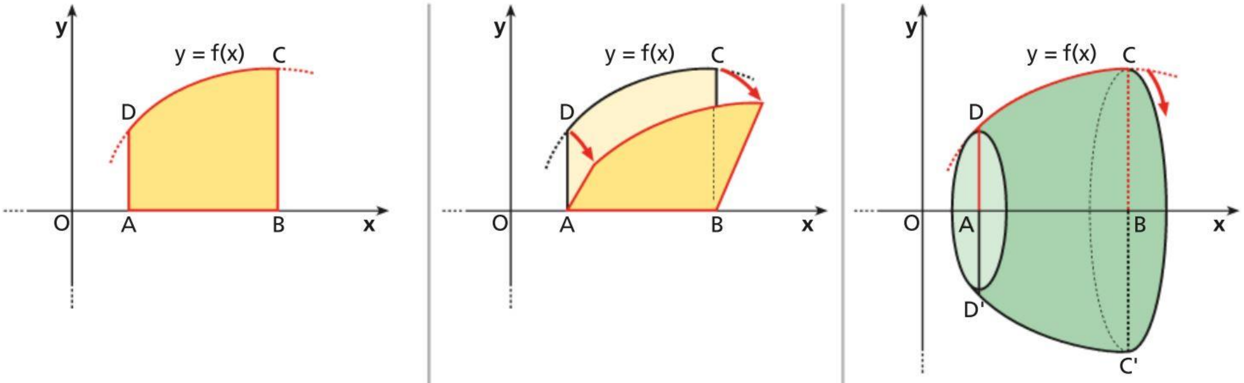
Calcolo del Volume

Solidi di Rotazione

ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE x

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ continua nell'intervallo $[a; b]$. Se facciamo ruotare il trapezoide intorno all'asse x di un giro completo (360°) otteniamo un ***solido di rotazione***:



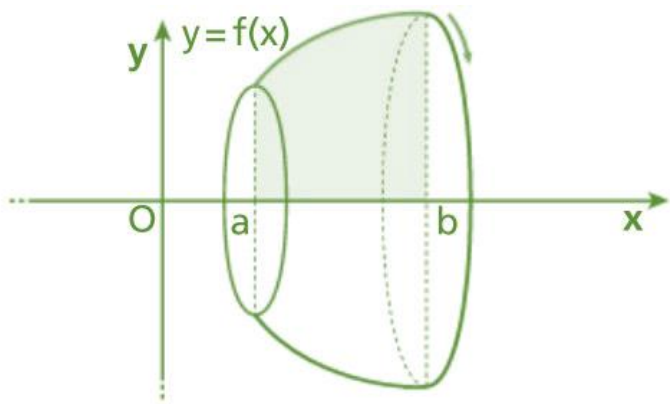
a. È dato il trapezoide *ABCD*.
b. Ruotiamo il trapezoide attorno all'asse *x* (il lato *AB* rimane fisso).
c. Abbiamo ottenuto il solido generato dalla rotazione di 360° del trapezoide attorno all'asse *x*.

Gli integrali definiti permettono di calcolare il ***volume*** del solido così ottenuto.

CALCOLO DEL VOLUME:

Dato il trapezoide esteso all'intervallo $[a; b]$, delimitato dal grafico della funzione $y = f(x)$ dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, il ***volume del solido di rotazione*** che si ottiene ruotando il trapezoide intorno all'asse x di un giro completo è:

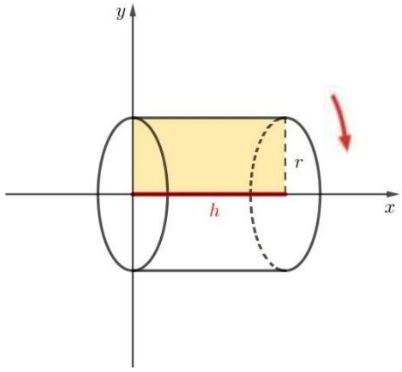
$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$



Vediamo degli esempi "famosi" nel senso che determiniamo, mediante il calcolo integrale, dei volumi che già avevamo studiato in passato:

- Volume del cilindro $V_{cilindro} = \pi r^2 h$
- Volume del cono $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
- Volume della sfera $V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

VOLUME DEL CILINDRO

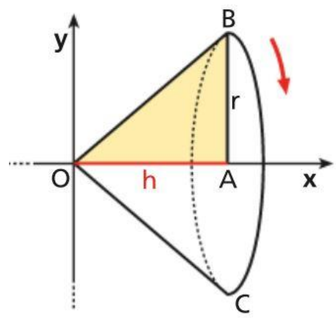


La funzione che dà origine al cilindro è la retta orizzontale $y = r$.

L'intervallo corrisponde all'altezza del cono quindi è $[0; h]$.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^h r^2\,dx = \pi r^2 \int_0^h 1\,dx = \pi r^2 \cdot [x]_0^h$$
$$= \pi r^2 \cdot [h - 0] = \boldsymbol{\pi r^2 h}$$

VOLUME DEL CONO

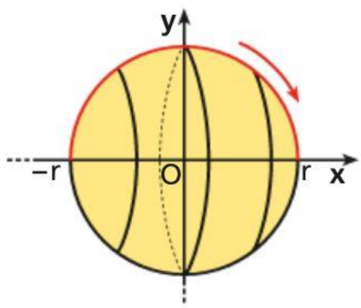


La funzione che dà origine al cono è la retta $y = \frac{r}{h}x$.

L'intervallo corrisponde all'altezza del cono quindi è $[0; h]$.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx$$
$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \left[\frac{h^3}{3} - 0\right] = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

VOLUME DELLA SFERA



La funzione che dà origine alla sfera è la semicirconferenza $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

L'intervallo corrisponde al diametro della sfera quindi è $[-r; r]$.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_{-r}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2)\,dx$$
$$= \pi \cdot \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^r = \pi \cdot \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right] = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi r^3}$$