Scomposizione Polinomi di Grado Superiore al primo

Premessa

I vari metodi vengono descritti con formule generali, che usano simboli come A e B per indicare termini generici, sia *letterali* sia *numerici*.
Si ricorda che le lettere generiche A, B...ecc possono avere anche segno negativo.
Inoltre ricorda che se un elemento di una formula ha forma AB, si intende che può essere visto come la moltiplicazione tra due termini:
`Esempio`
Se ho $8x^2$, esso può essere visto come:

- $8 \cdot x^2$
- $4 \cdot 2x^2$
- $-2x \cdot (-4x)$
- $\frac{x^2}{2} \cdot 16$
- *ecc...*

Metodi

Di seguito saranno elencati i metodi di scomposizione più noti, ordinati in modo crescente per i **numeri di termini** della formula da scomporre.
Come verrà descritto dopo l'elenco dei metodi, è importante ricordarsi il numero di termini di un metodo per capire subito se può essere utiizzato per la scomposizone.

IMPORTANTE:
Prima di applicare i seguenti metodi è importante verificare che non si possa applicare un ***raccoglimento totale*** La formula è:

$$AB + AC + AD \rightarrow A(B + C + D)$$

`Esempio`:
$4x^3 + 8x^2 + 12x \rightarrow 4x(x^2 + 2x + 3)$
Successivamente si può procedere a scomporre il polinomio rimasto.

Differenza tra Due Quadrati (2 termini)

Si utilizza quando il polinomio è una differenza tra due termini che sono quadrati perfetti.
`Formula Generale`:

$$A^2 - B^2 \to (A - B)(A + B)$$

`Esempio`:
$4x^2 - 9 \to (2x - 3)(2x + 3)$

Differenza tra Due Cubi (2 termini)

Si utilizza quando il polinomio è una differenza tra due termini che sono cubi perfetti.
`Formula Generale`:

$$A^3 - B^3 \to (A - B)(A^2 + B^2 + AB)$$

CONSIGLIO PER RICORDARE LA FORMULA: l'elemento $A^2 + B^2 + AB$ si chiama *falso quadrato* perché appunto ricorda la formuala del *quadrato di binomio* ma **senza** il **doppio** prodotto.
`Esempio`:
$4x^2 - 9 \to (2x - 3)(2x + 3)$

Quadrato di Binomio (3 termini)

Si utilizza quando il polinomio può essere scritto come il quadrato di un binomio.
`Formula Generale`:

$$A^2 + 2AB + B^2 \to (A + B)^2$$

`Esempio`:
$x^4 + 6x^2 + 9 \to (x^2 + 3)^2$

Raccoglimento Parziale(4 termini)

Se non è possibile raccogliere un termine comune per tutto il polinomio, si cerca di raggruppare i termini in modo da applicare il raccoglimento su gruppi parziali.
`Formula Generale`:

$$AB + AC + DB + DC \to A(B + C) + D(B + C) \to (A + D)(B + C)$$

`Esempio`:
$x^3 + x^2 + 2x + 2 \to (x^2(x + 1) + 2(x + 1)) \to (x^2 + 2)(x + 1)$

Cubo di Binomio (4 termini)

Si utilizza quando il polinomio può essere scritto come il cubo di un binomio.
`Formula Generale`:

$$A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2 \to (A + B)^3$$

`Esempi`:
$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \to (x + 2)^3$
$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \to (x - 2)^3$

Quadrato di Trinomio (6 termini)

Si utilizza quando il polinomio può essere scritto come il quadrato di un trinomio.
`Formula Generale`:

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC \to (A + B + C)^2$$

`Esempio`:
$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \to (x + y + z)^2$

Come capire quale metodo usare

La fase più importante della scomposizione non è quella in cui si applica la formula, ma quella in cui si capisce quale formula usare e si identifica i valori di A, B, ecc...
Ecco due esempi per familiarizzare con il processo:

`Esempio 1:`
$8x^5 - 2x$

Prima di ogni cosa, bisogna applicare il **raccogliemento totale**, se possibile.
In questo caso si può raccogliere $2x$:
$8x^5 - 2x = 2x(4x^4 - 1)$

Abbiamo raccolto il massimo. Ora possiamo pensare alla scomposizione vera e propria.
$4x^4 - 1$ ha **2** termini, quindi le opzioni di scomposizione sono:

- *Differenza di due quadrati* $\rightarrow A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
- *Differenza di due cubi* $\rightarrow A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + B^2 + AB)$

Abbiamo una differenza. 1 può essere visto sia come il cubo di 1 che come il quadrato di un 1.
Invece il termine $4x^4$ non può essere visto come un cubo di qualcos'altro, ma solo come quadrato di $2x^2$.

Quindi supponiamo di scomporre tramite *quadrato di binomio*, con:

- $A = 2x^2$
- $B = 1$

Verifichiamo la corrispondenza applicando la formula $A^2 - B^2$:
$(2x^2)^2 - 1^2 = 4x^4 - 1$
Ora possiamo scomporre:
$4x^4 - 1 = (A - B)(A + B) = (2x^2 - 1)(2x^2 + 1)$

Quindi l'intera scomposizione è:
$8x^5 - 2x = 2x(4x^4 - 1) = 2x(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)$

`Esempio 2`:
$x^6 + 6x^4 + 12x^2 - 8$

Non possiamo raccogliere nulla, quindi procediamo subito a scomporre.
Abbiamo **4 termini**, quindi le opzioni sono:

- *Raccoglimento Parziale*
- *Cubo di Binomio*

Di media si inizia con quello più facile, cioè il *Raccoglimento Parziale*:
$AB + AC + DB + DC \to A(B + C) + D(B + C) \to (A + D)(B + C)$
In pratica dobbiamo raccogliere a due a due e sperare che ciò che rimane dai due raccoglimenti sia uguale.
Facciamo un po' di tentativi:
$x^4(x^2 + 6) + 4(3x^2 - 2)$
$x^2(x^4 + 12) + 2(3x^4 - 4)$
Non si può usare il *raccoglimento parziale*

Vediamo se è possibile utilizzare il *Cubo di Binomio*:
$A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2 \to (A + B)^3$

Dobbiamo trovare termini che siano due cubi (i corrispettivi di A^3 e B^3):
x^6 è il cubo di $x^2 \to A = x^2$
-8 è il cubo di $-2 \to B = -2$
Gli *unici* valori possibili di A e B sono questi perché gli altri termini non sono dei cubi; basta quindi verificare la corrispondenza degli altri termini.
Riscriviamo il polinomio in un ordine più congeniale:
$x^6 - 8 + 6x^4 + 12x^2$

Verifichiamo:
$3AB^2 = 3 \cdot x^2 \cdot (-2)^2 = +12x^2$
$3A^2B = 3 \cdot (x^2)^2 \cdot (-2) = -6x^4$

Purtroppo non corrisponde con la formula, quindi **non si può scomporre** con i metodi tradizionali.