

FONDAMENTI DI SEGNALI

INDICE

| | | |
|---------------|---|----|
| FEIS 1 | Cos'è un segnale | 3 |
| FEIS 1 | Classificazione segnali | 4 |
| FEIS 2 | Funzioni particolari | 5 |
| FEIS 2 | Proprietà dei segnali | 6 |
| FEIS 2 | Statistiche del segnale | 7 |
| FEIS 3 | Definizione di sistema, sistemi LTI | 9 |
| FEIS 3 | Risposta dei sistemi LTI | 10 |
| FEIS 3 | Integrale di convoluzione, via grafica, proprietà limiti della convoluzione | 11 |
| FEIS 3 | Convoluzioni notevoli | 12 |
| FEIS 3 | Sistemi non LTI | 13 |
| FEIS 4 | Serie di Fourier | 14 |
| FEIS 4 | Proprietà serie di Fourier | 16 |
| FEIS 4 | Fenomeno di Gibbs, Potenza del segnale periodico, teorema di Perseval | 17 |
| FEIS 5 | Dalla Serie alla Trasformata di Fourier | 18 |
| FEIS 5 | Interpretazione della trasformata | 19 |
| FEIS 5 | Spettro in Frequenza, Trasformate Notevoli | 20 |
| FEIS 6 | Analisi in frequenza, Risposta in frequenza | 24 |
| FEIS 6 | Composizione di sistemi | 25 |
| FEIS 6 | Banda passante di un sistema LTI, Filtraggio del segnale, Filtri LTI, Mondo reale | 26 |
| FEIS 6 | Risposta di un filtro ideale | 27 |
| FEIS 6 | Considerazioni, applicazione dei filtri | 29 |
| FEIS 6 | Filtri mondo reale | 30 |
| FEIS 6 | Esempio di applicazione dei filtri: Analizzatore di spettro | 31 |
| FEIS 7 | Sistemi non distorcenti, Sistemi distorcenti | 32 |
| FEIS 7 | Distorsioni Lineari, Non distorsione, Misura delle distorsioni lineari | 33 |
| FEIS 7 | Equalizzazione, Equalizzatore, ES: Rimuovere un eco, Equalizzatori adattativi | 34 |
| FEIS 7 | Distorsioni non lineari, Misura delle distorsioni non lineari | 35 |
| FEIS 7 | Compensazione delle distorsioni non lineari | 36 |
| FEIS 8 | Conversione Analogico-digitale, Campionamento di segnali | 37 |
| FEIS 8 | Frequenza di campionamento | 38 |
| FEIS 8 | Ricostruzione del segnale continuo, Aliasing | 39 |
| FEIS 8 | Teorema del campionamento, Sovracampionamento, Interpolazione campioni | 40 |
| FEIS 8 | Campionamento reale, Sample&Hold (ricostruzione) | 41 |
| FEIS 8 | Quantizzazione (uniforme) | 42 |
| FEIS 8 | Rumore quantizzazione, Rapporto segnale-rumore, S/N quantizzatore uniforme | 43 |
| FEIS 8 | Quantizzatori non uniformi, Algoritmo di Lloyd-Max, Codificatore PCM, Bitrate | 44 |
| FEIS 8 | Ridurre Bitrate, Modulazione Delta, Modulazione DPCM | 45 |
| FEIS 9 | Proprietà dei segnali discreti | 47 |

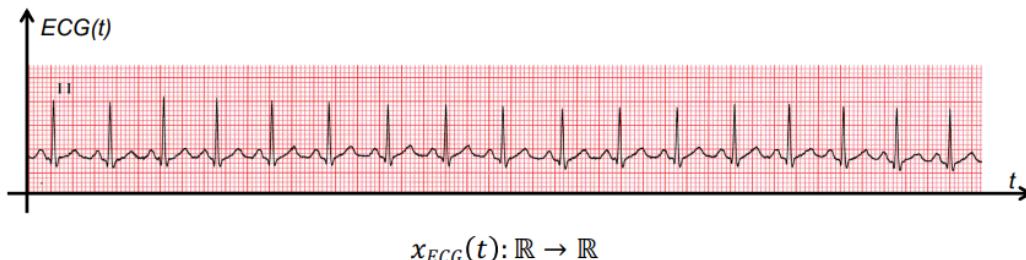
| | | |
|----------------|---|----|
| FEIS 9 | Iistogramma, Statistiche istogramma, Sistemi numerici | 48 |
| FEIS 9 | Sistemi numerici LTI, Impulso di Kroneker, Proprietà dell'impulso di Kroneker | 49 |
| FEIS 9 | Convoluzione discreta (Calcolo, algoritmo), Progetto del filtro | 50 |
| FEIS 9 | IIR VS FIR, Esempi FIR, LFP a media mobile | 51 |
| FEIS 9 | Intensità del filtro a media mobile, LFP Gaussiano | 52 |
| FEIS 9 | Filtro Passa-Alto, Filtro Gradiente, Filtro Laplaciano, Filtri Iterativi | 53 |
| FEIS 9 | Filtri iterativi(Utilizzo, Spiegazione), Cenno ai filtri IIR | 54 |
| FEIS 9 | Filtri non lineari: Filtri di rango | 55 |
| FEIS 9 | Filtri di rango: Massimo, Minimo | 56 |
| FEIS 9 | Filtri di rango: Mediano(Utilizzo, Regolazione del filtro) | 57 |
| FEIS 10 | Trasformata discreta di Fourier (DFT), DFT: Funzioni Base, DFT:Esempio f. base | 58 |
| FEIS 10 | DFT: Osservazioni, DFT: Proprietà, Teorema di convoluzione discreto, | 59 |
| FEIS 10 | Risposta in frequenza di sistemi discreti, Convoluzione circolare | |
| FEIS 10 | Convoluzione Circolare(Esempio),Risposta in frequenza di sistemi discreti | 60 |
| FEIS 10 | FFT, Filtri numerici in frequenza(Effetti) | 61 |
| FEIS 10 | Filtri numerici in frequenza: Esempi | 62 |
| FEIS 11 | Segnali multi-dimensionali: (Rappresentazione, Sistemi), Multi-Dimensionali:LDI | 63 |
| FEIS 11 | Risposta LDI, Convoluzione 2D, Trasformata di Fourier multidimensionale | 64 |
| FEIS 11 | Trasformata 2D: Esempio, Sistemi LDI e teorema di convoluzione, | 65 |
| FEIS 11 | Filtraggio in frequenza: Esempio, Conversione A/D di segnali m-D | |
| FEIS 11 | Campionamento Multi-Dimensionale, Risposta di sistemi digitali m-D | 66 |
| FEIS 11 | Convoluzione numerica: Esempio, Convoluz. m-D: pseudo-codice, complessità | 67 |
| FEIS 11 | Segnali m-D discreti in frequenza, Funzioni base m-D, DFT m-D, | 68 |
| FEIS 11 | Teorema di convoluzione discreto m-D | |

[FEIS 1] COS'È UN SEGNALE

Il **segnale** è legato alla variazione di una certa grandezza fisica in un certo dominio

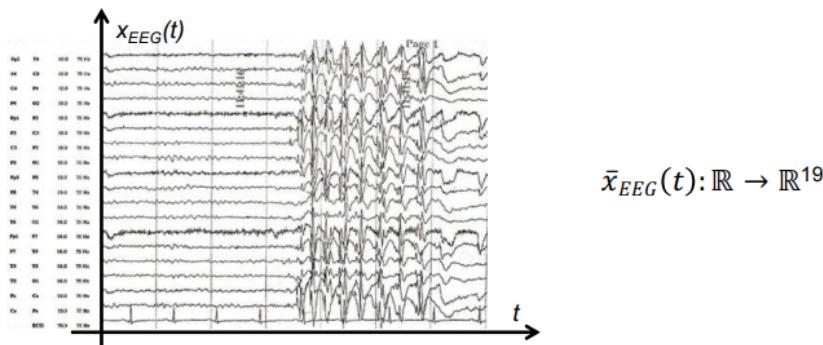
Dal punto di vista matematico questo può essere espresso tramite una funzione che restituisce i valori assunti dalla grandezza fisica nei vari punti del dominio:

- Il segnale audio $s(t)$ è un **segnale scalare**: per ogni istante temporale restituisce **un unico valore reale**



$$x_{ECG}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Nel caso la funzione restituisca **più valori** per ogni punto di applicazione, si parla di **segnali vettoriali**: Es. L'EEG (elettroencefalogramma) restituisce un segnale vettoriale, infatti, per ogni istante temporale ottengo N valori, riferiti ad altrettanti sensori



$$\bar{x}_{EEG}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{19}$$

- I segnali che abbiamo appena visto sono tutti **monodimensionali** (1-D)
- Esistono anche segnali in più dimensioni o **multidimensionali** (m-D)
 - Esempio: un'immagine statica (una foto) avrà 2 dimensioni, convenzionalmente (x, y), che definiscono il cosiddetto «piano immagine»
 - Per ogni punto (x, y) avrò uno o più valori (immagine scalare o vettoriale)

CLASSIFICAZIONE SEGNALI

Parametri tramite i quali possiamo classificare varie tipologie di segnali:

Considereremo in particolare:

- Il modo in cui è rappresentato il dominio
- Il modo in cui è rappresentata l'ampiezza
- La natura deterministica o aleatoria
- La natura periodica o non periodica

| DOMINIO | | |
|----------|-------------|-----------|
| AMPIEZZA | CONTINUO | DISCRETO |
| | CONTINUA | ANALOGICI |
| DISCRETA | QUANTIZZATI | DIGITALI |

1. DOMINIO

i. Segnali a dominio continuo:

Possono essere misurati in ogni punto del dominio, che è pertanto una variabile reale

ii. Segnali a dominio discreto:

Possono essere misurati solo in un insieme di punti predefiniti, che costituiscono una sequenza intera

2. AMPIEZZA

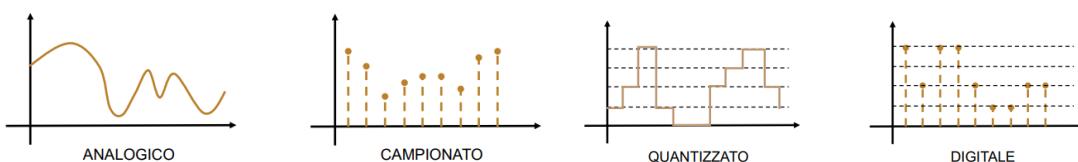
i. Segnali ad ampiezza continua:

Possono assumere con continuità tutti i valori reali di un certo intervallo (eventualmente illimitato)

ii. Segnali ad ampiezza discreta:

Possono assumere valori compresi in un insieme numerabile (eventualmente illimitato)

3. TIPOLOGIA SEGNALI



4. SEGNALI ANALOGICI E DIGITALI

- ANALOGICI:** Segnali audio, video, variazioni di grandezze fisiche quali temperatura e pressione, forze, ecc. sono fenomeni che possono essere misurati istante per istante e in ogni punto dello spazio, restituendo valori di ampiezza continui in un dato range
- DIGITALI:** Segnali ottenuti tramite opportune elaborazioni: Processi di conversione AD e DA

5. SEGNALI PERIODICI

- Si ripetono uguali a sé stessi ad ogni intervallo prefissato, detto periodo (anche lungo più dimensioni in m-D), per esempio eventi ciclici (sinusoidi, onde quadre)
- La ripetizione continua all'infinito
- Matematicamente abbiamo (caso 1D): $x(t+kT) = x(t)$, T = periodo

6. SEGNALI APERIODICI

- Alcuni esempi possono essere i segnali a durata limitata (rettangoli, triangoli), quelli smorzati (esponenziali negativi) e finestrati (prodotto di segnali qualsiasi con rettangoli o gradini)

7. SEGNALI DETERMINISTICI

- DETERMINISTICO:** se il valore del segnale è univocamente definito a priori una volta fissate le variabili di dominio (tempo, spazio, ecc.)
- Il segnale risponde ad una funzione analitica nota
- Il segnale proviene dalla registrazione di un segnale aleatorio (pertanto sarà sempre uguale)
- Il segnale viene generato tramite un processo deterministico (ad esempio una sequenza nota)

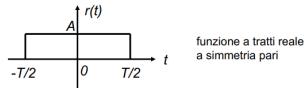
8. SEGNALI ALEATORI

- ALEATORIO:** se non è possibile conoscere con esattezza a priori il valore assunto dal segnale in un certo istante. Il segnale può essere conosciuto solo a posteriori, tramite un'osservazione.
- Sono il risultato di un processo non completamente determinato
- Possono essere conosciuti solo in modo statistico, tramite modelli parametrici e/o osservando le loro realizzazioni

[FEIS 2] FUNZIONI PARTICOLARI

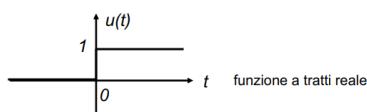
1. Funzione rettangolo simmetrico

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



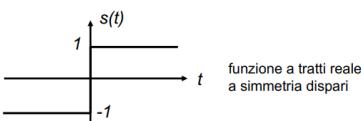
2. Funzione gradino unitario

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



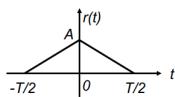
3. Funzione segno

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



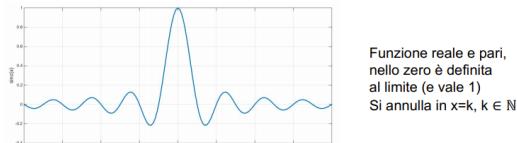
4. Funzione triangolo simmetrico

$$A\Lambda(t) = \begin{cases} \frac{A(T/2 - |t|)}{T/2} & t \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



5. Funzione sinc

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



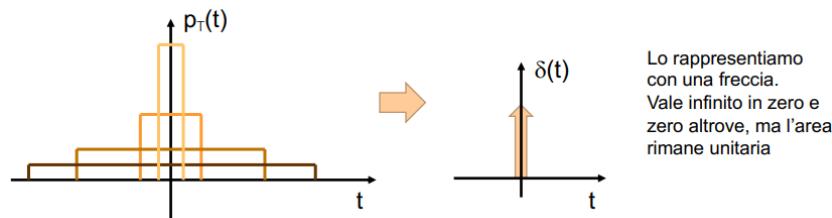
6. Funzione impulso unitario o delta di Dirac

- a. E' una funzione 'generalizzata', ovvero definita unicamente sulla base delle sue proprietà
- b. Data una generica funzione $f(t)$ continua ed integrabile, soddisfa la seguente uguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

- c. Posso ottenere una funzione $d(t)$ che soddisfi tale proprietà tramite un passaggio al limite applicato alla funzione rettangolo di area unitaria:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



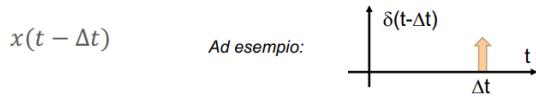
NOTA: Un comportamento impulsivo ideale nella realtà non può esistere: corrisponderebbe a un valore infinito di una qualche grandezza fisica, ad esempio una tensione

La Delta di Dirac serve a modellare matematicamente il comportamento ideale di alcuni sistemi

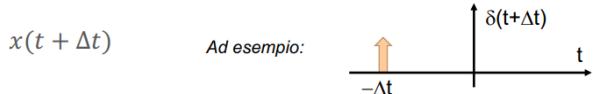
PROPRIETÀ SEGNALI

1. RITARDO VS ANTICIPO

- a. RITARDATO: Se l'asse temporale del segnale viene traslato **positivamente** rispetto all'origine dei tempi:

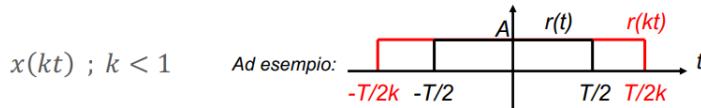


- b. ANTICIPATO: Se l'asse temporale del segnale viene traslato **negativamente** rispetto all'origine dei tempi:

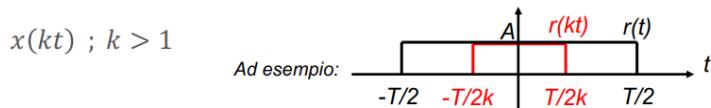


2. FATTORE DI SCALA

- a. Se **moltiplico** l'asse temporale per un fattore $k < 1$ ottengo un'espansione del segnale



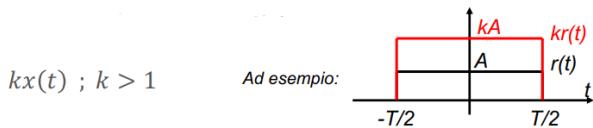
- b. Se lo **moltiplico** per un fattore $k > 1$ ottengo una compressione del segnale



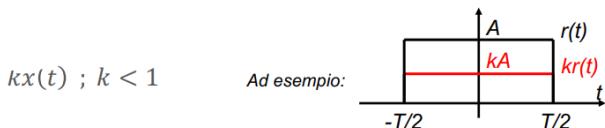
3. AMPLIFICAZIONE VS ATTENUAZIONE

L'applicazione di un fattore costante k all'ampiezza produce invece una amplificazione o attenuazione:

- a. Se $k < 1$ ho un'amplificazione:

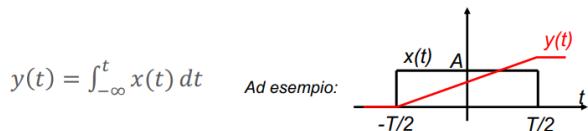
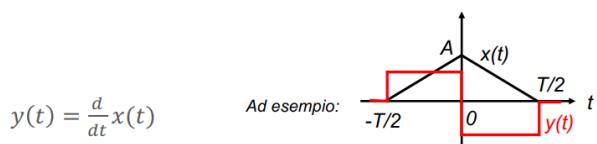


- b. Se $k > 1$ ho un'attenuazione:



4. INTEGRAZIONE E DERIVAZIONE

I segnali reali sono descrivibili come funzioni, quindi possono essere integrati e derivati nel modo consueto



- a. Caso particolare sono le funzioni generalizzate

Si dimostra facilmente che l'integrale di un impulso è un gradino:

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = u(t)$$

- b. Viceversa, derivando un gradino si ottiene un impulso

- c. Derivando un impulso si ottiene invece un ‘doppietto’ (ovvero una coppia di impulsi, uno positivo e uno negativo, centrati entrambi nell’origine)

5. SEGNALI CAUSALI

- a. Si dice causale un segnale che è **nullo** prima di un dato istante t_0

$$x(t) = \begin{cases} x_s(t) & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

- b. La definizione di ‘causale’ deriva dal fatto che l’istante t_0 è quello che determina l’origine del segnale, che quindi NON può esistere prima di tale istante
- c. Un esempio è il segnale $x(t)$ prodotto da un generatore di forme d’onda ‘acceso’ all’istante 0: prima di tale istante $x(t)$ sarà **nullo**
-

STATISTICHE DEL SEGNALE

1. VALOR MEDIO

- a. Il valor medio di un segnale deterministico in un dato intervallo temporale (t_1, t_2) è dato da:

$$\langle x(t) \rangle_{(t_1, t_2)} = \frac{1}{|t_2 - t_1|} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

- b. Estendendo a tutto il dominio avremo:

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

2. VALORE QUADRATICO MEDIO E VARIANZA

- a. Possiamo anche definire il valore quadratico medio del segnale $x(t)$ come:

$$\overline{x^2} = \langle x(t)^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

- b. da cui possiamo ricavare la varianza:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - \bar{x})^2 dt$$

- i. NOTA: Se il valor medio del segnale è 0, la varianza coincide con il valore quadratico medio

Esempio:



- Queste due immagini hanno lo stesso valor medio ma diversa varianza (la seconda ha varianza zero)
- Una varianza più elevata è legata ad un contenuto informativo maggiore (segnale presenta variazioni significative)

3. CORRELAZIONE

- a. Per capire quanto due segnali sono simili o diversi tra di loro si usa la correlazione, un indice di somiglianza
- b. Definiamo la correlazione tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ (anche detta cross-correlazione) come segue:

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t + \tau) dt$$

- c. Un valore elevato di $\mathcal{R}_{xy}(\tau_0)$ indica l'andamento simile per uno shift temporale τ_0

4. AUTOCORRELAZIONE

- a. Un caso particolare è quello in cui metto in relazione $x(t)$ con sé stesso
 - i. Questa funzione prende il nome di autocorrelazione
 - ii. Misura in pratica l'autosomiglianza di un segnale

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(t + \tau) dt$$

- iii. $\mathcal{R}_x(\tau)$ assume sempre il valore massimo per $\tau = 0$ (ovvio: il segnale è identico a se stesso), inoltre si $\mathcal{R}_x(0) = \overline{x^2}$ verifica facilmente che:
- iv. NOTA: La velocità con cui l'autocorrelazione scende rispetto al picco è una misura della '*memoria*' del segnale

5. ENERGIA DI UN SEGNALE

Si definisce energia del segnale $x(t)$ il valore E_x :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad [Joule]$$

- a) E_x può assumere un valore **infinito** per alcuni tipi di segnali
- b) I segnali per cui E_x ha valore **finito** sono detti '*segnali di energia*'
- c) L'energia è in qualche modo legata al **contenuto informativo** del segnale

6. POTENZA MEDIA

- a. Si definisce potenza media del segnale $x(t)$ il valore P_x :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [Watt]$$

- b. COINCIDE CON LA DEFINIZIONE DI VALORE QUADRATICO MEDIO!
- c. Come noto dalla fisica, vale la relazione: $P_x = \frac{E_x}{T}$
- d. P_x può essere **nullo** per alcuni tipi di segnali
- e. I segnali per cui P_x è **NON nullo** sono detti '*segnali di potenza*'
- f. E' sempre possibile calcolare la potenza media in un intervallo di tempo finito T

7. SEGNALI DI POTENZE E DI ENERGIA

- a. Occorre distinguere tra segnali di energia e segnali di potenza

- b. La proprietà è mutuamente esclusiva:

un segnale può essere O di energia O di potenza, non entrambi), infatti:

- i. I segnali di energia hanno sempre potenza media **nulla**
Esempio: sono segnali di energia tutti i segnali **deterministici** a durata finita
- ii. I segnali di potenza hanno sempre energia **infinita**
Esempio: sono segnali di potenza i segnali **periodici**, i segnali a valor medio **NON nullo**, i segnali **aleatori**

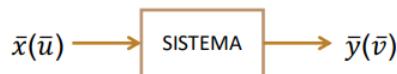
[FEIS 3] DEFINIZIONE DI SISTEMA

Un sistema di elaborazione dell'informazione è costituito da una cascata di 'blocchi', ognuno dei quali effettua una data trasformazione del segnale:

- Ogni blocco riceve un **segnale in ingresso**, lo modifica in qualche modo e produce un **segnale di uscita**
- E' utile studiare il modo in cui il sistema modifica il segnale, in modo tale da predire l'uscita in funzione dell'ingresso e/o modellare/progettare il sistema stesso per realizzare una data funzione

Il sistema $\varphi(\cdot)$ produce a partire dal segnale di ingresso $\bar{x}(\bar{u})$ un segnale $\bar{y}(\bar{v}) = \varphi(\bar{x}(\bar{u}))$ di uscita

- L'uscita dipenderà dall'**ingresso**, dalle **caratteristiche** del sistema ed eventualmente dallo **stato** del sistema stesso
- Notare che il sistema può modificare sia il **dominio** che la **dimensionalità** del segnale
 - Es. un sistema potrebbe ricevere in ingresso un segnale vettoriale e restituire in uscita un segnale scalare



SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI

Dato un sistema qualsiasi, può essere molto complesso studiare la relazione tra $x(t)$ e $y(t)$.

Esiste una particolare classe di sistemi in cui questo risulta fattibile:

la classe dei **sistemi lineari tempo invarianti** (LTI)

- Un sistema LTI gode contemporaneamente di due distinte proprietà:
 - LINEARITÀ
 - TEMPO-INVARIANZA

LINEARITÀ

La proprietà di linearità viene anche comunemente indicata come principio di sovrapposizione degli effetti

Dal punto di vista analitico si esprime come segue:

$$\begin{cases} f(x_1(t)) = y_1(t) \\ f(x_2(t)) = y_2(t) \end{cases} \Rightarrow f(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Mettendo in ingresso al sistema la **combinazione lineare di due segnali** qualsiasi il sistema restituisce la stessa combinazione lineare delle rispettive uscite. Un esempio è il **Partitore di tensione**, dove è chiara la sovrapposizione degli effetti.

TEMPO VARIANZA

Tempo-invarianza significa che un sistema non modifica la propria risposta al variare del tempo

Dal punto di vista analitico si esprime come segue:

$$f(x(t)) = y(t) \Rightarrow f(x(t - t_0)) = y(t - t_0)$$

In pratica, ritardando il segnale di ingresso di una qualsiasi quantità t_0 , il sistema restituirà la stessa uscita ritardata di t_0 .

Il **Partitore di tensione** è un circuito idealmente tempo-invariante poiché le resistenze non cambiano valore nel tempo e la risposta trasla pari passo con l'ingresso.

Nella pratica, la resistenza **varia** con la temperatura, quindi alimentando il circuito avremo la resistenza varierà diventando una funzione $R(t)$, di conseguenza il circuito reale sarà un sistema **tempo-variante**.

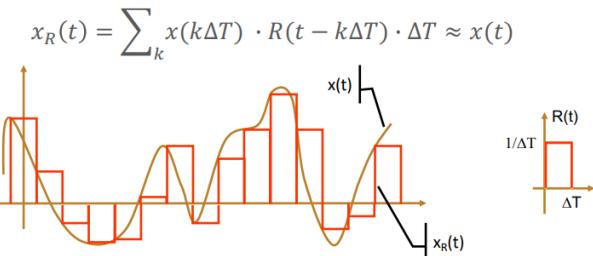
Dato un sistema lineare tempo-invariante è possibile calcolare la risposta ad un segnale di ingresso $x(t)$ qualsiasi a partire dalla conoscenza della risposta ad una particolare funzione: l'**impulso unitario** $\delta(t)$

Questo risultato è particolarmente importante, perché consente di caratterizzare completamente un sistema **LTI**

RISPOSTA DEI SISTEMI LTI

- Prendiamo un segnale $x(t)$ e lo approssimiamo tramite una serie di forme d'onda rettangolari di durata ΔT e area unitaria

Per seguire l'andamento del segnale moltiplichiamo ogni rettangolo per ΔT e per il valore di $x(t)$ in quell'intervallo



- Osserviamo la risposta del sistema a $R(t)$, $h_R(t)$

- E' sufficiente mettere in input $R(t)$ e misurare l'output $h_R(t)$

Poiché il sistema è LTI, sappiamo che:

- La risposta a una somma pesata di ingressi $R(t)$ è la somma pesata (con gli stessi pesi) dei corrispondenti output $h_R(t)$
- La traslazione di $R(t)$ di un intervallo arbitrario ΔT , produce la stessa uscita $h_R(t)$ traslata della stessa quantità $h_R(t-\Delta T)$
- Quindi avremo:

$$y_R(t) = \sum_k x(k\Delta T) \cdot h_R(t - k\Delta T) \cdot \Delta T \approx y(t)$$

- Per migliorare l'approssimazione possiamo usare un Δt più piccolo

- Al limite per $\Delta t \rightarrow 0$, $R(t)$ diventa una funzione a durata nulla e ampiezza infinita con area unitaria.

Coincide con la definizione della Delta di Dirac $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t) = \delta(t)$

- L'uscita $h_R(t)$ diventerà quindi la risposta all'impulso unitario, che chiameremo $h(t)$

- Portando al limite, la rappresentazione di $x(t)$ come sommatoria di rettangoli diventerà l'integrale di una serie infinita di impulsi, e coinciderà in maniera esatta con $x(t)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} x_R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

- Conseguentemente, la risposta del sistema diventerà a sua volta di tipo integrale

- E' la sovrapposizione degli effetti di infiniti impulsi pesati e traslati, ovvero l'integrale delle corrispondenti risposte impulsive

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} y_R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = y(t) = x(t) * h(t)$$

L'integrale sopra definito viene chiamato **integrale di convoluzione** e rappresenta l'uscita (esatta) di un sistema LTI ad un generico ingresso $x(t)$

- L'operatore di convoluzione viene convenzionalmente indicato con un asterisco

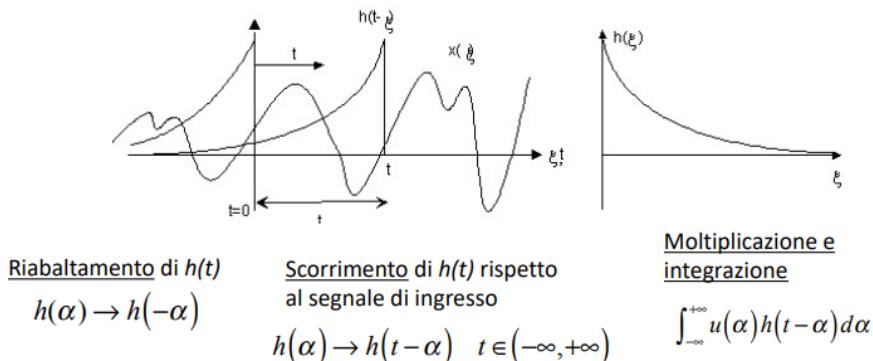
INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

Il risultato che abbiamo appena ottenuto è particolarmente importante, infatti ci dice che:

- Dato un sistema LTI di cui conosciamo la risposta impulsiva $h(t)$, è possibile calcolare in maniera analitica la risposta del sistema a un generico ingresso $x(t)$, tramite l'integrale di convoluzione
- Di conseguenza, in un sistema LTI la conoscenza della risposta all'impulso è sufficiente per modellare completamente il sistema.
 - Pensiamo ad un sistema «black box», di cui non conosciamo nulla se non il fatto che è LTI. Per modellarlo posso generare un impulso in ingresso e misurare l'uscita. A questo punto sarò in grado di predire l'uscita per un qualsiasi segnale, pur continuando a ignorare la natura fisica del sistema

Convoluzione per via grafica

La convoluzione può essere interpretata graficamente come una serie di tre operazioni in successione:



PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE

- La convoluzione restituirà una funzione che ha una durata maggiore dei due operandi
 - In particolare, la durata del risultato sarà pari alla somma delle durate dei due segnali convoluti
- La convoluzione è un'operazione lineare
- La convoluzione gode della proprietà commutativa e della proprietà associativa

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

$$x(t) * y(t) * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$$

LIMITI DELLA CONVOLUZIONE

Nella pratica quanti abbiamo visto ha dei limiti:

- L'impulso, come abbiamo visto, è una funzione generalizzata e non è realizzabile nella pratica
 - In pratica, riusciremo a ricavare la risposta impulsiva dalla conoscenza delle caratteristiche del sistema, in casi sufficientemente semplici
- L'integrale di convoluzione può essere difficile o impossibile da risolvere in forma chiusa
 - Riusciremo a risolverlo in casi particolari (funzioni semplici) con metodi matematici o grafici

CONVOLUZIONI NOTEVOLI

Consideriamo qualche caso particolare in cui la convoluzione è risolvibile in maniera abbastanza semplice.

Questi esempi (convoluzioni notevoli) ci saranno talvolta utili per risolvere situazioni più complesse:

1. Convoluzione con impulsi
2. Convoluzione tra rettangoli di uguale durata
3. Convoluzione tra rettangoli di diversa durata
4. Convoluzione tra gaussiane

1. Convoluzione con impulsi

- o La convoluzione di un segnale qualsiasi con un impulso restituisce il segnale stesso

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- o Se la risposta impulsiva di un sistema è a sua volta un impulso nell'origine, il sistema non fa nulla (passa-tutto)
- o Se invece eseguo la convoluzione con un impulso traslato, ottengo la traslazione del segnale della stessa quantità

$$x(t) * \delta(t - T) = x(t - T)$$

- o Un sistema che ha per risposta all'impulso un impulso traslato agisce da **blocco di ritardo**

2. Convoluzione con rettangoli di uguale durata

- o Effettuandone la convoluzione otteniamo un triangolo isoscele

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) ; \quad x_2(t) = A_2 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \\ x_1(t) * x_2(t) &= A_1 A_2 T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) = A_1 A_2 T \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \end{aligned}$$

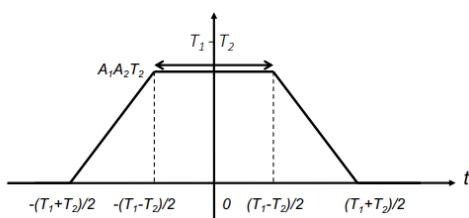
- o NOTA: come previsto, la durata del risultato sarà pari alla somma delle durate degli operandi

- Se il rettangolo ha ampiezza T tra $-T/2$ e $T/2$, il triangolo avrà ampiezza $2T$, tra $-T$ e T

3. Convoluzione con rettangoli di diversa durata

- o Effettuandone la convoluzione otteniamo un trapezio

$$x_1(t) = A_1 \Pi\left(\frac{t}{T_1}\right) ; \quad x_2(t) = A_2 \Pi\left(\frac{t}{T_2}\right)$$



4. Convoluzione con gaussiana

- o Consideriamo ora due gaussiane con diverse medie e varianze

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} ; \quad x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)^2}} e^{-\frac{[t-(\mu_1+\mu_2)]^2}{2(\sigma_1 + \sigma_2)^2}}$$

- Il risultato è interessante: convolendo due gaussiane ottengo una nuova gaussiana con valor medio pari alla somma dei valori medi, e varianza pari alla somma delle varianze

SISTEMI NON LTI

Se il sistema non è lineare tempo-invariante, possiamo ricavare la risposta all'impulso e possiamo calcolare l'integrale di convoluzione, ma questa non darà necessariamente con la risposta del sistema

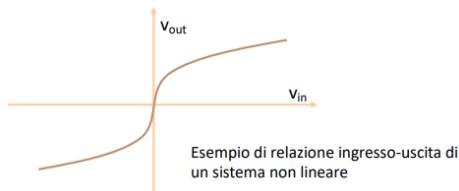
- PER OTTENERE IL RISULTATO VISTO ABBIAMO USATO ENTRAMBE LE PROPRIETÀ DEI SISTEMI LTI

In questo caso, potremo solo modellare il comportamento del sistema tramite la **relazione ingresso-uscita**

Relazione ingresso-uscita

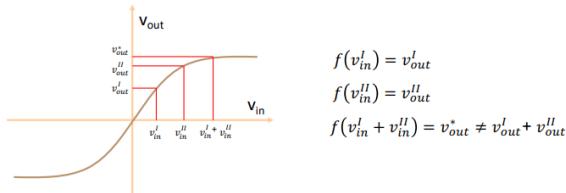
La relazione ingresso-uscita determina l'uscita di un sistema per un dato ingresso in un certo istante

- Non è una funzione del tempo, è una relazione istantanea



NOTA: La relazione ingresso-uscita di un sistema lineare è una retta

- Un sistema con una relazione ingresso-uscita come quella appena vista non rispetta il principio di sovrapposizione degli effetti:



SISTEMI CAUSALI

Alla luce di quanto visto possiamo ridefinire la causalità di un sistema in base alla risposta impulsiva

- Si dice causale un sistema per cui:

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

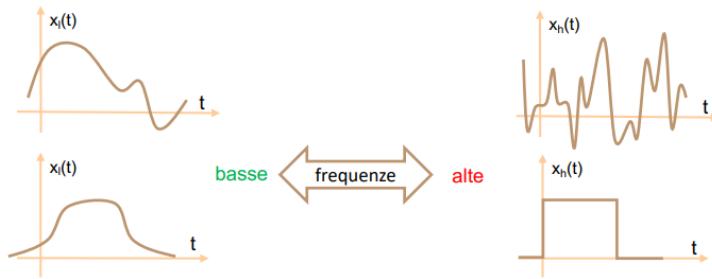
- Equivale a dire che un sistema non può anticipare la risposta rispetto all'ingresso

NOTA: Tutti i sistemi reali sono causali, ma vedremo casi 'ideali' in cui la proprietà non è rispettata

CONCETTO DI FREQUENZA NEI SEGNALI [FEIS 4]

- In fisica, il concetto di **frequenza** è tipicamente associato a eventi periodici (es. le oscillazioni di un pendolo)
- Il concetto nei segnali: le **alte frequenze** sono associate a segnali che presentano:
 - PIÙ variazioni per unità di tempo (simile alla periodicità)

- variazioni PIÙ brusche (meno intuitivo)



Esempi

- Il contenuto in frequenza di un segnale audio è maggiore nei segnali acuti rispetto a quelli gravi:
 - Il suono di un violino avrà un numero di oscillazioni nell'unità di tempo molto maggiore di un basso
- Un'immagine contenente una tessitura molto fine avrà frequenza maggiore di una sfumata
 - La funzione luminosità varierà molto più velocemente nella prima che nella seconda

Come calcolare la frequenza?

Occorre spesso calcolare in maniera più precisa il contenuto frequenziale di un segnale.

Poiché il concetto di **frequenza** è perfettamente noto in una **sinusoide**, sarebbe bello poter rappresentare un segnale qualsiasi in termini di sinusoidi

Il matematico francese Fourier definì un metodo matematico che consente di fare esattamente questa cosa:

[FEIS 4] SERIE DI FOURIER

Partiamo dalla rappresentazione di un segnale periodico

- i segnali periodici sono segnali che si ripetono uguali a sé stessi ad ogni intervallo di tempo T , detto periodo
- Le sinusoidi sono casi particolari (e semplici) di segnali periodici.
- Fourier dimostrò nel 1807 che qualsiasi segnale periodico può essere scomposto in una serie infinita di seni e coseni

Un generico segnale periodico di periodo T_0 può essere sviluppato mediante la seguente serie (**serie di Fourier**):

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T_0} + \vartheta_k\right)$$

- Le oscillazioni della serie hanno **frequenza multipla** della **frequenza fondamentale** $f_0 = 1/T_0$
- Il termine k -esimo della serie è detto **armonica di ordine k**
- Il termine a_0 (a frequenza nulla) è detto **componente continua**

Condizioni di esistenza:

In realtà la serie può essere applicata solo se il segnale è **continuo** e **sommabile sul periodo**

- $x(t)$ deve essere **integrabile** nell'intervallo $(0;T)$ e l'integrale deve avere valore **finito**
- La funzione può anche presentare discontinuità purché possieda derivate nel punto a sinistra e destra
- Queste condizioni sono tipicamente soddisfatte dai segnali reali con i quali abbiamo a che fare nella pratica, quindi le diamo per verificate

L'espressione definita per la serie di Fourier sottende due importanti osservazioni:

- Un segnale periodico qualsiasi (ad esempio un'onda quadra) può essere ottenuto sommando infinite sinusoidi, con opportune ampiezze e sfasamenti
- Tali sinusoidi non assumono frequenze qualsiasi, ma solo multipli della frequenza (inverso del periodo) del segnale originale

Calcolo dei coefficienti della serie

- Per ottenere la rappresentazione in serie dobbiamo calcolare i coefficienti a_k e i relativi sfasamenti q_k
- Per fare questo calcolo conviene però passare ad una rappresentazione alternativa nel dominio complesso
Per Eulero:

$$\cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k) = \frac{e^{j(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)}}{2}$$

- Per cui possiamo riscrivere la serie di Fourier come:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{j\vartheta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{-j\vartheta_k} e^{-j2\pi k f_0 t}$$

- Più sinteticamente:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

- Dove:

$$X_n = \begin{cases} \frac{a_n}{2} e^{j\vartheta_n} & n > 0 \\ \frac{a_{-n}}{2} e^{j\vartheta_{-n}} & n < 0 \\ a_0 & n = 0 \end{cases}$$

- Possiamo quindi calcolare, anziché i valori di a_k e q_k , i coefficienti complessi X_k , che contengono sia l'informazione di **ampiezza** che di **fase**
- Si può dimostrare che il coefficiente n -esimo è dato dalla seguente espressione:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

- NOTA: per $n=0$ otteniamo la definizione del valor medio di $x(t)$

Interpretazione intuitiva

L'espressione appena vista può essere interpretata intuitivamente come segue:

- Il coefficiente X_n ci dice quanto l'armonica n -esima (sinusoide a frequenza $n f_0$) è **presente nel segnale $x(t)$**
- Per calcolarlo eseguiamo la cross-correlazione tra il **segnale $x(t)$** e **l'armonica stessa** (espressa in forma complessa)
 - Se $x(t)$ NON contiene quella **frequenza**, il coefficiente verrà **nullo**
 - Se $x(t)$ contiene quella **frequenza**, il coefficiente complesso fornirà modulo e fase della corrispondente armonica
- Il calcolo dei coefficienti può essere pensato come un'operazione di analisi in frequenza del segnale

Analogamente possiamo interpretare in modo intuitivo la stessa serie di Fourier

- La **serie** può essere vista come la somma pesata di infinite **componenti armoniche**, con pesi dati dai relativi coefficienti
- Le **frequenze** non armoniche sono assenti nel segnale

- La conoscenza dei coefficienti è quindi **sufficiente** per ricostruire il segnale in maniera **perfetta** (è una rappresentazione alternativa del segnale)
- Il calcolo della serie può essere pensato come un'operazione di sintesi nel tempo del segnale

Il calcolo dello spettro secondo Fourier nasconde una apparente ‘anomalia’:

Eseguendo il calcolo nel dominio complesso, appaiono delle frequenze negative (dalla fisica, la frequenza ha senso solo per valori positivi)

L'anomalia è spiegabile solo in termini di modello matematico: le componenti a frequenza negativa non esistono nel segnale, esistono solo (e sono necessarie) nella rappresentazione, cosiddetta bilatera, dello spettro di Fourier

Spettro del segnale periodico

La rappresentazione dei coefficienti nel dominio delle frequenze (armoniche) viene chiamata **spettro**

- In realtà avremo 2 spettri, uno di **ampiezza** e uno di **fase** (modulo e angolo) dei coefficienti complessi X_n)
- Lo spettro può essere visto come un **grafico a righe** e dà un'idea immediata del contenuto in frequenza del segnale
 - Anche se il numero di righe è teoricamente infinito, le ampiezze tendono normalmente a decrescere, diventando dopo un po' trascurabili

PROPRIETÀ DELLA SERIE DI FOURIER

1. SIMMETRIA HERMITIANA

I coefficienti X_n godono della simmetria Hermitiana, per cui:

$$X_n = -X_{-n}^* \Leftrightarrow \begin{cases} |X_n| = |X_{-n}| \\ \arg(X_n) = -\arg(X_{-n}) \end{cases}$$

Questo vuol dire che posso limitarmi a calcolare e rappresentare la parte positiva dello spettro, in quanto quella negativa sarà ricavabile per simmetria

2. LINEARITÀ

La rappresentazione in serie di Fourier è anche un'operazione lineare: dati $x(t)$ e $y(t)$ periodici, avremo:

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \Rightarrow Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$$

3. SIMMETRIE DEL SEGNALE

- Dato un segnale $x(t)$ periodico pari, si dimostra che i coefficienti X_n saranno reali, per cui la serie sarà costituita da soli coseni

$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

- Dato un segnale $x(t)$ periodico dispari, si dimostra che i coefficienti X_n saranno immaginari, per cui la serie sarà costituita da soli seni
 - In particolare, in questo caso il coefficiente X_0 sarà nullo, come potevamo aspettarci (il valor medio di un segnale dispari è zero)

$$X_k = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

4. SEGNALI ALTERNATI

- Si definiscono **segnali alternati** i segnali periodici per cui l'area sottesa della parte positiva del segnale equivale a quella della parte negativa
 - **Seno** e **coseno** sono esempi semplici di segnali alternati
- I segnali alternati hanno chiaramente valor medio nullo
- Si dimostra che nei segnali alternati i coefficienti corrispondenti alle **armoniche pari** sono nulli

Riassumendo:

- I segnali che presentano variazioni più brusche (ad es. a gradino) hanno rappresentazioni spettrali più ampie e quindi un contenuto frequenziale maggiore
- Anche la frequenza base condiziona lo spettro: segnali con periodi minori utilizzano frequenze molto più alte
- Se nel segnale sono presenti discontinuità lo spettro contiene teoricamente infinite armoniche
- nella pratica però l'inviluppo tenderà a zero a partire da una certa frequenza (dipendente dalle caratteristiche del segnale), rendendo trascurabili le armoniche successive
- Nel gergo delle telecomunicazioni, l'estensione dello spettro prende il nome di banda. I segnali a banda larga saranno quelli che hanno un contenuto significativo alle alte frequenze, mentre quelli a banda stretta conterranno frequenze più limitate

FENOMENO DI GIBBS

Cosa succede troncando la serie?

- le componenti armoniche formano progressivamente il segnale $x(t)$
- Se ci fermiamo al termine k -esimo, quello la forma d'onda verrà deformata
- Questo fenomeno è stato osservato dal fisico statunitense W. Gibbs nel 1899, e da lui prende il nome
- Si osserva che il segnale oscilla intorno ai punti di discontinuità, e presenta sovraelongazioni (overshoot) di ampiezza (se il picco era 5 Volt, avremo tensioni superiori a 5 Volt)

POTENZA DEL SEGNALE PERIODICO

- Avevamo visto che i segnali periodici sono segnali di potenza (potenza media non nulla, energia infinita)
- Avevamo anche definito la potenza come integrale sul periodo del segnale al quadrato
- Ora vediamo come è possibile calcolare la potenza del segnale periodico anche nel dominio della serie di Fourier, grazie al: [Teorema di Parseval](#)

TEOREMA DI PARSEVAL

Parseval dimostrò la seguente identità:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

- Posso calcolare la **potenza** del segnale direttamente nel **dominio** dei coefficienti della serie
- La potenza media del segnale è data dalla somma delle **potenze delle singole armoniche**

NOTA: Devo considerare anche le frequenze negative, anche se fisicamente non esistono
(fanno parte del modello matematico)

[FEIS 5] DALLA SERIE ALLA TRASFORMATA DI FOURIER

Il limite della serie di Fourier è che si applica solo a segnali periodici

- Cosa succede se un segnale non è periodico?
- E' sempre possibile analizzarne il contenuto in termini di componenti frequenziali?

Fourier stesso diede la risposta a questa domanda, proponendo la trasformata cui diede il nome.

Partiamo da un caso già visto di segnale periodico: l'onda quadra con ritorno a zero:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_0}{T}\right)$$

Conosciamo la serie di Fourier di questo segnale.

Se riuscissimo ad approssimarlo con un'onda rettangolare non periodica potremmo ottenere il risultato voluto almeno su una forma d'onda rettangolare:

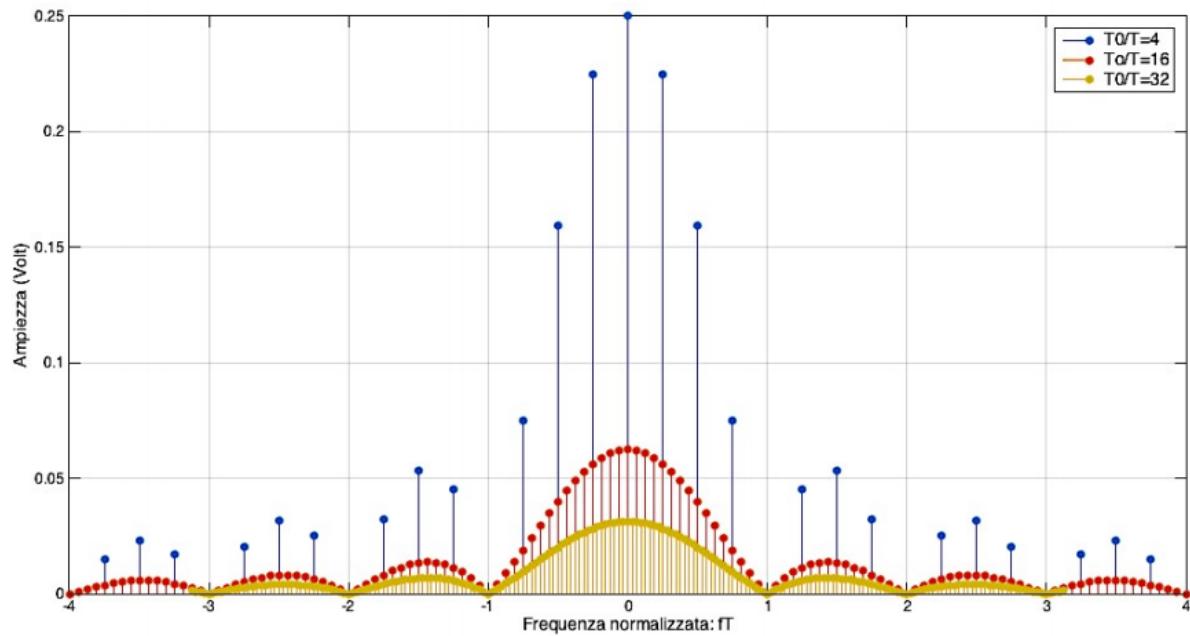
$$x(t) \approx \Pi(t/T)$$

- Apparentemente non è possibile ma, immaginando di mandare T_0 a **infinito**:
La replica successiva del rettangolo si sposterebbe a sua volta all'**infinito** e l'eguaglianza sarebbe **verificata!**
- Quello che abbiamo visto per il rettangolo in realtà vale per qualsiasi segnale periodico:
Distanziando le repliche in modo che rimanga solo la *funzione base* sullo **zero**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w(t - kT_0) \Rightarrow w(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \{x(t)\}$$

Cosa avviene nella serie di Fourier in questa situazione?

- All'allontanarsi delle repliche (T_0 grande) lo spettro si infittisce (le righe si avvicinano)
- Le armoniche, infatti sono distanti tra loro f_0 , inverso di T_0
- Per contro, l'ampiezza dei coefficienti si riduce per tutte le armoniche all'aumentare del periodo
- Spettri dell'onda quadra periodica con ritorno a zero per diversi valori del periodo T_0 in relazione alla durata del rettangolo T



- Al limite, quindi, intuitivamente lo spettro a righe tende a diventare una funzione continua.
Dobbiamo però formulare la cosa in maniera più rigorosa
- Definiamo il coefficiente di Fourier modificato:

$$X(kf_0) \triangleq T_0 X_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} w(t) e^{-2\pi j k f_0 t} dt$$

- E la relativa serie di Fourier modificata:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{-2\pi j k f_0 t} f_0$$

- Passando al limite per T_0 che tende a infinito abbiamo:

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x(t) = w(t) = \lim_{f_0 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{-2\pi j k f_0 t} f_0$$

- La sommatoria al membro destro dell'egualità tende quindi a un **integrale**
- Si ottiene lo sviluppo di Fourier di un **segnale aperiodico**:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j 2\pi f t} df$$

Rimane da capire cosa è $X(f)$ nella formula precedente

- Applichiamo lo stesso passaggio al limite visto in precedenza, ovvero:

$$X(f) = \lim_{f_0 \rightarrow 0} X(kf_0) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \lim_{f_0 \rightarrow 0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} w(t) e^{-2\pi j k f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) e^{-j 2\pi f t} dt$$

- Si ottiene le relazioni diretta e inversa della trasformata di Fourier per segnali aperiodici

- **TRASFORMATA DI FOURIER DIRETTA (Rappresentazione in frequenza)**

$$W(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad FT$$

- **TRASFORMATA DI FOURIER INVERSA (Ricostruzione nel tempo)**

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad IFT$$

NOTA: Mentre la serie di Fourier è una funzione del tempo, la trasformata di Fourier è funzione della frequenza (la serie è analoga all'anti-trasformata)

INTERPRETAZIONE DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

- Sappiamo che l'esponenziale complesso coincide con una somma di seni e coseni (Eulero)
- La trasformata diretta è quindi un'operazione di analisi in frequenza: come nella serie proiettiamo il segnale sulle varie sinusoidi, che però possono assumere frequenze qualsiasi
- La trasformata inversa è invece un'operazione di sintesi nel tempo: come nella serie sovrapponiamo contributi sinusoidali per ricostruire il segnale, ma le sinusoidi possono assumere frequenze che variano in modo continuo

SPETTRO IN FREQUENZA

Anche in questo caso possiamo parlare di rappresentazione spettrale del segnale:

- $X(f)$ è lo spettro (complesso) del segnale $x(t)$ e, come nel caso della serie, sarà costituito da un modulo e una fase
- A differenza della serie, $X(f)$ sarà una funzione continua in f
- $x(t)$ e $X(f)$ costituiscono una 'coppia' di Fourier:

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

- Da una rappresentazione posso passare all'altra tramite le operazioni di FT e IFT e l'informazione contenuta è identica

TRASFORMATE NOTEVOLI

Calcolare l'integrale di Fourier in forma chiusa può essere talvolta difficile o impossibile

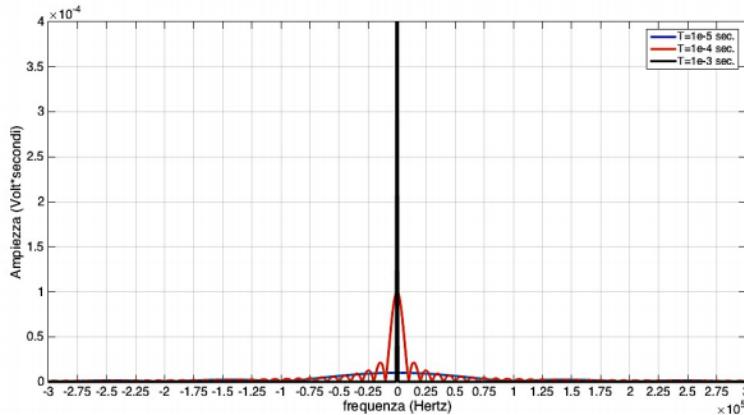
- Esistono anche apparati hardware per estrarre lo spettro di un segnale (analizzatori di spettro)
- In casi più semplici si può eseguire il calcolo manualmente. A questo scopo è possibile partire da alcune trasformate 'notevoli', ovvero trasformate di funzioni comuni che poi possono essere combinate insieme in vario modo

1. TRASFORMATE NOTEVOLI: Rettangolo

- Consideriamo la funzione rettangolo, una funzione molto comune nell'analisi di segnali.
In questo caso non è difficile calcolare l'integrale di Fourier

$$\begin{aligned} x(t) &= V_0 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} V_0 e^{-j2\pi ft} dt = \frac{V_0}{2\pi j f} [e^{\pi j f T} - e^{-\pi j f T}] = \\ &= \frac{V_0 T}{\pi f T} \frac{[e^{\pi j f T} - e^{-\pi j f T}]}{2j} = V_0 T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = V_0 T \text{sinc}(fT) \end{aligned}$$

- Nel grafico vediamo rappresentato lo spettro di ampiezza al variare della durata temporale del rettangolo
 - All'aumentare di T , lo spettro si comprime (durata maggiore nel tempo implica frequenze più basse)



2. TRASFORMATE NOTEVOLI: Costante

Si ottiene la trasformata della funzione costante $x(t)=V_0$ prendendo la funzione rettangolare e portando T a infinito:

$$x(t) = V_0 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow X(f) = V_0 T \text{sinc}(fT) \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} V_0 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \equiv V_0 \rightarrow V_0 \delta(f)$$

Vediamo che la trasformata di una funzione costante nel tempo è una delta di Dirac con area pari all'ampiezza della costante

- i. Il segnale costante non ha alcuna frequenza, il suo spettro coincide con la sola componente continua
- ii. E' l'esempio più evidente della reciprocità dei due domini

3. TRASFORMATE NOTEVOLI: Esponenziale

Un'altra trasformata comune è quella dell'esponenziale causale
(è la risposta di un circuito RC, usato per realizzare molti filtri)

4. TRASFORMATE NOTEVOLI: Sinusoidi

- Anche i segnali sinusoidali (seno e coseno) sono molto comuni nell'elaborazione di segnali
- La loro trasformata è particolarmente semplice, infatti una sinusoide contiene una sola componente frequenziale, tutte le altre frequenze (inclusa la continua) non daranno contributi:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow X(f) = \frac{j}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

- Come ci si poteva aspettare, abbiamo due impulsi, sulle frequenze positiva e negativa corrispondenti alla frequenza della sinusoide

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

1. SIMMETRIA HERMITIANA

La trasformata gode della simmetria Hermitiana, purché il segnale in ingresso sia reale

$$X(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow X(f) = X^*(-f)$$

Ovvero:

$$\text{Re}\{X(f)\} = \text{Re}\{X(-f)\}; \quad \text{Im}\{X(f)\} = -\text{Im}\{X(-f)\}; \quad \text{Stesso Re, Im segno cambiato}$$

$$|X(f)| = |X(-f)|; \quad \arg\{X(f)\} = -\arg\{X(-f)\}; \quad \text{Stesso modulo, fase segno cambiato}$$

2. SIMMETRIA DEL SEGNALE NEL TEMPO

Se un segnale è reale e pari, la sua trasformata di Fourier è puramente reale

$$x(t) \in \mathbb{R} \text{ pari} \Rightarrow X(f) = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt$$

mentre se un segnale è reale e dispari, la sua trasformata di Fourier è puramente immaginari

$$x(t) \in \mathbb{R} \text{ dispari} \Rightarrow X(f) = -2j \int_0^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt$$

3. LINEARITÀ

La trasformazione secondo Fourier è un'operazione lineare (è un integrale), quindi:

$$\begin{aligned} x(t) \leftrightarrow X(f) \\ y(t) \leftrightarrow Y(f) \end{aligned} \Rightarrow ax(t) + \beta y(t) \leftrightarrow aX(f) + \beta Y(f) \quad \forall \alpha, \beta$$

4. FATTORE DI SCALA

Se il segnale $x(t)$ subisca un cambiamento di scala, ovvero **dilatato**, **compresso** o **invertito**:

$$x(at) \begin{cases} |\alpha| > 1 & \text{il segnale viene compresso} \\ |\alpha| < 1 & \text{il segnale viene dilatato} \\ \alpha < 0 & \text{il segnale viene invertito} \end{cases}$$

Se conosciamo la sua trasformata di Fourier, possiamo calcolare immediatamente la trasformata del segnale scalato

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Principio di indeterminazione del dominio tempo-frequenza:

- Un segnale a durata limitata avrà estensione spettrale infinita
- Un segnale a durata illimitata avrà estensione spettrale finita
- Il prodotto della durata di un segnale per la sua estensione spettrale NON è un numero finito

5. RITARDO

Se RITARDO o ANTICIPO il segnale, mantiene la stessa **forma** -> modulo NON cambia

$$X(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow x(t-T) \leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi fT}$$

Il RITARDO agisce solo sulla fase, lo sfasamento sarà proporzionale alla frequenza

6. DUALITÀ

Teorema della dualità:

Dato un segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier $X(f)$, abbiamo:

$$x(t) \rightarrow X(f) \Leftrightarrow X(t) \rightarrow x(-f)$$

NB. Attenzione a come va interpretata la formula a destra: $X(t)$ è un segnale nel tempo che ha la stessa forma dello spettro $X(f)$, $x(f)$ è uno spettro in frequenza che ha la stessa forma del segnale $x(t)$

- Grazie al teorema di dualità, se conosciamo la trasformata di un segnale possiamo immediatamente ricavare la trasformata del segnale che ha l'andamento del suo spettro (raddoppio la mia conoscenza)
- Il teorema rende anche maggiormente evidente la reciprocità tra i due domini, ad es. il principio di indeterminazione: finito nel tempo \Rightarrow infinito in frequenza e viceversa

7. DERIVATA

Data una funzione $x(t)$, di cui conosco la TRASFORMATA DI FOURIER $X(f)$, posso calcolare la derivata della trasformata

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{d}{dt} x(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} (X(f) e^{j2\pi ft}) df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi f \cdot X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df \Rightarrow Y(f) = j2\pi f \cdot X(f) \end{aligned}$$

Nel dominio trasformato la derivazione diventa semplicemente il prodotto per **j2πf (fasore)**

- Da $x(t) \rightarrow$ trasformata $X(f) \Rightarrow X(f) * j2\pi f$
- Ogni volta che derivo devo moltiplicare per $j2\pi f$
- Fondamentale per il calcolo differenziale

8. INTEGRALE

Analogamente possiamo calcolare la TRASFORMATA dell'integrale di un segnale di cui conosciamo la TRASFORMATA:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow \int_{-\infty}^t x(\xi) d\xi \leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(f)}{2} \delta(f)$$

- Da notare che l'equazione ha una singolarità nell'origine
- Sappiamo che la frequenza 0 significa componente continua
 - Se l'integrale di $x(t)$ non è nullo, il suo integrale sarà infinito
si traduce in un **impulso** nell'origine dello spettro di area $X(0)/2$

La TRASFORMATA è solo $X(f) / j2\pi f$ (*derivando ottengo $X(f)$ -> derivando l'integrale ottengo il segnale stesso*)
Se ho un segnale con componente continua bisogna sommare il 2° termine: $X(0)/2$

Cosa succede in **frequenza** DERIVANDO o INTEGRANDO un segnale?

- Tralasciando la componente immaginaria che causa uno shift di fase,
la DERIVATA moltiplica lo spettro per f
l'INTEGRALE divide lo spettro per f
- Ne discende che:
la DERIVATA esalta le alte frequenze
l'INTEGRALE divide le attenua

9. CONVOLUZIONE

Nel dominio trasformato la CONVOLUZIONE diventa un semplice prodotto

$$x(t) \leftrightarrow X(f); y(t) \leftrightarrow Y(f) \quad \Rightarrow \quad x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

10. PRODOTTO

L'applicazione della proprietà di dualità al teorema della convoluzione ci fornisce la proprietà del prodotto:

- il prodotto di due funzioni ha come trasformata di Fourier la convoluzione delle loro rispettive trasformate:
- $$\left. \begin{aligned} x_1(t) &\leftrightarrow X_1(f) \\ x_2(t) &\leftrightarrow X_2(f) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$
- Come si può vedere, il risultato è la convoluzione tra gli spettri, una funzione che avrà quindi un'estensione in frequenza maggiore dei due spettri di partenza (si allarga la banda)
 - Abbiamo visto che la durata della convoluzione è la somma delle durate degli operandi

11. MODULAZIONE

Dalla proprietà del prodotto discende, come caso particolare, la proprietà della modulazione

- Una sinusoide è detta modulata (in ampiezza), se un segnale (detto modulante) altera la sua ampiezza nel tempo:

$$x(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

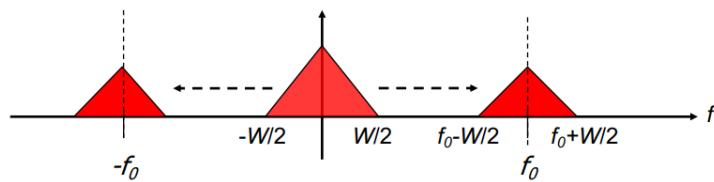
- Per ottenere $X(f)$ usiamo la proprietà del prodotto:

$$X(f) = M(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{1}{2} [M(f - f_0) + M(f + f_0)]$$

- In pratica, modulando una sinusoide di frequenza f_0 otteniamo due repliche traslate in $+/-f_0$ dello spettro del segnale modulante

Questo risultato è molto importante nell'ambito delle telecomunicazioni (in pratica tutti i segnali trasmessi via radio sono modulati in qualche modo)

- Altre modulazioni, più sofisticate, non si limitano a traslare lo spettro ma ne modificano anche la forma

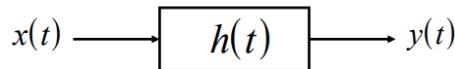


[FEIS 6] PERCHÉ EFFETTUARE L'ANALISI IN FREQUENZA?

- I sistemi LTI possono essere studiati in funzione della loro risposta all'impulso
- Questo risultato è sicuramente importante e utile, tuttavia il calcolo della convoluzione può essere difficile
- La convoluzione, in frequenza, si trasforma in una semplice moltiplicazione
- Questo suggerisce che, operando nel dominio trasformato, la risposta di un sistema LTI potrebbe essere calcolata in modo molto più semplice

RISPOSTA IN FREQUENZA

- Prendiamo un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)$



$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- $H(f)$, rapporto tra gli spettri dei segnali di ingresso e di uscita, nonché trasformata di Fourier della risposta impulsiva, è anche detta risposta in frequenza del sistema LTI

- Calcolo della risposta di un sistema $H(f)$ ad un fasore

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{j2\pi f_0 t} \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{j2\pi f_0(t-\xi)} d\xi = \\
 &= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{j2\pi f_0 \xi} d\xi = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{-j2\pi f_0 \xi} d\xi \\
 \Rightarrow \frac{y(t)}{x(t)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{-j2\pi f_0 \xi} d\xi = \Im\{h(t)\} \Big|_{f=f_0} = H(f_0)
 \end{aligned}$$

- $H(f)$ calcolata per una data frequenza f_0 coincide esattamente con la risposta del sistema a quella frequenza
- A partire dalla $H(f)$ possiamo esplicitare 3 funzioni:

1. **Risposta in $|H(f)|$ ampiezza**

i. Ci dice come viene modificata in ampiezza (amplificata o attenuata) ogni componente in frequenza del segnale

2. **Risposta in fase** $\Phi(f) = \arg[H(f)]$

i. Ci dice di quanto viene sfasata ogni componente in frequenza del segnale

3. **Ritardo di gruppo** $\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(f)}{df}$

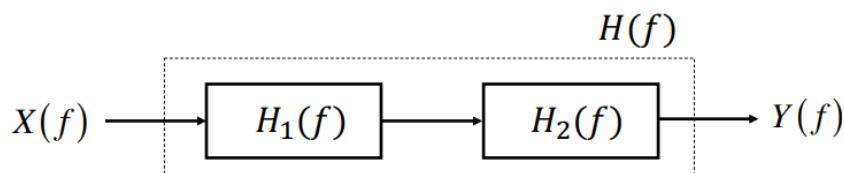
i. Ci dice di quanto viene ritardata nel tempo ogni componente in frequenza del segnale (è analoga all'informazione di fase: lo sfasamento di un'armonica è di fatto riconducibile a un ritardo)

COMPOSIZIONE DI SISTEMI

- Combinando in vario modo due o più sistemi LTI, posso ottenere funzioni più complesse
- A seconda di come 'colleghiamo' tra loro i sistemi, otterremo diversi tipi di risposta:

1. **CASCATA**

Collegiamo in sequenza due o più sistemi (l'uscita del primo è l'ingresso del secondo): ci interessa capire come è fatta la risposta in frequenza complessiva della cascata



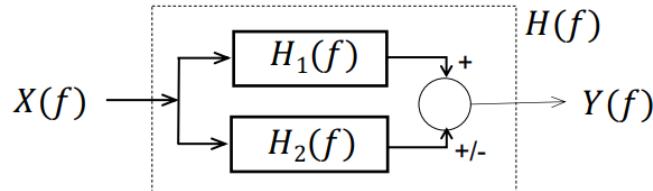
$$Y(f) = [X(f) \cdot H_1(f)] \cdot H_2(f) = X(f) \cdot H_1(f) \cdot H_2(f)$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

E' il prodotto delle risposte in frequenza

2. PARALLELO

Due o più sistemi ricevono lo stesso input e in uscita o la somma (o differenza) delle uscite



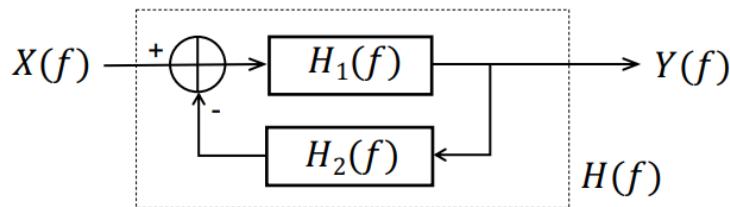
$$Y(f) = X(f) \cdot H_1(f) \mp X(f) \cdot H_2(f) = X(f) \cdot [H_1(f) \mp H_2(f)]$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f) \mp H_2(f)$$

E' la somma/differenza delle risposte in frequenza

3. RETROAZIONE NEGATIVA

Nel sistema in retroazione, l'uscita di un sistema viene riportata in ingresso dopo essere passata in un secondo sistema



$$\begin{aligned} Y(f) &= [X(f) - Y(f) \cdot H_2(f)] \cdot H_1(f) = \\ &= X(f) \cdot H_1(f) - Y(f) \cdot H_1(f) \cdot H_2(f) \\ \Rightarrow Y(f)[1 + H_1(f) \cdot H_2(f)] &= X(f) \cdot H_1(f) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f) \cdot H_2(f)}$$

BANDA PASSANTE DI UN SISTEMA LTI

Per definire la larghezza di banda di un sistema LTI:

- Definiamo larghezza di banda di un sistema, o banda passante, la **massima frequenza** che il sistema lascia passare
- Anche in questo caso, la $H(f)$ può estendersi a infinito, nel qual caso occorrerà fissare la banda passante secondo qualche convenzione
 - Diremo che la banda passante è la massima frequenza per cui il sistema fa passare una quantità 'non trascurabile' di energia del sistema
- L'approssimazione che è comunemente adottata è quella della cosiddetta banda a 3dB
 - Per definire la banda a 3dB occorre prima definire il guadagno in potenza di un sistema come:

$$G(f) = |H(f)|^2$$

- A questo punto la banda passante come la frequenza alla quale il guadagno del sistema scende sotto i 3 dB (attenuazione di potenza)

$$B = f_{max}: G_{dB}(f) \geq -3dB$$

- Perché proprio 3dB?

- Ricordiamo che i deciBel esprimono un valore in scala logaritmica, per cui:

$$G_{dB} = 10 \log_{10} G = -3 dB \Rightarrow G = 10^{-3/10} \approx \frac{1}{2}$$

- Oltre il limite di -3dB attenua per più di metà la potenza delle componenti frequenziali del segnale in ingresso

NOTA: Ovviamente è una convenzione, avremmo potuto ad esempio impostare come banda passante quella che taglia per più del 90% o qualsiasi altra soglia

FILTRAGGIO DEI SEGNALI

Un concetto fondamentale nell'elaborazione di segnali è quello di filtro:

- Un filtro è un qualsiasi sistema che elabora il segnale restituendone una versione modificata secondo qualche criterio
- Ci sono infiniti motivi per cui può essere utile applicare un filtro ad un segnale, ad esempio ripulirlo dai disturbi, correggere distorsioni, eliminare altri segnali interferenti, restaurare il segnale a seguito di danneggiamenti, estrarre o evidenziare caratteristiche utili del segnale, ecc.
- Per ogni operazione ci saranno vari filtri che possono ottenere il risultato ottenuto in maniera più o meno accurata

FILTRI LTI

- I filtri LTI sono sistemi LTI che operano una qualche trasformazione desiderata del segnale
 - Essendo sistemi LTI li posso studiare in funzione della risposta impulsiva e/o della risposta in frequenza
- E' facile capire cosa un filtro LTI può o NON può fare:
 - Essendo una moltiplicazione di spettri, il sistema può solo amplificare o attenuare le frequenze già presenti nel segnale originale
 - Il filtro LTI non può creare nuove frequenze o contenuti non presenti nel segnale (anzi, i filtri normalmente distruggono informazione)

FILTRI E MONDO REALE

In realtà, quello che possiamo fare è molto più semplicemente attenuare o evidenziare frequenze

- Idealmente un filtro taglierà un certo insieme di frequenze, facendone passare altre
- Possiamo definire alcune tipologie base di filtri cosiddetti ideali:
 - PASSA-TUTTO: fa passare tutte le frequenze inalterate
 - PASSA-BASSO: fa passare solo le basse frequenze
 - PASSA-ALTO: fa passare solo le alte frequenze
 - PASSA-BANDA: fa passare solo le frequenze intermedie
 - ELIMINA-BANDA: elimina una certa gamma di frequenze

RISPOSTA DI UN FILTRO IDEALE

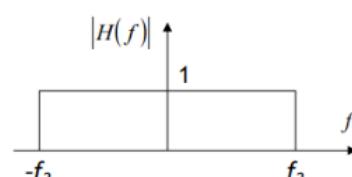
Abbiamo detto che il filtro ideale lascia passare inalterate alcune frequenze e ne taglia completamente altre

- In pratica si comporta in frequenza come una funzione rettangolare tra due frequenze f_1 e f_2
- In realtà non necessariamente nella banda passante il filtro deve lasciare il segnale identico a se stesso
- Accettiamo 2 tipi di modifica in frequenza: un guadagno in ampiezza costante k e un ritardo costante t_d , quindi:

$$H(f) = \begin{cases} ke^{-j2\pi f t_d} & f_1 < f < f_2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il comportamento del filtro è quindi principalmente legato alle frequenze f_1 e f_2

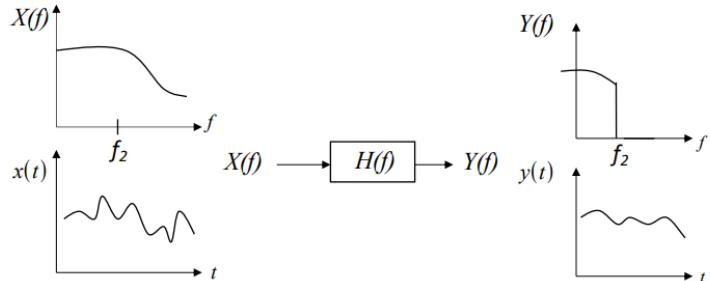
- Chiamiamo f_1 frequenza di taglio inferiore e f_2 frequenza di taglio superiore
- Regolando le due frequenze decido dove tagliare lo spettro del segnale di ingresso e dove lasciarlo passare



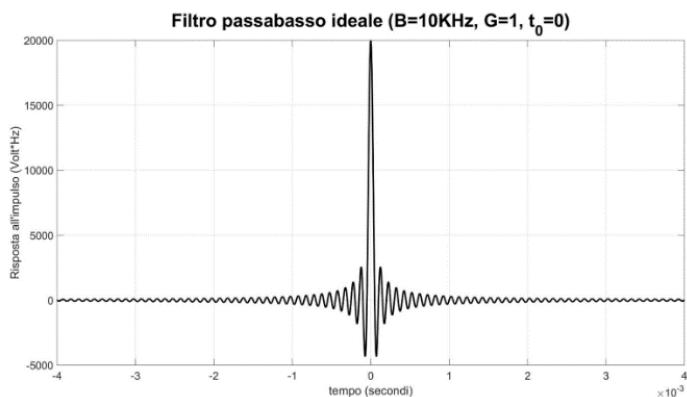
1. Filtro passa-basso ideale (LPF)

In questo caso $f_1 = 0$ Quindi passano tutte le frequenze $|f| < f_2$

ESEMPIO:



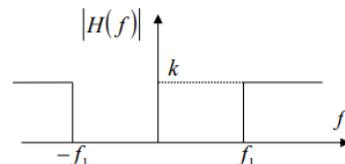
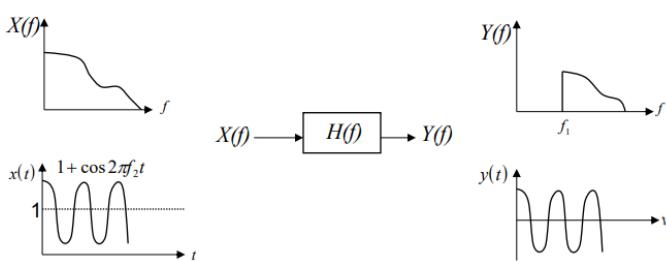
Passa-basso ideale: risposta all'impulso



2. Filtro passa-alto ideale (HPF)

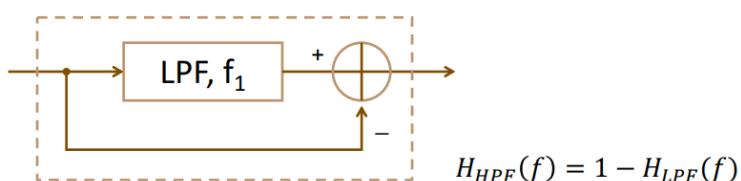
In questo caso $f_2 = \infty$ Quindi passano tutte le frequenze $|f| > f_1$

ESEMPIO:

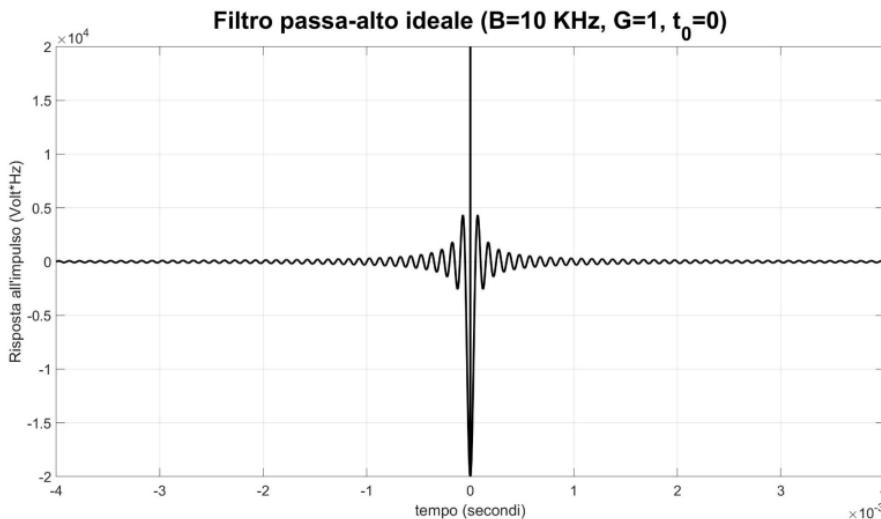


Il filtro passa-alto può essere realizzato a partire dal corrispondente passa-basso

- Possiamo sottrarre dal segnale originale la sua versione passabasso
- La frequenza di taglio superiore del LPF diventa frequenza di taglio inferiore del HPF



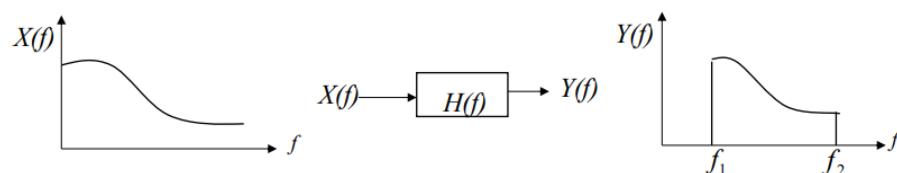
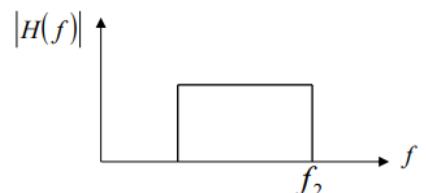
risposta all'impulso:



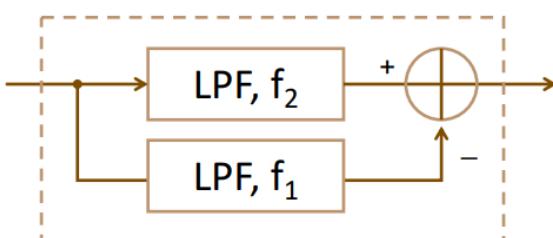
3. Filtro passa-banda ideale (BPF)

In questo caso ho sia f_1 che f_2 Passano le frequenze $f_1 < |f| < f_2$

ESEMPIO:

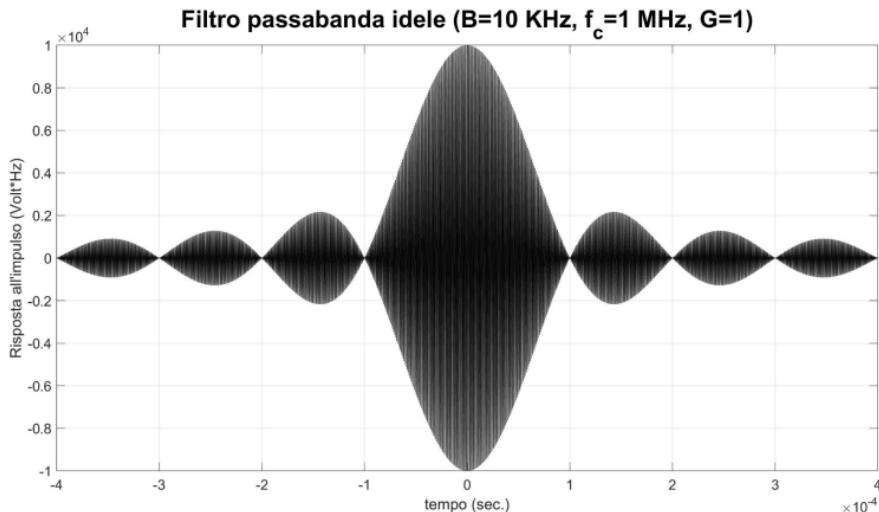


- Anche il filtro passa-banda può essere realizzato con una combinazione dei filtri già visti " Posso ad esempio mettere in cascata un passa-basso con taglio f_2 e un passa-alto con taglio f_1 , oppure sottrarre un passa-basso con taglio f_1 ad un passa-basso f_2



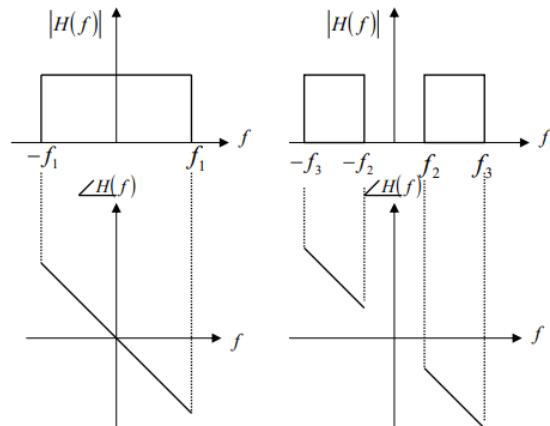
$$H_{BPF}(f) = H_{LPF2}(f) - H_{LPF1}(f)$$

risposta all'impulso



Risposta in fase di un filtro ideale

In generale si assume che la **fase** sia lineare nel campo di esistenza del filtro



CONSIDERAZIONI

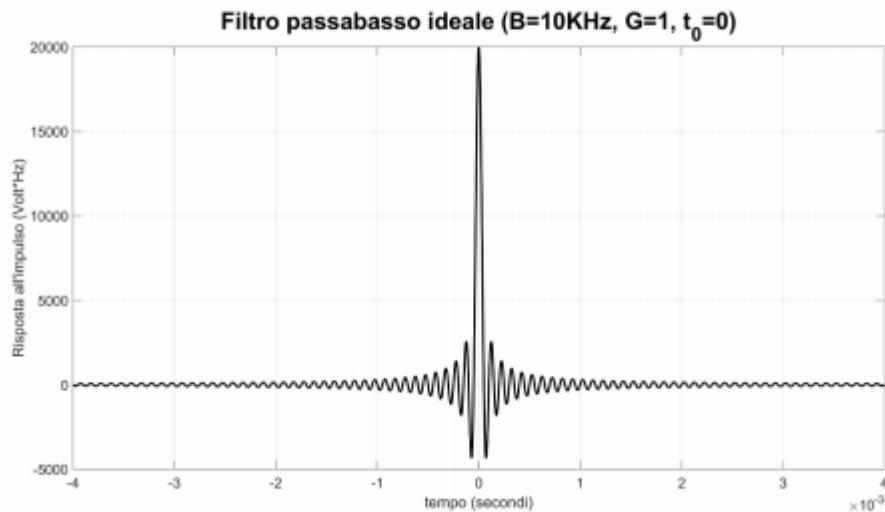
- Il filtro **passa-basso** funziona in pratica come un integratore: **taglia** le frequenze alte ed **esalta** quelle basse: il segnale filtrato avrà un andamento più “smooth”
- Il filtro **passa-alto** funziona come un derivatore: **taglia** le frequenze basse ed **evidenzia** le transizioni (alte frequenze): filtrato ottengo una versione più “sharp” del segnale
- Il filtro **passabanda**: **taglia** sia le basse che le alte frequenze mantenendo le variazioni intermedie

APPLICAZIONE DEI FILTRI IDEALI

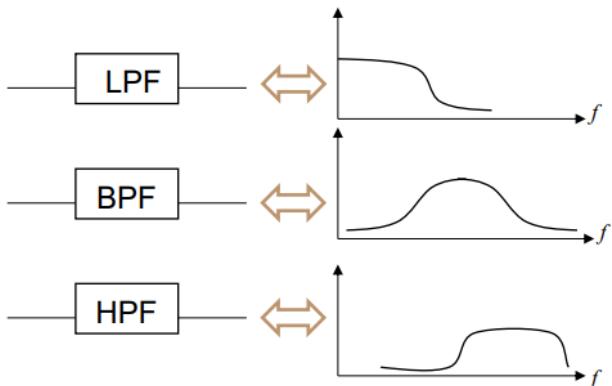
- Ogni filtro ha il suo campo di utilizzo:
 - I filtri passa-basso vengono tipicamente utilizzati per eliminare componenti di rumore ad alta frequenza o per limitare il segnale in banda (vedremo più avanti perché questo è utile)
 - I filtri passa-alto servono ad evidenziare le transizioni del segnale (che tipicamente sono punti di interesse: il contenuto informativo di un segnale è tipicamente concentrato nelle sue variazioni)
 - I filtri passa-banda sono più difficili da interpretare: possono essere usati per combinare le due funzioni sopra (evidenziare le transizioni ma rimuovendo il rumore), ma più comunemente sono usati per isolare segnali in banda

FILTRI E MONDO REALE

- E' facile capire perché: prendiamo la risposta all'impulso di un filtro LPF ideale
- Notiamo che $h(t) \neq 0, t < 0 \rightarrow$ filtro NON-CAUSALE: risponde prima dell'applicazione dell'ingresso
- Un filtro di questo tipo non può esistere



- Nella pratica, dovremo adottare dei filtri con transizioni in frequenza più dolci
- Per aumentare la pendenza del filtro occorrerà usare circuiti più sofisticati, con costi maggiori e maggiori distorsioni del segnale (ad es. si introducono oscillazioni (ripple) nelle zone di transizione)



- I filtri più semplici da realizzare sono i passa-basso, mentre i passa-banda sono più complessi
 - è molto difficile realizzare un filtro molto selettivo (banda passante piccola) a frequenza molto alta
 - Empiricamente si definisce la regola della banda frazionaria $\frac{\Delta f}{f_1}$

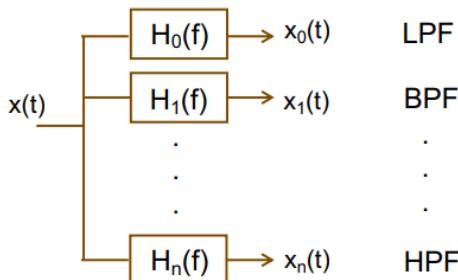
$$\begin{array}{c} |H(f)| \uparrow \\ \Delta f = f_2 - f_1 \\ \text{---} \\ f_1 \quad f_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0.01 < \frac{\Delta f}{f_1} < 0.1 \\ \text{o, analogamente:} \\ 10 < Q = \frac{f_1}{\Delta f} < 100 \end{array}$$

Q = fattore di merito

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEI FILTRI: ANALIZZATORE DI SPETTRO

Facciamo un esempio di applicazione dei filtri vedendo un semplice analizzatore di spettro

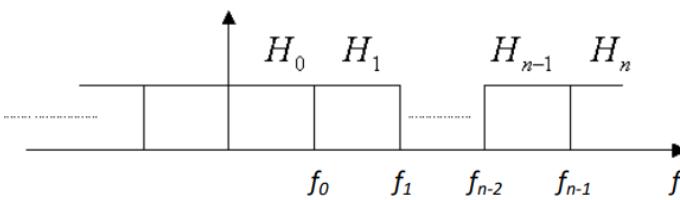
- In pratica, vogliamo realizzare uno strumento che tracci l'andamento dello spettro di un dato segnale di ingresso
- Partiamo dalla scomposizione del segnale in sotto-bande tramite una serie di filtri LPF, BPF, HPF



ANALIZZATORE DI SPETTRO

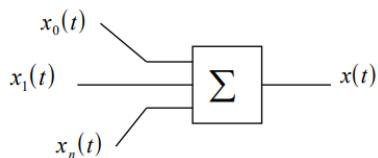
Ogni filtro estraе una porzione dello spettro del segnale

- Il primo sarà un LPF, poi avrò una serie di BPF e infine un HPF
- Per separare in maniera ideale le sottobande, dovrei essere così bravo da realizzare tutti i filtri con la stessa larghezza di banda passante (piccola a piacere) e transizioni a gradino



Se i filtri sono ideali, la ricostruzione del segnale è perfetta

- Basta sommare i segnali filtrati $x_i(t)$



$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) + \dots + X_n(f) =$$

$$= X(f)H_0(f) + X(f)H_1(f) + \dots + X(f)H_n(f)$$

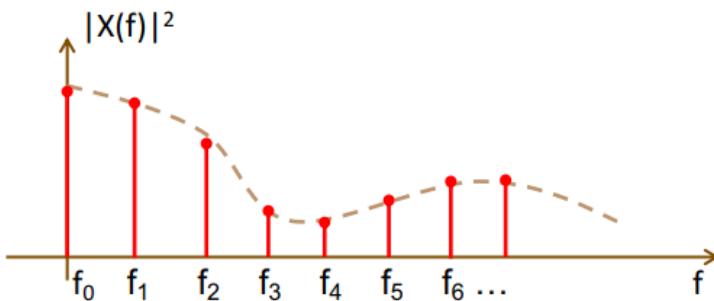
- Anche l'energia del segnale $x(t)$, quindi, sarà ripartita tra le sottobande del segnale:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(f) df =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_0^2(f) df + \int_{-\infty}^{+\infty} X_1^2(f) df + \dots + \int_{-\infty}^{+\infty} X_n^2(f) df =$$

$$\int_0^{f_0} X(f) df + \int_{f_0}^{f_1} X(f) df + \dots + \int_{f_{n-1}}^{\infty} X(f) df = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

- Possiamo quindi tracciare i valori delle energie E_i su un istogramma

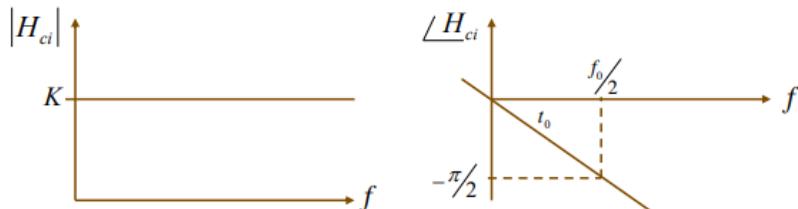
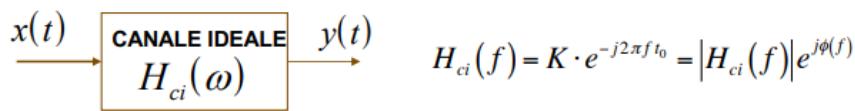


- Il grafico trovato mostra l'andamento dell'energia del segnale rispetto alla frequenza, e viene pertanto detto densità spettrale di energia
- Non ci fornisce informazioni sulla fase
- La precisione dello strumento dipenderà dalla capacità di fare filtri il più possibile ideali e ravvicinati (problema: banda frazionaria!)

[FEIS 7] SISTEMI NON DISTORCENTI

Per definire la distorsione, definiamo prima cosa deve fare un sistema per non distorcere

- Chiamiamo un Sistema non distorcente **CANALE IDEALE**



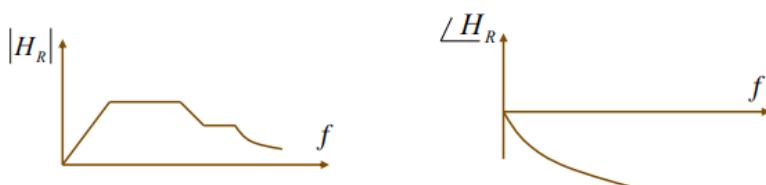
SISTEMI DISTORCENTI

Quindi, un sistema non distorcente al massimo può:

- Amplificare/attenuare tutte le componenti della stessa quantità K
- Introdurre uno sfasamento lineare delle sue componenti in frequenza

I sistemi distorcenti invece potranno creare distorsioni di ampiezza o fase

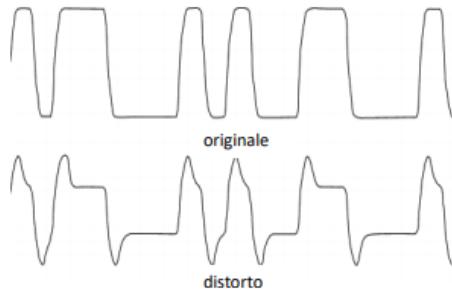
- Nel primo caso, lo spettro di ampiezza non sarà costante
- Nel secondo quello di fase non sarà lineare (le due cose possono presentarsi congiuntamente)



DISTORSIONI LINEARI

1. AMPIEZZA:

- a. Se il modulo della risposta in frequenza non è ‘piatto’, si altera il rapporto tra le componenti sinusoidali del segnale
- b. In pratica, alcune frequenze vengono accentuate e altre attenuate: il segnale cambia forma



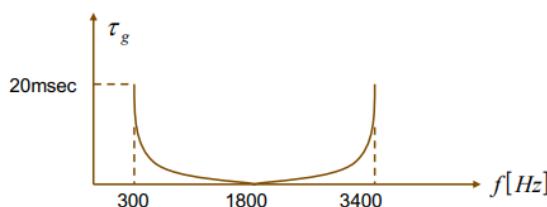
2. FASE

- a. Perché la fase deve variare linearmente e non essere costante?
 - b. In realtà quello che deve essere costante è il ritardo del segnale, che può essere espresso tramite la fase come segue:
- $$\tau_g = -\frac{d\varphi(f)}{df} \quad \text{Ritardo di gruppo}$$
- c. Se la fase è lineare il ritardo è costante rispetto alla frequenza (tutto il segnale viene ritardato di τ_g)

NON DISTORSIONE, E' REALISTICO?

In realtà, è impossibile nella pratica trovare sistemi non distorcenti

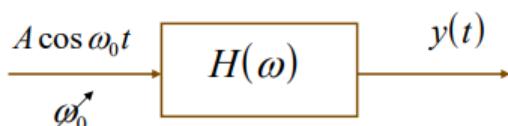
- Qualsiasi sistema, in qualche zona dello spettro di frequenza, introduce attenuazioni e/o si comporta non linearmente in frequenza
- A titolo d'esempio, la figura sotto mostra il comportamento in termini di ritardo di gruppo di un semplice filo di rame (il doppino telefonico)



MISURA DELLE DISTORSIONI LINEARI

Per misurare le distorsioni normalmente si usano sistemi di calibrazione:

- Metto in ingresso al sistema un segnale con frequenze note (ad esempio una sinusoide) e vedo come viene attenuato/ritardato
- Faccio la stessa cosa facendo variare la frequenza per tracciare l'andamento della risposta in frequenza.



EQUALIZZAZIONE

Una volta misurata la $H(f)$ del sistema nel range di frequenze di interesse, per riportarla all'idealità intodurrò una correzione

- I sistemi che producono tale correzione vengono chiamati 'equalizzatori' (appiattiscono la risposta in frequenza)
- E' una cascata di sistemi: il primo è quello dato e introduce la distorsione, il secondo è progettato per compensarla

$$H_{TOT}(f) = H_S(f) \cdot H_{EQ}(f) \Rightarrow H_{EQ}(f) = \frac{H_{TOT}(f)}{H_S(f)}$$

e imponendo $H_{TOT}(f) = Ke^{-j2\pi f t_0}$ otteniamo $H_{EQ}(f) = \frac{Ke^{-j2\pi f t_0}}{H_S(f)}$

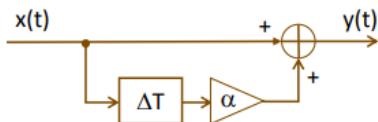
EQUALIZZATORE

Non progetterò uno specifico equalizzatore per ogni sistema, ma ricorrerò ad apparati che possono essere regolati in base alle esigenze

- Un equalizzatore per segnali musicali: ogni potenziometro è collegato ad un certo range di frequenze (nel campo dell'udibile) e ne regola la potenza in modo da poter compensare eventuali distorsioni
- L'obiettivo è appiattire la curva della risposta (in ampiezza)

ESEMPIO: Rimuovere un eco

- Prendiamo un sistema che introduce una eco nel segnale:



- Si vede che il sistema è distorcente, non rispetta il modello visto
- L'equalizzatore ideale dovrà avere una funzione di trasferimento

$$H_{eq}(f) = \frac{ke^{-j2\pi f \Delta T'}}{1 + \alpha e^{-j2\pi f \Delta T}}$$

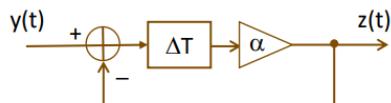
- che ponendo $k=\alpha$ e $\Delta T'=\Delta T$, diventa:

$$H_{eq}(f) = \frac{\alpha e^{-j2\pi f \Delta T}}{1 + \alpha e^{-j2\pi f \Delta T}}$$

- Ricordando a questo punto i sistemi composti, si può riconoscere nell'espressione sopra quella del sistema a retroazione negativa, con:

$$H_1(f) = \alpha e^{-j2\pi f \Delta T}; \quad H_2(f) = 1 \Rightarrow H_{tot}(f) = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)} = H_{eq}(f)$$

- Il nostro filtro equalizzatore sarà quindi fatto come segue:



- Dove, posta l'idealità dei sistemi, riusciamo ad ottenere $z(t)=x(t)$

EQUALIZZATORI ADATTIVI

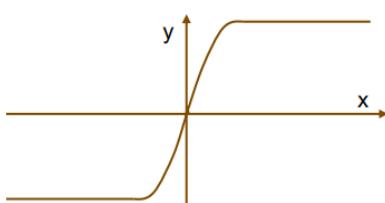
Poiché i sistemi possono essere tempo-varianti, gli equalizzatori possono aver necessità di adattarsi

- Si utilizzano dei sistemi di analisi automatica e ripetitiva del segnale in modo da misurare la distorsione in quel momento
 - Ogni T secondi si ripete l'analisi e si ricava l'andamento della funzione H da equalizzare
- Si applicano poi equalizzatori parametrici che possono modificare la risposta in funzione della funzione di equalizzazione richiesta

DISTORSIONI NON LINEARI

Cosa succede se il sistema non è lineare?

- Sicuramente si introduce una distorsione, MA... non possiamo valutarla in termini di risposta in frequenza!
- Occorre ricondurre il problema alla relazione ingresso-uscita



- Per capire cosa succede, possiamo provare ad approssimare la relazione ingresso uscita, tramite un polinomio:

$$y(t) \approx a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \dots$$
- da cui, applicando la trasformata di Fourier (si può fare anche se il sistema è non lineare), otteniamo:

$$Y(f) \approx a_1 X(f) + a_2 X(f) * X(f) + \dots$$
- Notiamo che compaiono dei termini convolutivi: lo spettro del segnale d'ingresso viene convoluto con sé stesso
- NOTA: *Questo vuol dire che lo spettro, oltre a deformarsi, si allarga, ovvero occupa più frequenze: questo è caratteristico dei sistemi non lineari, e non può succedere nei sistemi lineari!*

MISURA DELLE DISTORSIONI NON LINEARI

Per capire l'impatto della distorsione, immettiamo nel sistema un semplice segnale sinusoidale $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, avremo:

$$\begin{aligned} y(t) &\approx a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 [\cos^2(2\pi f_0 t)] + a_3 [\cos^3(2\pi f_0 t)] = \\ &= a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 \left[\frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} \right] + a_3 \left[\frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} \right] \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

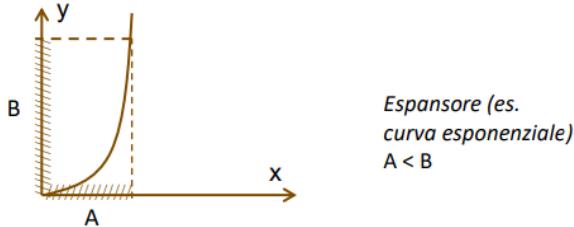
- Vengono fuori quindi armoniche della frequenza fondamentale (sinusoidi a frequenza multipla di f_0), raccogliendo i termini moltiplicativi avremo:

$$y(t) \approx K + \alpha \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \beta \cdot \cos(4\pi f_0 t) + \dots$$

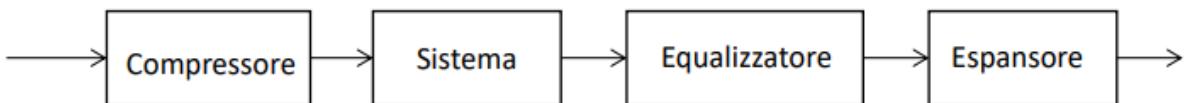
- A parte la componente continua, facilmente eliminabile, il termine che ci dà più fastidio è quello a frequenza doppia
- Misurando percentualmente questo termine rispetto all'ampiezza dell'armonica fondamentale, otteniamo la cosiddetta distorsione di seconda armonica: $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \cdot 100$
- Se la non-linearietà è pesante, può essere utile considerare anche la distorsione di terza armonica
- NOTA: *Un'analisi più precisa richiederebbe di valutare anche l'interazione tra più toni sinusoidali (intermodulazione) à si generano armoniche 'miste'*

COMPENSAZIONI DISTORSIONI NON LINEARI

- Il sistema si può ora considerare lineare nella zona d'uso, quindi posso correggere eventuali distorsioni con un normale equalizzatore lineare
- Dovrò infine ripristinare la dinamica del segnale tramite un espansore (sistema non lineare con funzione inversa rispetto al compressore)



- Complessivamente, il processo sarà il seguente:



[FEIS 8] CONVERSIONE ANALOGICO DIGITALE

I segnali digitali sono segnali discreti sia nel dominio che nell'ampiezza:

- I segnali in natura sono invece tipicamente continui, sia nel dominio che nell'ampiezza (un suono, un'immagine, ...)
- Per potere trattare i segnali nel dominio digitale occorre quindi operare una trasformazione in termini di:
 - Discretizzazione nel dominio: campionamento
 - Discretizzazione nell'ampiezza: quantizzazione
 - Codifica: associazione dei campioni quantizzati ad un codice (di solito binario)
- L'insieme di queste operazioni prende il nome di conversione analogico-digitale (AD) ed ha una controparte nella trasformazione inversa (DA) che ricostruisce il segnale originale

Perché convertire un segnale in formato digitale?

- Gli elaboratori elettronici lavorano con bit, non sono in grado di trattare segnali continui
- Per questo motivo, il segnale ‘fisico’ deve essere convertito nel formato numerico, ed in particolare in sequenze di bit
 - Nel momento in cui sarà necessario risalire alla sua forma analogica (es. in fase di presentazione) dovrà operare la conversione inversa
- Altri motivi per cui la forma digitale è preferita riguardano l'efficienza e robustezza di trasmissione, archiviazione, la possibilità di proteggere i dati, di inviarli su rete, ecc.

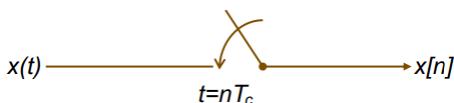
CAMPIONAMENTO DI SEGNALI

La prima operazione che dobbiamo affrontare è il campionamento

- Campionare un segnale significa estrarre dal segnale stesso i valori che esso assume ad **istanti temporali equi-spaziati**, multipli di un intervallo di tempo T_c fissato, chiamato **periodo di campionamento**
- Con questa operazione viene creata una sequenza $x[n]$ il cui valore n-esimo (detto campione) è il valore assunto dal segnale $x(t)$ a tempo continuo nell'istante nT_c

Campionamento ideale:

- Idealmente, il campionatore può essere pensato come un pulsante che, ogni T_c secondi, si “chiude” per un intervallo di tempo infinitesimo e poi si riapre:



- Occorre modellare matematicamente questa operazione

Modello matematico di campionamento ideale:

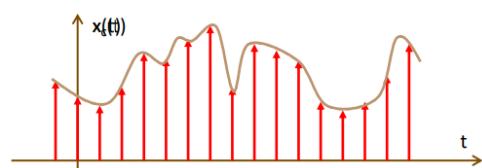
- Possiamo esprimere il campionamento, almeno in termini ideali, tramite la funzione impulsiva, sappiamo infatti che:

$$x(t)\delta(t - T) = x(T)\delta(t - T)$$
- moltiplicando una funzione continua per un impulso in un certo istante T , ottengo l'impulso in T di area pari al valore della funzione in quel punto
- Devo a questo punto semplicemente ripetere l'operazione ad ogni istante kT , usando il cosiddetto treno di impulsi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_c)$$

- Otteniamo quindi il segnale campionato idealmente come:

$$x_c(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \delta(t - nT_c)$$

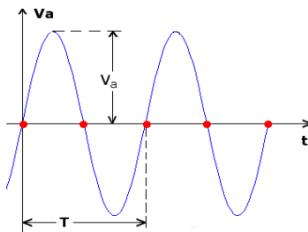


- Sequenza di impulsi equispaziati, le cui aree sono pari al valore del segnale nel punto di applicazione dell'impulso
- Graficamente possiamo rappresentarlo come una sorta di istogramma, in cui l'altezza delle righe segue l'inviluppo del segnale originale

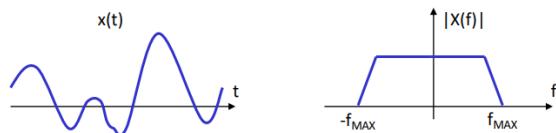
FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO

Quando il segnale campionato rappresenta bene il segnale fisico?

- Il periodo di campionamento (distanza tra gli impulsi) deve essere sufficientemente breve da consentire di seguire tutti gli andamenti del segnale
- Per far coincidere il segnale $x_c(t)$ con $x(t)$ dovrei però far tendere T_c a zero, il che vorrebbe dire prendere un numero infinito di campioni (non ha senso!)
- Sembrerebbe quindi che l'operazione sia 'distruttiva', ovvero causi la perdita di parte del segnale
- Esempio: funzione seno
 - Utilizzando una frequenza di campionamento pari a $T/2$ con il primo istante di campionamento nell'origine ottengo una sequenza di campioni nulli: impossibile capire come era fatto il segnale originale



- Per definire la frequenza di campionamento necessaria per rappresentare correttamente un generico segnale $x(t)$, occorre utilizzare la rappresentazione in frequenza:
 1. Per prima cosa, prendiamo il segnale $x(t)$ e ne calcoliamo lo spettro $X(f)$
 2. Supponiamo che il segnale abbia durata infinita e quindi lo spettro sia limitato in banda alla frequenza f_{MAX}



SPETTRO DEL SEGNALE CAMPIONATO

Applichiamo a questo punto il campionatore ideale con una generico periodo T_c , corrispondente ad una frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$

- Otteniamo, nel tempo:

$$x_c(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \delta(t - nT_c)$$

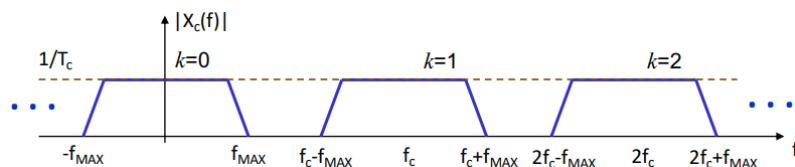
- da cui, applicando la trasformata di Fourier, otteniamo:

$$X_c(f) = X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_c)$$

- Come sappiamo, la convoluzione di un segnale con un impulso genera una replica del segnale traslata sul punto di applicazione dell'impulso
- Nella formula precedente, quindi, ogni impulso genererà una replica dello spettro $X(f)$ centrata sull'impulso

$$X_c(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_c)$$

- Ottengo uno spettro periodico, con periodicità f_c
- Graficamente, lo spettro sarà di questo tipo:

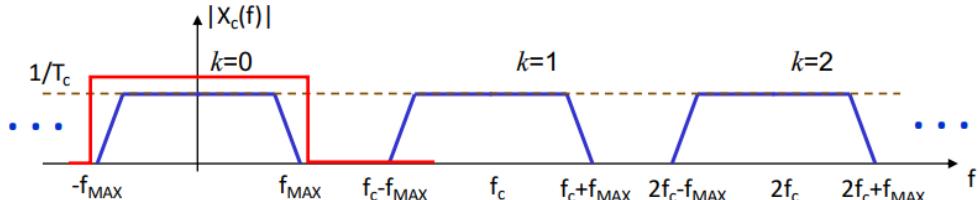


- NOTA: Le repliche sono distanziate di $f_c = 1/T_c$ e sono attenuate di un fattore $1/T_c$

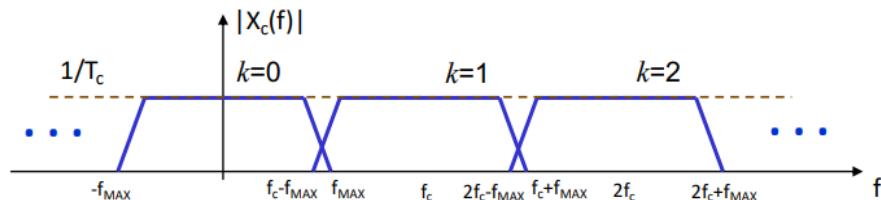
RICOSTRUZIONE DEL SEGNALE CONTINUO

Nelle condizioni che abbiamo appena visto, è facile intuire che si può ricostruire lo spettro del segnale originale $X(f)$ a partire da quello del segnale campionato $X_c(f)$ applicando un semplice filtro passa-basso

- In pratica, isolo la ‘replica 0’ eliminando tutte le altre

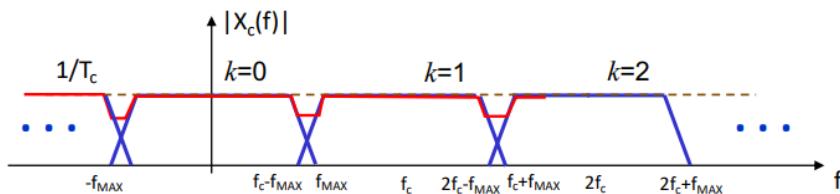


- Visto che due segnali con la stessa trasformata di Fourier sono identici, in uscita dal filtro avrà esattamente il segnale analogico $x(t)$
- L’operazione di campionamento appena vista non produce alcuna perdita nel segnale $x(t)$
- E’ infatti possibile ricostruire un segnale identico a $x(t)$ semplicemente filtrando il segnale campionato $x_c(t)$
- La domanda è: ma è sempre valido quanto abbiamo detto?
 - Supponiamo di campionare lo stesso segnale di prima, ma stavolta con una frequenza f_c più bassa

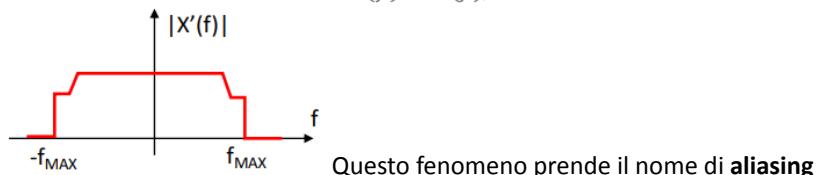


ALIASING

Si nota che in questo caso le repliche vanno a sovrapporsi



applicando il passa-basso otterremo quindi uno spettro $X'(f) \neq X(f)$, per cui anche $x'(t)$ sarà diverso da $x(t)$



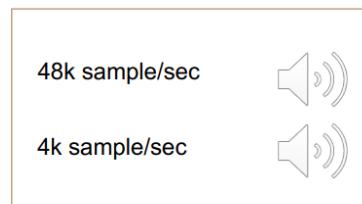
EFFETTI DELL’ALIASING

L’aliasing impedisce la corretta ricostruzione del segnale, e pertanto va evitato:

- Le frequenze dello stesso segnale si mescolano, è come se ci fosse una ‘autointerferenza’ del segnale con sé stesso
- Il problema coinvolge tutto il range di frequenze, non è un effetto passa-basso, anzi si generano alte frequenze spurie



Es. di aliasing in un segnale visivo



Es. di aliasing in un segnale audio

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

- Per non avere aliasing occorre che le repliche siano distanziate di almeno $2f_c$
- Al limite di questo valore, le repliche si toccano solo per un punto
- Questa condizione limite è detta **1° Condizione di Nyquist**: $f_c \geq 2f_{max}$
 - f_{max} = massima frequenza presente nel segnale originale
- Per motivi sia teorici che pratici, conviene ‘sovracampionare’, prendere un valore un po' più alto del limite di Nyquist

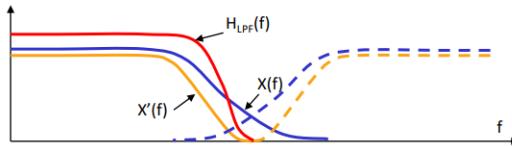
SOVRACAMPIONAMENTO

- Il motivo teorico per sovraccampionare è legato all'esempio della sinusoide visto all'inizio
 - In quel caso avevamo campionato un seno alla frequenza $f_c=2f$, coincidente con la frequenza di Nyquist
 - Scegliendo i campioni in kT_c otteniamo una sequenza nulla e quindi l'impossibilità di ricostruire il segnale
 - Risolviamo il problema usando una frequenza $f_c+\epsilon$, dove ϵ è detta **banda di guardia**
- Il motivo pratico si rifà alla natura fisica dei sistemi
 - E' impossibile realizzare un filtro ideale che tagli esattamente la banda del segnale: se le repliche sono adiacenti, rischio di includere parte della replica successiva nella zona di transizione del filtro -> **distorsione**
 - Di nuovo, introducendo una banda di guardia risolviamo il problema

E se il segnale non è limitato in banda?

Sappiamo che i segnali limitati nel tempo hanno banda infinita: come possiamo applicare il criterio di Nyquist ad un segnale di questo tipo?

- L'idea è che in realtà la banda 'significativa' sarà comunque limitata (andrà a zero in modo asintotico, ma potrà essere considerata trascurabile a partire da un certo valore f_o)
- Possiamo quindi pre-filtrare il segnale $x(t)$ tramite un LPF a frequenza f_0 , ottenendo un segnale $x'(t)$ limitato in banda, sul quale possiamo impostare la frequenza di campionamento tramite Nyquist



INTERPOLAZIONE DEI CAMPIONI

Vista la ricostruzione del segnale in frequenza (LPF), vediamo la corrispondente ricostruzione nel tempo (interpolazione)

- Considerando un LPF ideale, avremo:

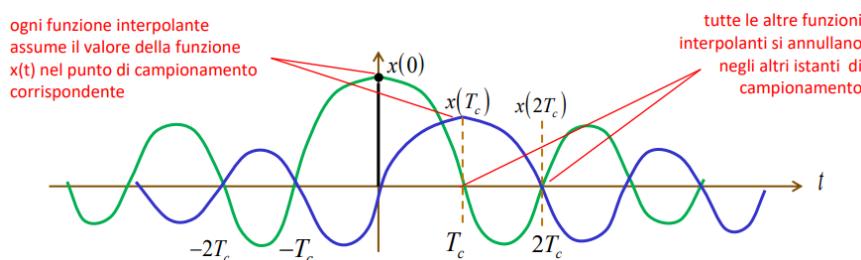
$$H_{LPF}(f) = \begin{cases} T_c & \text{per } -f_c \leq f \leq f_c \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \Rightarrow h_{LPF}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right) \quad \text{funzione interpolante}$$

- Di conseguenza il segnale ricostruito $x'(t)$ sarà:

$$x'(t) = x_c(t) * h_{LPF}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c) \delta(t - nT_c) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$$

- Essendo la convoluzione un'operazione lineare, possiamo portarla dentro la sommatoria:
ottengo delle convoluzioni sinc-delta, che generano delle sinc traslate

$$x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_c}{T_c}\right)$$

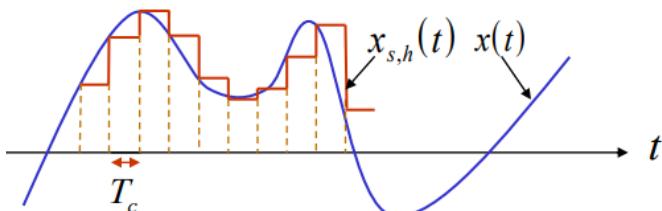


CAMPIONAMENTO REALE

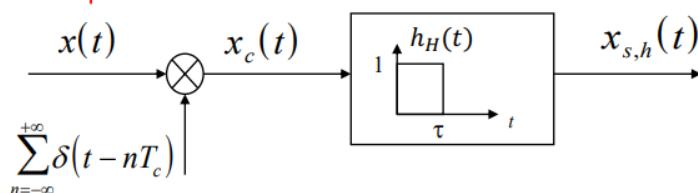
- Campionare con impulsi è **impossibile** perché gli impulsi sono fisicamente **irrealizzabili**
- Ricostruire con un LPF ideale è **impossibile** perché sarebbe un filtro **non causale**
- La soluzione tipicamente adottata è il **Sample&Hold**:
si prende il segnale in un punto e si trattiene per un intervallino di tempo

SAMPLE&HOLD

- Si ottiene un' **approssimazione a rettangoli**
- La durata del rettangolo è pari al **tempo di campionamento**, l'ampiezza è pari al **valore del segnale** $x(t)$ nell'istante di inizio del rettangolo



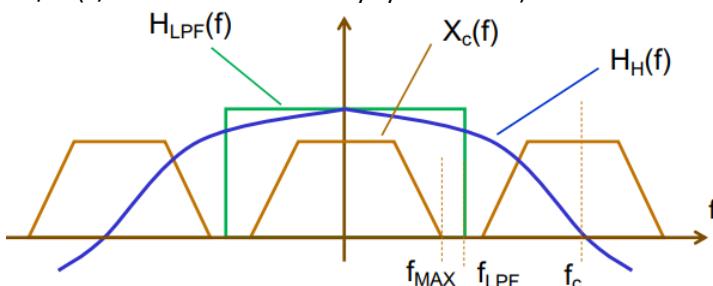
- Per capire come funziona il sample&hold lo modelliamo come la cascata di due sistemi:
campionatore ideale **filtro di trattenimento**



- Avremo quindi:

$$x_{s,h}(t) = x_c(t) * h_H(t) \Rightarrow X_{s,h}(f) = X_c(f) \cdot H_H(f)$$

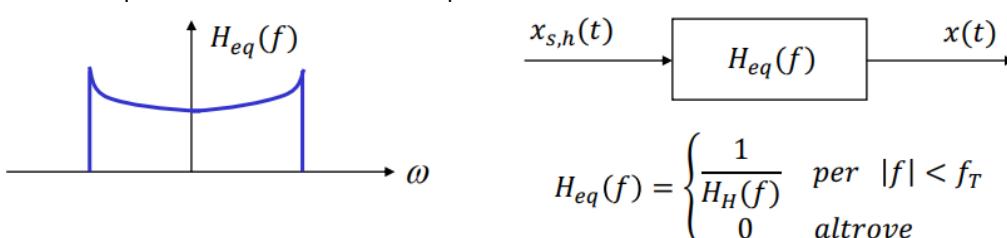
- Lo spettro del segnale campionato idealmente viene moltiplicato per la funzione di trasferimento $H_H(f)$ del filtro di trattenimento
- Poiché $h(t)$ è una funzione rettangolare, la $H(f)$ sarà una funzione sinc, con il primo attraversamento per lo zero in $f=1/t$ ($1/T_c$ se adottiamo un duty cycle unitario)



- Si nota come lo spettro del segnale viene deformato dal filtro di trattenimento (ha una distorsione lineare)

Sample&Hold: Ricostruzione

- E' possibile ricostruire il segnale con un filtro passa-basso (ovviamente se si rispetta la regola di Nyquist)
- Il segnale viene distorto per via del filtro $H_H(f)$
- Occorrerà quindi introdurre un filtro di equalizzazione



QUANTIZZAZIONE

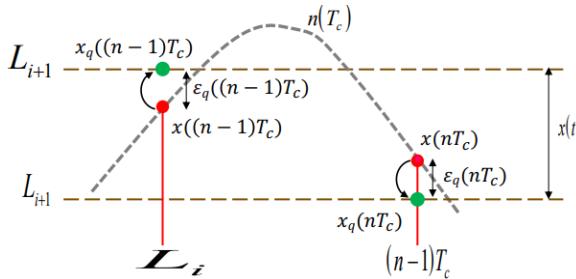
Il segnale ottenuto tramite il campionatore è discretizzato nel tempo ma ha ancora valori continui in ampiezza

- Un segnale di questo tipo non è ancora rappresentabile in forma numerica, perché i valori non costituiscono un insieme numerabile
- Occorre quindi fare un ulteriore passaggio: la quantizzazione
- La quantizzazione consiste nel discretizzare i campioni in ampiezza, associandoli ad un numero limitato di livelli possibili
- Mappiamo un segnale continuo in un segnale i cui valori appartengono ad un set predefinito di M possibili livelli
- Sceglieremo M come una potenza di 2, in modo da poterlo rappresentare con un numero di bit B tale che $2B=M$
- Gli M livelli dovranno coprire la stessa dinamica del segnale, e l'assegnazione di ogni campione al livello corrispondente avverrà secondo un criterio di minima distanza
- Dato un segnale campionato $x(nT_c)$, avremo:

$$x(nT_c) = x_q(nT_c) + \epsilon_q(nT_c)$$

con $\begin{cases} x(nT_c) & \text{segna campionato} \\ x_q(nT_c) & \text{segna quantizzato} \\ \epsilon_q(nT_c) & \text{errore di quantizzazione} \end{cases}$

- Il livello prescelto x_q è quello più vicino al valore originale del segnale in quel punto
- Dati 2 livelli di quantizzazione contigui L_i e L_{i+1} a distanza D , avremo:

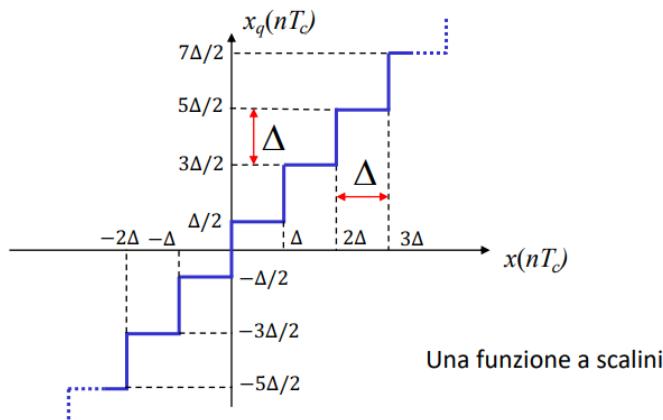


QUANTIZZAZIONE UNIFORME

- Nel quantizzatore uniforme, gli M livelli sono equispaziati
- Perciò, il massimo errore ϵ_q che posso commettere su un campione è pari in modulo a $\Delta/2$, con Δ è costante
- Supponendo il segnale di ingresso normalizzato tra $+/-1$ (se non lo fosse, è semplice applicare una normalizzazione), possiamo anche calcolare Δ in funzione di M

$$\Delta = \frac{2}{M} \Rightarrow |\epsilon_q^{max}| = \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{M}$$

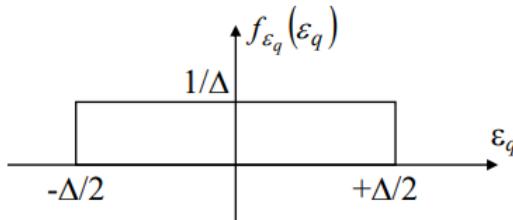
- Possiamo quindi definire la relazione ingresso-uscita di un quantizzatore uniforme (è un sistema non lineare!)



RUMORE DI QUANTIZZAZIONE

La quantizzazione introduce un errore sistematico, detto **rumore di quantizzazione**

- Il valore dell'errore in ogni campione può essere modellato come una variabile aleatoria: infatti, se i livelli in uscita sono prefissati, quelli in ingresso variano in maniera randomica con gli andamenti del segnale
- Supponendo che il segnale di ingresso sia distribuito uniformemente nel range di valori possibili, anche l'errore sarà distribuito uniformemente nel range di variazione dell'errore $[-\Delta/2, \Delta/2]$



Possiamo quindi stimare la **potenza media del rumore**

- Data la distribuzione il valor medio sarà nullo
- La potenza, pari al valore quadratico medio, sarà quindi uguale alla varianza

$$E\{\epsilon_q^2\} = \sigma_q^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \epsilon^2 f_{\epsilon_q}(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{1}{\Delta} \frac{\epsilon^3}{3} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{3\Delta} \left(\frac{\Delta^3}{8} + \frac{\Delta^3}{8} \right) = \frac{\Delta^2}{12}$$

- La potenza del rumore di quantizzazione scende (quadraticamente) con Δ , ossia con l'aumentare del numero di livelli

RAPPORTO SEGNALE-RUMORE

Si definisce rapporto segnale su rumore (o segnale-disturbo) S/N

il **rapporto tra la potenza del segnale S_x e la potenza del rumore S_n** che agisce su quel segnale: $S/N = 10 \log_{10} \frac{S_x}{S_n} [dB]$

- E' una misura della qualità di un segnale (più è elevato meglio è)
- E' un numero puro e si misura tipicamente in decibel
- Si calcola nell'ipotesi di rumore additivo (sennò non ha senso)
- Alcuni esempi:
 - Trasmissione segnale telefonico à 30 dB
 - Trasmissione radio FM à 50 dB
 - CD-Audio à 90 dB (vinile circa 60 dB)

S/N DEL QUANTIZZATORE UNIFORME

Per calcolare la potenza del segnale, supponendo che il segnale sia a valor medio nullo e vari uniformemente in $[-A/2, A/2]$ avremo (analogamente a prima):

$$E\{x^2\} = \sigma_x^2 = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} x^2 f_x(x) dx = \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} x^2 dx = \frac{A^2}{12}$$

Quindi:

Notiamo che:

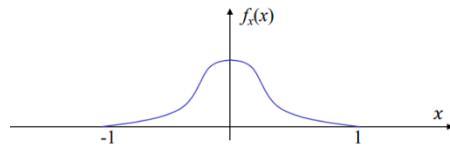
$$\frac{S}{N} = 10 \log_{10} \frac{A^2 / 12}{\Delta^2 / 12} = 10 \log_{10} \frac{A^2}{\Delta^2} dB \quad \Delta = \frac{A}{N} = \frac{A}{2^B} \Rightarrow \frac{S}{N} = 10 \log_{10} \frac{A^2}{A^2 / 2^{2B}} = 10 \log_{10} (2^{2B}) = 10 \frac{\log_2 2^{2B}}{\log_2 10} \cong 10 \frac{2B}{3.32} \cong 6B$$

dove N = numero di livelli del quantizzatore
 $B = \log_2 N$ = numero bit del quantizzatore

- Ogni bit che aggiungiamo al quantizzatore migliora il rapporto S/N di 6 dB
- Per ottenere i 90 dB del CD-Audio dovrà quantizzare a 16 bit (64k livelli)

QUANTIZZATORI NON UNIFORMI

Cosa succede se il segnale è distribuito diversamente (capita spesso)?



- Il quantizzatore dovrebbe generare più livelli nella zona dove il segnale ha maggiore probabilità di essere presente, per approssimarla meglio -> **quantizzazione non uniforme**

QUANTIZZATORI OTTIMO

La teoria del quantizzatore ottimo è stata formulata da Lloyd e Max

- L'idea nasce dall'ottimizzazione congiunta dei punti di transizione e dei livelli rappresentativi tale da minimizzare l'errore quadratico medio del quantizzatore
- L'espressione analitica che si ottiene non si risolve in forma chiusa ma può essere raggiunta facilmente tramite un algoritmo iterativo
- I dati necessari sono:
 - La conoscenza della distribuzione del segnale $f_x(x)$
 - La scelta a priori del numero di livelli del quantizzatore N

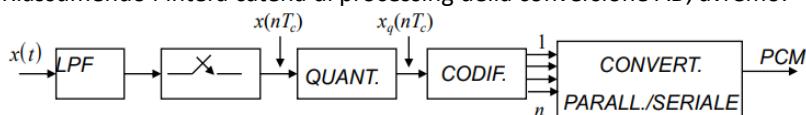
Algoritmo di Lloyd-Max

- Scegliere arbitrariamente un set iniziale di livelli a_i , $i=1\dots N$ (es. partire da livelli uniformi)
- Impostare i punti di soglia b_j , $j=1\dots N-1$ ai valori centrali tra livelli successivi -> $b_j = 1/2(a_{j+1} + a_j)$
- Ricalcolare i livelli di quantizzazione a_i , $i=1\dots N$, imponendoli pari alla media di U nella finestra (b_{i-1}, b_i) , dove gli estremi b_0 e b_N sono posti a $\pm\infty$
- Calcolare l'errore quadratico medio e confrontarlo col passo precedente
- Se la variazione è inferiore a una data soglia: **STOP**, altrimenti torna al punto 2

NOTA: l'algoritmo garantisce la convergenza in quanto ad ogni passo l'MSE non può che diminuire, non è tuttavia garantito che non si fermi in un minimo locale

CODIFICATORE PCM

- Una volta quantizzato il segnale, abbiamo ottenuto campioni discreti con livelli di ampiezza in numero finito
- Possiamo rappresentare il segnale originale in forma simbolica (tipicamente binaria), associando ai campioni un codice
- Questo processo prende il nome di PCM (pulse code modulation)
- Riassumendo l'intera catena di processing della conversione AD, avremo:



Il codificatore non farà altro che associare una sequenza di B bit ad ogni campione, corrispondente al livello (tra i 2^B possibili)

BITRATE

- In uscita dalla PCM avremo quindi una sequenza di bit con una certa cadenza temporale
- Ci interessa calcolare il rate di bit emessi al secondo, detto **bitrate**
- Dato un segnale campionato a N campioni/sec, in cui ogni campione viene quantizzato su M livelli, il bitrate sarà:

$$r_b = N \cdot \log_2 M = N \cdot b \text{ [bit/sec]}$$
- r_b è legato alla frequenza del segnale (Nyquist) e alla qualità che vogliamo in quantizzazione (S/N)
 - Es. dato un segnale di banda 10 kHz, volendo produrre un segnale di qualità pari almeno a 30 dB, bitrate:

$$r_b \geq 2 \cdot 10^4 \cdot 5 = 10^5 \text{ [bit/sec]}$$

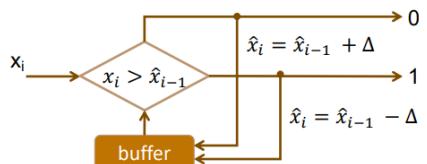
COME RIDURRE IL BITRATE

- Come si vede dalla formula precedente, la quantità di bit/sec generate da una sorgente è significativo, in particolare per segnali a larga banda e in presenza di requisiti qualitative elevate
- Nasce quindi il problema di ridurre il bitrate, ove possibile
- I meccanismi sono molti, vediamo qui i metodi che si basano sulle caratteristiche di predicitività del segnale
- In pratica, visto che campioni successivi di un segnale hanno in generale valori abbastanza simili, posso codificarli in maniera differenziale (variazione) anziché assoluta, 2 esempi:
 - Modulazione Delta
 - DPCM (PCM differenziale)

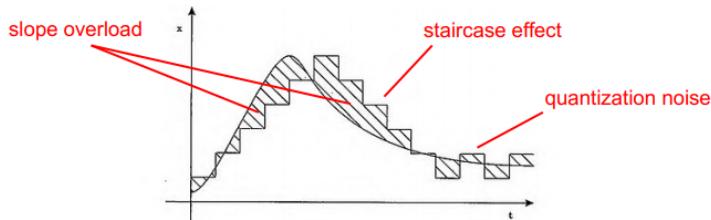
1-MODULAZIONE DELTA

L'idea della modulazione delta è quella di codificare anziché i singoli valori dei campioni, le variazioni positive e negative tra un campione e l'altro

- Si definisce un passo (il 'delta'), che è la quantità di cui il valore del campione può saltare, in più o in meno, rispetto al precedente
- Essendo che le uniche due possibilità sono $\pm\Delta$, basterà in questo caso 1 bit per campione



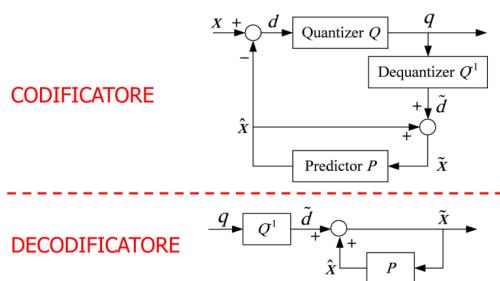
- Ovviamente la qualità del segnale sarà più bassa rispetto alla PCM, in particolare si introducono una serie di errori
 - Il 1° tipo di errore avviene in presenza di variazioni brusche: il tasso di crescita (o decrescita) del segnale codificato non riesce a 'inseguire' le variazioni del segnale (**slope overload**)
 - Il 2° tipo di errore avviene nelle zone piatte, il segnale continua ad oscillare tra $\pm\Delta$ (**quantizing noise**)



2-DPCM

La DPCM realizza un meccanismo simile ma più sofisticato

- Realizza una predizione del campione successivo (che può essere anche basata su più campioni precedenti) e poi codifichiamo la differenza tra il campione corrente e la predizione
- Se la predizione è accurata, l'errore di predizione sarà piccolo e quindi richiederà meno bit
- In questo caso, il bitrate in uscita non è definito a priori (dipende da quanto il segnale è correlato e quindi predicibile) e anche la qualità può variare



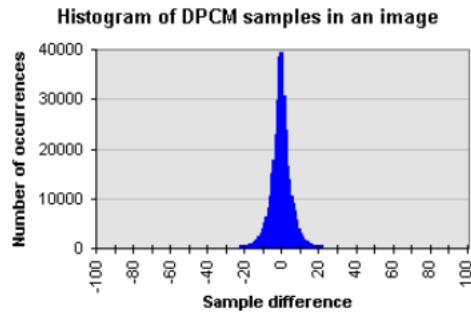
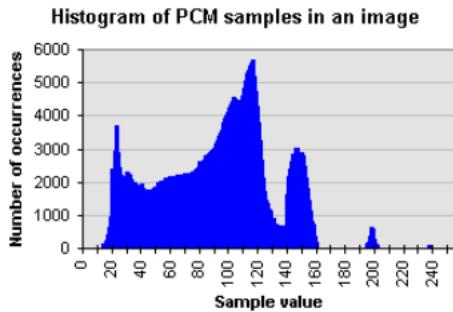
DPCM: NOTE

- Notiamo che il codificatore contiene al suo interno anche un decodificatore
 - La predizione va eseguita sui **campioni ricostruiti** e NON su quelli veri, che NON saranno disponibili al decoder
 - Il decodificatore è di fatto abbastanza **simile** (solo leggermente più semplice)
- La predizione può essere eseguita su **un solo campione** o su **una piccola sequenza** (aumenta la lunghezza del buffer)
- La DPCM contiene un **quantizzatore** applicato agli errori, tipicamente sarà di tipo non uniforme (l'errore è distribuito in maniera quasi impulsiva)
 - Talvolta, per risparmiare bit, si trascurano gli errori sotto un certo valore

DPCM: Prestazioni

Le prestazioni del codificatore DPCM dipendono dalle caratteristiche del segnale

- **Maggiore correlazione** produrrà **bitrate più bassi**
- Possiamo evidenziare il vantaggio prodotto dal predittore tracciando l'istogramma (distribuzione) dei valori originali, confrontato con quello degli errori di predizione



[FEIS 9] PROPRIETÀ DEI SEGNALI DISCRETI

1. SIMMETRIA

- a. Pari: $x(t) = x(-t) \forall t \rightarrow x(n) = x(-n) \forall n$
- b. Dispari: $x(t) = -x(-t) \forall t \rightarrow x(n) = -x(-n) \forall n$

2. GUADAGNO

- a. Positivo (amplificazione) $\alpha x(t) : \alpha > 1 \rightarrow \alpha x(n) : \alpha > 1$
- b. Negativo (attenuazione) $\alpha x(t) : \alpha < 1 \rightarrow \alpha x(n) : \alpha < 1$

3. FATTORE DI SCALA

nel dominio digitale, compressione ed espansione corrispondono a ricampionamenti del segnale

- a. Compressione: (sottocampionamento): viene realizzata applicando un filtro passa-basso e poi decimando i campioni, il filtro è necessario per non introdurre aliasing
- b. Espansione: (sovracampionamento): viene realizzata interpolando nuovi campioni nella sequenza o replicandoli e poi filtrandoli sempre con un passa-basso

NOTA: il segnale di uscita deve essere sempre una sequenza discreta di campioni equispaziati, quindi se il fattore di scala non è intero occorre interpolare anche i valori originali

4. INTEGRAZIONE E DERIVAZIONE

- a. Integrazione: Diventa somma cumulativa

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\xi) d\xi \rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

- b. Derivazione: Diventa differenza finita

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \rightarrow y(n) = \frac{1}{T_c} [x(n) - x(n-1)]$$

NOTA: Data sequenza discreta, T_c potrebbe non essere noto, quindi calcolo solo la diff tra i campioni ($T_c=1$)

5. VALOR MEDIO

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \rightarrow \bar{x} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} x(k)$$

6. VARIANZA

$$\sigma_x^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x(t) - \bar{x})^2 dt \rightarrow \sigma_x^2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} [x(k) - \bar{x}]^2$$

7. CORRELAZIONE

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau) dt \rightarrow \mathcal{R}_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n+k)$$

8. AUTOCORRELAZIONE

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau) dt \rightarrow \mathcal{R}_x(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n+k)$$

9. ENERGIA (segnali discreti di energia)

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \rightarrow E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^2(k)$$

10. POTENZA MEDIA (segnali discreti di potenza)

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \rightarrow P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} x^2(k)$$

ISTOGRAMMA

Dato un segnale discreto, è possibile calcolare la densità di probabilità dei livelli assunti dal segnale

- In realtà, se dispongo di un numero finito di campioni N , le probabilità dei livelli saranno stimate tramite le frequenze relative di occorrenza dei valori
- Si ottiene il cosiddetto istogramma del segnale, $h(l)$

$$h(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \begin{cases} 1 & \text{se } x(n) = l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad l = 1, \dots, L$$

NOTA: L'istogramma è una ddp discreta, quindi gode delle stesse proprietà. In particolare, la somma delle righe (integrale discreto) è pari a 1

- Esempio:

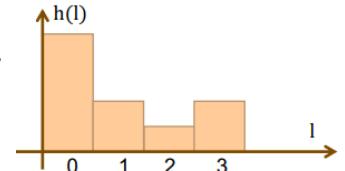
Prendiamo una sequenza discreta di lunghezza 30, con campioni a 2 bit (4 livelli)

$$x(n) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2]$$

- L'istogramma sarà formato da 4 righe (pari al numero di livelli)
- L'altezza di ogni riga sarà pari al numero di campioni che assumono il livello corrispondente, diviso per il numero di campioni totali 30

$$h(0) = 15/30; h(1) = 6/30; h(2) = 3/30; h(3) = 6/30$$

```
int x[N]
float h[K]
load x
for n in 1...N
    h[x[n]] += 1.0
for k in 1...K
    h[k] /= N
return h
```



STATISTICHE DELL'ISTOGRAMMA

Una volta calcolato l'istogramma è possibile calcolare direttamente altri valori statistici, usando l'istogramma come funzione pdf e la definizione di media statistica

$$1. \text{ Valor medio} \quad \bar{x} = \sum_{l=1}^L l \cdot h(l)$$

$$2. \text{ Varianza} \quad \sigma_x^2 = \sum_{l=1}^L (l - \bar{x})^2 \cdot h(l)$$

Data la sequenza

$$x(n) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2]$$

dell'esempio precedente e il relativo istogramma avremo:

$$h(l) = \frac{1}{30} [15 \ 6 \ 3 \ 6]$$

$$\bar{x} = \frac{1}{30} (0 \cdot 15 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6) = \frac{30}{30} = 1$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{30} [(0 - 1)^2 \cdot 15 + (1 - 1)^2 \cdot 6 + (2 - 1)^2 \cdot 3 + (3 - 1)^2 \cdot 6] = \frac{42}{30} = 1.4$$

NOTA: Tipicamente $K \ll N$ per cui occorrono molte meno operazioni rispetto al calcolo nel tempo

SISTEMI NUMERICI

L'elaborazione di segnali digitali prevede l'utilizzo di sistemi che a loro volta siano digitali (numerici)

- Un sistema numerico è un sistema che riceve in ingresso un segnale digitale e restituisce un altro segnale digitale
- Il segnale di uscita può avere caratteristiche uguali o diverse da quelle del segnale di ingresso (dimensionalità, rappresentazione dei campioni)
- Il sistema realizzerà una qualche elaborazione del segnale, che dipenderà dalle caratteristiche del sistema e da eventuali parametri
- Come per i sistemi analogici, anche in questo caso potremo avere sistemi LTI e non-LTI
- A differenza dei sistemi analogici, i sistemi digitali sono tipicamente implementati tramite algoritmi (software)

SISTEMI NUMERICI LTI

Realizzazione di sistemi numerici di tipo LTI:

- Estendiamo al caso digitale le condizioni viste per sistemi analogici (sovraposizione effetti e tempo invarianza)
- LINEARITÀ: (Sovraposizione degli effetti)

$$\begin{cases} f(x_1(n)) = y_1(n) \\ f(x_2(n)) = y_2(n) \end{cases} \Rightarrow f(\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

- TEMPO INVARIANZA

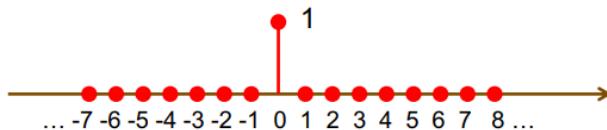
$$f(x(n)) = y(n) \Rightarrow f(x(n-k)) = y(n-k)$$

IMPULSO DI KRONEKER

Per sistemi LTI, il teorema di convoluzione continua ad essere valido anche nel discreto

- L'estensione discreta della delta di Dirac è detta impulso di Kroneker, ed è il seguente segnale discreto:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



PROPRIETÀ DELL'IMPULSO

L'impulso così definito mantiene tutte le proprietà della delta di Dirac, e in particolare:

- Il suo integrale (ovvero la sommatoria, essendo nel discreto) vale 1
- È una funzione simmetrica $\delta(n) = \delta(-n)$
- Un impulso in posizione k, $\delta(n-k)$, moltiplicato per un segnale discreto x(n), estrae il valore del segnale in posizione k, $x(n-k)$

A differenza della delta di Dirac, l'impulso di Kroneker NON presenta **alcun problema matematico**

- È una funzione discreta **perfettamente definita** in ogni punto

RISPOSTA DELL'IMPULSO DISCRETA

Definito l'impulso discreto, dobbiamo definire la risposta impulsiva discreta

- Imponendo in ingresso a un sistema LTI discreto un impulso di Kroneker $\delta(n)$, otterremo in uscita la risposta impulsiva discreta $h(n)$



- L'effetto sarà introdurre un '**allargamento**' dell'impulso su una certa sequenza di campioni: per questo viene anche chiamato **Point Spread Function** (PSF, funzione di allargamento del punto)

CONVOLUZIONE DISCRETA

- Definita la risposta impulsiva discreta, rimane da estendere al dominio discreto il concetto di convoluzione
Ricordiamo la formula nel continuo:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Trattando segnali discreti, l'operazione di integrale diventerà una sommatoria, estesa al prodotto di segnale e risposta impulsiva:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n - k)$$

NOTA: La sequenza $h(n)$ prende anche il nome di 'kernel' o 'maschera' di convoluzione'

CALCOLO CONVOLUZIONE DISCRETA

Supponendo limitata la durata della sequenza $h(n)$, il calcolo della convoluzione diventa quindi un semplice algoritmo numerico

- Si prende il kernel e lo si specularizza, ottenendo $h(-k)$
- Si fa scorrere il kernel su tutto il dominio (discreto)
- Per ogni posizione n si moltiplica punto per punto il segnale d'ingresso $x(n)$ per il kernel traslato $h(k-n)$ e si somma per tutti i k su cui c'è sovrapposizione
- Il risultato della somma è il valore del segnale d'uscita in n

```
int x[N], y[N], h[K]
load x, h
for n in 1...N {
    tmp = 0
    for k in 1...K
        tmp += x[n-K/2+k]*h[k]
    y[n] = tmp
}
return y
```

NOTA: Osserviamo che il calcolo richiede K operazioni di somma/prodotto per campione, quindi la complessità è lineare con la dimensione del kernel à $O(K)$

PROGETTO DEL FILTRO

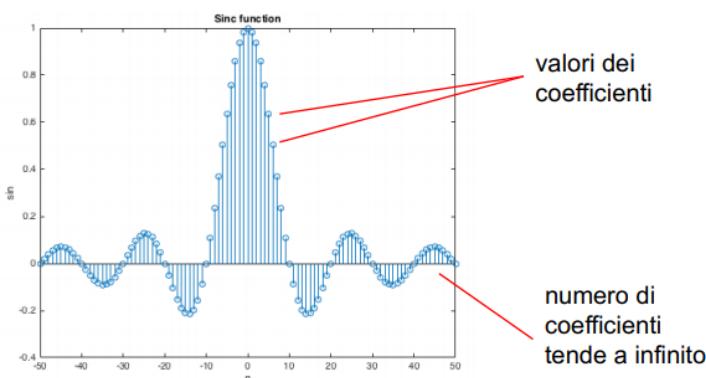
Come definire il kernel di convoluzione $h(k)$ per ottenere il risultato voluto?

- Si definisce il comportamento desiderato in frequenza (es. un filtro passa-basso) e da questo risalire al kernel
- Prima bisogna tornare nel tempo(IFT), poi campionare la risposta impulsiva ottenuta $h(t)$ per trovare i coefficienti $h(k)$
- Problema: partendo da una risposta in frequenza ideale, otterremo un numero di campioni K infinito!
- Il filtro così definito viene chiamato IIR (**infinite impulse response**)

Esempio: filtro IIR da LPF ideale

L'LPF ideale ha una risposta in frequenza HLPF(f) rettangolare con banda passante W predefinita

- La risposta impulsiva corrispondente sarà quindi una sinc
- Il campionamento dovrà avvenire a frequenza $f_c > 2W$ (Nyquist)



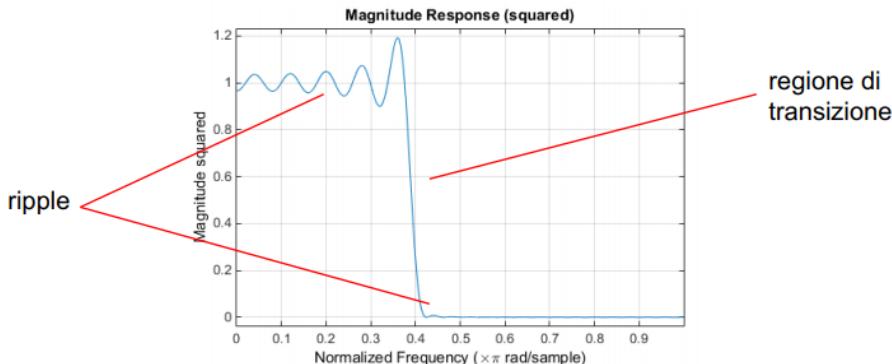
IIR VS FIR

Per come abbiamo definito la convoluzione, un kernel di dimensione infinita (IIR) richiede infinite somma/prodotti per campione -> **IRREALIZZABILE TRAMITE CONVOLUZIONE**

- Per renderlo realizzabile dobbiamo tagliare il kernel ad una lunghezza limitata: si può fare finenstrandolo
- Il risultato di questa operazione è il cosiddetto filtro FIR (**finite impulse response**)
- Con questa operazione introduciamo un'approssimazione (la risposta in frequenza cambia) e un fenomeno di aliasing

Esempio: filtro FIR da LPF ideale

Tagliando la risposta impulsiva e tornando in frequenza notiamo che la risposta non è più ideale



Esempi comuni di filtri FIR

Esempi di kernel che possono essere utilizzati per realizzare semplici filtri FIR

- Filtri passa-basso
 - Media mobile
 - Gaussiano
- Filtri passa-alto
 - Gradiente
 - Pseudo-Laplaciano

LFP A MEDIA MOBILE

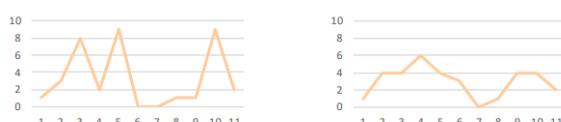
Il filtro a media mobile è caratterizzato da un kernel con coefficienti tutti di pari valore

$$h(k) = \left[\frac{1}{K} \frac{1}{K} \frac{1}{K} \dots \frac{1}{K} \right] = \frac{1}{K} \cdot [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$$

- Pensando all'operazione di convoluzione, si vede facilmente che questo filtro non fa altro che sostituire ogni campione con la media dei campioni che cadono in una finestra di dimensione K centrata su di lui
- Il nome di media mobile deriva dal fatto che la convoluzione esegue quest'operazione a scorrimento sul segnale
- Il fattore di normalizzazione 1/K occorre per evitare che il filtro alteri il valor medio del segnale di ingresso: in generale, la somma dei coefficienti del kernel in un filtro passa-basso deve essere pari a 1

LFP a media mobile: Esempio

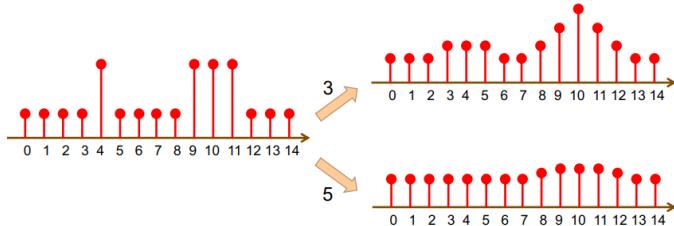
- Segnale $x(n) = [1 \ 3 \ 8 \ 2 \ 9 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 9 \ 2]$ e un filtro a media mobile $h(k) = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]$, $K=3$
- Trascurando primo e ultimo campione (per evitare problemi di bordo): $y(n) = [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 3 \ 0 \ 1 \ 4 \ 4 \ 2]$
- Il filtro andrà a tagliare le variazioni più intense del segnale, ossia quelle che cadono nella finestra K



NOTA: Il comportamento di un filtro LFP è di tipo integrativo (media pesata)

INTENSITÀ DEL FILTRO A MEDIA MOBILE

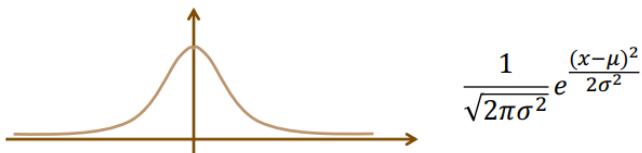
- L'intensità (effetto passa-basso) del filtro sarà, in questo caso, solo proporzionale a K (i coefficienti non possono essere modificati)
- Intuitivamente, più ampia è la finestra del filtro, più estesa è la finestra su cui vado a mediare il segnale di ingresso, tagliando quindi oscillazioni via via più estese (e quindi a minore frequenza)



LFP GAUSSIANO

Per avere un effetto passa-basso più moderato a parità di finestra K, si può agire sui coefficienti

- L'effetto sarà minore se la media viene pesata, associando valori maggiori al campione centrale e a quelli più vicini
 - Al limite, se il campione centrale viene pesato con un fattore 1 e gli altri con fattore 0, si ottiene un filtro passa-tutto
- Una classica distribuzione dei coefficienti utilizzata per ottenere questo effetto è quella gaussiana



- La gaussiana avrà valor medio nullo e varianza σ
- Più elevato è il valore di σ , più aumenterà lo spread della gaussiana, producendo una media più estesa e uniforme
 - Al limite per σ che tende a zero avremo una funzione impulsiva (coincide con un filtro passa-tutto)
 - A limite per σ che tende a infinito avremo una funzione piatta (coincide con un filtro a media mobile)
- Nel caso discreto, i campioni avranno valori: $h(k) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}, \quad k \text{ in } \left[-\frac{K}{2}, \frac{K}{2}\right]$
- Dove $\lambda = \sum_k h(k)$ è il fattore di normalizzazione K è proporzionale alla deviazione standard
- Ad esempio, per $\sigma=1$, avremo $K=4 \rightarrow 5$ campioni $h(k) = \frac{1}{2.48} [0.14 \ 0.6 \ 1.0 \ 0.6 \ 0.14]$
- Possiamo fare in modo da ottenere coefficienti interi introducendo un fattore moltiplicativo e approssimando:

$$h(k) = \frac{1}{17} [1 \ 4 \ 7 \ 4 \ 1]$$

FILTRO PASSA-ALTO

i filtri passa-alto possono essere ottenuti per differenza a partire dai corrispondenti passa-basso

- Esempio: realizzare un passa-alto a partire da un filtro passa-basso a media mobile di dimensione 5

$$h_{LPF}(k) = [1/5 \ 1/5 \ 1/5 \ 1/5 \ 1/5]$$

$$h_{HPF}(k) = \delta[k] - h_{LPF}(k) = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] - [1/5 \ 1/5 \ 1/5 \ 1/5 \ 1/5] = [-1/5 \ -1/5 \ 4/5 \ -1/5 \ -1/5]$$
- Possiamo semplificare il filtro moltiplicando per 5 (notare che la somma dei coefficienti è pari a zero, quindi non cambia niente)

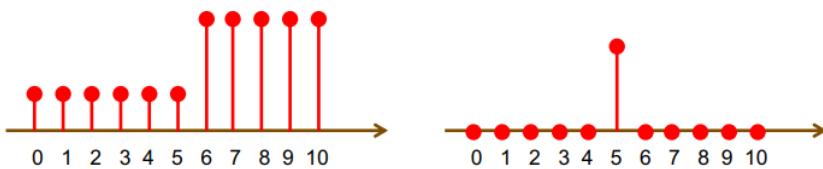
$$h_{HPF}(k) = [-1 \ -1 \ 4 \ -1 \ -1]$$

Osservazioni

- Si nota che il filtro appena definito ha somme 0 (gli LPF avevano somme 1): la componente continua del segnale viene cancellata, come è ovvio per un HPF
 - Non occorre normalizzare!
- Comportamento di tipo differenziale (segni + e -), l'effetto è derivativo, al contrario degli LPF che erano integrativi
- L'effetto derivativo porta ad evidenziare le variazioni del segnale, attenuandolo quando le variazioni sono lente (nel caso di assenza di variazioni viene addirittura cancellato)

FILTRO GRADIENTE

Un caso semplice di HPF è il filtro gradiente, che esegue una derivata prima discreta del segnale: $h_{HPF}(k) = [-1 \ 1]$



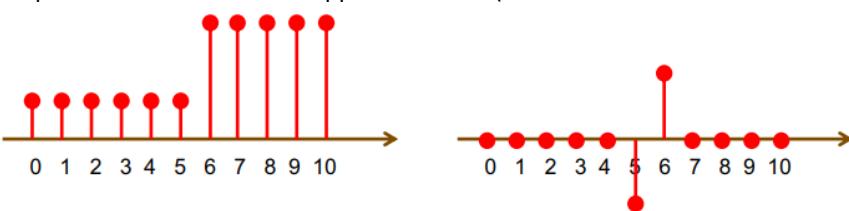
il filtro evidenzia la transizione a gradino, generando un impulso in corrispondenza del fronte e azzerando le zone piatte.

NOTA: Se il gradino fosse stato descendente avremmo avuto un impulso negativo.

FILTRO LAPLACIANO

Posso anche eseguire una derivata seconda, tramite il cosiddetto filtro Laplaciano

In questo caso avremo una doppia variazione (andamento cosiddetto a 'mexican hat'), ad esempio: $h(k) = [0 \ -1 \ 2 \ -1 \ 0]$



Si nota che in questo caso abbiamo una doppia variazione (doppietto) in corrispondenza della transizione del gradino

FILTRI ITERATIVI

Dal punto di vista teorico, iterare un filtro ideale non dovrebbe produrre alcun risultato:

- Prendiamo ad es. un LPF ideale, alla prima applicazione il filtro taglierà le frequenze a partire da un certo valore **f0**. Applicando nuovamente il filtro andremo a tagliare le stesse frequenze, che però sono già a zero
- Nella pratica, poiché applichiamo il filtro in maniera approssimata (per ottenere un FIR tagliamo la risposta impulsiva), l'applicazione ripetuta del filtro produrrà ad ogni iterazione un ulteriore taglio
- Per intensificare l'effetto di un filtro possiamo perciò pensare di iterarlo

Filtri iterativi: Esempio

Consideriamo un filtro di media mobile con K=3 e vediamo il risultato di una applicazione iterativa

- Dato un segnale numerico $x(n)$, vediamo le prime 4 iterazioni
- | | |
|-------------------------------------|---------------|
| 1 2 5 2 1 0 0 0 5 6 0 2 0 1 0 2 3 4 | $x(n)$ |
| 1 3 3 3 1 0 0 2 4 4 3 1 1 0 1 2 3 2 | $x_{LPF1}(n)$ |
| 1 2 3 2 1 0 1 2 3 4 3 2 1 1 1 2 2 2 | $x_{LPF2}(n)$ |
| 1 2 2 2 1 1 1 2 3 3 3 2 1 1 1 2 2 1 | $x_{LPF3}(n)$ |
| 1 2 2 2 1 1 1 2 3 3 3 2 1 1 1 2 2 1 | $x_{LPF4}(n)$ |
- Si osserva che le prime 3 passate producono variazioni, la quarta no
 - In pratica il filtro ‘converge’ dopo alcune iterazioni a un risultato stabile

Filtri iterativi: Spiegazione

Poiché dimensione e coefficienti del filtro non cambiano, il motivo del funzionamento iterativo è da cercare altrove

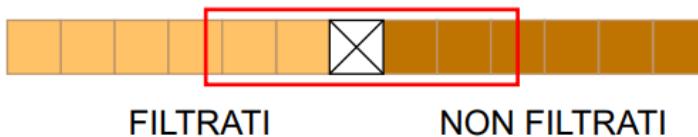
- Il filtro FIR agisce su un supporto temporale limitato dalla dimensione della maschera: alla prima passata metterà in relazione solo campioni a distanza minore di $K/2$. Quidni non può agire su oscillazioni del segnale (frequenze) con estensione maggiore di $K/2$
 - L'applicazione iterativa, implicitamente estende il supporto:
- | | |
|-------------------------|---------------|
| 1 2 5 2 1 0 0 0 5 6 0 2 | $x(n)$ |
| 1 3 3 3 1 0 0 2 4 4 3 1 | $x_{LPF1}(n)$ |
| 1 2 3 2 1 0 1 2 3 4 3 2 | $x_{LPF2}(n)$ |

NOTA: L'effetto progressivamente decresce con la distanza, per cui il filtro converge

CENNO AI FILTRI IIR

Il problema appena visto non sussisterebbe se potessi fare direttamente dei filtri a supporto infinito (IIR)

- Impossibile da fare tramite convoluzione perché richiederebbe una complessità infinita
- Un modo alternativo (approssimato) per realizzare un filtro IIR è tramite meccanismi di auto-regressione
- In pratica, man mano che genero i campioni filtrati li utilizzo per filtrare i campioni successivi (operazione ricorsiva)
- ATTENZIONE: non è più una convoluzione, anche se ci assomiglia



Filtrati Auto-Regressivi: Esempio

Vediamo ad esempio l'applicazione di questo concetto ad un filtro di media mobile 3, sulla sequenza vista prima

| | |
|---|--------------------------|
| 1 2 5 2 1 0 0 0 5 6 0 2 0 1 0 2 3 4 | $x(n)$ |
| 1 3 3 2 1 0 0 2 4 3 2 1 1 1 2 3 2 1 | $x_{ARMA}(n)$ |
| 1 2 2 2 1 1 1 2 3 3 3 2 1 1 1 2 2 1 | $x_{LPF4}(n)$ |
| 0 1 1 0 0 -1 -1 0 1 0 -1 -1 0 0 1 1 0 0 | $X_{ARMA} - X_{LPF4}(n)$ |

- Come si può osservare, l'applicazione del filtro in modalità autoregressiva genera in un solo passaggio una sequenza molto simile a quella che otteniamo a regime con il filtro FIR iterativo
- Anche in questo caso il motivo è che estendo virtualmente il supporto, ma in questo modo riesco a farlo in una singola passata (l'effetto del filtraggio viene propagato a tutti i campioni successivi)

CENNO AI FILTRI NON LINEARI

- I filtri non lineari sono molto complessi da realizzare nel dominio analogico (devo usare componentistica non lineare)
- Lavorando su segnali numerici la possibilità di realizzare in modo algoritmico filtri non lineari apre enormi possibilità
- Tipicamente si tratterà di definire opportune relazioni ingresso-uscita, oppure meccanismi più sofisticati di elaborazione n Vediamo 2 esempi:
 - Rimappatura dei livelli
 - Filtri di rango

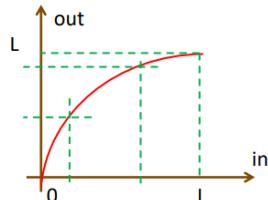
FILTRI NON LINEARI: rimappatura livelli

Abbiamo visto che già l'operazione di quantizzazione è una operazione non lineare

- A valle della quantizzazione, possiamo agire nuovamente in maniera non lineare sui livelli dei campioni, usando funzioni di rimappatura dei livelli
- Posso ad esempio introdurre opportune funzioni per aumentare o ridurre la dinamica del segnale
 - Ad esempio, dato un segnale a L livelli, posso espandere i livelli in un certo intervallo, comprimendo quelli negli altri intervalli

Rimappatura livelli: Esempio

Prendiamo ad es. la seguente funzione di mappatura (relazione ingresso uscita) non lineare



Il segnale filtrato subirà una espansione della dinamica nei livelli più bassi (vicini allo zero) e una compressione ai livelli più alti (vicini a L)

Rimappatura livelli: Risultato

Operazioni di questo tipo possono essere usate ad es. per:

- evidenziare (mettere in luce) alcune caratteristiche del segnale, o una parte del suo contenuto
- Cancellare alcune variazioni
- Estrarre (per esempio tramite sogliatura) alcune parti azzerandone altre
- Comprimere la dinamica del segnale (anche in maniera adattativa) per adeguarlo ad un particolare formato o a un dispositivo di rendering

FILTRI NON LINEARI: Filtri di rango

I filtri di rango sono molto popolari nell'elaborazione di segnali (in particolare il filtro mediano), in quanto sono al contempo semplici e potenti.

Il concetto è molto diverso dai filtri FIR, si basano su operazioni di **ordinamento**:

- L'idea è quella di ordinare i valori all'interno della finestra di filtraggio, ed effettuare una media pesata basata sul valore (rango) anziché sulla posizione dei campioni
- Come per i FIR, l'effetto dipende dalla dimensione della dimensione della maschera e dai pesi utilizzati
- Poiché l'ordinamento è un'operazione non lineare, non è definita la risposta impulsiva di questo filtro

Il filtraggio si basa sul seguente schema:



- Si estraе a scorrimento dal segnale una sequenza di lunghezza N centrata su n
- Si ordina in senso crescente ottenendo la sequenza ordinata x_i , $i=1\dots N$
- Si pesano gli N valori ordinati con altrettanti pesi a_i , $i=1\dots N$
- Si sommano i valori pesati $a_i x_i$, $i=1\dots N$ ottenendo il campione filtrato $y(n)$

Il risultato dipende chiaramente dai pesi a_i

Alcuni semplici filtri di rango sono i filtri di massimo, minimo e mediano:

- MASSIMO: $a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq N \\ 1 & i = N \end{cases}$
- MINIMO: $a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq 1 \\ 1 & i = 1 \end{cases}$
- MEDIANO: $a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \\ 1 & i = \neq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \end{cases}$

I filtri di **MASSIMO** e **MINIMO** sostituiscono il valore centrale della finestra con i valori massimo/minimo nella finestra

- In pratica, vado ad eliminare picchi indesiderati nel segnale (outliers)
- ESEMPIO (filtro di minimo, eliminazione outlier verso l'alto):

$$x(n) = [1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 9 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1]$$

↓

filtro di minimo, $N=3$

↓

$$y(n) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

NOTA:

- ❖ Tutta la sequenza viene scalata su valori più bassi
- ❖ Non si introducono nuovi valori nella sequenza filtrata

Nel **MEDIANO** seleziono il valore centrale anziché gli estremi

- Riesco ad eliminare contemporaneamente outlier in alto e in basso
- ESEMPIO:

$$x(n) = [5 \ 4 \ 4 \ 5 \ 3 \ 4 \ 9 \ 4 \ 5 \ 0 \ 5 \ 4 \ 5]$$

↓

filtro mediano, $N=3$

↓

$$y(n) = [5 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 5 \ 4 \ 5 \ 5]$$

NOTA:

- ❖ Anche in questo caso non introduco valori nuovi
- ❖ In questo caso, non ho scalamento della sequenza verso alto/basso

MEDIANO: Utilizzo

Il mediano è normalmente usato come filtro di ‘regolarizzazione’ del segnale

- Si eliminano variazioni non volute, in particolare di tipo impulsivo
- In presenza di picchi isolati di rumore, riesce a eliminarli senza introdurre effetto passa-basso
- ESEMPIO: confronto mediano-media mobile:

$$x(n) = [4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 9 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 0 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4]$$

$$y_{MA}(n) = [4 \ 4 \ 4 \ 6 \ 6 \ 6 \ 4 \ 4 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4]$$

$$y_{MED}(n) = [4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4]$$
- Il filtro LPF abbassa e ‘allarga’ (spreading) i picchi di rumore ma non riesce a rimuoverli
- il filtro mediano li elimina completamente

MEDIANO: Regolazione del filtro

Regolando l’ampiezza della finestra posso modulare l’effetto del filtro

- Chiaramente, a finestre più ampie corrisponderà un effetto più pesante
- Posso anche misurare in maniera esatta l’effetto del filtro, in termini di sequenze su cui opera. Si dimostra che:
- Un filtro **MEDIANO** di larghezza N lascia inalterate sequenze monotone di lunghezza maggiore di $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1$ (anche non strettamente)
- ESEMPIO

$$x(n) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$y_{MED3}(n) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$y_{MED5}(n) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

[FEIS 10] TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER (DFT)

Abbiamo definito 2 tipi di rappresentazione in frequenza:

- quella per segnali periodici continui (**Serie di Fourier**)
- quella per segnali aperiodici continui (**Trasformata di Fourier**, applicabile anche a segnali periodici)

Dobbiamo ora capire come rappresentare in frequenza un segnale discreto

- DFT, o trasformata di Fourier discreta
 - L'inverso della trasformata di Fourier discreta (IDFT) è l'analogo discreto della formula che restituisce i coefficienti della Serie di Fourier
 - L'analogia è legata alla natura congiuntamente discreta e periodica sia dei segnali campionati che dei rispettivi spettri
- DFT
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} ; k = 0, \dots, N - 1$$
- IDFT
$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}kn} ; n = 0, \dots, N - 1$$
- Trasformando una sequenza di N campioni nel tempo, otteniamo una sequenza di N coefficienti, associati ad altrettante armoniche della frequenza base, a loro volta rappresentate da sequenze di N campioni nel tempo

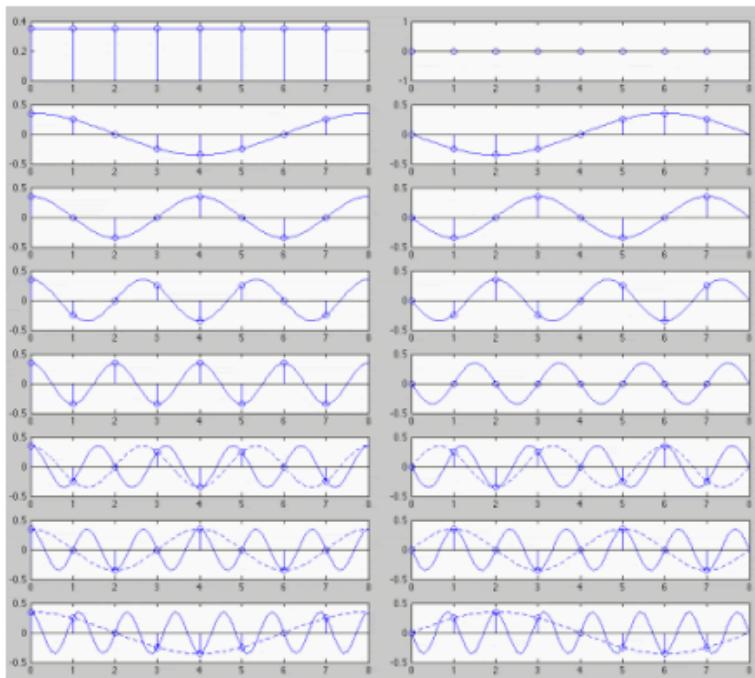
DFT: Funzioni Base

Le armoniche campionate $e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$ sono sinusoidi complesse discrete nel tempo e prendono il nome di funzioni base

- Le funzioni base sono in numero pari al numero di campioni trasformati
- La i -esima funzione base è una sinusoide a frequenza pari a i -volte la frequenza fondamentale, dove la frequenza fondamentale è la sinusoide che compie un intero ciclo nella durata del segnale
- Ogni funzione base è discretizzata in un numero di campioni pari alla lunghezza della sequenza temporale
 - Es. data una sequenza di 16 campioni, avrà bisogno di 16 funzioni base, ognuna rappresentata da 16 campioni

DFT: Esempio di funzione base

Il seguente grafico mostra le 8 funzioni base necessarie per rappresentare una qualsiasi sequenza di lunghezza pari a 8 campioni (cos e sin -> parte reale e parte immaginaria)



DFT: Osservazioni

- La DFT produce i coefficienti complessi cross-correlando la sequenza del segnale di lunghezza N con le sequenze delle N funzioni base, ognuna di lunghezza N (entrambi sono segnali nel tempo)
- La IDFT ricostruisce il segnale nel tempo sommando i contributi della N funzioni base discrete di lunghezza N (segnali discreti nel tempo), pesate dai relativi coefficienti di Fourier
- Poiché il numero di armoniche è limitato, è possibile eseguire l'implementazione della trasformata tramite un calcolatore senza perdere alcuna informazione (a parte eventuali problemi di approssimazione numerica)
 - Per una data lunghezza è possibile pre-calcolare le funzioni base discrete, che saranno sempre uguali

DFT: Proprietà

- La DFT è una trasformata **ortogonale**: correlando due funzioni base $i, j: i \neq j$ il risultato è zero (ovvero: le funzioni base formano una **base ortogonale**)
- La DFT mantiene le proprietà note della FT (linearità, invertibilità, simmetria, traslazione, ecc.)
 - In particolare, vale il **teorema di convoluzione**, quindi possiamo definire anche in questo caso l'equivalente in frequenza dell'operazione di convoluzione e ragionare nel dominio degli spettri
 - L'estensione del teorema di convoluzione non è però altrettanto immediata in questo caso

TEOREMA DI CONVOLUZIONE DISCRETO

Applicando il teorema nella maniera più intuitiva avremmo:

- Dato un segnale discreto $x(n), n=1 \dots Nx$ e un sistema LTI discreto con risposta impulsiva $y(n), n=1 \dots Ny$, la risposta sarà: $w(n) = x(n) * y(n)$
- Se $x(n) \leftrightarrow X(k)$ e $y(n) \leftrightarrow Y(k)$, l'estensione immediata del teorema di convoluzione darebbe: $W(k) = X(k)Y(k)$
- Il primo problema che notiamo è che se le due sequenze non hanno la stessa lunghezza (tipicamente il filtro è molto più corto del segnale), posso eseguire la convoluzione ma NON il prodotto!

RISPOSTA IN FREQUENZA DI SEGNALI DISCRETI

Il problema appena visto si risolve abbastanza semplicemente aggiungendo degli zeri alla sequenza più corta

- L'operazione 'zero padding', non cambia il contenuto della sequenza e quindi è lecita (la convoluzione rimane uguale)
- Aggiungerò quindi $N_x - N_y$ zeri alla sequenza $y(n)$, dopodiché trasformerò entrambe ed effettuerò il prodotto

Apparentemente questo stratagemma sembra funzionare, tuttavia rimane un problema meno evidente

- Effettuando il campionamento in frequenza, come effetto collaterale abbiamo una periodizzazione nel tempo
- La convoluzione diventa quindi un'operazione periodica e genera a sua volta un segnale periodico, ma non è una replica delle convoluzioni lineari (i campioni delle repliche si intersecano ciclicamente)

CONVOLUZIONE CIRCOLARE

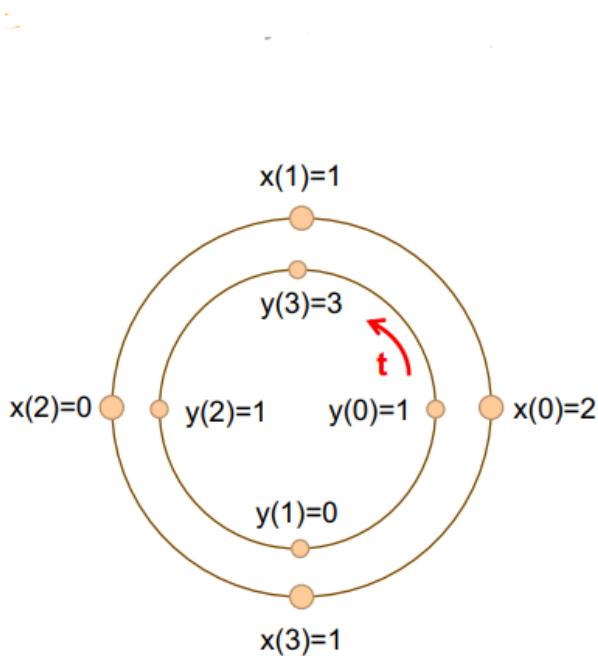
Date due sequenze $x(n)$ e $y(n)$ di lunghezza N definiamo la convoluzione circolare (indicata con \circledast) come segue:

$$w(n) = x(n) \circledast y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y[(n-k)]_N$$

dove $y[(a-n)]_N$ è la periodizzazione di $y(n)$

L'operazione può essere svolta facilmente in forma grafica organizzando i valori di x e y su due cerchi e facendoli ruotare uno rispetto all'altro di una posizione alla volta

CONVOLUZIONE CIRCOLARE: Esempio



$$\begin{aligned}x(n) &= [2101] \\y(n) &= [1013] \\w(n) &= x(n) \circledast y(n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w(0) &= x(0)y(0) + x(1)y(3) + x(2)y(2) + x(3)y(1) = \\&= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 5 \\w(1) &= x(0)y(1) + x(1)y(0) + x(2)y(3) + x(3)y(2) = \\&= 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 3 \\w(2) &= x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) + x(3)y(3) = \\&= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 8 \\w(3) &= x(0)y(3) + x(1)y(2) + x(2)y(1) + x(3)y(0) = \\&= 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 8 \\w(4) &= w(0)\end{aligned}$$

...

- Notare che la convoluzione ottenuta, al contrario della convoluzione lineare, genera un segnale periodico $w(n) = [\dots 5 3 8 8 5 3 8 8 5 3 \dots]$
- Anche la sequenza base $[5 3 8 8]$ del segnale periodico $w(n)$ è diversa da quello che otteniamo con la convoluzione lineare:
 $x(n)*y(n) = [2 1 0 1]*[1 0 1 3] = [2 1 2 8 3 1 3]$
- NOTA1: Questo è dovuto al fatto che il segnale 'rientra' su se stesso, quindi anziché convolare con valori nulli ho sempre campioni validi*
- NOTA2: Anche la durata è diversa (uno è N campioni, l'altro $2N-1$)*

RISPOSTA IN FREQUENZA DI SISTEMI DISCRETI

Riformulando il teorema di convoluzione nel caso discreto in questo modo:

- Date due sequenze $x(n)$ e $h(n)$ di lunghezza N_x e N_h rispettivamente, il prodotto delle rispettive DFT è la DFT della convoluzione circolare tra le due sequenze

$$x(n) \circledast h(n) \leftrightarrow X(k) \cdot H(k)$$
- Il risultato non coincide con quello aspettato, ovvero la convoluzione lineare, e non fornisce la risposta del filtro
- Anche con lo zero padding non risolviamo il problema

Per far coincidere la convoluzione circolare con quella lineare, occorre evitare il ‘rientro’ dei campioni lungo un periodo

- Bisogna quindi aggiungere zeri (zero padding) a entrambe le sequenze in modo che i campioni iniziali siano separati per almeno N_x+N_h-1 (lunghezza della convoluzione lineare)
- Per ottenere la convoluzione nel dominio DFT operiamo quindi così:
 - Generiamo quindi due sequenze di lunghezza $M > N_x+N_h-1$
date dalle sequenze originali seguite da $M-N_x$ e $M-N_h$ zeri, rispettivamente
 - Applichiamo la DFT a entrambe le sequenze ottenendo le sequenze trasformate di lunghezza M
 - Moltiplichiamo le due sequenze
 - Applichiamo la IDFT

Esempio:

- Prendiamo i segnale discreto x e un filtro numerico h
 $x(n)=[2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 3]$ di lunghezza $N_x = 5$
 $h(n)=[1 \ 0 \ 2]$ di lunghezza $N_h = 3$
- Effettuerò uno zero padding portandole ad una lunghezza M almeno pari a $5+3-1=7$, prendiamo ad esempio 8, avremo:
 $x_p(n)=[2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]$ di lunghezza $M = 8$
 $h_p(n)=[1 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ di lunghezza $M = 8$
- Calcoliamo a questo punto la DFT delle due sequenze, ottenendo 2 vettori complessi di lunghezza 8
- Moltiplichiamo i vettori trasformati e applichiamo la IDFT al risultato
- Otterremo una sequenza di lunghezza 8 uguale alla convoluzione lineare di x e h (più un campione nullo alla fine), ovvero la $y(n)$

FFT

- L'operazione appena vista consente di calcolare l'uscita di un sistema discreto LTI con minore complessità computazionale
- Tuttavia, il calcolo della DFT tramite la definizione fondamentale ha a sua volta complessità quadratica $O(N^2)$
 - ❖ Devo effettuare N correlazioni tra vettori di lunghezza N
 - ❖ La IDFT ha esattamente la stessa complessità
- L'uso estensivo della DFT nell'elaborazione di segnali è anche legato alla possibilità di ottenere lo stesso risultato con un calcolo veloce
 - ❖ La trasformata veloce prende il nome di FFT (Fast Fourier Transform)
 - ❖ Si verifica che la FFT riduce la complessità da $O(N^2)$ a $O(N\log N)$

FILTRI NUMERICI IN FREQUENZA

Da notare che il metodo ora visto permette di ottenere filtri con risposta impulsiva infinita (IIR)

- Il filtro viene implementato in frequenza, quindi non ci sono problemi legati alla lunghezza del kernel

Possiamo anche realizzare filtri 'ideali'

- Posso dare qualsiasi forma al filtro in frequenza
- La non causalità non è un problema in questo caso poiché lavoriamo su sequenze a durata finita
- Si introduce semplicemente un ritardo di alcuni campioni

FILTRI NUMERICI IN FREQUENZA: Effetti

Tuttavia, l'applicazione di risposte in frequenza a gradino introduce altri fenomeni indesiderati, legati alla corrispondente risposta impulsiva dei filtri

- Il segnale filtrato presenterà fenomeni di ripple e overshoot
- Il problema nasce dal fatto che le basse frequenze non sono più compensate dalle armoniche a frequenza maggiore (tagliate) e producono quindi oscillazioni

FILTRI NUMERICI IN FREQUENZA: Esempi



gradino (32 campioni)



LPF (taglio 8 coefficienti)

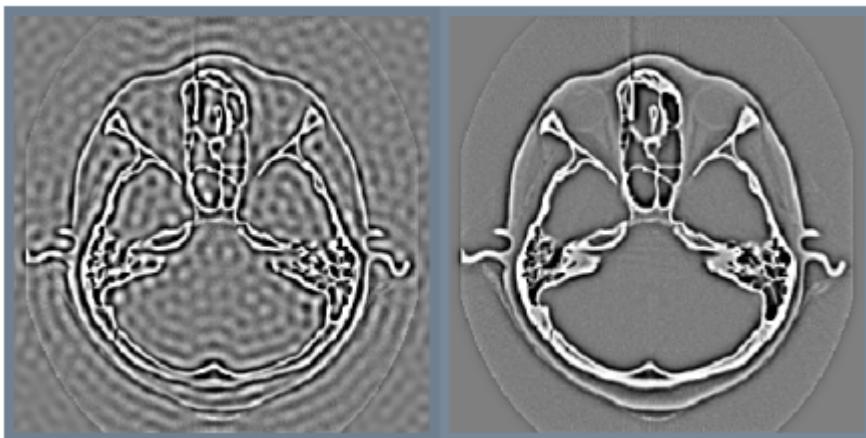


LPF (taglio 4 coefficienti)



HPF (taglio 8 coefficienti)

- Per capire meglio l'effetto del ripple, proviamo a visualizzarlo su una immagine
 - ❖ L'effetto si replica nelle due dimensioni
 - ❖ I ripple provocano fastidiose e innaturali oscillazioni periodiche della luminosità, chiamate in gergo 'ringing'



Applicazione di un HPF ideale su un'immagine e effetto ringing

[FEIS 11] SEGNALI MULTI-DIMENSIONALI

In natura, molti segnali variano in domini multi-dimensionali

- Alcuni esempi comuni sono le immagini 2D (2 dimensioni spaziali, x,y), i segnali video (3 dimensioni spazio-temporali, x,y,t), i segnali 3D quali tomografie e point cloud (3 dimensioni spaziali, x,y,z), ecc.

RAPPRESENTAZIONE DI SEGNALI M-D

Un segnale multidimensionale in N dimensioni sarà rappresentato da una funzione di N variabili

$$x(v_1, v_2, \dots, v_N) : \mathbb{R}_N \rightarrow \mathbb{R}_K$$

- Dove K rappresenta la dimensionalità dei valori assunti dal segnale (K=1 per segnali scalari, K>1 per segnali vettoriali)
- Ad esempio, un'immagine a colori sarà un segnale vettoriale 2D nel dominio spaziale, del tipo:

$$I(x, y) : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_3$$

- dove i vettori di uscita rappresentano terne di componenti cromatiche, ad es. RGB

SISTEMI MULTI-DIMENSIONALI

- Un sistema multidimensionale riceve in ingresso un segnale N-dimensionale e restituisce un segnale M-dimensionale
 - Spesso M=N, ma non necessariamente.
Esempio: un filtro può prendere in ingresso una tomografia e restituire un piano di scansione:
3D -> 2D
- Anche la dimensionalità dei valori assunti può cambiare
 - Esempio: un filtro applicato ad un'immagine a colori può generare un'immagine in bianco e nero:
vettoriale -> scalare
- In generale quindi avremo:

$$y(\bar{v}) = f(x(\bar{u})) ; \quad x(\bar{u}) : \mathbb{R}_N \rightarrow \mathbb{R}_K , \quad x(\bar{v}) : \mathbb{R}_M \rightarrow \mathbb{R}_L$$

- Nel seguito considereremo per semplicità M=N e K=L=1

SISTEMI MULTI-DIMENSIONALI: LDI

- Abbiamo visto nell'1D che i sistemi più semplici da studiare sono quelli lineari e tempo-invarianti
- Nel caso m-D il concetto si ripropone uguale, ma parliamo di 'dominio-invarianza' anziché di 'tempo-invarianza'
 - ❖ La variabile non necessariamente è il tempo, anzi, spesso è lo spazio o una combinazione spazio-tempo
 - ❖ Le proprietà da verificare sono le solite:

$$\begin{cases} f(i(\bar{v})) = \hat{i}(\bar{v}) \\ f(j(\bar{v})) = \hat{j}(\bar{v}) \end{cases} \Rightarrow f(\alpha i(\bar{v}) + \beta j(\bar{v})) = \alpha \hat{i}(\bar{v}) + \beta \hat{j}(\bar{v}) \quad \forall \alpha, \beta$$

$$f(i(\bar{v})) = \hat{i}(\bar{v}) \Rightarrow f(i(\bar{v} - \bar{v}_0)) = \hat{i}(\bar{v} - \bar{v}_0) \quad \forall \bar{v}_0$$

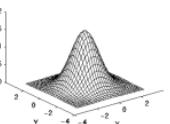
RISPOSTA DI SISTEMI LDI

Dato un sistema m-D LDI, la risposta del sistema sarà data dalla convoluzione dell'ingresso con la risposta impulsiva del sistema

- La differenza in questo caso è che dovremo applicare una convoluzione in più dimensioni:

$$y(v_1, v_2, \dots, v_N) = x(v_1, v_2, \dots, v_N) * h(v_1, v_2, \dots, v_N) = \\ \int_{\lambda_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\lambda_N=-\infty}^{+\infty} x(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \cdot h(v_1 - \lambda_1, \dots, v_N - \lambda_N) \partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_N$$

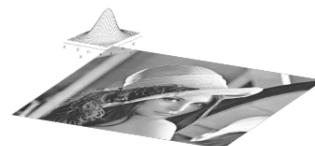
- Il concetto rimane esattamente lo stesso: per ogni asse ribalto la risposta impulsiva e poi faccio scorrere il filtro su tutti i punti λ dello spazio N-dimensionale, moltiplico e integro in N dimensioni
- Anche se il concetto è semplice, risulta complicato visualizzare il funzionamento su molte dimensioni, Se N=2
 - ❖ Tipici segnali 2D sono le immagini
 - ❖ Per applicare un filtro 2D ad una immagine dovrò:
 1. Definire una risposta impulsiva 2D che svolge la funzione voluta (ad esempio un filtro LPF)
 2. Eseguire la convoluzione 2D tra immagine e risposta del filtro
 - ❖ Ad esempio, prendiamo un'immagine di test e un filtro gaussiano 2D



CONVOLUZIONE 2D

Potrei svolgere l'operazione facendo scorrere in modo continuo la $h(x,y)$ sull'immagine 2D in modalità raster

- Da sinistra a destra e dall'alto in basso
- Per ogni posizione moltiplico e integro:
l'effetto sarà una media pesata locale del segnale 2D (LPF)



TRASFORMATA DI FOURIER MULTI-DIMENSIONALE

Per capire meglio il comportamento dei filtri appena visti, possiamo al solito lavorare nel dominio della frequenza

- Si tratta di estendere anche il concetto di trasformata di Fourier al caso multidimensionale
- Dato un segnale $x(v_1, v_2, \dots, v_n)$, la sua FT sarà:

$$X(f_1, \dots, f_N) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x(v_1, \dots, v_N) e^{-j2\pi(f_1 v_1 + \dots + f_N v_N)} dv_1 \dots dv_N$$

- Come sempre l'operazione è reversibile:

$$x(v_1, \dots, v_N) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} X(f_1, \dots, f_N) e^{j2\pi(f_1 v_1 + \dots + f_N v_N)} df_1 \dots df_N$$

- Osserviamo che l'operazione appena vista equivale a trasformare il segnale sequenzialmente su ogni dimensione
 - ❖ In pratica, la trasformata N-D è la sequenza di N trasformate 1D applicate nelle varie dimensioni dello spazio
 - ❖ Le frequenze f_1, f_2, \dots, f_N sono frequenze direzionali nelle N dimensioni e sono ortogonali tra di loro
 - ❖ Da quanto detto discende chiaramente che la trasformata N-D mantiene (estendendole) tutte le proprietà della trasformata 1D
 - ★ Ad esempio, il ritardo può essere applicato in ogni direzione, dando luogo a uno sfasamento nella corrispondente frequenza direzionale, idem il fattore di scala
 - ★ Valgono anche le proprietà di simmetria Hermitiana, le proprietà legate alla simmetria del segnale

TRASFORMATA 2D: Esempio

Trasformando l'immagine precedente:

- Il risultato è uno spettro 2D nelle frequenze direzionali f_x, f_y
- La frequenza 0 (continua) viene convenzionalmente posta al centro
- Le frequenze diagonali nascono dalla combinazione di frequenze orizzontali e verticali f_x, f_y



SISTEMI LDI E TEOREMA DI CONVOLUZIONE

Anche il teorema di convoluzione ha la sua estensione diretta nel dominio multidimensionale

- Se sistema è LDI, calcolo la trasformata di Fourier m-D della risposta impulsiva, ottenendo la risposta in frequenza m-D
- Posso ottenere lo spettro del segnale di uscita moltiplicando lo spettro m-D del segnale con quello del filtro

$$y(v_1, v_2, \dots, v_N) = x(v_1, v_2, \dots, v_N) * h(v_1, v_2, \dots, v_N)$$

↓

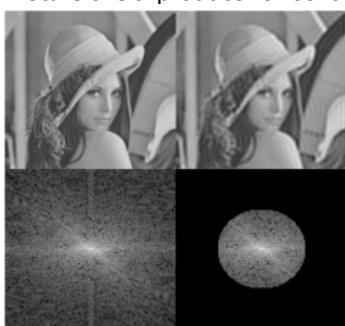
$$Y(f_1, \dots, f_N) = X(f_1, \dots, f_N) \cdot H(f_1, \dots, f_N)$$

- Posso quindi eseguire il filtraggio in frequenza anche nel caso m-D

FILTRAGGIO IN FREQUENZA: Esempio

Nel caso di un LPF ideale, il filtro taglierà in maniera netta le frequenze che superano un certo valore

- In pratica, nel 2D diventa una sorta di 'cilindro'
- Notare che si producono i soliti ripple (frequenze non compensate)



CONVERSIONE A/D DI SEGNALI MULTI-DIMENSIONALI

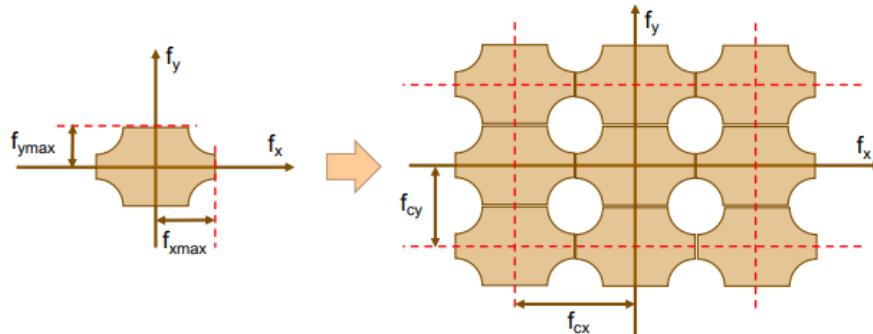
caso digitale:

- Anche la conversione A/D è rapidamente estendibile al caso multidimensionale: avremo:
 - ❖ **Campionamento:** Occorrerà campionare in più dimensioni, tenendo conto delle varie frequenze spaziali
 - ❖ **Quantizzazione:** Ottenuti i campioni m-D la quantizzazione è esattamente identica al caso 1D (si tratta sempre di discretizzare il valore assunto da un singolo campione, non cambia niente se lavoro in più dimensioni)
 - ❖ **Codifica:** I campioni verranno associati come nel caso 1D a codici binari (PCM multidimensionale)

CAMPIONAMENTO MULTIDIMENSIONALE

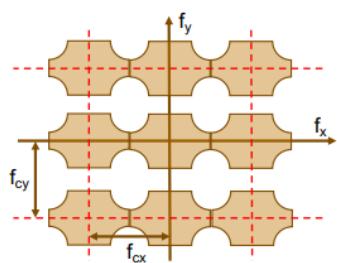
Il campionamento in più dimensioni segue le stesse regole di quello 1D

- Devo evitare l'aliasing, che però si può verificare in ogni dimensione
- La frequenza massima nelle varie dimensioni può essere diversa
- Il limite minimo sarà quindi la frequenza di Nyquist per ogni dimensione



Osservazioni:

- Otteniamo una matrice di campioni multidimensionale $x(n_1, \dots, n_N)$
- La distanza tra i campioni può essere diversa nelle varie dimensioni, nel qual caso si genera una griglia rettangolare (esempio precedente)
- Spesso tuttavia, per semplicità di gestione, si preferisce lavorare su griglie quadrate, per cui si sceglie la frequenza massima tra le varie dimensioni (alcune dimensioni verranno sovraccampionate)



RISPOSTA DI SISTEMI DIGITALI MULTI-DIMENSIONALI

Anche i sistemi discreti possono essere in più dimensioni

- Possiamo definire la risposta in frequenza m-D continua, anti-trasformarla e campionarla in ogni direzione
- Otteniamo filtri IIR m-D che poi possiamo convertire in FIR tramite finestratura
- La maschera di convoluzione che otteniamo $h_{DW}(n_1, \dots, n_K)$ dovrà avere la stessa dimensionalità del segnale
- Notare che però il numero di campioni della maschera nelle varie direzioni potrà essere diverso



Esempio, maschera 2D 3x5

L'applicazione del filtro discreto al segnale, richiede una nuova operazione chiamata convoluzione numerica o digitale

- La convoluzione numerica è l'analogico della convoluzione analogica nel dominio discreto: Integrali -> sommatorie
- Per ogni direzione si ribalta il kernel, si fa scorrere su tutto il dominio, si moltiplica per ogni punto di sovrapposizione e si somma

$$\begin{aligned}
 y(n_1, \dots, n_N) &= x(n_1, \dots, n_N) * h_{DW}(n_1, \dots, n_N) = \\
 &= \sum_{k_1=-K_1/2}^{K_1/2} \dots \sum_{k_N=-K_N/2}^{K_N/2} i(n_1 - k_1, \dots, n_N - k_N) h_{DW}(k_1, \dots, k_N)
 \end{aligned}$$

CONVOLUZIONE NUMERICA: Esempio

$$x(n,m) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad h_{DW}(n,m) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow h_{DW}(-n,-m) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

x(n,m) · h_{DW}(n,m)

y(n)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 6 | 6 | 3 | 0 |
| 0 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2 |
| 1 | 1 | 6 | 4 | 6 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 4 | 0 | 0 |

CONVOLUZIONE MULTI-DIMENSIONALE: Pseudo-Codice

```

int in[N1]...[NN], out[N1]...[NN], krn[K1]...[KN]      // segnali in/out e kernel
load(in), load(krn)                                // carica segnale ingresso e kernel
for n1 in 1...N1                                      // scandisce il segnale di ingresso
...
for nN in 1...NN {                                     // ...
    tmp = 0                                           // inizializza accumulatore
    for k1 in -K1/2...K1/2                            // scandisce il kernel
    ...
    for kN in -KN/2...KN/2 {                         // ...
        tmp += (in[n1+k1]...[nN+kN]*krn[k1+K1/2]...[kN+KN/2]) // somme pesate
    }...}                                              // chiude loop interni (kernel)
    out[n1]...[nN] = tmp                             // scrive risultato in buffer uscita
}
}                                                     // chiude loop esterni (segnale)

```

CONVOLUZIONE MULTI-DIMENSIONALE: COMPLESSITÀ

Osservando come funziona l'operazione di convoluzione discreta possiamo facilmente intuirne la complessità

- Per ogni campione del segnale devo scandire l'intero kernel, facendo per ogni valore un prodotto e una somma
- Complessivamente avremo un numero di operazioni pari $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_N$
- La complessità sarà quindi proporzionale alla potenza N-esima della larghezza del filtro ($O\{K^N\}$)
 - ❖ Ad esempio, un filtro 2D avrà una complessità quadratica
 - ❖ I filtri multidimensionali sono quindi operatori piuttosto onerosi dal punto di vista computazionale

SEGNALI MULTI-DIMENSIONALI IN FREQUENZA

Da ultimo, vediamo come si estende il concetto di rappresentazione in frequenza per segnali discreti m-D

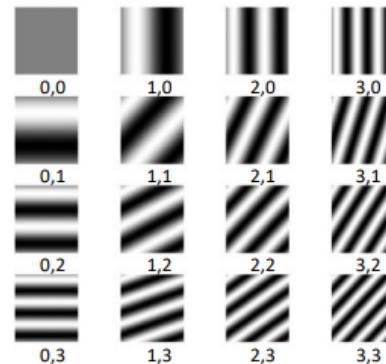
- I segnali discreti possono essere rappresentati in termini di trasformata discreta di Fourier DFT
- Come per la FT, è possibile estendere anche la DFT al caso multidimensionale
- L'estensione è abbastanza immediata: al posto delle funzioni base 1D, avremo delle funzioni base N-D, ognuna delle quali sarà una combinazione di frequenze armoniche nelle varie direzioni dello spazio N-dimensionale
- Le funzioni base saranno quindi matrici N-dimensional a valori complessi

FUNZIONI BASE MULTI-DIMENSIONALI

Ricordando che le funzioni base della DFT-1D erano del tipo $e^{-\frac{j2\pi}{N}kn}$, nel caso N-D avremo:

$$e^{-\frac{j2\pi}{N_1}k_1n_1} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{j2\pi}{N_N}k_Nn_N} = e^{-\frac{j2\pi}{N}\left(\frac{k_1n_1}{N_1} + \dots + \frac{k_Nn_N}{N_N}\right)}$$

- Non è facile immaginare funzioni di questo tipo in uno spazio di dimensione arbitrariamente grande, proviamo a vederle nel 2D
- La figura a fianco mostra le funzioni base (solo parte reale) corrispondenti agli indici da 0 a 3 in due dimensioni
- Abbiamo delle sinusoidi a frequenza:
 - ❖ crescente in orizzontale
 - ❖ verticale
 - ❖ obliqua



DFT MULTI-DIMENSIONALE

Possiamo quindi definire le DFT in N dimensioni come:

$$X(k_1, \dots, k_N) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{n_N=0}^{N_N-1} x(n_1, \dots, n_N) \cdot e^{-\frac{j2\pi}{N}\left(\frac{k_1n_1}{N_1} + \dots + \frac{k_Nn_N}{N_N}\right)}$$

Conseguentemente, l'anti-trasformata (IDFT) in N dimensioni sarà:

$$x(n_1, \dots, n_N) = \frac{1}{N_1 \cdot \dots \cdot N_N} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{k_N=0}^{N_N-1} X(k_1, \dots, k_N) \cdot e^{\frac{j2\pi}{N}\left(\frac{k_1n_1}{N_1} + \dots + \frac{k_Nn_N}{N_N}\right)}$$

- Dove: $X(0, \dots, 0)$ = coefficiente in continua (proporzionale al valor medio)
- $X(0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0)$ = frequenze 'pure' nella direzione i-esima

TEOREMA DI CONVOLUZIONE DISCRETA MULTI-DIMENSIONALE

La DFT m-D gode delle stesse proprietà della DFT 1D

In particolare, vale nuovamente il teorema di convoluzione, con le cautele viste nel caso precedente

- Il prodotto degli spettri darà lo spettro del segnale ottenuto dalla convoluzione circolare Multi-Dimensionale
- Per ottenere la convoluzione lineare, dovremo effettuare uno zero padding, aggiungendo un numero di zeri tale che la lunghezza di segnale e risposta impulsiva sia pari alla somma delle durate di segnale e risposta impulsiva in ogni direzione meno 1

$$N'_i = N_i + K_i - 1 \Rightarrow N_{0_s} = N'_i - N_i = K_i - 1 \quad \text{zeri da aggiungere al segnale}$$

$$K'_i = N'_i = N_i + K_i - 1 \Rightarrow K_{0_s} = K'_i - K_i = K_i - 1 \quad \text{zeri da aggiungere al filtro}$$