

CAPITOLO 4

Distribuzioni di probabilità di interesse nella teoria dell'affidabilità

1 Andamento della frequenza istantanea di guasto $r(t)$

L'andamento nel tempo del failure rate $r(t)$ è particolarmente utile soprattutto se si è interessati alla legge che descrive la distribuzione dei guasti. La rappresentazione grafica di un andamento tipico della funzione frequenza di guasto è generalmente ottenuta attraverso metodi di natura statistico-sperimentale che, ad esempio, possono consistere nell'osservare il comportamento nel tempo di lotti costituiti da uno stesso numero N di dispositivi messi in funzione tutti allo stesso istante di tempo iniziale t e nel rilevare, per ciascuno di essi, gli istanti in cui si verificano i guasti. Tipicamente l'andamento di $r(t)$ è a “vasca da bagno” (cf. Figura 1) ed è rappresentativo di tre diverse fasi che si manifestano durante il funzionamento in tre diversi intervalli di tempo:

- a. *Infanzia*. Questo è il primo periodo di vita di un dispositivo. In questa fase può accadere che la frequenza di guasto sia maggiore che nel periodo successivo a causa, ad esempio, di difetti del processo di fabbricazione. È possibile eliminare questo fenomeno di mortalità infantile tramite una fase di rodaggio (burn-in) che può essere effettuata direttamente in fabbrica ed ha lo scopo di separare gli elementi “sani” da quelli più deboli. La distribuzione cumulativa dei tempi di rottura relativa a questo periodo è una distribuzione caratterizzata da decreasing failure rate (DFR).
- b. *Vita matura*. Terminata la fase precedente, la funzione $r(t)$ si stabilizza intorno ad un valore che si mantiene costante per un certo periodo di tempo. I guasti che si manifestano in questa fase possono ritenersi casuali in quanto si verificano in modo imprevedibile. Questo periodo generalmente è detto vita utile del dispositivo. In questo caso la distribuzione cumulativa dei tempi di rottura è una distribuzione caratterizzata da constant failure rate (CFR) come si verifica per la distribuzione esponenziale.
- c. *Vecchiaia*. In questo periodo si verificano fenomeni legati al processo di invecchiamento e/o usura dei materiali. Pertanto, ai guasti casuali si sommano quelli dovuti all'invecchiamento provocando un'intensificazione con l'aumentare dell'età del dispositivo. In questo caso la distribuzione cumulativa dei tempi di rottura è una distribuzione caratterizzata da increasing failure rate (IFR).

1.1 Distribuzioni tipiche di guasto

L'affidabilità è controllata da alcuni fattori casuali quali la robustezza dei materiali, le operazioni di carico, i parametri di forma, la distribuzione dei difetti, la durata della tensione (stress), le

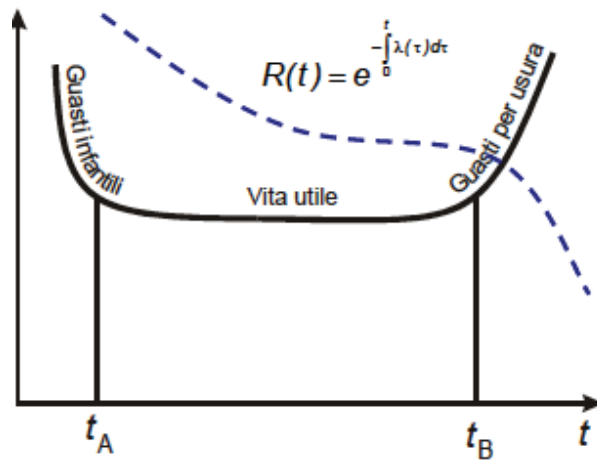


Figure 1: Andamento tipico della funzione frequenza istantanea di guasto.

condizioni di servizio (ad esempio le temperature estreme), effetti ambientali (come la corrosione). Ciascuno dei fattori aleatori che controlla l'affidabilità può essere modellato da una variabile aleatoria discreta o continua che indichiamo con *variabile aleatoria di controllo*. Le variabili di controllo possono essere anche funzioni di altre variabili aleatorie. Ad esempio la robustezza è una variabile di controllo che dipende dalle proprietà del materiale, dalla forma e dalle dimensioni.

La struttura dell'algoritmo per l'analisi dell'affidabilità e del rischio basato sulle variabili aleatorie può essere riassunta nei seguenti passi:

- identificare i fattori di base che controllano l'affidabilità ed il rischio,
- definire le variabili di controllo corrispondenti ai fattori di base,
- selezionare modelli statistici appropriati per le variabili di controllo,
- aggiornare i parametri del modello alla luce delle nuove osservazioni,
- costruire un modello di affidabilità e di rischio che includa i modelli statistici delle variabili di controllo,
- analizzare la qualità del modello e la sua robustezza,
- risolvere il modello utilizzando tecniche analitiche e numeriche,
- individuare i limiti di incertezza dei risultati predetti dal modello con l'uso di tecniche di simulazione (ad esempio il metodo di Monte Carlo) o metodi tipici del calcolo delle probabilità.

La determinazione della legge matematica rappresentativa della distribuzione dei guasti di un determinato dispositivo viene fatta scegliendo la distribuzione che risulta più adeguata a descrivere il sopraggiungere dei guasti del dispositivo, fra quelle principali a disposizione.

Dalle considerazioni fatte a proposito della funzione $r(t)$ si evince che la maggior parte dei dispositivi è caratterizzata da una vita media residua decrescente in t il che implica una frequenza di guasto crescente.

Tra le distribuzioni più utilizzate le principali sono qui di seguito illustrate.

Distribuzioni discrete

Distribuzione binomiale

Consideriamo i seguenti problemi

1. Un sistema di rifornimento di un fluido è costituito da 5 pompe connesse in parallelo che lavorano o si guastano indipendentemente l'una dall'altra. La capacità di ogni pompa è di 10 litri al secondo e l'affidabilità su un anno di funzionamento ininterrotto è 0.85.

Qual è la probabilità che dopo un anno di funzionamento ininterrotto l'uscita totale del sistema sia di almeno 30 litri?

In questo caso risulta evidente che affinché ci sia un rifornimento di almeno 30 litri devono funzionare almeno 3 pompe nell'impianto. Pertanto si ha:

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = \sum_{r=3}^5 \binom{5}{r} 0.85^r (1 - 0.85)^{5-r} \simeq 0.973.$$

2. Più in generale possiamo considerare un sistema composto da n componenti identiche che lavorano indipendentemente l'una dall'altra. Il sistema funziona correttamente solo se almeno m delle componenti lavorano.

Qual è la probabilità che il sistema porti a compimento la sua funzione?

3. Consideriamo un sistema costituito da n componenti che lavorano indipendentemente e, indipendentemente l'una dall'altra possono rompersi con probabilità p .

Qual è la probabilità che tra le n componenti si verifichino meno di r guasti?

4. Un sistema di rilevazione di una particolare sostanza chimica nociva è composto da n dispositivi identici che rilevano la sostanza nociva indipendentemente l'uno dall'altro con probabilità p . Per evitare falsi allarmi si assume che solo se almeno m ($m = 2$) componenti rilevano la presenza della sostanza nociva si aziona un sistema di interruzione.

Qual è la probabilità che il sistema di sospensione si attivi nel caso di rilevamento della sostanza?

Una caratteristica comune ai problemi illustrati è il numero fissato di prove identiche ognuna delle quali fornisce come risultato o un *successo*, corrispondente alla situazione in cui il componente funziona, o un *insuccesso*, che si realizza quando il componente non lavora. Inoltre, le prove sono sempre assunte indipendenti l'una dall'altra. Infatti, ogni componente può lavorare o meno

indipendentemente da ciò che accade agli altri componenti. Infine, la probabilità di successo in ogni prova rimane la stessa.

Queste caratteristiche comuni definiscono un *esperimento binomiale* e il numero di successi in un esperimento di questo tipo segue una *distribuzione binomiale*.

Sia X la variabile aleatoria discreta che conta il numero di successi in un esperimento binomiale, la funzione di probabilità di X è:

$$\mathbb{P}(X = x) = p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, \dots, n \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $0 < p < 1$ e n intero positivo. Osserviamo che risulta:

$$\sum_{r=0}^n p_X(r) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = [p + (1-p)]^n = 1,$$

dove si è fatto uso della formula del binomio di Newton. La Figura 2 mostra la funzione di probabilità di una variabile aleatoria binomiale per diversi valori di p e di n .

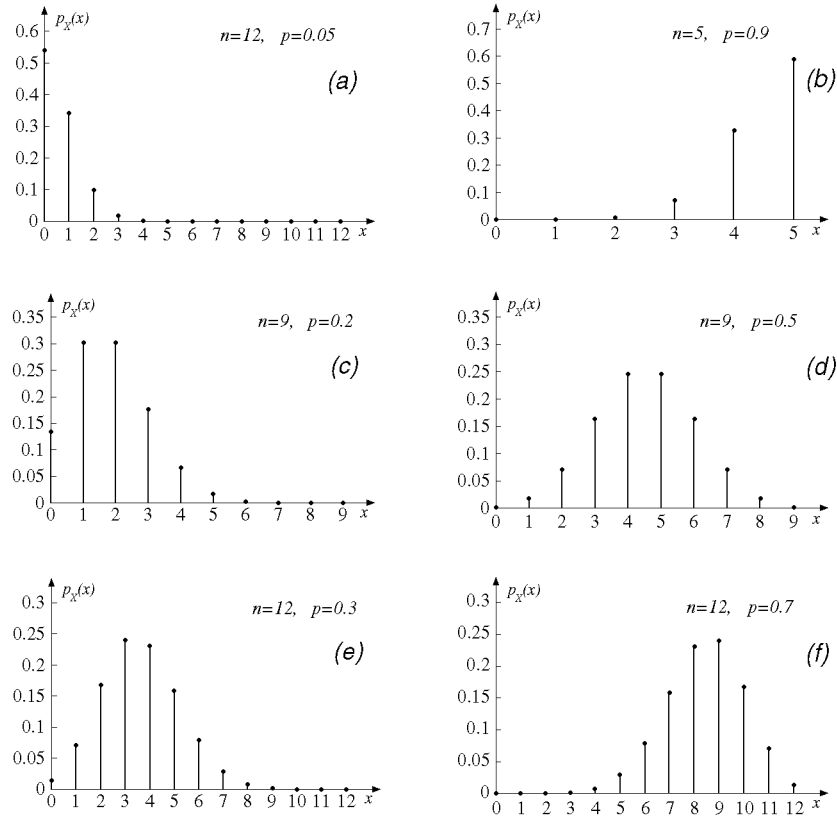


Figure 2: Rappresentazione della funzione di probabilità binomiale per vari valori dei parametri n e p .

Osserviamo che

- i. $p_X(r) > p_X(r-1)$ per $r < (n+1)p$;
- ii. $p_X(r) = p_X(r-1)$ per $r = (n+1)p$;
- iii. $p_X(r) < p_X(r-1)$ per $r > (n+1)p$.

Pertanto si ha che

- (a) se $(n+1)p < 1$, allora $p_X(r)$ è strettamente decrescente per $r = 0, 1, \dots, n$;
- (b) se $(n+1)p > n$, allora $p_X(r)$ è strettamente crescente per $r = 0, 1, \dots, n$;
- (c) se $(n+1)p$ è un intero e se $1 \leq (n+1)p \leq n$, allora $p_X(r)$ presenta due massimi rispettivamente in $r = (n+1)p - 1$ e $r = (n+1)p$;
- (d) se $(n+1)p$ non è un intero e se $1 < (n+1)p < n$, allora $p_X(r)$ presenta un unico massimo in $r = \lfloor (n+1)p \rfloor$, dove $\lfloor x \rfloor$ denota il massimo intero non maggiore di x .

La media e la varianza di una variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri n e p sono rispettivamente $\mathbb{E}(X) = np$ e $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

Processo di Poisson omogeneo e distribuzione di Poisson

Consideriamo un esperimento binomiale e facciamo tendere all'infinito il numero n di prove e contemporaneamente facciamo tendere p_n , la probabilità di successo in ogni prova, a zero in modo che il prodotto np_n rimanga costante. Assumiamo che le n prove binomiali vengano eseguite in intervalli di tempo di ampiezza Δt infinitamente piccola. In questo modo si esegue una prova in ogni intervallo di tempo. Supponiamo che il numero medio di successi nelle n prove eseguite nell'intervallo di tempo di ampiezza finita t sia

$$\lambda t \equiv \frac{t}{\Delta t} \lambda \Delta t = np_n \quad (n \equiv t/\Delta t, p_n \equiv \lambda \Delta t).$$

Così facendo λ rappresenta il numero di occorrenze per unità di tempo, ossia la densità del numero di occorrenze.

Per la variabile aleatoria X_n che conta il numero di successi nelle n prove si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = x) &= p_{X_n}(k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k k!} (n p_n)^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} (n p_n)^k \frac{\left(1 - \frac{n p_n}{n}\right)^n}{(1-p_n)^k}. \end{aligned} \quad (1)$$

Procediamo ora al limite per $n \rightarrow +\infty$, $p_n \rightarrow 0$ e $n p_n \rightarrow \lambda$ nella (1). Poiché¹

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty, p_n \rightarrow 0 \\ n p_n \rightarrow \lambda}} \left(1 - \frac{n p_n}{n}\right)^n = e^{-\lambda},$$

dalla (1) segue che

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty, p_n \rightarrow 0 \\ n p_n \rightarrow \lambda}} p_{X_n}(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

questa è la distribuzione di probabilità che definisce il numero di occorrenze in un processo di Poisson omogeneo.

In Figura 3 è mostrata la funzione di probabilità di Poisson, per vari valori del parametro λ , in questo caso $t = 1$. Osserviamo che la funzione di probabilità è crescente per $n < \lambda$, costante se $n = \lambda$ e risulta decrescente per $n > \lambda$.

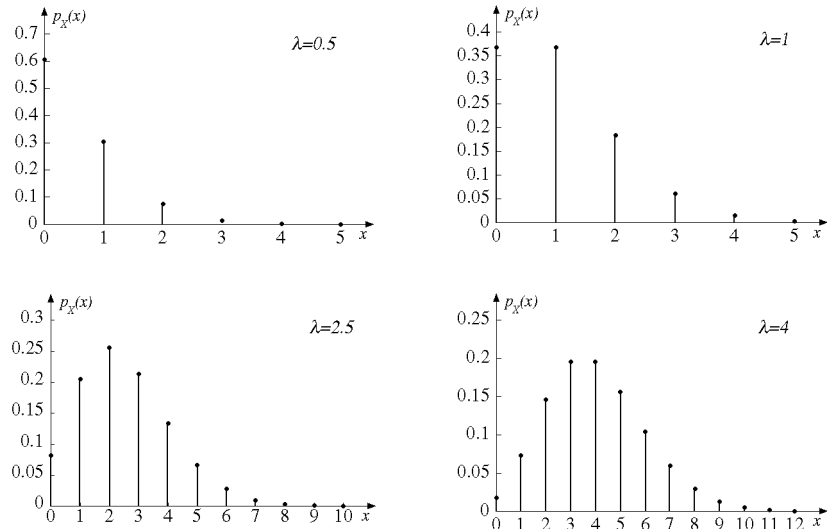


Figure 3: Rappresentazione della funzione di probabilità di Poisson per vari valori di λ .

Per definire un processo di Poisson assumiamo che

- il numero di occorrenze in intervalli di tempo disgiunti siano eventi indipendenti;
- la probabilità di occorrenze in intervalli di tempo di uguale ampiezza sia la stessa e dipenda solo dall'ampiezza e non dalla posizione;

¹Qui è stato usato il seguente risultato:

Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ una successione di reali tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha.$$

Risulta che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = e^{-\alpha}.$$

- la probabilità che in ogni intervallo di tempo di ampiezza infinitesimale si verifichi più di un'occorrenza è trascurabile.

Visto che la distribuzione di Poisson ottenuta è un caso limite della distribuzione binomiale segue che la media e la varianza sono $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{V}(X_n) = \lambda t$ in quanto nel limite $np_n(1 - p_n) \rightarrow \lambda t$.

Esempio 1 Assumiamo che le rotture di un sistema riparabile siano descritte da un processo di Poisson caratterizzato in media da 5 rotture in un anno formato da 365 giorni.

Visto che si verificano 5 rotture in un anno, allora il numero di rotture in tre mesi è $5/4 = 1.25$; così che la probabilità che il sistema si rompa due volte in tre mesi di funzionamento è:

$$p_2 = \frac{1.25^2}{2!} e^{-1.25} \simeq 0.22.$$

Inoltre, la probabilità che il sistema non si guasti nelle prossime 24 ore può essere calcolata osservando che $5/365 = 0.0137$, da ciò segue che

$$p_0 = \frac{0.0137^0}{0!} e^{-0.0137} \simeq 0.986.$$

Distribuzione geometrica

Consideriamo l'esperimento consistente in una successione di prove ripetute di Bernoulli di parametro $p \in (0, 1)$. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di prove necessarie per ottenere il primo successo, X è distribuita secondo la legge geometrica:

$$\mathbb{P}(X = x) = p_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1}, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In Figura 4 è mostrata la funzione di probabilità geometrica per $p = 0.25$ e $p = 0.5$, notiamo che

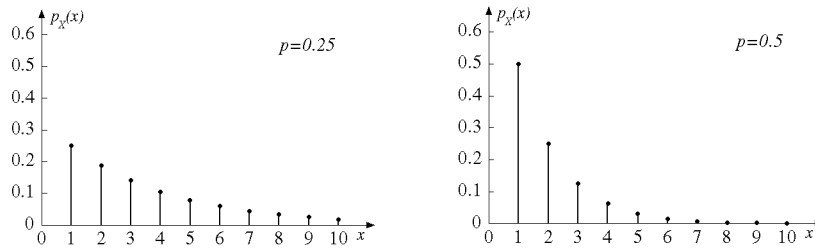


Figure 4: Rappresentazione della funzione di probabilità geometrica per due diverse scelte di p .

$p_X(r)$ è strettamente decrescente in $r = 1, 2, \dots$

Notiamo che per ogni $p \in (0, 1)$ è soddisfatta la condizione di normalizzazione:

$$\sum_{r=1}^{+\infty} p_X(r) = \sum_{r=1}^{+\infty} p(1-p)^{r-1} = p \sum_{s=0}^{+\infty} (1-p)^s = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Inoltre, poiché

$$\sum_{r=1}^k p_X(r) = \sum_{r=1}^k p(1-p)^{r-1} = p \sum_{s=0}^{k-1} (1-p)^s = p \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^k,$$

la funzione di distribuzione di X è:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - (1-p)^k, & k \leq x < k+1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

La media e la varianza della distribuzione geometrica sono $\mathbb{E}(X) = 1/p$ e $\text{Var}(X) = (1-p)/p^2$.

Un'interessante proprietà della distribuzione geometrica è l'*assenza di memoria* espressa dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > r+n | X > r) &= \frac{\mathbb{P}(X > r+n, X > r)}{\mathbb{P}(X > r)} = \frac{\mathbb{P}(X > r+n)}{\mathbb{P}(X > r)} \\ &= \frac{1 - F_X(r+n)}{1 - F_X(r)} = \frac{(1-p)^{r+n}}{(1-p)^r} = (1-p)^n = \mathbb{P}(X > n), \quad r, n \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Per illustrare il significato della (3) possiamo pensare ad una successione di prove ripetute di Bernoulli. Se nelle prime r prove non si è avuto nessun successo, la probabilità che non si verifichi alcun successo fino alla prova $(r+n)$ -esima non dipende da r , ossia da quanto si è atteso, ma solo dal numero n di prove ancora da effettuarsi.

Distribuzione binomiale negativa

Data una successione di prove ripetute di Bernoulli di parametro $p \in (0, 1)$, consideriamo l'evento

$$E_{n,r} = \{\text{il successo } n\text{-esimo si verifica alla prova } r\text{-esima}\} \quad (r = n, n+1, \dots).$$

Affinché si verifichi $E_{n,r}$ è necessario che all' r -esima prova si realizza un successo, il che avviene con probabilità p , mentre nelle precedenti $r-1$ prove si sono avuti in un ordine qualsiasi $n-1$ successi e $r-n$ insuccessi, il che si verifica con probabilità

$$\binom{r-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{r-n}.$$

Pertanto, in virtù dell'indipendenza delle prove, si ha:

$$\mathbb{P}(E_{n,r}) = p \binom{r-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{r-n} = \binom{r-1}{n-1} p^n (1-p)^{r-n} \quad (r = n, n+1, \dots).$$

Sia X_n la variabile aleatoria che descrive il numero di prove necessarie per ottenere il successo n -esimo, si ha $\mathbb{P}(X_n = r) = \mathbb{P}(E_{n,r})$ per $r = n, n+1, \dots$.

Specificamente, la funzione di probabilità di X_n è distribuita secondo la legge binomiale negativa:

$$\mathbb{P}(X_n = x) = p_{X_n}(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}, & x = n, n+1, \dots \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (4)$$

con $0 < p < 1$ e n intero positivo. Si noti che si ha $p_{X_n}(x) \geq 0$ e che risulta:

$$\begin{aligned} \sum_{r=n}^{+\infty} p_{X_n}(r) &= \sum_{r=n}^{+\infty} \binom{r-1}{n-1} p^n (1-p)^{r-n} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+n-1}{n-1} p^n (1-p)^j \\ &= p^n \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+n-1}{n-1} (1-p)^j = \frac{p^n}{[1 - (1-p)]^n} = 1, \end{aligned}$$

avendo fatto uso dell'identità:

$$(1 - \alpha)^{-n} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+n-1}{n-1} \alpha^j, \quad |\alpha| < 1.$$

Come è da attendersi, la distribuzione binomiale negativa per $n = 1$ diventa la distribuzione geometrica.

Notiamo che dalla (4) si ricava:

$$\frac{p_X(r)}{p_X(r-1)} = \frac{\binom{r-1}{n-1} p^n (1-p)^{r-n}}{\binom{r-2}{n-1} p^n (1-p)^{r-n-1}} = \frac{r-1}{r-n} (1-p) \quad (r = n+1, n+2, \dots), \quad (5)$$

pertanto, le probabilità binomiali negative (4) sono calcolabili in modo ricorsivo come segue:

$$p_X(n) = p^n, \quad p_X(r) = (1-p) \frac{r-1}{r-n} p_X(r-1) \quad (r = n+1, n+2, \dots).$$

Inoltre dalla (5) segue che se X è una variabile binomiale negativa di parametri (n, p) , per $r = n+1, n+2, \dots$ si ha:

- (i) $p_X(r) > p_X(r-1)$ per $r < 1 + (n-1)/p$;
- (ii) $p_X(r) = p_X(r-1)$ per $r = 1 + (n-1)/p$;
- (iii) $p_X(r) < p_X(r-1)$ per $r > 1 + (n-1)/p$;

quindi:

- (a) se $(n-1)/p < n$, allora $p_X(r)$ è strettamente decrescente;
- (b) se $(n-1)/p$ è un intero ed inoltre $(n-1)/p \geq n$, allora $p_X(r)$ presenta due massimi in $r = (n-1)/p$ ed in $r = 1 + (n-1)/p$;
- (c) se $(n-1)/p$ non è un intero ed inoltre $(n+1)/p > n$, allora $p_X(r)$ presenta un unico massimo in $r = \lfloor 1 + (n-1)/p \rfloor$.

In Figura 6 sono mostrati alcuni grafici della funzione $p_X(x)$ per $x = n, n+1, n+2, \dots$ e per varie scelte di n e p . In (a) $p_X(x)$ è strettamente decrescente, in (b) presenta un unico massimo e nei rimanenti casi $p_X(x)$ è massima in due valori di x .

Osserviamo che se X_1, X_2, \dots, X_n sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con legge binomiale negativa di parametri $(1, p)$ allora la variabile aleatoria $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, è distribuita secondo la legge binomiale negativa di parametri (n, p) .

Inoltre, se Y_1, Y_2, \dots, Y_k sono variabili aleatorie indipendenti distribuite secondo la legge binomiale negativa di parametri $(n_1, p), (n_2, p), \dots, (n_k, p)$, rispettivamente, allora $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$ ha distribuzione binomiale negativa di parametri $(n_1 + n_2 + \dots + n_k, p)$.

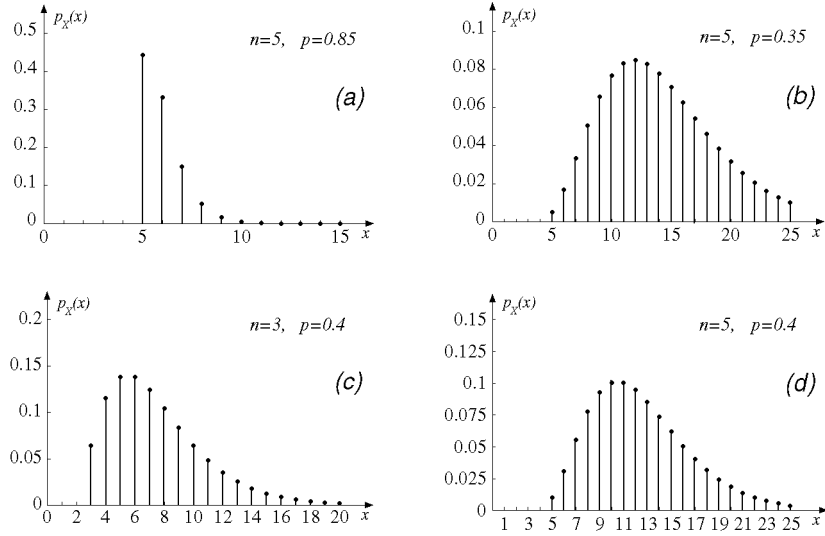


Figure 5: Rappresentazione della funzione di probabilità (4) per vari valori di n e p .

Distribuzione ipergeometrica

La distribuzione ipergeometrica interviene nella descrizione di estrazioni senza reinserimento oppure di estrazioni in blocco.

Consideriamo l'esperimento consistente nell'estrarre n biglie senza reinserimento da un'urna contenente N biglie, di cui m sono azzurre e $N - m$ sono bianche ($0 \leq n \leq N$, $0 \leq m \leq N$) e sia

$$E_k = \{k \text{ delle } n \text{ biglie estratte sono azzurre}\} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Facendo ricorso alla definizione classica di probabilità, si ha:

$$\mathbb{P}(E_k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad (6)$$

dove il numeratore fornisce il numero di modi in cui si possono estrarre k delle m biglie azzurre e $n - k$ delle $N - m$ biglie bianche presenti nell'urna, mentre il denominatore dà il numero di modi in cui si possono estrarre n delle N biglie contenute nell'urna. Evidentemente deve essere

$$0 \leq k \leq m \quad 0 \leq n - k \leq N - m,$$

ossia

$$\max\{0, n + m - N\} \leq k \leq \min\{n, m\}.$$

Se si indica con X la variabile aleatoria che descrive il numero di biglie azzurre estratte senza reinserimento, risulta $X = k$ se e solo se si verifica l'evento E_k ; pertanto risulta $\mathbb{P}(X = k) = P(E_k)$ per $\max\{0, n + m - N\} \leq k \leq \min\{n, m\}$.

Una variabile aleatoria X di funzione di probabilità

$$\mathbb{P}(X = x) = p_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{m}{x} \binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (7)$$

con n, m e N interi tali che $0 \leq n \leq N$ e $0 \leq m \leq N$, è detta avere distribuzione ipergeometrica di parametri $n, m, N - m$. Evidentemente, risulta $p_X(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Facendo uso della formula di Vandermonde

$$\sum_{r=\max\{0, n+m-N\}}^{\min\{n, m\}} \binom{m}{r} \binom{N-m}{n-r} = \binom{N}{n}$$

è poi possibile dimostrare che si ha:

$$\sum_{r=\max\{0, n+m-N\}}^{\min\{n, m\}} p_X(r) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{r=\max\{0, n+m-N\}}^{\min\{n, m\}} \binom{m}{r} \binom{N-m}{n-r} = 1.$$

Con la notazione $X \sim \mathcal{J}(n, m, N - m)$ indichiamo che X è una variabile aleatoria avente distribuzione ipergeometrica di parametri $n, m, N - m$. La media e la varianza della variabile X sono rispettivamente:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{nm}{N}, \quad \text{Var}(X) = \frac{nm(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Si noti che, in virtù della (7), le variabili aleatorie $X \sim \mathcal{J}(n, m, N - m)$ e $Y \sim \mathcal{J}(m, n, N - n)$ sono identicamente distribuite. Sempre dalla (7) si ottiene poi:

$$\frac{p_X(r)}{p_X(r-1)} = \frac{m-r+1}{r} \frac{n-r+1}{N-n-m+r}, \quad \max\{0, n+m-N\} < r \leq \min\{n, m\},$$

da cui è possibile dedurre quanto espresso dall'osservazione seguente.

Sia $X \sim \mathcal{J}(n, m, N - m)$. Allora per $r = \max\{0, n+m-N\} + 1, \dots, \min\{n, m\}$ si ha:

- (i) $p_X(r) > p_X(r-1)$ per $r < (n+1)(m+1)/(N+2)$;
- (ii) $p_X(r) = p_X(r-1)$ per $r = (n+1)(m+1)/(N+2)$;
- (iii) $p_X(r) < p_X(r-1)$ per $r > (n+1)(m+1)/(N+2)$.

Esempio 2 Una fabbrica produce in un dato giorno 200 manufatti 60 dei quali sono imperfetti. Si seleziona a caso un lotto di 10 manufatti da sottoporre a controllo. Calcoliamo la probabilità che nel lotto selezionato siano presenti k manufatti imperfetti, con $k = 0, 1, \dots, 10$.

Denotando con X la variabile aleatoria che descrive il numero di manufatti imperfetti presenti nel lotto selezionato, risulta che $X \sim \mathcal{J}(10, 60, 200)$. La probabilità che k di quelli sottoposti a controllo siano difettosi è pertanto:

$$p_X(k) = \frac{\binom{60}{k} \binom{140}{10-k}}{\binom{200}{10}} \quad (k = 0, 1, \dots, 10). \quad (8)$$

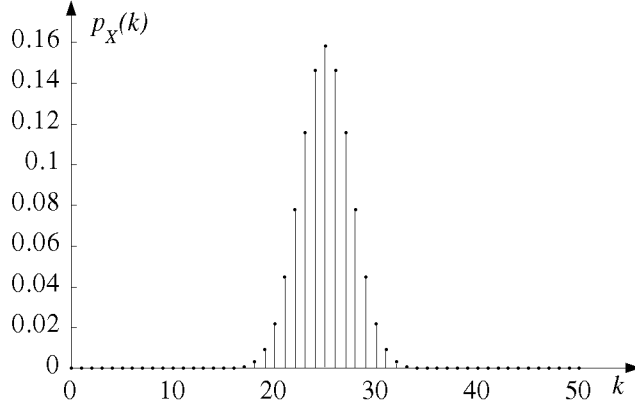


Figure 6: Rappresentazione delle probabilità (7) per $m = 50$ e $N = 100$.

k	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{P}(X \leq k)$
0	0.025552	0.025552
1	0.117030	0.142582
2	0.235390	0.377972
3	0.273737	0.651709
4	0.203771	0.855480
5	0.101433	0.956912
6	0.034184	0.991096
7	0.007699	0.998796
8	0.001109	0.999904
9	0.000092	0.999997
10	0.000003	1

Table 1: Le probabilità $\mathbb{P}(X = k)$ e $\mathbb{P}(X \leq k)$ per $k = 0, 1, \dots, 10$ ottenute dalla (8).

Si noti che la percentuale di manufatti imperfetti tra i 200 prodotti è del 30% (ossia 60/200). Affinché anche la percentuale di manufatti imperfetti tra i 10 selezionati sia del 30% deve risultare $k = 3$; dalla Tabella 1.1 si vede che ciò si realizza con probabilità 0.273737. Si osservi inoltre che la probabilità che nessuno dei 10 manufatti sottoposti a controllo risulti imperfetto è $P(X = 0) = 0.025552$.

Osseviamo che la distribuzione ipergeometrica tende alla distribuzione binomiale. Specificamente: Sia $X \sim \mathcal{I}(n, m, N - m)$; se n è fissato, e se N e m divergono in modo tale che il loro rapporto converga ad un valore $p \in (0, 1)$, allora

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty, m \rightarrow +\infty \\ m/N \rightarrow p}} p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (9)$$

Dalla (7) segue:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \times \frac{(N-m)(N-m-1)\cdots(N-m-n+k+1)}{(N-k)(N-k-1)\cdots(N-n+1)}. \quad (10)$$

Poiché

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty, m \rightarrow +\infty \\ m/N \rightarrow p}} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \\ = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty, m \rightarrow +\infty \\ m/N \rightarrow p}} \frac{\frac{m}{N} \left(\frac{m}{N} - \frac{1}{N} \right) \cdots \left(\frac{m}{N} - \frac{k-1}{N} \right)}{1 \left(1 - \frac{1}{N} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{N} \right)} = p^k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty, m \rightarrow +\infty \\ m/N \rightarrow p}} \frac{(N-m)(N-m-1)\cdots(N-m-n+k+1)}{(N-k)(N-k-1)\cdots(N-n+1)} \\ = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty, m \rightarrow +\infty \\ m/N \rightarrow p}} \frac{\left(1 - \frac{m}{N} \right) \left(1 - \frac{m}{N} - \frac{1}{N} \right) \cdots \left(1 - \frac{m}{N} - \frac{n-k-1}{N} \right)}{\left(1 - \frac{k}{N} \right) \left(1 - \frac{k+1}{N} \right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N} \right)} = (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

dalla (10) segue la (9).

Con riferimento allo schema di estrazione senza rimbussolamento che ha condotto alla formula (6), la precedente osservazione comporta che se il numero m delle biglie azzurre e il numero N di biglie presenti nell'urna sono entrambi sufficientemente elevati in modo tale che il loro rapporto sia una costante p , allora la probabilità che k delle n biglie estratte senza reinserimento siano azzurre è approssimabile con la medesima probabilità relativa al caso di estrazioni con reinserimento, essendo

$$\frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \simeq \binom{n}{k} \left(\frac{m}{N} \right)^k \left(1 - \frac{m}{N} \right)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (11)$$

Nella Tabella 2 si confrontano le probabilità presenti al primo ed al secondo membro della (11) per $n = 5$ e varie scelte di m ed N tali che $m/N = 0.4$. Si noti che l'approssimazione della distribuzione ipergeometrica con quella binomiale, già buona per $m = 40$ e $N = 100$, tende a migliorare ulteriormente al crescere di N .

Distribuzioni continue

Distribuzione uniforme

Spesso l'unica informazione disponibile su un parametro X consiste nel sapere che varia tra due valori reali a e b . In questi casi la distribuzione uniforme è utile per misurare l'incertezza

k	$\mathbb{P}(X = k)$ $m = 40$ $N = 100$	$\mathbb{P}(X = k)$ $m = 400$ $N = 1000$	$\mathbb{P}(X = k)$ $m = 4000$ $N = 10000$	$\mathbb{P}(X = k)$ $m = 40000$ $N = 100000$	$\mathbb{P}(Y = k)$
0	0.0725421	0.0772413	0.0777082	0.0777548	0.07776
1	0.259079	0.259199	0.2592	0.2592	0.2592
2	0.354529	0.346467	0.345686	0.345609	0.3456
3	0.232278	0.230592	0.230419	0.230402	0.2304
4	0.0728328	0.0764147	0.0767616	0.0767962	0.0768
5	0.00873993	0.0100867	0.0102246	0.0102385	0.01024

Table 2: Confronto tra $\mathbb{P}(X = k)$ e $\mathbb{P}(Y = k)$ con $X \sim \mathcal{J}(5, m, N - m)$ e la variabile Y binomiale di parametri $(5, 0.4)$.

associata a tale parametro. Una variabile aleatoria X è distribuita uniformemente in (a, b) se è caratterizzata da densità di probabilità e funzione di distribuzione rispettivamente date da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b. \end{cases} \quad (12)$$

Inoltre risulta che $\mathbb{E}(X) = (a+b)/2$ e $\mathbb{V}(X) = (b-a)^2/12$. Più in generale, per il momento di ordine n si ha $\mathbb{E}(X^n) = (b^{n+1} - a^{n+1})/[(n+1)(b-a)]$.

La distribuzione uniforme è utilizzata nell'ambito delle applicazioni del metodo di Monte Carlo o per selezionare dei punti a caso. Ad esempio, una traiettoria casuale di lunghezza a su un piano può essere simulata scegliendo a caso le coordinate del punto iniziale e l'angolo che tale traiettoria forma con una retta di riferimento.

Campionamenti selezionati da una distribuzione uniforme possono essere utilizzati anche per generare tempi casuali di riparazione. La distribuzione uniforme è collegata al processo di Poisson. Infatti, vale il seguente risultato:

Date n variabili aleatorie distribuite in accordo ad un processo di Poisson omogeneo in un intervallo finito di ampiezza a risulta che le coordinate delle variabili sono distribuite uniformemente in a . Da ciò segue che nei casi in cui il numero di fallimenti di un dispositivo segue un processo di Poisson in un intervallo di tempo finito $(0, a)$ allora i tempi di rottura sono uniformemente distribuiti in $(0, a)$.

Esempio 3 Assumiamo che il numero di guasti che si verificano ad un dispositivo nell'intervallo di tempo $(0, T)$ sia descritto da un processo di Poisson $N(t)$ di parametro λ e sia $N(t, t + \Delta t)$ il

numero di guasti che si verifica in nell'intervallo $(t, t + \Delta t)$. Per ogni t scelto in $(0, T)$ risulta che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N(t, t + \Delta t) = 1 | N(T) = 1] &= \frac{\mathbb{P}[N(t, t + \Delta t) = 1, N(T) = 1]}{\mathbb{P}[N(T) = 1]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[N(t) = 0]P[N(\Delta t) = 1]\mathbb{P}[N(T - t - \Delta t) = 0]}{\mathbb{P}[N(T) = 1]} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}e^{-\lambda(T-t-\Delta t)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\Delta t}{T}.\end{aligned}$$

Un'altra importante proprietà della distribuzione uniforme è illustrata qui di seguito.

Osservazione 1 Sia X una variabile aleatoria di distribuzione $F_X(x)$ strettamente monotona e sia $U = F_X(X)$ una nuova variabile aleatoria.

Risulta che $F_U(x) = 0$ per $x < 0$ e $F_U(x) = 1$ per $x > 1$ ed inoltre si ha:

$$F_U(x) = \mathbb{P}[U < x] = \mathbb{P}[F_X(X) < x] = \mathbb{P}[X < F_X^{-1}(x)] = F_X[F_X^{-1}(x)] = x.$$

Pertanto, U è uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, 1)$.

Il risultato appena ottenuto è di grande interesse nell'ambito della simulazione. Infatti, come espresso nella seguente proposizione, partendo da una variabile aleatoria di distribuzione uniforme se ne può generare un'altra di distribuzione più generale.

Proposizione 1 Sia U una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $(0, 1)$ e sia $G(x)$ un'arbitraria funzione di distribuzione invertibile, sia X la variabile aleatoria assolutamente continua definita tramite la trasformazione

$$X = G^{-1}(U),$$

risulta che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < G^{-1}(0) \\ G(x), & G^{-1}(0) \leq x < G^{-1}(1) \\ 1, & x \geq G^{-1}(1), \end{cases}$$

quindi X è uniformemente distribuita.

Dimostrazione Visto che $G(x)$ è una funzione di distribuzione deve essere non decrescente, pertanto risulta:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}[G^{-1}(U) \leq x] = \mathbb{P}[U \leq G(x)] = \begin{cases} 0, & G(x) < 0 \\ G(x), & 0 \leq G(x) < 1 \\ 1, & G(x) \geq 1, \end{cases}$$

da cui segue la tesi.

Distribuzione esponenziale

Per introdurre la distribuzione esponenziale consideriamo il seguente esempio.

Esempio 4 Supponiamo che la probabilità che un componente/sistema si rompa in un piccolo intervallo di tempo sia costante. In altri termini, assumiamo che la probabilità che una componente

che non si è rotta fino all'istante t si rompa nell'intervallo $(t, t + \Delta t)$ sia costante e non dipende dall'età t del componente essendo $\lambda \Delta t$. Sotto tale assunzione si dimostra che la variabile aleatoria del tempo di vita del componente è di distribuzione esponenziale:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Infatti, dividiamo l'intervallo di tempo $(0, t)$ in n intervalli di ampiezza sufficientemente piccola $\Delta t = t/n$. La probabilità $R(t)$ che il componente/sistema non si guasti dopo gli n intervalli di tempo di ampiezza Δt è:

$$R(t) = (1 - \lambda \Delta t)^n = \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-\lambda t} \quad \text{per } \Delta t \rightarrow 0.$$

Poiché $F(t) = 1 - R(t)$ si ottiene che la probabilità che il guasto avvenga prima di t corrisponde alla funzione di distribuzione esponenziale. La funzione densità di probabilità in questo caso è:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La media e la varianza di una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ sono $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$ e $\mathbb{V}(X) = 1/\lambda^2$, rispettivamente.

La distribuzione esponenziale descrive situazioni in cui la probabilità che un componente si guasti in intervalli di tempo di ampiezza piccola non dipende dall'età del componente. Per la distribuzione esponenziale la frequenza istantanea di guasto è costante essendo $r(t) = \lambda$. Pertanto, la distribuzione esponenziale si adatta bene a descrivere i tempi di rottura nella fase detta di vita utile del dispositivo. In Figura 7 è rappresentato l'andamento della funzione di distribuzione e della densità di probabilità di una variabile esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Se la vita di un

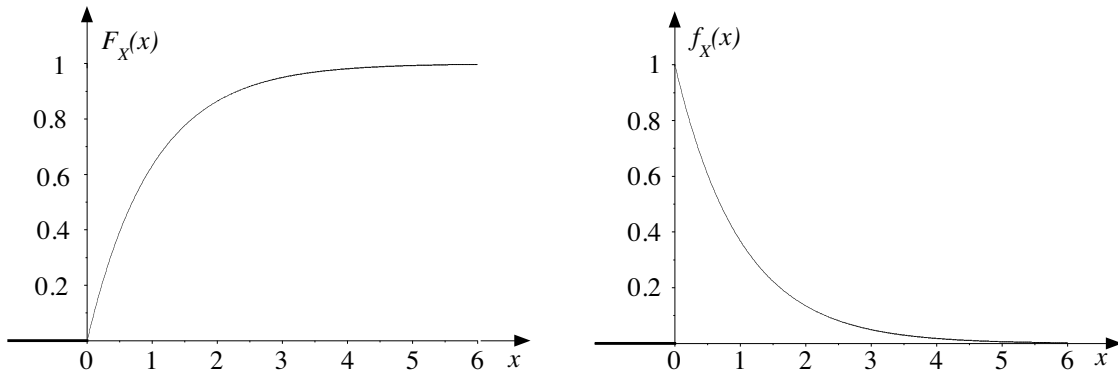


Figure 7: Funzione di distribuzione e funzione densità di probabilità di una variabile esponenziale di parametro $\lambda = 1$.

componente è descritta da una variabile esponenziale la probabilità di rottura in uno specifico intervallo di tempo non dipende dall'età del componente, ciò implica che la probabilità che il componente si rompa in uno specifico intervallo di tempo è la stessa non dipendendo da quanto

tempo ha funzionato. In altri termini, la probabilità che il componente si rompa dopo $t + \Delta t$ sapendo che fino all'istante t il componente funzionava correttamente non dipende da t , come se all'istante t il componente fosse buono come nuovo. Quanto detto è formalmente espresso dalla seguente osservazione:

Osservazione 2 Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ . Dati z e τ reali positivi, risulta:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > s + t | X > s) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} \\ &= \frac{1 - F_X(s + t)}{1 - F_X(s)} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t).\end{aligned}$$

Questa osservazione permette di concludere che

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)} = e^{-\lambda \Delta t},$$

dove $R(t)$ è la probabilità che il componente sopravviva all'istante t . Tale proprietà esprime l'*assenza di memoria* che rende il modello esponenziale adeguato a descrivere il comportamento di componenti la cui funzionalità non degrada col tempo. Ciò costituisce evidente circostanza che variabili aleatorie esponenzialmente distribuite non sono idonee a descrivere la durata di vita di dispositivi soggetti ad usura se non entro prefissati limiti di approssimazione, ad esempio nel caso di semplici dispositivi non soggetti a rapidi deterioramenti significativi, ma che possono subire danni per cause accidentali quali, ad esempio, corti circuiti, fulmini, imprevedibili sollecitazioni meccaniche, ecc. Dispositivi di questo tipo sono ad esempio i fusibili elettrici.

Osservazione 3 (Relazione tra la distribuzione esponenziale e la distribuzione di Poisson) Sia N_t una variabile aleatoria di Poisson di parametro λt . N_t rappresenta il numero di occorrenze di certi eventi casuali in uno specificato intervallo di tempo come, ad esempio, telefonate che arrivano ad un centralino o guasti ad un sistema, ... Sia poi T la variabile aleatoria che rappresenta l'istante in cui si verifica il primo evento. Per $t < 0$, deve evidentemente assumersi $P(T \leq t) = 0$; mentre, per $t \geq 0$ risulta:

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Esempio 5 Supponiamo che un componente/sistema sia caratterizzato da una durata esprimibile tramite una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ . Supponiamo che all'istante t_i si verifichi un guasto e che ad ogni guasto segua istantaneamente una sostituzione del componente o una riparazione del sistema. Sotto tali assunzioni risulta che gli istanti di tempo t_i con $i = 1, 2, \dots$ sono descritti da un processo di Poisson di intensità λ . L'affidabilità $R(t)$ associata ad un intervallo di tempo di ampiezza finita t è uguale alla probabilità che non ci sia alcun guasto fino all'istante t , ossia $R(t) = e^{-\lambda t}$, il che conduce ad una distribuzione dei tempi di rottura esponenziali di parametro λ .

Osservazione 4 (Affidabilità di componenti organizzate in serie) Come visto nel Capitolo 2, l'affidabilità di componenti logicamente organizzate in serie è data dal prodotto delle affidabilità

delle singole componenti. Pertanto se il sistema è costituito da n componenti ciascuna di durata X_i esponenziale di parametro λ_i , ne segue che la durata dell'intero sistema è $V = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ di distribuzione:

$$F_V(v) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_i}(v)] = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ 1 - \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i v} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)v}, & v \geq 0. \end{cases}$$

Quindi, la variabile V è distribuita ancora con legge esponenziale di parametro λ dato dalla somma dei singoli parametri λ_i ; così l'affidabilità dell'intero sistema è $R(t) = e^{-\lambda t}$.

Esempio 6 Un dispositivo è costituito da due componenti collegate in serie. Assumiamo che la durata di vita della componente r -esima sia descritta da una variabile aleatoria X_r di distribuzione esponenziale con parametro λ_r con $r = 1, 2$.

Nell'ipotesi di indipendenza di X_1 e X_2 , si vuole determinare la probabilità che sia stata la seconda componente la causa del guasto del dispositivo.

L'evento a cui siamo interessati si può esprimere in termini di X_1 e X_2 . Infatti, la probabilità richiesta è, in definitiva, $\mathbb{P}(X_1 > X_2)$, il cui calcolo può essere effettuato facendo ricorso all'indipendenza di X_1 e X_2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 > X_2) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{x_1} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} dx_1 \int_0^{x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} dx_2 = \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} [1 - e^{-\lambda_2 x_1}] dx_1 \\ &= 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che il risultato ottenuto può essere generalizzato. Infatti, consideriamo un dispositivo costituito da n componenti collegate in serie, ognuna con durata di vita esponenziale di parametro λ_i , e supponiamo che le durate di vita delle componenti siano tra loro indipendenti.

Sia $Y = \min(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n)$, risulta che Y è distribuita esponenzialmente con parametro

$$\lambda = \sum_{i=1, i \neq j}^n \lambda_i$$

ed inoltre, la probabilità che la rottura del dispositivo sia dovuta alla componente j -esima è:

$$\mathbb{P}(Y > X_j) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \int_0^y \lambda_j e^{-\lambda_j x} dx = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \lambda} = \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}.$$

In precedenza, sono stati forniti alcuni esempi di dispositivi costituiti da componenti soggetti a guasti i cui tempi di vita sono indipendenti. Nel seguente esempio si vuole analizzare una situazione in cui ciò non si verifica.

Esempio 7 Un sistema costituito da due componenti è soggetto a guasti provocati da tre possibili cause contrassegnate rispettivamente con 1, 2 e 3 (v. Figura 8).

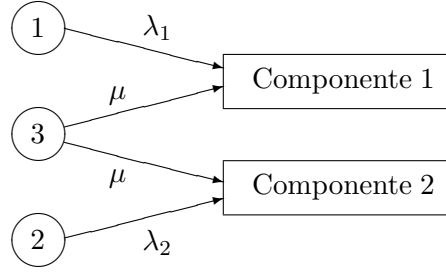


Figure 8: Tre possibili cause di guasti per due componenti.

Assumiamo che ognuna delle cause provochi un danno indipendentemente dalle altre, che un guasto provocato dalla causa k con $k = 1, 2$ arrechi un danno irreparabile al componente k e che l'istante di occorrenza del guasto sia descritto da una variabile aleatoria U_k esponenziale di parametro λ_k . Inoltre assumiamo che un guasto prodotto dalla causa 3 danneggi entrambi i componenti e che l'istante di occorrenza di tale guasto sia descritto da una variabile aleatoria esponenziale Z di parametro μ . Assumiamo infine che U_1, U_2 e Z siano indipendenti.

Denotati con X e Y i tempi di vita dei due componenti, si vuole determinare la funzione di distribuzione congiunta $F_{X,Y}(x, y)$ e le funzioni di distribuzione marginali $F_X(x)$ e $F_Y(y)$.

Osserviamo in primo luogo che, da quanto detto, risulta:

$$X = \min(U_1, Z), \quad Y = \min(U_2, Z),$$

così che si ha:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-(\lambda_1 + \mu)x}, & x > 0 \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 1 - e^{-(\lambda_2 + \mu)y}, & y > 0. \end{cases}$$

Per determinare la distribuzione congiunta di X e Y osserviamo in primo luogo che per tutti gli x, y reali sussistono le seguenti relazioni:

$$F_{X,Y}(x, y) + \mathbb{P}(X > x, Y > y) + \mathbb{P}(X \leq x, Y > y) + \mathbb{P}(X > x, Y \leq y) = 1,$$

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y > y) = F_X(x) - F_{X,Y}(x, y),$$

$$\mathbb{P}(X > x, Y \leq y) = F_Y(y) - F_{X,Y}(x, y),$$

da cui, poiché risulta

$$F_{X,Y}(x, y) + \mathbb{P}(X > x, Y > y) + F_X(x) - F_{X,Y}(x, y) + F_Y(y) - F_{X,Y}(x, y) = 1,$$

segue:

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X > x, Y > y) + F_X(x) + F_Y(y) - 1. \quad (13)$$

Ricordando che i tempi di guasto U_1, U_2, Z sono per ipotesi indipendenti ed esponenzialmente distribuiti con rispettivi parametri $\lambda_1, \lambda_2, \mu$, si ricava:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > x, Y > y) &= \mathbb{P}\{\min(U_1, Z) > x, \min(U_2, Z) > y\} \\ &= \mathbb{P}\{U_1 > x, U_2 > y, Z > \max(x, y)\} \\ &= \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \mu \max(x, y)\} \quad x \geq 0, y \geq 0, \end{aligned}$$

così che risulta:

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 + e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \mu \max(x, y)} - e^{-(\lambda_1 + \mu)x} - e^{-(\lambda_2 + \mu)y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

che si identifica con la funzione di distribuzione del vettore aleatorio (X, Y) non assolutamente continuo. Essendo $F_{X,Y}(x, y) \neq F_X(x) F_Y(y)$, si conclude che X e Y , ossia i tempi di vita delle due componenti, non sono indipendenti.

Osservazione 5 Sia U una variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $(0, 1)$. Vogliamo determinare una trasformazione g (monotona) di U che permetta di ottenere una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ . Possiamo ragionare come segue:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}[g(U) \leq x] = \mathbb{P}[U \leq g^{-1}(x)] = g^{-1}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

ciò implica che $U = g^{-1}(X) = 1 - e^{-\lambda X}$ da cui segue che $e^{-\lambda X} = 1 - U$ ossia,

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U).$$

Essendo U e $1 - U$ entrambe uniformemente distribuite in $(0, 1)$, segue anche che $X = -\ln(U/\lambda)$ ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Questo è il punto di partenza che di solito si utilizza per la simulazione di una variabile aleatoria esponenziale.

Osservazione 6 (Tempo medio di fallimento) Un'importante misura dell'affidabilità è data dal tempo medio di rottura (Mean Time to Failure MTTF) definito come la media del tempo in cui si verifica il primo guasto:

$$\text{MTTF} = \int_0^\infty t f(t) dt \equiv - \int_0^\infty t dR(t) = -t R(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty R(t) dt = \int_0^\infty R(t) dt.$$

Se il failure rate è costante allora l'MTTF è dato dal reciproco del failure rate:

$$\text{MTTF} = \vartheta = \int_0^\infty \exp\{-\lambda t\} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Nel caso di distribuzione esponenziale la probabilità di verificare un guasto prima del MTTF è circa il 63%. Infatti, denotando con T il tempo di rottura del dispositivo, si ha:

$$P(T < \text{MTTF}) = 1 - \exp\{-\lambda \text{MTTF}\} = 1 - \exp\{-1\} \simeq 0.64.$$

Esempio 8 Il tempo medio di rottura di una componente caratterizzata da un failure rate costante è $\text{MTTF} = 50000$ ore $\simeq 5.7$ anni. Vogliamo calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

1. la componente funzionerà ininterrottamente per un anno,
2. la componente si guasterà tra il 5° e il 6° anno,
3. la componente si romperà dopo un anno dato che ha funzionato correttamente fino alla fine del 5° anno. Confrontiamo questo risultato con la probabilità che il componente si rompa dopo un anno dato che ha funzionato correttamente fino alla fine del 10° anno.

1. In questo caso il failure rate della componente è $\lambda = 1/5.7 \text{ anni}^{-1}$. La probabilità richiesta coincide con l'affidabilità calcolata in 1:

$$R(t) = \mathbb{P}[T > t] = \exp\{-t/5.7\} \Rightarrow R(1) = \exp\{-1/5.7\} \simeq 0.84.$$

2. Risulta:

$$\mathbb{P}[5 < T < 6] = F(6) - F(5) = R(5) - R(6) = \exp\{-5/5.7\} - \exp\{-6/5.7\} \simeq 0.07.$$

3. Data l'assenza di memoria, la probabilità condizionata che vogliamo calcolare non dipende dal periodo di corretto funzionamento che ha preceduto il guasto, infatti si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[5 < T < 6 | T > 5] &= \frac{\mathbb{P}[5 < T < 6]}{\mathbb{P}[T > 5]} = \frac{\mathbb{P}[0 < T < 1]}{\mathbb{P}[T > 0]} \equiv \mathbb{P}[0 < T < 1] = 1 - \exp\{-1/5.7\} \\ &\simeq 1 - 0.84 = 0.16 = \mathbb{P}[10 < T < 11 | T > 10]. \end{aligned}$$

Osservazione 7 (Hazard rate) Sia $r(t)\Delta t$ la probabilità di rottura di un componente/sistema nell'intervallo di tempo $(t, t+\Delta t)$ supponendo che fino all'istante t il sistema/componente funzionava correttamente, risultando così dipendente da t . La funzione $r(t)$ è il failure rate. Dividiamo l'intervallo di tempo $(0, t)$ in n intervalli di ampiezza $\Delta t = t/n$. Procedendo in questo modo si ha che la probabilità che il componente/sistema non si rompa prima di t è

$$R(t) = \prod_{i=1}^n (1 - r_i \Delta t) = \exp \left\{ \ln \prod_{i=1}^n (1 - r_i \Delta t) \right\} = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \ln(1 - r_i \Delta t) \right\},$$

dove r_i è l'approssimazione della funzione $r(t)$ nello i -esimo intervallo di ampiezza Δt . Osserviamo che per Δt arbitrariamente piccolo valgono le seguenti approssimazioni:

$$\ln(1 - r_i \Delta t) \simeq -r_i \Delta t, \quad \sum_{i=1}^n r_i \Delta t \simeq \int_0^t r(\nu) d\nu \quad (\Delta t \rightarrow 0)$$

che conducono alla seguente approssimazione per $R(t)$:

$$R(t) = \exp \left\{ - \int_0^t r(\nu) d\nu \right\} = \exp\{-H(t)\} \simeq \exp \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \Delta t \right\},$$

dove

$$H(t) = \int_0^t r(\nu) d\nu$$

è detta *cumulative hazard rate*.

Osserviamo che la funzione di distribuzione dei tempi di guasto è

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - \exp\{-H(t)\}.$$

Se l'hazard rate aumenta con l'età allora la distribuzione $F(t)$ si dice distribuzione increasing failure rate (IFR). Alternativamente, se l'hazard rate $r(t)$ è decrescente in t , allora $F(t)$ si dice

decreasing failure rate (DFR). Se l'hazard rate è costante, cioè $r(t) = \lambda$, si ha che il tasso di rischio cumulativo è lineare in t :

$$H(t) = \int_0^t \lambda d\nu = \lambda t.$$

Ricordiamo che l'hazard rate si può esprimere anche in termini della densità $f(t)$ dei tempi di rottura; ciò deriva dal fatto che la probabilità di guasto nell'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$ è approssimabile con $f(t)\Delta t$, pertanto si ha:

$$P\{\text{si verifica un guasto in } (t, t + \Delta t)\} \simeq f(t)\Delta t = \frac{dF(t)}{dt}\Delta t = R(t)\frac{dH(t)}{dt}\Delta t = R(t)r(t)\Delta t.$$

Il prodotto $R(t)r(t)\Delta t$ approssima la probabilità del seguente evento

{il componente funziona correttamente fino all'istante t e si rompe nell'intervallo $(t, t + \Delta t)$ }.

Esempio 9 Vogliamo individuare il numero medio di guasti su 100 elementi durante un periodo di funzionamento di 1000 ore, supponendo che ogni componente sia caratterizzato da una funzione failure rate lineare con parametro 10^{-6} . In questo caso si ha che $r(t) = 10^{-6}t$ così, da quanto detto nella precedente discussione, risulta che l'affidabilità per un singolo elemento è:

$$R(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(\nu) d\nu\right\} = \exp\left\{-10^{-6}\int_0^t \nu d\nu\right\} = \exp\left\{-10^{-6}\frac{t^2}{2}\right\}.$$

Per $t = 1000$ ore, l'affidabilità è $R(1000) = \exp\{-1/2\} \simeq 0.61$. Poiché la probabilità che ci sia almeno un guasto del singolo elemento prima di t , ossia che l'elemento si guasti nell'intervallo di tempo $(0, 1000)$, è $F(1000) = 1 - \exp\{-1/2\} = 0.39$, si ricava che il numero medio di rotture sui 100 elementi è $100 \cdot 0.39 = 39$.

Osservazione 8 (Differenza tra la densità di rottura $f(t)$ e il failure rate $r(t)$) Per illustrare la sostanziale differenza esistente tra la densità di rottura e l'hazard rate, analizziamo la seguente situazione.

Consideriamo una popolazione iniziale di n_0 componenti. Assumiamo che nell'intervallo $(t, t + dt)$ la frazione $\Delta n/n_0$ delle componenti iniziali si guasti con probabilità $f(t)dt$; questa rappresenta la percentuale delle componenti iniziali che si guastano nell'intervallo di tempo in esame. Pertanto, risulta che la densità di fallimento è $f(t) = n_0^{-1}dn/dt$, essa rappresenta *la percentuale degli elementi iniziali che si romperanno per unità di tempo*.

D'altra parte, la frazione delle componenti che sono ancora funzionanti all'istante t e che si romperanno nell'intervallo $(t, t + dt)$, denotata con $dn/n(t)$, è $r(t)dt$; questa rappresenta la quantità di elementi che sono in servizio e che si romperanno nell'intervallo di tempo in esame. Pertanto, risulta che la densità di fallimento è $r(t) = [n(t)]^{-1}dn/dt$, questa rappresenta *la percentuale degli elementi in servizio che si romperanno per unità di tempo*. Se l'età non influenza la probabilità di guasto allora il failure rate è costante, $r(t) = \lambda$. In questo caso la proporzione degli elementi in servizio che si romperà nell'intervallo $(t, t + dt)$ è presumibilmente $dn(t)/n(t)$. Visto che questa frazione è anche uguale a $-\lambda dt$, segue che

$$dn(t)/n(t) = -\lambda dt.$$

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili la cui soluzione risulta

$$n(t) = n_0 \exp\{-\lambda t\},$$

dove n_0 rappresenta il numero iniziale di componenti. La probabilità di sopravvivenza all'istante t è quindi $n(t)/n_0 = R(t) = \exp\{-\lambda t\}$ così la probabilità di rottura è $F(t) = 1 - R(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\}$ che descrive una distribuzione esponenziale.

Distribuzione di Erlang e distribuzione gamma

Per introdurre la distribuzione di Erlang cominciamo col discutere il seguente esempio.

Esempio 10 Consideriamo il sistema k -fold standby (gruppo di scorta) mostrato in Figura 9, questo è costituito da k componenti identiche per i quali i guasti si verificano in accordo ad una distribuzione di Poisson di parametro λ . La durata di ciascuna componente è distribuita esponenzialmente con parametro λ . Inoltre, la componente C_i è attivata non appena si verifica un guasto alla componente C_{i-1} . In questo modo il sistema fallisce non appena sono fuori uso tutte le sue componenti. Per determinare la distribuzione del tempo di rottura dell'intero sistema

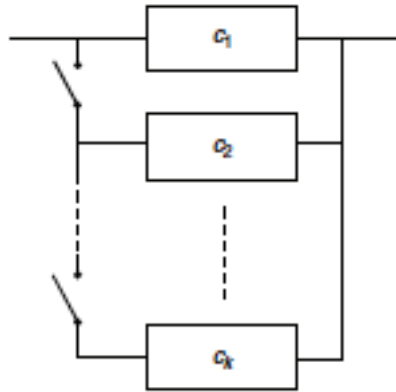


Figure 9: Un sistema k -fold standby.

possiamo ragionare come segue.

La probabilità $F(t)$ che ci siano almeno k guasti prima dell'istante t è uguale a $1 - R(t)$, dove $R(t)$ è la probabilità che ci siano meno di k guasti prima di t .

L'evento composto

$$\{\text{meno di } k \text{ guasti prima di } t\}$$

è l'unione dei seguenti k eventi incompatibili:

$$\{\text{nessun guasto prima di } t\}, \quad \{1 \text{ guasto prima di } t\}, \quad \dots \quad \{k-1 \text{ guasti prima di } t\}.$$

Pertanto, risulta:

$$R(t) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp\{-\lambda t\},$$

da cui segue:

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp\{-\lambda t\}.$$

Derivando rispetto al tempo quest'ultima relazione si ricava la densità di probabilità del tempo necessario perché si verifichino k rotture delle componenti:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \exp\{-\lambda t\}.$$

La densità di probabilità si può esprimere anche in termini del tempo medio di fallimento $\vartheta = 1/\lambda$ infatti si ha:

$$f(t) = \frac{t^{k-1}}{\vartheta^k (k-1)!} \exp\{-t/\vartheta\}.$$

Pertanto, possiamo dire che

Una variabile aleatoria X di funzione di distribuzione e densità di probabilità rispettivamente date da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si dice di distribuzione di Erlang di parametri λ e n .

Evidentemente, per ogni $\lambda > 0$ risulta:

$$f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx = 1,$$

dove l'ultima uguaglianza segue osservando che risulta:

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!,$$

come si evince integrando ripetutamente per parti.

Possiamo dare la seguente interpretazione: Se si considerano k elementi caratterizzati da durate indipendenti e identicamente distribuite con legge esponenziale di parametro λ , allora la somma dei tempi di funzionamento dei singoli componenti $T = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ è una variabile aleatoria distribuita secondo la legge di Erlang di parametri k e λ .

Osserviamo esplicitamente che quando $n = 1$ la distribuzione di Erlang si riduce ad una distribuzione esponenziale. In Figura 10 sono rappresentati gli andamenti di densità di Erlang per diversi valori di n .

Proposizione 2 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti distribuite secondo la legge di Erlang, la prima di parametri 1 e λ e la seconda di parametri n e λ . La variabile aleatoria $Z = X + Y$ è distribuita secondo la legge di Erlang di parametri $n + 1$ e λ .

Da questa osservazione segue che una variabile di Erlang di parametri n e λ può essere riguardata come la somma di n variabili esponenziali indipendenti ed identicamente distribuite con parametro

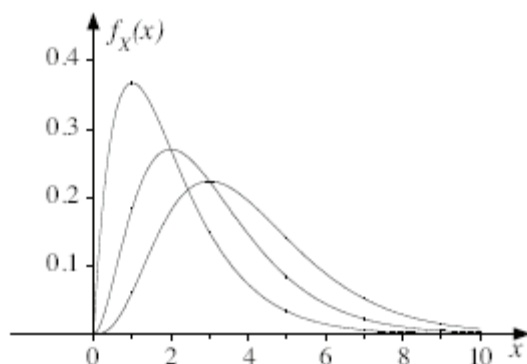


Figure 10: Densità di Erlang con $\lambda = 1$ e $n = 2, 3, 4$ dall'alto verso il basso in prossimità dell'origine.

λ . Pertanto, la media di una variabile di Erlang con parametri n e λ è $\mathbb{E}(X) = n/\lambda$. Inoltre, si può dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 3 Siano Y_i per $i = 1, 2, \dots, n$ variabili aleatorie indipendenti distribuite secondo la legge di Erlang di parametri k_i e λ . Risulta che $Z = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ ha distribuzione di Erlang di parametri $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ e λ .

Esempio 11 Consideriamo un centro di servizio ad ingresso unico consistente di k stazioni di lavoro identiche ed indipendenti, come schematizzato in Figura 11. Assumiamo che per $j =$

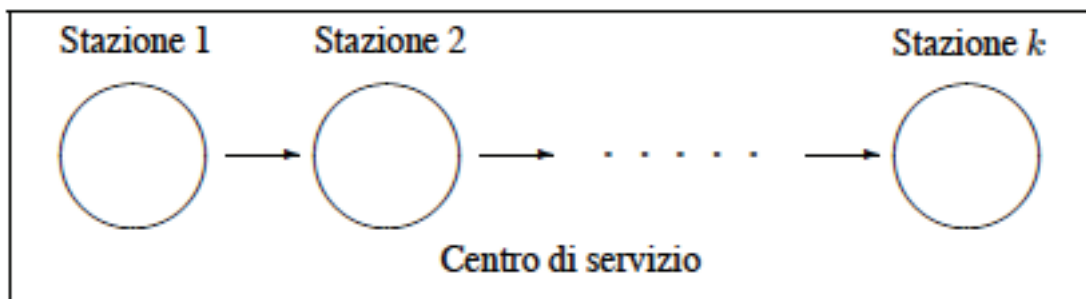


Figure 11: Un centro di servizio con un unico ingresso e k stazioni identiche e indipendenti.

$1, 2, \dots, k$ la durata di servizio nella generica stazione j (ossia l'intervallo di tempo misurato dall'istante in cui l'utente entra nella stazione j -esima fino a quando ne esce) sia descritto da una variabile aleatoria S_j distribuita con legge esponenziale di parametro μ .

Una situazione reale tipica è, ad esempio, quella di un centro di assistenza automobilistico che prevede varie operazioni successive sulle auto in ingresso (controllo pneumatici, lavaggio e ingrassaggio, ecc.).

Sia $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$ la variabile aleatoria che rappresenta la durata di servizio di un utente (ossia il tempo misurato dall'istante in cui l'utente entra nella prima stazione fino a quando esce dalla k -esima stazione). Evidentemente, S è la somma di k variabili aleatorie indipendenti ed

esponenzialmente distribuite di parametro μ . Pertanto, in virtù della Proposizione 2, segue che S è caratterizzata da densità di Erlang di parametri k e μ .

Se il tempo tra due successivi guasti di un dispositivo riparabile segue la distribuzione esponenziale di media $\vartheta = 1/\lambda$, allora la densità di probabilità della variabile aleatoria che descrive il tempo necessario affinché si verifichi il k -esimo guasto segue la legge di Erlang di parametri k e λ .

La distribuzione di Erlang è un caso particolare della distribuzione gamma qui di seguito definita.

Definizione Siano λ e ν reali positivi. Una variabile aleatoria X si dice distribuita secondo la legge gamma di parametri λ e ν , denotata con $\Gamma(\nu, 1/\lambda)$, se la sua densità di probabilità è

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\nu x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

dove

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx, \quad \nu > 0$$

è la ben nota funzione di Eulero.

Osserviamo $\Gamma(1) = 1$ e per $\nu > 1$ risulta $\Gamma(\nu) = (\nu - 1)\Gamma(\nu - 1)$ così che, se ν è intero risulta $\Gamma(\nu) = (\nu - 1)!$. Inoltre, la media della distribuzione gamma è $\mathbb{E}(X) = \nu/\lambda$.

Quindi, la distribuzione esponenziale e la distribuzione di Erlang sono casi particolari della distribuzione gamma, la prima è una $\Gamma(1, 1/\lambda)$ mentre la seconda è una $\Gamma(k, 1/\lambda)$.

Un altro caso particolare della legge gamma si ha quando $\vartheta = 1/\lambda = 2$ con $\nu = n/2$; infatti, la distribuzione $\Gamma(n/2, 1/2)$ è una distribuzione χ^2 con n gradi di libertà:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{2}^{n/2} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

In Figura 12 è mostrato l'andamento di una densità di probabilità χ^2 con $n = 1, 3, 5, 7$ gradi di libertà.

In generale, la distribuzione gamma soddisfa una “proprietà additiva”. Infatti, la somma di due variabili aleatorie indipendenti entrambe di distribuzione gamma caratterizzate da parametri $(\nu_1, 1/\lambda)$ e $(\nu_2, 1/\lambda)$, rispettivamente è distribuita secondo la legge $\Gamma(\nu_1 + \nu_2, 1/\lambda)$.

Inoltre, se X è di distribuzione $\Gamma(\nu, 1/\lambda)$ allora la variabile $Y = cX$ è $\Gamma(\nu, c/\lambda)$. Pertanto, visto che la somma di k tempi di rottura $T = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ segue la legge di Erlang $\Gamma(k, 1/\lambda)$ allora la stima del tempo medio di rottura

$$\hat{\vartheta} = \frac{T}{k} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_k}{k}$$

sarà distribuita secondo la legge $\Gamma(k, 1/k\lambda)$. Quindi, la variabile

$$2k\lambda\hat{\vartheta} \equiv \frac{2k\hat{\vartheta}}{\vartheta}$$

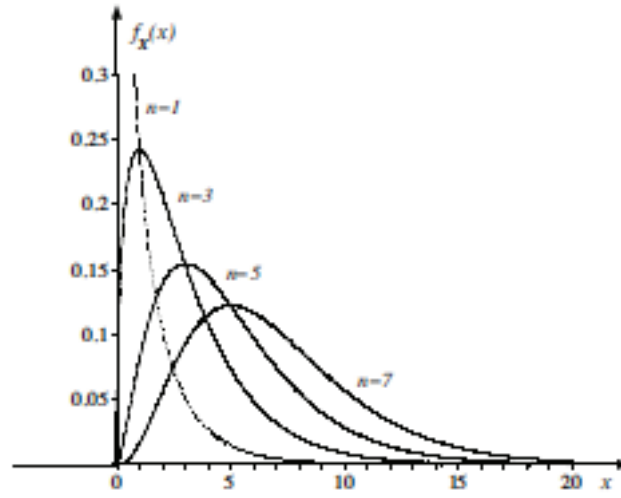


Figure 12: Densità di probabilità χ^2 con n gradi di libertà.

è distribuita secondo la legge $\Gamma(k, 2)$ che coincide con la legge χ^2 con $n = 2k$ gradi di libertà.

Un'importante applicazione della distribuzione gamma è la modellazione di tempi di rottura di componenti soggette a shocks che si verificano in accordo ad una distribuzione di Poisson con intensità λ . Se la componente ad ogni shock subisce un danno parziale o un degrado, allora il tempo di rottura della componente è caratterizzato da una distribuzione $\Gamma(k, 1/\lambda)$.

Un'altra applicazione della distribuzione gamma è connessa alla determinazione dell'incertezza associata al tempo medio di rottura determinato da un numero limitato di guasti che si verificano ad istanti successivi. Questa applicazione è discussa qui di seguito.

Incetenza associata al tempo medio di rottura

Consideriamo delle componenti caratterizzate da failure rate costante e sottoponiamole ad un test di fallimento secondo la seguente procedura. Dopo il fallimento le componenti non sono sostituite; il test è interrotto quando si verifica il k -esimo fallimento, a questo punto diciamo che sono state accumulate T component-hours.

Le osservazioni terminano quando si verifica il k -guasto, nel senso che l'istante in cui terminano le osservazioni coincide con l'istante in cui si verifica il k -esimo fallimento.

La variabile T rappresenta il tempo operativo totale accumulato e include i tempi di fallimento di tutte le k componenti coinvolte nel test. Il tempo medio di fallimento può essere stimato dividendo il tempo operativo totale per il numero di fallimenti:

$$\hat{\vartheta} = \frac{T}{k}.$$

Quindi T/k rappresenta lo stimatore del MTTF incognito. Assumiamo che ϑ sia il valore reale dell' MTTF, in accordo a quanto detto precedentemente, $2k\lambda\hat{\vartheta}$ segue la distribuzione χ^2 con $n = 2k$ gradi di libertà. In altri termini, $2T/\vartheta$ segue la distribuzione χ^2 con $2k$ gradi di libertà. Questa proprietà può essere usata per determinare un limite inferiore per l'MTTF che sia garantito con

un certo livello di probabilità, ossia con un certo grado di confidenza. In altri termini, vogliamo individuare un limite tale che lo stimatore risulti maggiore di tale limite con probabilità p :

$$\mathbb{P}(\vartheta \geq \vartheta^*) = \mathbb{P}(\chi^2 \leq \chi_{\alpha, 2k}^2) = 1 - \alpha = p.$$

Il valore che si sta cercando, denotato con $\chi_{\alpha, 2k}^2$, taglia una regione di area pari ad $\alpha = 1 - p$ nella coda di destra della distribuzione χ^2 (cf. Figura 13).

Questo valore è $\vartheta^* = 2T/\chi_{\alpha, 2k}^2$ dove $\chi_{\alpha, 2k}^2$ è il valore della statistica χ^2 con $n = 2k$ gradi di libertà

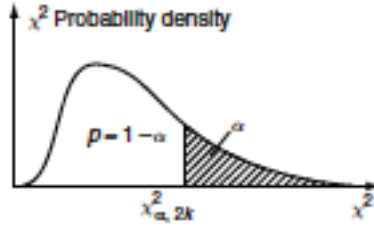


Figure 13: Densità di probabilità χ^2 .

per il livello di confidenza $p = 1 - \alpha$.

La probabilità che l'MTTF ϑ sia maggiore del limite inferiore ϑ^* è uguale alla probabilità che la statistica χ^2 sia maggiore del limite individuato $\chi_{\alpha, 2k}^2$, cioè:

$$\mathbb{P}(\vartheta \geq \vartheta^*) = \mathbb{P}(\chi^2 \leq \chi_{\alpha, 2k}^2) = 1 - \alpha = p.$$

Supponiamo ora che $\chi_{\alpha_1, 2k}^2$ e $\chi_{\alpha_2, 2k}^2$ corrispondano a due specificati limiti denotati con ϑ_1 e ϑ_2 e assumiamo che $\vartheta_1 < \vartheta_2$. La probabilità che il valore vero dell'MTTF sia compreso tra questi due limiti è dato dalla probabilità che la statistica χ^2 si trovi tra i due valori $\chi_{\alpha_1, 2k}^2$ e $\chi_{\alpha_2, 2k}^2$, così, con riferimento alla Figura 14, si ha:

$$\mathbb{P}(\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2) = \mathbb{P}(\chi_{\alpha_2, 2k}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{\alpha_1, 2k}^2) = \alpha_2 - \alpha_1.$$

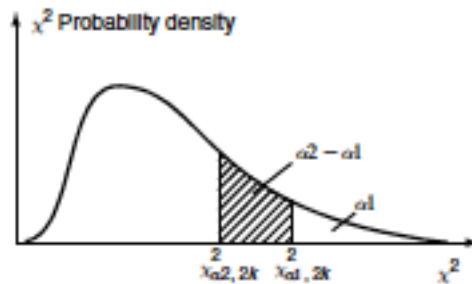


Figure 14: Densità di probabilità χ^2 .

Un'altra questione interessante è la stima del livello di confidenza per lo stimatore prima definito. In altre parole, è interessante conoscere la probabilità con cui il “valore vero” dell'MTTF ϑ

risulta maggiore dello stimatore di ϑ dato dal rapporto T/k . Questa probabilità si può calcolare determinando il valore della statistica χ^2 . Infatti, ricordiamo che

$$\hat{\vartheta} = \frac{T}{k} \quad \chi^2 = \frac{2T}{\hat{\vartheta}}.$$

Inoltre, per $n = 2k$ gradi di libertà, dalle tavole della distribuzione χ^2 , si può calcolare il valore approssimato $\chi_{\alpha, 2k}^2$ che corrisponde ad una massa probabilistica pari ad α . Il valore $1 - \alpha$ è il livello di confidenza con cui il “valore vero” dell’MTTF è maggiore dello stimatore. In questi casi esistono due valori della statistica χ^2 che costituiscono i valori limiti tra i quali l’MTTF cade con probabilità p . Il limite inferiore $\chi_{1-\alpha, 2k}^2$ è usato per individuare il limite superiore di confidenza $\vartheta_U = 2T/\chi_{1-\alpha, 2k}^2$ mentre il limite superiore $\chi_{\alpha, 2k}^2$ è utilizzato per individuare il limite inferiore di confidenza $\vartheta_L = 2T/\chi_{\alpha, 2k}^2$. Pertanto, con riferimento alla Figura 15, risulta che

$$\mathbb{P}(\vartheta_L \leq \vartheta \leq \vartheta_U) = \mathbb{P}(\chi_{1-\alpha, 2k}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{\alpha, 2k}^2) \equiv 1 - \alpha.$$

Si dovrebbe puntualizzare che per rotture caratterizzate da failure rate non costante, la misura

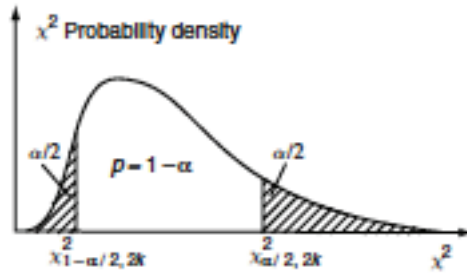


Figure 15: Densità di probabilità χ^2 .

di affidabilità data dall’MTTF può essere fuorviante in quanto valori elevati dell’MTTF possono essere ottenuti da dati di fallimento nei quali le frequenze di rottura aumentano all’inizio, caratterizzando un periodo di bassa affidabilità, e successivamente decrescono definendo un’alta affidabilità. Quanto appena detto è illustrato dal seguente esempio.

Esempio 12 Consideriamo due componenti dello stesso tipo con diversi MTTF. Per il primo componente i tempi di rottura misurati in giorni sono

$$5, 21, 52, 4131, 8032, 12170, 16209$$

così che l’MTTF è

$$\text{MTTF}_1 = \frac{5 + 21 + 52 + 4131 + 8032 + 12170 + 16209}{7} \simeq 5803 \text{ giorni}.$$

Per il secondo componente, invece, risulta:

$$412, 608, 823, 1105, 1291, 1477$$

e quindi

$$\text{MTTF}_2 = \frac{412 + 608 + 823 + 1105 + 1291 + 1477}{6} \simeq 953 \text{ giorni}.$$

Supponiamo che sia richiesto un lavoro affidabile nel primo anno.

Se la selezione viene effettuata solo sulla base dell'MTTF allora verrà selezionato il componente con minore affidabilità nel primo anno.

Tempo medio tra due rotture

Il tempo medio tra due fallimenti (MTBF) è una misura di affidabilità definita per sistemi riparabili. Assumiamo che la componente che si rompe sia sostituita da una nuova. Denotiamo con U_i la durata dello i -esimo periodo operativo (uptime) e sia D_i il tempo necessario per ripristinare il sistema dopo la rottura (downtime). Assumiamo, inoltre, che $X_i = U_i + D_i$ siano variabili aleatorie indipendenti. Risulta che

$$\text{MTBF} = \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(U_i + D_i) = \mathbb{E}(U_i) + \mathbb{E}(D_i) = \text{MTTF} + \text{MTTR},$$

dove $\mathbb{E}(U_i) = \text{MTTF}$ è l'uptime medio e $\mathbb{E}(D_i) = \text{MTTR}$ è il downtime medio che corrisponde al tempo medio di riparazione.

Distribuzione normale

Spesso la variabile aleatoria di interesse è data dalla somma di un gran numero di variabili aleatorie nessuna delle quali risulta dominante rispetto alla somma. Ad esempio, se si pensa alla distribuzione di una variabile aleatoria che rappresenta un parametro di un progetto, come può essere la lunghezza, si vede che questa può incorporare un gran numero di fattori quali la variazione di temperatura, le variazioni nei parametri del sistema di controllo, ...

Se il numero di contributi separati (ossia di termini aggiuntivi) è relativamente grande e se nessuno di essi domina la distribuzione dell'intera somma allora si può assumere che tale somma sia approssimativamente distribuita secondo la legge normale con media uguale alla somma delle medie e varianza data dalla somma delle varianze dei singoli contributi. La variazione di un parametro di qualità in un manufatto spesso si adatta bene alla distribuzione normale perché la variazione in genere è il risultato dell'effetto additivo di molteplici fattori nessuno dei quali è prevalente.

Quanto appena detto è il risultato del teorema centrale di convergenza che può essere così enunciato:

Teorema centrale di convergenza Sia X_1, X_2, \dots una successione di variabili aleatorie, definite nello stesso spazio di probabilità, indipendenti e identicamente distribuite con valore medio μ finito e varianza σ^2 finita e positiva. Denotando con $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{Y_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy = \Phi(x),$$

ossia la successione delle variabili aleatorie standardizzate

$$Z_n = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{\text{Var}(Y_n)}} = \frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n} \sigma}, \quad n = 1, 2, \dots$$

converge in distribuzione alla variabile aleatoria normale standard.

Ad illustrazione del teorema consideriamo la situazione in cui si desidera determinare la distribuzione del peso medio di n oggetti selezionati da uno stesso lotto. Supponiamo che l'intera popolazione sia caratterizzata da peso medio μ e deviazione standard σ . Dal teorema segue che se n è sufficientemente grande la media campionaria delle osservazioni, ossia la somma delle osservazioni diviso per n , standardizzata tende a distribuirsi secondo la legge normale standard al crescere di n . Pertanto, la media campionaria al crescere di n può approssimativamente considerarsi come una variabile aleatoria normale di media μ e deviazione standard σ/\sqrt{n} .

Più in generale si può affermare che la distribuzione della somma di n variabili aleatorie indipendenti, nessuna delle quali sia prevalente rispetto alle altre, al crescere di n tende ad una distribuzione normale di media data dalla somma delle medie e varianza pari alla somma delle varianze.

Una variabile aleatoria assolutamente continua X si dice di distribuzione normale con parametri μ e σ se la sua densità di probabilità è

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0),$$

il parametro μ rappresenta la media di X e σ^2 ne è la varianza.

Osservazione 9 La funzione $f_X(x)$ è una densità di probabilità infatti è non negativa ed è integrata a 1. Quest'ultimo punto può essere mostrato osservando che

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{u^2 + v^2}{2}\right\} dv \end{aligned}$$

e, passando alle coordinate polari, si ha

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \varrho \exp\left\{-\frac{\varrho^2}{2}\right\} d\varrho \int_0^{2\pi} d\vartheta = 1,$$

da cui segue $A = 1$, il che dimostra l'asserto.

La densità $f_X(x)$ presenta un massimo in $x = \mu$ e due flessi nei punti di ascissa $\mu \pm \sigma$, infatti risulta:

$$\begin{aligned} \frac{df_X(x)}{dx} &= -\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f_X(x), \\ \frac{d^2f_X(x)}{dx^2} &= -\frac{(x-\mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = -\frac{(x-\mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4} f_X(x). \end{aligned}$$

In Figura 16 sono mostrati andamenti tipici della densità normale. Il primo grafico mostra la densità normale standard, il secondo $f_X(x)$ per $\sigma^2 = 1$ e $\mu = -2, -1, 0, 1, 2$, infine il terzo mostra il grafico della densità di probabilità normale per $\mu = 0$ e $\sigma = 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$ (dall'alto verso il basso in prossimità dell'origine).

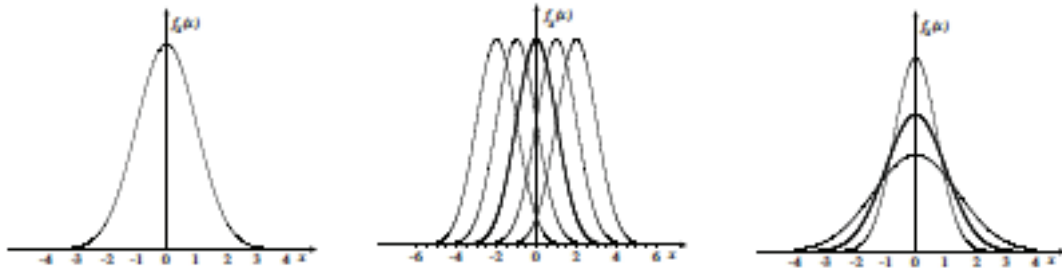


Figure 16: La densità normale standard (a sinistra) e la densità normale per $\sigma^2 = 1$ e $\mu = -2, -1, 0, 1, 2$ (al centro) e la densità normale per $\mu = 0$ e $\sigma = 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$ (dall'alto verso il basso in prossimità dell'origine).

Il parametro σ , che misura la semiampiezza fra i due punti di flesso, caratterizza la larghezza della funzione. Inoltre, poiché l'ordinata massima è inversamente proporzionale a σ , segue che al crescere di σ questa decresce, mentre l'area sottesa dalla densità deve rimanere unitaria. Quindi al crescere di σ la curva diventa sempre più piatta, mentre al decrescere di σ essa si allunga verso l'alto restringendosi contemporaneamente ai lati. La funzione di distribuzione di una variabile aleatoria X normale di parametri μ e σ è:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz. \end{aligned}$$

Particolare importanza riveste il caso $\mu = 0$, $\sigma = 1$. La variabile aleatoria $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ è detta *normale standard*. In questo caso la densità di probabilità è

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e la funzione di distribuzione risulta

$$\Phi(z) = F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Come ogni funzione di distribuzione, $\Phi(z)$ gode delle seguenti proprietà:

- (a) $\lim_{z \rightarrow -\infty} \Phi(z) = 0$;
- (b) $\lim_{z \rightarrow +\infty} \Phi(z) = 1$;
- (c) $\Phi(z)$ è una funzione non decrescente.

Inoltre, per $x > 0$ dalla simmetria della densità normale standard segue che

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = 1 - \Phi(x).$$

La funzione di distribuzione di una generica variabile normale di parametri μ e σ si esprime in termini delle funzione di distribuzione normale standard. Infatti, risulta:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Inoltre, si ha:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

Pertanto, per $a = \mu - \varepsilon$ e $b = \mu + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, segue:

$$\mathbb{P}(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

Facendo uso dei valori della tavola della distribuzione normale standard, risulta:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= 2\Phi(1) - 1 \simeq 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826, \\ \mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) &= 2\Phi(2) - 1 \simeq 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544, \\ \mathbb{P}(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &= 2\Phi(3) - 1 \simeq 2 \cdot 0.9987 - 1 = 0.9974,\end{aligned}$$

il che mostra che la probabilità con cui una variabile normale assume valori in un intervallo centrato in μ di semiampiezza 3σ è prossima all'unità. Questa proprietà è nota come proprietà del 3σ .

Esempio 13 Supponiamo che la pressione X di un dispositivo sia una variabile aleatoria distribuita secondo la legge normale di media $\mu = 75\text{MPa}$ e deviazione standard $\sigma = 10\text{MPa}$. Risulta che

$$\mathbb{P}(X \leq 65\text{MPa}) = \Phi[(65 - 75)/10] = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.158.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(55 \leq X \leq 65) &= \Phi[(65 - 75)/10] - \Phi[(55 - 75)/10] = \Phi(-1) - \Phi(-2) = 1 - \Phi(1) - 1 - \Phi(2) \\ &= \Phi(2) - \Phi(1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359.\end{aligned}$$

Esempio 14 Sia X una variabile normale di parametri μ e σ ; vogliamo determinare la distribuzione di $Y = aX + b$ con a non nullo. Osserviamo che risulta $\mathbb{P}[Y < y] = \mathbb{P}[aX + b < y]$ pertanto, derivando rispetto a y segue che

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y - b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} \exp\left\{-\frac{(y - a\mu - b)^2}{2\sigma^2 a^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ossia Y è normale di parametri $a\mu + b$ e $|a|\sigma$.

Esempio 15 Sia X una variabile normale di parametri $\mu = 0$ e $\sigma = 0.01$. Supponiamo che X descriva l'errore di misura nel valutare una certa distanza. La probabilità p che il valore assoluto dell'errore di misura sia minore di $\beta = 0.02$ è data da:

$$\begin{aligned}p &= \mathbb{P}(|X| < \beta) = \mathbb{P}(-\beta < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\beta}{\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0.9544,\end{aligned}$$

dove il valore di $\Phi(2)$ è ottenuto dalla Tavola della distribuzione normale.

Esempio 16 Sia X una variabile normale di parametri μ e σ . Vogliamo determinare il reale $\varepsilon > 0$ tale che $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon) = 1/2$. Poiché risulta:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(|X - \mu| < \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) = 2 - 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

da cui, imponendo che $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon) = 1/2$, si ricava $\Phi(\varepsilon/\sigma) = 3/4 = 0.75$. Facendo uso della Tabella della distribuzione normale, si può determinare il valore x per il quale $\Phi(x) = 0.75$; così facendo si ottiene $x \simeq 0.68$.

In conclusione, affinché $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon) = 1/2$, deve risultare $\varepsilon \simeq 0.68\sigma$.

Proposizione 4 La somma di n variabili aleatorie indipendenti e di distribuzione normale aventi media μ_i e varianze σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) è una variabile aleatoria normale di media pari alla somma delle medie e varianza data dalla somma delle varianze. Inoltre, la differenza di due variabili aleatorie normali indipendenti è una variabile normale di media data dalla differenza delle medie e da varianza data dalla somma delle varianze.

Esempio 17 Consideriamo una forza costituita da tre forze allineate le cui intensità sono distribuite secondo la distribuzione normale. Assumendo che tali forze siano indipendenti tra loro segue che l'intensità della forza risultante è una variabile aleatoria di distribuzione normale avente media data dalla somma delle medie e varianza data dalla somma delle varianze.

Distribuzione lognormale

La variabile aleatoria X si dice lognormale se $Y = \ln X$ è distribuita secondo la legge normale. Supponiamo che $X = \prod_{i=1}^n Y_i$ sia il prodotto di certe grandezze Y_i tra loro indipendenti nessuna delle quali prevale sull'intero prodotto, ad esempio possiamo immaginare che $X = Y_n$. Per il teorema centrale di convergenza si ha che per n sufficientemente grande $\ln X = \sum_{i=1}^n Y_i$ è una variabile aleatoria approssimativamente normale. Quest'osservazione conduce ad una versione moltiplicativa del teorema centrale di convergenza.

La distribuzione lognormale è un modello adeguato in tutti i contesti in cui valgono le seguenti assunzioni:

- esiste un effetto moltiplicativo di un certo numero di fattori che controllano l'affidabilità,
- i fattori di controllo sono statisticamente indipendenti,
- il numero di tali fattori è relativamente alto.

Una variabile X è di distribuzione lognormale se la sua densità di probabilità è:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x > 0),$$

dove μ e σ sono rispettivamente la media e la deviazione standard della variabile $\ln X$ (cf. Figura 17). La media di X è $e^{\mu+\sigma^2/2}$ e la varianza risulta $e^{2\mu+2\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

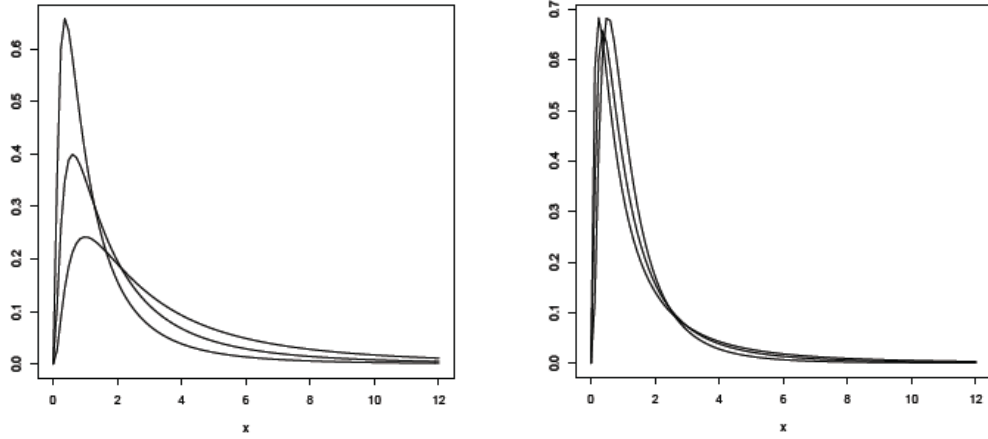


Figure 17: A sinistra la densità lognormale per $\sigma = 1$ e $\mu = 0, 0.5, 1$ (curva in basso), a destra la densità è plottata per $\mu = 1$ e $\sigma = 0.8, 1, 1.2$ (curva più a destra).

Ricordiamo che la somma di variabili aleatorie indipendenti di distribuzione normale è una variabile normale, pertanto, date n variabili indipendenti Y_i di distribuzione lognormale la variabile $X = \prod_{i=1}^n Y_i$ è di distribuzione lognormale essendo $\ln X$ una variabile normale.

Spesso le variabili lognormali sono utilizzate per descrivere forze, potenze, ... osserviamo che all'aumentare della media e al diminuire della deviazione standard la curva della densità lognormale tende a trasformarsi gradatamente in una densità normale.

Il failure rate di una distribuzione lognormale all'inizio aumenta per poi diminuire, pertanto questa distribuzione non è adeguata per descrivere tempi di rottura di componenti, può invece essere utilizzata per descrivere tempi di riparazione. La distribuzione dei tempi di riparazione generalmente è caratterizzata da un periodo iniziale più lungo dovuto ad un'eventuale coda ...

Distribuzione iperesponenziale

La distribuzione iperesponenziale è una combinazione lineare di funzioni di distribuzione esponenziali. Una tale distribuzione interviene nella costruzione di modelli di fenomeni aleatori quali tempi di attesa o di servizio.

Definizione 3 Siano a_1, a_2, \dots, a_n reali non negativi tali che la loro somma sia unitaria. La variabile aleatoria X di densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x > 0 \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $\lambda_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), si dice di distribuzione iperesponenziale con parametri $a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

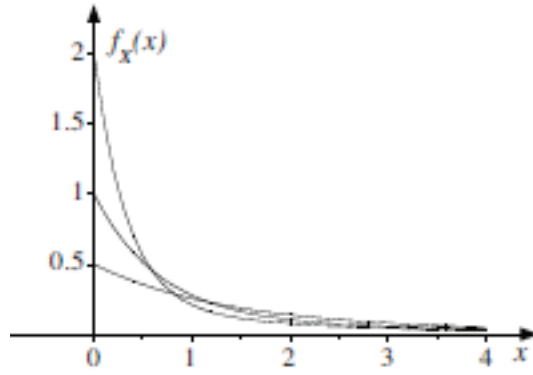


Figure 18: La densità iperesponenziale per $n = 2$ e per $a_1 = 0.4, a_2 = 0.6, \lambda_1 = 0.5\lambda, \lambda_2 = 3\lambda$ con $\lambda = 1, 0.5, 0.25$ (dall'alto verso il basso).

La funzione di distribuzione di X è:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{i=1}^n a_i [1 - e^{-\lambda_i x}] = 1 - \sum_{i=1}^n a_i e^{-\lambda_i x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Ovviamente, per $n = 1$, o nel caso in cui i parametri λ_i sono tutti uguali fra loro, la distribuzione iperesponenziale si riduce alla distribuzione esponenziale. In Figura 18 è mostrata la densità iperesponenziale per $n = 2$ e per $a_1 = 0.4, a_2 = 0.6, \lambda_1 = 0.5\lambda, \lambda_2 = 3\lambda$ con $\lambda = 1, 0.5, 0.25$ (dall'alto verso il basso).

Esempio 18 Consideriamo un centro di assistenza consistente in un'unica stazione di lavoro che fornisce k diversi tipi di servizi. Supponiamo che la probabilità che l'utente richieda un servizio di tipo i sia p_i , con $p_i \geq 0$ per $i = 1, 2, \dots, k$ e tali che la somma delle p_i valga 1. Una situazione tipica è quella di uno sportello informativo in grado di erogare k tipi di informazioni. Supponiamo, inoltre, che la durata di un servizio di tipo i sia descritta dalla variabile aleatoria S_i esponenziale di parametro λ_i per $i = 1, 2, \dots, k$. Determiniamo la distribuzione della variabile aleatoria S descrivente il tempo effettivo di servizio, ossia il tempo necessario per soddisfare un qualsiasi tipo di richiesta dell'utente. Se si pone

$$A_t = \{\text{il tempo di servizio non supera } t\},$$

$$B_r = \{\text{l'utente ha richiesto il servizio di tipo } r\} \quad (r = 1, 2, \dots, k),$$

risulta:

$$A_t = \bigcup_{i=1}^k (B_i \cap A_t).$$

Infatti l'evento A_t si realizza se e solo se si verifica uno qualunque dei k eventi incompatibili

B_1, B_2, \dots, B_k . Pertanto, $\mathbb{P}(S \leq t) = 0$ per $t < 0$, mentre per $t \geq 0$ si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \leq t) &= \mathbb{P}(A_t) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B_i \cap A_t) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(A_t | B_i) \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \mathbb{P}(S_i < t) = \sum_{i=1}^k p_i \left[1 - e^{-\mu_i t} \right].\end{aligned}$$

Pertanto, S è di distribuzione iperesponenziale di parametri $p_1, p_2, \dots, p_k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Confrontando la situazione dell'Esempio 11 con quella descritta nell'Esempio 18, possiamo concludere che la distribuzione di Erlang si riferisce ad una somma di variabili aleatorie esponenziali mentre la distribuzione ipersponenziale, pur riferendosi a variabili esponenziali, non ne considera la somma.

Distribuzione di Weibull

Questa distribuzione fu proposta da Weibull nel 1939 per descrivere la durata di vita dei materiali. Essa trova ampia applicazione nella teoria dell'affidabilità in quanto descrive fenomeni aleatori di rottura, decadimento, crollo, ... In particolare è adatta a descrivere i tempi di rottura di componenti strutturate o di sistemi che si guastano quando la componente più debole si rompe. Questo modello è usato anche per la distribuzione della resistenza di materiali fragili. Uno dei motivi è che un sistema costituito da più anelli si guasta a causa della rottura dell'elemento più debole e tale rottura può essere dovuta alla tensione esercitata sull'intero sistema. La funzione di distribuzione di Weibull è

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{\sigma - \sigma_0}{\eta} \right]^m \right\},$$

dove $F(\sigma)$ è la probabilità di rottura ad una sollecitazione σ , σ_0 è la sollecitazione minima al di sotto della quale la probabilità di rottura è nulla, η è un fattore di scala ed m è un parametro di forma.

La funzione $R(\sigma) = 1 - F(\sigma)$ descrive la probabilità di sopravvivenza ad una tensione di carico σ . Se si usa il tempo t invece della tensione σ , allora la relazione precedente diventa

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{t - t_0}{\eta} \right]^m \right\}$$

che descrive una distribuzione dei tempi di rottura. In particolare, $F(t)$ rappresenta la probabilità che ci sia un guasto prima dell'istante t , il parametro t_0 rappresenta la durata minima del dispositivo in esame, η è la durata caratteristica ed m è un parametro di forma. In molti casi t_0 è scelto nullo così che la distribuzione diventa

$$F(t) = 1 - \exp \{ - (t/\eta)^m \}$$

e, conseguentemente la densità di probabilità è

$$f(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{m-1} \exp \{ - (t/\eta)^m \}.$$

Notiamo che X è una variabile aleatoria di Weibull

$$\mathbb{E}(X) = \eta^{1/m} \Gamma(1 + 1/m), \quad \mathbb{V}(X) = \eta^{2/m} [\Gamma(1 + 2/m) - \Gamma^2(1 + 1/m)].$$

In Figura 19 è rappresentata la densità di Weibull per $\eta = 0.2$ e $m = 1, 2, 2.5, 4.6, 5$. Osserviamo

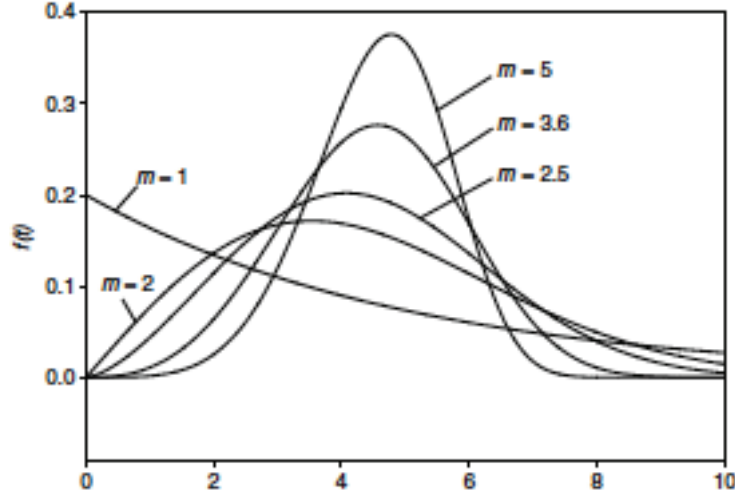


Figure 19: La densità di Weibull per $\eta = 0.2$ e $m = 1, 2, 2.5, 4.6, 5$.

che per $m = 1$ la distribuzione di Weibull diventa una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1/\eta$. In Figura 20 è rappresentato il failure rate della distribuzione di Weibull per $\eta = 1$ e $m = 0.5, 1, 1.5, 2, 4.2$. Notiamo esplicitamente che per $m < 1$ l'hazard rate è decrescente, per $m > 1$ è crescente e rimane costante per $m = 1$ (caso della distribuzione esponenziale).

Pertanto, la distribuzione di Weibull può essere utilizzata per descrivere guasti infantili scegliendo $m < 1$ in quanto in questa fase il tasso di mortalità deve risultare decrescente, scegliendo $m > 1$ possiamo usare questa distribuzione per descrivere i guasti nella vecchiaia del dispositivo, infine con $m = 1$ si può descrivere la fase della vita matura in quanto in questa fase il failure rate è costante.

Proposizione 5 Siano X_1, X_2, \dots variabili aleatorie non-negative indipendenti e identicamente distribuite di funzione di distribuzione $F(x)$ tale che

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{F(x)}{\lambda x^\alpha} = 1,$$

con $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$. Denotando con

$$Y_n = n^{1/\alpha} \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = \sqrt[n]{n} \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x)$ è una funzione di distribuzione di Weibull di parametri λ e α .

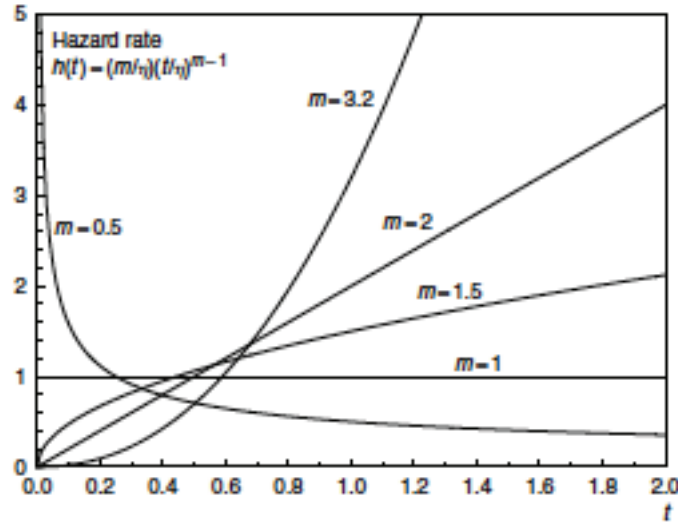


Figure 20: Il failure rate per la distribuzione di Weibull $\eta = 1$ e $m = 0.5, 1, 1.5, 2, 4.2$.

Dimostrazione Osserviamo che poiché $\frac{Y_n}{\sqrt[n]{n}} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, si ha:

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq \frac{x}{n^{1/\alpha}}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \left[1 - F_X\left(\frac{x}{n^{1/\alpha}}\right)\right]^n, & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre, dall'ipotesi si ha che $F(x/n^{1/\alpha}) \rightarrow \lambda(x/n^{1/\alpha})^\alpha$ per $x \rightarrow 0$. Pertanto, risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - F_X\left(\frac{x}{n^{1/\alpha}}\right)\right]^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \lambda \left(\frac{x}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha\right]^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda x^\alpha}{n}\right)^n = \exp\{-\lambda x^\alpha\},$$

così che per $x > 0$ segue:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x) = 1 - \exp\{-\lambda x^\alpha\}.$$

Osserviamo che, sotto le ipotesi della Proposizione 5, per n sufficientemente grande sussiste la seguente approssimazione:

$$\mathbb{P}(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x) \simeq 1 - e^{-\lambda n x^\alpha}, \quad x > 0.$$

Ricordiamo che se le variabili X_1, X_2, \dots, X_n descrivono i tempi di corretto funzionamento di n componenti di un sistema collegate in serie allora $V = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ rappresenta il tempo di funzionamento corretto dell'intero sistema; pertanto, sotto le ipotesi della proposizione, al crescere di n risulta che la durata del sistema tende a distribuirsi in accordo ad una distribuzione di Weibull qualunque sia la distribuzione F purché in prossimità dello zero si comporti come λx^α .

Esempio 19 Siano X_1, X_2, \dots, X_n , variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo la legge di Erlang di parametri k e μ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{\mu^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x}, & x > 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La distribuzione di $V = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ è:

$$F_V(x) = 1 - [1 - F(x)]^n = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-n\mu x} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu x)^j}{j!} \right]^n, & x \geq 0, \end{cases}$$

dove $F(x)$ rappresenta la distribuzione comune delle X_i . Facendo uso della regola dell'Hospital segue che

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{F(x)}{\lambda x^\alpha} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{\lambda \alpha x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0, & k > \alpha \\ \frac{\mu^k}{\lambda k!}, & k = \alpha \\ +\infty, & k < \alpha. \end{cases}$$

Pertanto, le ipotesi della proposizione sono soddisfatte se si sceglie $\alpha = k$ e $\lambda = \mu^k/k!$; con queste assunzioni si ha che per n sufficientemente grande risulta:

$$F_V(x) \simeq G(x) = 1 - \exp \left\{ -n \frac{(\mu x)^k}{k!} \right\}, \quad x > 0.$$

Nella Tabella 3 sono riportati i valori delle distribuzioni $F_V(x)$ e $G(x)$ per $k = 3, \mu = 0.01$ e $n = 106$ in corrispondenza di alcune scelte di x .

x	$F_V(x)$	$G(x)$
0.1	0.00447982	0.00448989
0.2	0.0352038	0.0353597
0.3	0.113685	0.114409
0.4	0.248302	0.250238
0.5	0.426622	0.430217
0.6	0.616713	0.621674
0.7	0.781156	0.786368
0.8	0.895954	0.900141
0.9	0.959836	0.962391
1.0	0.987722	0.988891

Table 3: I valori delle funzioni $F_V(x)$ e $G(x)$ $k = 3, \mu = 0.01$ e $n = 10^6$ in corrispondenza di alcune scelte di x .

2 Distribuzioni per valori estremi

Siano X_1, X_2, \dots, X_n , n osservazioni di una stessa variabile aleatoria che rappresenta, ad esempio, un carico, una pressione, una forza, una potenza, una resistenza.

Assumiamo che X_1, X_2, \dots, X_n sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite e denotiamo con $X = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ il massimo di tali osservazioni.

Supponiamo che la coda destra della distribuzione di X_k decresca abbastanza velocemente, almeno come la coda della distribuzione esponenziale; questa assunzione è soddisfatta dalla distribuzione esponenziale, dalla normale, dalla lognormale, dalla distribuzione di Weibull e dalla maggior parte delle distribuzioni di interesse nella teoria dell'affidabilità. Sotto tale assunzione si può dimostrare che al crescere di n la variabile X tende a distribuirsi secondo la legge

$$F(x) = \exp \left\{ - \exp \left[- \frac{x - \xi}{\vartheta} \right] \right\}$$

i cui parametri ξ (la moda) e ϑ (parametro di scala) sono legati alla media e alla varianza di X ; infatti risulta $\mathbb{E}(X) \simeq \xi + 0.57722 \vartheta$ e $\mathbb{V}(X) \simeq 1.28255 \vartheta$.

Supponiamo che le n osservazioni seguano la distribuzione del valore estremo “massimo”. In questo caso la distribuzione del massimo è:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \mathbb{P}(X_2 \leq x) \dots \mathbb{P}(X_n \leq x) = \exp \left\{ -n \exp \left[- \frac{x - \xi}{\vartheta} \right] \right\}.$$

Poiché risulta che

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -n \exp \left[- \frac{x - \xi}{\vartheta} \right] \right\} &= \exp \left\{ - \exp \left[- \frac{x - \xi}{\vartheta} \right] e^{\ln n} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \exp \left[- \frac{x - \xi}{\vartheta} + \ln n \right] \right\} = \exp \left\{ - \exp \left[- \frac{x - (\xi + \vartheta \ln n)}{\vartheta} \right] \right\}, \end{aligned}$$

segue che il massimo è distribuito come le singole X_i con lo stesso parametro di scala ϑ e un diverso parametro di “traslazione” $\xi' = \xi + \vartheta \ln n$:

$$F(x) = \exp \left\{ -n \exp \left[- \frac{x - \xi}{\vartheta} \right] \right\} = \exp \left\{ - \exp \left[- \frac{x - (\xi + \vartheta \ln n)}{\vartheta} \right] \right\} = \exp \left\{ - \exp \left[- \frac{x - \xi'}{\vartheta} \right] \right\}.$$

Pertanto, il massimo di un campionamento eseguito su una distribuzione di un valore estremo segue ancora la distribuzione di un valore estremo.

Come prima, supponiamo che X_1, X_2, \dots, X_n siano le osservazioni di una stessa variabile così che X_1, X_2, \dots, X_n possono assumersi indipendenti ed identicamente distribuite; denotiamo ora con $X = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ il minimo di tali osservazioni. Assumendo che la coda destra della distribuzione di X_k decresca almeno con la stessa velocità della coda della distribuzione esponenziale si può dimostrare che al crescere di n la variabile X tende a distribuirsi secondo la seguente legge

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left[\frac{x - \xi}{\vartheta} \right] \right\}.$$

La distribuzione del valore estremo può ad esempio essere utilizzata per descrivere la distribuzione della minima temperatura, della minima potenza o della minima resistenza.

La distribuzione di Weibull è legata alla distribuzione del minimo come la distribuzione lognormale è legata alla distribuzione normale. In particolare, se la variabile X è distribuita secondo la legge di Weibull allora il suo logaritmo $Y = \ln X$ segue la legge del minimo, infatti risulta:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left[\frac{y - \tilde{\xi}}{\tilde{\vartheta}} \right] \right\}.$$

D'altra parte si ha che data la variabile Y distribuita con la legge del minimo, $X = e^Y$ è distribuita secondo la legge di Weibull:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(e^Y \leq x) = P(Y \leq \ln x) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left[\frac{\ln x - \xi}{\vartheta} \right] \right\} = 1 - \exp \left\{ - \frac{x - \hat{\xi}}{\hat{\vartheta}} \right\}.$$

3 Affidabilità e modelli basati su misture di distribuzioni

3.1 Distribuzione di una “caratteristica” proveniente da sorgenti multiple

Supponiamo che i termini giungano da M diverse sorgenti in proporzioni p_1, p_2, \dots, p_M , con $p_1 + p_2 + \dots + p_M = 1$. Una particolare qualità dei termini proveniente dalla sorgente k è caratterizzata da media μ_k e da varianza σ_k^2 .

In molte applicazioni interessa valutare la varianza per i termini provenienti da tutte le sorgenti. In questi casi le caratteristiche di interesse possono essere descritte da una mistura di distribuzioni. Indichiamo con X_i la variabile aleatoria che misura la proprietà in esame proveniente dalla i -esima sorgente e con $F_i(x)$ la rispettiva distribuzione per $i = 1, 2, \dots, M$. La variabile X che misura la proprietà in esame indipendentemente dalla provenienza è caratterizzata dalla seguente distribuzione

$$F(x) = \sum_{k=1}^M p_k F_k(x)$$

ottenuta facendo uso del teorema delle alternative. Se le variabili X_i sono discrete con funzione di probabilità $\pi_i(x)$ allora anche X sarà discreta caratterizzata da una funzione di probabilità $\pi(x)$ data dalla combinazione lineare delle probabilità π_i così come se le X_i sono continue con densità di probabilità $f_i(x)$ allora anche X è continua e la sua densità $f(x)$ è la combinazione delle singole densità:

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^M p_k \pi_k(x), \quad f(x) = \sum_{k=1}^M p_k f_k(x).$$

In ogni caso risulta che la media μ è data dalla combinazione lineare delle singole medie:

$$\mu = \sum_{k=1}^M p_k \mu_k.$$

Per quanto riguarda la varianza di X osserviamo che

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 dF(x) = \sum_{k=1}^M p_k \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 dF_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^M p_k \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu - \mu_k + \mu_k)^2 dF_k(x).\end{aligned}$$

Pertanto, sviluppando il quadrato, segue che

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{k=1}^M p_k \int_{-\infty}^{\infty} [(x - \mu_k)^2 + (\mu_k - \mu)^2 + 2(x - \mu_k)(\mu_k - \mu)] dF_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^M p_k \{ \mathbb{E}[(X_k - \mu_k)^2] + (\mu_k - \mu)^2 + 2(\mu_k - \mu) \mathbb{E}[X_k - \mu_k] \},\end{aligned}$$

ovvero, ricordando che $\mathbb{E}[X_k - \mu_k] = 0$,

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mu_k)^2] + \mathbb{E}[(\mu_k - \mu)^2] = \sum_{k=1}^M p_k [V_k + (\mu_k - \mu)^2],$$

dove, V_k denota la varianza di X_k per $k = 1, 2, \dots, M$. Sebbene l'espressione ottenuta sia di facile utilizzo, permette di derivarne un'altra che coinvolge le distanze tra coppie di medie (μ_k, μ_j) . A tale scopo, osserviamo che

$$\sum_{k=1}^M p_k (\mu_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^M p_k (\mu_k^2 - 2\mu\mu_k + \mu^2) = \sum_{k=1}^M p_k (\mu_k^2 - \mu^2) = \sum_{k=1}^M p_k \mu_k^2 - \mu^2 = \sum_{k=1}^M p_k \mu_k^2 - \left(\sum_{k=1}^M p_k \mu_k \right)^2.$$

Inoltre, poiché risulta che

$$\sum_{k=1}^M p_k \mu_k^2 - \left(\sum_{k=1}^M p_k \mu_k \right)^2 = \sum_{k=1}^M \sum_{j < k}^M p_j p_k (\mu_k - \mu_j)^2,$$

segue infine che la varianza della mistura è esprimibile al seguente modo:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^M p_k V_k + \sum_{k=1}^M \sum_{j < k}^M p_j p_k (\mu_k - \mu_j)^2. \quad (14)$$

Osserviamo esplicitamente che nel caso generale la varianza di una mistura è esprimibile nella somma di due componenti. La prima include la somma dei termini $p_k V_k$ che misurano solo le variazioni delle singole proprietà all'interno delle sorgenti separate, riguarda quindi le variazioni connesse alle singole distribuzioni. La seconda somma caratterizza le variazioni delle proprietà tra le sorgenti separate che sono, a loro volta, caratteristiche delle sorgenti individuali. Se si assume che le singole distribuzioni siano caratterizzate dalla stessa media, quest'ultimo termine è nullo e la varianza totale diventa una somma pesata delle varianze relative alle singole sorgenti. Se invece assumiamo che le varianze delle singole sorgenti siano molto piccole allora è la prima somma che

è prossima a zero, così che la varianza totale è data solo dalla seconda somma; il che significa che la variazione totale della proprietà è individuata completamente dalla variazione tra le singole sorgenti.

In generale il numero di addendi coinvolti nella doppia sommatoria è pari a $M(M-1)/2$.

Per $M = 2$ si ha che

$$\sigma^2 = p V_1 + (1-p) V_2 + p(1-p) (\mu_1 - \mu_2)^2$$

mentre per $M = 3$ (cf. Figura 21) risulta:

$$\sigma^2 = p_1 V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3 + p_1 p_2 (\mu_1 - \mu_2)^2 + p_1 p_3 (\mu_1 - \mu_3)^2 + p_2 p_3 (\mu_2 - \mu_3)^2.$$

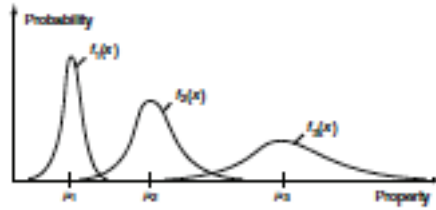


Figure 21: Una situazione in cui i termini giungono da tre sorgenti diverse.

Esempio 20 Supponiamo di selezionare casualmente piccoli campioni da una struttura costituita da tre componenti non omogenee, denotate con A, B e C . Le probabilità che nel campione compaiano esemplari di A, B e C sono date dalle frazioni di volume $p_1 = \xi_A = 0.55, p_2 = \xi_B = 0.35$ e $p_3 = \xi_C = 0.1$.

Le pressioni medie prodotte dai singoli componenti sono

$$\mu_A = 800\text{MPa}, \quad \mu_B = 600\text{MPa}, \quad \mu_C = 900\text{MPa}$$

e le rispettive deviazioni standard risultano

$$\sigma_A = 20\text{MPa}, \quad \sigma_B = 25\text{MPa}, \quad \sigma_C = 10\text{MPa}.$$

Siamo interessati alla valutazione della media e della varianza della pressione prodotta dal campionamento casuale della struttura non omogenea. Da quanto detto precedentemente risulta che

$$\begin{aligned} \mu &= p_A \mu_A + p_B \mu_B + p_C \mu_C = 0.55 \cdot 800 + 0.35 \cdot 600 + 0.10 \cdot 900 = 740\text{MPa} \\ \sigma &= \sqrt{p_A \sigma_A^2 + p_B \sigma_B^2 + p_C \sigma_C^2 + p_A p_B (\mu_A - \mu_B)^2 + p_A p_C (\mu_A - \mu_C)^2 + p_B p_C (\mu_B - \mu_C)^2} \\ &\simeq 108.85\text{MPa}. \end{aligned}$$

Notiamo esplicitamente che σ è maggiore delle singole deviazioni standard che caratterizzano il campione.

3.2 Teorema del limite superiore della varianza

La varianza di una miscela dipende dalle proporzioni p_k della miscela nel senso che, lasciando fissate le varianze delle singole sorgenti, può accadere che la varianza totale sia maggiore o minore in dipendenza delle proporzioni con cui le singole sorgenti intervengono nella miscela. Una questione interessante è stabilire un limite superiore esatto per la varianza che non tenga conto delle probabilità p_k .

Teorema del limite superiore della varianza Il limite superiore della varianza di una miscela si ottiene scegliendo non più di due sorgenti.

Matematicamente questo significa che il limite superiore della varianza può essere espresso al seguente modo

$$\sigma_{max}^2 = p_{max}V_k + (1 - p_{max})V_s + p_{max}(1 - p_{max})(\mu_k - \mu_s)^2$$

dove k e s sono gli indici delle sorgenti per le quali si ottiene il limite superiore della varianza e p_{max} e $(1 - p_{max})$ sono le proporzioni con le quali si scelgono le due sorgenti. Se $p_{max} = 1$ allora la massima varianza si ottiene campionando una sola sorgente.

L'algoritmo in pseudo-codice può essere formulato osservando che, visto che esiste il vincolo $\sum_{i=1}^M p_i \equiv g(p_1, p_2, \dots, p_n) = 1$, il massimo della (14) si può ottenere facendo uso del metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

La condizione necessaria per un valore estremo della varianza data in (14) è:

$$\frac{\partial V}{\partial p_k} + \lambda \frac{\partial g}{\partial p_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, M),$$

dove $g(p_1, p_2, \dots, p_m) = \sum_{i=1}^M p_k$ e λ è il moltiplicatore di Lagrange. Queste M equazioni insieme al vincolo $\sum_{i=1}^M p_k - 1 = 0$ formano un sistema di $M + 1$ equazioni lineari nelle $M + 1$ incognite p_1, p_2, \dots, p_m e λ . L'applicazione del metodo conduce alla seguente espressione:

$$V_{max} = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{(V_1 - V_2)^2}{4(\mu_1 - \mu_2)^2} + \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right)^2$$

con

$$p_1 = 0.5 + \frac{V_1 - V_2}{2(\mu_1 - \mu_2)^2}, \quad p_2 = 0.5 - \frac{V_1 - V_2}{2(\mu_1 - \mu_2)^2}.$$

Questi valori di p_1 e p_2 corrispondono ad un massimo locale nel dominio $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq p_2 \leq 1$ solo se $|V_1 - V_2| < (\mu_1 - \mu_2)^2$. Se $|V_1 - V_2| > (\mu_1 - \mu_2)^2$, allora il massimo si trova sulla frontiera del dominio o per $p_1 = 1$ e $p_2 = 0$, in tal caso $V_{max} = V_1$, o per $p_1 = 0$ e $p_2 = 1$, in questo caso $V_{max} = V_2$. Alla luce di quanto detto possiamo formulare l'algoritmo mostrato in Figura 22.

Osserviamo che la variabile max al termine della computazione conterrà il valore della massima varianza delle singole sorgenti, la costante M rappresenta il numero di sorgenti che costituiscono la miscela. Le costanti k_{max} e m_{max} contengono gli indici delle sorgenti alle quali è associata la massima varianza, se la massima varianza si raggiunge con una sola sorgente allora $k_{max} = m_{max}$. Le variabili $p_{k_{max}}$ e $p_{m_{max}}$ contengono le probabilità delle due sorgenti con le quali si ottiene la massima varianza. Infine, notiamo che il ciclo interno è eseguito solo se risulta $|V_1 - V_2| < (\mu_1 - \mu_2)^2$ che indica l'esistenza di un massimo locale.

Algoritmo per il calcolo del limite superiore della varianza di una mistura

```
max = V[1]; k_max = 1; m_max = 1;
for i from 2 to M do
{
  if (max < V[i]) then do {
    max = V[i]; k_max = i; m_max = i;
    pk_max = 1; pm_max = 1;
  }

  for j = 1 to i do
  {if |V[i] - V[j]| < (μ[i]-μ[j])2 then do
    {
      candidate_max =  $\frac{V[i]}{2} + \frac{V[j]}{2} + \frac{(V[i] - V[j])^2}{4(\mu[i] - \mu[j])^2} + \left(\frac{\mu[i] - \mu[j]}{2}\right)^2$ ;
      if (max < candidate_max) then do
      {
        max = candidate_max; k_max = i; m_max = j;
        pk_max =  $0.5 + \frac{V[i] - V[j]}{2(\mu[i] - \mu[j])^2}$ ;
        pm_max = 1 - pk_max;
      }
    }
  }
}
```

Figure 22: Algoritmo basato sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

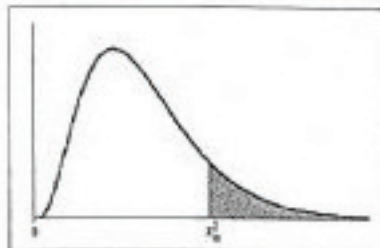
TAVOLA DELLA DISTRIBUZIONE NORMALE

x	<i>Seconda cifra decimale</i>									
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Table 4: Valori della funzione di distribuzione normale standard $\Phi(x)$.

Tavole statistiche – DISTRIBUZIONE CHI-QUADRATO

Valori della variabile χ^2 (χ^2_{α}) in
corrispondenza di aree α sotto la coda
della distribuzione chi-quadrato
e al variare dei gradi di libertà v



v	$\alpha=0,005$	0,01	0,025	0,05	0,100	0,200	0,250	0,500
1	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	1,64	1,32	0,45
2	10,60	9,21	7,38	5,99	4,61	3,22	2,77	1,39
3	12,84	11,34	9,35	7,81	6,25	4,64	4,11	2,37
4	14,86	13,28	11,14	9,49	7,78	5,99	5,39	3,36
5	16,75	15,09	12,83	11,07	9,24	7,29	6,63	4,35
6	18,55	16,81	14,45	12,59	10,64	8,56	7,84	5,35
7	20,28	18,48	16,01	14,07	12,02	9,80	9,04	6,35
8	21,95	20,09	17,53	15,51	13,36	11,03	10,22	7,34
9	23,59	21,67	19,02	16,92	14,68	12,24	11,39	8,34
10	25,19	23,21	20,48	18,31	15,99	13,44	12,55	9,34
11	26,76	24,73	21,92	19,68	17,28	14,63	13,70	10,34
12	28,30	26,22	23,34	21,03	18,55	15,81	14,85	11,34
13	29,82	27,69	24,74	22,36	19,81	16,98	15,98	12,34
14	31,32	29,14	26,12	23,68	21,06	18,15	17,12	13,34
15	32,80	30,58	27,49	25,00	22,31	19,31	18,25	14,34
16	34,27	32,00	28,85	26,30	23,54	20,47	19,37	15,34
17	35,72	33,41	30,19	27,59	24,77	21,61	20,49	16,34
18	37,16	34,81	31,53	28,87	25,99	22,76	21,60	17,34
19	38,58	36,19	32,85	30,14	27,20	23,90	22,72	18,34
20	40,00	37,57	34,17	31,41	28,41	25,04	23,83	19,34
21	41,40	38,93	35,48	32,67	29,62	26,17	24,93	20,34
22	42,80	40,29	36,78	33,92	30,81	27,30	26,04	21,34
23	44,18	41,64	38,08	35,17	32,01	28,43	27,14	22,34
24	45,56	42,98	39,36	36,42	33,20	29,55	28,24	23,34
25	46,93	44,31	40,65	37,65	34,38	30,68	29,34	24,34
26	48,29	45,64	41,92	38,89	35,56	31,79	30,43	25,34
27	49,65	46,96	43,19	40,11	36,74	32,91	31,53	26,34
28	50,99	48,28	44,46	41,34	37,92	34,03	32,62	27,34
29	52,34	49,59	45,72	42,56	39,09	35,14	33,71	28,34
30	53,67	50,89	46,98	43,77	40,26	36,25	34,80	29,34
40	56,77	53,69	50,34	55,76	51,81	47,27	45,62	39,34
50	79,49	76,15	71,42	67,50	63,17	58,16	56,33	49,33
60	91,95	88,38	83,30	79,08	74,40	68,97	66,98	59,33
70	104,21	100,43	95,02	90,53	85,53	79,71	77,58	69,33
80	116,32	112,33	106,63	101,88	96,58	90,41	88,13	79,33
90	128,30	124,12	118,14	113,15	107,57	101,05	98,65	89,33
100	140,17	135,81	129,56	124,34	118,50	111,67	109,14	99,33

Figure 23: Valori della funzione di densità $\chi^2(x)$.