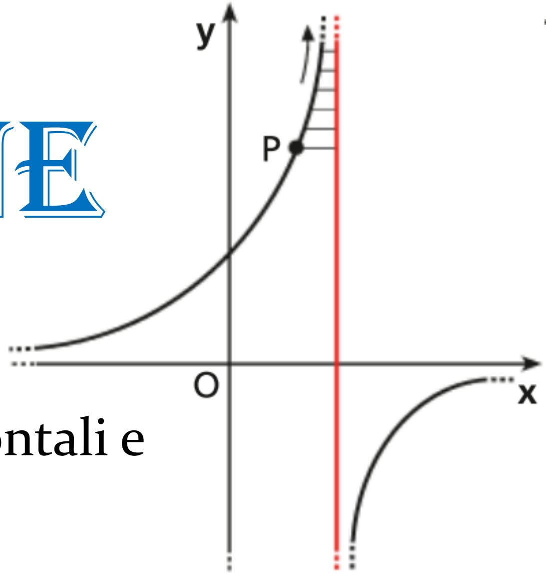
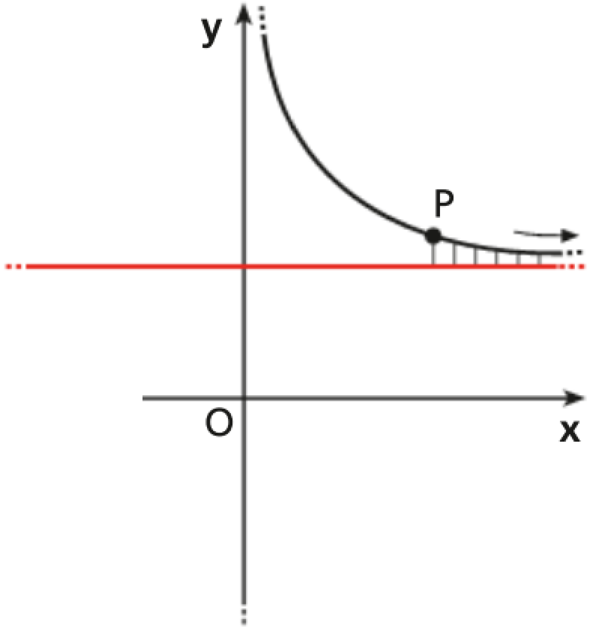
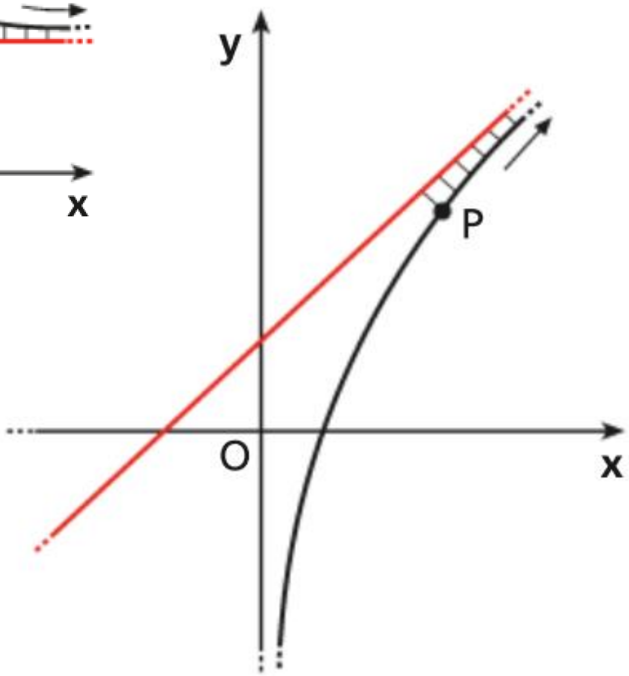
ASINTOTI DI UNA FUNZIONE





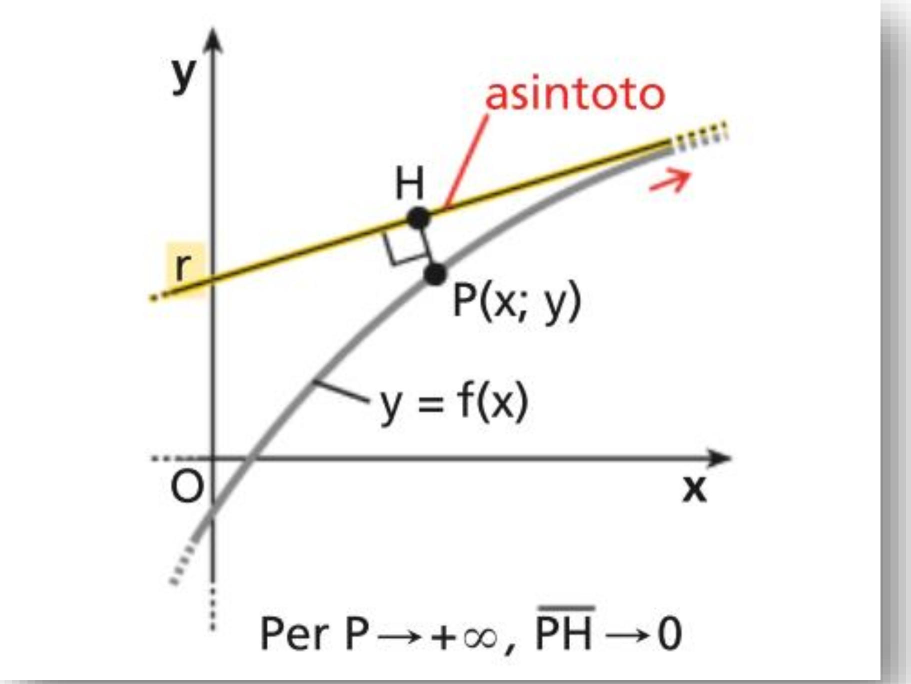


Studio degli asintoti verticali, orizzontali e obliqui.

Classe 4ªC INFO

Definizione di Asintoto

DEFINIZIONE: Una retta è un **asintoto** del grafico di una funzione $f(x)$ se la distanza di un generico punto del grafico da tale retta tende a zero quando l'ascissa o l'ordinata del punto tendono a infinito.

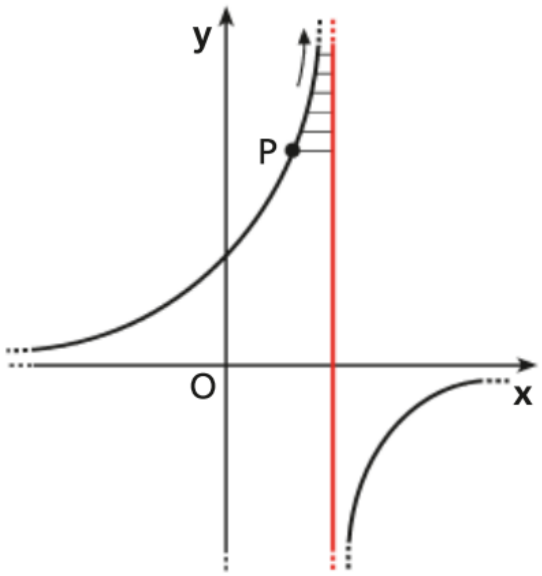
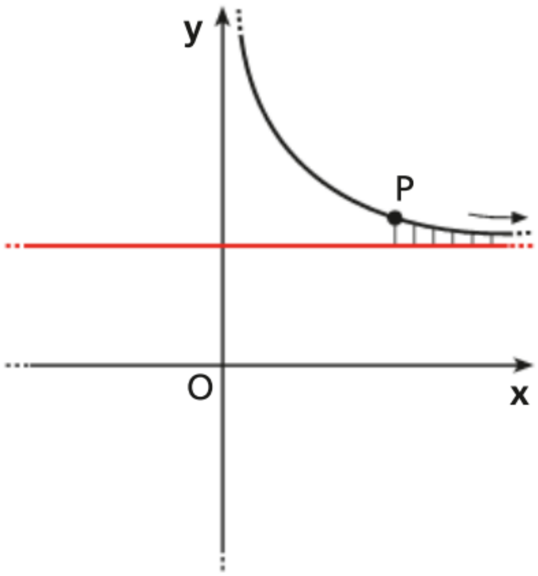
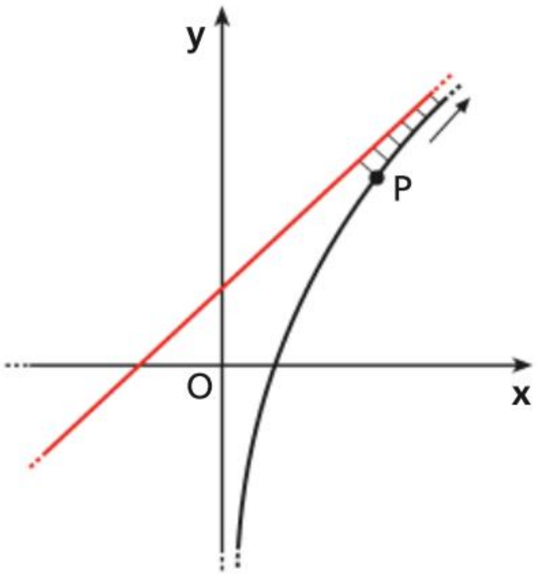


$$\overline{PH} \to 0$$

Il grafico della funzione si avvicina sempre più a quello di una retta.

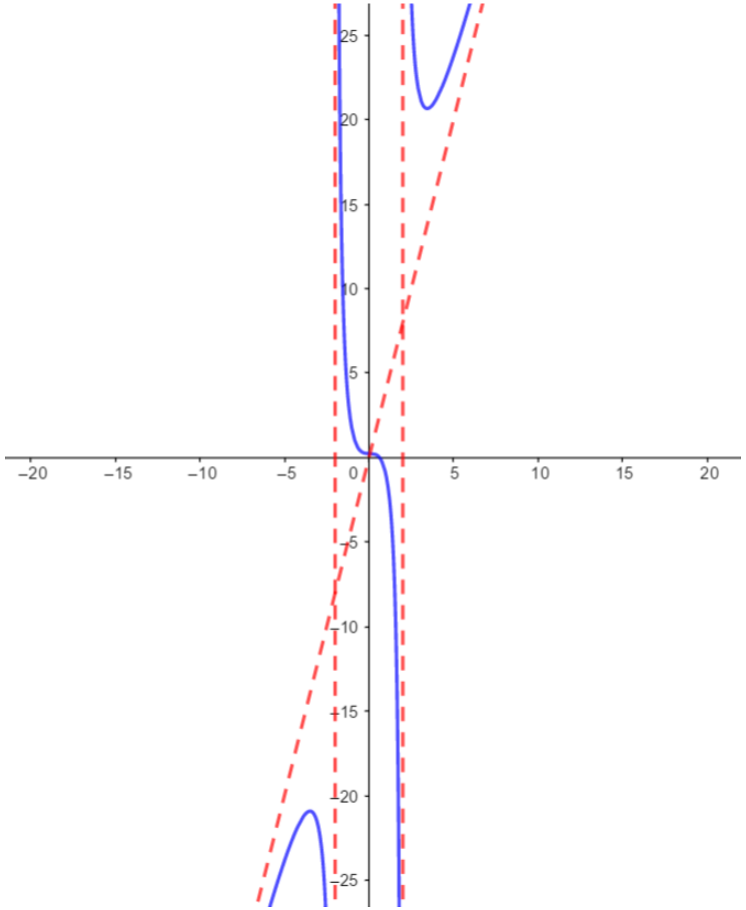
Definizione di Asintoto

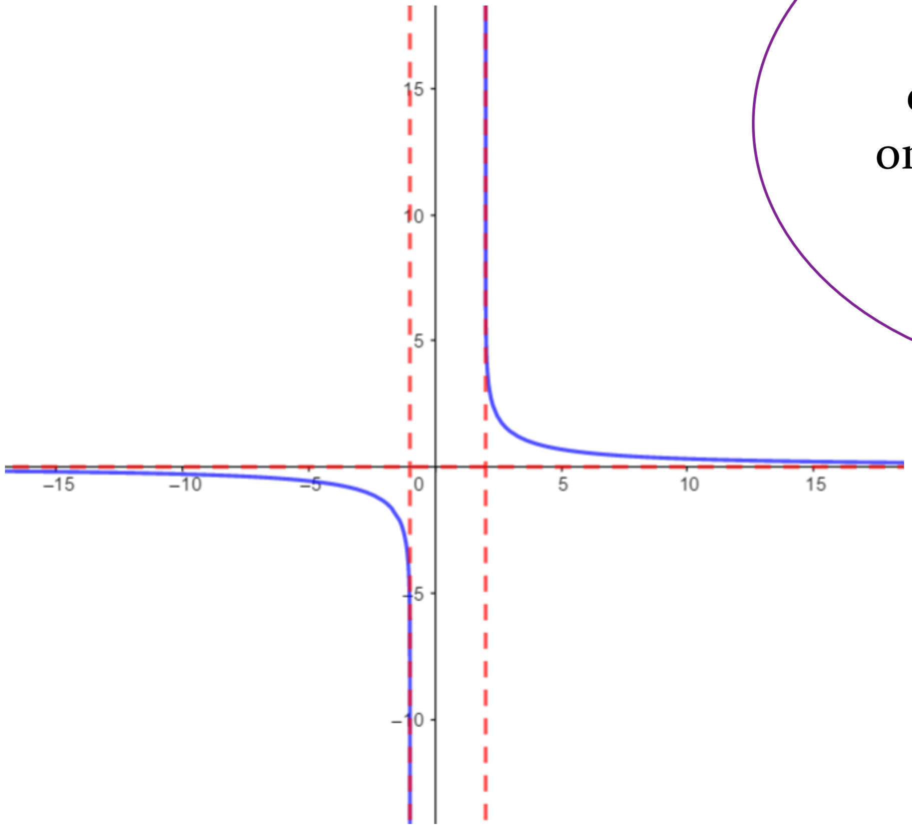
ASINTOTI

VERTICALI	***ORIZZONTALI***	***OBLIQUI***
		

Asintoti

OSSERVAZIONE: Una funzione può avere più di un asintoto!



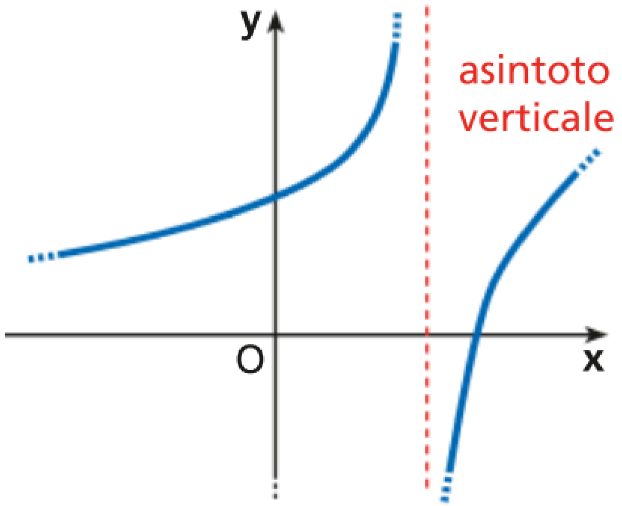


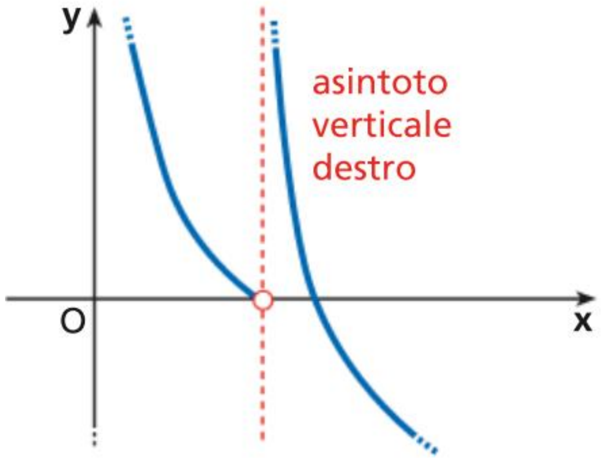
In una stessa funzione possono esserci più asintoti orizzontali, verticali e obliqui e vanno studiati tutti!

Asintoti Verticali

DEFINIZIONE: La retta $x = c$ è **asintoto verticale** per il grafico della funzione $f(x)$ se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty, -\infty, \infty$$



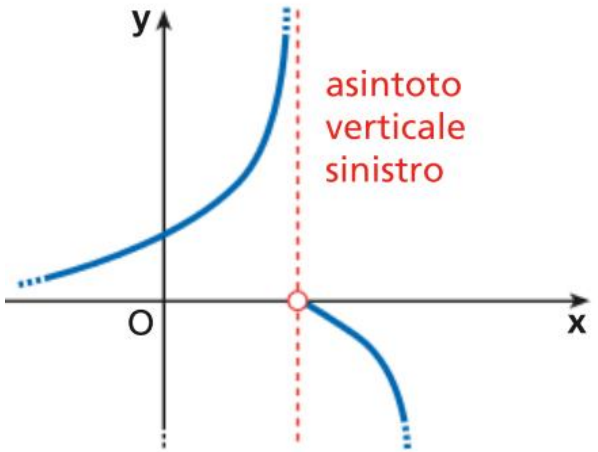


ASINTOTO VERTICALE DESTRO

$$\lim_{x \to C^+} f(x) = \infty$$

ASINTOTO VERTICALE SINISTRO

$$\lim_{x \to C^-} f(x) = \infty$$



Asintoti Verticali

Esempio di Studio degli Asintoti Verticali

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$$

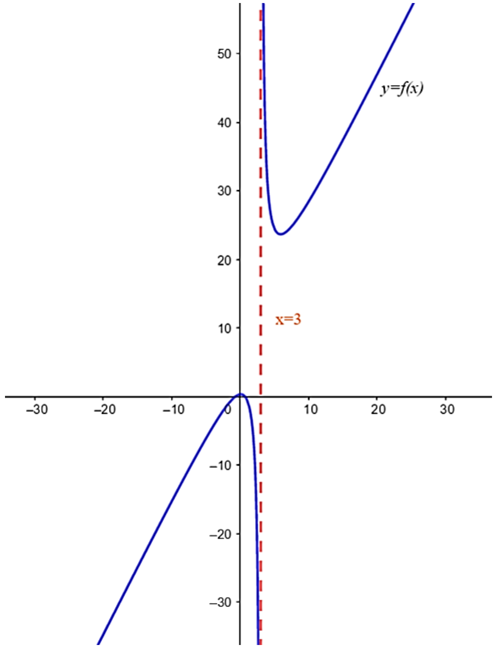
$Dominio\ di\ f\colon\ x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ $\Rightarrow$ $Dominio\ di\ f\colon\ (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

Studiamo cosa succede per x che si avvicina a 3 da sinistra e da destra.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2 - 1}{x - 3} = \frac{17}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x^2 - 1}{x - 3} = \frac{17}{0^+} = +\infty$$

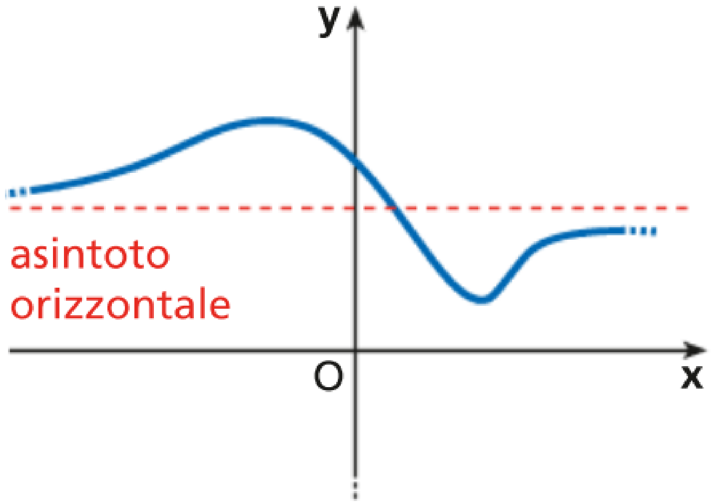
$x = 3$ Asintoto Verticale

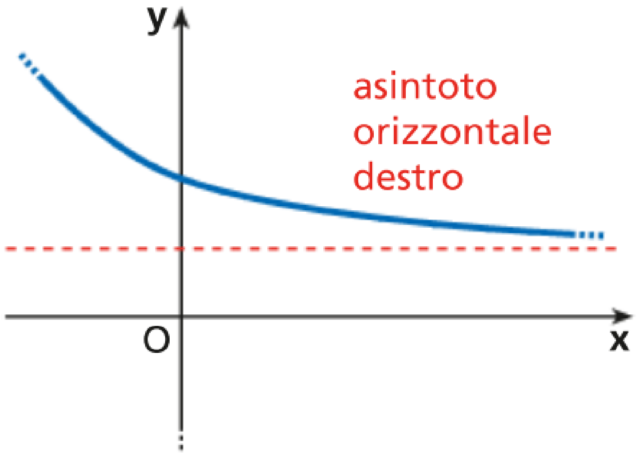


Asintoti Orizzontali

DEFINIZIONE: La retta $y = q$ è **asintoto orizzontale** per il grafico della funzione $f(x)$ se:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = q$$



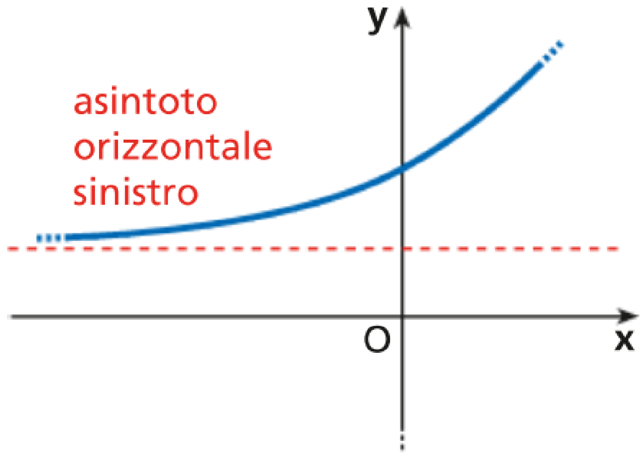


ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = q$$

ASINTOTO ORIZZONTALE SINISTRO

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = q$$



Asintoti Orizzontali

Esempio di Studio degli Asintoti Orizzontali

$$f(x) = e^x + 2$$

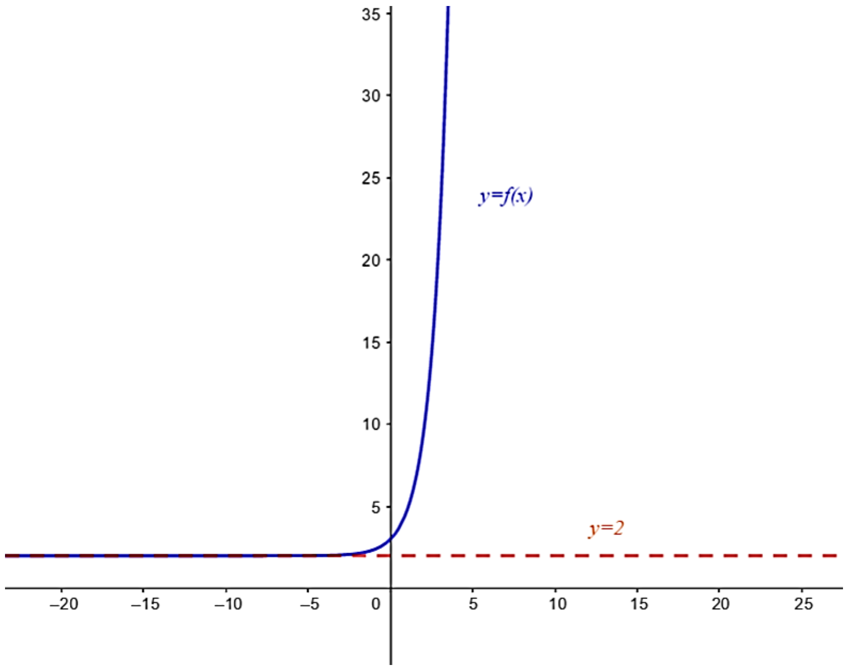
Studiamo cosa succede agli estremi del dominio

$Dominio\ di\ f$: $\mathbb{R}$ → $Dominio\ di\ f$: $(-\infty; +\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x + 2 = +\infty + 2 = +\infty$$

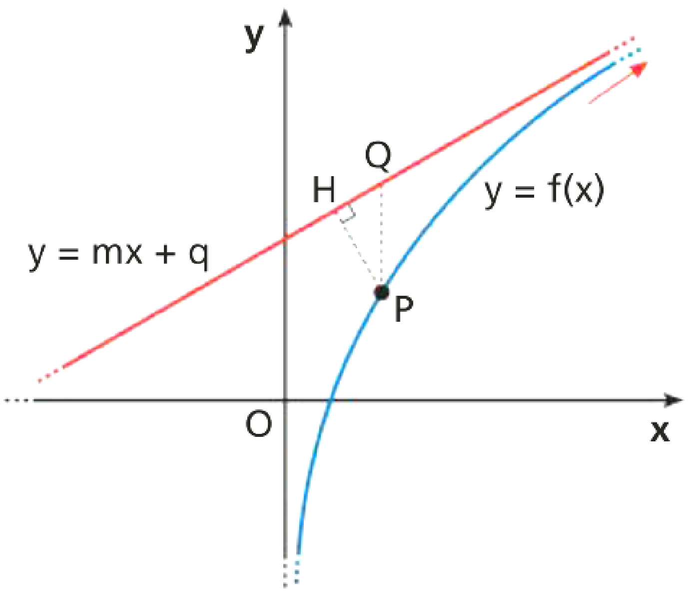
$y = 2$ Asintoto Orizzontale Sinistro

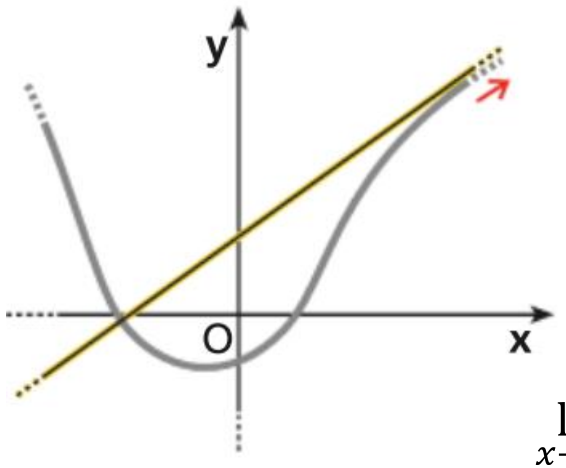


Asintoti Obliqui

DEFINIZIONE: La retta $y = mx + q, con\ m \neq 0$ è **asintoto obliquo** per il grafico della funzione $f(x)$ se:

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx + q)| = 0$$



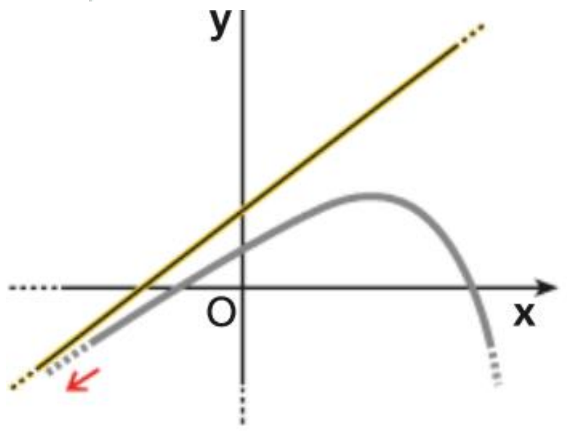


ASINTOTO OBLIQUO DESTRO

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - (mx + q)| = 0$$

ASINTOTO OBLIQUO SINISTRO

$$\lim_{x\to-\infty} |f(x) - (mx + q)| = 0$$



Asintoti Obliqui

OSSERVAZIONE:

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx + q)| = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (mx + q)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

CONDIZIONE NECESSARIA MA ***NON*** SUFFICIENTE per l'esistenza dell'asintoto obliquo.

$\longleftrightarrow$

Ciò significa che solamente se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si procede con la ricerca dell'eventuale asintoto obliquo (che però *non è detto che esista!*).

Asintoti Obliqui

RICERCA degli ASINTOTI OBLIQUI

TEOREMA: Sia $f(x)$ una funzione tale che $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Una retta $y = mx + q, con\ m \neq 0$ è un asintoto obliquo per la funzione se e solo se esistono e sono finiti i seguenti limiti:

$$\boldsymbol{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x}}$$

$$\boldsymbol{q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]}$$

Osservazione: Il teorema resta valido anche se al posto di ∞ mettiamo +∞ o -∞

Questo teorema è operativo, perché illustra il procedimento da seguire nella ricerca degli asintoti obliqui.

Ricerca dell'Asintoto Obliquo

Procedimento:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

La funzione deve tendere a infinito per x che tende a infinito.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Verifichiamo che questo **limite esista e sia finito (non nullo)**. In caso contrario non esiste l'asintoto obliquo.

$$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

Verifichiamo che anche questo **limite esista e sia finito**. In caso contrario non esiste l'asintoto obliquo.

Se questi tre step hanno prodotto un esito positivo allora esiste l'asintoto obliquo e ha equazione:

$$y = mx + q$$

Asintoti Obliqui

Esempio di Studio degli Asintoti Obliqui

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$$ ⟹ *Dominio di* f: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

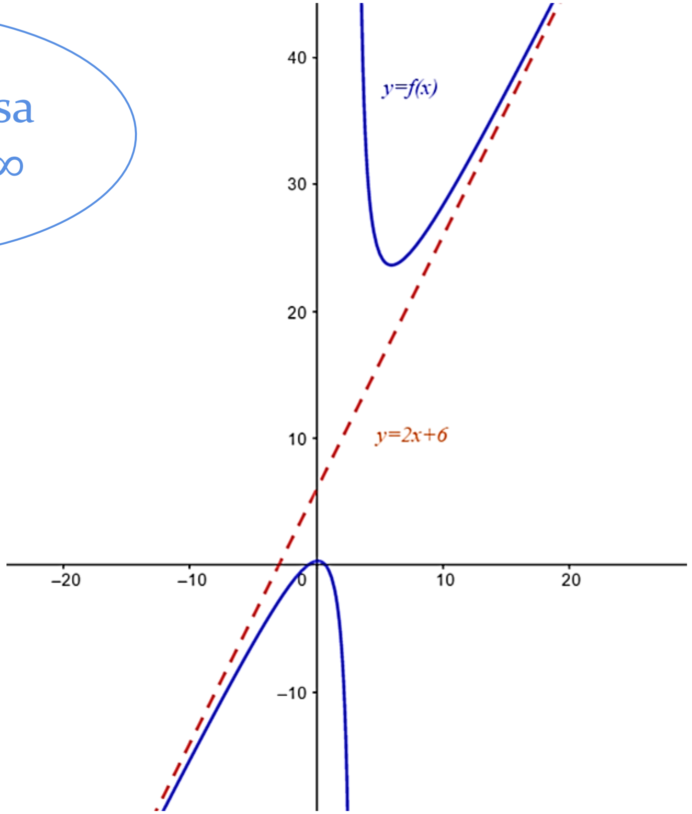
Studiamo cosa succede a $\pm\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 3x} = 2 = \boldsymbol{m}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{2x^2 - 1}{x - 3} - 2x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{6x - 1}{x - 3}\right] = 6 = \boldsymbol{q}$$

$y = mx + q = 2x + 6$
Asintoto Obliquo



Funzioni Razionali Fratte

CASO PARTICOLARE: Funzioni Razionali Fratte

Nel caso di funzioni razionali c'è un ***asintoto obliquo*** se e solo se il grado del numeratore supera di uno il grado del denominatore.
In questo caso l'equazione dell'asintoto obliquo si può determinare con un ***metodo più elementare***:

DIVISIONE di POLINOMI

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}, con\ A(x)\ di\ grado\ n\ e\ B(x)\ di\ grado\ n-1$$

Questo perché per il resto R(x) ha grado inferiore rispetto al grado di B(x).

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x) \Longrightarrow f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}\ con\ \lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{B(x)} = 0$$

$$\Downarrow \quad y = f(x) \xrightarrow{x\to\infty} y = Q(x)$$

$$y = Q(x)\ \text{è}\ l'equazione\ dell'asintoto\ obliquo$$

Funzioni Razionali Fratte

CASO PARTICOLARE: Funzioni Razionali Fratte

Riprendiamo l'esempio visto in precedenza:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$$

A(x) è un polinomio di secondo grado mentre B(x) di primo grado quindi esiste l'asintoto obliquo.
Andiamo a calcolare la divisione tra i due polinomi:

Dividendo $A(x)$

$$\begin{array}{r|l} \boxed{2x^2 + 0x - 1} & \boxed{x - 3} \\ \hline -2x^2 + 6x & 2x + 6 \\ \hline 6x - 1 & \\ -6x + 18 & \\ \hline \boxed{+17} & \end{array}$$

Divisore $B(x)$

Quoziente $Q(x)$

Resto $R(x)$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 3} = 2x + 6 + \cancel{\frac{17}{x - 3}} \xrightarrow{x \to \infty} 0$$

$$\boldsymbol{y = Q(x)} \text{ è } \boldsymbol{l'equazione\ dell'asintoto\ obliquo}$$

$y = 2x + 6$ Asintoto Obliquo (come avevamo trovato con il metodo generale).