Esercizio 1: Calcio di punizione

Bisogna determinare l'equazione di una parabola, con concavità verso il basso. L'equazione $y = ax^2+bx+c$ è descritta da tre parametri a, b e c, che sono quindi le variabili del problema. Di a si sa che deve essere negativo (concavità verso il basso). Si può eliminare il parametro c ponendo l'origine degli assi nel punto di partenza della traiettoria: così $c = 0$. Inoltre in tal caso si ha sicuramente $b > 0$, poiché l'asse di simmetria della parabola deve cadere verso la porta rispetto al punto di battuta.

Domanda 1. La traiettoria ideale è quella che giunge in porta nel minor tempo. Il tempo per raggiungere la porta è dato da D/v_x, dove D è la distanza palla-porta (in metri) e v_x è la componente orizzontale del vettore velocità iniziale (in metri/secondo). Questa è la funzione obiettivo da minimizzare.

La traiettoria deve rispettare due vincoli: superare la barriera e centrare la porta.

- Il primo è espresso da $a_B^2 + b_B >= H_B$ dove B è la distanza palla-barriera (in metri) e H_B è l'altezza della barriera (in metri).
- Il secondo è espresso da $0 <= aD^2 + bD <= H_P$ dove D è la distanza palla-porta (in metri) e H_P è l'altezza della porta (in metri).

Un ulteriore vincolo è sul vettore velocità iniziale v (espresso in metri/secondo) e sull'angolo di tiro α (in radianti).
$v_x = v \cos \alpha$
$0 <= v <= 20$
$0 <= \alpha <= \pi/2$

La soluzione ottima consiste nel calciare ad un angolo di 14 gradi circa con massima velocità iniziale. Come risultato la traiettoria passa proprio per l'estremo della barriera e della porta. Il tempo impiegato dal pallone per arrivare in porta è poco meno di 1,3 secondi. La soluzione richiede tuttavia una curvatura della parabola che prescinde dal valore dell'accelerazione di gravità terrestre, che è *data*.

Domanda 2. Esprimendo la traiettoria della parabola in forma parametrica, con il tempo t come parametro, si ha:

- orizzontalmente (moto uniforme): $x = v_x t$;
- verticalmente (moto uniformemente accelerato): $y = v_y t - g\, t^2/2$ dove $g = 9{,}81\ m/sec^2$.

Ricavando t dalla prima e sostituendo nella seconda si ottiene $y = (v_y/v_x)x – (gx^2)/(2v_x^2)$ da cui
$a = -g/(2v_x^2)$ e $b = v_y/v_x$.

Il resto del modello resta uguale, con i vincoli sulla traiettoria e sulla velocità iniziale come nel caso precedente. Il problema risultante è non-lineare e ha variabili continue. La soluzione ottima consiste nel calciare ad un angolo di circa 19 gradi alla massima velocità iniziale. La traiettoria supera di circa 20 centimetri la barriera e ricade sulla linea di porta. Il tempo necessario al pallone per raggiungere la porta è di circa 1,32 secondi.

Domanda 3. La differenza è pari a 1,321 - 1,290 = 0,031 secondi.

Domanda 4. V. sopra.

Domanda 5. Si può rispondere utilizzando lo stesso modello precedente, in cui però la funzione obiettivo da minimizzare è v. Il valore minimo risulta essere 15,66 m/sec. Con tale valore di v è necessario calciare a 45 gradi per ottenere la gittata massima. Il pallone raggiunge la linea di porta dopo 2,26 secondi, essendo passato ad un altezza di 5,80 metri da terra in corrispondenza della barriera.