LIMITI: FORME INDETERMINATE

$$+\infty - \infty;\ 0 \cdot \infty;\ \frac{\infty}{\infty};\ \frac{0}{0};\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty$$

Come abbiamo visto, l'espressione ***FORMA INDETERMINATA***, indica che il risultato del limite cambia di volta in volta a seconda delle funzioni che abbiamo. Non esistono regole generali che permettano il calcolo delle forme di indecisione ma vanno risolte caso per caso.

Vediamo attraverso alcuni esempi delle possibili ***strategie***.

FORMA INDETERMINATA $+\infty - \infty$

Vediamo un metoo per il calcolo dei limiti di *funzioni polinomiali*.

ESEMPIO:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^5 - 3x^2 + 4) = (+\infty)^5 - 3(+\infty)^2 + 4 = +\infty - \infty \ \Rightarrow \mathit{Forma\ Indeterminata}$$

La strategia risolutiva consiste nel *raccogliere la potenza massima:*

$$\lim_{x\to+\infty}(x^5 - 3x^2 + 4) = \lim_{x\to+\infty} x^5\left(1 - \cancelto{0}{\frac{3}{x^3}} + \cancelto{0}{\frac{4}{x^5}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$$

In generale, per calcolare il limite di una funzione polinomiale di grado n, con forma indeterminata $+\infty - \infty$, ***raccogliamo la potenza massima:***

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)$$

Considerato che tutte le frazioni $\frac{a_1}{x}; \frac{a_2}{x^2}; \ldots; \frac{a_n}{x^n}$ tendono a zero è sufficiente calcolare:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n)}$$

LIMITE DI FUNZIONI IRRAZIONALI

ESEMPIO:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+7}\right) = +\infty - \infty \ \Rightarrow \mathit{Forma\ Indeterminata}$$

Il metodo che applichiamo una *razionalizzazione*:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+7}\right)\cdot\frac{\left(x + \sqrt{x^2+7}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2+7}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - (x^2+7)}{x + \sqrt{x^2+7}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{x + \sqrt{x^2+7}} = \frac{-7}{+\infty} = 0$$

In generale, quando compaiono forme indeterminate con funzioni irrazionali, può essere utile ***razionalizzare***.

FORMA INDETERMINATA $\frac{\infty}{\infty}$

Vediamo alcune strategie per il calcolo dei *limiti di funzioni razionali fratte.*

ESEMPIO 1 _ Il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+3x^5+2x}{x^4+6x-2}=\frac{+\infty+\infty+\infty}{+\infty+\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \textit{Forma Indeterminata}$$

Anche in questo caso procediamo raccogliendo la potenza massima a numeratore e a denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+3x^5+2x}{x^4+6x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6\left(1+\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^5}}\right)}{x^4\left(1+\cancelto{0}{\frac{6}{x^3}}-\cancelto{0}{\frac{2}{x^4}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

Se il numeratore ha grado maggiore del denominatore il risultato è infinito.

ESEMPIO 2 _ Il grado del numeratore è minore del grado del denominatore

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+6}{x^7+2x^5-9x}=\frac{+\infty-\infty+6}{+\infty+\infty-\infty}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \textit{Forma Indeterminata}$$

Come al solito procediamo raccogliendo la potenza massima a numeratore e a denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3x+6}{x^7+2x^5-9x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(2-\cancelto{0}{\frac{3}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{6}{x^3}}\right)}{x^7\left(1+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}-\cancelto{0}{\frac{9}{x^6}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^4}=0$$

Se il numeratore ha grado minore del denominatore il risultato è zero.

ESEMPIO 3 _ Il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^5+5x^3+8}{2x^5+4x^2+x}=\frac{+\infty-\infty+8}{-\infty+\infty-\infty}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \textit{Forma Indeterminata}$$

Nuovamente procediamo raccogliendo la potenza massima a numeratore e a denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^5+5x^3+8}{2x^5+4x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\left(-3+\cancelto{0}{\frac{5}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{8}{x^5}}\right)}{x^5\left(2+\cancelto{0}{\frac{4}{x^3}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^5}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^5}{2x^5}=-\frac{3}{2}$$

Se il numeratore e il denominatore hanno lo stesso grado il risultato è il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo.

In generale, per calcolare il limite di una funzione razionale fratta, con forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ è sufficiente considerare le ***potenze massime a numeratore e denominatore:***

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\begin{cases}\pm\infty & se\ n>m\\ \frac{a_0}{b_0} & se\ n=m\\ 0 & se\ n<m\end{cases}}$$

FORMA INDETERMINATA $\frac{0}{0}$

Consideriamo il quoziente di due polinomi che si annullano contemporaneamente per $x\to x_0$.

ESEMPIO:

$$\lim_{x\to4}\frac{x^3+x^2-20x}{x^2-16}=\frac{64+16-80}{16-16}=\frac{0}{0}\Rightarrow Forma\ Indeterminata$$

La strategia risolutiva consiste nel cercare di *scomporre numeratore e denominatore* in modo da attuare opportune semplificazioni.

$$\lim_{x\to4}\frac{x^3+x^2-20x}{x^2-16}=\lim_{x\to4}\frac{x(x^2+x-20)}{(x+4)(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{x(x+5)\cancel{(x-4)}}{(x+4)\cancel{(x-4)}}=\lim_{x\to4}\frac{x(x+5)}{(x+4)}=\frac{4(4+5)}{8}=\frac{9}{2}$$

In generale, per calcolare il limite del quoziente di due polinomi che si annullano entrambi per *x* che tende a x_0, la tecnica da applicare e quella delle ***scomposizioni***.

FORME INDETERMINATE 0^0; ∞^0 e 1^∞

Queste forme indeterminate si incontrano nei calcoli di limiti del tipo:

$$\lim_{x\to\alpha}f(x)^{g(x)}\ con\ f(x)>0$$

Per risolverle può essere utile utilizzare la seguente *proprietà dei logaritmi:*

$$a=e^{\ln a}$$

Il limite si trasforma quindi nel modo seguente:

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}e^{\ln f(x)^{g(x)}}=\lim_{x\to\alpha}e^{g(x)\ln f(x)}}$$

ESEMPIO:

$$\lim_{x\to0^+}(3x)^{\frac{-1}{\ln 3x}} = 0^0 \Rightarrow \mathit{Forma\ Indeterminata}$$

Utilizziamo allora la proprietà dei logaritmi vista prima:

$$\lim_{x\to0^+}(3x)^{\frac{-1}{\ln 3x}} = \lim_{x\to\alpha} e^{\frac{-1}{\ln 3x}\ln 3x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

LIMITI NOTEVOLI

Nella tabella seguente illustriamo alcuni limiti particolari, detti ***notevoli***, che sono utili nelle applicazioni e che abbreviano o passaggi nel calcolo dei limiti.

LIMITE NOTEVOLE	GENERALIZZAZIONE
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\frac{1-\cos f(x)}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos f(x)}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{f(x)\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$

ESEMPI:

Negli esempi seguenti cerchiamo di ricondurci ai limiti notevoli per risolvere le forme indeterminate.

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{5}{5} = \lim\limits_{x\to0}\boxed{\frac{\sin 5x}{5x}}\cdot 5 = 1\cdot5 = 5$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 3x}{x}\cdot\frac{3}{3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\boxed{\frac{1-\cos 3x}{3x}}\cdot 3 = \frac{1}{2}\cdot0\cdot3 = 0$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}\right]^{3} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x\cdot\frac{2}{2}}\right]^{3} = \lim_{x\to+\infty}\left[\boxed{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}}\right]^{\frac{3}{2}} =$

$e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} = e\sqrt{e}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x)}{x}\cdot\frac{-4}{-4} = \lim_{x\to 0}\boxed{\frac{\ln(1-4x)}{-4x}}\cdot(-4) = 1\cdot(-4) = -4$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\frac{2}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\boxed{\frac{e^{2x}-1}{2x}}\cdot 2 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2 = \frac{2}{3}$