Laborator/Seminar FLP
Recapitularea Logicii propozitionale

Doua abordari:
- semantica;
- sintaxa.

Semantica - adevar, tautologie.
Sintaxa - teorema, o propozitie poate fi demonstrata.

$\models$ pentru semantica
$\vdash$ pentru sintaxa

|= φ inseamna φ tautologie
|- φ inseamna φ demonstrabila sau φ teorema

In logica propozitionala, pentru a verifica daca o formula φ este tautologie, este suficient sa ii construim tabelul de adevar.

```
p | ¬p  p q | p /\ q  p q | p \/ q  p q | p → q
------  ------------  ------------  ------------
0 | 1   0 0 |    0    0 0 |   0     0 0 |   1
1 | 0   0 1 |    0    0 1 |   1     0 1 |   1
        1 0 |    0    1 0 |   1     1 0 |   0
        1 1 |    1    1 1 |   1     1 1 |   1
```

e : Var → {0, 1}
e+ : Form → {0, 1} extinde functia e pe formule

e+(v) = e(v)
e+(p /\ q) = e+(p) /\ e+(q)
e+(p → q) + e+(p) → e+(q)

Ce inseamna ca φ este tautologie?
- are 1 pe toata coloana;

Ce inseamna ca φ este satisfiabila?
- are cel putin un 1 pe coloana.

Exercitiul 1: Aratati ca urmatoarea formula este o tautologie.

```
(v1 \/ v2 → v3) ⟷ (v1 → v3) /\ (v2 → v3)
        A       ⟷       B
```

Cate variabile propozitionale am?

3
Cate linii am in tabelul de adevar?
2^3 = 8

v1	v2	v3	v1 \/ v2	A	v1 → v3	v2 → v3	B	A ⟷ B
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Pe coloana A ⟷ B am obtinut doar 1, ceea ce inseamna ca formula A ⟷ B este o tautologie.

Exercitiul 2 - deductia naturala

```
a) (p /\ q) /\ r, s /\ t ⊢ q /\ s
                         simbol
                         sintactic
    <-------------------->
       secvent
```

Demonstrez ca
(p /\ q) /\ r, s /\ t
este un secvent valid pentru
q /\ s

asta inseamna

Formula q /\ s se poate demonstra din ipotezele
(p /\ q) /\ r
s /\ t
utilizand sistemul deductiei naturale.

Demonstratie:

(1)	(p /\ q) /\ r	ipoteza
(2)	s /\ t	ipoteza
(3)	p /\ q	/\e1(1)
(4)	q	/\e2(3)

```
(5) s                                       /\e1(2)
(6) q /\ s                                  /\i(4, 5)
```

b) p, ¬¬(q /\ r) ⊢ ¬¬p /\ r

```
(1) p                                       ipoteza
(2) ¬¬(q /\ r)                              ipoteza
(3) ¬¬p                                     ¬¬i(1)
(4) q /\ r                                  ¬¬e(2)
(5) r                                       /\e2(4)
(6) ¬¬p /\ r                                /\i(3, 5)
```

c) p /\ q → r ⊢ p → (q → r)

```
(1) p /\ q → r                              ipoteza
(2) | p                                     asumptie
(3) | | q                                   asumptie
(4) | | p /\ q                              /\i(2, 3)
(5) | | r                                   →e(1, 4)
(6) | q → r                                 →i(3-5)
(7) p → (q → r)                             →i(2-6)
```

d) p /\ (q \/ r) ⊢ (p /\ q) \/ (p /\ r)

```
(1) p /\ (q \/ r)                           ipoteza
(2) p                                       /\e1(1)
(3) q \/ r                                  /\e2(1)
(4) | q                                     asumptie
(5) | p /\ q                                /\i(2, 4)
(6) | (p /\ q) \/ (p /\ r)                  \/i1(5)
    -----------------------
(7) | r                                     asumptie
(8) | p /\ r                                /\i(2, 7)
(9) | (p /\ q) \/ (p /\ r)                  \/i2(8)
    ------------------------
(10) (p /\ q) \/ (p /\ r)                   \/e(3, 4-6, 7-9)
```

e) p → q, p → ¬q ⊢ ¬p

```
(1) p → q                                   ipoteza
(2) p → ¬q                                  ipoteza
(3) | p                                     asumptie
(4) | q                                     →e(1, 3)
```

(5) | ¬q	→e(2, 3)
(6) | ⊥	¬e(4,5)
(7) ¬p	¬i(3-6)

Exercitiul 3

Sa se demonstreze urmatoarele reguli in deductia naturala:

```
p → q    ¬q
------------- MT
     ¬p
```

modus tollens

```
| ¬p  |
| ... |
| ⊥   |
-------- RAA
   p
```

reductio ad absurdum

a) p → q, ¬q ⊢ ¬p

(1) p → q	ipoteza
(2) ¬q	ipoteza
(3) | p	asumptie
(4) | q	→e(1, 3)
(5) | ⊥	¬e(2, 4)
(6) ¬p	¬i(3-5)

b) ¬p → ⊥ ⊢ p

(1) ¬p → ⊥	ipoteza
(2) | ¬p	asumptie
(3) | ⊥	→e(1,2)
(4) ¬¬p	¬i(2-3)
(5) p	¬¬e(4)

Exercitiul 4

Fie $n \geqslant 1$ si $\varphi1, ..., \varphi n, \varphi$ formule. Demonstrati ca

$\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\dots \to (\varphi_n \to \varphi) \dots))$

atunci

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$.

Solutie:

Adaugam, pe rand, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ca secventi valizi si aplicam mereu regula de $\to$e.

Pasul 1: adaug φ_1 ca secvent valid.

(1)	φ_1	ipoteza Pas1
(2)	$\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\dots \to (\varphi_n \to \varphi) \dots))$	ipoteza
(3)	$(\varphi_2 \to (\dots \to (\varphi_n \to \varphi) \dots))$	$\to$e(1, 2)

asta inseamna ca

$\varphi_1 \vdash \varphi_2 \to (\dots \to (\varphi_n \to \varphi) \dots)$

Pasul 2: adaug φ_2 ca sevent valid ...

Dupa n-1 pasi, obtin ca

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi(n-1) \vdash \varphi_n \to \varphi$

Il adaug pe φ_n ca secvent valid

(1)	φ_n	ipoteza Pas n
(2)	$\varphi_n \to \varphi$	ipoteza
(3)	φ	$\to$e(1, 2)

Si obtin ca

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$

Exercitiul 5

Sa se scrie reguli de introducere si eliminare a echivalentei logice in deductia naturala.

```
⟷i ⟷e

p ⟷ q ~ (p → q) /\ (q → p)

| p   |  | q   |
| ... |  | ... |
| q   |  | p   |          p ⟷ q     p           p ⟷ q     q
----------------- ⟷i     -------------- ⟷e1    -------------- ⟷e2
    p ⟷ q                       q                        p
```

Exercitiul 6

(i1) Toti scriitorii care inteleg natura umana sunt intelepti.
(i2) Un scriitor care este poet adevarat poate trezi sentimente puternice.
(i3) Shakespeare este scriitorul care a scris "Hamlet".
(i4) Un scriitor care trezeste sentimente puternice intelege natura umana.
(i5) Numai un poet adevarat putea scrie "Hamlet".

Shakespeare este intelept.

Solutie:

p /\ q → r ~ p → (q → r)

(i1) Scriitor /\ NaturaUmana → Intelept
(i2) Scriitor → (PoetAdevarat → SentimentePuternice)
(i3) Shakespeare → Scriitor /\ Hamlet
(i4) Scriitor → (SentimentePuternice → NaturaUmana)
(i5) Hamlet → PoetAdevarat
(c) Shakespeare → Intelept

```
   ⊢ S → C
(1) W /\ HN → C                                  ipoteza
(2) W → (Poet → SP)                              ipoteza
(3) S → W /\ H                                   ipoteza
(4) W → (SP → HN)                                ipoteza
(5) H → Poet                                     ipoteza
(6) | S                                          asumptie
(7) | W /\ H                                     →e(3, 6)
(8) | W                                          /\e1(7)
(9) | H                                          /\e2(7)
(10)| SP → HN                                    →e(8, 4)
```

```
(11)| Poet → SP                         →e(8, 2)
(12)| Poet                              →e(9, 5)
(13)| SP                                →e(11, 12)
(14)| HN                                →e(10, 13)
(15)| W /\ HN                           /\i(8, 14)
(16)| C                                 →e(1, 15)
(17) S → C
```