

# CAPITOLO 5

## La teoria del rinnovo

### 1 Il processo dei rinnovi

La teoria del rinnovo prende origine dallo studio di sistemi costituiti da componenti soggette al rinnovo. Questa teoria è applicabile alla teoria dell'affidabilità ogni qualvolta si studiano sistemi composti da elementi che possono essere sostituiti dopo un guasto. Infatti, la sequenza dei guasti, ovvero delle sostituzioni, determina un processo di rinnovo. In termini formali, si ha la seguente definizione.

**Definizione 1** Un processo di rinnovo è costituito da una successione di variabili aleatorie non negative  $X_1, X_2, \dots$  indipendenti ed identicamente distribuite che non sono tutte nulle con probabilità unitaria.

Consideriamo un'apparecchiatura che inizia a funzionare all'istante iniziale  $t = 0$ , all'istante  $t_1$  si guasta per la prima volta. Supponiamo che il pezzo venga sostituito istantaneamente con un altro funzionante identico al primo, ossia con le stesse caratteristiche del precedente. Immaginiamo che all'istante  $t_2$  si verifichi un secondo guasto e, ancora una volta il pezzo venga sostituito istantaneamente con un altro identico. Possiamo pensare che, col trascorrere del tempo, si verificheranno altri guasti con la conseguente sostituzione istantanea del pezzo guasto con un altro identico. Si viene così a definire una successione di istanti di tempi  $t_1, t_2, \dots$  che sono ovviamente aleatori.

Da quanto osservato si deduce che durante il periodo di funzionamento di un'apparecchiatura si possono individuare degli istanti di tempo, detti istanti di rinnovo, durante i quali si verificano delle sostituzioni di pezzi che si sono guastati con altri pezzi identici. Supponiamo che le sostituzioni siano istantanee, tale ipotesi permette di trascurare i tempi necessari alla riparazione delle apparecchiature focalizzando l'attenzione sugli istanti di rinnovo.

Il tempo che intercorre tra due istanti successivi di rinnovo rappresenta la “durata”, o tempo di vita, dell'elemento sostituito. Relativamente alla  $i$ -esima sostituzione, denotando con  $X_i$  la variabile aleatoria che rappresenta la durata dell'elemento  $i$ -esimo, si ha che

$$X_i = t_i - t_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots$$

Pertanto, accanto alla successione degli istanti di tempi  $t_1, t_2, \dots$ , possiamo considerare la successione delle variabili aleatorie  $X_1, X_2, \dots$  caratterizzate dalle seguenti specifiche:

- per definizione sono non negative ed assolutamente continue,
- sono indipendenti in quanto la durata di ogni pezzo non è influenzata dalla durata degli altri pezzi utilizzati nelle varie sostituzioni,

- sono identicamente distribuite infatti la sostituzione si effettua con pezzi “identici”.

Quindi, la successione dei periodi di funzionamento  $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$  costituisce una famiglia di variabili aleatorie assolutamente continue con indici discreti. In altri termini,  $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$  definisce un processo stocastico caratterizzato da spazio degli stati continuo e insieme degli indici discreto.

La generica variabile  $X_i$  è caratterizzata da una funzione di distribuzione  $F(t) = \mathbb{P}(X_i \leq t)$ , indipendente da  $i$ , e da una corrispondente funzione densità di probabilità  $f(t) = dF(t)/dt$ .

La somma  $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$  delle prime  $k$  variabili è una variabile aleatoria che rappresenta l'istante in cui si verifica la  $k$ -esima sostituzione del pezzo. La distribuzione di  $S_k$  può essere determinata a partire dalla legge di probabilità delle  $X_i$  facendo uso della convoluzione  $k$ -esima. Come condizione iniziale assumiamo che  $S_0$  sia una variabile aleatoria degenere caratterizzata da funzione di ripartizione nulla fino a  $t = 0$  e unitaria per  $t$  maggiore o uguale a zero. Con tale assunzione, se le variabili  $X_i$  sono assolutamente continue, è possibile individuare la funzione densità di probabilità di  $S_i$ :

$$f^{(1)}(t) = f(t), \quad f^{(2)}(t) = \int_0^t f^{(1)}(t - \tau)f(\tau)d\tau, \quad \dots \quad f^{(n)}(t) = \int_0^t f^{(n-1)}(t - \tau)f(\tau)d\tau$$

dove “ $(k)$ ” rappresenta la convoluzione  $k$ -esima. Inoltre, per le funzioni di distribuzione risulta che

$$F^{(1)}(t) = F(t), \quad F^{(2)}(t) = \int_0^t F^{(1)}(t - \tau)dF(\tau), \quad \dots \quad F^{(n)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t - \tau)dF(\tau).$$

## 2 Il processo “conteggio dei rinnovi”

Consideriamo il sistema descritto precedentemente ed osserviamone il funzionamento nell'intervallo di tempo compreso tra l'istante iniziale ( $t = 0$ ) ed un generico istante  $t$  allo scopo di individuare il numero di pezzi complessivamente sostituiti.

Denotiamo con  $N(t)$  il numero di rinnovi che si sono verificati complessivamente nell'intervallo di tempo  $(0, t)$ .  $N(t)$  coincide, ovviamente, con il numero di guasti che si sono verificati in  $(0, t)$ , si tratta di una variabile aleatoria che dipende dall'ampiezza dell'intervallo di tempo in esame. Al variare di  $t$ ,  $N(t)$  descrive un processo stocastico discreto nello spazio degli stati e continuo nel tempo.

I processi  $\{N(t); t \geq 0\}$  e  $\{X_i(t); i = 1, 2, \dots\}$  sono strettamente connessi poiché valgono le seguenti relazioni:

- $\{N(t) = 0\} = \{S_1 > t\} = \{X_1 > t\}$ .

Infatti, se fino all'istante  $t$  non è stato necessario effettuare alcuna sostituzione allora il primo guasto si è verificato dopo l'istante  $t$ .

Inoltre si ha:

$$\mathbb{P}[N(t) = 0] = \mathbb{P}[X_1 > t] = 1 - F(t).$$

- $\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$ ,

ciò segue osservando che se fino all'istante  $t$  sono stati sostituiti non meno di  $n$  pezzi allora il guasto  $n$ -esimo si è verificato in un istante precedente a  $t$ . Pertanto si ha:

$$\mathbb{P}[N(t) \geq n] = \mathbb{P}[S_n \leq t] = F^{(n)}(t).$$

Inoltre risulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N(t) = n] &= \mathbb{P}[N(t) \geq n] - \mathbb{P}[N(t) \geq n+1] = \mathbb{P}[S_n \leq t] - \mathbb{P}[S_{n+1} \leq t] \\ &= \mathbb{P}[X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t] - \mathbb{P}[X_1 + X_2 + \dots + X_{n+1} \leq t] = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t). \end{aligned}$$

Indichiamo con  $\mu = \mathbb{E}[X_k]$  l'ampiezza media degli intervalli di tempo intercorrenti tra due rinnovi successivi,  $\mu$  rappresenta quindi la durata media della  $k$ -esima componente. Visto che, per definizione le variabili  $X_k$  sono non negative ne segue che  $\mu > 0$ .

**Proposizione 1** In un intervallo di tempo di ampiezza finita  $t$  non può verificarsi un numero infinito di rinnovi.

**Dimostrazione** Osserviamo che

$$N(t) = \max\{k : S_k \leq t\},$$

dove  $S_k$  rappresenta l'ampiezza dell'intervallo di tempo che intercorre dall'istante iniziale fino al  $k$ -esimo guasto. Per la legge forte dei grandi numeri  $S_k/k$  converge a  $\mu$  quasi certamente, così che si ha:

$$\mathbb{P}\left[\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{k} = \mu\right] = 1.$$

Poiché  $\mu > 0$  si ha che, al crescere di  $k$ ,  $S_k$  e  $k$  devono crescere con la stessa velocità. Pertanto, se  $t$  è finito,  $S_k \leq t$  si può verificare al più per un numero finito  $k$  il che significa che  $N(t)$  deve essere finito.

**Osservazione 1** Sebbene  $N(t)$  sia finito per ogni  $t$  finito, risulta che  $N(t)$  è infinito quasi certamente per ogni  $t$  infinito.

**Dimostrazione** Osserviamo che facendo uso della disuguaglianza di Boole si ha:

$$\mathbb{P}[N(\infty) < \infty] = \mathbb{P}[X_n = \infty \text{ per qualche } n] \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[X_n = \infty] = 0.$$

### 3 La funzione di rinnovo

Visto che  $F(t)$  è una funzione non degenera nel punto  $t = 0$ , possiamo concludere dicendo che  $N(t)$  ha momenti finiti di ogni ordine. In particolare, il valor medio di  $N(t)$  rappresenta la funzione di rinnovo  $H(t)$ :

$$H(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}[N(t) = k].$$

Questa funzione gioca un ruolo centrale nella teoria del rinnovo per le sue molteplici applicazioni. Essa può essere espressa in termini delle convoluzioni  $F^{(n)}(t)$ . Infatti, ricordando la relazione esistente tra la distribuzione di  $N(t)$  e quella di  $S_k(t)$ , si ha che

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} k [F^{(k)}(t) - F^{(k+1)}(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k F^{(k)}(t) - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) F^{(k)}(t) \\ &= F^{(1)}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} F^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t). \end{aligned}$$

Inoltre, ricordando la definizione di integrale di convoluzione, segue anche che

$$H(t) = F^{(1)}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} F^{(k)}(t) = F(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k+1)}(t) = F(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t F^{(k)}(t-\tau) dF(\tau).$$

Confrontando le due ultime relazioni segue

$$\begin{aligned} H(t) &= F^{(1)}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} F^{(k)}(t) = F(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k+1)}(t) = F(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t F^{(k)}(t-\tau) dF(\tau) \\ &= \int_0^t dF(\tau) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t-\tau) dF(\tau) \end{aligned}$$

da cui possiamo dedurre l'**equazione fondamentale del rinnovo**:

$$H(t) = \int_0^t [1 + H(t-\tau)] dF(\tau).$$

La funzione di rinnovo  $H(t)$  determina univocamente il processo dei rinnovi. In particolare, esiste una corrispondenza biunivoca tra  $H(t)$  e le distribuzioni degli istanti di tempo in cui si verificano i guasti.

Sia  $(t_1, t_2)$  un intervallo di tempo. La differenza  $H(t_2) - H(t_1)$  rappresenta il numero medio di rinnovi che si verificano nell'intervallo considerato; dividendo tale differenza per  $t_2 - t_1$  si ottiene la frequenza media dei rinnovi in  $(t_1, t_2)$ .

Facendo uso di tale considerazione possiamo definire la densità dei rinnovi:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(t + \Delta t) - H(t)}{\Delta t} = \frac{dH(t)}{dt}.$$

Se le variabili  $X_i$  sono assolutamente continue allora  $F$  è una distribuzione assolutamente continua; in tal caso si ha:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(t)$$

da cui segue che

$$h(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(t) dt;$$

ciascun termine di quest'ultima somma approssima la probabilità che si verifichi il  $k$ -esimo guasto nell'intervallo  $(t, t + dt)$ . Infatti risulta:

$$f^{(k)}(t) dt \simeq dF^{(k)}(t) = F^{(k)}(t + dt) - F^{(k)}(t) = \mathbb{P}(t < S_k \leq t + dt).$$

Quindi,  $f^{(k)}(t) dt$  rappresenta la probabilità che in  $(t, t + dt)$  si presenti il  $k$ -esimo guasto. Da ciò segue che  $h(t) dt$  rappresenta la probabilità che in  $(t, t + dt)$  si presenti un guasto che può essere il primo, il secondo,  $\dots$ .

Osserviamo inoltre che dall'equazione di rinnovo, se  $F(x)$  è assolutamente continua, derivando rispetto a  $t$  è possibile ottenere una relazione per la densità di rinnovo:

$$h(t) = f(t) + \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

## 4 Caso esponenziale

Precedentemente abbiamo considerato alcune caratteristiche della distribuzione esponenziale che svolgono un ruolo rilevante nella teoria dell'affidabilità. Vogliamo ora analizzare le relazioni esistenti tra la teoria dei rinnovi e le variabili esponenziali.

A tale scopo consideriamo un sistema che può guastarsi per cause aleatorie. Una volta che un elemento è andato fuori uso viene sostituito con un altro identico. Assumiamo che le variabili aleatorie  $X_i$  che rappresentano gli intervalli di tempo che intercorrono tra due guasti successivi siano indipendenti e di distribuzione esponenziale con parametro  $\lambda$ , pertanto  $\mathbb{E}(X_i) = 1/\lambda$ . Vogliamo studiare la successione dei tempi  $S_n$ , ovviamente aleatori, in cui si verificano le sostituzioni. A tale scopo osserviamo che

$$S_1 = X_1, \quad S_2 = X_1 + X_2, \quad \dots, \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Le variabili aleatorie  $S_n$  sono, quindi, la somma di  $n$  variabili indipendenti ed identicamente distribuite secondo la legge esponenziale di parametro  $\lambda$ , pertanto  $S_n$  risulta distribuita con legge di Erlang caratterizzata da parametri  $n$  e  $\lambda$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia ora  $N_t$  il numero di rinnovi registrati durante l'intervallo di tempo  $(0, t)$ . Risulta:

$$\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(S_1 > t) = \exp\{-\lambda t\}, \quad \mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(S_n < t)$$

da cui, per  $n = 1, 2, \dots$ , si ha:

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n + 1) = \mathbb{P}(S_n < t) - \mathbb{P}(S_{n+1} < t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp\{-\lambda t\}.$$

In altri termini, il numero di rinnovi nell'intervallo  $(0, t)$  segue la legge di Poisson di parametro  $\lambda t$ . Quindi  $N_t$  è un processo di Poisson. In questo caso la funzione di rinnovo è lineare in  $t$  infatti risulta:

$$H(t) \equiv \mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{(j)!} e^{-\lambda t} = \lambda t = \frac{t}{\mu},$$

dove  $\mu = 1/\lambda = \mathbb{E}[X_i]$  è la media degli intervalli di tempo tra un guasto e l'altro.

Osserviamo esplicitamente che il processo di Poisson è l'unico processo di rinnovo caratterizzato da una funzione di rinnovo lineare. Il numero medio di rinnovi in uno specificato intervallo di tempo si può facilmente calcolare visto che

$$\mathbb{E}[N_{t+\delta}] - \mathbb{E}[N_t] = H(t+\delta) - H(t) = \frac{t+\delta}{\mu} - \frac{t}{\mu} = \frac{\delta}{\mu}.$$

## 5 Comportamento asintotico

Come visto precedentemente, il processo  $N(t)$  tende all'infinito con la stessa velocità di  $t$  quasi certamente. Vogliamo ora determinare il rate con cui ciò avviene. Più precisamente risulta:

**Proposizione 2** Assumiamo che la funzione di distribuzione  $F$  sia caratterizzata da media  $\mu$ , si ha che

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{\mu}.$$

Il valore  $1/\mu$  è detto tasso del processo di rinnovo.

**Dimostrazione** Supponiamo che  $\mu$  sia finito e consideriamo la variabile aleatoria  $S_{N(t)}$  che rappresenta il tempo dell'ultimo rinnovo che si è avuto prima di  $t$  o all'istante  $t$  stesso. Inoltre,  $S_{N(t)+1}$  rappresenta l'istante in cui si è avuto il primo rinnovo dopo  $t$ . Risulta che

$$S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1}$$

da cui, dividendo per  $N(t)$  si ha:

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}.$$

Poiché

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

si deduce che  $S_{N(t)}/N(t)$  rappresenta la media aritmetica di  $N(t)$  variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite. Inoltre, facendo uso della legge forte dei grandi numeri segue:

$$\mathbb{P} \left[ \lim_{N(t) \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \mu \right] = \mathbb{P} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \mu \right] = 1.$$

Inoltre, quasi certamente risulta anche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \frac{N(t)+1}{N(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)+1}{N(t)} = \mu \cdot 1.$$

Pertanto, poiché  $S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1}$ , segue che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$$

da cui si deduce che quasi certamente si ha:

$$\mu \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} \leq \mu,$$

e quindi la tesi.

**Osservazione 2** La Proposizione 2 vale anche quando  $\mu$ , il tempo medio tra i rinnovi, è infinito. In questo caso il tasso del processo di rinnovo è nullo.

Quindi, dalla Proposizione 2 si ha che  $H(t)/t \rightarrow 1/\mu$  quasi certamente, ossia quasi certamente accade che  $H(t) \sim t/\mu$ . Pertanto, se  $F$  è assolutamente continua risulta che

$$\frac{H(t+\epsilon) - H(t)}{\epsilon} \sim \frac{\epsilon}{\epsilon\mu} \implies h(t) \rightarrow \frac{1}{\mu}.$$

Si giunge così al seguente

**Teorema elementare del rinnovo** Se  $F$  è una distribuzione di probabilità assolutamente continua di media  $\mu$  allora la densità dei rinnovi  $h(t)$  converge quasi certamente a  $1/\mu$  (se  $\mu$  diverge  $1/\mu$  è assunto nullo).

## 6 Il processo di rinnovo compensato

Sia  $N(t)$  un processo di rinnovo e sia  $X_n$  l'ampiezza dell'intervallo di tempo tra l'( $n-1$ )-esimo rinnovo e il successivo. Supponiamo che ogni rinnovo sia soggetto ad un “compenso” nel senso che ogni volta che si verifica un rinnovo si riceve un compenso che può essere anche negativo. Denotiamo con  $R_n$  la variabile aleatoria che rappresenta il compenso ricevuto all' $n$ -esimo rinnovo ( $n = 1, 2, \dots$ ). Assumiamo che tali compensi siano indipendenti ed identicamente distribuiti anche se in qualche modo dipenderanno dall' $n$ -esimo intervallo di rinnovo. Denotando con  $\varrho(t)$  il compenso totale ricevuto fino all'istante  $t$ , ovviamente si ha:

$$\varrho(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \varrho_n.$$

Sia  $\varrho$  una variabile caratterizzata dalla stessa distribuzione delle variabili  $\varrho_n$  e sia  $X$  una variabile distribuita come le  $X_n$ .

**Proposizione 3** Se  $\varrho$  e  $X$  hanno media finita allora

$$\frac{\varrho(t)}{t} \longrightarrow \frac{\mathbb{E}[\varrho]}{\mathbb{E}[X]} \quad q.c.$$

**Dimostrazione** Osserviamo che

$$\frac{\varrho(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} \varrho_n}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} \varrho_n}{N(t)} \frac{N(t)}{t}.$$

Inoltre, per la legge forte dei grandi numeri si ha

$$\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} \varrho_n}{N(t)} \longrightarrow \mathbb{E}[\varrho] \quad q.c.$$

e per la Proposizione 2 risulta:

$$\frac{N(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu} \quad q.c.$$

dove  $\mu = \mathbb{E}[X]$ . Così che si può concludere che

$$\frac{\varrho(t)}{t} \longrightarrow \frac{\mathbb{E}[\varrho]}{\mathbb{E}[X]} \quad q.c.$$

Osserviamo che  $\varrho(t)/t$  rappresenta il compenso medio su un intervallo di tempo di ampiezza  $t$ . Pertanto, assumendo che un ciclo sia la durata dell'intervallo di tempo tra un rinnovo e l'altro, dalla Proposizione 3 possiamo concludere che il compenso medio su un lungo intervallo di tempo converge quasi certamente al rapporto tra il valor medio del compenso ricevuto ad ogni rinnovo e la lunghezza media del ciclo.

## 7 L'età media di un processo di rinnovo

Consideriamo un processo di rinnovo e denotiamo con  $F$  la distribuzione delle variabili  $X_i$  che rappresentano l'ampiezza degli intervalli tra un rinnovo e l'altro. Assumiamo che ad ogni guasto l'elemento in uso sia sostituito da un altro nuovo e denotiamo con  $A(t)$  l'età dell'elemento in uso all'istante  $t$ . Poiché  $S_{N(t)}$  rappresenta l'istante in cui si è verificato l'ultimo rinnovo prima di  $t$ , si ha che  $A(t) = t - S_{N(t)}$ . L'età media del processo di rinnovo è:

$$E = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t A(s) ds}{t}.$$

Per valutare il limite che compare nella definizione di  $E$  utilizziamo la teoria del rinnovo compensato. Infatti, l'età del processo ad un fissato tempo può essere interpretata come il compenso ricevuto ad un determinato tasso. Con questa interpretazione, l'integrale rappresenta il guadagno totale fino all'istante  $t$ . Pertanto, dalla Proposizione 3 segue:

$$\frac{\int_0^t A(s) ds}{t} \longrightarrow \frac{\mathbb{E}[\varrho]}{\mathbb{E}[X]} \quad q.c.$$

dove  $\mathbb{E}[\varrho]$  rappresenta il compenso medio durante un ciclo di rinnovo e  $\mathbb{E}[X]$  è la durata media di un ciclo di rinnovo. Osserviamo che l'età del processo di rinnovo all'istante  $t$  durante un ciclo di rinnovo di durata  $X$  è proprio  $t$  così che si ha:

$$\text{Compenso durante un ciclo di rinnovo} = \int_0^X t dt = \frac{X^2}{2},$$



da cui segue che

$$E = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t A(s) ds}{t} = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{2\mathbb{E}[X]}.$$

**Osservazione 3** Risulta che

- $\mathbb{P}[A(t) \leq t] = \mathbb{P}[t - S_{N(t)} \leq t] = \mathbb{P}[S_{N(t)} \geq 0] = 1$
- $\mathbb{P}[A(t) = t] = \mathbb{P}[S_{N(t)} = 0] = 1 - F(t).$

## 8 Vita residua media di un processo di rinnovo

Un'altra quantità di interesse nello studio di un processo di rinnovo è la durata della vita residua dell'elemento in uso all'istante  $t$ , questa quantità, denotata con  $E(t)$ , è definita come l'eccesso del tempo residuo all'istante  $t$ . L'eccesso del tempo residuo all'istante  $t$  rappresenta, quindi, l'intervallo di tempo a partire dall'istante  $t$  necessario per registrare il prossimo rinnovo. Denotiamo con  $\mathbb{E}_m$  il valore medio di  $E(t)$ , si ha

$$\mathbb{E}_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t E(s) ds}{t},$$

così che  $\mathbb{E}_m$  può essere valutato usando la teoria del rinnovo compensato. Infatti, supponendo di pagare all'istante  $s$  un compenso pari ad  $E(s)$ , segue che

$$E_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t E(s) ds}{t} = \frac{\mathbb{E}[\text{Compenso durante un ciclo}]}{\mathbb{E}[\text{Lunghezza di un ciclo}]}$$

Sia  $X$  la lunghezza di un ciclo di rinnovo, si ha:

$$\text{Compenso durante un ciclo} = \int_0^X (X - s) ds = \frac{X^2}{2}.$$

Pertanto, risulta

$$\mathbb{E}_m = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{2\mathbb{E}[X]}.$$

In altri termini la vita media residua coincide con l'età media del processo di rinnovo.

## 9 Limitazioni della funzione di rinnovo

L'obiettivo di questo paragrafo è di fornire delle limitazioni generali alla funzione di rinnovo. Ricordiamo che nel caso esponenziale il numero medio di rinnovi in uno specificato intervallo di tempo di ampiezza  $h$  è facilmente calcolabile e risulta dato dal rapporto  $h/\mu$  dove  $\mu$  rappresenta la durata della vita media. Intuitivamente possiamo pensare che questo risultato valga asintoticamente per un processo di rinnovo. In altri termini, possiamo pensare che il risultato del

caso esponenziale valga più in generale sempre che sia trascorso un tempo sufficientemente lungo. Questo è il punto di partenza per un teorema della teoria del rinnovo valido per variabili aleatorie non periodiche.

Una variabile aleatoria si dice periodica se esiste un reale  $h > 0$  tale che

$$\mathbb{P}[X = nh, n \geq 0] = 1$$

altrimenti si dice non periodica.

**Teorema 2 (Teorema di Blackwell)** Sia  $F$  la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria non periodica di media  $\mu$ , risulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H(t+s) - H(t)] = \frac{s}{\mu}$$

**Lemma 1** Siano  $F_1$ ,  $F_2$  e  $Q$  funzioni tali da soddisfare le seguenti condizioni:

- a)  $F_1(0) = F_2(0)$ ,
- b)  $F_1(x) \geq F_2(x)$  per  $0 \leq x \leq t$ ,
- c)  $Q(x) \geq 0$  è non crescente in  $[0, t]$ .

Se gli integrali esistono, risulta che

$$\int_0^t F_1(x) d[-Q(x)] \geq \int_0^t F_2(x) d[-Q(x)].$$

**Dimostrazione** Supponendo che sia consentita l'integrazione per parti si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^t Q(x) dF_i(x) &= Q(t)F_i(t) - \lim_{x \rightarrow 0} Q(x)F_i(x) - \int_0^t F_i(x) dQ(x) \\ &= Q(t)F_i(t) - \lim_{x \rightarrow 0} Q(x)F_i(x) + \int_0^t F_i(x) d[-Q(x)]. \end{aligned}$$

Osserviamo che, da a) e da b) segue:

$$\lim_{x \rightarrow 0} Q(x) F_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} Q(x) F_2(x).$$

Infine, ricordando c) si ha

$$Q(t) F_1(t) + \int_0^t F_1(x) d[-Q(x)] \geq Q(t) F_2(t) + \int_0^t F_2(x) d[-Q(x)],$$

da cui, ricordando b), segue la tesi.

**Teorema 3** Se  $F$  è IFR, allora

$$H(h) \leq H(t+h) - H(t).$$

**Corollario 1** Sia  $F$  è una distribuzione IFR non periodica con media  $\mu$ , risulta

$$H(s) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} [H(t+s) - H(t)] = \frac{s}{\mu}.$$

## 10 Il problema delle parti di ricambio

Il problema delle parti di ricambio è abbastanza frequente; consiste nel determinare il numero delle parti di ricambio da predisporre affinché con probabilità  $p$  un sistema rimanga in esercizio per  $t$  ore.

Consideriamo un sistema composto da  $n$  elementi contenuti in altrettanti alloggi e supponiamo che se un elemento si guasta venga sostituito immediatamente.

Denotiamo con  $N_j(t)$  il numero di guasti che si registrano nell'alloggio  $j$ -esimo prima di  $t$ . Osserviamo che, nel momento in cui le sostituzioni sono istantanee,  $N_j(t)$  coincide con il numero di rinnovi che si registrano nell'alloggio  $j$ -esimo prima di  $t$ . Pertanto, il numero di ricambi necessari ad un fissato istante di tempo è esattamente uguale al numero di guasti verificatisi fino a quell'istante.

Denotiamo con  $t_j$  l'ampiezza dell'intervallo di tempo durante il quale l'alloggio  $j$ -esimo è rimasto in funzione. Fissato un livello di probabilità  $p$ , vogliamo determinare il più piccolo intero  $N$  tale che

$$\mathbb{P}[N_1(t_1) + N_2(t_2) + \dots + N_n(t_n) \leq N] \geq p.$$

Assumiamo che le variabili aleatorie che rappresentano i tempi di funzionamento di ciascun elemento, ossia i tempi di vita di ciascun elemento, siano indipendenti ed esponenzialmente distribuiti con parametro  $\lambda$ ; in questo caso  $N_1(t_1) + N_2(t_2) + \dots + N_n(t_n)$  è una variabile di Poisson con parametro  $\vartheta = \lambda \sum_j t_j$ ; quindi

$$\mathbb{P}[N_1(t) + N_2(t) + \dots + N_n(t) \leq N] = \sum_{j=0}^N \frac{\vartheta^j e^{-\vartheta}}{j!}.$$

Più in generale, assumiamo che  $F$  sia IFR, ossia assumiamo che  $F$  sia caratterizzata da frequenza di guasto crescente, con media  $1/\lambda$ . Se  $t_i < 1/\lambda$  per ogni  $i$  si ha:

$$\mathbb{P}[N_1(t) + N_2(t) + \dots + N_n(t) \leq N] \geq \sum_{j=0}^N \frac{\vartheta^j e^{-\vartheta}}{j!},$$

dove  $\vartheta = \lambda \sum_j t_j$ . Questa osservazione può essere utilizzata per predisporre un numero adeguato di ricambi evitando così, con alta probabilità, di rimanerne sprovvisti.

## 11 Algoritmo per la determinazione della funzione di rinnovo

Come visto precedentemente, per valutare la funzione di rinnovo è necessario valutare la convoluzione  $n$ -esima della funzione di distribuzione:  $F^{(n)}(t)$ . Visto che questa valutazione coinvolge un integrale ad  $n$  dimensioni, ci proponiamo di individuare un algoritmo che avendo in input un integrale unidimensionale ci fornisca il risultato richiesto.

Sia  $Y$  una variabile aleatoria esponenziale di parametro  $\lambda$  indipendente dal processo di rinnovo  $N(t)$ . Calcoliamo il numero medio di rinnovi fino all'istante aleatorio  $Y$ , ossia  $\mathbb{E}[N(Y)]$ . Effettuando un condizionamento sull'istante di primo rinnovo si ha:

$$\mathbb{E}[N(Y)] = \int_0^\infty \mathbb{E}[N(Y)|X_1 = x] f(x) dx, \quad (1)$$

dove  $f(x)$  rappresenta la densità di probabilità degli istanti di guasto.

Per determinare  $\mathbb{E}[N(Y)|X_1 = x]$  osserviamo che se  $Y < x$  il primo rinnovo si verifica dopo l'istante  $x$  per cui il numero medio di rinnovi in questo caso è nullo:

$$\mathbb{E}[N(Y)|X_1 = x, Y < x] = 0 \quad (\text{il primo guasto si è avuto dopo } Y).$$

Inoltre, quando  $Y > x$  si ha:

$$\mathbb{E}[N(Y)|X_1 = x, Y > x] = 1 + \mathbb{E}[N(Y)] \quad (\text{dove si è fatto uso dell'assenza di memoria}) \quad (2)$$

visto che un primo rinnovo si è avuto all'istante  $x$  e, per l'assenza di memoria si ha che  $Y - x$  è ancora esponenziale. Pertanto, facendo uso dell'indipendenza  $Y$  e  $X_1$  risulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(Y)|X_1 = x] &= \mathbb{E}[N(Y)|X_1 = x, Y < x] \mathbb{P}[Y < x|X_1 = x] \\ &+ \mathbb{E}[N(Y)|X_1 = x, Y > x] \mathbb{P}[Y > x|X_1 = x] \equiv \mathbb{E}[N(Y)|X_1 = x, Y > x] \mathbb{P}[Y > x]. \end{aligned}$$

Ricordando che  $\mathbb{P}[Y > x] = \exp\{-\lambda x\}$  e la relazione (2), segue che

$$\mathbb{E}[N(Y)|X_1 = x] = \{1 + \mathbb{E}[N(Y)]\} \exp\{-\lambda x\}.$$

Pertanto, dalla (1) si ottiene:

$$\mathbb{E}[N(Y)] = \{1 + \mathbb{E}[N(Y)]\} \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x) dx \equiv \{1 + \mathbb{E}[N(Y)]\} \mathbb{E}[e^{-\lambda X}],$$

cioè

$$\mathbb{E}[N(Y)] \{1 - \mathbb{E}[e^{-\lambda X}]\} = \mathbb{E}[e^{-\lambda X}].$$

Quindi,

$$\mathbb{E}[N(Y)] = \frac{\mathbb{E}[\exp\{-\lambda X\}]}{1 - \mathbb{E}[\exp\{-\lambda X\}]} \quad (3)$$

dove  $X$  ha la stessa distribuzione dei tempi tra un guasto e l'altro.

Scegliendo  $\lambda = 1/t$ , la relazione (3) rappresenta un'espressione per calcolare il numero medio di rinnovi che si verificano non più in  $(0, t)$  ma in un intervallo di tempo aleatorio di ampiezza  $Y$  che è stata assunta esponenziale di media  $t$  e varianza  $t^2$ .

Consideriamo ora  $n$  variabili aleatorie  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  indipendenti tra loro e dal processo di rinnovo e supponiamo che siano distribuite come  $Y$ . Denotiamo con

$$m_r = \mathbb{E}[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r] \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

Per determinare  $m_r$  ragioniamo come fatto precedentemente per  $\mathbb{E}[N(Y)]$ , quindi condizioniamo su  $X_1$ :

$$m_r = \int_0^\infty \mathbb{E}[N(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r) | X_1 = x] f(x) dx.$$

Condizioniamo sul numero di somme parziali  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) che sono minori di  $x$ . Se tutte le somme parziali sono minori di  $x$ , cioè se  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r < x$ , allora il numero di rinnovi in quell'istante è nullo. D'altra parte, visto che  $k$  di queste somme parziali ( $k < r$ ) sono minori di  $x$ , per l'assenza di memoria della distribuzione esponenziale, il numero di rinnovi all'istante  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$  risulterà pari a  $1 + N(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r)$ . In definitiva si ha:

$$\mathbb{E}[S_{N(t)+1} | X_1 = x] = \begin{cases} g(t - x) + x, & x < t \\ x, & x > t. \end{cases}$$

Per determinare la distribuzione delle somme parziali minori di  $x$  osserviamo che per  $j = 1, 2, \dots, r$  le somme  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_j$  sono assimilabili ai primi  $j$  eventi di un processo di Poisson di parametro  $\lambda$ ; infatti, ogni somma parziale è data dalla precedente più la variabile “nuova” che è indipendente dalle precedenti ed identicamente distribuita in modo esponenziale con parametro  $\lambda$ . Pertanto, se  $k < r$  si ha:

$$\mathbb{P} \left[ k \text{ delle somme } \sum_{i=1}^j Y_i < x | X_1 = x \right] = \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!}.$$

Facendo uso degli ultimi due risultati segue che

$$m_r = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{r-1} (1 + m_{r-k}) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!} f(x) dx$$

o, equivalentemente

$$m_r = \frac{\sum_{k=1}^{r-1} (1 + m_{r-k}) E[X^k e^{-\lambda X}] \frac{\lambda^k}{k!} + E[e^{-\lambda X}]}{1 - E[e^{-\lambda X}]} \quad (4)$$

Per  $\lambda = n/t$  possiamo calcolare  $m_1$  dalla relazione (3) e successivamente utilizzare la (4) per la valutazione ricorsiva di  $m_2, m_3, \dots, m_n$ .

L'approssimazione di  $m(t) = \mathbb{E}[N(t)]$  è data da  $m_n = \mathbb{E}[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n]$ .

La somma  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  è una variabile aleatoria distribuita secondo la legge di Erlang con media  $t \equiv nt/n$ . Scegliendo  $n$  sufficientemente grande per la legge dei grandi numeri la media campionaria delle  $Y_i$  converge a  $t$  così che il suo valor medio sarà proprio  $\mathbb{E}[N(t)]$ .