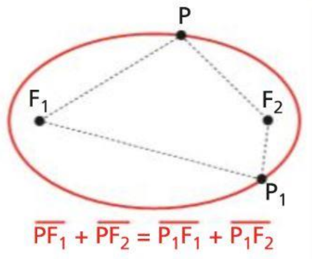
ELLISSE

DEFINIZIONE: Assegnati nel piano due punti F_1 e F_2 (detti ***fuochi***) si chiama **ELLISSE** il luogo geometrico dei punti nel piano tali che sia costante la *somma delle distanze* di tali punti da F_1 e F_2.

$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = costante}$$



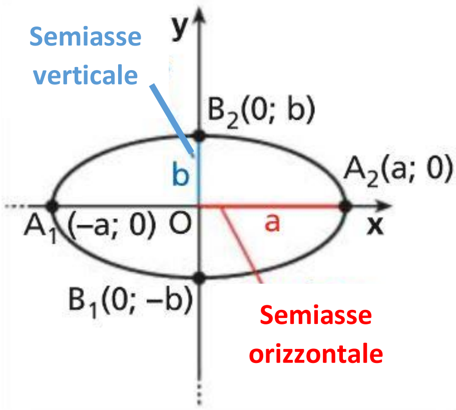
EQUAZIONI DELLE ELLISSI AVENTI CENTRO NELL'ORIGINE

Si può dimostrare che l'***equazione canonica*** dell'ellisse con centro nell'origine del piano è:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

a indica il ***semiasse orizzontale***

b indica il ***semiasse verticale***

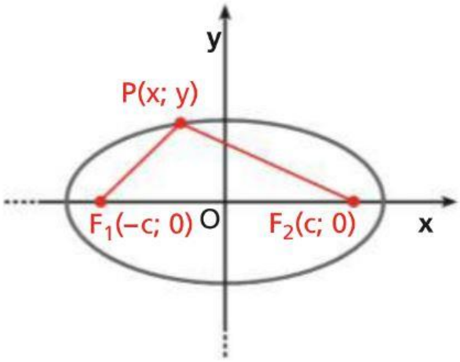


Vengono chiamati ***vertici*** i punti di intersezione con gli assi e si ricavano facilmente le loro coordinate:

$$\boldsymbol{A_1(-a; 0) \quad A_2(a; 0) \quad B_1(0; -b) \quad B_2(0; b)}$$

In base ai valori di a e b si possono presentare i seguenti tre casi:

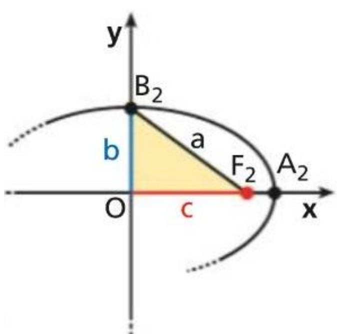
1) Se $a > b$ si tratta di un'*ELLISSE con i FUOCHI SULL'ASSE DELLE ASCISSE* (*asse x*)



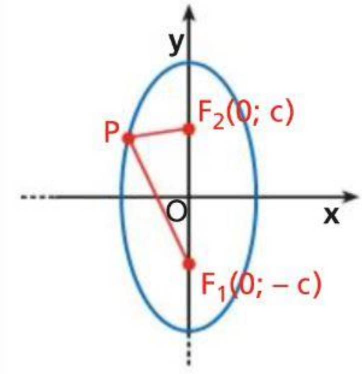
Le coordinate dei fuochi sono pertanto $\boldsymbol{F_1(-c; 0)}$ $\boldsymbol{F_2(c; 0)}$
Considerando che nell'ellisse la somma delle distanze dei punti dai fuochi rimane costante si ottiene che $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, quindi se P coincide con B_2 come in figura si ricava che $\overline{B_2F_2} = a$.
Applicando il *teorema di Pitagora* si ha:

$$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Pertanto i fuochi sono: $F_1\left(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0\right)$ $F_2\left(\sqrt{a^2 - b^2}; 0\right)$.



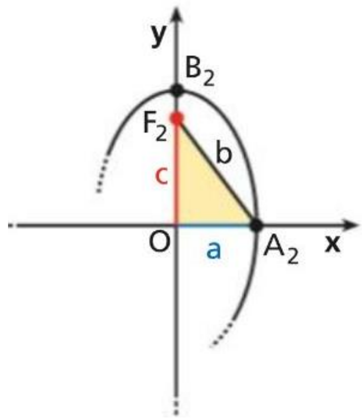
2) Se $a > b$ si tratta di un'***ELLISSE con i FUOCHI SULL'ASSE DELLE ORDINATE*** (*asse y*)



Le coordinate dei fuochi sono quindi $\boldsymbol{F_1(0;-c)}\quad \boldsymbol{F_2(0;c)}$
Considerando che nell'ellisse la somma delle distanze dei punti dai fuochi rimane costante si ottiene che $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2b$, quindi se P coincide con A_2 come in figura si ricava che $\overline{A_2F_2}=b$.
Applicando il *teorema di Pitagora* si ha:

$$\boldsymbol{c=\sqrt{b^2-a^2}}$$

Pertanto i fuochi sono: $F_1\left(0;-\sqrt{b^2-a^2}\right)\quad F_2\left(0;\sqrt{b^2-a^2}\right)$.



3) Se $a = b$ si tratta di una ***CIRCONFERENZA***

Se i semiassi sono uguali l'ellisse diventa una circonferenza di raggio $a=b=R$.
Infatti:

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1 \Longrightarrow x^2+y^2=R^2$$

In questo caso i fuochi coincidono con il centro della circonferenza.

Nel caso dell'ellisse esiste un valore, chiamato **ECCENTRICITÀ**, che indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse.

L'eccentricità è il ***rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse maggiore*** e lo indichiamo con la lettera *e*.

$$\boldsymbol{e=\frac{distanza\ focale}{asse\ maggiore}}$$

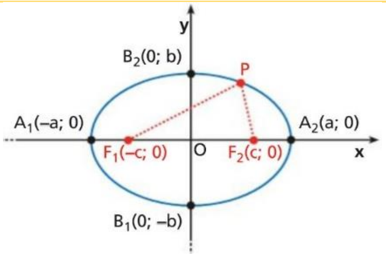
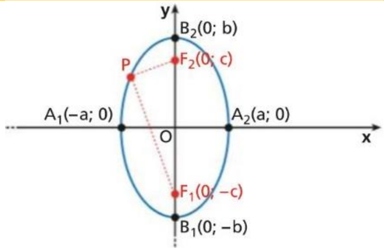
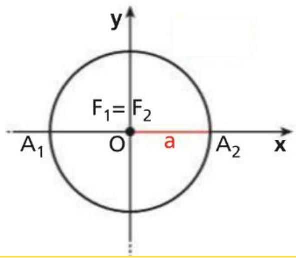
Se l'eccentricità aumenta, l'ellisse risulta più "schiacciata" sull'asse maggiore. Poiché la distanza focale è minore dell'asse maggiore l'eccentricità è un valore compreso tra 0 e 1.

$$\boldsymbol{0 \le e < 1}$$

Se $\boldsymbol{e=0}$, la distanza focale c è nulla, quindi i fuochi coincidono con il centro. Si ottiene allora una ***circonferenza*** con il centro nell'origine e raggio $a=b$.

Più *e* si avvicina ad 1 più l'elisse è "schiacciata" e nel caso limite in cui $\boldsymbol{e=1}$ si otterebbe l'***ellisse degenere*** (che coincide con un *segmento*).

RIASSUNTO: FORMULARIO ELLISSE

<table>
<tr><th>$Se\ a > b$</th><th>$Se\ a < b$</th><th>$Se\ a = b$</th></tr>
<tr><td>Ellisse con i fuochi sull’asse x
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>Ellisse con i fuochi sull’asse y
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>Circonferenza di raggio $a = b = R$
$x^2 + y^2 = R^2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$c=\sqrt{a^2-b^2}$
$F_1(-c;0)\ F_2(c;0)$</td><td>$c=\sqrt{b^2-a^2}$
$F_1(0;-c)\ F_2(0;c)$</td><td>$c=0$
$F_1 \equiv F_2 \equiv C(0;0)$</td></tr>
<tr><td>$e=\frac{c}{a}$</td><td>$e=\frac{c}{b}$</td><td>$e=0$</td></tr>
</table>

EQUAZIONE DELL’ELLISSE TRASLATA

L’equazione di un’*ellisse con centro in un generico punto di coordinate* $(p;q)$ si ottiene, mediante una traslazione, a partire dall’equazione canonica e diventa:

$$\boxed{\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1}$$