FMI, Info, Anul II, 2021-2022
Fundamentele Limbajelor de Programare

Seminar 3
Puncte fixe

Teorie pentru S3.1:

O *mulţime parţial ordonată (mpo)* este o pereche $(M, \leq)$ unde $\leq \subseteq M \times M$ este o relaţie de ordine (i.e., reflexivă, antisimetrică, tranzitivă). O mulţime parţial ordonată $(C, \leq)$ este *completă (cpo)* dacă C are prim element $\bot$ ($\bot \leq x$ oricare $x \in C$) şi $\bigvee_n x_n$ există în C pentru orice lanţ $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$.

Fie $(C, \leq_C)$ o mulţime parţial ordonată. Un element $a \in C$ este *punct fix* al unei funcţii $f : C \to C$ dacă $f(a) = a$. Un element $lfp \in C$ este *cel mai mic punct fix* al unei funcţii $f : C \to C$ dacă este punct fix şi pentru orice alt punct fix $a \in C$ al lui f avem $lfp \leq_C a$.

(S3.1) Care sunt punctele fixe ale următoarelor funcţii? Indicaţi cel mai punct fix.

1) $f_1 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\}),\ f_1(Y) = Y \cup \{1\}$.

2) $f_2 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\}),\ f_2(Y) = \begin{cases} \{1\} & \text{dacă } 1 \in Y \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$.

3) $f_3 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\}),\ f_3(Y) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } 1 \in Y \\ \{1\} & \text{altfel} \end{cases}$.

Teorie pentru S3.2:

Fie $(A, \leq_A)$ şi $(B, \leq_B)$ mulţimi parţial ordonate. O funcţie $f : A \to B$ este *monotonă (crescătoare)* dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare $a_1, a_2 \in A$.

O *clauză definită propoziţională* este o formulă care poate avea una din formele:

- q (clauză unitate)
- $p_1 \wedge \ldots \wedge p_k \to q$

unde $q, p_1, \ldots, p_n$ sunt variabile propoziţionale.

Fie S o mulţime de clauze definite propoziţionale. Fie A mulţimea variabilelor propoziţionale $p_1, p_2, \ldots$ care apar în S şi $Baza = \{p_i \mid p_i \in S\}$ mulţimea clauzelor unitate din S. Definim funcţia $f_S : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ prin

$$f_S(Y) = Y \cup Baza \cup \ \{a \in A \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a) \text{ este în } S, s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\}$$

(S3.2) Arătaţi că funcţia f_S este monotonă.

Teorie pentru S3.3, S3.4 şi S3.5:

Fie $(A, \leq_A)$ şi $(B, \leq_B)$ mulţimi parţial ordonate complete. O funcţie $f : A \to B$ este *continuă* dacă $f(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n f(a_n)$ pentru orice lanţ $\{a_n\}_n$ din A. Observăm că orice funcţie continuă este crescătoare.

Pentru orice mulţime de clauze definite propoziţionale S, funcţia f_S este continuă.

Teorema 1 (Knaster-Tarski)**.** *Fie* $(C, \leq)$ *o mulţime parţial ordonată completă şi* $\mathbf{F} : C \to C$ *o funcţie continuă. Atunci*

$$a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp)$$

este cel mai mic punct fix al funcţiei $\mathbf{F}$.

(S3.3) Calculaţi cel mai mic punct fix pentru functia f_{S_i}, $i \in \{1, 2, 3\}$, pentru următoarele mulţimi de clauze definite propoziţionale:

1) $S_1 = \{x_1 \wedge x_2 \to x_3,\ x_4 \wedge x_2 \to x_5,\ x_2,\ x_6,\ x_6 \to x_1\}$.

2) $S_2 = \{x_1 \wedge x_2 \to x_3,\ x_4 \to x_1,\ x_5 \to x_2,\ x_2 \to x_5,\ x_4\}$.

3) $S_3 = \{x_1 \to x_2,\ x_1 \wedge x_3 \to x_1,\ x_3\}$.