CAPITOLO 7

Riparazione di una singola apparecchiatura

1 Introduzione

In presenza di un guasto di un elemento di un sistema piuttosto che optare per la sostituzione con un altro elemento identico è possibile decidere di effettuare la sua riparazione. Se questo è il caso, i rinnovi non possono essere assunti più istantanei. In ogni caso possiamo sempre pensare a sostituzioni non istantanee, così che un processo di rinnovo ritardato può essere usato anche nel contesto di politiche di sostituzioni.

Nel seguito assumeremo che gli intervalli di tempo in cui il dispositivo è in funzione sono descritti da variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite X_i $(i = 0, 1, \ldots)$ caratterizzate da funzione di distribuzione $F(x)$. Inoltre, gli intervalli di tempo impiegati per effettuare le riparazioni sono descritti da variabili aleatorie Y_i $(i = 1, 2, \ldots)$, anch'esse indipendenti tra loro e dalle X_i, identicamente distribuite con funzione di distribuzione $G(x)$. Nel nostro schema le riparazioni hanno inizio immediatamente dopo il verificarsi di un guasto e una volta terminato il periodo di riparazione, l'elemento è immediatamente funzionante.

2 Rinnovi non istantanei

Consideriamo un'apparecchiatura che inizia a funzionare all'istante $t = 0$ e supponiamo che si guasti per la prima volta all'istante $t_1 > 0$. All'istante in cui si registra il guasto comincia la fase di riparazione che terminerà all'istante $t_2 > t_1$ e in tale istante l'elemento ricomincia a funzionare. All'istante t_3 si verifica un nuovo guasto che sarà riparato all'istante t_4 e così via. In questo modo si crea una successione di istanti di tempi in cui si verificano i guasti seguiti da istanti di tempo in cui, terminata la riparazione, la componente ricomincia a funzionare. L'intervallo di tempo tra il guasto i-esimo e quello successivo è dato da $Y_i + X_i$. Durante gli intervalli di tempo di ampiezza X_k la componente è up ed è down durante gli intervalli di tempo di ampiezza Y_k. Le successioni di variabili aleatorie $\{X_k, k = 0, 1, \ldots\}$ e $\{Y_k, k = 1, 2, \ldots\}$, considerate singolarmente danno origine a due processi di rinnovo, la loro composizione è un nuovo processo detto "processo dei rinnovi alternato" ed è caratterizzato essenzialmente dalla

- distribuzione del numero di guasti,
- il periodo di funzionamento in un intervallo di tempo assegnato $(0, t)$,
- intervallo di affidabilità,
- distribuzione del tempo di guasto.

2.1 Distribuzione del numero di guasti

Il tempo che intercorre tra due guasti successivi è dato dalla somma del tempo di riparazione del primo guasto e del tempo di funzionamento dell'elemento prima che si guasti nuovamente:

$$Z_k = Y_k + X_k.$$

Le variabili Z_k sono caratterizzate da distribuzione

$$K(t) = G(t) * F(t) \equiv \int_0^t G(t-x)dF(x).$$

Se le variabili X_i e le Y_i sono assolutamente continue caratterizzate da densità di probabilità $f(x)$ e $g(x)$ rispettivamente, allora anche le variabili Z_i risultano assolutamente continue e, in tal caso, è possibile ricavare la sua densità di probabilità come la convoluzione tra f e g, cioè

$$k(x) = g(t) * f(t) \equiv \int_0^t g(t-x)f(x)dx.$$

Supponiamo che all'istante $t = 0$ l'elemento sia nello stato 1 che è rappresentativo dello stato *up*, ai fini del conteggio dei guasti possiamo individuare due variabili aleatorie:

- $N_{10}(t)$ che rappresenta il numero di volte che si visita lo stato 0, partendo dallo stato 1 all'istante iniziale,

- $N_{11}(t)$ che rappresenta il numero di volte che si visita lo stato 1, partendo dallo stato 1 all'istante iniziale.

In questo modo, $N_{10}(t)$ rappresenta il numero di guasti che si sono verificati nell'intervallo $(0, t)$ e $N_{11(}t)$ definisce il numero di volte che l'apparecchio viene rimesso in funzione nello stesso intervallo di tempo. Lo stato di partenza è 1 in quanto abbiamo assunto che all'istante iniziale l'apparecchio funziona. Inoltre, per ogni t si ha che $N_{10}(t) \geq N_{11}(t)$; in particolare si ha:

- $N_{10}(t) = N_{11}(t)$ se all'istante t il sistema si trova nello stato 1, in questo caso l'elemento sta lavorando così che è stato riparato ogni volta che si è guastato,

- $N_{10}(t) = N_{11}(t) + 1$ se all'istante t il sistema si trova nello stato 0, in tal caso l'apparecchio non sta funzionando e il numero di guasti ha superato di un'unità il numero di riparazioni in quanto l'ultima riparazione non è stata ancora completata.

Sia $W(t, n)$ la funzione di distribuzione del numero di guasti che si sono verificati durante l'intervallo $(0, t)$. Osserviamo che la valutazione di $W(t, n)$ coinvolge le probabilità $\mathbb{P}[N_{10}(t) = j]$ visto che $W(t, n) = \mathbb{P}[N_{10}(t) \leq j]$. In particolare risulta:

$$W(t, n) = \mathbb{P}[N_{10}(t) \leq n] = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}[N_{10}(t) = j].$$

Osserviamo che $\mathbb{P}[N_{10}(t)=0]=\mathbb{P}[X_0>t]=1-F(t)$, mentre per $j=1,2,\ldots$ si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N_{10}(t)=j] &= \mathbb{P}[N_{10}(t)>j-1]-\mathbb{P}[N_{10}(t)>j]\\ &= \mathbb{P}[X_0+Y_1+X_1+Y_2+\ldots+Y_{j-1}+X_{j-1}\le t]-\mathbb{P}[X_0+Y_1+X_1+Y_2+\ldots+Y_j+X_j\le t]\\ &= F(t)*K^{(j-1)}(t)-F(t)*K^{(j)}(t)\end{aligned}$$

dove $K^{(n)}(t)$ denota la convoluzione n-esima di $K(t)$ con la condizione $K^{(0)}(t)=0$ se $t<0$ mentre per $t\ge 0$ si ha $K^{(0)}(t)=1$. Pertanto risulta che

$$W(t,n)=[1-F(t)]+\sum_{j=1}^{n}[F(t)*K^{(j-1)}(t)-F(t)*K^{(j)}(t)]=1-F(t)*K^{(n)}(t).$$

2.2 Tempo medio di funzionamento

Fissato un intervallo di tempo $(0,T)$ assumiamo che all'istante $t=0$ la componente sia nello stato up denotato con 1. Consideriamo la variabile aleatoria binaria $Z(t)$ definita uguale ad 1 se all'istante t la componente è nello stato 1 e 0 altrimenti. Lo stato medio della componente all'istante t dato da $\mathbb{E}[Z(t)]=P_{11}(t)$, dove $P_{11}(t)=\mathbb{P}[Z(t)=1|Z(0)=1]$. Per calcolare il tempo medio di funzionamento dell'apparecchiatura nell'intervallo $(0,T)$ è sufficiente integrare $\mathbb{E}[Z(t)]$ sull'intervallo considerato. In questo modo si ottiene:

$$\text{tempo medio di funzionamento in }(0,\mathrm{T})=\int_0^T\mathbb{E}[Z(t)]\,dt=\int_0^T P_{11}(t)\,dt.$$

2.3 Intervallo di affidabilità

L'intervallo di affidabilità di un dispositivo è un intervallo di tempo in cui si richiede che il dispositivo non deve guastarsi. Scelto un istante di tempo t, l'intervallo di affidabilità di ampiezza x è $(t,t+x)$, in tale intervallo il componente deve trovarsi sempre nello stato up; ciò può realizzarsi nei seguenti due casi

- la componente non si è mai guastata fino all'istante t e continua a funzionare correttamente fino all'istante $t+x$,
- la componente si è guastata ed è stata riparata (anche più volte), l'ultima riparazione risale all'istante $y<t$ e da allora la componente non si è più guastata fino all'istante $t+x$.

Denotata con $D(t,x)$ la probabilità che la componente sia funzionante in $(t,t+x)$ si ha:

$$D(t,x)=R(t+x)+\int_0^t R(t+x-y)\,dM_{11}(y),$$

dove $dM_{11}(y)$ rappresenta la probabilità che la riparazione sia stata già completata all'istante y.

2.4 La distribuzione del tempo di guasto

Supponiamo che la componente si sia guastata nell'intervallo di tempo $(0, t)$. Denotiamo con $\gamma(t)$ la variabile aleatoria che descrive il tempo impiegato per riparare l'apparecchiatura durante l'intervallo $(0, t)$. Vale il seguente risultato asintotico.

Teorema 1 (Takas 1957) Siano X e Y le variabili aleatorie che indicano rispettivamente il tempo di guasto ed il tempo per effettuare una riparazione caratterizzate da funzioni di distribuzione F e G. Denotiamo con $\mu_X = \mathbb{E}[X]$, $\mu_Y = \mathbb{E}[Y]$, $\sigma_X^2 = \mathbb{V}[X]$, $\sigma_Y^2 = \mathbb{V}[Y]$. Se le varianze sono finite allora:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{\gamma(t) - \mu_Y\, t\,(\mu_X + \mu_Y)^{-1}}{\sqrt{(\mu_Y^2\sigma_X^2 + \mu_X^2\sigma_Y^2)\, t\,(\mu_X + \mu_Y)^{-3}}} \leq x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du.$$

Esempio 1 Consideriamo un elemento di un sistema che è soggetto a guasti e che può essere riparato. Le distribuzioni di guasto e di riparazione non sono note ma sono state stimate le rispettive medie e varianze. In particolare, per la variabile X risulta

$$\mu_X = 1000\ ore, \quad \sigma_X^2 = 100000\ ore^2,$$

mentre per Y si ha

$$\mu_Y = 2\ ore, \quad \sigma_Y^2 = 4\ ore^2.$$

Vogliamo calcolare la probabilità che questa componente rimane guasta per più di 24 ore su un totale di 10000 ore di funzionamento.

Osserviamo che in questo caso la variabile aleatoria di interesse è

$$\frac{\gamma(t) - \mu_Y\, t\,(\mu_X + \mu_Y)^{-1}}{\sqrt{(\mu_Y^2\sigma_X^2 + \mu_X^2\sigma_Y^2)\, t\,(\mu_X + \mu_Y)^{-3}}} = \frac{\gamma(10000) - 19.96}{6.66}$$

e, dal Teorema 1, tende a distribuirsi in accordo ad una variabile normale con media zero e varianza 1. Ne segue quindi che

$$\mathbb{P}[\gamma(10000) \geq 24] = \mathbb{P}\left[\frac{\gamma(10000) - 19.96}{6.66} \geq \frac{24 - 19.96}{6.66}\right] \simeq \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{0.6}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du \simeq 0.28.$$

Pertanto, su un totale di 10000 ore di funzionamento l'unità rimarrà in riparazione per più di 24 ore con una probabilità pari circa al 28%.