SCHEMA: DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

DISEQUAZIONI ELEMENTARI

Sono disequazioni del tipo:

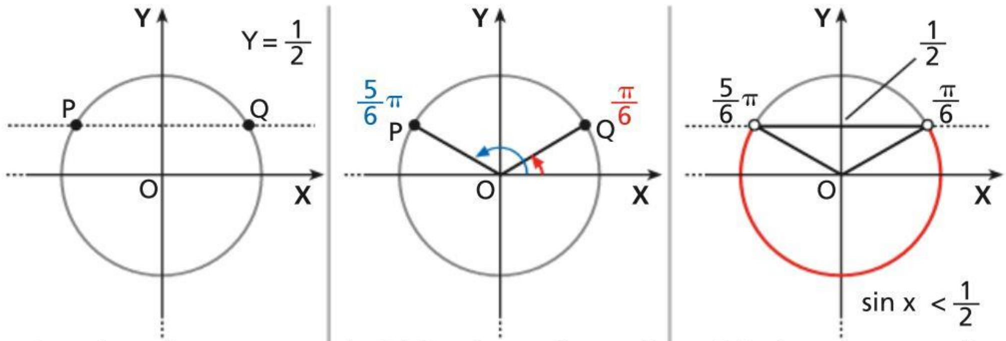
- $\sin x \gtreqless a$
- $\cos x \gtreqless b$
- $\tan x \gtreqless c$

Si procede, come per le equazioni goniometriche, aiutandosi con la *circonferenza goniometrica* (evidenziando gli archi di circonferenza i cui angoli soddisfano la disequazione).

ESEMPIO 1:

$$\sin x < \frac{1}{2}$$

Per prima cosa si individuano gli angoli che hanno il seno pari a 1/2:



a. Tracciamo la retta $Y = \frac{1}{2}$ e indichiamo con P e Q i punti aventi ordinata $\frac{1}{2}$.

b. Evidenziamo gli angoli $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$ individuati da P e Q.

c. Coloriamo in rosso gli archi i cui punti hanno ordinata minore di $\frac{1}{2}$.

Le soluzioni sono quindi date da tutti gli angoli a cui corrispondono sulla circonferenza goniometrica punti con ordinata minore di 1/2:

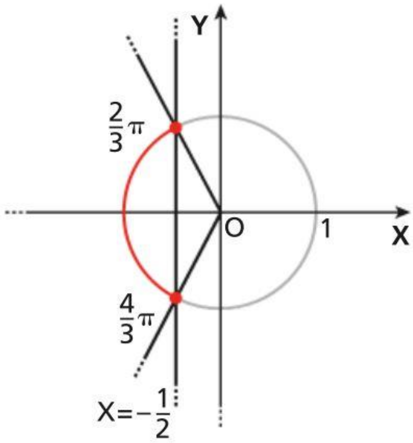
$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

ESEMPIO 2:

$$2\cos x + 1 \leq 0 \Rightarrow \cos x \leq -\frac{1}{2}$$

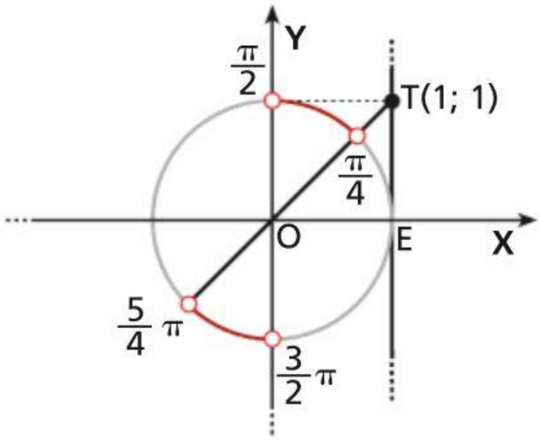
Le soluzioni sono quindi date da tutti gli angoli a cui corrispondono sulla circonferenza goniometrica punti con ascissa minore di -1/2:

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$



ESEMPIO 3:

$$\tan x - 1 > 0 \Longrightarrow \mathbf{tan}\, \boldsymbol{x} > \mathbf{1}$$



Le soluzioni sono quindi date da tutti gli angoli a cui corrispondono sulla retta tangente punti con ordinata maggiore di 1 (ricordando che la tangente non esiste per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$):

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE LINEARI

$$\boxed{\boldsymbol{a \sin x + b \cos x + c \gtreqless 0}}$$

Si utilizza nuovamente un ***metodo grafico***.

Per prima cosa si effettua il *cambio di variabile* $\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}$ e $\mathbf{sin}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Y}$ e si utilizza la relazione fondamentale.

$$\begin{cases} \boldsymbol{aY + bX + c \gtreqless 0} \\ \boldsymbol{X^2 + Y^2 = 1} \end{cases}$$

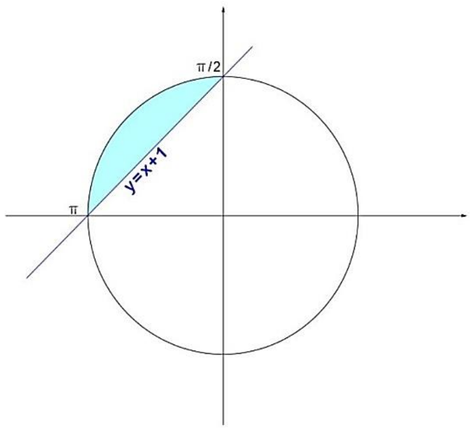
Si prosegue andando a rappresentare nel piano cartesiano la *retta di equazione* $aY + bX + c = 0$ e la *circonferenza goniometrica* e si individuano i loro punti di intersezione.

Il fatto che nella retta ci sia un maggiore (rispettivamente un minore) significa che occorre prendere tutti i valori che si trovano sopra (rispettivamente sotto) la retta e che allo stesso tempo appartengano alla circonferenza.

ESEMPIO:

$$\boldsymbol{\sin x - \cos y - 1 > 0}$$

$$\begin{cases} Y - X - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Y = X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



Si tracciano la retta e la circonferenza goniometrica nel piano cartesiano e si individuano le loro intersezioni. Si conclude evidenziando la parte di circonferenza che si trova "sopra" la retta.

Le soluzioni sono quindi:

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi}$$

DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE NON ELEMENTARI

Si cerca di effettuare alcune ***sostituzioni*** e ***scomposizioni*** in modo da ricondursi alle disequazioni elementari.

ESEMPIO:

$$\mathbf{4\cos^2 x - 4\cos x - 3 \leq 0}$$

Per semplicità possiamo effettuare la sostituzione $t = \cos x$:

$$4t^2 - 4t - 3 \leq 0$$

Risulta una disequazione di secondo grado in t. Risolviamo l'equazione associata:

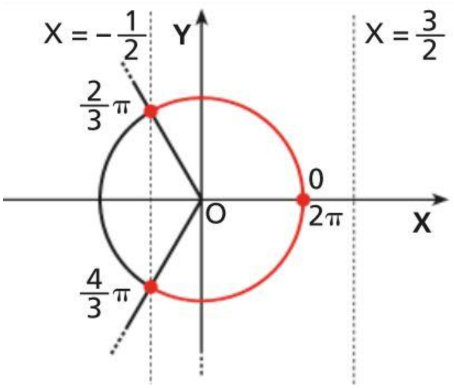
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 16 + 48 = 64$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 8}{8} \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = \frac{3}{2}$$

Le soluzioni della disequazione (mediante il metodo grafico della parabola) sono:

$$-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{3}{2}$$



Le soluzioni sono pertanto:

$$\mathbf{2k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \ \vee \ \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi}$$