

# PORTE LOGICHE DIGITALI

# PREMESSA

Le principali parti elettroniche dei computer sono costituite da circuiti digitali che, come è noto, elaborano segnali logici basati sullo 0 e sull'1.

I mattoni fondamentali dei circuiti logici sono, appunto, le porte logiche che sono in grado di soddisfare un'algebra particolare, detta *algebra binaria*, sviluppata dallo scienziato George Boole (1815-1864).

Ogni porta logica ha una o più variabili di ingresso ed una sola variabile di uscita. Le variabili di ingresso e di uscita sono di tipo digitale per cui è possibile inserire in una tabella tutte le possibili combinazioni che si possono verificare tra le variabili di ingresso. L'uscita assume il valore 0 oppure il valore 1 in corrispondenza di ciascuna combinazione delle variabili di ingresso in funzione della definizione assegnata.

# PORTE LOGICHE FONDAMENTALI

# Somma logica OR

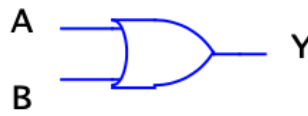
*Si effettua su due o più variabili, l'uscita assume lo stato logico 1 se almeno una variabile di ingresso è allo stato logico 1.*

Nel caso di due variabili di ingresso A e B, detta Y la variabile di uscita, si scrive:

$$Y = A + B$$

e si legge A or B.

Nella seguente figura si mostra la tabella della verità con le quattro possibili combinazioni tra A e B ed il simbolo logico relativo ad una porta OR a due ingressi. Nella colonna Y si sono posti i valori assunti dall'uscita Y che soddisfa la definizione della porta OR.

	A	B	Y
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1

# Prodotto logico AND

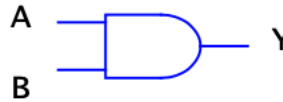
*Si effettua su due o più variabili, l'uscita assume lo stato logico 1 solo se tutte variabile di ingresso sono allo stato logico 1.*

Nel caso di due variabili di ingresso A e B, detta Y la variabile di uscita, si scrive la funzione logica:

$$Y = A \cdot B$$

e si legge A and B.

Nella seguente figura si mostra la tabella della verità con le quattro possibili combinazioni tra A e B ed il simbolo logico relativo ad una porta AND a due ingressi. Nella colonna Y si sono posti i valori assunti dall'uscita Y che soddisfa la definizione della porta AND.

	A	B	Y
	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

# Negazione NOT


*Si effettua su una sola variabile. L'uscita assume il valore logico opposto a quello applicato in ingresso.*

Detta A la variabile di ingresso la negazione si scrive:

$$Y = \bar{A}$$

e si legge *A negato* oppure *A complementato*.

Nella seguente figura si mostra la tabella della verità con le due possibili combinazioni di A ed il simbolo logico relativo ad una porta NOT. Nella colonna Y si sono posti i valori assunti dall'uscita Y che soddisfa la definizione della porta NOT.

	A	Y
	0	1
	1	0

# PORTE LOGICHE DERIVATE

Le porte esposte di seguito sono composte da due o più porte fondamentali, però per la loro importanza vengono rappresentate con un simbolo proprio.

# Somma logica negata NOR


Si effettua su due o più variabili, l'uscita assume lo stato logico 0 se almeno una variabile di ingresso è allo stato logico 1. In tutti gli altri casi  $Y=1$ . Corrisponde ad una OR con in cascata una NOT

Per due variabili di ingresso A e B la funzione logica è:

$$Y = \overline{A + B}$$

e si legge A nor B.

Nella seguente figura si mostra la tabella della verità con le quattro possibili combinazioni tra A e B ed il simbolo logico relativo ad una porta NOR a due ingressi. Nella colonna Y si sono posti i valori assunti dall'uscita Y che soddisfa la definizione della porta NOR.

	A	B	Y
	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	0



# Prodotto logico negato NAND

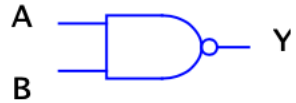
Si effettua su due o più variabili, l'uscita assume lo stato logico 0 se tutte le variabili di ingresso sono allo stato logico 1. In tutti gli altri casi  $Y=1$ . Corrisponde ad una AND con in cascata una NOT

La funzione logica si scrive:

$$Y = \overline{A \cdot B}$$

e si legge A nand B.

Nella seguente figura si mostra la tabella della verità con le quattro possibili combinazioni tra A e B ed il simbolo logico relativo ad una porta NAND a due ingressi. Nella colonna Y si sono posti i valori assunti dall'uscita Y che soddisfa la definizione della porta NAND.

	A	B	Y
	0	0	1
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0

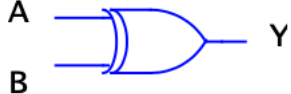
# OR esclusivo XOR

A differenza delle precedenti porte logiche, l'XOR opera solo su due ingressi. L'uscita vale 1 se gli ingressi assumono valore diverso, vale 0 se gli ingressi sono tra loro uguali. La funzione logica si scrive:

$$Y = A \oplus B$$

e si legge A or esclusivo B oppure A diverso da B.

Nella seguente figura si mostra la tabella della verità con le quattro possibili combinazioni tra A e B ed il simbolo logico relativo ad una porta XOR. Nella colonna Y si sono posti i valori assunti dall'uscita Y che soddisfa la definizione della porta XOR.

	A	B	Y
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0

Quando si studieranno i modi per ricavare la funzione logica di un circuito digitale a partire dalla sua tabella di verità, si verificherà che la funzione XOR corrisponde alla funzione:

$$Y = \bar{A}B + A\bar{B}$$

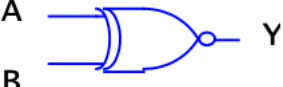
# NOR esclusivo XNOR

Anche la porta XNOR opera su due soli ingressi. L'uscita vale 1 se gli ingressi assumono valore uguale, vale 0 se gli ingressi sono tra loro diversi. La funzione logica si scrive:

$$Y = \overline{A \oplus B}$$

e si legge A nor esclusivo B oppure A coincidente con B.

Nella seguente figura si mostra la tabella della verità con le quattro possibili combinazioni tra A e B ed il simbolo logico relativo ad una porta XNOR. Nella colonna Y si sono posti i valori assunti dall'uscita Y che soddisfa la definizione della porta XNOR.

	A	B	Y
	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

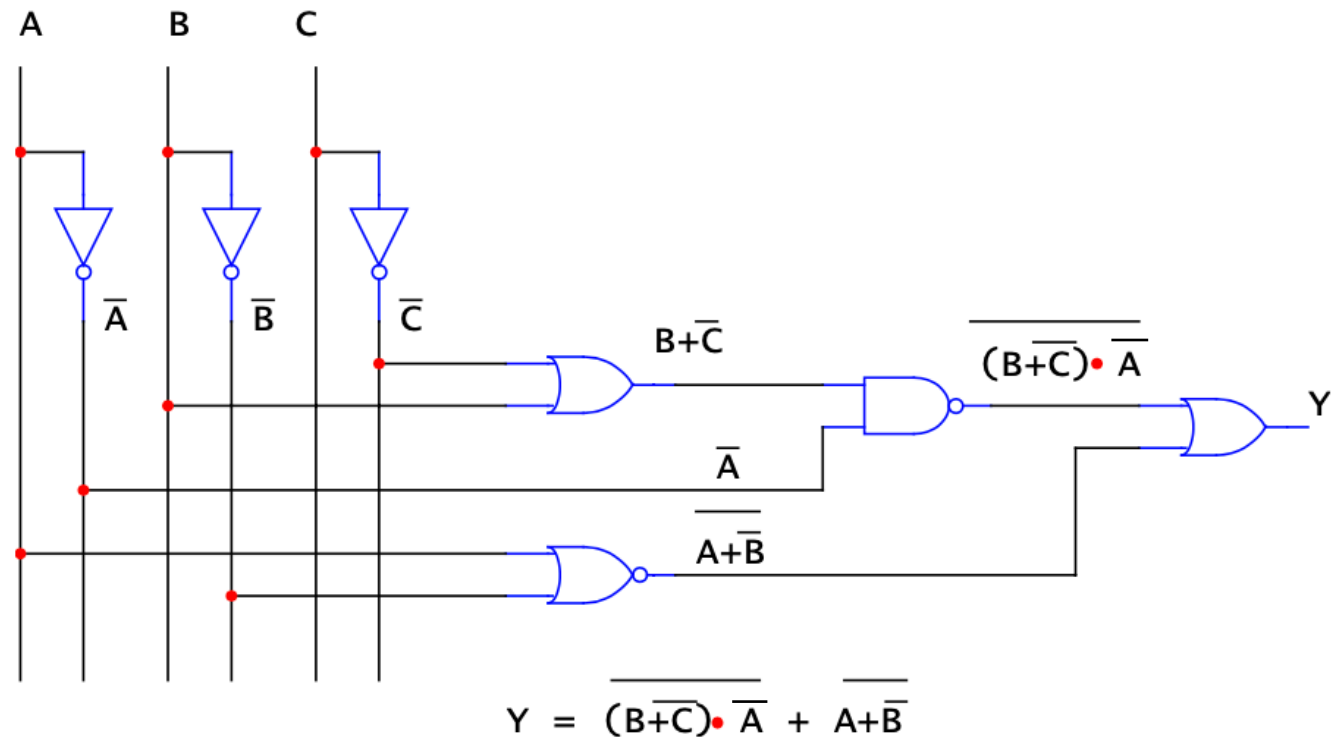
Quando si studieranno i modi per ricavare la funzione logica di un circuito digitale a partire dalla sua tabella di verità, si verificherà che la funzione XNOR corrisponde alla funzione:

$$Y = AB + \bar{A} \bar{B}$$

# CIRCUITI DIGITALI

- **Circuiti combinatori:** le uscite del circuito dipendono esclusivamente dalle entrate (ogni singola porta prima considerata è un semplice circuito combinatorio);
- **Circuiti sequenziali:** le uscite del circuito dipendono sia dalle entrate che dallo stato interno del circuito, sono ad esempio circuiti sequenziali i latch, i flip flop, i registri, le memorie, ecc. che vedremo in seguito.

Un circuito digitale sarà rappresentato dal suo schema, dalla sua funzione logica e dalla sua tabella di verità, ognuno di queste tre definirà completamente il circuito nel senso che c'è una corrispondenza fra schema, circuito e tabella di verità. Consideriamo ad es. il seguente schema composto con le porte logiche che conosciamo:



analizzando il circuito andando da sinistra a destra possiamo facilmente ricavare la funzione logica come indicato.

# ALGEBRA DI BOOLE

La funzione logica di un circuito, come abbiamo visto, è espressa utilizzando i vari operatori logici fondamentali (somma logica, prodotto logico, negazione) ed è sottoposta alle regole di un'algebra, diversa da quella che conosciamo, detta algebra di Boole.

Vi sono diverse proprietà dell'algebra Booleana che risultano utili nel manipolare le equazioni logiche al fine di semplificarla e quindi al fine di semplificare il circuito corrispondente, in particolare:



## **Teorema dell'identità**

$$A + 0 = A$$

$$A \cdot 1 = A$$

## **Teorema annullamento**

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot 0 = 0$$

## **Teorema dei complementi**

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

## Teorema dell'idempotenza

$$A + A = A$$

$$A \cdot A = A$$

## 1° teorema dell'assorbimento

$$A + (AB) = A$$

$$A(A + B) = A$$

*Dimostrazione*

$$A + AB = A(1 + B) = A \cdot 1 = A$$

*mentre*

$$\begin{aligned} A(A + B) &= AA + AB = \\ &= A + AB = A(1 + B) = A \cdot 1 = A \end{aligned}$$

## Teorema dell'involuzione o doppia negazione

$$\overline{\overline{A}} = A$$

## 2° teorema dell'assorbimento

$$A + \bar{A}B = A + B$$

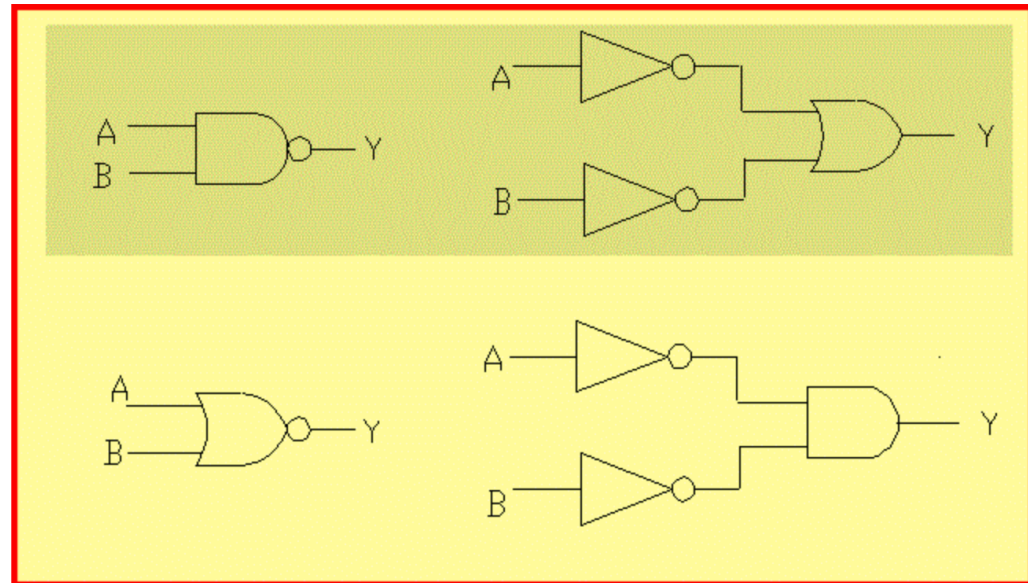
*Dimostrazione*

$$\begin{aligned} A + B &= A + B(A + \bar{A}) = A + AB + \bar{A}B \\ &= A(1 + B) + \bar{A}B = A + \bar{A}B \end{aligned}$$

## Teoremi di De Morgan

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$



## Proprietà commutativa

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

## Proprietà associativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$$

## Proprietà distributiva

$$A \cdot (B + C) = (AB) + (AC)$$

$$A + (BC) = (A + B) \cdot (A + C)$$

*Dimostrazione*

$$AA + AC + AB + BC = AA + A(B + C) + BC$$

*ma*  $AA = A$  *quindi*

$$A + A(B + C) + BC \quad \text{cioè}$$

$$A[1 + (B + C)] + BC$$

*ma*  $1 + (B + C) = 1$  *quindi*

$$(A + B)(A + C) = A + BC$$