Equazioni Differenziali

DEFINIZIONE: Un'***equazione differenziale*** è un'equazione che ha per incognita una funzione y nella variabile x e che stabilisce una relazione fra x, y e almeno una delle sue derivate (y, y'…).

$$\boxed{F(x, y, y', y'', \dots) = 0}$$

ESEMPI: $y'' + y' - 2x = 0$

$$y' - 2xy = 0$$

Si definisce ***ordine di un'equazione differenziale*** l'ordine massimo delle derivate che compaiono al suo interno. Per esempio $y''' - 2y' = 3xy$ è un'equazione differenziale del terzo ordine perché compare la derivata terza di y.

Ognuna delle funzioni che verifica un'equazione differenziale si chiama ***soluzione*** o ***integrale*** dell'equazione. Il grafico di una soluzione si chiama *curva integrale*.

In generale, le **soluzioni** di un'equazione differenziale sono **INFINITE**!

Risolvere un'equazione differenziale significa determinare tutte le sue soluzioni.

ESEMPIO: $y' - 6x^2 = 0$

$$y' = 6x^2$$

$$y = \int 6x^2\,dx = 2x^3 + c$$

Si cercano le primitive

$$y = 2x^3 + c \Leftarrow \textbf{\textit{Integrale generale}}$$

È una famiglia di funzioni!

L'***integrale generale*** è l'insieme di tutte le infinite soluzioni dell'equazione differenziale e dipende da uno o più parametri. Imponendo alcune condizioni si ottiene invece una soluzione che rappresenta un ***integrale*** (o soluzione) ***particolare*** dell'equazione differenziale.

$$y = 2x^3 + c \Leftarrow \textbf{\textit{Integrale generale}}$$

Se cerchiamo la soluzione passante per (0; 1) si ottiene $c = 1$, quindi:

$$y = 2x^3 + 1 \Leftarrow \textbf{\textit{Integrale particolare}}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI *del* PRIMO ORDINE

$$\boldsymbol{F(x, y, y') = 0}$$

È quindi un'equazione che stabilisce una relazione tra *x*, *y* e la sua derivata prima *y'*.

ESEMPIO: $y' - e^x = x$

$$y' = e^x + x$$

$$y = \int (e^x + x)\, dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$y = e^x + \frac{1}{2}x^2 + c \Leftarrow \boldsymbol{Integrale\ generale}$$

Come detto in precedenza l'integrale generale rappresenta una famiglia di funzioni. Spesso, in un'equazione differenziale del primo ordine, si cerca una soluzione particolare la cui curva integrale passi per un *punto* $(x_0;\ y_0)$ assegnato.

In questo caso si parla di ***PROBLEMA DI CAUCHY*** che consiste nella determinazione di una funzione $y = f(x)$ che soddisfi le due condizioni seguenti:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F(x, y, y') = 0} \\ \boldsymbol{y_0 = f(x_0)} \end{cases}$$

Condizione Iniziale del problema di Cauchy

ESEMPIO: Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' - 2x = 1 \\ 5 = f(2) \end{cases}$$

$$y' = 2x + 1$$

$$y = \int (2x + 1)\, dx = x^2 + x + c$$

$$5 = f(2) \Longrightarrow 5 = 2^2 + 2 + c \Longrightarrow c = -1$$

$$y = x^2 + x - 1$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI del tipo $y' = f(x)$

In generale, come abbiamo visto finora in tutti gli esempi, per risolvere un'equazione differenziale del primo ordine, riconducibile al tipo $y' = f(x)$, si integrano entrambi i membri:

$$\int y'\, dx = \int f(x) dx$$

L'integrale generale è:

$$\boxed{y = \int f(x) dx}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

DEFINIZIONE: Un'***equazione differenziale*** *del primo ordine* è ***a variabili separabili*** quando può essere scritta nella forma $y' = g(x) \cdot h(y)$, ossia come prodotto di due funzioni continue rispettivamente nella sola variabile *x* e nella sola *y*.

$$\boxed{\boldsymbol{y' = g(x) \cdot h(y)}}$$

In generale per risolvere un'equazione differenziale a variabili separabili il procedimento è il seguente:

Si scrive $y' = \frac{dy}{dx}$ e quindi diventa $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

a) Se $h(y) \neq 0$ si possono dividere ambo i membri per $h(y)$:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

Si integrano poi i due membri:

$$\boxed{\boldsymbol{\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x)\, dx}}$$

E si ricava così *y* in funzione di *x* dall'uguaglianza fra le primitive trovate.

b) Si esaminano a parte i casi in cui $\boldsymbol{h(y) = 0}$, andando così a considerare tutte le soluzioni.

ESEMPIO: $y' = 4xy^2$

$$\frac{dy}{dx} = 4x \cdot y^2$$

a) $Se\ y \neq 0$

$$\frac{dy}{y^2} = 4x\, dx$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 4x\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = 2x^2 + c$$

$$y = -\frac{1}{2x^2 + c}$$

b) Vediamo ora se $y = 0$ è anche soluzione dell'equazione differenziale:
$0 = 4x \cdot 0 \Longrightarrow l'equazione$ è $soddisfatta$

Le soluzioni dell'equazione differenziale sono quindi:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2x^2 + c} \vee y = 0}$$