Studio di Funzione

ESEMPIO SVOLTO E COMMENTATO:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x}$$

STEP 1: Dominio della funzione

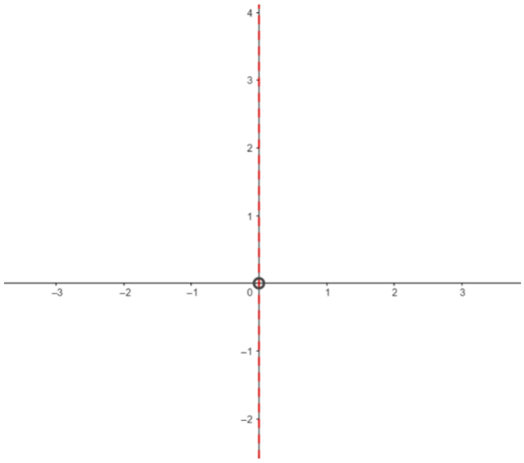
La funzione è razionale fratta quindi bisogna imporre che il denominatore sia diverso da zero.

Il **dominio** è:

$$D: 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$D: (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

In corrispondenza di $x = 0$, valore escluso dal dominio, si può introdurre nel piano cartesiano un tondino vuoto e una retta verticale tratteggiata.



STEP 2: Simmetrie (Funzione pari/dispari)

Si procede studiando eventuali simmetrie della funzione, ovvero andando a sostituire -x a x:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{2(-x)} = -\frac{x^2 - 4}{2x} = -f(x) \rightarrow \boldsymbol{Dispari}$$

Essendo una funzione dispari il grafico della funzione è *simmetrico rispetto all'origine* degli assi (questa osservazione tornerà utile in seguito).

STEP 3: Zeri e intersezione con l'asse y

Studiamo i seguenti sistemi:

✓ $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \to f(x) = 0$

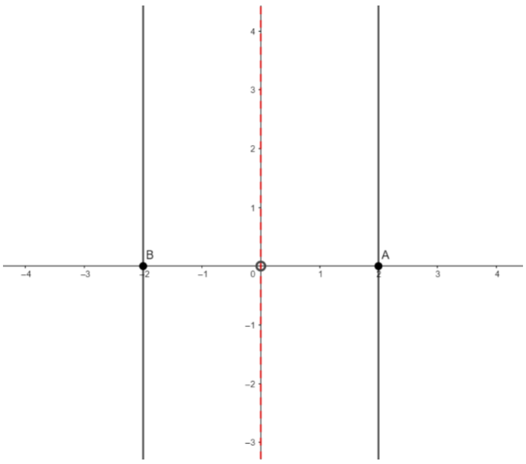
$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{2x} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$A(2{,}0)$ e $B(-2{,}0)$ sono gli **zeri** della nostra funzione.

✓ $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \to y = f(0)$

Dal momento che $x = 0$ non appartiene al dominio questo sistema è impossibile e non esistono intersezioni con l'asse y.

In corrispondenza degli zeri riportiamo un pallino pieno sull'asse x e tracciamo a matita delle rette verticali continue.



STEP 4: Segno della funzione

Il segno della funzione corrisponde a studiare la disequazione: $f(x) > 0$

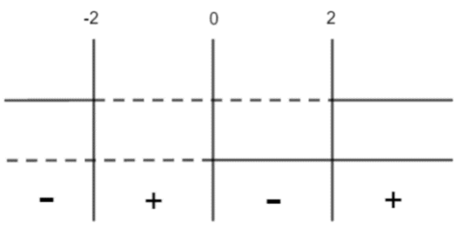
$$\frac{x^2 - 4}{2x} > 0$$

$N > 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$

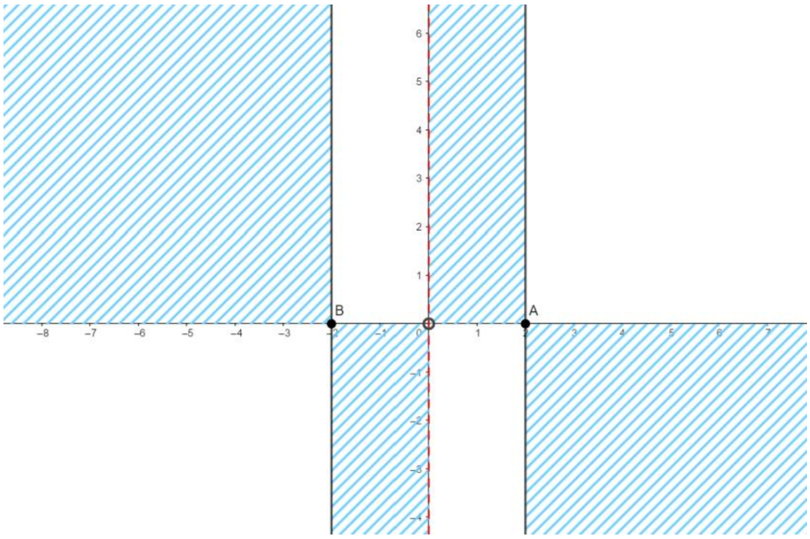
$D > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$

Compiliamo lo studio dei segni (schema qui a fianco).

$$f(x) > 0 \; in \; (-2; 0) \cup (2; +\infty)$$



In questo modo possiamo cancellare le regioni di piano dove la funzione non esiste.



STEP 5 e 6: Limiti agli estremi del dominio e Asintoti

Andiamo, quindi, a studiare cosa succede in prossimità di $x = 0$ e per x che tende a più o meno infinito (ricordando la simmetria rispetto all'origine osservata allo step 2).

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{-4}{0} = -\infty$$

Sapendo che la funzione è dispari possiamo affermare, senza ulteriori calcoli, che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

Pertanto la retta $x = 0$ è un **asintoto verticale** (e in $x = 0$ vi è una *discontinuità di seconda specie*).

Per concludere studiamo cosa succede agli estremi del dominio, ovvero per x che tende a infinito:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(1 - \cancel{\frac{4}{x}}\right)}{2\cancel{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

Ricordando che la funzione è dispari possiamo scrivere, senza ulteriori calcoli, che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{2x} = +\infty$$

Quindi <u>non</u> esistono asintoti orizzontali mentre è soddisfatta la condizione necessaria per la presenza dell'asintoto obliquo (ma non è sicuro che esista!).

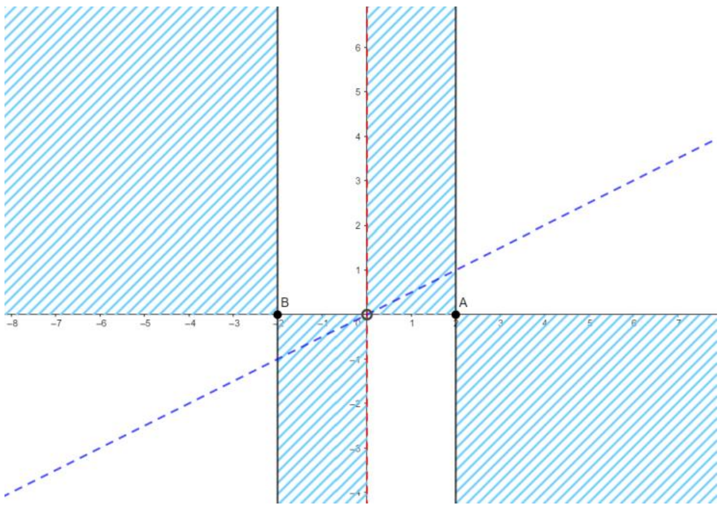
Devono esistere ed essere finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\ e\ \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{2x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{2x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\cancel{\frac{4}{x}}\right)}{2\cancel{x^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \boldsymbol{m}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-4}{2x}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}}{2x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2}{x}\right]=0\Rightarrow \boldsymbol{q}=\mathbf{0}$$

Quindi $y=\frac{1}{2}x$ è un **asintoto obliquo** per la nostra funzione.



OSSERVAZIONE: Dal momento che si tratta di una <u>*funzione razionale in cui il grado del numeratore è superiore di uno a quello del denominatore*</u> per trovare l'asintoto obliquo si può semplicemente effettuare la divisione tra polinomi: $(x^2-4):(2x)=\frac{1}{2}x\ con\ resto\ R(x)=-4$.

$$\begin{array}{ccc|c} x^2 & +0x & -4 & 2x \\ \cline{4-4} x^2 & & & \frac{1}{2}x \\ \hline // & // & -4 & \end{array}$$

Con questo metodo ritroviamo che l'asintoto obliquo è $y=\frac{1}{2}x$.

STEP 7: Studio della monotonia e ricerca dei massimi e minimi

Andiamo a calcolare la ***derivata prima*** della nostra funzione e ne individuiamo il dominio.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{1}{2}x - 2x^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \cdot (-1)x^{-1-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}$$

Il dominio della derivata prima è $\quad D': x \neq 0$

$$D': (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Coincide dunque con il dominio della funzione.

Cerchiamo eventuali *punti stazionari* studiando l'equazione $f'(x) = 0$ e andiamo ad analizzare anche il segno della derivata prima.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 4}{2x^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

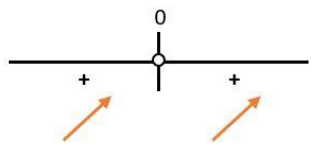
Non esistono, pertanto, punti stazionari di questa funzione.

Il segno della derivata prima corrisponde a studiare la disequazione: $f'(x) > 0$.

$$\frac{x^2 + 4}{2x^2} > 0$$

Il numeratore è sempre positivo (essendo somma di due quadrati) e anche il denominatore risulta positivo (perché è un quadrato moltiplicato per una costante positiva) quindi la derivata prima è sempre positiva nel suo dominio:

$$f'(x) > 0 \; per \; x \in \; (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$



La funzione risulta quindi ovunque ***crescente*** (questo perché la derivata è positiva e le frecce sono entrambe verso l'alto).

Dallo studio dei limiti sappiamo inoltre che la funzione è illimitata quindi non vi sono punti di massimo o minimo di questa funzione.

STEP 8: Studio della concavità e ricerca dei flessi

In conclusione passiamo ad analizzare la ***derivata seconda*** della funzione, $f''(x)$, e ne determiniamo il dominio:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{2} + 2x^{-2}$$

$$f''(x) = 0 + 2 \cdot (-2)x^{-2-1} = -\frac{4}{x^3}$$

Il dominio della derivata seconda è $D'': x \neq 0$

$$D'' : \ ]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

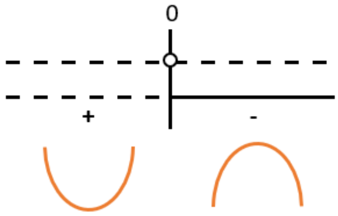
Non esistono zeri della derivata seconda. Non ci sono punti di *flesso* in questa funzione Ci resta solo da studiare la ***concavità*** mediante il segno della derivata seconda. Passiamo quindi a studiare la disequazione $f''(x) > 0$.

$$-\frac{4}{x^3} > 0$$

$N > 0 \Rightarrow -4 > 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

$D > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$

Compiliamo lo studio dei segni (schema qui a fianco).



$$f''(x) > 0 \ per \ x \in \ (-\infty; 0)$$

La funzione rivolge quindi la *concavità verso l'alto* per $x < 0$, ossia nel semipiano delle ascisse negative, mentre ha la *concavità verso il basso* nel semipiano delle ascisse positive, ovvero per $x > 0$. Abbiamo così concluso lo studio di questa funzione e possiamo tracciarne il grafico.

Utilizzando il software GeoGebra otteniamo il seguente grafico della funzione.