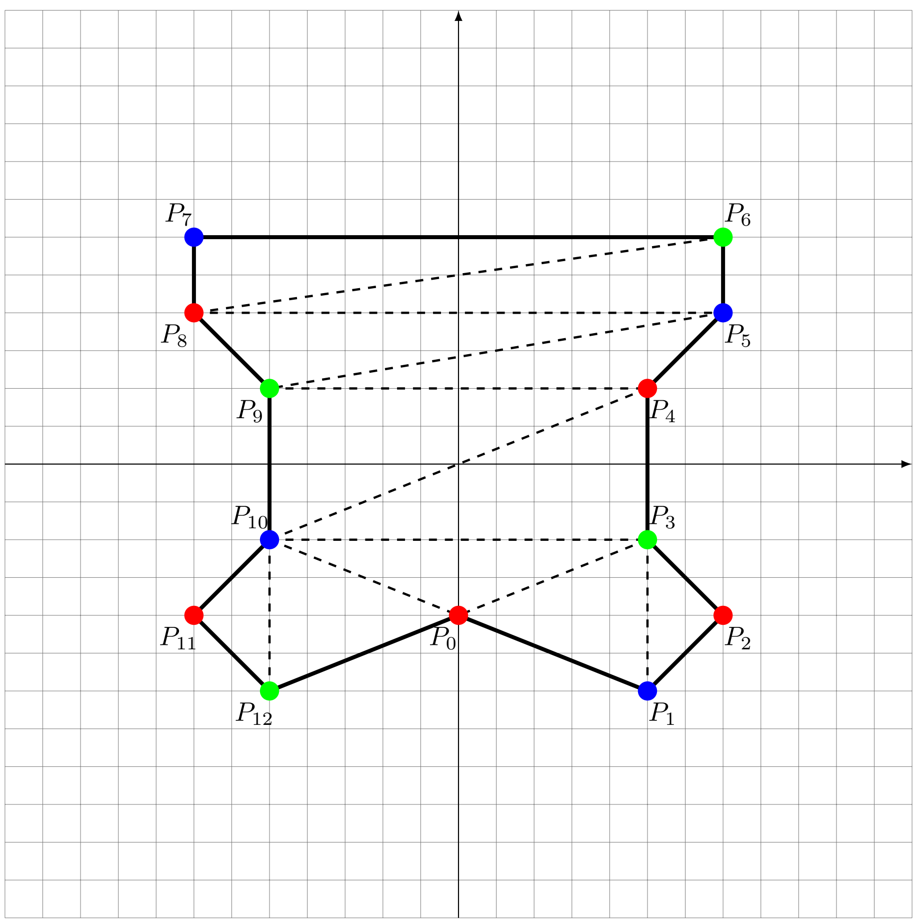
Algoritmi avansaţi

Seminar 6 (săpt. 11 şi 12)

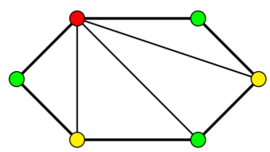
1. *Aplicaţi metoda din demonstraţia teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului* $P_0P_1P_2\dots P_{12}$*, unde* $P_0 = (0,-2), P_1 = (5,-6), P_2 = (7,-4), P_3 = (5,-2), P_4 = (5,2), P_5 = (7,4)$*,* $P_6 = (7,6)$ *iar punctele* $P_7,\dots,P_{12}$ *sunt respectiv simetricele punctelor* $P_6,\dots,P_1$ *faţă de axa* Oy*.*

Soluţie. În figură sunt reprezentate o posibilă triangulare şi 3-colorarea asociată - există şi alte variante corecte.

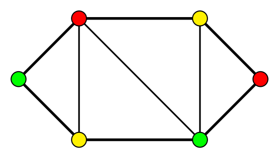


2. *Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, unde $P_1 = (5,0)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (-1,2)$, $P_4 = (-3,0)$, $P_5 = (-1,-2)$, $P_6 = (3,-2)$. Arătaţi că Teorema Galeriei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, aşa încât, aplicând metoda din teoremă şi mecanismul de 3-colorare, în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare şi suficiente două camere pentru supravegeherea unei galerii având forma poligonului $\mathcal{P}$.*

Soluţie. Poligonul este un hexagon convex, deci pentru triangularea sa vor fi folosite $3 \cdot 6 - 6 - 3 = 9$ muchii. Aceasta înseamnă că vom trasa 3 diagonale. Sunt posibile două situaţii: (a) cele trei diagonale au un vârf comun; (b) nu există un vârf comun al celor trei diagonale (acest lucru se poate demonstra trasând una dintre diagonale şi apoi raţionând inductiv - este esenţial că poligonul este un hexagon convex). În cazul (a) este suficientă o cameră, iar în cazul (b) 3-colorarea indică utilizarea a două camere.



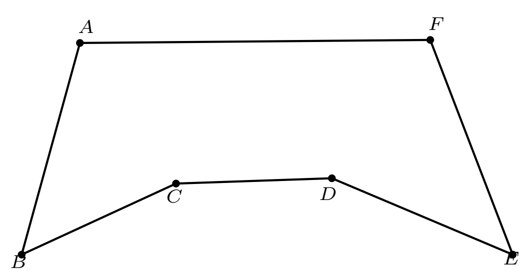
(a)



(b)

3. *Daţi exemplu de poligon cu 6 vârfuri care să aibă atât vârfuri convexe, cât şi concave şi toate să fie principale.*

Soluţie. În figură este desenat un poligon cu 4 vârfuri convexe şi 2 vârfuri concave. Pot fi luate în considerare şi alte variante (de exemplu cu un singur vârf concav, cu doar 3 vârfuri convexe, etc.).



4. *Fie* $\mathcal{M} = \{A_i \mid i = 0, \ldots, 50\} \cup \{B_i \mid i = 0, \ldots, 40\} \cup \{C_i \mid i = 0, \ldots, 30\}$, *dată de punctele* $A_i = (i + 10, 0)$, $i = 0, 1, \ldots, 50$, $B_i = (0, i + 30)$, $i = 0, 1, \ldots, 40$, $C_i = (-i, -i)$, $i = 0, 1, \ldots, 30$. *Determinaţi numărul de triunghiuri şi numărul de muchii ale unei triangulări a lui* $\mathcal{M}$.

Soluţie. Trebuie stabilite mai întâi numărul de puncte n şi numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe k (atenţie la numărarea punctelor, nu trebuie numărat un punct de două ori...). Pe o schiţă se observă că sunt în total 123 de puncte (punctele din mulţimile $\{A_i \mid i = 0, \ldots, 50\}$, $\{B_i \mid i = 0, \ldots, 40\}$, respectiv $\{C_i \mid i = 0, \ldots, 30\}$ sunt diferite între ele). Obţinem $n = 123$, $k = 3$, apoi aplicăm formulele pentru determinarea numărului de triunghiuri, respectiv a numărului de muchii.

$$n_t = 2n - k - 2 = 241, \qquad n_m = 3n - k - 3 = 343.$$

5. *Daţi un exemplu de mulţime din* $\mathbb{R}^2$ *care să admită o triangulare având* 6 *triunghiuri şi* 11 *muchii.*

Soluţie. Fie n numărul de puncte ale unei astfel de mulţimi şi k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe. Au loc relaţiile

$$\begin{cases} 2n - k - 2 = 6 \\ 3n - k - 3 = 11 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem $n = 6$, $k = 4$, deci o astfel de mulţime are 6 puncte, din care 4 sunt situate pe frontiera acoperirii convexe.

Un posibil exemplu: $\{(0, 0), (5, 0), (5, 3), (0, 3), (1, 1), (3, 1)\}$.

6. *În* $\mathbb{R}^2$ *fie punctele* $P_1 = (1, 7)$, $P_2 = (5, 7)$, $P_3 = (7, 5)$, $P_4 = (1, 3)$, $P_5 = (5, 3)$, $P_6 = (\alpha - 1, 5)$, *cu* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Discutaţi, în funcţie de* α, *numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulţimii* $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

Soluţie. Trebuie analizată configuraţia punctelor $P_1, P_2, \ldots P_6$ şi determinate numărul n de puncte şi numărul k de puncte de pe frontiera acoperirii convexe.

Punctele $P_1P_2P_3P_4P_5$ determină un pentagon convex. Punctul P_6 descrie o dreaptă paralelă cu Ox care trece prin punctul P_3.

- Pentru $\alpha - 1 \leq 1$, adică $\alpha \in (-\infty, 2]$ punctul P_6 este situat în exteriorul sau pe laturile pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6, k = 6$, deci 4 feţe şi 9 muchii.

- Pentru $\alpha - 1 > 1$ şi $\alpha - 1 < 7$, adică $\alpha \in (2, 8)$ punctul P_6 este situat în interiorul pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6, k = 5$, deci 5 feţe şi 10 muchii.

- Pentru $\alpha - 1 = 7$, adică $\alpha \in \{8\}$ punctul P_6 coincide cu P_3. Avem $n = 5, k = 5$, deci 3 feţe şi 7 muchii.

- Pentru $\alpha - 1 > 7$, adică $\alpha \in (8, \infty)$ punctul P_6 este situat în exteriorul pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6, k = 6$, deci 4 feţe şi 9 muchii.

7. *Fie $\mathcal{G}$ un graf planar conex, v numărul de noduri, m numărul de muchii, f numărul de feţe. Se presupune că fiecare vârf are gradul ≥ 3. Demonstraţi inegalităţile*

$$\begin{array}{ll} v \leq \frac{2}{3}m, & m \leq 3v-6 \\ m \leq 3f-6, & f \leq \frac{2}{3}m \\ v \leq 2f-4, & f \leq 2v-4 \end{array}$$

Daţi exemplu de grafuri în care au loc egalităţi în relaţiile de mai sus.