

POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria  
Corso di Laurea in Matematica per le Scienze dell'Ingegneria

Tesi di Laurea

**La forma normale di Jordan**



Relatore:

**Giovanni Manno**

Candidato:

**Mattia Mariantoni**

*Anno Accademico 2019-2020*

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	4
1.1	Incipit . . . . .	4
1.2	Motivazioni . . . . .	5
<b>2</b>	<b>La forma normale di Jordan</b>	9
2.1	Blocchi di Jordan . . . . .	9
2.2	Teorema di esistenza e unicità sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ . . . . .	13
2.3	Forma di Jordan reale . . . . .	19
2.4	Numero blocchi di Jordan di ordine $h$ . . . . .	22
2.5	Esempi . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Conclusioni</b>	29
3.1	Analisi numerica . . . . .	29
3.2	Polinomio Minimo . . . . .	30
	<b>Bibliografia</b>	33

*La scienza è la ricerca della verità  
non certezza [KARL POPPER]*

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Incipit

Nell'algebra lineare, una forma normale di Jordan, nota anche come forma canonica di Jordan o JCF è una matrice triangolare superiore di una forma particolare che rappresenta un operatore lineare su uno spazio vettoriale a dimensioni finite. La matrice presenta una struttura diagonale a blocchi nella quale gli elementi diagonali sono blocchi di Jordan.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$ . Sia  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo. Esiste una base rispetto alla quale la matrice rappresentativa di  $f$  ha la forma richiesta se e solo se tutti gli autovalori della matrice si trovano in  $K$ , o equivalentemente se il polinomio caratteristico di  $f$  è interamente scomponibile in  $K$ . Questa condizione è sempre soddisfatta se  $K$  è algebricamente chiuso (nel caso in cui  $K$  sia il campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ ). Gli ingressi diagonali della forma normale sono gli autovalori dell'endomorfismo  $f$ , e il numero di volte in cui un dato autovalore appare corrisponde alla molteplicità algebrica dello stesso.

Se l'operatore è originariamente dato da una matrice quadrata  $M$ , la sua forma normale di Jordan viene anche chiamata la

forma normale di Jordan di  $M$ . La forma normale di Jordan delle matrici è a meno di similarità, cioè data una matrice quadrata  $M$ , esiste una matrice simile ad  $M$  che ha la forma di Jordan. Qualsiasi matrice quadrata ha una forma normale di Jordan se il campo dei coefficienti viene esteso a uno contenente tutti gli autovalori della matrice e con tutte le entrate della matrice appartenenti al campo esteso. Nonostante il suo nome, la forma normale per una data  $M$  non è del tutto unica, in quanto è una matrice diagonale a blocchi formata da blocchi di Jordan, il cui ordine non è fisso; è convenzione raggruppare i blocchi per lo stesso autovalore, ma non viene imposto alcun ordinamento tra gli autovalori, né tra i blocchi per un dato autovalore, sebbene quest'ultimo possa ad esempio essere ordinato per dimensioni dei blocchi di Jordan crescenti.

## 1.2 Motivazioni

Una matrice  $A$   $n \times n$  è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni degli autospazi è  $n$ . O in maniera equivalente, se e solo se  $A$  ha  $n$  autovettori linearmente indipendenti. Enunciamo il criterio di diagonalizzabilità.

**Lemma 1.1:** Sia  $T : V \rightarrow V$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $\mathbb{K}$ . Se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori di  $T$  corrispondenti a autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , allora  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente indipendenti.

**Dimostrazione 1.1:** Procediamo per induzione su  $k$ . Se  $k = 1$ , il risultato è banale. Supponiamo il risultato vero per  $k - 1$ . Siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  scalari tali che

$$0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k \quad (1.1)$$

Allora

$$\begin{aligned} O &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k \end{aligned} \quad (1.2)$$

Moltiplicando la (1.1) per  $\lambda_k$  e sottraendo alla (1.2) otteniamo:

$$\begin{aligned} O &= \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_k) v_k \\ &= \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} \end{aligned}$$

Per l'ipotesi induttiva  $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) = \dots = \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$  e quindi  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$ , dato che  $\lambda_i \neq \lambda_j$  se  $i \neq j$ . Ma allora da (1.2) segue anche  $\alpha_k = 0$

**Teorema 1.2:** Sia  $T : V \rightarrow V$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $\mathbb{K}$  di dimensione  $n$ . Allora  $T$  è diagonalizzabile se e solo se  $T$  ha  $n$  autovalori (contati con la molteplicità algebrica) in  $\mathbb{K}$  e per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.

**Dimostrazione 1.2:** Se  $T$  è diagonalizzabile allora esiste una base di autovalori, nella quale la matrice di  $T$  è diagonale con elementi diagonali corrispondenti agli autovalori di  $T$ . Quindi è immediato osservare che  $T$  ha  $n$  autovalori (contati con la molteplicità algebrica) in  $\mathbb{K}$  e per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica. Viceversa siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  gli autovalori distinti di  $T$ ,  $m_1, \dots, m_r$  le rispettive molteplicità algebriche e  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_r}$  i rispettivi autospazi. Supponiamo che  $m_1 + \dots + m_r = n$  e che  $\dim(V_{\lambda_j}) = m_j$  per ogni  $j = 1, \dots, r$ .

Poniamo inoltre  $\mu_j = \sum_{k=1}^j m_k$  per ogni  $j \geq 1$  in modo che risulti  $\mu_r = n$ . Siano rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{v_1, \dots, v_{\mu_1}\} && \text{una base di } V_{\lambda_1} \\ \mathcal{B}_2 &= \{v_{\mu_1+1}, \dots, v_{\mu_2}\} && \text{una base di } V_{\lambda_2} \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_r = \{v_{\mu_{r-1}+1}, \dots, v_n\}$  una base di  $V_{\lambda^r}$ .

Allora  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$  è costituita da  $n$  autovettori di  $T$ . Per concludere la dimostrazione, basta provare che  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$  e a tal fine basta far vedere che è un sistema libero. Supponiamo che per  $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu_1}, \dots, \alpha_{\mu_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{\mu_n} \in \mathbb{K}$  si abbia

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{\mu_1} v_{\mu_1} + \dots + \alpha_{\mu_{r-1}+1} v_{\mu_{r-1}+1} + \dots + \alpha_{\mu_n} v_{\mu_n} = O_V$$

e per ogni  $j = 1, \dots, r$  si ponga  $w_j = \alpha_{\mu_{j-1}+1} v_{\mu_{j-1}+1} + \dots + \alpha_{\mu_j} v_{\mu_j} \in V_{\lambda_j}$ . Dunque si ha

$$w_1 + \dots + w_r = O_V$$

e questo, dato che i  $w_j$  appartengono a autospazi corrispondenti a autovalori distinti, per il lemma 1.1 può succedere solo se  $w_1 = \dots = w_r = O_V$ . Allora per ogni  $j = 1, \dots, r$  si ha  $O_V = w_j = \alpha_{\mu_{j-1}+1} v_{\mu_{j-1}+1} + \dots + \alpha_{\mu_j} v_{\mu_j}$  e quindi, dato che  $\mathcal{B}_j$  è una base, allora  $\alpha_{\mu_{j-1}+1} = \dots = \alpha_{\mu_j} = 0$ . Dunque  $\mathcal{B}$  è libero.

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili; le matrici non diagonalizzabili sono chiamate "defective matrix". Anche se una matrice non è diagonalizzabile, si può trovare una matrice simile "quanto più vicina ad essere diagonale" nella forma normale di Jordan. Consideriamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di  $A$ , considerando le relative molteplicità, sono  $\lambda = 1, 2, 4, 4$ . La dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore 4 è 1 (e non 2) che corrisponde alla sua molteplicità geometrica, quindi  $A$  non è diagonalizzabile. Tuttavia, esiste una matrice invertibile  $P$  tale che  $J = P^{-1}AP$ , dove

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**La matrice  $J$  è quasi diagonale.**



## Capitolo 2

# La forma normale di Jordan

### 2.1 Blocchi di Jordan

Sia  $A$  una matrice quadrata, che può essere pensata come la matrice rappresentativa di un endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  in una certa base. Non è sempre possibile trovare una base di autovettori di  $f$ , poichè non tutte le matrici sono diagonalizzabili. E' allora importante trovare delle basi che rendano la matrice il più semplice possibile, in qualche modo. Supponiamo che esistano due sottospazi complementari  $W, T \subseteq V$  invarianti per  $A$ , cioè  $AW \subseteq W$ ,  $AT \subseteq T$  e tali che  $V = W \oplus T$ . Allora si può trovare una base di  $V$  prendendo una base di  $W$  e una base di  $T$ . In questa base la matrice  $A$  diventa a blocchi, del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} A_W & 0 \\ 0 & A_T \end{pmatrix}$$

dove  $A_W$  e  $A_T$  sono le matrici rappresentative degli endomorfismi date dalle restrizioni  $A|_W : W \rightarrow W$  e  $A|_T : T \rightarrow T$ .

Per esempio considerando un endomorfismo con  $n$  autovalori

distinti, un autovettore di  $f$  genera un sottospazio invariante di dimensione 1, e il blocco corrispondente è uno scalare (l'autovalore corrispondente) sulla diagonale.

Quando esistono più sottospazi invarianti la cui somma diretta ci dà lo spazio, allora la matrice si decompone in tanti blocchi lungo la diagonale quanti sono i sottospazi invarianti. Per esempio, nel caso in cui la matrice sia diagonalizzabile, prendendo una base di autovettori si ha che ogni autovettore genera un sottospazio invariante di dimensione 1 e la somma di questi sottospazi è diretta in quanto generati dai vettori di una base. In questo caso tutti i blocchi hanno dimensione 1 e dunque la matrice è in forma diagonale.

Un ovvio esempio di matrice non diagonalizzabile è:

$$A = \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$$

$A$  può essere la matrice rappresentativa di un endomorfismo  $f : V \rightarrow V$ , con  $\dim(V) = 2$ . In questo caso c'è un solo autovalore  $\lambda = \pi$  di molteplicità 2, e un solo autovettore  $v_1 = (1,0)$ . Il sottospazio invariante generato da  $v_1$  è l'asse  $x$  ed è facile verificare che non ci sono altri sottospazi invarianti non banali, cioè diversi dal sottospazio nullo e da  $V$ . Dunque non è possibile scrivere  $V$ , che in questo caso ha dimensione 2, come somma di sottospazi invarianti e quindi la matrice  $A$  non può essere ulteriormente semplificata. Un altro esempio simile è dato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso vi è un solo autovettore,  $v_1 = (1,0,0)$ , che genera un sottospazio invariante  $W$  di dimensione 1. Cerchiamo un sottospazio invariante complementare  $T$  per decomporre lo spazio  $V$ . Sia  $ax + by + cz = 0$  l'equazione del piano  $T$ . La condizione  $W \cap T = 0$  implica  $a \neq 0$  e quindi supponiamo  $a = 1$ .  $T$  invariante significa che  $v \in T \implies Av \in T$ . Sia dunque  $v = (x, y, z) \in T$ , ovvero  $x + by + cz = 0$ .  $Av = (x + y, y + z, z)$  e quindi la condizione  $Av \in T$  diventa  $(x + y) + b(y + z) + cz = 0$  che, usando la condizione  $v \in T$ , si trasforma in  $y + bz = 0$ . Dunque è immediato trovare un vettore  $v \in T$  tale che  $Av \notin T$ , come  $v = (-b, 1, 0)$ . Allora  $T$  non è invariante e perciò nuovamente la matrice  $A$  non può essere scritta in blocchi più semplici.

La matrice  $A$  è un blocco di Jordan, quindi ha le caratteristiche di essere triangolare superiore, con tutti gli elementi sulla diagonale uguali (un autovalore ripetuto) e sopra la diagonale ha valore 1. Alcuni esempi di blocchi di Jordan sono:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

con dimensioni rispettivamente 3, 3 e 4. Invece la matrice

$$E = \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

non è un blocco di Jordan di dimensione 4, bensì 2 blocchi di Jordan di dimensione 2.

In generale si definisce come blocco di Jordan di autovalore  $a \in \mathbb{C}$  e dimensione  $k \in \mathbb{N}$  una matrice quadrata  $k \times k$  della forma:

$$J_k(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Una matrice quadrata  $A$  è dunque in forma di Jordan se ha blocchi di Jordan lungo la diagonale e nulla altrove. Ad esempio formata da  $J_3(2), J_2(5), J_3(3), J_1(7)$  è del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Analizziamo ora il blocco di Jordan relativo all'autovalore 0:

$$J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chiamando  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  la base di  $V$  si nota che  $e_1$  è l'unico autovettore di  $A$ . Inoltre si hanno le seguenti relazioni

$$Ae_k = e_{k-1}, Ae_{k-1} = e_{k-2}, \dots, Ae_2 = e_1.$$

Dunque cominciando da  $e_k$  si ottengono tutti i vettori della base moltiplicando ripetutamente per  $A$ . Questa osservazione è la base del procedimento che si segue per trovare la forma di Jordan di una matrice.

Fissiamo uno spazio vettoriale  $V$ . Nel seguito  $A$  può indicare

sia un endomorfismo di  $V$  sia la matrice associata quadrata all'endomorfismo in una base fissata. Con questa convenzione  $A(v)$  può significare sia l'immagine del vettore  $v$  mediante l'endomorfismo  $A$  sia il vettore colonna ottenuto moltiplicando la matrice  $A$  con il vettore colonna delle componenti di  $v$  nella base fissata.

## 2.2 Teorema di esistenza e unicità sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$

**Lemma 2.1:** Siano  $f : U \rightarrow V$  e  $g : V \rightarrow W$  due applicazioni lineari. Allora

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \ker g) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim \ker(g \circ f) - \dim \ker f$$

**Dimostrazione 2.1:** Poniamo  $h : \operatorname{Im} f \rightarrow W$  la restrizione di  $g$  all'immagine di  $f$ . Il teorema su nucleo e immagine ci dà:

$$\dim \ker h = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} h$$

e poiché  $\ker h = \operatorname{Im} f \cap \ker g$  e  $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im}(g \circ f)$  si ha la prima uguaglianza.

Poiché  $\dim \operatorname{Im} f = \dim U - \dim \ker f$  e  $\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim U - \dim \ker(g \circ f)$

sostituendo si ha la seconda uguaglianza.

**Teorema 2.2:** Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso e sia  $A : V \rightarrow V$  un endomorfismo. Allora esiste una base di  $V$  rispetto alla quale la matrice di  $A$  è in forma di Jordan.

**Dimostrazione 2.2:** La dimostrazione è per induzione sulla dimensione di  $V$ . Se  $\dim V = 1$  non c'è niente da dimostrare. Sia quindi  $\dim V = n > 1$ , sia  $\lambda$  un autovalore di  $A$  e sia  $B =$

$A - \lambda Id_V$ . Se troviamo una base in cui  $B$  è in forma di Jordan,  $A = B + \lambda Id_V$  è in forma di Jordan nella stessa base.

Poniamo  $M_i = \text{Im } B^i$ , e in particolare  $M_0 = V$ . Poiché  $B^{i+1}v = B^i(Bv) \in M_i$  abbiamo che  $M_{i+1} \subseteq M_i$ . Allora la sequenza di sottospazi

$$V = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_p \supseteq \cdots$$

si stabilizza in quanto stiamo supponendo la dimensione di  $V$  finita. Dunque esiste un indice  $p$  tale che

$$M_{p-1} \supsetneq M_p = M_{p+1} = M_{p+2} = \cdots$$

cioè da  $M_p$  in poi tutti i sottospazi sono uguali e  $p$  è il minimo indice per cui questo accade.

Poiché  $B(M_i) = M_{i+1} \subseteq M_i$ , allora  $M_i$  è un sottospazio invariante per  $B$  e possiamo considerare la restrizione  $B|_{M_i} : M_i \rightarrow M_i$ . In particolare si ha che  $\ker B|_{M_i} = M_i \cap \ker B$ . Poiché  $B(M_p) = M_{p+1} = M_p$ , la restrizione  $B|_{M_p}$  è suriettiva e quindi anche iniettiva, e cioè:

$$M_p \cap \ker B = \{0\}$$

e più in generale,  $B^i(M_p) = M_p$  per tutti gli  $i \geq 1$ , e cioè

$$\forall i \geq 1 \quad M_p \cap \ker B^i = \{0\} \quad (2.1)$$

Ricordiamo che  $M_p = \text{Im } B^p$ . Dalla (2.1) abbiamo che la somma di  $\text{Im } B^p$  e  $\ker B^p$  è diretta e la somma delle dimensioni dà  $\dim V$  (sono le dimensioni di nucleo e immagine della stessa applicazione lineare) e quindi si ha la decomposizione in somma diretta

$$V = \ker B^p \oplus \text{Im } B^p$$

Abbiamo già osservato che  $\text{Im } B^p$  è un sottospazio invariante per  $B$ , e allo stesso modo anche  $\ker B^p$  lo è. Dunque la matrice di  $B$  può essere scritta nella forma

$$B = \begin{bmatrix} B_K & 0 \\ 0 & B_I \end{bmatrix}$$

dove  $B_K$  è la matrice di  $B$  ristretta a  $\ker B^p$  e  $B_I$  la matrice di  $B$  ristretta a  $\operatorname{Im} B^p$ . Poiché  $\ker B^p$  contiene  $\ker B$ , che è non banale in quanto contiene almeno un autovettore di  $A$  di autovalore  $\lambda$ , si ha  $\dim \operatorname{Im} B^p < \dim V = n$  e quindi, per ipotesi induttiva, è possibile trovare una base di  $\operatorname{Im} B^p$  in cui  $B_I$  sia in forma di Jordan. Per concludere la dimostrazione basta quindi trovare una base di  $\ker B^p$  rispetto a cui  $B_K$  sia in forma di Jordan. Poniamo adesso

$$S_i = M_{i-1} \cap \ker B$$

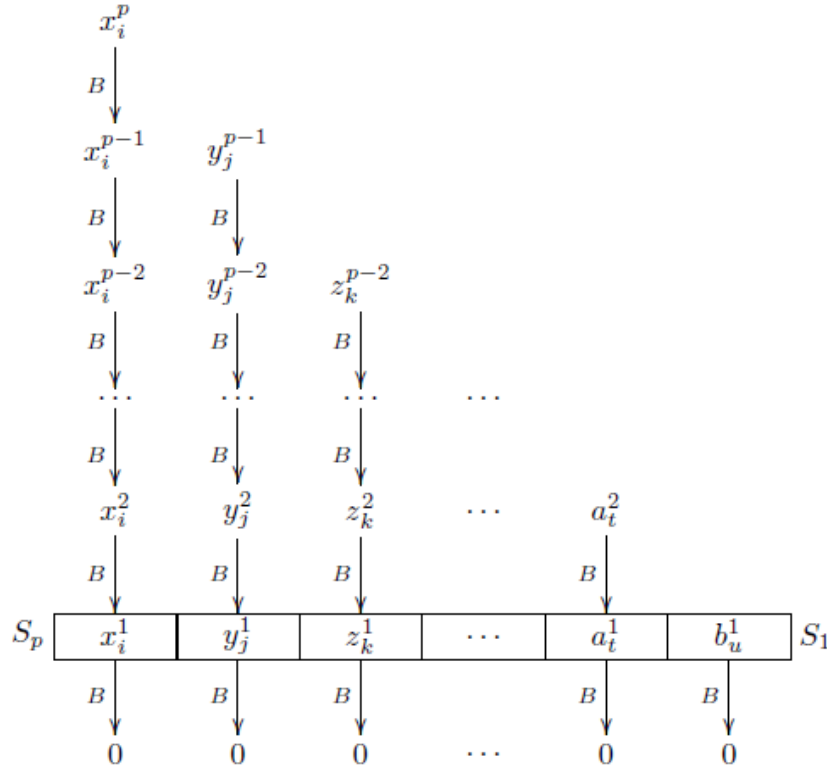
e osserviamo che  $S_{p+1} = \{0\}$ . Inoltre  $S_1 = \ker B$  e abbiamo come prima una sequenza discendente di sottospazi

$$\ker B = S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_p$$

Consideriamo il sottospazio  $S_p$  e sia  $\{x_1^1, x_2^1, \dots, x_r^1\}$  una base di  $S_p$ . Poiché  $S_p = \operatorname{Im} B^{p-1} \cap \ker B$ , esistono dei vettori  $x_i^p$  tali che

$$B^{p-1}(x_i^p) = x_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Il seguente diagramma esemplifica la costruzione:



C'è una colonna come la prima per ogni vettore della base di  $S_p$ . I vettori sulla colonna si ottengono ognuno applicando  $B$  al vettore che sta subito sopra nella colonna, cioè  $x_i^l = B(x_i^{l+1})$ . L'ultima applicazione di  $B$  dà 0 perché i vettori  $x_i^1$  appartengono a  $S_p$ , che è contenuto in  $\ker B$  per definizione.

Adesso prendiamo dei vettori  $\{y_1^1, y_2^1, \dots, y_s^1\}$  in modo che i vettori  $\{x_i^1\}$  e  $\{y_j^1\}$  formino una base di  $S_{p-1}$ . Come prima, poiché  $S_{p-1} = \text{Im } B^{p-2} \cap \ker B$  esistono dei vettori  $y_j^{p-1}$  tali che

$$B^{p-2}(y_j^{p-1}) = y_j^1, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

Vi sono quindi  $\dim S_p = r$  colonne con vettori  $x_i$ ,  $\dim S_{p-1} - \dim S_p = s$  colonne con vettori  $y_j$ , e continuiamo così scegliendo vettori  $z_k^1$  per ottenere una base di  $S_{p-2}, \dots$ , fino a prendere vettori  $b_u^1$  in modo che tutti i vettori scelti presi insieme diano una base di  $S_1 = \ker B$



Osserviamo che è possibile che due sottospazi consecutivi siano uguali. In tal caso non c'è bisogno di aggiungere vettori alla base, e si prosegue considerando il sottospazio successivo. I vettori scritti nella riga più in basso (non nulla) formano una base di  $S_1$  per costruzione, ma tutti gli altri vettori non stanno in  $S_1$ . Osserviamo anche che poiché i vettori si ottengono tutti a partire da quelli "più in alto" applicando ripetutamente  $B$ , e i vettori "più in basso" formano una base e sono quindi non nulli, tutti i vettori scritti sono non nulli.

Adesso contiamo quanti vettori abbiamo determinato: sulla riga più in basso c'è una base di  $S_1$ , quindi ce ne sono  $\dim S_1$ . Sulla penultima riga ce ne sono tanti quanti i vettori di una base di  $S_2$ : infatti i vettori  $x_i^2, y_j^2, \dots, a_t^2$  sono tanti quanti i vettori  $x_i^1, y_j^1, \dots, a_t^1$  che formano una base di  $S_2$ , e quindi sulla penultima riga ci sono  $\dim S_2$  vettori. Continuando così e sommando tutte le righe si ottiene che nel diagramma ci sono

$$N = \sum_{i=1}^p \dim S_i$$

vettori. Calcoliamo ora  $\dim S_i$ .

Applichiamo adesso il lemma 2.1 alla situazione:  $f = B^{i-1}, g = B$  e otteniamo

$$\dim S_i = \dim (\operatorname{Im} B^{i-1} \cap \ker B) = \dim \ker B^i - \dim \ker B^{i-1}$$

Sommando su  $i$  otteniamo finalmente:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^p \dim S_i = \sum_{i=1}^p \dim \ker B^i - \dim \ker B^{i-1} \\ &= \dim \ker B^p - \dim \ker B^0 \\ &= \dim \ker B^p \end{aligned}$$

Osserviamo anche che tutti i vettori nel diagramma precedente appartengono a  $\ker B^p$  (applicando  $p$  volte  $B$  si arriva alla riga tutta nulla).

Dunque abbiamo costruito un insieme di vettori  $\{x_i^\alpha, y_j^\beta, \dots\}$

che appartengono tutti al sottospazio  $\ker B^p$  e sono tanti quanti la dimensione del sottospazio. Se questi vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base e in questa base la matrice di  $B_K = B|_{\ker B^p}$  è in forma di Jordan, come richiesto. Supponiamo allora di avere una relazione di dipendenza lineare della forma

$$\sum \alpha_i x_i^p + \sum \beta_i x_i^{p-1} + \cdots + \sum \gamma_j y_j^{p-1} + \cdots + \sum \delta_u b_u^1 = 0$$

Applicando  $B^{p-1}$  tutti i vettori con indice minore o uguale a  $p-1$  si annullano, mentre i vettori di indice  $p$  diventano i corrispondenti vettori di indice 1. Si ottiene quindi

$$\sum \alpha_i x_i^1 = 0$$

e poiché i vettori  $\{x_i^1\}$  sono una base di  $S_p$ , i coefficienti  $\alpha_i$  sono tutti nulli. Applicando adesso  $B^{p-2}$ , i vettori di indice minore o uguale a  $p-2$  si annullano, e i vettori di indice  $p-1$  diventano i corrispondenti vettori di indice 1. Si ottiene quindi:

$$\sum \beta_i x_i^1 + \sum \gamma_j y_j^1 = 0$$

e poiché i vettori  $\{x_i^1, y_j^1\}$  sono una base di  $S_{p-1}$ , i coefficienti  $\beta_i$  e  $\gamma_j$  sono tutti nulli.

Applicando successivamente  $B^{p-3}, \dots, B^2$  si ottiene infine che tutti i coefficienti sono nulli e quindi i vettori sono linearmente indipendenti. Questo conclude la dimostrazione.

La forma canonica di Jordan che abbiamo ottenuto è sostanzialmente unica.

**Teorema 2.3:** La forma di Jordan di una matrice  $A$  è unicamente determinata a meno dell'ordine dei blocchi di Jordan.

**Dimostrazione 2.3:** Sulla diagonale della forma di Jordan compaiono gli autovalori di  $A$ , tante volte quanto è la loro

molteplicità come radici del polinomio caratteristico, e questo dipende solo da  $A$ .

Per un dato autovalore  $\lambda$ , i blocchi di Jordan corrispondenti si ottengono considerando la matrice  $B = A - \lambda I$ . Il numero di blocchi di dimensione  $k \times k$  è pari a  $\dim S_k - \dim S_{k+1}$  che dipende solo dalla matrice  $B$  (e quindi solo da  $A$ ) e non dal procedimento. Dunque la forma di Jordan è unica. Allora si deduce che due matrici in forma di Jordan sono simili se e solo se hanno gli stessi blocchi (a meno dell'ordine).

## 2.3 Forma di Jordan reale

Le basi di Jordan esistono sempre per matrici (e quindi endomorfismi) complessi, ma non sempre sui numeri reali. Un esempio banale è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che rappresenta la matrice di una rotazione di 90 gradi nel piano. Poichè non ci sono autovettori reali, non ci può essere forma di Jordan reale. Però questo è l'unico caso in cui non c'è forma di Jordan reale. Sia  $A$  una matrice reale. La parte della base di Jordan che corrisponde agli autovalori reali di  $A$  esiste e si costruisce nello stesso modo visto nel teorema in precedenza. Ora si analizza il caso degli autovalori non reali.

Per prima cosa si osserva che il polinomio caratteristico  $p(t) = \det(A - tI)$  è a coefficienti reali e perciò se  $\lambda \in \mathbb{C}$  è una radice, anche il coniugato  $\bar{\lambda}$  è una radice. Poichè

$$0 = p(\lambda) = \overline{p(\bar{\lambda})} = p(\bar{\lambda})$$

dove l'ultima uguaglianza è garantita dal fatto che i coefficienti di  $p(t)$  sono reali. Dunque gli autovalori non reali di  $A$  si presentano a coppie. Si considera la matrice reale  $A$  come una matrice a coefficienti complessi.

**Teorema 2.4:** C'è una corrispondenza biunivoca fra i blocchi di Jordan di  $A$  corrispondenti agli autovalori  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$ .

**Dimostrazione 2.4:** siano  $P, Q$  matrici (quadrate) reali e sia  $B = P + iQ$ , e sia  $z = x + iy$  dove  $x, y$  sono vettori reali. Allora

$$Bz = 0 \iff \bar{B}\bar{z} = 0$$

Infatti, separando le parti reali e immaginarie si ha che

$$\begin{aligned} Bz &= (P + iQ)(x + iy) = (Px - Qy) + i(Qx + Py) = 0 \\ \bar{B}\bar{z} &= (P - iQ)(x - iy) = (Px - Qy) - i(Qx + Py) = 0 \end{aligned}$$

danno entrambe  $(Px - Qy) = (Qx + Py) = 0$  e sono quindi equivalenti. Poniamo ora  $B = (A - \lambda I)$  e quindi  $\bar{B} = \overline{(A - \lambda I)} = (A - \bar{\lambda}I)$ , poiché  $A$  è reale. Dunque l'applicazione  $z \rightarrow \bar{z}$  dà un isomorfismo (reale) fra  $\ker(A - \lambda I)^n$  e  $\ker(A - \bar{\lambda}I)^n$  e quindi i blocchi di Jordan per  $\lambda$  e per  $\bar{\lambda}$  sono lo stesso numero e delle stesse dimensioni.

Sia  $J_k^*(\lambda)$  la matrice reale  $2k \times 2k$  che si ottiene dal blocco di Jordan  $J_k(\lambda)$  sostituendo ognuno dei suoi elementi  $a + ib$  con la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ . Per esempio se

$$J_3(2 + 3i) = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 2 + 3i & & 1 & & 0 & \\ \hline 0 & 2 + 3i & & 1 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 + 3i & & \end{array} \right)$$

$$J_3^*(2 + 3i) = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

**Teorema 2.5:** Sia  $A$  una matrice reale. Allora esiste una base reale rispetto alla quale  $A$  è in forma diagonale a blocchi, con blocchi di Jordan  $J_{m_1}(t_1) \dots, J_{m_r}(t_r)$  per gli autovalori reali  $t_i$  e blocchi  $J_{n_1}^*(\lambda_1), \dots, J_{n_s}^*(\lambda_s)$  per gli autovalori non reali  $\lambda_i$  e  $\bar{\lambda}_i$ .

**Dimostrazione 2.5:** Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$ , allora per il teorema 2.4 anche  $\bar{\lambda}$  è un autovalore di  $A$  e a ogni blocco di Jordan  $J_n(\lambda)$  corrisponde un blocco di Jordan  $J_n(\bar{\lambda})$ . Inoltre, sempre per il teorema precedente, se  $e_1, \dots, e_n$  è una base di Jordan per  $J_n(\lambda)$ , allora  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  è una base di Jordan per  $J_n(\bar{\lambda})$ .

Poniamo  $e_k = x_k + iy_k$ , dove gli  $x_k, y_k$  sono vettori reali. Allora i vettori  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$  generano un sottospazio di dimensione  $2n$  e sono quindi linearmente indipendenti (su  $\mathbb{C}$ , e quindi anche su  $\mathbb{R}$ ). Calcoliamo come diventa la matrice di  $A$  nella base  $\{x_1, y_1, \dots, x_n, y_n\}$ . Si ha

$$Ae_1 = \lambda e_1 = (a + ib)(x_1 + iy_1) = (ax_1 - by_1) + i(bx_1 + ay_1)$$

e inoltre

$$Ae_1 = Ax_1 + iAy_1$$

Poiché  $A, x_1$  e  $y_1$  sono reali, deve essere

$$\begin{aligned} Ax_1 &= ax_1 - by_1 \\ Ay_1 &= bx_1 + ay_1 \end{aligned}$$

e quindi le prime due colonne di  $A$  sono quelle di  $J_n^*(\lambda)$ . Per  $k \geq 2$  si ha

$$Ae_k = \lambda e_k + e_{k-1} = (ax_k - by_k + x_{k-1}) + i(bx_k + ay_k + y_{k-1})$$

e di nuovo

$$Ae_k = Ax_k + iAy_k$$

Separando parte reale e immaginaria come prima, si ha che anche tutte le altre colonne di  $A$  sono quelle di  $J_n^*(\lambda)$ .

## 2.4 Numero blocchi di Jordan di ordine $h$

**Teorema 2.6:** Il numero  $\rho(f, \lambda, h)$  dei blocchi di Jordan di ordine  $h$  relativi al generico autovalore  $\lambda$  riguardo l'endomorfismo  $f$  presenti nella matrice di rappresentazione  $A$  è dato da

$$\rho(f, \lambda, h) = \operatorname{rg}(f - \lambda Id_V)^{h-1} - 2\operatorname{rg}(f - \lambda Id_V)^h + \operatorname{rg}(f - \lambda Id_V)^{h+1} \quad (2.2)$$

che è quindi indipendente dalla base in cui  $f$  è rappresentata in forma canonica di Jordan.

**Dimostrazione 2.6:** Per ogni intero  $j \geq 1$ , vale che  $\operatorname{rg}(f - \lambda Id_V)^j = \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)^j$ , dove  $n = \dim V$ . Denotando con  $J_1, \dots, J_m$  i blocchi di Jordan che appaiono in  $A$ , e indicati con  $a_1, \dots, a_m$  i rispettivi ordini, senza perdere di generalità, possiamo supporre che quelli relativi all'autovalore  $\lambda$  siano i primi  $k$ . Quindi,  $\operatorname{rg}(f - \lambda Id_V)^j$  è uguale a

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} (J_1 - \lambda I_{a_1})^j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (J_2 - \lambda I_{a_2})^j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (J_{m-1} - \lambda I_{a_{m-1}})^j & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (J_m - \lambda I_{a_m})^j \end{pmatrix}$$

Pertanto,

$$\operatorname{rg}(f - \lambda Id_V)^j = \sum_{i=1}^m \operatorname{rg}(J_i - \lambda I_{a_i})^j$$

Se  $i > k$ , allora  $J_i - \lambda I_{a_i}$  è una matrice triangolare superiore con tutti gli elementi della diagonale principale diversi da 0, e quindi  $\operatorname{rg}(J_i - \lambda I_{a_i})^j = a_i$ . Se invece  $i \leq k$ , la matrice  $J_i - \lambda I_{a_i}$  è un blocco di Jordan relativo all'autovalore 0 e quindi è facile

vedere che  $rg(J_i - \lambda I_{a_i})^j = \max\{a_i - j, 0\}$ . **Quindi,**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m rg(J_i - \lambda I_{a_i})^j &= \sum_{i=1}^k rg(J_i - \lambda I_{a_i})^j + \sum_{i=k+1}^m rg(J_i - \lambda I_{a_i})^j \\ &= \sum_{i=1}^k \max\{a_i - j, 0\} + \sum_{i=k+1}^m a_i \end{aligned}$$

**Pertanto, posto**  $R = rg(f - \lambda Id_V)^{h-1} - 2rg(f - \lambda Id_V)^h + rg(f - \lambda Id_V)^{h+1}$  **vale che**

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^m rg(J_i - \lambda I_{a_i})^{h-1} - 2 \sum_{i=1}^m rg(J_i - \lambda I_{a_i})^h + \sum_{i=1}^m rg(J_i - \lambda I_{a_i})^{h+1} \\ &= \sum_{i=1}^k \max\{a_i - h + 1, 0\} + \sum_{i=k+1}^m a_i - 2 \sum_{i=1}^k \max\{a_i - h, 0\} - 2 \sum_{i=k+1}^m a_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \max\{a_i - h - 1, 0\} + \sum_{i=k+1}^m a_i \\ &= \sum_{i=1}^k (\max\{a_i - h + 1, 0\} - 2 \max\{a_i - h, 0\} + \max\{a_i - h - 1, 0\}) \end{aligned}$$

$$M_i = \max\{a_i - h + 1, 0\} - 2 \max\{a_i - h, 0\} + \max\{a_i - h - 1, 0\}.$$

**Se**  $h + 1 \geq a_i$ , **allora**  $M_i = 0$ . **Se invece**  $h = a_i$ , **allora**  $M_i = 1 - 0 - 0 = 1$ .

**Infine, se**  $h < a_i$  **vale che**  $M_i = a_i - h + 1 - 2(a_i - h) + a_i - h - 1 = 0$ .

**Pertanto,  $h = a_i$  e vale che  $R = k$ . Quindi,**

$$\rho(f, \lambda, h) = rg(f - \lambda Id_V)^{h-1} - 2rg(f - \lambda Id_V)^h + rg(f - \lambda Id_V)^{h+1}$$

## 2.5 Esempi

**Esempio 1:** Sia consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora il polinomio caratteristico è  $\chi_A(t) = t^3(t-1)$ , e segue che  $A$  è simile ad una matrice diagonale con blocchi di ordine 3 e 1.

Determiniamo il numero dei blocchi di Jordan di lunghezza 1 relativi all'autovalore 0. Quindi

$$\rho(A, 0, 1) = \operatorname{rg}(A^0) - 2\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(A^2) = 4 - 6 + \operatorname{rg}(A^2)$$

Siccome:

$$\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

vale che  $\rho(A, 0, 1) = 0$ . Quindi la forma canonica di Jordan è composta da un unico blocco di ordine 3 relativo all'autovalore 0 ed un unico blocco di ordine relativo all'autovalore 1. Pertanto  $A$  è simile alla matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infatti,  $m_A(t) = t^i(t-1)$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Poiché

$$A^2(A - I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora  $m_A(t) = \chi_A(t) = t^3(t-1)$ . Quindi  $\mathbb{R}^4 = \ker(A^3) \oplus \ker(A - I)$ . Semplici calcoli mostrano che  $\ker(A - I) = L(\vec{w})$ , dove  $\vec{w} = (1, 1, 0, 1)$ , e che  $\ker(A^3) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , con  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  i primi 3 vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^4$ . Inoltre è facile vedere che  $\ker(A) = L(\vec{e}_2)$ ,  $\ker(A^2) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Pertanto,

$$\ker(A) = L(\vec{e}_2) \subset \ker(A^2) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \subset \ker(A^3) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$



Sia  $\vec{a}_1 = \vec{e}_3$ , allora  $\vec{a}_1 \in \ker(A^3) - \ker(A^2)$ . Ora siano  $\vec{b}_1 = A\vec{a}_1 = \vec{e}_1$  e  $\vec{c}_1 = A\vec{b}_1 = \vec{e}_2$  e sia  $P$  la matrice di passaggio dalla base canonica di  $\mathbb{R}^4$  alla base  $\{\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{w}\}$ , allora

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi  $P^{-1}AP = J$ . Infatti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio 2:** Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & -4 & -4 \\ 22 & 15 & -8 & -9 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

allora  $\chi_A(t) = t^4 - 2t^2 + 1 = (t-1)^2(t+1)^2$ .

**Poiché**

$$\rho(A, 1, 1) = \text{rg}(A - I_4)^0 - 2\text{rg}(A - I_4) + \text{rg}((A - I_4)^2) = 4 - 6 + \text{rg}((A - I_4)^2)$$

e siccome

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 & -4 \\ -32 & -16 & 12 & 12 \\ -28 & -20 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, segue che  $\rho(A, 1, 1) = 0$  e quindi  $\rho(A, 1, 2) = 1$ .

**Inoltre**

$$\rho(A, -1, 1) = \text{rg}(A + I_4)^0 - 2\text{rg}(A + I_4) + \text{rg}((A + I_4)^2) = 4 - 6 + \text{rg}((A + I_4)^2)$$

e siccome

$$(A + I_4)^2 = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -4 & -4 \\ 12 & 8 & -4 & -4 \\ 60 & 40 & -20 & -24 \\ -12 & -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, sia ha  $\rho(A, -1, 1) = 0$  e quindi  $\rho(A, -1, 2) = 1$ .  
Pertanto,  $A$  è simile alla matrice di Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Infatti,  $m_A(t) = (t - 1)^i(t + 1)^j$ , con  $i, j \in \{1, 2\}$ . Poiché valgono

$$(A - I_4)^2(A + I_4) = \begin{pmatrix} -20 & -12 & 8 & 8 \\ 20 & 12 & -8 & -8 \\ -20 & -12 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

segue che  $m_A(t) = \chi_A(t) = (t - 1)^2(t + 1)^2$ . Pertanto, risulta che

$$\mathbb{R}^4 = \ker(A - I_4)^2 \oplus \ker(A + I_4)^2$$

Allora

$$\ker(A - I_4)^2 : \begin{cases} 12x + 4y - 4z - 4t = 0 \\ -32x - 16y + 12z + 12t = 0 \\ -28x - 20y + 12z + 12t = 0 \end{cases}$$

Quindi  $\ker(A - I_4)^2 = \{(t + z, t + z, 4z, 4t) : t, z \in \mathbb{R}\}$  e pertanto  $\ker(A - I_4)^2 = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ , dove  $\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 4)$  e  $\vec{u}_2 = (1, 1, 4, 0)$  Infine,

$$\ker(A + I_4)^2 : \begin{cases} 12x - 4t + 8y - 4z = 0 \\ 60x - 24t + 40y - 20z = 0 \end{cases}$$

quindi  $\ker(A + I_4)^2 = \{(z - 2y, 3y, 3z, 0) : y, z \in \mathbb{R}\}$  e pertanto

$\ker(A + I_4)^2 = L(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ , dove  $\vec{w}_1 = (1, 0, 3, 0)$  e  $\vec{w}_2 = (-2, 3, 0, 0)$ .  
**Si consideri la base  $\mathcal{B} = \{(A - I_4)\vec{u}_1, \vec{u}_1, (A + I_4)\vec{w}_1, \vec{w}_1\}$  di  $\mathbb{R}^4$ , la matrice di passaggio dalla base canonica a  $\mathcal{B}$  è**

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Pertanto**

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -4 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & -4 & -4 \\ 22 & 15 & -8 & -9 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi  $P^{-1}AP = J$ , dove  $J$  è precedentemente definita.



## Capitolo 3

# Conclusioni

### 3.1 Analisi numerica

Se la matrice  $A$  ha più autovalori o è vicina a una matrice con più autovalori, la sua forma normale di Jordan è molto sensibile alle perturbazioni. Considerando ad esempio la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Allora se  $\epsilon = 0$  la forma di Jordan è semplicemente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mentre se  $\epsilon \neq 0$  la forma di Jordan diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{\epsilon} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{\epsilon} \end{pmatrix}$$

Questo mal condizionamento rende molto difficile sviluppare un algoritmo numerico stabile per il calcolo della forma di Jordan, poiché il risultato dipende in modo critico dal fatto che due autovalori siano considerati uguali. Per questo

motivo, la forma normale di Jordan viene solitamente evitata nell'analisi numerica; la decomposizione stabile di Schur è considerata un'alternativa migliore.

## 3.2 Polinomio Minimo

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  a coefficienti in un campo  $\mathbb{K}$ . Si definisce polinomio minimo di  $A$  indicandolo con  $m_A(\lambda)$  il polinomio monico di grado più basso che ammette la matrice  $A$  come radice, ossia tale che:

$$m_A(A) = O_n$$

dove  $O_n$  è la matrice nulla di ordine  $n$ .

Dal teorema di Cayley-Hamilton sappiamo che ogni matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  è radice del suo polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}_n)$$

dove  $\text{Id}_n$  è la matrice identità di ordine  $n$  e  $\det$  indica il determinante. In altre parole, se

$$p_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$$

allora  $p_A(A) = a_0\text{Id}_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n = O_n$

Alla luce di ciò, il polinomio minimo di  $A$  è uno dei possibili divisori del polinomio caratteristico, cioè se  $p_A(\lambda)$  è della forma

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{t_1} (\lambda - \lambda_2)^{t_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{t_r}$$

allora  $m_A(\lambda)$  è della forma

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

dove  $1 \leq k_i \leq t_i$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, r$

Se  $A$  è una matrice jordanizzabile nel campo  $\mathbb{K}$ , il suo polinomio minimo è

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

dove  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  sono gli autovalori distinti di  $A$  e ogni esponente  $k_i$ , con  $1 \leq i \leq r$  è il massimo ordine dei blocchi di Jordan relativi all'autovalore  $\lambda_i$ . In altri termini, si devono calcolare gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  di  $A$  per poi determinare l'ordine dei blocchi di Jordan associati a ciascun autovalore. Supponendo che tali ordini siano  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , il polinomio minimo di  $A$  è  $m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$ .

Prendendo per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

suoi autovalori sono  $\lambda_1 = 1$  con molteplicità algebrica 3 e  $\lambda_2 = 2$  con molteplicità algebrica 1.

E' necessario calcolare la molteplicità geometrica  $m_g$  dei due autovalori. La molteplicità geometrica di un autovalore è compresa tra 1 e la relativa molteplicità algebrica, dunque possiamo immediatamente concludere che  $m_g(2) = 1$ , mentre la molteplicità geometrica di  $\lambda_1 = 1$  è data da:

$$m_g(1) = 4 - \text{rk}(A - \text{Id}_4) = 4 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

dove 4 è l'ordine di  $A$  e  $\text{rk}$  indica il rango di una matrice. All'autovalore  $\lambda_2 = 2$  risulta allora associato un solo blocco di Jordan di ordine 1, mentre a  $\lambda_1 = 1$  sono associati due blocchi di Jordan, uno di ordine 1 e l'altro di ordine 2. Ciò basta per concludere che  $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ .





# Bibliografia

- [1] Gilbert Strang, Introduction to linear algebra, Cambridge University Press (2006).
- [2] Roger A. Horn, Matrix Analysis, Cambridge University Press (2013).
- [3] Alessandro Montinaro, Forma canonica di Jordan, Università del salento (2016).