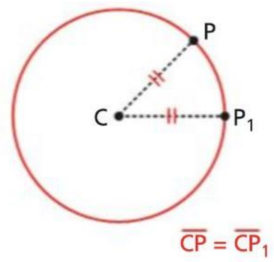
CIRCONFERENZA

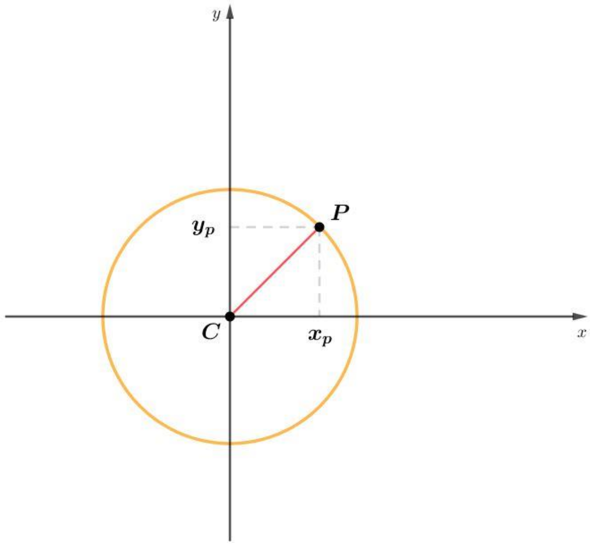
DEFINIZIONE: Assegnato un punto C nel piano (detto ***centro***) si chiama **CIRCONFERENZA** il luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro C.



$$\boxed{\overline{PC} = costante}$$

La distanza $\overline{PC}$ prende il nome di **raggio**.

EQUAZIONI DELLE CIRCONFERENZE CON CENTRO NELL'ORIGINE



$$\overline{CP} = cost = R$$

Applicando il ***Teorema di Pitagora*** si ottiene:

$$\sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2} = R$$

Elevando entrambi i membri alla seconda diventa

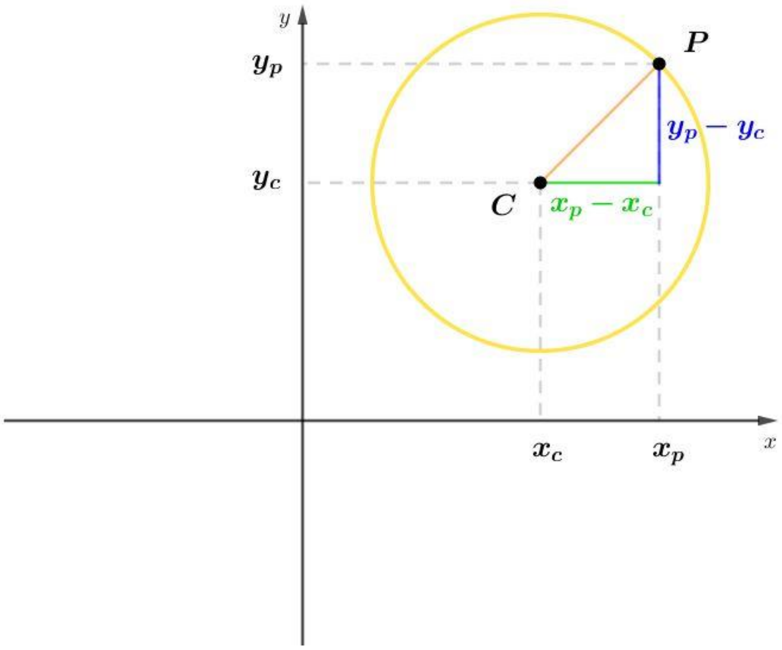
$${x_P}^2 + {y_P}^2 = R^2$$

Questo ragionamento vale per tutti i punti P della circonferenza, pertanto l'***equazione di una circonferenza con centro nell'origine e raggio R*** è:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

Per semplicità siamo partiti dal caso particolare delle circonferenze con centro nell'origine ma vediamo ora come si può ricavare l'equazione di una generica circonferenza nel piano, sfruttando nuovamente il teorema di Pitagora.

EQUAZIONI DELLE CIRCONFERENZE NEL PIANO



$$\overline{CP} = cost = R$$

Applicando il ***Teorema di Pitagora*** si ottiene:

$$\sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = R$$

Elevando entrambi i membri alla seconda diventa

$$(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 = R^2$$

Questo ragionamento vale per tutti i punti P della circonferenza, pertanto l'***equazione di una circonferenza con centro C e raggio R*** è:

$$\boxed{\boldsymbol{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2}}$$

ESEMPIO: Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C(2;\ 3)$ e raggio $R = 4$

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16$$

Che diventa:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

Abbiamo visto in questo esempio come trovare l'***equazione generale di una circonferenza*** che sarà quindi della forma:

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}}$$

Cosa indicano i parametri ***a, b*** e ***c***? Cerchiamo di capirlo a partire dall'equazione seguente:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$$

$$x^2 - 2xx_C + x_C{}^2 + y^2 - 2yy_C + y_C{}^2 = R^2$$

Riordinando i termini mettiamo in evidenza i valori di a, b e c:

$$x^2 + y^2 \underbrace{-2x_C}_{a} x \underbrace{-2y_C}_{b} y + \underbrace{x_C{}^2 + y_C{}^2 - R^2}_{c} = 0$$

Si ottiene quindi:

$$a = -2x_C \Rightarrow \boldsymbol{x_c = -\frac{a}{2}}$$

$$b = -2y_C \Rightarrow \boldsymbol{y_c = -\frac{b}{2}}$$

Le **coordinate del centro** perciò sono: $\boxed{\boldsymbol{C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)}}$

$$c = x_C{}^2 + y_C{}^2 - R^2 \Rightarrow \boldsymbol{R = \sqrt{x_C{}^2 + y_C{}^2 - c}}$$

Il **raggio** si trova quindi facendo:

$$R = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}}}$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: L'equazione $\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$ rappresenta una circonferenza solo se la misura del raggio è un numero reale, quindi solo se:

$$\boldsymbol{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0}$$

In particolare, se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0$ significa che $R = 0$. In questo caso la circonferenza si riduce a un solo punto, il centro. In questo caso diciamo che la ***circonferenza*** è ***degenere***.

Notiamo che, per avere l'equazione di una circonferenza, non è necessario che x^2 e y^2 abbiano coefficiente 1. È sufficiente che i loro ***coefficienti*** siano entrambi ***uguali a un qualunque numero n non nullo*** (infatti è possibile riottenere i coefficienti uguali a 1 dividendo tutti i termini per n).

NB: Se i coefficienti di x^2 e y^2 sono discordi invece <u>non</u> si tratta più di una circonferenza!

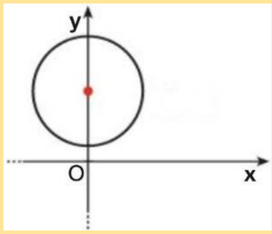
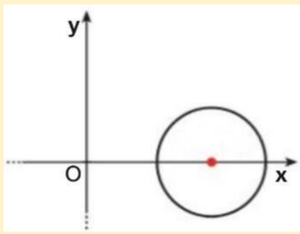
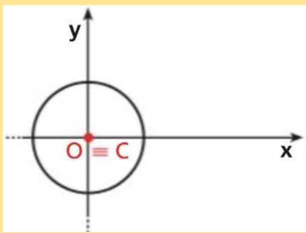
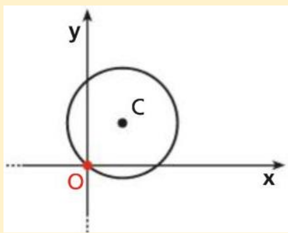
Per esempio l'equazione $4x^2+4y^2+16x-32y-20=0$ è equivalente alla circonferenza sottostante (ottenuta dividendo tutti i coefficienti per 4):

$$x^2+y^2+4x-8y-5=0$$

In questo caso $a=4, b=-8$ e $c=-5$ quindi le coordinate del centro sono $C\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)=(-2;\ 4)$ e il raggio vale $R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{4+16-(-5)}=5$

Analizziamo infine cosa succede alle circonferenze se si annullano i parametri a, b e c.

CIRCONFERENZE: CASI PARTICOLARI

<table>
<tr><th></th><th>Caratteristiche</th><th>Circonferenza nel piano</th></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{a=0}$
$\boldsymbol{x^2+y^2+by+c=0}$</td><td>Si tratta di una circonferenza con centro sull'asse y
$C\left(0;\ -\frac{b}{2}\right)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{b=0}$
$\boldsymbol{x^2+y^2+ax+c=0}$</td><td>Si tratta di una circonferenza con centro sull'asse x
$C\left(-\frac{a}{2};\ 0\right)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{a=b=0}$
$\boldsymbol{x^2+y^2+c=0}$</td><td>Si tratta di una circonferenza con centro nell'origine
$C(0;\ 0)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{c=0}$
$\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by=0}$</td><td>Si tratta di una circonferenza passante per l'origine degli assi</td><td>
</td></tr>
</table>