Algoritmi Avansați
Seminar 2

Gabriel Majeri

1 Introducere

În seminarul trecut am discutat principalele tipuri de probleme computaționale și am văzut că, pentru unele probleme, putem calcula în mod eficient soluția optimă. În acest seminar vom investiga câteva probleme dificile din punct de vedere computațional, pe care nu le putem rezolva în mod eficient și pentru care putem cel mult să obținem rapid o soluție **aproximativă** [1].

2 Exerciții

1. (Vertex cover [2]) Problema acoperirii unui graf (neorientat) ne cere să găsim o **submulțime de noduri din graf** astfel încât orice muchie din graf să fie învecinată cu (cel puțin) un nod din această mulțime. Problema de optimizare asociată implică găsimea mulțimii de cardinal **minim**.

În cele ce urmează, vom presupune că avem un graf cu n și m muchii, reprezentat prin liste de adiacență.

1. Fiind dată o mulțime de noduri dintr-un graf, cum ați **verifica** că mulțimea dată este o acoperire? Ce complexitate de timp are soluția propusă?

   Soluție: Dacă graful este reprezentat sub forma unor liste de adiacență, putem parcurge mulțimea de noduri date ca „soluție”, iar pentru fiecare nod îi ștergem vecinii din lista de adiacență (și pe el din listele vecinilor lui). La final, verificăm dacă toate listele de adiacență sunt vide.

   Complexitatea de timp este cel mult $\mathcal{O}(n^2)$, deoarece soluția poate avea cel mult n noduri, iar fiecare nod are cel mult $n-1$ vecini (am presupus că „listele” de adiacență sunt de fapt stocate ca *set*-uri, deci ștergerile se fac în timp $\mathcal{O}(1)$). □

2. Propuneți o soluție de tip brute-force care să rezolve problema (i.e. să verifice toate submulțimile posibile de noduri). Ce complexitate de timp are soluția?

   Soluție: Putem genera toate submulțimile posibile de noduri din graf (exceptând-o pe cea vidă), urmând apoi să le verificăm cu algoritmul descris mai sus. Această soluție are o complexitate de timp $\mathcal{O}(2^n)$ (timp *exponențial*). □

3. Să presupunem că alegeți o muchie aleatoare din graf, cu capetele u și v. Având în vedere că într-o soluție (optimă) a problemei *vertex cover* trebuie „atinse” toate muchiile, ce puteți spune despre nodurile u și v în raport cu mulțimea de noduri care constituie soluția (optimă)?

   Soluție: Cel puțin unul dintre u sau v va fi în soluția finală. Altfel, nu ar fi acoperită muchia uv. □

4. Ne gândim la următorul algoritm pentru a construi o soluție la problema acoperirii:

   (a) Inițial, acoperirea noastră este mulțimea vidă $\emptyset$.

   (b) Cât timp mai sunt muchii neacoperite în graf:

      i. Luăm (aleator) orice muchie din graf.

      ii. Includem capetele muchiei în mulțimea care va reprezenta acoperirea noastră.

      iii. Ștergem toate muchiile incidente la cele două noduri menționate.

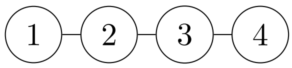
   (c) Mulțimea de noduri construită este soluția la problema noastră.

   Acest algoritm construiește o soluție *aproximativă* la problema de optim pe care vrem să o rezolvăm; în unele cazuri, s-ar putea să fie posibil să construim o acoperire folosind mai puține noduri.

   Determinați factorul de aproximare al acestui algoritm, dați un exemplu când algoritmul obține soluția optimă și unul în care obține soluția cea mai proastă în raport cu soluția optimă.

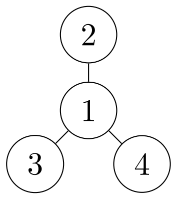
Soluție: Algoritmul prezentat este 2-aproximativ.

Un exemplu în care algoritmul obține soluția optimă este un graf liniar cu 4 noduri:



Dacă algoritmul alege muchia dintre 2 și 3, o să se oprească imediat, găsind soluția optimă formată din două noduri.

Un exemplu în care algoritmul obține o soluție de două ori mai proastă decât cea optimă este următorul:



Orice muchie ar alege, algoritmul construiește o soluție formată din două noduri, deși ar putea acoperi tot graful alegând unul singur (pe cel central). □

2. (Maximum cut [3]) Fiind dat un graf neorientat (V, E), problema tăieturii maxime ne cere să găsim o **submulțime de noduri din graf**, astfel încât numărul de muchii care o leagă pe aceasta de complementul ei să fie maxim. Cu alte cuvinte, vrem două mulțimi de noduri A și B, cu $A \cup B = V$ și $A = V \setminus B$.

Această probleme are aplicații în fizica statistică și în proiectarea de circuite electronice [4].

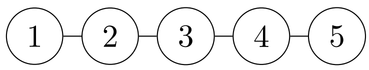
Un algoritm aproximativ care rezolvă problema, descris în [5], este următorul:

1. Alegem aleator două noduri diferite din graf, v_1 și v_2.
2. Inițializăm $A := \{ v_1 \}$, $B := \{ v_2 \}$.
3. Cât timp mai sunt noduri care nu se află nici în A, nici în B:
   (a) Luăm aleator un astfel de nod.
   (b) Dacă are mai multe muchii care duc către A decât muchii care duc către B, îl punem în B; altfel, în A.
4. Soluția finală sunt mulțimile A și B.

Determinați ce **complexitate de timp** are algoritmul propus, ce **factor de aproximare** oferă și dați un **exemplu** în care soluția aproximativă găsită de algoritm este cea mai îndepărtată de soluția optimă.

Soluție: Complexitatea de timp a algoritmului dat este $\mathcal{O}(n^2)$ (dacă reținem listele de adiacență ca niște *set*-uri, putem calcula foarte eficient intersecția dintre vecinii unui nod și cele două mulțimi A și B).

Algoritmul descris este $\frac{1}{2}$-aproximativ. Un exemplu în care soluția găsită este de două ori mai proastă decât cea optimă poate fi:



Dacă algoritmul alege la început să-l facă pe nodul 1 să aparțină lui A și pe 3 lui B, iar apoi continuă aleator cu 5 (pe care îl pune în A), atunci și 2 și 4 vor ajunge tot în A, iar tăietura va cuprinde doar două muchii: 2–3 și 3–4. În schimb, soluția optimă ar fi ca nodurile să alterneze de la stânga la dreapta, obținând astfel patru muchii în tăietură. □

Referințe

[1] Wikipedia contributors, *Approximation algorithm*, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Approximation_algorithm.

[2] Wikipedia contributors, *Vertex cover*, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Vertex_cover.

[3] Wikipedia contributors, *Maximum cut*, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_cut.

[4] Francisco Barahona et al., „An Application of Combinatorial Optimization to Statistical Physics and Circuit Layout Design”, în *Operations Research* 36.3 (1988), pp. 493–513, URL: http://www.jstor.org/stable/170992.

[5] Vijay V. Vazirani, *Approximation algorithms*, Springer, 2001, ISBN: 978-3642084690.