Equazioni Differenziali

EQUAZIONI DIFFERENZIALI del PRIMO ORDINE LINEARI

DEFINIZIONE: Un'***equazione differenziale*** *del primo ordine* è ***lineare*** quando può essere scritta nella forma $y' = a(x) \cdot y + b(x)$, dove $a(x)$ e $b(x)$ rappresentano funzioni continue in un opportuno intervallo.

$$\boxed{y' = a(x) \cdot y + b(x)}$$

CASO PARTICOLARE: $b(x) = 0$

In questo caso si parla di **EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA**

$$y' = a(x) \cdot y$$

Ci accorgiamo che si tratta di un'equazione differenziale a *variabili separabili* quindi possiamo applicare il metodo risolutivo studiato in precedenza:

$$\frac{dy}{dx} = a(x) \cdot y$$

a) Se $y \neq 0$ si possono dividere ambo i membri per y:

$$\frac{dy}{y} = a(x)\, dx$$

Si integrano poi i due membri:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int a(x)\, dx$$

$$\ln|y| = \int a(x)\, dx + c$$

$$|y| = e^{\int a(x) dx + c} \Rightarrow y = \pm e^{\int a(x) dx} \cdot e^{c}$$

$$y = ke^{\int a(x) dx}\ con\ k \neq 0$$

b) Se $y = 0$ anche $y' = 0$ quindi l'equazione differenziale è verificata. Questa soluzione è compresa nella scrittura precedente con $k = 0$.

Quindi la soluzione finale è:

$$\boxed{y = ke^{\int a(x) dx}\ con\ k \in \mathbb{R}}$$

Per comodità possiamo definire $A(x) = \int a(x)\, dx$.

La formula diventa quindi:

$$\boxed{y = ke^{A(x)}\ con\ k \in \mathbb{R}}$$

Non è necessario mettere il +c perché tanto sarà considerato nella costante k successiva

ESEMPI:

1) $y = 3x^2$

$a(x) = 3x^2 \Longrightarrow A(x) = \int 3x^2\,dx = x^3$

Utilizzando la formula che abbiamo ricavato si ottengono le soluzioni:

$$\boldsymbol{y = ke^{x^3} \qquad k \in \mathbb{R}}$$

2) $y' = \frac{y}{\sqrt{x+1}} = (x+1)^{-1/2} \cdot y$

$a(x) = (x+1)^{-1/2} \Longrightarrow A(x) = \int (x+1)^{-1/2}\,dx = 2(x+1)^{1/2} = 2\sqrt{x+1}$

Le soluzioni sono quindi:

$$\boldsymbol{y = ke^{2\sqrt{x+1}} \qquad k \in \mathbb{R}}$$

CASO GENERALE: $b(x) \neq 0$

In questo caso si parla di **EQUAZIONE LINEARE COMPLETA**

$$\boldsymbol{y' = a(x) \cdot y + b(x)}$$

Per comodità chiamiamo nuovamente con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$:

$$A(x) = \int a(x)\,dx$$

L'integrale generale si ottiene con la seguente formula:

$$\boxed{\boldsymbol{y = e^{A(x)}\left[\int b(x)\, e^{-A(x)} dx + c\right]}}$$

Oppure analogamente (per non dimenticare il meno):

$$y = e^{A(x)}\left[\int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}\,dx + c\right]$$

ESEMPI:

1) $y' + 3y - 1 = 0 \quad \overset{In\ forma\ normale:}{\Longrightarrow} \quad y' = -3y + 1$

$a(x) = -3$ e $b(x) = 1$

$A(x) = \int a(x)\,dx = \int -3\,dx = -3x$

Andando a sostituire nella formula si ottiene:

$$y = e^{A(x)}\left[\int b(x)e^{-A(x)}\,dx + c\right] = e^{-3x}\left[\int 1\cdot e^{3x}\,dx + c\right]$$

$$= e^{-3x}\left[\frac{1}{3}\int 3\cdot e^{3x}\,dx + c\right] = e^{-3x}\left[\frac{1}{3}e^{3x} + c\right] = \frac{1}{3} + \frac{c}{e^{3x}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{3} + \frac{c}{e^{3x}} \qquad c \in \mathbb{R}}$$

2) $y' + \frac{y}{x} = x \quad con\ x > 0 \quad \xRightarrow{In\ forma\ normale:} \quad y' = -\frac{1}{x}y + x$

$a(x) = -\frac{1}{x}\ e\ b(x) = x$

$A(x) = \int a(x)\,dx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x$

Non mettiamo il valore assoluto perché sappiamo essere $x > 0$

Andando a sostituire nella formula si ottiene:

$$y = e^{A(x)}\left[\int b(x)e^{-A(x)}\,dx + c\right] = e^{-\ln x}\left[\int x\cdot e^{\ln x}\,dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{e^{\ln x}}\left[\int x\cdot x\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left[\int x^2\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{x^3}{3} + c\right]$$

$$= \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \qquad c \in \mathbb{R}}$$

3) $y' + 2xy - 2x = 0 \quad \xRightarrow{In\ forma\ normale:} \quad y' = -2xy + 2x$

$a(x) = -2x\ e\ b(x) = 2x$

$A(x) = \int a(x)\,dx = \int -2x\,dx = -x^2$

Andando a sostituire nella formula si ottiene:

$$y = e^{A(x)}\left[\int b(x)e^{-A(x)}\,dx + c\right] = e^{-x^2}\left[\int 2x\cdot e^{x^2}\,dx + c\right]$$

$$= e^{-x^2}\left[e^{x^2} + c\right] = 1 + ce^{-x^2}$$

$$\boldsymbol{y = 1 + \frac{c}{e^{x^2}} \qquad c \in \mathbb{R}}$$