. Se non si può, si esegue la verifica per il secondo, e così via...

1. Verificare se è uno sviluppo di quadrato di binomio

La formula di scomposizione è:
$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$

Prendiamo come esempio
$4x^2 - 4x\sqrt{3} + 3$

I due quadrati presenti nella formula(A^2 e B^2) dovranno essere cercati nei termini ax^2 e c.
Nel nostro esempio quindi dobbiamo verificare che $4x^2$ e $+3$ siano i quadrati di qualche valore.

Si ricorda che un numero che non è un quadrato perfetto può essere in ogni caso visto come il quadrato della sua radice.
Ad esempio $3 \rightarrow \sqrt{3}$

Quindi l'unico controllo che bisogna fare è che c (+3 nel nostro caso) sia **positivo**, in alternativa è **impossibile** che scomporlo come quadrato di binomio.
Ora possiamo trovare i valori di A e B:
$A = 2x$
$B = \sqrt{3}$
Tuttavia non siamo certi del segno di A e B, perché sappiamo che il quadrato di un numero negativo diventa positivo, quindi sia A che B possono avere sia segno positivo che negativo
$A = \pm 2x$
$B = \pm\sqrt{3}$
Il segno di A si prende sempre quello positivo, mentre quello di B deve essere lo stesso del termine $2AB$, corrispondente a bx
Nel nostro caso quindi:
$A = 2x$
$B = -\sqrt{3}$ (meno perché è il segno di $-4x\sqrt{3}$)

Ora l'unica cosa da verificare è la corrispondenza tra i termini $2AB$ e bx Cioè, nel nostro esempio, verificare che
$2AB = 2 \cdot (2x) \cdot (-\sqrt{3}) = bx = -12x$
$2(2x)(-\sqrt{3}) = -4x\sqrt{3}$

Abbiamo quindi la conferma che il trinomio si può scomporre come quadrato di binomio. Ora basta applicare la formula di scomposizione conoscendo i valori di A e B:
$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2 = (2x - \sqrt{3})^2$

2. Metodo Somma Prodotto

Il metodo si può applicare **solo** se si ha un *trinomio speciale*, cioè se il coefficiente a di x^2 è 1. Consideriamo il trinomio nella forma:

$$x^2 + sx + p$$

Se si trovano due numeri a e b tali che la loro somma dia s e il loro prodotto dia p ($a + b = s$ e $a \cdot b = p$), allora si può scomporre il trinomio in:

$$x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$$

`Esempio con Trucco`:
$x^2 - 3x - 10$

Possiamo applicare il metodo perché $a = 1$.
Dobbiamo trovare due numeri a e b tali che $a + b = -3$ e $a \cdot b = -10$.
Si parte dal prodotto che deve fare -10.
Cerchiamo tutte le coppie di numeri che moltiplicati tra di loro danno 10, dimenticandosi per un attimo del segno negativo:
1 e 10
5 e 2
Pensiamo ora per ogni coppia se la loro differenza o somma danno 3 (dimenticandosi ancora una volta del segno negativo):
$10 - 1 = 9\;$ e $10 + 1 = 11:$ non è la coppia giusta
$5 + 2 = 7\;$ e $5 - 2 = 3:$ è potenzialmente la coppia giusta
Ora vanno decisi i segni di 5 e 2 per far si che la loro somma dia -3 e il prodotto -10.
Dato che il prodotto ha segno $-$, le combinazioni sono:
$a = 5$ e $b = -2$
$a = -5$ e $b = 2$
L'unica coppia la cui somma $a + b$ è uguale a -3 è $a = -5$ e $b = 2$.
Quindi possiamo scomporre:
$x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$

3. Metodo Somma Prodotto Esteso

Se abbiamo un trinomio su cui non possiamo applicare il metodo somma prodotto perché $a \neq 1$, possiamo però utilizzare una sua variante.
Consideriamo:

$$ax^2 + sx + p$$

Dobbiamo trovare due numeri n_1 e n_2 tali che:
$n_1 + n_2 = s$
$n_1 \cdot n_2 = ap$

Trovati i due numeri, riscrivo il trinomio nella forma:
$ax^2 + n_1x + n_2x + p$

Infine applico il ***raccoglimento parziale***.

`Esempio`:
$6x^2 + 11x + 3$
I due numeri sono:
$n_1 = 9$
$n_2 = 2$
Infatti
$n_1 + n_2 = 9 + 2 = s = 11$
$n_1 \cdot n_2 = 9 \cdot 2 = ap = 18$

Riscriviamo il trinomio come:
$6x^2 + 9x + 2x + 3$
Applichiamo il raccoglimento parziale:
$6x^2 + 9x + 2x + 3 = 3x(2x + 3) + 1(2x + 3) = (2x + 3)(3x + 1)$

4. Applicare la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dopo aver trovato le due soluzioni sol_1 e sol_2, si scompone in:

$$(x - sol_1)(x - sol_2)$$

Attenzione: Se applicando la formula l'argomento della radice risulta *negativo*, allora il polinomio è **sempre positivo** e quindi **non scomponibile**