Integrali Impropri

Il concetto di integrale può essere ampliato considerando funzioni con un ***numero finito di punti di discontinuità*** in un intervallo limitato oppure considerando ***intervalli illimitati***.

L'area sottesa alla curva si riferisce pertanto ad una *regione del piano illimitata* e può avere valore finito oppure infinito, a seconda che l'integrale improprio converga o diverga.

1° CASO: Numero finito di punti di discontinuità

- Se la funzione $f(x)$ è continua in tutti i punti dell'intervallo $[a;\ b)$ ma non in b si ottiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to b^-}\int_a^z f(x)\,dx$$

- Se la funzione $f(x)$ è continua in tutti i punti dell'intervallo $(a;\ b]$ ma non in a si ottiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to a^+}\int_z^b f(x)\,dx$$

- Se la funzione ha un punto di discontinuità di qualunque specie in un punto c interno all'intervallo $[a;\ b]$, si ottiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to c^-}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

  In modo analogo la definizione di integrale può essere estesa al caso di una funzione con un numero finito di punti di discontinuità.

Tutti questi integrali sono detti ***integrali impropri*** della funzione $f(x)$ in $[a;\ b]$.

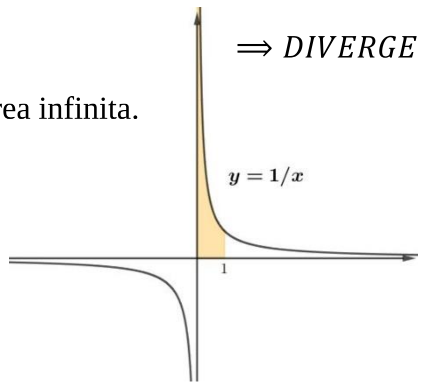
Se il limite considerato non esiste oppure è infinito, si dice che la funzione non è integrabile in senso improprio in [a; b] o anche che l'integrale è rispettivamente *indeterminato* oppure *divergente*.

ESEMPI:

1) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{z\to 0^+}\int_z^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{z\to 0^+}[\ln|x|]_z^1 = \lim_{z\to 0^+}[\ln 1 - \ln|z|] = 0-(-\infty) = +\infty$

$\Longrightarrow DIVERGE$

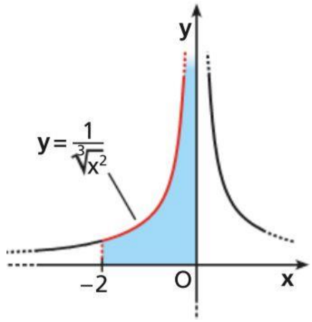
OSSERVAZIONE: La regione colorata è illimitata con area infinita.



2) $\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \lim_{z\to 0^-} \int_{-2}^{0} x^{-2/3}\, dx = \lim_{z\to 0^-} \left[\frac{1}{-2/3+1} x^{-2/3+1}\right]_{-2}^{z} =$

$\lim_{z\to 0^-} \left[3\sqrt[3]{x}\right]_{-2}^{z} = \lim_{z\to 0^+} \left[3\sqrt[3]{z} - 3\sqrt[3]{-2}\right] = 3\sqrt[3]{2}$

OSSERVAZIONE: La regione colorata è illimitata ma con area finita.



3) $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}\, dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^4}\, dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{x^4}\, dx = \lim_{z\to 0^-} \int_{-2}^{z} x^{-4}\, dx + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{3} x^{-4}\, dx = \lim_{z\to 0^-} \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{-2}^{z} +$

$\lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{t}^{3} = \lim_{z\to 0^-} \left[-\frac{1}{3z^3} + \frac{1}{24}\right] + \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{1}{81} + \frac{1}{3t^3}\right] = +\infty + \frac{1}{24} - \frac{1}{81} + \infty = +\infty$

$\Longrightarrow$ *DIVERGE*

2° CASO: intervallo di integrazione illimitato

- Se la funzione $f(x)$ è continua in tutti i punti dell'intervallo $[a;\ +\infty)$ ma non in b si ottiene:

$$\int_{a}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)\, dx} = \lim_{z\to +\infty} \int_{a}^{z} \boldsymbol{f(x)\, dx}$$

- Se la funzione $f(x)$ è continua in tutti i punti dell'intervallo $(-\infty;\ a]$ ma non in a si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{a} \boldsymbol{f(x)\, dx} = \lim_{z\to -\infty} \int_{z}^{a} \boldsymbol{f(x)\, dx}$$

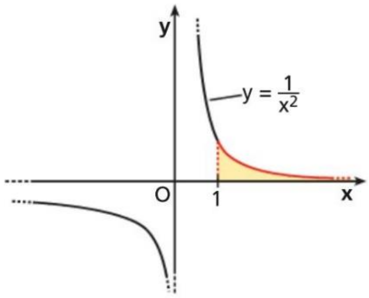
ESEMPI:

1) Calcoliamo l'integrale improprio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nell'intervallo $[1;\ +\infty)$:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{z\to +\infty} \int_{1}^{z} x^{-2}\, dx = \lim_{z\to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{z}$$

$$= \lim_{z\to +\infty} \left[-\frac{1}{z} - (-1)\right] = 0 + 1 = 1$$

OSSERVAZIONE: La regione colorata non è limitata, ma la sua area è finita.



2) Calcoliamo l'integrale improprio della funzione $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ nell'intervallo $(-\infty;\ 1]$:

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2x-3}\, dx = \lim_{z\to -\infty} \frac{1}{2} \int_{z}^{1} \frac{2}{2x-3}\, dx = \lim_{z\to -\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|2x-3|\right]_{z}^{1}$$

$$= \lim_{z\to -\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|-1| - \frac{1}{2}\ln|2z-3|\right] = 0 - \frac{1}{2}(+\infty) = -\infty \Longrightarrow \textit{DIVERGE}$$

OSSERVAZIONE: La regione considerata non è limitata e ha area infinita.