

Algoritmi paralleli e distribuiti

Indice

1. Lezione 01	3
1.1. Introduzione	3
1.1.1. Definizione	3
1.1.2. Algoritmi paralleli	3
1.1.3. Algoritmi distribuiti	3
1.1.4. Differenze	3
2. Lezione 02	5
2.1. Definizione di tempo	5
2.1.1. Modello di calcolo	5
2.1.2. Criterio di costo	5
2.2. Classi di complessità	5
2.3. Algoritmi paralleli	5
2.3.1. Sintesi	5
2.3.2. Valutazione	6
2.3.3. Universalità	6
3. Lezione 03	7
3.1. Architetture	7
3.1.1. Memoria condivisa	7
3.1.2. Memoria distribuita	7
3.1.3. Modello PRAM	7
3.1.3.1. Definizione	7
3.1.3.2. Modelli per le istruzioni	8
3.1.3.3. Modelli per l'accesso alla memoria	8
3.1.3.4. Risorse di calcolo	8
4. Lezione 04	10
4.1. Parametri in gioco	10
5. Lezione 05	12
5.1. Sommatoria	12
5.1.1. EREW	14
5.1.2. Correttezza	14
6. Lezione 06	15
6.1. Ancora sommatoria	15
6.1.1. Dimostrazione	15
6.1.2. Valutazione	15
6.2. Sommatoria ottimizzata	16
6.2.1. Valutazione	16

1. Lezione 01

1.1. Introduzione

1.1.1. Definizione

Un **algoritmo** è una sequenza finita di istruzioni che non sono ambigue e che terminano, ovvero restituiscono un risultato. Gli **algoritmi sequenziali** avevano un solo esecutore, mentre gli algoritmi di questo corso utilizzano un **pool di esecutori**.

Le problematiche da risolvere negli algoritmi sequenziali si ripropongono anche qua, ovvero:

- **progettazione**: utilizzo di tecniche per la risoluzione, come *Divide et Impera*, *programmazione dinamica* o *greedy*;
- **valutazione delle prestazioni**: complessità spaziale e temporale;
- **codifica**: implementare con opportuni linguaggi di programmazione i vari algoritmi presentati.

I programmi diventano quindi una *sequenza di righe*, ognuna delle quali contiene *una o più* istruzioni.

1.1.2. Algoritmi paralleli

Un **algoritmo parallelo** è un algoritmo **sincrono** che risponde al motto “*una squadra in cui batte un solo cuore*”, ovvero si hanno più entità che obbediscono ad un clock centrale, che va a coordinare tutto il sistema.

Abbiamo la possibilità di condividere le risorse in due modi:

- memoria, formando le architetture:
 - **a memoria condivisa**, ovvero celle di memoria fisicamente condivisa;
 - **a memoria distribuita**, ovvero ogni entità salva parte dei risultati parziali sul proprio nodo;
- uso di opportuni collegamenti.

Qualche esempio di architettura parallela:

- **supercomputer**: cluster di processori con altissime prestazioni;
- **GPU**: usate in ambienti grafici, molto utili anche in ambito vettoriale;
- **processori multicore**;
- **circuiti integrati**: insieme di gate opportunamente connessi.

1.1.3. Algoritmi distribuiti

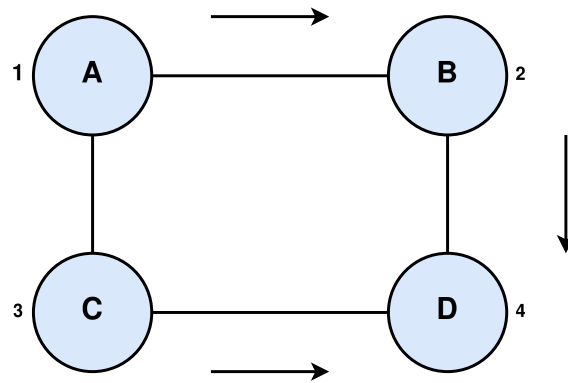
Un **algoritmo distribuito** è un algoritmo **asincrono** che risponde al motto “*ogni membro del pool è un mondo a parte*”, ovvero si hanno più entità che obbediscono al proprio clock personale. Abbiamo anche in questo caso dei collegamenti ma non dobbiamo supporre una memoria condivisa o qualche tipo di sincronizzazione, quindi dobbiamo utilizzare lo **scambio di messaggi**.

Qualche esempio di architettura distribuita:

- **reti di calcolatori**: internet;
- **reti mobili**: uso di diverse tipologie di connessione;
- **reti di sensori**: sistemi con limitate capacità computazionali che rispondono a messaggi *ack*, *re-cover*, *wake up*, eccetera.

1.1.4. Differenze

Vediamo un problema semplicissimo: *sommare quattro numeri A,B,C,D*.



Usiamo la primitiva `send(sorgente,destinazione)` per l'invio di messaggi.

Un approccio parallelo a questo problema è il seguente.

Somma di quattro numeri

input:

└ quattro numeri A, B, C, D

1: `send(1, 2), send(3, 4)`

2: calcola $A + B$ e $C + D$

3: `send(2, 4)`

4: calcola $(A + B) + (C + D)$

Un approccio distribuito invece non può seguire questo pseudocodice, perché le due `send` iniziali potrebbero avvenire in tempi diversi.

Notiamo come negli algoritmi paralleli ciò che conta è il **tempo**, mentre negli algoritmi distribuiti ciò che conta è il **coordinamento**.

2. Lezione 02

2.1. Definizione di tempo

Il **tempo** è una variabile fondamentale nell'analisi degli algoritmi: lo definiamo come la funzione $t(n)$ tale per cui

$$T(x) = \text{numero di operazioni elementari sull'istanza } x$$
$$t(n) = \max\{T(x) \mid x \in \Sigma^n\},$$

dove n è la grandezza dell'input.

Spesso saremo interessati al *tasso di crescita* di $t(n)$, definito tramite funzioni asintotiche, e non ad una sua valutazione precisa.

Date $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, le principali funzioni asintotiche sono:

- $f(n) = O(g(n)) \iff f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$;
- $f(n) = \Omega(g(n)) \iff f(n) \geq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$;
- $f(n) = \Theta(g(n)) \iff c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$.

Il tempo $t(n)$ dipende da due fattori molto importanti: il **modello di calcolo** e il **criterio di costo**.

2.1.1. Modello di calcolo

Un modello di calcolo mette a disposizione le **operazioni elementari** che usiamo per formulare i nostri algoritmi.

Ad esempio, una funzione *palindroma* in una architettura con memoria ad accesso casuale impiega $O(n)$ accessi, mentre una DTM impiega $\Theta(n^2)$ accessi.

2.1.2. Criterio di costo

Le dimensioni dei dati in gioco contano: il **criterio di costo uniforme** afferma che le operazioni elementari richiedono una unità di tempo, mentre il **criterio di costo logaritmico** afferma che le operazioni elementari richiedono un costo che dipende dal numero di bit degli operandi, ovvero dalla sua dimensione.

2.2. Classi di complessità

Un problema è **risolto efficientemente** in tempo se e solo se è risolto da una DTM in tempo polinomiale.

Abbiamo tre principali classi di equivalenza per gli algoritmi sequenziali:

- P , ovvero la classe dei problemi di decisione risolti efficientemente in tempo, o risolti in tempo polinomiale;
- FP , ovvero la classe dei problemi generali risolti efficientemente in tempo, o risolti in tempo polinomiale;
- NP , ovvero la classe dei problemi di decisione risolti in tempo polinomiale su una NDTM.

Il famosissimo problema $P = NP$ rimane ancora oggi aperto.

2.3. Algoritmi paralleli

2.3.1. Sintesi

Il problema della **sintesi** si interroga su come costruire gli algoritmi paralleli, chiedendosi se sia possibile ispirarsi ad alcuni algoritmi sequenziali.

2.3.2. Valutazione

Il problema della **valutazione** si interroga su come misurare il tempo e lo spazio, unendo questi due in un parametro di efficienza E . Spesso lo spazio conta il **numero di processori/entità** disponibili.

2.3.3. Universalità

Il problema dell'Universalità cerca di descrivere la classe dei problemi che ammettono problemi paralleli efficienti.

Definiamo infatti una nuova classe di complessità, ovvero la classe NC , che descrive la classe dei problemi generali che ammettono problemi paralleli efficienti.

Un problema appartiene alla classe NC se viene risolto in tempo *polilogaritmico* e in spazio polinomiale

Teorema 2.3.3.1:

$$NC \subseteq FP .$$

Dimostrazione 2.3.3.1: Per ottenere un algoritmo sequenziale da uno parallelo faccio eseguire in sequenza ad una sola identità il lavoro delle entità che prima lavoravano in parallelo. Visto che lo spazio di un problema NC è polinomiale, posso andare a “comprimere” un numero polinomiale di operazioni in una sola entità. Infine, visto che il tempo di un problema NC è polilogaritmico, il tempo totale è un tempo polinomiale. ■

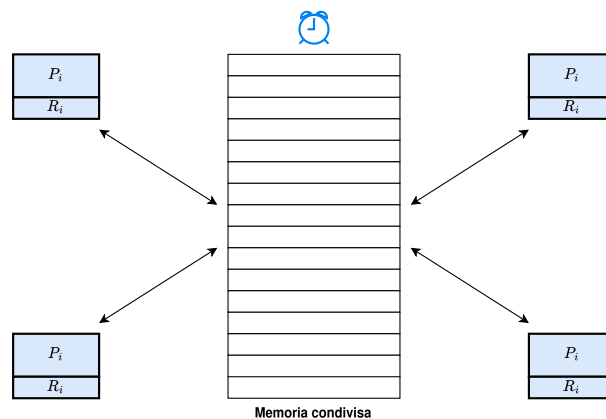
Come per $P = NP$, qui il dilemma aperto è se vale $NC = FP$, ovvero se posso parallelizzare ogni algoritmo sequenziale efficiente. Per ora sappiamo che $NC \subseteq FP$, e che i problemi che appartengono a FP ma non a NC sono detti problemi P -completi.

3. Lezione 03

3.1. Architetture

3.1.1. Memoria condivisa

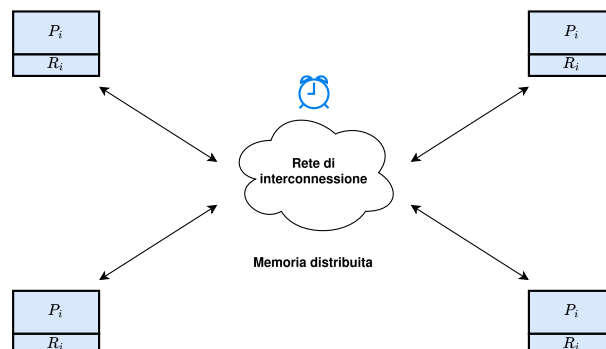
L'architettura a **memoria condivisa** utilizza una memoria centrale che permette lo scambio di informazioni tra un numero n di processori P_i , ognuno dei quali possiede anche una “memoria personale”, formata dai registri.



Un **clock** centrale e comune coordina tutti i processori, che comunicano attraverso la memoria centrale in tempo costante $O(1)$, permettendo quindi una forte parallelizzazione.

3.1.2. Memoria distribuita

L'architettura a **memoria distribuita** utilizza una rete di interconnessione centrale che permette lo scambio di informazioni tra un numero n di processori P_i , ognuno dei quali possiede anche una “memoria personale”, formata dai registri.



Un **clock** centrale e comune coordina tutti i processori, che comunicano attraverso la rete di interconnessione in un tempo che dipende dalla distanza tra i processori.

3.1.3. Modello PRAM

3.1.3.1. Definizione

Il **modello PRAM** (*Parallel RAM*) utilizza una memoria M formata da registri $M[i]$ e una serie di processori P_i che si interfacciano con essa. Ogni processore P_i è una **RAM sequenziale**, ovvero contiene una unità di calcolo e una serie di registri $R[i]$.

La comunicazione avviene con la memoria centrale tramite due primitive che lavorano in tempo costante $O(1)$:

- **LOAD** $R[dst] \ M[src]$ per copiare nel registro dst il valore contenuto in memoria nella cella src ;
- **STORE** $R[src] \ M[dst]$ per copiare in memoria nella cella dst il valore contenuto nel registro src .

Le operazioni di ogni processore avvengono invece in locale, cioè con i dati della propria memoria privata. Il tempo di ogni processore P_i è scandito da un clock centrale, che fa eseguire ad ogni processore la “stessa istruzione” $istruzione_i$.

Infatti, andiamo a definire il **passo parallelo** nel seguente modo

```

1: for  $i \in \mathbb{I}$  par do:
2:    $L$   $istruzione_i$ 

```

In poche parole, tutti i processori con indice in \mathbb{I} eseguono l' i -esima istruzione, altrimenti eseguono una nop.

3.1.3.2. Modelli per le istruzioni

L'istruzione eseguita dipende dal tipo di architettura:

- **SIMD** (Single Instruction Multiple Data) indica l'esecuzione della stessa istruzione ma su dati diversi;
- **MIMD** (Multiple Instruction Multiple Data) indica l'esecuzione di istruzioni diverse sempre su dati diversi.

3.1.3.3. Modelli per l'accesso alla memoria

Abbiamo diverse architetture anche per quanto riguarda l'accesso alla memoria:

- **EREW** (Exclusive Read Exclusive Write) indica una memoria con lettura e scrittura esclusive;
- **CREW** (Concurrent Read Exclusive Write) indica una memoria con lettura simultanea e scrittura esclusiva;
- **CRCW** (Concurrent Read Concurrent Write) indica una memoria con lettura e scrittura simultanee.

Per quanto riguarda la scrittura simultanea abbiamo diverse modalità:

- **common**: i processori possono scrivere solo se scrivono lo stesso dato;
- **random**: si sceglie un processore Π a caso;
- **max/min**: si sceglie il processore Π con il dato massimo/minimo;
- **priority**: si sceglie il processore P_i con priorità maggiore.

La politica EREW è la più semplice, ma si può dimostrare che

$$\text{Algo}(\text{EREW}) \iff \text{Algo}(\text{CREW}) \iff \text{Algo}(\text{CRCW}) .$$

Le implicazioni da sinistra verso destra sono “immediate”, mentre le implicazioni opposte necessitano di alcune trasformazioni.










3.1.3.4. Risorse di calcolo

Essendo i singoli processori delle RAM, abbiamo ancora le risorse di tempo $t(n)$ e spazio $s(n)$, ma dobbiamo aggiungere:

- $p(n)$ numero di processori richiesti su input di lunghezza n nel caso peggiore;
- $T(n, p(n))$ tempo richiesto su input di lunghezza n e $p(n)$ processori nel caso peggiore.

Notiamo come $T(n, 1)$ rappresenta il tempo sequenziale $t(n)$.

Vediamo la struttura di un programma in PRAM.

	p_1	p_2	...	$p(n)$
Passo 1	 $t_1^{(1)}(n)$	 $t_1^{(2)}(n)$...	 $t_1^{(p(n))}(n)$
Passo 2	 $t_2^{(1)}(n)$	 $t_2^{(2)}(n)$...	 $t_2^{(p(n))}(n)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Passo $k(n)$	 $t_{k(n)}^{(1)}(n)$	 $t_{k(n)}^{(2)}(n)$...	 $t_{k(n)}^{(p(n))}(n)$

Ogni processore p_i esegue una serie di istruzioni nel passo parallelo, che possono essere più o meno in base al processore e al numero $p(n)$ di processori.

Indichiamo con $t_i^{(j)}(n)$ il tempo che impiega il processore j -esimo per eseguire l' i -esimo passo parallelo su un input lungo n .

Quello che vogliamo ricavare è il tempo complessivo del passo parallelo: visto che dobbiamo aspettare che ogni processore finisca il proprio passo, calcoliamo il tempo di esecuzione $t_i(n)$ dell' i -esimo passo parallelo come

$$t_i(n) = \max \left\{ t_i^{(j)}(n) \mid 1 \leq j \leq p(n) \right\}.$$

Banalmente, il tempo complessivo di esecuzione del programma è la somma di tutti i tempi dei passi paralleli, quindi

$$T(n, p(n)) = \sum_{i=1}^{k(n)} t_i(n).$$

Notiamo subito come:

- T dipende da $k(n)$, ovvero dal numero di passi;
- T dipende dalla dimensione dell'input;
- T dipende da $p(n)$ perché diminuire/aumentare i processori causa un aumento/diminuzione dei tempi dei passi paralleli.

4. Lezione 04

4.1. Parametri in gioco

Confrontando $T(n, p(n))$ con $T(n, 1)$ abbiamo due casi:

- $T(n, p(n)) = \Theta(T(n, 1))$, caso che vogliamo evitare;
- $T(n, p(n)) = o(T(n, 1))$, caso che vogliamo trovare.

Introduciamo lo **speed-up**, il primo parametro utilizzato per l'analisi di un algoritmo parallelo: viene definito come

$$S(n, p(n)) = \frac{T(n, 1)}{T(n, p(n))}.$$

Se ad esempio $S = 4$ vuol dire che l'algoritmo parallelo è 4 volte più veloce dell'algoritmo sequenziale, ma questo vuol dire che sono nel caso di $T(n, p(n)) = \Theta(T(n, 1))$, poiché il fattore che definisce la complessità si semplifica.

Vogliamo quindi avere $S \rightarrow \infty$, poiché è la situazione di o piccolo che tanto desideriamo. Questo primo parametro è ottimo ma non basta: stiamo considerando il numero di processori? **NO**, questo perché $p(n)$ non compare da nessuna parte, e quindi noi potremmo avere $S \rightarrow \infty$ perché stiamo utilizzando un numero spropositato di processori.

Ad esempio, nel problema di soddisfacibilità SODD potremmo utilizzare 2^n processori, ognuno dei quali risolve un assegnamento, poi con vari passi paralleli andiamo ad eseguire degli *OR* per vedere se siamo riusciti ad ottenere un assegnamento valido di variabili, tutto questo in tempo $\log_2 2^n = n$. Questo ci manda lo speed-up ad un valore che a noi piace, ma abbiamo utilizzato troppi processori.

Introduciamo quindi la variabile di **efficienza**, definita come

$$E(n, p(n)) = \frac{S(n, p(n))}{p(n)} = \frac{T(n, 1)^*}{T(n, p(n)) \cdot p(n)},$$

dove $T(n, 1)^*$ indica il miglior tempo sequenziale ottenibile.

Teorema 4.1.1:

$$0 \leq E \leq 1.$$

Dimostrazione 4.1.1: La dimostrazione di $E \geq 0$ risulta banale visto che si ottiene come rapporto di tutte quantità positive o nulle.

La dimostrazione di $E \leq 1$ richiede di sequenzializzare un algoritmo parallelo, ottenendo un tempo $\tilde{T}(n, 1)$ che però "fa peggio" del miglior algoritmo sequenziale $T(n, 1)$, quindi

$$T(n, 1) \leq \tilde{T}(n, 1) \leq p(n) \cdot t_1(n) + \dots + p(n)t_{k(n)}(n).$$

La somma di destra rappresenta la sequenzializzazione dell'algoritmo parallelo, che richiede quindi un tempo uguale $p(n)$ volte il tempo che prima veniva eseguito al massimo in un passo parallelo.

Risolvendo il membro di destra otteniamo

$$T(n, 1) \leq \sum_{i=1}^{k(n)} p(n) \cdot t_i(n) = p(n) \sum_{i=1}^{k(n)} t_i(n) = p(n) \cdot T(n, p(n)).$$

Se andiamo a dividere tutto per il membro di destra otteniamo quello che vogliamo dimostrare, ovvero

$$T(n, 1) \leq p(n) \cdot T(n, p(n)) \Rightarrow \frac{T(n, 1)}{p(n) \cdot T(n, p(n))} \leq 1 \Rightarrow E \leq 1.$$

■

Se $E \rightarrow 0$ abbiamo dei problemi, perché nonostante un ottimo speed-up stiamo tendendo a 0, ovvero il numero di processori è eccessivo. Devo quindi ridurre il numero di processori $p(n)$ senza degradare il tempo, passando da p a $\frac{p}{k}$.

L'algoritmo parallelo ora non ha più p processori, ma avendone di meno per garantire l'esecuzione di tutte le istruzioni vado a raggruppare in gruppi di k le istruzioni sulla stessa riga, così che ogni processore dei $\frac{p}{k}$ a disposizione esegua k istruzioni.

Il tempo per eseguire un blocco di k istruzioni ora diventa $k \cdot t_i(n)$ nel caso peggiore, mentre il tempo totale diventa

$$T\left(n, \frac{p}{k}\right) \leq \sum_{i=1}^{k(n)} k \cdot t_i(n) = k \sum_{i=1}^{k(n)} t_i(n) = k \cdot T(n, p(n)).$$

5. Lezione 05

Iniziamo ad avere dei problemi quando $E \rightarrow 0$: infatti, secondo il **principio di Wyllie**, se $E \rightarrow 0$ quando $T(n, p(n)) = o(T(n, 1))$ allora è $p(n)$ che sta crescendo troppo. In poche parole, abbiamo uno speed-up ottimo ma abbiamo un'efficienza che va a zero per via del numero di processori.

Riprendiamo dalla scorsa lezione.

Calcoliamo l'efficienza con questo nuovo numero di processori, per vedere se è migliorata:

$$E\left(n, \frac{p}{k}\right) = \frac{T(n, 1)}{\frac{p}{k} \cdot T\left(n, \frac{p}{k}\right)} \geq \frac{T(n, 1)}{\frac{p}{k} \cdot k \cdot T(n, p(n))} = \frac{T(n, 1)}{p(n) \cdot T(n, p(n))} = E(n, p(n)).$$

Notiamo quindi che diminuendo il numero di processori l'efficienza aumenta.

Possiamo dimostrare infine che la nuova efficienza è comunque limitata superiormente da 1

$$E(n, p(n)) \leq E\left(n, \frac{p}{k}\right) \leq E\left(n, \frac{p}{p}\right) = E(n, 1) = 1.$$

Dobbiamo comunque garantire la condizione di un buon speed-up, quindi $T\left(n, \frac{p}{k}\right) = o(T(n, 1))$

5.1. Sommatoria

Cerchiamo un algoritmo parallelo per il calcolo di una **sommatoria**.

Il programma prende in input una serie di numeri $M[1], \dots, M[n]$ inseriti nella memoria della PRAM e fornisce l'output in $M[n]$. In poche parole, a fine programma si avrà

$$M[n] = \sum_{i=1}^n M[i].$$

Un buon algoritmo sequenziale è quello che utilizza $M[n]$ come accumulatore, lavorando in tempo $T(n, 1) = n - 1$ senza usare memoria aggiuntiva.

Sommatoria sequenziale

input:

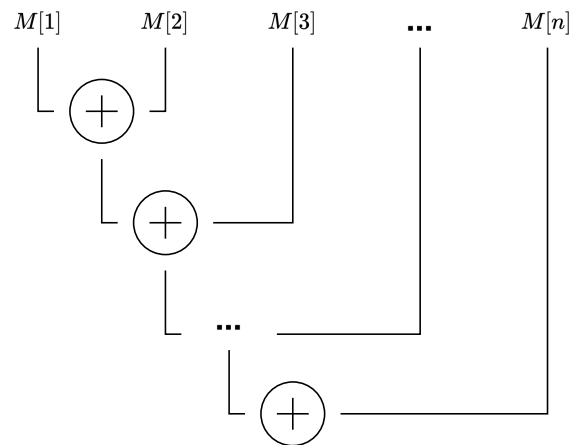
└ vettore $M[]$ di grandezza n

1: for $i = 1$ to n do:

2: └ $M[n] = M[n] + M[i]$

3: return $M[n]$

Un primo approccio parallelo potrebbe essere quello di far eseguire ad ogni processore una somma.



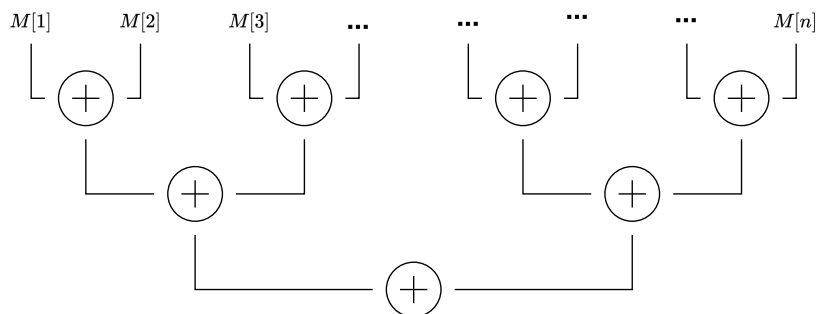
Usiamo $n - 1$ processori, ma abbiamo dei problemi:

- l'albero che otteniamo ha altezza $n - 1$;
- ogni processore deve aspettare la somma del processore precedente, quindi $T(n, n - 1) = n - 1$.

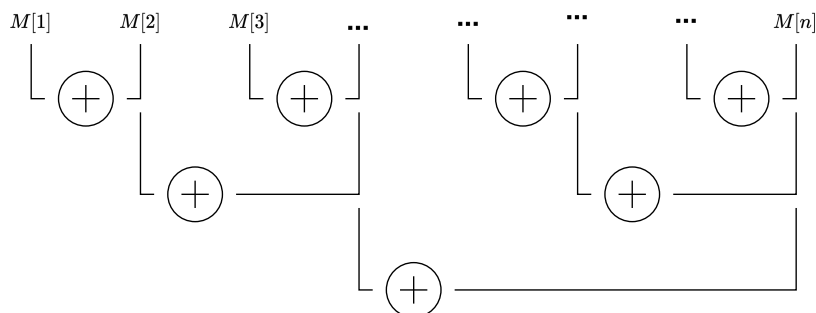
L'efficienza che otteniamo è

$$E(n, n - 1) = \frac{n - 1}{(n - 1) \cdot (n - 1)} \rightarrow 0.$$

Una soluzione migliore considera la *proprietà associativa* della somma per effettuare delle somme 2 a 2.



Quello che otteniamo è un albero binario, sempre con $n - 1$ processori ma l'altezza dell'albero logaritmica in n . Il risultato di ogni somma viene scritto nella cella di indice maggiore, quindi vediamo la rappresentazione corretta.



Quello che possiamo fare è sommare, ad ogni passo i , gli elementi che sono a distanza i : partiamo sommando elementi adiacenti a distanza 1, poi 2, fino a sommare al passo $\log(n)$ gli ultimi due elementi a distanza $\frac{n}{2}$.

Sommatoria parallela

```

1: for  $i = 1$  to  $\log(n)$  do:
2:   for  $k = 1$  to  $\frac{n}{2^i}$  par do:
3:      $M[2^i k] = M[2^i k] + M[2^i k - 2^{i-1}]$ 
4: return  $M[n]$ 

```

Nell'algoritmo k indica il numero di processori attivi nel passo parallelo.

5.1.1. EREW

Teorema 5.1.1.1: L'algoritmo di sommatoria parallela è EREW.

Dimostrazione 5.1.1.1: Dobbiamo mostrare che al passo parallelo i il processore a , che utilizza $2^i a$ e $2^i a - 2^{i-1}$, legge e scrive celle di memoria diverse rispetto a quelle usate dal processore b , che utilizza $2^i b$ e $2^i b - 2^{i-1}$.

Mostriamo che $2^i a \neq 2^i b$: questo è banale se $a \neq b$.

Mostriamo infine che $2^i a \neq 2^i b - 2^{i-1}$: supponiamo per assurdo che siano uguali, allora $2 \cdot \frac{2^i a}{2^i} = 2 \cdot \frac{2^i b - 2^{i-1}}{2^i} \implies 2a = 2b - 1 \implies a = \frac{2b-1}{2}$ ma questo è assurdo perché $a \in \mathbb{N}$. ■

5.1.2. Correttezza

Teorema 5.1.2.1: L'algoritmo di sommatoria parallela è corretto.

Dimostrazione 5.1.2.1: Per dimostrare che è corretto mostriamo che al passo parallelo i nella cella $2^i k$ ho i $2^i - 1$ valori precedenti, sommati a $M[2^i k]$, ovvero che $M[2^i k] = M[2^i k] + \dots + M[2^i(k-1) + 1]$.

Notiamo che se $i = \log(n)$ allora ho un solo processore $k = 1$ e ottengo la definizione di sommatoria, ovvero $M[n] = M[n] + \dots + M[1]$.

Dimostriamo per induzione.

Passo base: se $i = 1$ allora $M[2k] = M[2k] + M[2k - 1]$. ■

Continuiamo la prossima volta.

6. Lezione 06

6.1. Ancora sommatoria

6.1.1. Dimostrazione

Finiamo la dimostrazione della scorsa lezione.

Dimostrazione 6.1.1.1: Per dimostrare che è corretto mostriamo che al passo parallelo i nella cella $2^i k$ ho i $2^i - 1$ valori precedenti, sommati a $M[2^i k]$, ovvero che $M[2^i k] = M[2^i k] + \dots + M[2^i(k-1) + 1]$.

Notiamo che se $i = \log(n)$ allora ho un solo processore $k = 1$ e ottengo la definizione di sommatoria, ovvero $M[n] = M[n] + \dots + M[1]$.

Dimostriamo per induzione.

Passo base: se $i = 1$ allora $M[2k] = M[2k] + M[2k - 1]$.

Passo induttivo: supponiamo sia vero per $i - 1$, dimostriamo che vale per i . Sappiamo che al generico passo k eseguiamo l'operazione $M[2^i k] = M[2^i k] + M[2^i k - 2^{i-1}]$.

Andiamo a riscrivere i due fattori della somma in un modo a noi più comodo:

- $M[2^i k] = M[2^{i-1} \cdot 2k] = M[2^{i-1} \cdot 2k] + \dots + M[2^{i-1} \cdot (2k - 1) + 1]$ perché vale l'ipotesi del passo induttivo;
- $M[2^i k - 2^{i-1}] = M[2^{i-1} \cdot (2k - 1)] = M[2^{i-1} \cdot (2k - 1)] + \dots + M[2^{i-1} \cdot (2k - 2) + 1]$ sempre per l'ipotesi del passo induttivo.

Notiamo ora che il primo e il secondo fattore sono contigui: infatti, l'ultima cella del primo fattore è un indice superiore rispetto alla prima della del secondo fattore. Inoltre, l'ultima cella del secondo fattore $M[2^{i-1} \cdot (2k - 2) + 1]$ può essere riscritta come $M[2^i(k-1) + 1]$, quindi abbiamo ottenuto esattamente quello che volevamo dimostrare. ■

6.1.2. Valutazione

Se n è potenza di 2 usiamo un numero massimo di processori uguale a $\frac{n}{2}$ e un tempo $T(n, \frac{n}{2}) = 4 \log(n)$, dovuto alle microistruzioni che vengono fatte in ogni passo parallelo.

Se n non è potenza di 2 dobbiamo "allungare" l'input fino a raggiungere una dimensione uguale alla potenza di 2 più vicina, aggiungendo degli zeri in coda, ma questo non va ad intaccare le prestazioni perché la nuova dimensione è limitata da $2n$.

Infatti, con lunghezza $2n$ abbiamo un numero di processori uguale a n e un tempo $T(n, n) = 4 \log(2n) \leq 5 \log(n)$. In poche parole:

- $p(n) = O(n)$;
- $T(n, p(n)) = O(\log(n))$.

Se però calcoliamo l'efficienza otteniamo

$$E(n, n) = \frac{n - 1}{n \cdot 5 \log(n)} \rightarrow 0,$$

quindi dobbiamo trovare una soluzione migliore, anche se E tende a 0 lentamente.

6.2. Sommatoria ottimizzata

Il problema principale di questo approccio è che i processori sono un po' sprecati: prima vengono utilizzati tutti, poi ne vengono usati sempre di meno. Usiamo l'approccio di Wyllie: vogliamo arrivare ad avere $E \rightarrow k \neq 0$ diminuendo il numero di processori utilizzati.

Andiamo quindi ad utilizzare p processori, con $p < n$, raggruppando i numeri presenti in M in gruppi grandi $\Delta = \frac{n}{p}$, ognuno associato ad un processore.

Come prima, andiamo a mettere la somma di un gruppo Δ_i nella cella di indice maggiore. Al primo passo parallelo ogni processore esegue la somma sequenziale dei Δ valori contenuti nel proprio gruppo, ovvero $M[k\Delta] = M[k\Delta] + \dots + M[(k-1)\Delta + 1]$. I successivi passi paralleli eseguono l'algoritmo sommatoria proposto prima sulle celle di memoria $M[\Delta], M[2\Delta], \dots, M[p\Delta]$, e in quest'ultima viene inserito il risultato finale.

6.2.1. Valutazione

In questa versione ottimizzata usiamo $p(n) = p$ processori e abbiamo un tempo $T(n, p)$ formato dal primo passo parallelo "di ottimizzazione" sommato al tempo dei passi successivi, quindi $T(n, p) = \frac{n}{p} + 5 \log(p)$.

Andiamo a calcolare l'efficienza $E(n, p) = \frac{n-1}{p \cdot (\frac{n}{p} + 5 \log(p))} = \frac{n-1}{\underbrace{n + 5p \log(p)}_n} \approx \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, che è il valore diverso da 0 che volevamo.

Per fare questo dobbiamo imporre $5p \log(p) = n$, quindi $p = \frac{n}{5 \log(n)}$ (anche se non ho ben capito questo cambio di variabile, ma va bene lo stesso).

Con questa assunzione riusciamo ad ottenere un tempo $T(n, p(n)) = 5 \log(n) + \dots + 5 \log(n) \leq 10 \log(n)$.