Logica

Corso di Laurea in Informatica

AA 2025-2026

UNIVERSITÀ di VERONA
Dipartimento di INFORMATICA

Linguaggio Formale

Dato un alfabeto A, denotiamo con A^* l'insieme di tutte le stringhe su A.

Definizione (Linguaggio)

Un **linguaggio** sull'alfabeto A è una coppia $\langle A, L \rangle$ dove $L \subseteq A^*$.

- Ogni sottoinsieme di A^* definisce un linguaggio.
- Siamo interessati esclusivamente ai linguaggi per i quali siano date esplicitamente delle regole di buona formazione delle stringhe *sintatticamente corrette*.

Logica Proposizionale

Il linguaggio della logica proposizionale ha nell'alfabeto due entità sintattiche fondamentali:

- *i simboli proposizionali*: formalizzano generiche proposizioni elementari;
- *i connettivi*: simboli associati ai connettivi linguistici della lingua italiana;

Obiettivo: formalizzare i *connettivi* linguistici e come essi interagiscono con le *proposizioni*.

Proposizioni

Le proposizioni (o asserzioni) sono entità linguistiche che possono essere vere o false. Quindi non possono essere e.g. domande o frasi imperative.

Proposizioni elementari: nessuna sottostringa propria costituisce a sua volta una proposizione, e.g.

- $5 \in \{0, 1, 2, 5, 7\}$
- $2 + 2 = 5$

Proposizioni composte: sono costruite componendo altre proposizioni mediante i **connectives**, e.g.

- "*c* è razionale oppure *c* è irrazionale, " dove *c* è una costante.

Connettivi Logici

- $\to$ formalizza il concetto di **se** ... **allora**:
  $\phi\to\psi$ significa "**se** ϕ **è vero allora** ψ **è vero**";
- $\wedge$ formalizza il concetto di congiunzione:
  $\phi\wedge\psi$ significa " ϕ **è vero e** ψ **è vero**";
- $\vee$ formalizza il concetto di disgiunzione (inclusiva):
  $\phi\vee\psi$ significa " ϕ **è vero oppure** ψ **è vero**";
- $\leftrightarrow$ formalizza il concetto di **se e solo se**:
  $\phi \equiv \psi$ significa "ϕ **è vero se e solo se** ψ **è vero**";
- $\neg$ formalizza il concetto di negazione:
  $\neg\phi$ significa " ϕ **è falso**";
- $\perp$ formalizza il concetto di **assurdo**.

Il Linguaggio Prop

Definizione (Alfabeto)

L'alfabeto $\mathcal{L}$ della logica proposizionale ha i seguenti simboli

- un insieme numerabile di *simboli proposizionali* $\mathbf{AT}_{\mathrm{Prop}} = \{p_0, p_1, \ldots\}$;
- i *connettivi* $\vee, \wedge, \rightarrow, \perp$;
- i simboli ausiliari (e).

Definizione

L'insieme Prop delle proposizioni è definito come il più piccolo insieme P di stringhe su $\mathcal{L}$ tali che:

1. $\mathbf{AT}_{\mathrm{Prop}} \subseteq P$;
2. $\perp \in P$;
3. se $\phi, \psi \in P$ allora $(\phi \vee \psi), (\phi \wedge \psi), (\phi \rightarrow \psi) \in P$.

Notazioni

Chiamiamo formule atomiche le formule nell'insieme $\mathbf{AT} = \mathbf{AT}_{\mathsf{Prop}} \cup \{\bot\}$.

- Con $\neg\phi$ denotiamo la proposizione $(\phi \rightarrow \bot)$;
- con $\phi \equiv \psi$ la proposizione $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$.

Introdurremo delle convenzioni che facilitano la scrittura di una formula eliminando le parentesi.
Ad esempio, potremo scrivere la formula

$$(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\gamma \rightarrow (\alpha \vee \beta))$$

nella forma più leggibile

$$\phi \wedge \psi \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha \vee \beta,$$

mentre la stringa $\phi \vee \psi \wedge \gamma$ è da considerarsi mal formata.

Convenzioni

1. Ometteremo di scrivere le parentesi più esterne di una formula, così ad esempio invece di $(\phi \wedge \psi)$ scriveremo semplicemente $\phi \wedge \psi$;
2. scriveremo $\neg\phi$ invece di $(\neg\phi)$;
3. assumiamo che $\wedge$ e $\vee$ legano più fortemente di $\rightarrow$ e $\equiv$ (come nel caso dell'aritmentica quando diciamo che il prodotto lega più della somma); quindi ad esempio $\phi_1 \wedge \phi_2 \rightarrow \psi_1 \vee \psi_2$ sta per la formula $(\phi_1 \wedge \phi_2) \rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2)$;
4. assumiamo inoltre che $\rightarrow, \wedge, \vee$ associno a destra; quindi $\phi \rightarrow \psi \rightarrow \gamma$ sta per $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)$ e $\phi \wedge \psi \wedge \gamma$ sta per $\phi \wedge (\psi \wedge \gamma)$

Funzioni Ricorsive su Prop

Si consideri la seguente definizione di una funzione $\ell : \text{Prop} \rightarrow \mathbb{N}$ che ad ogni $\phi \in \text{Prop}$ associa la sua lunghezza (il numero di simboli in ϕ).

1. $\ell(\phi) = 1$ se $\phi \in \mathbf{AT}$
2. $\ell((\phi \circ \psi)) = 3 + \ell(\psi) + \ell(\phi)$ con $\circ \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$

- La definizione data è corretta, ovvero esiste ed è unica una funzione ℓ che gode delle proprietà (1) e (2) sopra elencate.
- L'esistenza ed unicità della funzione ℓ deriva dal seguente teorema.

Ricorsione primitiva

Theorem

Sia A un insieme. Date le funzioni

- $b : \mathbf{AT} \to A$;
- $g_{\to} : A \times A \to A$;
- $g_{\vee :} A \times A \to A$;
- $g_{\wedge} : A \times A \to A$.

esiste unica una funzione $f : \mathrm{Prop} \longrightarrow A$ *tale che:*

1. $f(\phi) = b(\phi)$ *se* $\phi \in \mathbf{AT}$;
2. $f((\phi \longrightarrow \psi)) = g_{\to}(f(\phi), f(\psi))$;
3. $f((\phi \vee \psi)) = g_{\vee}(f(\phi), f(\psi))$;
4. $f((\phi \wedge \psi)) = g_{\wedge}(f(\phi), f(\psi))$.

Sottoformule

Un'importante definizione per ricorsione primitiva è quella di sottoformula di una formula proposizionale.

Definizione

La funzione $\mathsf{SF} : \mathsf{Prop} \to 2^{\mathsf{Prop}}$ che associa ad ogni proposizione ϕ l'insieme $\mathsf{SF}[\phi]$ delle sue sottoformule è ricorsivamente definita come:

1. $\mathsf{SF}[\phi] = \{\phi\}$ se ϕ è atomica.
2. $\mathsf{SF}[(\phi \vee \psi)] = \{(\phi \vee \psi)\} \cup \mathsf{SF}[\phi] \cup \mathsf{SF}[\psi]$
3. $\mathsf{SF}[(\phi \wedge \psi)] = \{(\phi \wedge \psi)\} \cup \mathsf{SF}[\phi] \cup \mathsf{SF}[\psi]$
4. $\mathsf{SF}[(\phi \rightarrow \psi)] = \{(\phi \rightarrow \psi)\} \cup \mathsf{SF}[\phi] \cup \mathsf{SF}[\psi]$

Rango

La più semplice nozione di misura di una formula è la funzione ℓ che conta il numero dei simboli in una formula
La più utilizzata è quella di *rango*.

Definizione

Il rango $\mathrm{rk}[\phi]$ di una formula ρ è definito ricorsivamente nel modo seguente:

1. $\mathrm{rk}[\phi] = 1$ se $\phi \in \mathbf{AT}$;
2. $\mathrm{rk}[(\phi \circ \psi)] = \mathbf{max}(\mathrm{rk}[\phi], \mathrm{rk}[\psi]) + 1$ dove $\circ \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$

Commento

E' facile osservare come la definizione di rango corrisponda a quella di altezza di un albero.

Proprietà di Prop

Come dimostrare che una proprietà P Prop è vera, i.e. che per ogni $\phi \in \text{Prop}$ vale $P(\phi)$?

Teorema (Principio di induzione strutturale)

Sia $P \subseteq \text{Prop}$.

Se

1. $P(\phi)$ *per ogni* $\phi \in \mathbf{AT}$
2. *per ogni* $\phi, \psi \in \text{Prop}$, *se* $P(\phi)$ *e* $P(\psi)$ *allora* $P(\phi \vee \psi), P(\phi \wedge \psi), (\phi \rightarrow \psi)$

allora *per ogni* $\phi \in \text{Prop}$, $P(\phi)$

Dimostrazione.

Basta dimostrare che $\text{Prop} \subseteq P$. E' sufficiente notare che P gode delle proprietà (1), (2) e (3) della definizione 3 di Prop. E quindi $\text{Prop} \subseteq P$.

$\square$

Induzione sul Rango

Per dimostare proprietà di Prop useremo quasi sempre il seguente principio.

Teorema (Induzione sul rango)

Sia $P \subseteq \text{Prop}$*.*
$\forall \phi \in \text{Prop}(\forall \psi \in \text{Prop}(rk[\psi] < rk[\phi]) \Rightarrow P(\phi)) \Rightarrow \forall \phi \in \text{Prop}.P(\phi)$

La dimostrazione di questo principio discende direttamente dalla cosiddetta induzione completa sui numeri naturali.

Theorem (Induzione completa sui numeri naturali)

Sia Q *una proprietà su* $\mathbb{N}$*.*

$$\textit{se } \forall m \in \mathbb{N}, ((\forall j < m, Q(j)) \Rightarrow Q(m))$$
$$\textit{allora } \forall n \in \mathbb{N}, Q(n).$$

Esempio di Dimostrazione

Dimostriamo ora una proprietà per induzione.

Proposizione

Se $\phi \in \mathrm{SF}[\psi]$ *e* $\phi \neq \psi$ *allora* $rk[\phi] < rk[\psi]$.

Dimostrazione.

La dimostrazione procede per induzione strutturale su ψ.

Base: Se $\psi \in \mathbf{AT}$ il caso è vacuamente vero.

Passo induttivo: Distinguiamo vari casi a seconda della struttura sintattica di ψ.

$\square$

cont.

$(\psi = \gamma_1 \rightarrow \gamma_2)$. se $\phi \in \mathsf{SF}[\psi]$ e $\phi \neq \psi$ allora $\phi \in \mathsf{SF}[\gamma_1]$ oppure $\phi \in \mathsf{SF}[\gamma_2]$. Esaminiamo entrambe le alternative.

- se $\phi \in \mathsf{SF}[\gamma_1]$ allora se $\phi = \gamma_1$, abbiamo che $\mathsf{rk}[\phi] = \mathsf{rk}[\gamma_1]$ e se $\psi \neq \gamma_1$ allora per Ipotesi Induttiva $\mathsf{rk}[\phi] < \mathsf{rk}[\gamma_1]$, e quindi per entrambi le possibilità abbiamo che $\mathsf{rk}[\phi] \leq \mathsf{rk}[\gamma_1]$. Dato che $\mathsf{rk}[\gamma_1] < \mathsf{rk}[\psi]$ abbiamo la tesi.
- $\psi \in \mathsf{SF}[\gamma_2]$ ragioniamo esattamente come il caso precedente.

$(\psi = \gamma_1 \wedge \gamma_2)$, $(\psi = \gamma_1 \vee \gamma_2)$. Il ragionamento è identico al caso precedente.

$\square$