KTH Information and Communication Technology

Inlämningsuppgift/Projektuppgift

IX1303 Algebra och Geometri, VT2022, period 4.

Målsättningen med denna inlämningsuppgift är att du ska få en ökad förståelse för kursinnehållet, bli ännu bättre på problemlösning och, inte minst, att du övar upp dina färdigheter i att använda datorn för att lösa problem.

Liksom i fjol, erbjuds en specialvariant av projektuppgift till de studenter som redan är vana användare av Mathematica, eller motsvarande program. Där består uppgiften i att lösa ett större problem som ni själva får konstruera. Mer om denna variant nedan.

För de flesta av er gäller att ni individuellt ska välja minst 8 av 20 problem på listan nedan och lösa dessa i Mathematica. Dessutom måste minst 3 av de valda problemen väljas bland talen 11-20. Svaret, i form av en ".nb"-fil, ska inlämnas via Canvas senast 2020-06-05. Efter detta datum är det inte längre möjligt att lämna in några lösningar. Det krävs också att de inlämnade filerna ska ge rimliga, helst rätta, svar och att de är tydligt kommenterade, så det framgår hur du har resonerat. Det betyder att du bör dela upp lösningen för ett problem i olika steg och kommentera vad du gör mellan stegen.

Du får naturligtvis arbeta tillsammans med andra, men alla som önskar få godkänt på kursen måste lämna in en egen personlig fil i nb-format. Om flera liknande svarsfiler lämnas in, där det finns anledning att misstänka att dessa har kopierats, riskerar samtliga som lämnat in sådana filer att anmälas för plagiering. En anledning att fatta misstankar om kopiering/plagiering är t ex om två filer innehåller lösningar till exakt samma problem. Försök alltså att välja andra problem än dina klasskamrater.

I den nya varianten, för studenter med större erfarenhet av programmering, kan ni jobba ensamma eller i par. Här får ni själva konstruera ett mer komplext problem och försöka lösa det i Mathematica. Det kan vara att lösa ett optimeringsproblem för en processindustri, där det gäller att maximera produktionen givet ett antal randvillkor, eller sätta upp en modell för trafiken av fotgängare, cyklister och bilar i en större korsning och studera hur trafikrytmen påverkas t ex av antalet bilar. Projekt inom datorgrafik är också något ni kan ge er i kast med. Huvudtanken är att ni ska få tillfälle att arbeta med betydligt mer realistiska problem än vi kan syssla med under kursen. Det betyder att era matriser blir betydligt större och lösningen innehåller flera steg. Tycker ni att detta låter spännande och ni inte skräms av Mathematica-programmering, ska ni skissa på ett projektförslag med en tydlig målformulering och lämna in det för godkännande till Anders H (via vanlig e-mail, ahallen@kth.se). Om ert förslag accepteras, får ni jobba med problemet tills ni tycker att ni uppfyllt målet, varpå ni får redovisa er lösning för läraren.

Betyget på inlämningsuppgiften blir godkänt eller inte godkänt (pass, or fail) och för godkänd inlämningsuppgift får ni 1.5 hsp (vilket motsvarar 1 arbetsvecka).

Era inlämnade svar rättas efter hand, i mån av tid, vilket betyder att det kommer att dröja till mitten av juni innan alla fått svar. Innehåller lösningen av talen alltför många fel, eller oklarheter, kommer komplettering att krävas.

Välj minst 8 av följande 20 problem, varav 3 eller fler ska vara valda bland talen 11-20, och lös uppgifterna med hjälp av Mathematica. Redovisa lösningar och svar i form av en individuellt inlämnad .nb-fil, där ditt namn ingår i filnamnet, t ex "anders.andersson.nb". Filen lämnas in via Canvas senast söndagen 5 juni (2022).

1. Visa i $\mathbb{R}^3$ lösningsmängden till $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ och $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ och redovisa i Mathematica med en skalenlig figur.

3. Lös grafiskt ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 7z = 2 \\ 3x + 7y + 11z = 8 \end{cases}$, dvs plotta planen i $\mathbb{R}^3$ och se om det finns någon lösning.

4. Givet vektorerna $\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ och $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, beräkna vektortrippelprodukten $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

5. Lös grafiskt ekvationssystemet $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 5y = 17 \end{cases}$, dvs plotta linjerna i $\mathbb{R}^2$ och se om det finns någon lösning.

6. Visa grafiskt varför följande system saknar lösning: $\begin{cases} 3x + 4y - z = 8 \\ 6x + 8y - 2z = 3 \end{cases}$

7. Ange diagonalmatrisen *D* och matriserna *P* och P^{-1} som används för diagonalisering av *A*

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

8. Hitta den radreducerade trappstegsmatrisen (rref) till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Har matrisen någon redundans?

9. Hitta egenvärdena till matrisen $\begin{pmatrix} 9 & -4 & -2 & -4 \\ -56 & 32 & -28 & 44 \\ -14 & -14 & 6 & -14 \\ 42 & -33 & 21 & -45 \end{pmatrix}$.

10. Visa att kolumnerna i matris A är ortogonala. $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \\ 3 & 6 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

11. Du har följande geometriska transform: $T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Visa vad den åstadkommer genom att låta transformen verka på vektorn $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Räkna ut och plotta resulterande vektorer $T^n(\boldsymbol{x})$ i samma diagram för $n = 0, 1, 2, 3\ och\ 4$.

12. Värmeledning: Lös uppgift 31 i kursboken av Lay (ed. 6), kapitel 2.5, sid 164.

13. Leontief-modellen: Lös uppgift 13 i kursboken av Lay (ed. 6), kapitel 2.6, sid 170.

14. Färg-TV: Lös tal 22 i kursboken av Lay (ed. 6), kapitel 2.7, sid 178.

15. Cramer's regel: Lös tal 40 i kursboken av Lay (ed. 6), kapitel 3.3, sid 221.

16. Avgör om följande uppsättning polynom utgör en bas för vektorrummet $\mathbb{P}_3$.
$$\{5 - 3t + 4t^2 + 2t^3, 9 + t + 8t^2 - 6t^3, 6 - 2t + 5t^2, t^2\}$$

17. Lös talet 54 i kapitel 4.5 i boken av Lay (ed. 6), sid 273, gällande vektorrummen $\mathcal{B} = \{1, cost, cos^2\,, \dots, cos^6 t\}$ och $\mathcal{C} = \{1, cost, cos2t\,, \dots, cos6t\}$

18. Determinanter: Lös uppgiften 33 i kursboken av Lay (ed. 6), kapitel 3, Supplementary exercises, sid 222.

19. Trajektorier: Lös uppgift 15 i kursboken av Lay (ed. 6), kapitel 5.7, sid 352.

20. Gram-Schmidt: Lös uppgift 28 i kursboken av Lay (ed. 6), kapitel 6.28, sid 405.