PUNTI DI DISCONTINUITÀ E DI SINGOLARITÀ

DEFINIZIONE: Una funzione $f(x)$, definita in un intorno di un punto x_0, è **CONTINUA in x_0** se esiste il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 e tale limite è uguale al valore della funzione calcolata in x_0, cioè:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Perciò una funzione $f(x)$ è continua in x_0 se

- È definita in x_0, cioè esiste $f(x_0)$;
- Esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$;
- Il valore del limite è uguale a $f(x_0)$.

DEFINIZIONE: Una funzione $f(x)$, definita in $[a;\ b]$, si dice **CONTINUA NELL'INTERVALLO $[a;\ b]$** se è continua in ogni punto dell'intervallo.

Sono continue nel loro dominio le funzioni razionali e irrazionali (intere e fratte), le esponenziali, le logaritmiche e le goniometriche.

OSSERVAZIONE: Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue, allora sono continue anche

- ✓ $f(x) \pm g(x)$
- ✓ $kf(x),\ k \in \mathbb{R}$
- ✓ $f(x) \cdot g(x)$
- ✓ $\frac{f(x)}{g(x)},\ con\ g(x) \neq 0$
- ✓ $[f(x)]^n,\ n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- ✓ $y = g(f(x))$

Una funzione $f(x)$, <u>definita in x_0</u>, **NON è CONTINUA in x_0** se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)}$$

In questo caso si parla di ***punti di DISCONTINUITÀ*** della funzione.

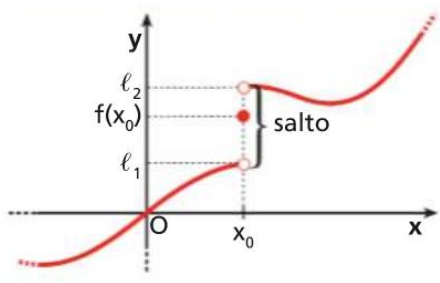
I punti di discontinuità possono essere classificati in tre categorie sulla base dello *studio del limite* $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

PUNTI di DISCONTINUITÀ di PRIMA SPECIE (o SALTO)

DEFINIZIONE: Un punto x_0, del dominio della funzione, si dice ***punto di discontinuità di prima specie*** per la funzione $f(x)$ se, per x che tende a x_0, il limite destro e sinistro sono entrambi finiti ma diversi tra loro.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \neq l_2 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)}$$

*La differenza $|l_1 - l_2|$ si definisce **SALTO** della funzione.*



ESEMPIO:

$$y = \begin{cases} -3x & se\ x < 2 \\ x - 1 & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

Dominio D: $(-\infty;\ +\infty)$

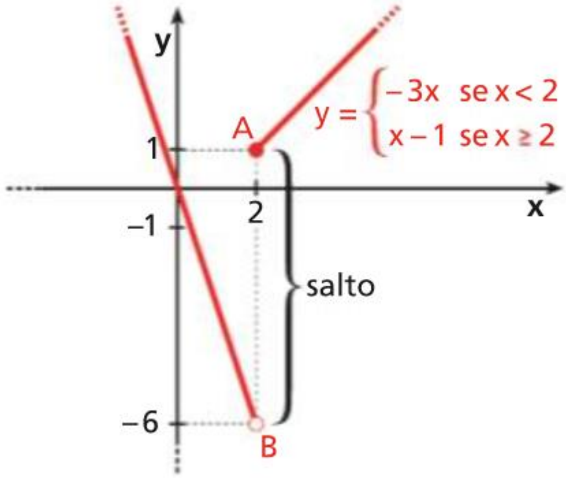
Andiamo ad analizzare cosa accade nel punto $x = 2$, cioè studiamo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 2^-} (-3x) = -6$$

$$\lim_{x\to 2^+} (x-1) = 1$$

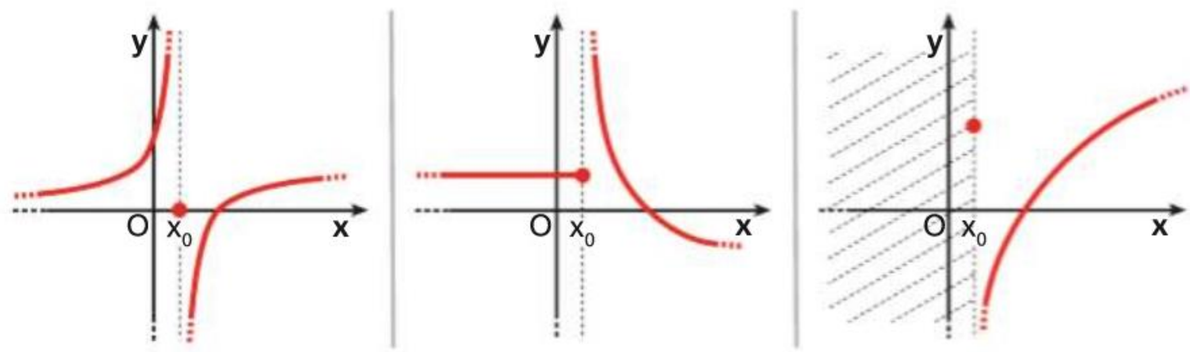
Poiché i due limiti sono finiti e diversi tra loro, $x = 2$ è un ***punto di discontinuità di I specie***.

Salto: $|1 - (-6)| = 7$



PUNTI di DISCONTINUITÀ di SECONDA SPECIE

DEFINIZIONE: Un punto x_0, del dominio della funzione, si dice ***punto di discontinuità di seconda specie*** per la funzione $f(x)$ se, per x che tende a x_0, almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, è infinito oppure non esiste.



$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)\ non\ esiste$$

ESEMPIO:

$$y = \begin{cases} -5 & se\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & se\ x > 0 \end{cases}$$

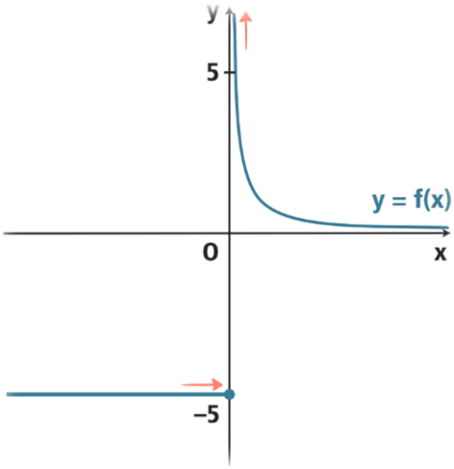
Dominio D: $(-\infty;\ +\infty)$

Andiamo ad analizzare cosa accade nel punto $x = 0$, cioè studiamo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \to 0^-} (-5) = -5$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Poiché il limite destro è infinito, $x = 0$ è un ***punto di discontinuità di II specie***.

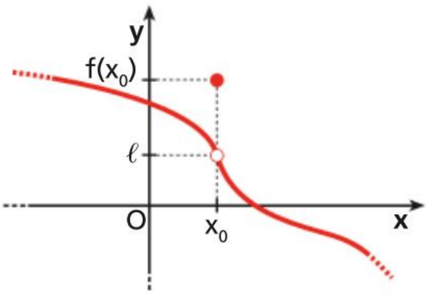


PUNTI di DISCONTINUITÀ di TERZA SPECIE (o ELIMINABILE)

DEFINIZIONE: Un punto x_0, del dominio della funzione, si dice ***punto di discontinuità di terza specie*** per la funzione $f(x)$ se, per x che tende a x_0, il limite destro e sinistro sono entrambi finiti e uguali tra loro ma diversi dal valore della funzione in quel punto.

- Esiste finito il limite di $f(x)$ se, per x che tende a x_0
- Il valore della funzione in x_0 risulta diverso

$$\boxed{\begin{gathered} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \\ f(x_0) \neq l \end{gathered}}$$



ESEMPIO:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{x - 1} & se\ x \neq 1 \\ -1 & se\ x = 1 \end{cases}$$

Dominio D: $(-\infty;\ +\infty)$

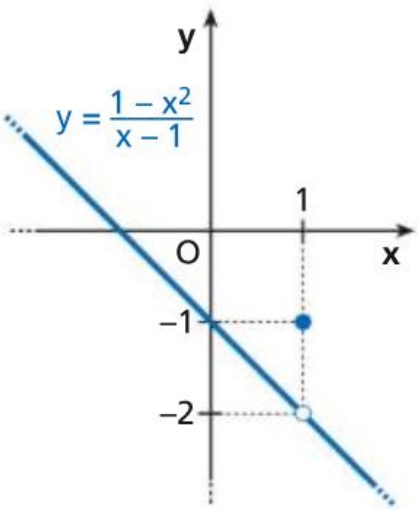
Andiamo ad analizzare cosa accade nel punto $x = 1$, cioè studiamo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Forma\ Indeterminata$$

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^\pm} \frac{(1 - x)(1 + x)}{-(1 - x)} = -2$$

Il limite per x che tende a 1 della funzione esiste ma sapevamo che

$$f(1) = -1$$



Poiché i due limiti sono finiti e uguali tra loro ma diversi dal valore della funzione in quel punto, $x = 1$ è un ***punto di discontinuità di III specie (o eliminabile)***.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE!

PUNTI di SINGOLARITÀ (o punti singolari)

I concetti presentati finora possono essere estesi anche a punti che ***NON appartengono al dominio*** della funzione ma che sono punti di accumulazione per il dominio della funzione.

In questo caso si parla di ***PUNTI di SINGOLARITÀ*** e vale la stessa classificazione nelle tre specie (esattamente come per i punti di discontinuità).

I punti di singolarità sono una generalizzazione e sono fondamentali nello studio di funzione.