Soluzione: Biscotti

Il problema si può formulare con variabili *y(j)* che indicano le quantità prodotte per ogni tipo *j* di biscotto e variabili *q(i)* che indicano le quantità di materia prima *i* acquistate.

La funzione obiettivo da massimizzare è la somma delle variabili *y(j)* pesate con i prezzi al consumo *p(j)*.

Esistono numerosi insiemi di vincoli:

- vincoli sull'uso degli ingredienti, che legano le variabili *y* alle variabili *q*: per ogni ingrediente *i*, la somma su *j* delle *y(j)* pesate con le percentuali della prima tabella di dati deve essere minore o uguale alla quantità complessiva di ingrediente disponibile *q(i)*; gli ingredienti vincolati sono solo sette, poiché l'acqua non ha alcun costo dato;
- vincolo sul tempo: il tempo complessivo necessario a produrre i biscotti non deve eccedere il tempo disponibile in un trimestre, ossia 12 x 5 = 60 giorni lavorativi: perciò la somma su *j* delle quantità *y(j)* pesate ciascuna con il tempo *t(j)* per unità di prodotto deve essere minore o uguale a 60 giorni (se le *y* sono misurate in Kg/trimestre) o a 5 giorni (se sono misurate in Kg/settimana);
- vincolo sul budget: anche il budget complessivo per acquistare gli ingredienti è limitato. La somma delle variabili *q(i)* pesate ciascuna con il prezzo *r(i)* deve essere minore o uguale al budget disponibile; se le *q* sono misurate in Kg/settimana il budget deve essere settimanale e quindi il budget trimestrale dato va diviso per 5;
- vincoli sulle quantità prodotte: ci sono vincoli sul valore massimo e minimo delle variabili *y(j)*; eventualmente questi vincoli possono essere scritti nel modello come limiti inferiori e superiori alle variabili *y*.
- vincoli sulle quantità acquistate: ci sono vincoli che impongono che le quantità acquistate *q(i)* siano maggiori o uguali a quantità date; anche questi possono essere sostituiti da limiti inferiori alle variabili nel modello.

In totale si hanno 24 vincoli e 11 variabili continue non-negative. Il problema è di PL. Il suo modello per Lindo è riportato nel file BISCOTTI.LTX e la soluzione corrispondente nel file BISCOTTI.OUT.

Per rispondere alle domande successive è necessario ricorrere all'analisi post-ottimale.

1. Il rendimento del capitale investito nell'azienda si ricava semplicemente dai valori del budget (quantità di denaro investita) e dal valore ottimo della funzione obiettivo (massima quantità di denaro ottenibile). Esprimendo ricavi e costi in Euro / settimana si ha un ricavo ottimo di 2261.031 a fronte di un investimento di 1800 (tutto il budget disponibile viene usato, poiché il vincolo di budget è attivo), con un rendimento del 25.6%.
2. Dall'analisi parametrica relativa al vincolo di budget si osserva che il budget potrebbe aumentare utilmente fino a 1811.96 Euro/settimana, producendo un aumento del valore ottimo della funzione obiettivo fino a 2273.27 Euro/settimana. Ulteriori aumenti del budget non potrebbero aumentare il valore ottimo poiché il vincolo di budget non sarebbe più attivo. Il costo dell'operazione sarebbe quindi l'interesse del 6% a trimestre su un capitale in prestito pari a 11.96 Euro/settimana * 12 settimane/trimestre = 143.52 Euro/trimestre, cioè 8.6112 Euro. Il ricavo dell'operazione sarebbe invece la differenza tra l'aumento del valore ottimo, che è pari a 146.88 Euro/trimestre, e quello dell'investimento, che è pari a 143.52 Euro/trimestre, cioè 3.36 Euro/trimestre. L'operazione sarebbe quindi in perdita (oltre al fatto

che le cifre in gioco sarebbero ridicolmente basse).

3. Raddoppiare la quantità vendibile per un biscotto equivale a raddoppiare il valore del termine noto di uno dei quattro vincoli sulla massima quantità vendibile. Ciò ha l'effetto di migliorare il valore della funzione obiettivo solo se il vincolo stesso è attivo. Quindi l'unico biscotto per cui avrebbe senso l'operazione descritta è il terzo (Alba Radiosa), che all'ottimo è prodotto nella quantità massima consentita, e non il più costoso che è il primo (Svegliallegra). Per valutare la proposta relativo al terzo biscotto occorre sapere di quanto migliorerebbe la funzione obiettivo all'aumentare del termine noto del vincolo. Il prezzo ombra del vincolo è pari a 0.423237 Euro/Kg e l'analisi post-ottimale indica che il termine noto può aumentare di 41.16 Kg/settimana prima che il vincolo diventi inattivo. Quindi il massimo incremento della funzione obiettivo è il prodotto delle due quantità, pari a circa 17.42 Euro/settimana, ossia circa 209 Euro al trimestre. Dato che la campagna pubblicitaria costerebbe molto di più, la proposta non è conveniente.
4. Gli ingredienti 1, 5 e 7 (farina, latte e nocciole) sono acquistati (all'ottimo) in quantità pari al valore minimo richiesto. Quindi un aumento del valore minimo provocherebbe sicuramente un peggioramento del valore ottimo (prezzi ombra negativi). Per quanto riguarda gli altri ingredienti, si nota che per un incremento del termine noto dei corrispondenti vincoli pari al 5% del valore attuale i vincoli relativi agli ingredienti 3 e 4 (zucchero e burro) diventrebbero attivi e quindi farebbero peggiorare il valore ottimo (massimo aumento consentito: 15.94 Kg/settimana e 6.45 Kg/settimana; aumento imposto dai fornitori: 16 Kg/settimana e 7 Kg/settimana, rispettivamente) mentre i vincoli relativi agli ingredienti 2 e 6 (uova e additivi) resterebbero non attivi e quindi non provocherebbero alcuna variazione della soluzione ottima (massimo aumento consentito: 11.27 Kg/settimana e 8.04 Kg/settimana; aumento imposto dai fornitori: 10 Kg/settimana e 5 Kg/settimana, rispettivamente). L'analisi post-ottimale di Lindo dà informazioni sulle conseguenze della variazione di un termine noto per volta. Per conoscere l'effetto di tutte le variazioni simultaneamente bisogna risolvere nuovamente il problema, dopo aver aumentato del 5% tutti i termini noti dei sette vincoli: in tal caso il problema non ammette soluzione (il budget disponibile non è sufficiente a fare tutti gli acquisti).