Integrazione per Parti

Ricaviamo la formula di integrazione per parti iniziando dalla derivata di un prodotto di funzioni:

$$D[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int D[f(x)\cdot g(x)]\,dx = \int [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)]\,dx$$

$$f(x)\cdot g(x) + c = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Ricaviamo dunque $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx$, ottenendo così la ***formula di integrazione per parti***:

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + c}$$

$f(x)$ prende il nome di ***FATTORE FINITO*** e viene solamente derivato.

$g'(x)$ prende il nome di ***FATTORE DIFFERENZIALE*** e viene solamente integrato.

ESEMPI:

- $\int x\sin x\,dx =$

  $f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 1$

  $g'(x) = \sin x \quad \Longrightarrow \quad g(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x$

  $$\int x\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$
  $$= -x\cos x + \sin x + c$$

- $\int x^2 \ln x\,dx =$

  $f(x) = \ln x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

  $g'(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

  $$\int x^2\ln x\,dx = \ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right) - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,dx =$$
  $$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx =$$
  $$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx =$$
  $$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$