Studio di Funzione

Quello che viene di seguito presentato è uno schema che riassume e organizza tutti gli aspetti per poter tracciare un grafico probabile di una funzione.

Data una funzione siamo in grado di determinare molte sue caratteristiche che consentono di tracciarne il grafico in modo approssimato ma qualitativamente valido. È conveniente man mano che si procede nello studio, riportare i risultati sul grafico per controllarne la coerenza.

I principali passi per un primo studio di funzione sono i seguenti:

1) ***DOMINIO***
2) ***SIMMETRIE***
3) ***INTERSEZIONI CON GLI ASSI***
4) ***SEGNO***
5) ***LIMITI E SINGOLARITÀ***
6) ***ASINTOTI***
7) ***DERIVATA PRIMA (per MONOTONIA e PUNTI STAZIONARI)***
8) ***DERIVATA SECONDA (per CONCAVITÀ e FLESSI)***

STEP 1: Dominio della funzione

È fondamentale studiare il dominio della funzione per sapere per quali valori essa esiste (all'infuori del campo di esistenza la funzione perde infatti di significato).

Il dominio corrisponde all'insieme più ampio di valori reali che si possono assegnare alla variabile indipendente x affiche esista il corrispondente valore reale y.

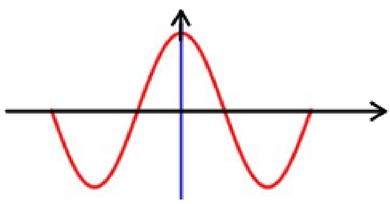
<u>Tabella riassuntiva delle principali funzioni elementari:</u>

Domini delle principali funzioni

Funzione	Dominio
Funzioni razionali intere: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$	$\mathbb{R}$
Funzioni razionali fratte: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (P e Q polinomi)	$\mathbb{R}$ esclusi i valori che annullano $Q(x)$
Funzioni irrazionali: $y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$, se n è pari dominio di $f(x)$, se n è dispari
Funzioni logaritmiche: $y = \log_a f(x) \quad a > 0, a \neq 1$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$
Funzioni esponenziali: $y = a^{f(x)} \quad a > 0, a \neq 1$ $y = [f(x)]^{g(x)}$	dominio di $f(x)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \cap$ dominio di $g(x)$
Funzioni goniometriche: $y = \sin x$, $y = \cos x$ $y = \tan x$ $y = \cot x$ $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ $y = \arctan x$, $y = \text{arccot}\, x$	 $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, con $k \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$ $[-1; 1]$ $\mathbb{R}$

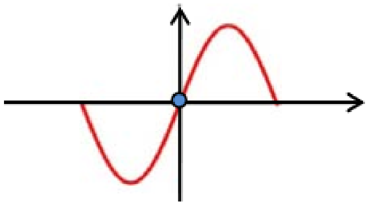
STEP 2: Simmetrie (Funzione pari/dispari)

Si procede studiando eventuali simmetrie della funzione.



- ✓ Se $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ la funzione è *pari* → simmetria rispetto all'asse y;

- ✓ Se $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ la funzione è *dispari* → simmetria rispetto all'origine.

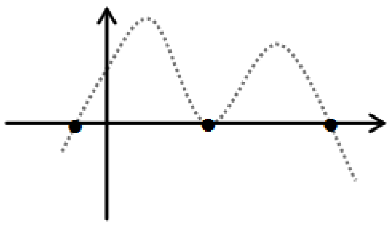


<u>*Osservazione:*</u> la presenza di eventuali simmetrie permette di alleggerire lo studio di funzione (in quanto, ad esempio per le funzioni pari, è sufficiente analizzare la situazione per x positive ed estendere i risultati ottenuti anche per ascisse negative).

STEP 3: Zeri della funzione e intersezione con l'asse y

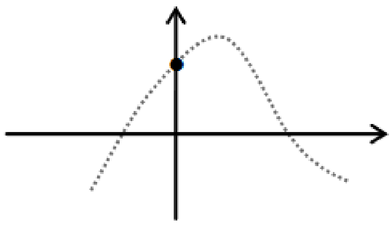
Si studiano le intersezioni con gli assi cartesiani:

- ✓ Zeri della funzione (intersezioni con l'asse x):



$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{f(x) = 0}$$

- ✓ Intersezione con l'asse y:



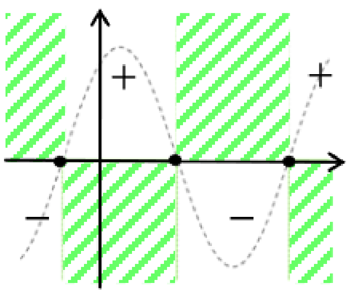
$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{y = f(0)}$$

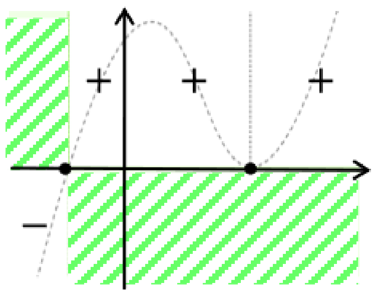
STEP 4: Segno della funzione

Il segno della funzione corrisponde a studiare la disequazione:

$$\boldsymbol{f(x) > 0}$$

In questo modo si individuano le regioni di piano, all'interno del dominio, dove la funzione è positiva o negativa e si cancellano le regioni di piano dove la funzione non esiste.



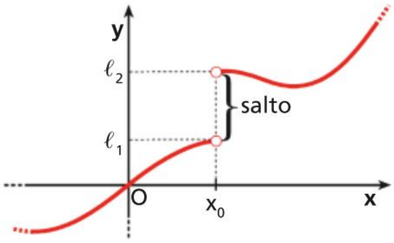


STEP 5: Limiti agli estremi del dominio e Punti di singolarità

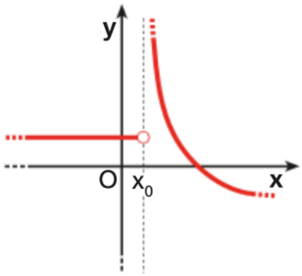
Nel caso di valori esclusi dal dominio bisogna osservare cosa succede per x che tende da destra e da sinistra a tali valori e, se il dominio è illimitato, si analizza cosa accade x che tende a più o meno infinito.

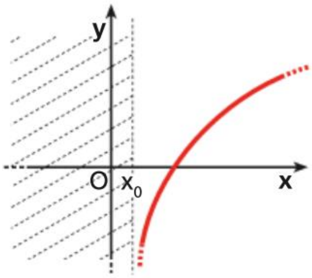
In caso di singolarità si classificano i punti come:

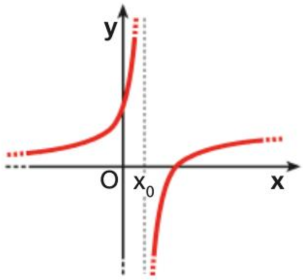
- ✓ **Singolarità di prima specie** se il limite destro e sinistro sono entrambi finiti ma diversi tra loro: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \neq l_2 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (in questo caso si può determinare il salto calcolando la differenza $|l_1 - l_2|$)



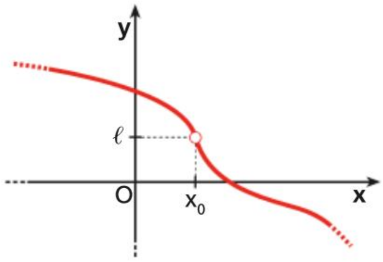
- ✓ **Singolarità di seconda specie** se almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, è infinito oppure non esiste.

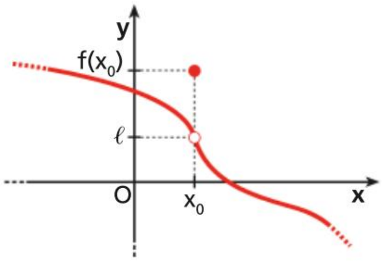






- ✓ **Singolarità di terza specie (o eliminabile)** se esiste finito il limite per x che tende a x_0 ma la funzione non è definita in x_0 oppure, se lo è, il suo valore in x_0 risulta diverso da l ($\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$).

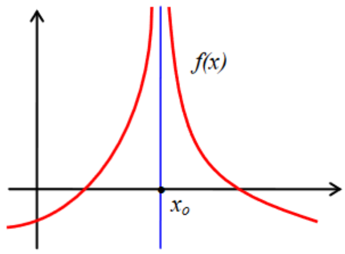




STEP 6: Asintoti

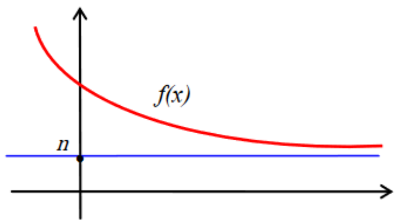
- ✓ ***Asintoto Verticale***: si cerca nei punti di discontinuità della funzione oppure nei punti agli estremi del dominio se sono finiti e non appartenenti al dominio stesso.
  Occorre studiare il limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} n\ finito \to l'asintoto\ verticale\ non\ esiste \\ \pm\infty \ \to l'asintoto\ orizzontale\ \text{è}\ \boldsymbol{x} = x_0 \end{cases}$$



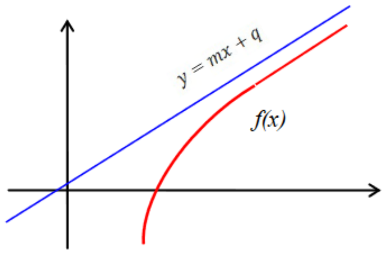
- ✓ ***Asintoto orizzontale***: si cerca a $\pm\infty$ se il dominio lo consente. Si studiano i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \pm\infty \to l'asintoto\ orizzontale\ non\ esiste \\ n\ finito \to l'asintoto\ orizzontale\ \text{è}\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{n} \end{cases}$$



Infine se *non* esiste l'asintoto orizzontale si procede con la ricerca degli asintoti obliqui.

✓ ***Asintoto obliquo***: si cerca a $\pm\infty$ se il dominio lo consente e se non esiste l'asintoto orizzontale. Occorre studiare i seguenti limiti:



$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \pm\infty \to l'asintoto\ obliquo\ non\ esiste \\ 0 \to l'asintoto\ obliquo\ non\ esiste \\ finito \to si\ procede\ nella\ ricerca\ di\ q \end{cases}$$

$$q = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \begin{cases} \pm\infty \to l'asintoto\ obliquo\ non\ esiste \\ finito \to l'asintoto\ è\ \boldsymbol{y = mx + q} \end{cases}$$

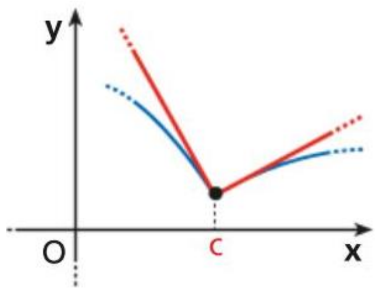
STEP 7: Studio della monotonia e ricerca dei massimi e minimi

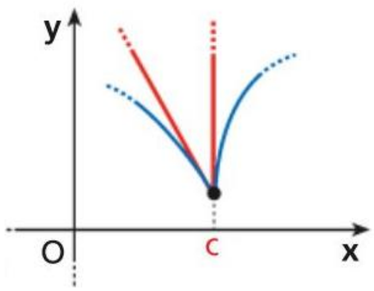
Si procede studiando la derivata prima della funzione. Si trovano il dominio e gli zeri della derivata prima e si analizza il segno, determinando gli intervalli in cui la funzione è crescente e quelli in cui è decrescente. Si individuano, inoltre, gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e di flesso orizzontale e i punti di non derivabilità della funzione (flessi verticali, cuspidi e punti angolosi).

In sintesi:

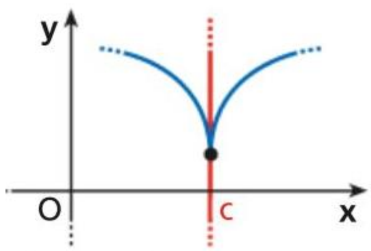
✓ Si calcola $f'(x)$ e si determina il suo dominio per trovare gli eventuali **punti in cui la funzione non è derivabile**: cuspidi, flessi verticali, punti angolosi

➢ ***Punto Angoloso***: se $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ (entrambe finite o una finita e l'altra infinita)

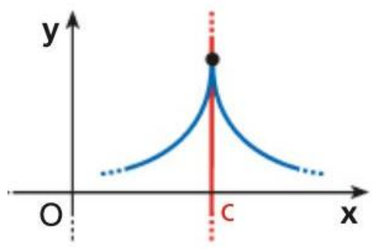




➢ ***Cuspide***: se $f'_+(x_0) = +\infty$ *e* $f'_-(x_0) = -\infty$ oppure $f'_+(x_0) = -\infty$ *e* $f'_-(x_0) = +\infty$ (derivata destra e sinistra sono discordi)

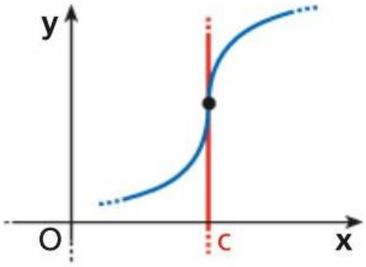


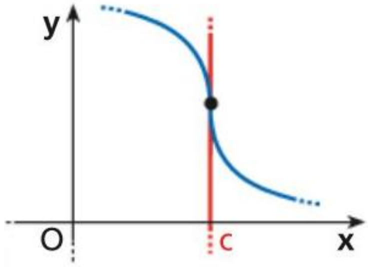
Verso il basso.



Verso l'alto.

- ***Flesso a tangente verticale*** (o *flesso verticale*): ascendente se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty$ oppure discendente se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = -\infty$ (derivata destra e sinistra sono concordi)



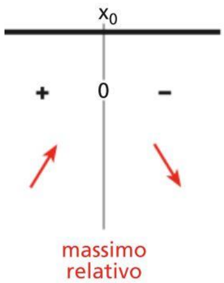


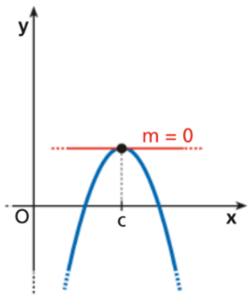
- ✓ Si risolve l'equazione $f'(x) = 0$ per trovare i ***punti stazionari***. Analizzando il comportamento prima e dopo i punti stazionari si può stabilire se si tratta di massimi o minimi relativi o flessi orizzontali.

- ✓ Si studia il segno della derivata prima risolvendo la disequazione $f'(x) > 0$.
  In particolare si ha che per le x in cui risulta $f'(x) > 0$ la funzione è ***crescente*** e per le x in cui risulta $f'(x) < 0$ la funzione è ***decrescente***.

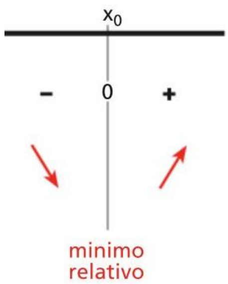
- ✓ Lo studio del segno della derivata prima permette di trovare i punti di massimo e minimo relativo (anche non stazionari) e i punti di flesso a tangente orizzontale:

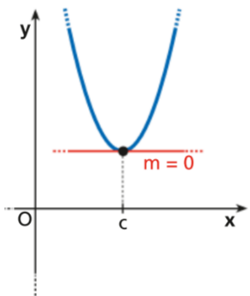
  - ***Massimo Relativo***: $\begin{cases} f'(x) > 0 & per\ x < x_0 \\ f'(x) < 0 & per\ x > x_0 \end{cases}$



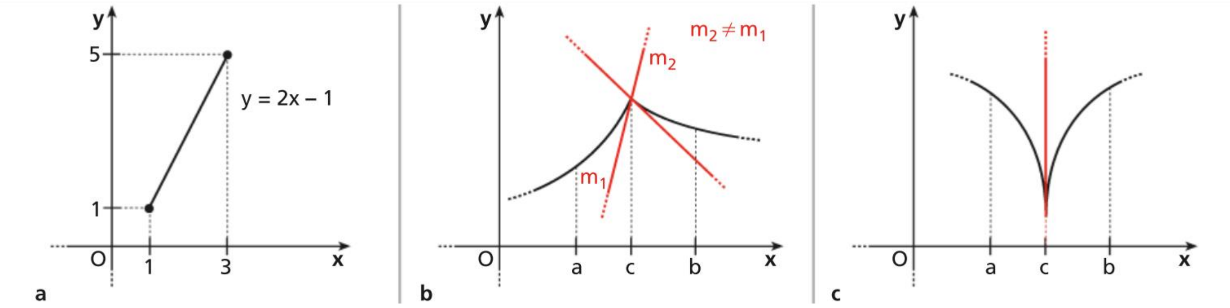


  - ***Minimo Relativo***: $\begin{cases} f'(x) < 0 & per\ x < x_0 \\ f'(x) > 0 & per\ x > x_0 \end{cases}$

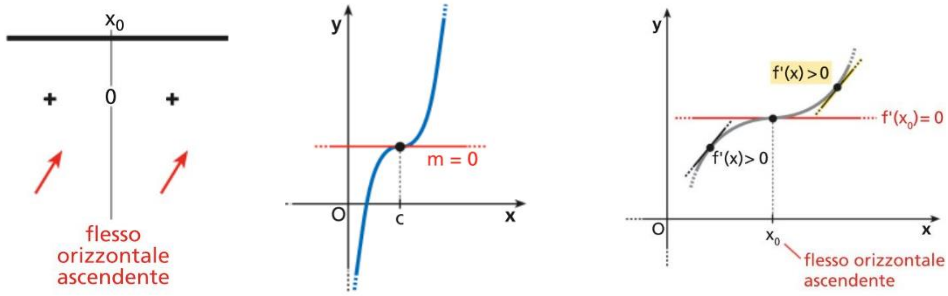




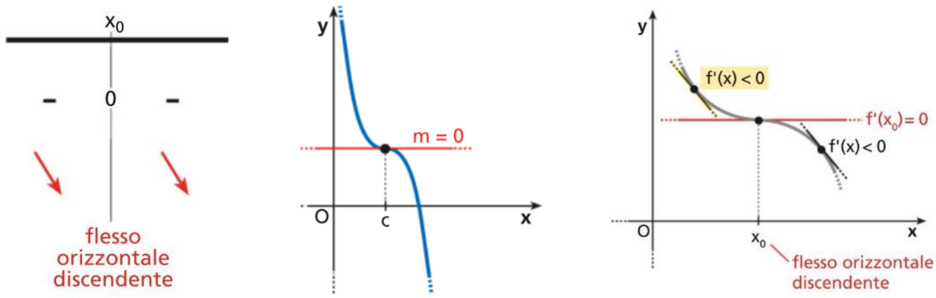
ATTENZIONE: Massimi e minimi relativi possono anche essere punti in cui $f'(x) \neq 0$ (non si tratta di punti stazionari ma di estremanti, che vanno cercati tra i punti di non derivabilità e negli estremi del dominio).



- ***Flesso orizzontale ascendente***: $f'(x) > 0 \ \ per\ x \neq x_0$



- ***Flesso orizzontale discendente***: $f'(x) < 0 \ \ per\ x \neq x_0$



Osservazione: per trovare le coordinate di tutti questi punti si va a sostituire nell'equazione della funzione una alla volta le ascisse trovate nello studio della derivata prima e si ricavano le ordinate. Si riportano tutte queste informazioni nel piano cartesiano.

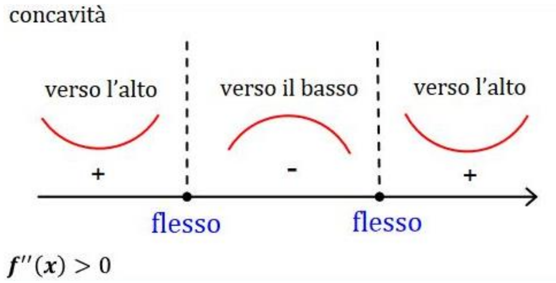
STEP 8: Studio della concavità e ricerca dei flessi

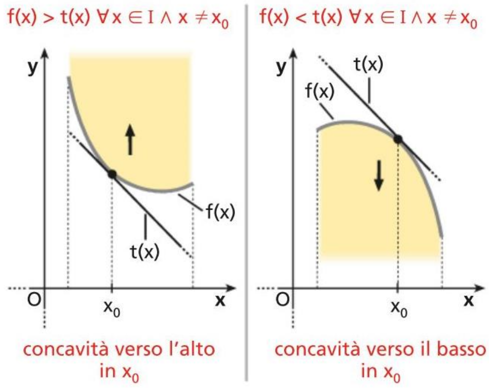
In conclusione, se è possibile, si passa ad analizzare la derivata seconda della funzione. Si calcolano dominio e zeri della derivata seconda e si analizza il segno, determinando gli intervalli in cui il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto o verso il basso. Si individuano, inoltre, i punti di flesso a tangente obliqua ed eventualmente la tangente inflessionale.

In sintesi data una funzione f(x), continua e derivabile, per la ricerca dei flessi:

- ✓ Si calcola la derivata seconda $f''(x)$ e se ne determina il dominio

- ✓ Si studia il segno della derivata seconda risolvendo la disequazione $f''(x) > 0$.
  In particolare si ha che per le x in cui risulta $f''(x) > 0$ la funzione ha la ***concavità rivolta verso l'alto*** (ossia il suo grafico si trova al di sopra della retta tangente) e per le x in cui risulta $f'(x) < 0$ la funzione ***ha la concavità rivolta verso il basso*** (ossia il suo grafico si trova al di sotto della retta tangente).



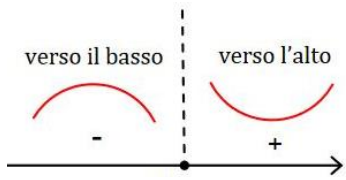


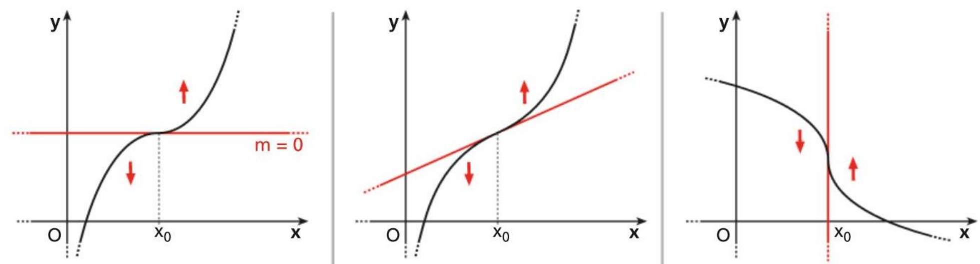
- ✓ Si cercano i punti in cui la concavità cambia, ossia i ***punti di flesso*** (orizzontale se la tangente nel punto di flesso è parallela all'asse x, verticale se la tangente è parallela all'asse y, obliquo se la tangente non è parallela a uno degli assi):
  - ➢ Se la funzione $f(x)$ non è derivabile in x_0 dove $f''(x)$ cambia segno, allora, quando $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$ si tratta di un ***flesso a tangente verticale*** (già trovato nello step precedente)
  - ➢ Se x_0 è un punto di flesso e $f'(x_0) = 0$ si tratta di un ***flesso orizzontale*** (già trovato nello step precedente)
  - ➢ Se x_0 è un punto di flesso e $f'(x_0) \neq 0$ si tratta di un ***flesso obliquo***

  La tangente in un punto di flesso viene anche detta **tangente inflessionale** e ha equazione $y - f(x_0) = f'(x) \cdot (x - x_0)$. Essa ha la caratteristica di attraversare la curva e, inoltre, il punto di tangenza è un «punto triplo». Può essere utile tracciarla per disegnare meglio il flesso obliquo.

- ✓ Se la concavità è verso il basso a sinistra del punto di flesso e verso l'alto a destra, il flesso è ***ascendente***:

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & per\ x < x_0 \\ f''(x) > 0 & per\ x > x_0 \end{cases}$$





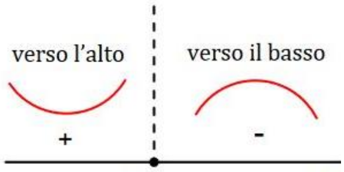
a. x_0 è punto di flesso orizzontale ascendente.

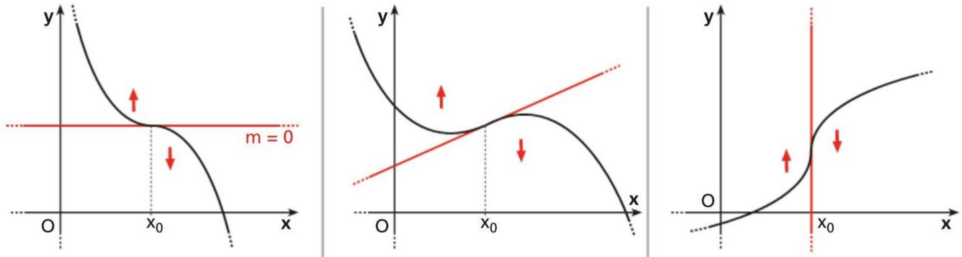
b. x_0 è punto di flesso obliquo ascendente.

c. x_0 è punto di flesso verticale ascendente.

- ✓ Se la concavità è verso l'alto a sinistra del punto di flesso e verso il basso a destra, il flesso è ***discendente***:

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \quad per\ x < x_0 \\ f''(x) < 0 \quad per\ x > x_0 \end{cases}$$





a. x_0 è punto di flesso orizzontale discendente.

b. x_0 è punto di flesso obliquo discendente.

c. x_0 è punto di flesso verticale discendente.

Osservazione importante: quando lo studio del segno delle derivate risulta troppo complicato, si può rinunciare alla risoluzione di tali disequazioni e procedere con il metodo delle derivate successive.