# Teorema inutile, ma non per me

Oldani Mattia

16-10-2024

**Abstract**

A 12 anni ero affascinato dal numero 99, ultimo numero prima di andare in tripla cifra. Sarà che avevo un telefonino che, come tutti i telefonini fanno, mostrano le ore con dei numeri a due cifre. Sarà che mi chiedevo spesso come cercare di raggiungere 99 con le ore e i minuti segnati sullo schermo. Sarà la passione pura e cristallina che ancora oggi ho nei confronti della matematica. Non lo so, ma è lì che la mia mente malsana ha prodotto quello che oggi è uno dei teoremi più inutili della storia, quasi al livello dell'ultimo teorema di Fermat, ma almeno io, il mio, non l'ho fatto dimostrare a qualcun'altro 300 anni dopo.

## 1. Introduzione

In questo report, molto spartano, come piace a me, andremo a scoprire una proprietà esotica della congruenza modulo 99. Riprendiamo velocemente quella che è la definizione di congruenza: siano $a, b \in \mathbb{Z}$ due numeri interi, allora

$$a \equiv b \bmod n,$$

e si legge *"a equivalente a b modulo n"*, se e solo se $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$a = b + kn.$$

In soldoni, due numeri sono uguali se, prendendo uno dei due e sommano/sottraendo $n$ un certo numero di volte, riesci a ottenere l'altro numero.

Questa povera base matematica è tutto ciò che ci servirà da qui in avanti.

## 2. Lemmi rinforzanti

Vediamo prima due lemmi che mi hanno aiutato enormemente nella dimostrazione del teorema.

**Lemma 2.1**: Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero pari, allora

$$10^n \equiv 1 \bmod 99.$$

**Dimostrazione 2.1**: Dimostriamo questo lemma per induzione su $n$.

Come caso base non useremo $n = 0$ poiché banale e non ci aiuterà nel passo induttivo.

Come caso base usiamo quindi $n = 2$. Verifichiamo che la relazione è verificata in questo caso:

$$10^2 = 100 \equiv 1 \bmod 99.$$

Come passo induttivo sia $n > 2$ un numero pari, quindi lo possiamo scrivere come

$$n = 2k \mid k > 1 \wedge k \in \mathbb{N}.$$

Riscriviamo $n$ come

$$n = 2k = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k}$$

e quindi riscriviamo $10^n$, grazie alle proprietà delle potenze, come

$$10^n = 10^{2+\cdots+2} = \underbrace{10^2 \cdot \cdots \cdot 10^2}_{k}.$$

Grazie al caso base sappiamo che $10^2 \equiv 1 \bmod 99$, quindi

$$10^n = 10^2 \cdot \cdots \cdot 10^2 \equiv \underbrace{1 \cdot \cdots \cdot 1}_{k} = 1 \bmod 99.$$

■

**Lemma 2.2**: Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero dispari, allora

$$10^n \equiv 10 \bmod 99.$$

**Dimostrazione 2.2**: Dimostriamo questo lemma per induzione su $n$.

Come caso base usiamo $n = 1$. Verifichiamo che la relazione è verificata in questo caso:

$$10^1 = 10 \equiv 10 \bmod 99.$$

Verifichiamo la relazione nel caso base:

$$10^1 = 10 \equiv 10 \bmod 99.$$

Come passo induttivo sia $n > 1$ un numero dispari, quindi lo possiamo scrivere come

$$n = 2k + 1 \mid k > 1 \wedge k \in \mathbb{N}.$$

Riscriviamo $n$ come

$$n = 2k + 1 = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k} + 1$$

e quindi riscriviamo $10^n$, grazie alle proprietà delle potenze, come

$$10^n = 10^{2+\cdots+2+1} = \underbrace{10^2 \cdot \cdots \cdot 10^2}_{k} \cdot 10.$$

Grazie al Lemma 2.1 sappiamo che $10^2 \equiv 1 \bmod 99$ e grazie al caso base sappiamo che $10^1 \equiv 10 \bmod 99$, quindi

$$10^n = 10^2 \cdot \dots \cdot 10^2 \cdot 10 \equiv \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{k} \cdot 10 = 10 \bmod 99.$$

■

# 3. Teorema ruspante

Con il Lemma 2.1 e il Lemma 2.2 ora siamo pronti per dimostrare il risultato principale di questo report esotico.

**Teorema 3.1**: Sia $x = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$ un numero naturale di $n$ cifre. Allora vale

$$\left[10 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + x_0 \equiv 9 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_{2i}\right) + x\right] \bmod 99.$$

**Dimostrazione 3.1**:

Sia

$$\mathrm{DX} = 9 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_{2i}\right) + x$$

il membro di destra della relazione da verificare. Andiamo a ridurre DX con la congruenza modulo 99 per cercare di ottenere qualcosa di simile al membro di sinistra.

Scriviamo il numero $x$ come somma pesata delle cifre che lo compongono, ovvero

$$x = 10^{n-1}x_{n-1} + 10^{n-2}x_{n-2} + \dots + 10^1 x_1 + 10^0 x_0.$$

Per il Lemma 2.1 ogni cifra in posizione pari vede ridotto il proprio "peso" a 1, mentre per il Lemma 2.2 ogni cifra in posizione dispari vede ridotto il proprio "peso" a 10, quindi

$$x = \sum_{i \text{ pari}} x_i + \sum_{i \text{ dispari}} 10x_i = \sum_{i \text{ pari}} x_i + 10 \cdot \left(\sum_{i \text{ dispari}} x_i\right).$$

Vista questa semplificazione, aggiorniamo DX scrivendolo come

$$\mathrm{DX} = 9 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_{2i}\right) + \sum_{i \text{ pari}} x_i + 10 \cdot \left(\sum_{i \text{ dispari}} x_i\right).$$

La prima sommatoria somma tutte le cifre in posizioni pari saltando la cifra in posizione 0, ovvero

$$\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_{2i} = \sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i.$$

Riscriviamo la seconda sommatoria esplicitando questo comportamento, ovvero

$$\sum_{i \text{ pari}} x_i = \left( \sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i \right) + x_0.$$

Andiamo a raccogliere i fattori comuni e otteniamo

$$\begin{aligned} \text{DX} = 9 \cdot \left( \sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i \right) + \left( \sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i \right) + 10 \cdot \left( \sum_{i \text{ dispari}} x_i \right) + x_0 = \\ = 10 \cdot \left( \sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i \right) + 10 \cdot \left( \sum_{i \text{ dispari}} x_i \right) + x_0 = \\ = 10 \cdot \left( \sum_{i \text{ pari } \geq 2} x_i + \sum_{i \text{ dispari}} x_i \right) + x_0. \end{aligned}$$

Le due sommatorie nella parentesi calcolano la somma di tutte le cifre a partire da quella in posizione 1: infatti, la prima sommatoria somma tutte le posizioni pari dalla posizione 2 in poi, mentre la seconda sommatoria somma tutte le posizioni dispari, quindi

$$\text{DX} = 10 \cdot \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) + x_0.$$

Ma DX è esattamente il membro di sinistra. ■

## 4. Altra proprietà esotica

Questo teorema totalmente inutile non è l'unica proprietà interessante della congruenza modulo 99: ne esiste una seconda, che però, secondo me, è meno **WOW** del teorema proposto.

La seconda proprietà che andiamo ad analizzare riguarda il calcolo esotico che possiamo fare quando eseguiamo un modulo 99. Vedremo due algoritmi che vanno entrambi a calcolare un numero modulo 99 in maniera semplice e particolare, ma solo il primo verrà analizzato.

**Algoritmo 1:** Algoritmo matto v1

while $x$ ha più di 2 cifre:
    sia $t = \left\lceil \frac{\#\text{cifre di } n}{2} \right\rceil$ il #coppie di cifre presenti in $x$ a partire da destra
    dividi $x$ in coppie di cifre $x_i \mid i = 1, ..., t$ a partire da destra
    calcola $x = \sum_{i=1}^{t} x_i$
output $x$

**Teorema 4.1**: Dato un numero $x \in \mathbb{N}$, l'algoritmo Algoritmo 1 calcola esattamente $x \bmod 99$.

**Dimostrazione 4.1**: Dimostriamo che l'algoritmo Algoritmo 1 è corretto, ovvero calcola $x \bmod 99$ qualsiasi sia l'input $x \in \mathbb{N}$.

Scriviamo il numero $x$ come somma pesata delle cifre che lo compongono, ovvero

$$x = 10^{n-1}x_{n-1} + 10^{n-2}x_{n-2} + \dots + 10^1x_1 + 10^0x_0.$$

Andiamo ad applicare il modulo 99. Per il Lemma 2.1 ogni cifra in posizione pari vede ridotto il proprio "peso" a 1, mentre per il Lemma 2.2 ogni cifra in posizione dispari vede ridotto il proprio "peso" a 10, quindi

$$x = \sum_{j \text{ pari}} x_j + \sum_{j \text{ dispari}} 10x_j.$$

Andiamo ad isolare coppie di cifre consecutive di $x$ a partire da destra. Qua abbiamo due casi possibili:

- $x$ ha un numero di cifre pari:
$$x = (10x_1 + x_0) + \dots + (10x_{n-1} + x_{n-2}).$$
- $x$ ha un numero di cifre dispari: aggiungiamo una cifra $x_t = 0$ in testa a $x$, ottenendo quindi:
$$x = (10x_1 + x_0) + \dots + (10x_t + x_{n-1}).$$

In entrambi i casi presentati stiamo calcolando la somma di tutte le coppie di cifre di $x$ a partire da destra. La riduzione che abbiamo appena fatto è esattamente quello che fa l'algoritmo Algoritmo 1 nei punti $2, 3, 4$. Se il numero ottenuto durante questa riduzione ha più di 2 cifre andiamo ad eseguire ancora una volta la riduzione presentata, fino a quando non si ottiene un numero che abbia meno di 3 cifre. ■

Una seconda versione dell'algoritmo segue quasi totalmente la prima versione, solo che somma una coppia di cifre ad ogni iterazione.

**Algoritmo 2:** Algoritmo matto v2

```
while x ha più di 2 cifre:
    sia x_i la coppia di cifre di x più a destra
    sia x_t il numero x privato della coppia x_i
    calcola x = x_t + x_i
output x
```

Non ho voglia di dimostrare che questo algoritmo è corretto per il calcolo di $x \bmod 99$ (*momento Fermat*), mi dovete trustare boys.

# 5. Conclusioni

Questo report non è fatto per essere serio, o almeno, non del tutto. Ci sono dimostrazioni molto formali e dimostrazioni un po' tirate per i capelli, però perdonatemi, mi sono ritirato da matematica. Ci sono frasi sgrammaticate (*Vittorio perdonami*) e frasi degne di Petrarca. Ci sono alcuni easter egg nascosti. È presente un po' di tutto.

Questo report è assolutamente inutile e non dovrebbe essere letto e studiato da nessuno, ma dopo 12 anni quel bambino di prima media ha avuto la sua conferma: non era autistico che sparava proprietà ab cazzum, ma quello che pensava oggi è vero, dimostrato, e sapere che questa cosa l'ho trovata a 12 anni mi fa sentire un pelo speciale e soprattutto ancora più innamorato di questa scienza fantastica.