Equazioni Differenziali

EQUAZIONI DIFFERENZIALI del SECONDO ORDINE

DEFINIZIONE: Un'***equazione differenziale è del secondo ordine*** quando al suo interno compare la derivata seconda di y.

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}$$

Le ***soluzioni*** delle equazioni differenziali del secondo ordine sono ***funzioni della variabile x, contenenti due costanti reali arbitrarie***, che indicheremo con c_1 e c_2.

L'*integrale generale* di un'equazione differenziale del secondo ordine è dato quindi da una famiglia di funzioni del tipo $\boldsymbol{y = f(x, c_1, c_2)}$**.** Le *soluzioni particolari* si ottengono attribuendo ai parametri c_1 e c_2 determinati valori. Poiché l'integrale generale dipende da due parametri, occorre dare due condizioni se si vuol determinare una soluzione particolare.

Anche per le equazioni differenziali del secondo ordine possiamo definire i ***PROBLEMI di CAUCHY***, andando a indicare due condizioni:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y_0 = f(x_0) \\ y_0{}' = f'(x_0) \end{cases}$$

In questo caso le ***Condizioni Iniziali*** del problema di Cauchy sono due perché occorre determinare due costanti.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

CASO ELEMENTARE:

$$y'' = g(x)$$

Ci accorgiamo che si tratta di un'equazione differenziale che possiamo risolvere procedendo con ***due integrazioni successive***:

$$y' = \int g(x)\,dx + c_1$$

$$y = \int \left[\int g(x)\,dx + c_1\right] dx + c_2$$

ESEMPIO: $y'' = 12x^2 + 4$

Determiniamo la derivata prima della funzione y integrando ciascun membro dell'equazione:

$$y' = \int (12x^2 + 4)\,dx = 4x^3 + 4x + c_1$$

Determiniamo la funzione con un'ulteriore integrazione:

$$y = \int (4x^3 + 4x + c_1)\,dx = x^4 + 4x^2 + c_1 x + c_2$$

LINEARI OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI

Tra le equazioni differenziali del secondo ordine studieremo solo quelle ***lineari omogenee con i coefficienti costanti***, ossia le equazioni del tipo:

$$\boxed{\boldsymbol{y'' + by' + cy = 0 \quad con\ b, c\ \in \mathbb{R}}}$$

NB: In questo caso b e c sono numeri reali!

Verifichiamo che la funzione esponenziale $y = e^{zx}$, dove z è un'opportuna costante, può essere una soluzione. Calcoliamo le derivate $y' = ze^{zx}$ e $y'' = z^2e^{zx}$ e sostituiamo nell'equazione di partenza:

$$z^2e^{zx} + bze^{zx} + ce^{zx} = 0 \Longrightarrow \cancel{e^{zx}}(z^2 + bz + c) = 0 \Longrightarrow z^2 + bz + c = 0$$

La funzione $y = e^{zx}$ è quindi soluzione dell'equazione differenziale se z è soluzione di:

$$\boldsymbol{z^2 + bz + c = 0}$$

che prende il nome di ***equazione caratteristica dell'equazione differenziale*** (che mantiene gli stessi coefficienti dell'equazione differenziale di partenza).

Risolvendo l'equazione caratteristica, si trovano soluzioni particolari dell'equazione differenziale con le quali è possibile costruire quella generale. Il tipo di soluzioni particolari che si ottengono è determinato dalle radici dell'equazione caratteristica che, a loro volta, dipendono dal valore del *discriminante*.

Vediamo ora il ***procedimento risolutivo***, senza fornirne la dimostrazione.

Per prima cosa si scrive l'***equazione caratteristica*** dell'equazione differenziale data e si calcola il suo discriminante:

$$\boldsymbol{z^2 + bz + c = 0} \qquad\qquad \Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$$

Si distinguono quindi i seguenti 3 casi:

1) $\Delta > 0$

- Si determinano le due soluzioni reali distinte z_1 e z_2;
- La soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$\boldsymbol{y = c_1e^{z_1x} + c_2e^{z_2x} \qquad con\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

2) $\Delta = 0$

- Si determinano le due soluzioni reali coincidenti $z_1 = z_2$;
- La soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$\boldsymbol{y = c_1e^{z_1x} + c_2xe^{z_1x} = e^{z_1x}(c_1 + c_2x) \quad con\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

3) $\Delta < 0$

- Si determinano le due soluzioni complesse coniugate $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$;
- La soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$\boldsymbol{y = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}\,(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)}$$

$$\boldsymbol{con\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

ESEMPI:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

Scriviamo l'equazione caratteristica $z^2 - 5z + 6 = 0$

Risolviamo tale equazione: $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0 \Longrightarrow z_1 = 2 \; e \; z_2 = 3$

La soluzione generale dell'equazione data è:

$\boldsymbol{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}} \qquad \boldsymbol{con\ c_1, c_2} \in \mathbb{R}$

2) $y'' - 2y' + y = 0$

Scriviamo l'equazione caratteristica $z^2 - 2z + 1 = 0$

Risolviamo tale equazione: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0 \Longrightarrow z_1 = z_2 = 1$

La soluzione generale dell'equazione data è:

$\boldsymbol{y = e^x (c_1 + c_2 x)} \qquad \boldsymbol{con\ c_1, c_2} \in \mathbb{R}$

3) $y'' - 4y' + 13y = 0$

Scriviamo l'equazione caratteristica $z^2 - 4z + 13 = 0$

Risolviamo tale equazione: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 13 = -36 < 0 \Longrightarrow z_{1,2} = 2 \pm 3i$

La soluzione generale dell'equazione data è:

$\boldsymbol{y = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)} \qquad \boldsymbol{con\ c_1, c_2} \in \mathbb{R}$