Algoritmi avansați

C10 - Triangularea mulțimilor de puncte

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

Triangularea unei mulțimi arbitrare de puncte

Problematizare

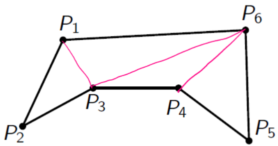
- Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).

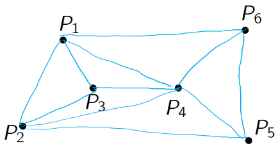
Problematizare

- Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).
- Are sens să vorbim de triangulare pentru mulțimea $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$?

Problematizare

- Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).
- Are sens să vorbim de triangulare pentru <u>mulțimea</u> $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$?
- **Exemplu:**





- **În cele ce urmeaza vom considera doar mulțimi de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.**

Problematizare

- **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi $\mathcal{P}$ este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ a lui $\mathcal{P}$ cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui $\mathcal{P}$ (fără autointersecții!)

Problematizare

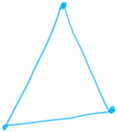
- **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi $\mathcal{P}$ este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ a lui $\mathcal{P}$ cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui $\mathcal{P}$ (fără autointersecții!)
- Trebuie făcută distincție între triangulare a unui poligon $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ și triangulare a mulțimii subdiacente $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (coincid dacă poligonul este convex!)

Problematizare

- **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi $\mathcal{P}$ este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ a lui $\mathcal{P}$ cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui $\mathcal{P}$ (fără autointersecții!)
- Trebuie făcută distincție între triangulare a unui poligon $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ și triangulare a mulțimii subdiacente $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (coincid dacă poligonul este convex!)
- **Comentariu:** Triangulările mulțimilor de puncte sunt esențiale în grafica pe calculator.

Exemple

(i) 3 puncte necoliniare

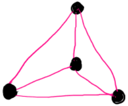


3 vârfuri
3 muchii
1 față

Exemple

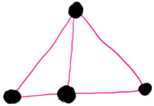
(ii) 4 puncte necoliniare, nesituate toate pe o aceeași dreaptă

a



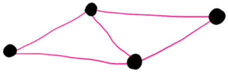
4 vârfuri
6 muchii
3 fețe (3 Δ)

b



4 vârfuri
5 muchii
2 fețe (2 Δ)

c



4 vârfuri
5 muchii
2 fețe (2 Δ)

Elemente ale unei triangulări

- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.

Elemente ale unei triangulări

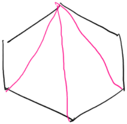
- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.
- Legătură cantitativă între aceste elemente?

Elemente ale unei triangulări

- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.
- Legătură cantitativă între aceste elemente?
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de n puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$. Orice triangulare a lui $\mathcal{P}$ are $(2n-k-2)$ triunghiuri și $(3n-k-3)$ muchii.*

Elemente ale unei triangulări

- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.
- Legătură cantitativă între aceste elemente?
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de n puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe* $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$. *Orice triangulare a lui $\mathcal{P}$ are* $(2n-k-2)$ *triunghiuri și* $(3n-k-3)$ *muchii.*
- **Exemplu:** Cazul unui poligon convex: un poligon convex cu n vârfuri poate fi triangulat cu $(n-2)$ triunghiuri, având $(2n-3)$ muchii.

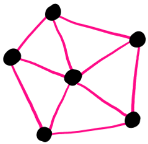


$n=6$

4 $\triangle$

9 muchii

Demonstrație



<u>Graf</u>:

<u>nodurile</u>: punctele inițiale (n)

<u>muchiile</u>: laturile Δ $(n_m = ?)$

<u>fețele</u>: fețele Δ + fața exterioară $(\underset{\overset{\parallel}{?}}{n_t} + 1)$

- <u>Relația lui Euler</u>: $n - n_m + (n_t + 1) = 2$ $\Rightarrow \dots$
- <u>Incidențe dintre muchii și fețe</u> $\Rightarrow \dots$

$$\underbrace{2 \cdot n_m}_{\text{"perspectiva muchiilor"}} = \underbrace{\overset{\text{ptr. }\Delta}{3 \cdot n_t} + \overset{\text{ptr. fața exterioară}}{k}}_{\text{"perspectiva fețelor"}}$$

$n_m = \dots$

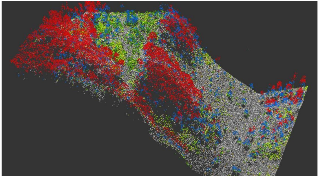
$n_t = \dots$

Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitidinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.

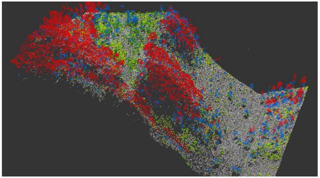
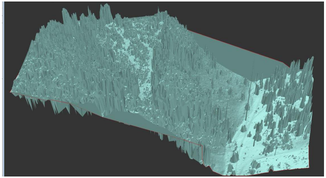
Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitidinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.



Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitidinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.

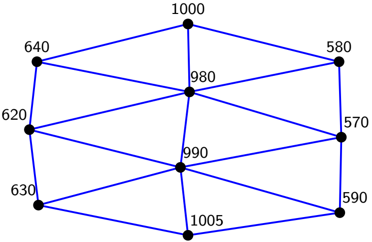



Problematizare - continuare

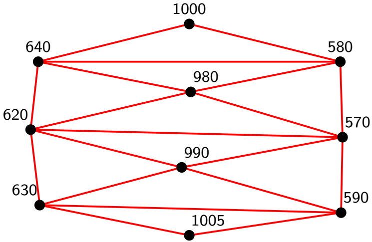
- **Problemă (reformulată).** Cum ”comparăm triangulările” unei mulțimi de puncte fixate?

Problematizare - continuare

- **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?
- **Exemplu.** Măsurători ale altitudinii.



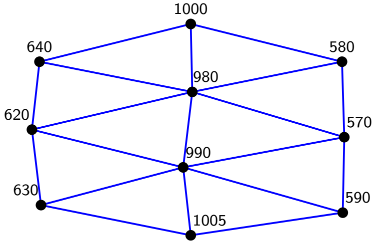
Triangulare 1



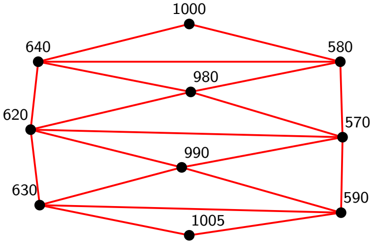
Triangulare 2

Problematizare - continuare

- **Problemă (reformulată).** Cum ”comparăm triangulările” unei mulțimi de puncte fixate?
- **Exemplu.** Măsurători ale altitudinii.



Triangulare 1



Triangulare 2

- **Întrebări naturale:** (i) Există o triangulare “convenabilă” a unei mulțimi de puncte? (ii) Cum poate fi determinată eficient o astfel de triangulare?

Terminologie, triangulări legale

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$. **În cele ce urmează vom presupune că $\mathcal{P}$ este o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.**

Terminologie, triangulări legale

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$. **În cele ce urmează vom presupune că $\mathcal{P}$ este o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.**
- Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$ cu m triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m}$ unghiurile lui $\mathcal{T}$, ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui $\mathcal{T}$ este** $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m})$.

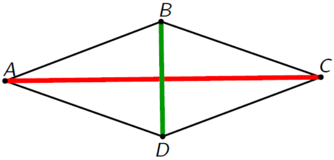
Terminologie, triangulări legale

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$. **În cele ce urmează vom presupune că $\mathcal{P}$ este o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.**
- Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$ cu m triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m}$ unghiurile lui $\mathcal{T}$, ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui $\mathcal{T}$ este** $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m})$.
- **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui $\mathcal{P}$:** ordinea lexicografică pentru vectorii unghiurilor. Fie $\mathcal{T}$ și $\mathcal{T}'$ două triangulări ale lui $\mathcal{P}$. Atunci $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$ dacă $\exists i$ astfel ca $\alpha_j = \alpha'_j$, $\forall 1 \leq j < i$ și $\alpha_i > \alpha'_i$.

Terminologie, triangulări legale

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$. **În cele ce urmează vom presupune că $\mathcal{P}$ este o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.**
- Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$ cu m triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m}$ unghiurile lui $\mathcal{T}$, ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui $\mathcal{T}$ este** $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m})$.
- **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui $\mathcal{P}$:** ordinea lexicografică pentru vectorii unghiurilor. Fie $\mathcal{T}$ și $\mathcal{T}'$ două triangulări ale lui $\mathcal{P}$. Atunci $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$ dacă $\exists i$ astfel ca $\alpha_j = \alpha'_j$, $\forall 1 \leq j < i$ și $\alpha_i > \alpha'_i$.
- **Triangulare unghiular optimă:** $\mathcal{T}$ astfel ca $A(\mathcal{T}) \geq A(\mathcal{T}')$, pentru orice triangulare $\mathcal{T}'$.

Exemplu - cazul unui patrulater convex



diagonala AC

$\Rightarrow \Delta BAC$ şi ΔDAC

diagonala BD

$\rightarrow \Delta ABD$ şi ΔCBD

diagonala AC $\Rightarrow$ vectorul unghiurilor (α)

BD $\Rightarrow$ — „ — (β)

$\alpha < \beta$

"cel mai mic unghi care apare în triangularea dată de AC este <u>mai mic</u> decât cel mai mic unghi care apare în triangularea dată de BD".