Exerciţii şi probleme

A.A. - partea a II-a, algoritmi geometrici

1. Preliminarii. Raport. Testul de orientare

1.1. (Seminar 5, Problema 1) Fie punctele $A = (1, 2, 3), B = (4, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$.

a) Fie $C = (a, 7, 8)$. Arătaţi că există a astfel ca punctele A, B, C să fie coliniare şi pentru a astfel determinat calculaţi raportul $r(A, B, C)$.

b) Determinaţi punctul P astfel ca raportul $r(A, P, B) = 1$.

c) Daţi exemplu de punct Q astfel ca $r(A, B, Q) < 0$ şi $r(A, Q, B) < 0$.

1.2. (Seminar 5, Problema 2) Fie punctele $P = (1, -1), Q = (3, 3)$.

a) Calculaţi valoarea determinantului care apare în testul de orientare pentru muchia orientată $\overrightarrow{PQ}$ şi punctul de testare $O = (0, 0)$.

b) Fie $R_\alpha = (\alpha, -\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinaţi valorile lui α pentru care punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate $\overrightarrow{PQ}$.

1.3 Calculaţi rapoartele $r(A, P, B), r(B, P, A), r(P, A, B)$ (stabiliţi mai întâi dacă punctele sunt coliniare), pentru: (i) $A = (3, 3), B = (2, 4), C = (5, 1)$; (ii) $A = (1, 4, -2), P = (2, 3, -1), B = (4, 1, 1)$.

1.4 Determinaţi α, β astfel ca punctele A, P, B din planul $\mathbb{R}^2$, cu $A = (6, 2), P = (\alpha, \beta), B = (2, -2)$, să fie coliniare şi $r(A, P, B) = 2$.

1.5 Fie $P = (2, 2), Q = (4, 4)$. Stabiliţi, folosind testul de orientare, poziţia relativă a punctelor $R_1 = (8, 8), R_2 = (6, 0), R_3 = (-2, -1)$ faţă de muchia orientată $\overrightarrow{PQ}$. Care este poziţia aceloraşi puncte faţă de muchia orientată $\overrightarrow{QP}$?

1.6 Daţi exemplu de puncte coplanare P, Q, R_1, R_2 din $\mathbb{R}^3$, nesituate într-un plan de coordonate, astfel ca R_1 şi R_2 să fie de o parte şi de alta a segmentului $[PQ]$.

2 Acoperiri convexe

2.1. (Seminar 5, Problema 3) Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, unde $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (-1, 1)$, $P_3 = (0, 1)$, $P_4 = (2, 1)$, $P_5 = (4, 3)$, $P_6 = (5, 5)$, $P_7 = (6, 9)$, $P_8 = (8, 4)$, $P_9 = (10, 6)$. Detaliaţi cum evoluează lista $\mathcal{L}_i$ a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew. Justificaţi!

2.2. (Seminar 5, Problema 4) Daţi un exemplu de mulţime $\mathcal{M}$ din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care, la final, $\mathcal{L}_i$ are 4 elemente, dar, pe parcursul algoritmului, numărul maxim de elemente al lui $\mathcal{L}_i$ este egal cu 6 ($\mathcal{L}_i$ este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificaţi!

2.3. (Seminar 5, Problema 5) Fie mulţimea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_7\}$, unde $P_1 = (1,0), P_2 = (2,2),\ P_3 = (3,1), P_4 = (4,0), P_5 = (6,0), P_6 = (3,-3), P_7 = (6,-2)$. Indicaţi testele care trebuie făcute pentru a găsi succesorul lui P_1 atunci când aplicăm Jarvis' march pentru a determina marginea inferioară a acoperirii convexe a lui $\mathcal{P}$, parcursă în sens trigonometric (drept drept pivot iniţial va fi considerat P_2).

2.4 Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_7\}$, unde $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (2,7)$, $P_3 = (3,6)$, $P_4 = (4,5)$, $P_5 = (7,7)$, $P_6 = (9,7)$, $P_7 = (11,1)$. Scrieţi cum evoluează, pe parcursul aplicării Graham's scan, lista $\mathcal{L}_i$ a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, parcursă în sens trigonometric. Aceeaşi cerinţă pentru marginea superioară $\mathcal{L}_s$.

2.5 Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, unde $P_1 = (-3,2)$, $P_2 = (-2,-1)$, $P_3 = (-1,-1)$, $P_4 = (1,-1)$, $P_5 = (3,1)$, $P_6 = (4,3)$, $P_7 = (5,7)$, $P_8 = (7,2)$, $P_9 = (9,4)$. Determinaţi numărul maxim de elemente ale lui $\mathcal{L}_i$, indicând explicit punctele conţinute la pasul când este atins acest maxim ($\mathcal{L}_i$ este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificaţi!

2.6 Fie punctele $P_1 = (2,0)$, $P_2 = (0,3)$, $P_3 = (-4,0)$, $P_4 = (4,2)$, $P_5 = (5,1)$. Precizaţi testele care trebuie efectuate, atunci când este aplicat Jarvis' march, pentru determinarea succesorului M al "celui mai din stânga" punct şi a succesorului lui M. Cum decurg testele dacă se începe cu "cel mai de jos" punct?

2.7 Daţi un exemplu de mulţime cu 8 elemente $\mathcal{M}$ din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care frontiera acoperirii convexe are 3 elemente şi pentru care, la găsirea succesorului "celui mai din stânga" punct (se aplică Jarvis' march), toate celelalte puncte sunt testate. Justificaţi!

2.8 Fie punctele $A = (3,-3), B = (3,3), C = (-3,-3), D = (-3,3)$, $M = (2-\lambda, 3+\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. Discutaţi, în funcţie de λ, numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe a mulţimii $\{A, B, C, D, M\}$.

3. Teorema galeriei de artă. Triangularea poligoanelor. Clasificarea vârfurilor unui poligon

3.1. (Seminar 6, Problema 1) Aplicaţi metoda din demonstraţia teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_0P_1P_2\ldots P_{12}$, unde $P_0 = (0,-2), P_1 = (5,-6), P_2 = (7,-4), P_3 = (5,-2), P_4 = (5,2), P_5 = (7,4)$, $P_6 = (7,6)$ iar punctele $P_7, \ldots, P_{12}$ sunt respectiv simetricele punctelor $P_6, \ldots, P_1$ faţă de axa Oy.

3.2. (Seminar 6, Problema 2) Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, unde $P_1 = (5,0)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (-1,2)$, $P_4 = (-3,0)$, $P_5 = (-1,-2)$, $P_6 = (3,-2)$. Arătaţi că Teorema Galeriei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, aşa încât, aplicând metoda din teoremă şi mecanismul de 3-colorare, în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare şi suficiente două camere pentru supravegeherea unei galerii având forma poligonului $\mathcal{P}$.

3.3. (Seminar 6, Problema 3) Daţi exemplu de poligon cu 6 vârfuri care să aibă atât vârfuri convexe, cât şi concave şi toate să fie principale.

3.4 Fie $\mathcal{P}$ poligonul dat de punctele $P_1 = (6,0)$, $P_2 = (2,2)$, $P_3 = (0,7)$, $P_4 = (-2,2)$, $P_5 = (-8,0)$, $P_6 = (-2,-2)$, $P_7 = (0,-6)$, $P_8 = (2,-2)$. Indicaţi o triangulare $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ a lui $\mathcal{P}$ şi construiţi graful asociat perechii $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_\mathcal{P})$.

3.5 Aplicaţi metoda din demonstraţia teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_1P_2 \dots P_{10}$, unde $P_1 = (5,4), P_2 = (6,6), P_3 = (7,4), P_4 = (8,4), P_5 = (10,6)$, iar punctele $P_6, \dots, P_{10}$ sunt respectiv simetricele punctelor $P_5, \dots, P_1$ faţă de axa Ox.

3.6 Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2 \dots P_{10})$, unde $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (6,0)$, $P_3 = (6,6)$, $P_4 = (3,6)$, $P_5 = (3,3)$, $P_6 = (4,4)$, $P_7 = (4,2)$, $P_8 = (2,2)$, $P_9 = (2,6)$, $P_{10} = (0,6)$. Stabiliţi natura vârfurilor lui $\mathcal{P}$ (vârf principal sau nu / vârf convex sau concav).

3.7 Se consideră poligonul $\mathcal{P} = P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ dat de punctele $P_1 = (0,10), P_2 = (1,8), P_3 = (3,6), P_4 = (7,3), P_5 = (4,0), P_6 = (6,-2), P_7 = (4,-4), P_8 = (-4,-1)$. Stabiliţi dacă $\mathcal{P}$ este y-monoton şi, în caz afirmativ, explicaţi cum se aplică algoritmul liniar de triangulare.

3.8 În $\mathbb{R}^2$ fie punctele $P_1 = (0,8)$, $P_2 = (3,6)$, $P_3 = (0,3)$, $P_4 = (4,-1)$, $P_5 = (5,\alpha)$, $P_6 = (6,-3)$, $P_7 = (0,-9)$, $P_8 = (-2,2)$, $P_9 = (\beta+1,4)$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Discutaţi, în funcţie de α şi β, dacă linia poligonală $P_1P_2 \dots P_8P_9$ este un poligon y-monoton.

3.9 În algoritmul de triangulare a poligoanelor y-monotone au fost descrise trei cazuri. Justificaţi dacă, aplicând algoritmul pentru un poligon y-monoton cu cel puţin 4 laturi, este necesar să apără toate aceste cazuri.

4. Triangularea mulţimilor de puncte

4.1. (Seminar 5, Problema 4) Fie $\mathcal{M} = \{A_i \,|\, i = 0, \dots, 50\} \cup \{B_i \,|\, i = 0, \dots, 40\} \cup \{C_i \,|\, i = 0, \dots, 30\}$, dată de punctele $A_i = (i+10, 0)$, $i = 0, 1, \dots, 50$, $B_i = (0, i+30)$, $i = 0, 1, \dots, 40$, $C_i = (-i, -i)$, $i = 0, 1, \dots, 30$. Determinaţi numărul de triunghiuri şi numărul de muchii ale unei triangulări a lui $\mathcal{M}$.

4.2. (Seminar 5, Problema 5) Daţi un exemplu de mulţime din $\mathbb{R}^2$ care să admită o triangulare având 6 triunghiuri şi 11 muchii.

4.3. (Seminar 5, Problema 6) În $\mathbb{R}^2$ fie punctele $P_1 = (1,7)$, $P_2 = (5,7)$, $P_3 = (7,5)$, $P_4 = (1,3)$, $P_5 = (5,3)$, $P_6 = (\alpha-1, 5)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutaţi, în funcţie de α, numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulţimii $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

4.4 Fie $n \geq 2$ un număr natural par fixat. Considerăm mulţimea

$$\mathcal{M} = \{A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n, C_0, \dots, C_n, D_0, \dots, D_n\},$$

unde $A_i = (i,0)$, $B_i = (0,i)$, $C_i = (i,i)$, $D_i = (n-i, i)$, pentru orice $i = 0, \dots, n$. Determinaţi numărul de triunghiuri şi numărul de muchii ale unei triangulări a lui $\mathcal{M}$.

4.5 Daţi exemplu de mulţime de puncte din $\mathbb{R}^2$ care să admită o triangulare având 3 triunghiuri şi 7 muchii.

4.6 Daţi exemplu de mulţime $\mathcal{M}$ cu 6 elemente din $\mathbb{R}^2$ care să admită o triangulare ce conţine 12 muchii, iar una dintre submulţimile sale cu 4 elemente să admită o triangulare ce conţine 5 muchii. Justificaţi alegerea făcută.

4.7 Fie punctele $A = (1,1), B = (1,-1), C = (-1,-1), D = (-1,1),\ E = (0,-2), M = (0,\lambda)$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$ este un parametru real. Discutaţi în funcţie de λ numărul de triunghiuri şi numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulţimii $\{A,B,C,D,E,M\}$.

4.8 a) Daţi exemplu de mulţime de puncte $\mathcal{M}$ din $\mathbb{R}^2$ care admite o triangulare ce conţine exact şase muchii. Precizaţi numărul de feţe din triangularea respectivă.

b) Formulaţi şi justificaţi un rezultat care să caracterizeze mulţimile cu proprietatea că admit o triangulare ce conţine exact şase muchii.

5. Diagrame Voronoi. Triangulări Delaunay

5.1. (Seminar 7, Problema 1) Daţi exemplu de mulţime $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ din $\mathbb{R}^2$ astfel ca diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M}$ să conţină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ să conţină exact cinci semidrepte. Justificaţi alegerea făcută.

5.2. (Seminar 7, Problema 2) a) Fie o mulţime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalităţile

$$n_v \leq 2n - 5, \qquad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei şi n_m este numărul de muchii al acesteia.

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi $\mathcal{D}$ asociată unei mulţimi cu cinci puncte din $\mathbb{R}^2$ ştiind că $\mathcal{D}$ are exact cinci semidrepte? Analizaţi toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5$)? Justificaţi!

5.3. (Seminar 7, Problema 3) Fie punctele $O = (0,0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1,1)$, $C = (2,0)$, $D = (1,-1)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutaţi, în funcţie de α, numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulţimii $\{O,A,B,C,D\}$.

5.4 Determinaţi, folosind metoda diagramelor Voronoi, triangularea Delaunay pentru mulţimea formată din punctele $A = (3,5)$, $B = (6,6)$, $C = (6,4)$, $D = (9,5)$ şi $E = (9,7)$.

5.5 Determinaţi numărul de semidrepte conţinute în diagrama Voronoi asociată mulţimii de puncte $\mathcal{M} = \{A_0, \ldots, A_5, B_0, \ldots, B_5, C_0, \ldots, C_5\}$, unde $A_i = (i+1, i+1)$, $B_i = (-i, i)$ şi $C_i = (0, i)$, pentru $i = 0, \ldots, 5$.

5.6 Fie punctele $A_1 = (5,1), A_2 = (7,-1), A_3 = (9,-1), A_4 = (7,3),\ A_5 = (11,1), A_6 = (9,3)$. Daţi exemplu de mulţime de două puncte $\{A_7, A_8\}$ cu proprietatea că diagrama Voronoi asociată mulţimii $\{A_1, \ldots, A_8\}$ are exact 4 muchii de tipul semidreaptă (explicaţi construcţia făcută).

5.7 a) Daţi exemplu de mulţime cu 5 puncte $\mathcal{M}$ din planul $\mathbb{R}^2$ aşa încât diagrama Voronoi asociată să aibă 4 vârfuri. Indicaţi numărul muchiilor de tip semidreaptă.

b) Daţi exemplu de mulţimi $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$ din planul $\mathbb{R}^2$, fiecare dintre ele cu 5 puncte, aşa încât diagramele Voronoi asociate să aibă acelaşi număr de muchii de tip semidreaptă, dar numărul total de muchii să fie diferit.

5.8 a) Daţi exemplu de mulţimi $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ din $\mathbb{R}^2$, fiecare având câte 4 puncte, astfel ca, pentru fiecare dintre ele, diagrama Voronoi asociată să conţină exact 3 semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ să conţină exact 4 semidrepte.

b) Se dau două mulţimi $\mathcal{M}_1$ şi $\mathcal{M}_2$ din $\mathbb{R}^2$, fiecare având câte 4 puncte, astfel ca, pentru fiecare dintre ele, diagrama Voronoi asociată să conţină exact 3 semidrepte. Câte semidrepte poate avea diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$? Enumeraţi (şi justificaţi) toate variantele posibile.

5.9 În $\mathbb{R}^2$ considerăm punctele $A = (1, 1)$, $B = (1, -1)$, $C = (-1, -1)$, $D = (-1, 1)$, $E = (\lambda, \lambda)$, $F = (1, \mu)$, cu $\lambda \in [-1, 1]$ şi $\mu \in \mathbb{R}$. Discutaţi, în funcţie de λ şi μ câte muchii de tip semidreaptă are diagrama Voronoi asociată mulţimii $\{A, B, C, D, E, F\}$.

6 Dualitate

6.1. (Seminar 7, Problema 4) (i) Fie punctul $A = (1, 2)$. Alegeţi două drepte distincte d, g care trec prin A, determinaţi dualele A^*, d^*, g^* şi verificaţi că A^* este dreapta determinată de punctele d^* şi g^*.

(ii) Determinaţi duala următoarei configuraţii: *Fie patru drepte care trec printr-un acelaşi punct M. Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M şi se consideră dreapta determinată de cele două puncte.* Desenaţi ambele configuraţii. Completaţi configuraţia iniţială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obţineţi o configuraţie autoduală (i.e. configuraţia duală să aibă aceleaşi elemente geometrice şi aceleaşi incidenţe ca cea iniţială).

6.2 Fie punctul $p = (-1, 1)$; dreapta $d : (y = 3x + 4)$. Verificaţi că $p \in d$ şi că $d^* \in p^*$.

6.3 Fie punctele $p_1 = (2, 5)$; $p_2 = (1, 6)$. Scrieţi ecuaţia dreptei p_1p_2 şi detaliaţi (cu calcule explicite!) configuraţia din planul dual.

6.4 Fie dreapta $d : (y = 2x + 1)$ şi $p = (1, 8)$. Verificaţi că p este deasupra lui d şi că d^* este deasupra lui p^*.

6.5 (i) Fie dreapta $d : (y = 2x - 3)$. Alegeţi două puncte distincte $P, Q \in d$, determinaţi dualele d^*, P^*, Q^* şi verificaţi că $\{d^*\} = P^* \cap Q^*$.

(ii) Determinaţi duala următoarei configuraţii: *Fie trei drepte care trec prin acelaşi punct M; pe fiecare dreaptă se ia câte un punct (diferit de M), astfel ca aceste puncte să fie coliniare.*

6.6 Fie dreapta $d : x = y - 1$. Alegeţi două puncte distincte P, Q pe d, determinaţi dualele d^*, P^*, Q^* şi verificaţi că d^* este punctul de intersecţie a dreptelor P^* şi Q^*.

6.7 Fie configuraţia: *trei drepte care trec prin acelaşi punct; pe fiecare dreaptă se alege un punct, diferit de punctul comun al celor trei drepte.* Descrieţi configuraţia duală. Desenaţi!

7 Intersecţii de semiplane. Elemente de programare liniară

7.1. (Seminar 7, Problema 5) a) Fie semiplanele $H : x+y-3 \leq 0$ şi $H' : -2x+y+1 \leq 0$. Daţi exemplu de semiplan H'' astfel ca intersecţia $H \cap H' \cap H''$ să fie un triunghi dreptunghic.

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 date de inecuaţiile

$$H_1 : -y+1 \leq 0; \qquad H_2 : y-5 \leq 0; \qquad H_3 : -x \leq 0; \qquad H_4 : x-y+a \leq 0,$$

unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutaţi, în funcţie de parametrul a, natura intersecţiei $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

7.2. (Seminar 7, Problema 6) Scrieţi inecuaţiile semiplanelor corespunzătoare şi studiaţi intersecţia acestora, dacă normalele exterioare ale feţelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0,1,-1),\ (0,1,0),\ (0,0,-1),\ (0,-1,0),\ (0,-1,-1).$$

7.3 Considerăm două "piese" poligonale $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$, având normalele feţelor standard date de vectorii:

$$\mathcal{P}_1:\ \nu_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2});\ \nu_2 = (1,0);\ \nu_3 = (0,1);\ \nu_4 = (-1,0);\ \nu_5 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2});$$

$$\mathcal{P}_2:\ \nu_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2});\ \nu_2 = (1,0);\ \nu_3 = (0,1);\ \nu_4 = (-1,0);\ \nu_5 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

(în această ordine). Stabiliţi care dintre piese poate fi extrasă din matriţa asociată prin deplasare în direcţia verticală - dată de $(0,1)$. Desenaţi!

7.4 Considerăm semiplanele H_λ, H', H'' date de inecuaţiile

$$H_\lambda : \quad x-y-\lambda \leq 0\ (\lambda \in \mathbb{R}), \quad H' : x-1 \geq 0, \quad H'' : y-5 \geq 0.$$

Discutaţi, în funcţie de λ, natura intersecţiei $H_\lambda \cap H' \cap H''$.

7.5 Daţi exemplu de cinci semiplane, dintre care trei semiplane inferioare şi două superioare, astfel încât intersecţia lor să fie un triunghi.

7.6 Daţi exemplu de problemă de programare liniară pentru care regiunea fezabilă să fie un pătrat, iar optimul (maximul) să fie atins în colţul din dreapta sus.

7.7 Daţi exemplu de problemă de programare liniară pentru care algoritmul prezentat la curs să aibă (în sensul discuţiei de la curs) timp total de rulare liniar.

7.8 Discutaţi, în funcţie de α şi de β, numărul de vârfuri şi de muchii ale regiunii fezabile pentru problema de programare liniară dată de constrângerile $x+y \geq 0$; $x-y \geq 0$; $y \leq 4$; $y \geq \alpha$; $x \leq \beta + 4$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

8 Hărţi trapezoidale

8.1 Considerăm un pătrat având laturile paralele cu axele de coordonate, în interiorul căruia se află un alt pătrat, astfel ca laturile sale să facă un unghi de 30° cu axele de coordonate. Stabiliţi câte trapeze are harta trapezoidală a regiunii situate între cele două pătrate. Câte dintre acestea sunt degenerate?

8.2 Fie punctele $A = (1, 1)$, $B = (2, 6)$, $C = (5, 3)$, $D = (4, 7)$, $E = (8, 4)$, $F = (10, 7)$, $G = (6, 9)$, considerate în interiorul dreptunghiului R delimitat de axele de coordonate şi de dreptele date de ecuaţiile $x = 12$, respectiv $y = 12$. Câte trapeze are harta trapezoidală asociată subdiviziunii planare induse de triunghiul ABC şi patrulaterul $DEFG$?

8.3 Considerăm două triunghiuri T_1 şi T_2 (astfel ca laturile lor să fie segmente în poziţie generală), în interiorul unui *bounding box* R. Câte trapeze are harta trapezoidală asociată? Depinde acest număr de poziţia relativă a triunghiurilor?

8.4 Considerăm pătratul $\mathcal{P}$ delimitat de dreptele $x = \pm 10$, $y = \pm 10$ (*bounding box*) şi punctele $A = (2, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (-2, 0)$, $D = (0, \lambda)$, cu $\lambda \in [-9, 9]$. Fie $\mathcal{Q}$ acoperirea convexă a mulţimii $\{A, B, C, D\}$. Discutaţi, în funcţie de λ, numărul de trapeze ale hărţii trapezoidale a regiunii situate între pătratul $\mathcal{P}$ şi poligonul $\mathcal{Q}$.