

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

DEFINIZIONE: Una *disequazione esponenziale* contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Per le disequazioni esponenziali valgono osservazioni analoghe a quelle fatte sulle equazioni esponenziali e anche tutte le tecniche risolutive studiate, purché si ricordi la seguente **regola**.

Possiamo distinguere due casi:

$$a > 1$$

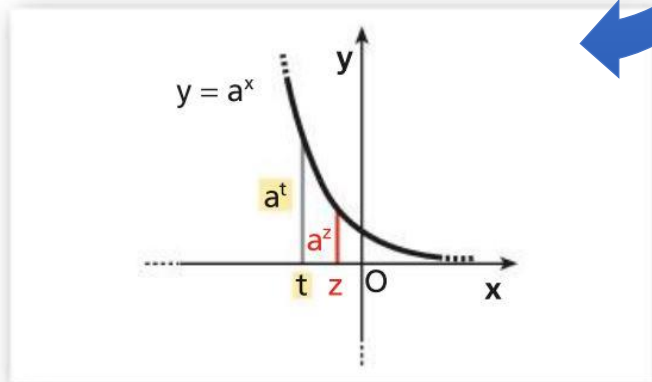
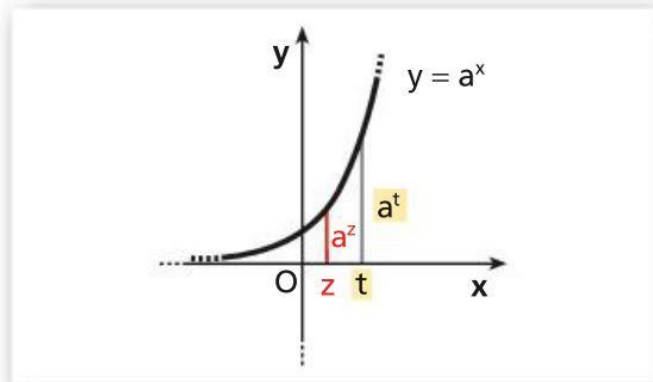
$$a^t > a^z \Leftrightarrow t > z$$

$$0 < a < 1$$

$$a^t > a^z \Leftrightarrow t < z$$

Si inverte il verso della disequazione!

Interpretazione grafica delle disequazioni esponenziali



Anche in questo caso **NON esiste un metodo generale** per la risoluzione delle disequazioni esponenziali ma possiamo applicare tutte le tecniche già viste per le equazioni tenendo sempre a mente la regola fondamentale.

REGOLA FONDAMENTALE: Se la **base** dell'esponenziale è **minore di uno**, nel passaggio alla disequazione tra gli esponenti si **inverte il verso** della disequazione!

N.B.

ESEMPI:

1) $64^x > 128$

Cerchiamo di esprimere entrambi i membri come *potenze aventi la stessa base*:

$$(2^6)^x > 2^7 \Rightarrow 2^{6x} > 2^7$$

Esponenziali

Poiché le potenze hanno **base maggiore di uno**, dalla disuguaglianza precedente otteniamo una disuguaglianza fra gli esponenti di **ugual verso**:

$$2^{6x} > 2^7 \Rightarrow 6x > 7 \Rightarrow x > \frac{6}{7}$$

La soluzione è quindi: $x > \frac{6}{7}$

2) $\left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{4}$

Scriviamo entrambi i membri come potenze di $\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Poiché le potenze hanno **base minore di uno**, dalla disuguaglianza precedente otteniamo una disuguaglianza fra gli esponenti di **verso contrario**:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \triangle \Rightarrow \quad 3x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

La soluzione è quindi: $x < \frac{2}{3}$

- 3) Anche nelle disequazioni esponenziali può essere utile utilizzare un'**incognita ausiliaria**.

$$3^x - 2 \cdot 3^{2-x} < 7$$

Sfruttiamo le proprietà delle potenze:

$$3^x - 2 \cdot \frac{9}{3^x} < 7$$

Definiamo l'incognita ausiliaria $t = 3^x$

$$t - \frac{18}{t} - 7 < 0$$

$$\frac{t^2 - 7t - 18}{t} < 0$$

$$-2 < t < 9$$

Ritorniamo alla x :

$$\Rightarrow \begin{cases} t > -2 \Rightarrow 3^x > -2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ t < 9 \Rightarrow 3^x < 3^2 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione data è: $x < 2$