Teorema inutile, ma non per me

Oldani Mattia

16-10-2024

Abstract

A 12 anni ero affascinato dal numero 99, ultimo numero prima di andare in tripla cifra. Sarà che avevo un telefono che, come tutti i telefoni fanno, mostrano le ore con dei numeri a due cifre. Sarà che mi chiedevo spesso come cercare di raggiungere 99 con le ore e i minuti segnati sullo schermo. Sarà la passione pura e cristallina che ancora oggi ho nei confronti della matematica. Non lo so, ma è lì che la mia mente malsana ha prodotto quello che oggi è uno dei teoremi più inutili della storia, quasi al livello dell'ultimo teorema di Fermat, ma almeno io, il mio, non l'ho fatto dimostrare a qualcun'altro 300 anni dopo.

1. Introduzione

In questo report, molto spartano, come piace a me, andremo a scoprire una proprietà esotica della congruenza modulo 99. Riprendiamo velocemente quella che è la definizione di congruenza: siano $a, b \in \mathbb{Z}$ due numeri interi, allora

$$a \equiv b \bmod n,$$

e si legge *"a equivalente a b modulo n"*, se e solo se $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$a = b + kn.$$

In soldoni, due numeri sono uguali se, prendendo uno dei due e sommano/sottraendo n un certo numero di volte, riesci a ottenere l'altro numero.

Questa povera base matematica è tutto ciò che ci servirà da qui in avanti.

2. Lemmi rinforzanti

Vediamo prima due lemmi che mi hanno aiutato enormemente nella dimostrazione del teorema.

Lemma 2.1: Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero pari, allora

$$10^n \equiv 1 \bmod 99.$$

Dimostrazione 2.1: Dimostriamo questo lemma per induzione su n.

Come caso base non useremo $n = 0$ poiché banale e non ci aiuterà nel passo induttivo.

Come caso base usiamo quindi $n = 2$. Verifichiamo che la relazione è verificata in questo caso:

$$10^2 = 100 \equiv 1 \bmod 99.$$

Come passo induttivo sia $n > 2$ un numero pari, quindi lo possiamo scrivere come

$$n = 2k \mid k > 1 \land k \in \mathbb{N}.$$

Per prima cosa riscriviamo n come

$$n = 2k = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k}.$$

Possiamo ora riscrivere 10^n, grazie alle proprietà delle potenze, come

$$10^n = 10^{2+\cdots+2} = \underbrace{10^2 \cdot \cdots \cdot 10^2}_{k}.$$

Grazie al caso base sappiamo che $10^2 \equiv 1 \bmod 99$, quindi

$$10^n = 10^2 \cdot \cdots \cdot 10^2 \equiv \underbrace{1 \cdot \cdots \cdot 1}_{k} = 1 \bmod 99.$$

■

Lemma 2.2: Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero dispari, allora

$$10^n \equiv 10 \bmod 99.$$

Dimostrazione 2.2: Dimostriamo questo lemma per induzione su n.

Come caso base usiamo $n = 1$. Verifichiamo che la relazione è verificata in questo caso:

$$10^1 = 10 \equiv 10 \bmod 99.$$

Verifichiamo la relazione nel caso base:

$$10^1 = 10 \equiv 10 \bmod 99.$$

Come passo induttivo sia $n > 1$ un numero dispari, quindi lo possiamo scrivere come

$$n = 2k + 1 \mid k > 1 \land k \in \mathbb{N}.$$

Per prima cosa riscriviamo n come

$$n = 2k + 1 = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k} + 1.$$

Possiamo ora riscrivere 10^n, grazie alle proprietà delle potenze, come

$$10^n = 10^{2+\cdots+2+1} = \underbrace{10^2 \cdot \cdots \cdot 10^2}_{k} \cdot 10.$$

Grazie al Lemma 2.1 sappiamo che $10^2 \equiv 1 \bmod 99$ e grazie al caso base sappiamo che $10^1 \equiv 10 \bmod 99$, quindi

$$10^n = 10^2 \cdot \dots \cdot 10^2 \cdot 10 \equiv \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{k} \cdot 10 = 10 \bmod 99.$$ ■

3. Teorema ruspante

Con il Lemma 2.1 e il Lemma 2.2 ora siamo pronti per dimostrare il risultato principale di questo fantastico report.

Teorema 3.1: Sia $x = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$ un numero naturale di n cifre. Allora vale

$$\left[10 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + x_0 \equiv 9 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_{2i}\right) + x\right] \bmod 99.$$

Dimostrazione 3.1:

Sia

$$\mathrm{DX} = 9 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_{2i}\right) + x$$

il membro di destra della relazione da verificare. Andiamo a ridurre DX con la congruenza modulo 99 per cercare di ottenere qualcosa di simile al membro di sinistra.

Scriviamo il numero x come somma pesata delle cifre che lo compongono, ovvero

$$x = 10^{n-1}x_{n-1} + 10^{n-2}x_{n-2} + \cdots + 10^1x_1 + 10^0x_0.$$

Per il Lemma 2.1 ogni cifra in posizione pari vede ridotto il proprio "peso" a 1, mentre per il Lemma 2.2 ogni cifra in posizione dispari vede ridotto il proprio "peso" a 10, quindi

$$x = \sum_{i \text{ pari}} x_i + \sum_{i \text{ dispari}} 10x_i = \sum_{i \text{ pari}} x_i + 10 \cdot \left(\sum_{i \text{ dispari}} x_i\right).$$

Vista questa semplificazione, aggiorniamo DX scrivendolo come

$$\mathrm{DX} = 9 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_{2i}\right) + \sum_{i \text{ pari}} x_i + 10 \cdot \left(\sum_{i \text{ dispari}} x_i\right).$$

La prima sommatoria somma tutte le cifre in posizioni pari saltando la cifra in posizione 0, ovvero

$$\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_{2i} = \sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i.$$

Riscriviamo la seconda sommatoria esplicitando questo comportamento, ovvero

$$\sum_{i \text{ pari}} x_i = \left(\sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i \right) + x_0.$$

Andiamo a raccogliere i fattori comuni e otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{DX} &= 9 \cdot \left(\sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i \right) + \left(\sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i \right) + 10 \cdot \left(\sum_{i \text{ dispari}} x_i \right) + x_0 = \\
&= 10 \cdot \left(\sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i \right) + 10 \cdot \left(\sum_{i \text{ dispari}} x_i \right) + x_0 = \\
&= 10 \cdot \left(\sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i + \sum_{i \text{ dispari}} x_i \right) + x_0.
\end{aligned}$$

Le due sommatorie nella parentesi calcolano la somma di tutte le cifre a partire da quella in posizione 1: infatti, la prima sommatoria somma tutte le posizioni pari dalla posizione 2 in poi, mentre la seconda sommatoria somma tutte le posizioni dispari, quindi

$$\text{DX} = 10 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) + x_0.$$

Ma DX è esattamente il membro di sinistra. ■

4. Altra proprietà esotica

Questo teorema totalmente inutile non è l'unico risultato interessante che ho trovato per la congruenza modulo 99: ne esiste un secondo, che però non analizzeremo a fondo perché non sono capace a fare le dimostrazioni, RIP.

Analizzeremo due modi per calcolare, in modo bizzarro, un numero modulo 99. Vedremo quindi due algoritmi che calcolano un numero modulo 99 con un workflow particolare, ma solo il primo verrà presentato nella sua interezza.

Algoritmo 1: Algoritmo matto v1

while x ha più di 2 cifre:
- sia $t = \left\lceil \frac{\#\text{cifre di } n}{2} \right\rceil$ il #coppie di cifre presenti in x a partire da destra
- dividi x in coppie di cifre $x_i \mid i = 1, ..., t$ a partire da destra
- calcola $x = \sum_{i=1}^{t} x_i$

output x

Teorema 4.1: Dato un numero $x \in \mathbb{N}$, l'algoritmo Algoritmo 1 calcola esattamente $x \bmod 99$.

Dimostrazione 4.1: Dimostriamo che l'algoritmo Algoritmo 1 è corretto, ovvero calcola $x \bmod 99$ qualsiasi sia l'input $x \in \mathbb{N}$.

Scriviamo il numero x come somma pesata delle cifre che lo compongono, ovvero

$$x = 10^{n-1}x_{n-1} + 10^{n-2}x_{n-2} + \cdots + 10^1 x_1 + 10^0 x_0.$$

Andiamo ad applicare il modulo 99. Per il Lemma 2.1 ogni cifra in posizione pari vede ridotto il proprio "peso" a 1, mentre per il Lemma 2.2 ogni cifra in posizione dispari vede ridotto il proprio "peso" a 10, quindi

$$x = \sum_{j \text{ pari}} x_j + \sum_{j \text{ dispari}} 10x_j.$$

Andiamo ad isolare coppie di cifre consecutive di x a partire da destra. Qua abbiamo due casi possibili:

- x ha un numero di cifre pari:
$$x = (10x_1 + x_0) + \cdots + (10x_{n-1} + x_{n-2}).$$
- x ha un numero di cifre dispari: aggiungiamo una cifra $x_t = 0$ in testa a x, ottenendo quindi:
$$x = (10x_1 + x_0) + \cdots + (10x_t + x_{n-1}).$$

In entrambi i casi presentati stiamo calcolando la somma di tutte le coppie di cifre di x a partire da destra. La riduzione che abbiamo appena fatto è esattamente quello che fa l'algoritmo Algoritmo 1 nei punti $2, 3, 4$. Se il numero ottenuto durante questa riduzione ha più di 2 cifre andiamo ad eseguire ancora una volta la riduzione presentata, fino a quando non si ottiene un numero che abbia meno di 3 cifre. ∎

Una seconda versione dell'algoritmo segue quasi totalmente la prima versione, solo che somma una coppia di cifre ad ogni iterazione.

Algoritmo 2: Algoritmo matto v2

```
while x ha più di 2 cifre:
    sia x_i la coppia di cifre di x più a destra
    sia x_t il numero x privato della coppia x_i
    calcola x = x_t + x_i
output x
```

Non ho voglia di dimostrare che questo algoritmo è corretto per il calcolo di $x \bmod 99$ (*momento Fermat*), mi dovete trustare boys.

5. Conclusioni

Questo report non è fatto per essere serio, o almeno, non del tutto. Ci sono dimostrazioni molto formali e dimostrazioni un po' tirate per i capelli, però perdonatemi, mi sono ritirato da matematica. Ci sono frasi ben formate (*FBF*) e frasi totalmente sgrammaticate (*Vittorio perdonami tvb*). È presente un po' di tutto.

Resta il fatto che questo report è assolutamente inutile e non dovrebbe essere letto e studiato da nessuno, ma dopo 12 anni, quel bambino di prima media ha avuto la sua conferma: non era autistico che sparava proprietà ab cazzum, ma quello che aveva formulato oggi è vero, dimostrato, e sapere che questa cosa l'ho trovata a 12 anni mi fa esplodere il cervello, nel senso buono.