## Esercizio

Stabilire se $W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2 + z \}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

- $\vec{0} = (0,0,0)$

  $0 = 0 + 0$

- Chiuso rispetto al prodotto per scalare?

  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \qquad 5 = 2^2 + 1 \iff 5 = 5 \checkmark$

  $\lambda v \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

  Es. $\lambda = 2 \qquad \lambda v = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} W$

  $10 = 4^2 + 2 \iff 10 \neq 18$

  $\lambda v \notin W$

  $\Rightarrow W$ non è sottospazio vettoriale

## Esercizio

Sia $V = \{ f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \}$ uno spazio vettoriale.

Stabilire se $U = \{ f \in V \mid f(3) = 7 \}$ è un sottospazio vettoriale di $V$

- $f \in U \qquad f(3) = 7$

  $g \in U \qquad g(3) = 7$

  $f + g \in U$

  $f + g = f(x) + g(x) = \underbrace{f(3)}_{=7} + \underbrace{g(3)}_{=7} \overset{?}{=} 7 \iff 7 + 7 \neq 7$

  $f + g \notin U$

  $\Rightarrow U$ non è sottospazio vettoriale di $V$

Per dimostrare che è sottospazio devo dimostrare che

- non è vuoto
- chiuso per la somma
- chiuso per il prodotto per scalare

# Linearmente indipendenti/dipendenti

## Esercizio

Scrivere un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ linearmente dipendente da $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

N.B. scrivo un vettore multiplo di $v$

Es. $w = 2 \cdot v = \begin{pmatrix} -2 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w$ è linearmente dipendente di $v$

- Caso 2 vettori $v_1, v_2$ $\quad v_1 = \lambda v_2 \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- Caso n vettori $v_1, \dots, v_n$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow$ LIN. INDIP.

$\lambda_i \neq 0 \Rightarrow$ LIN. DIP.

## Esercizio

Stabilire se $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti

- Non sono l'uno il multiplo dell'altro

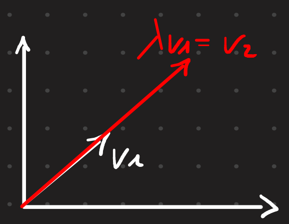
$\nexists \lambda \in \mathbb{R} \quad v_2 = \lambda v_2$

$\Rightarrow v_1$ e $v_2$ sono LIN. INDIPENDENTI

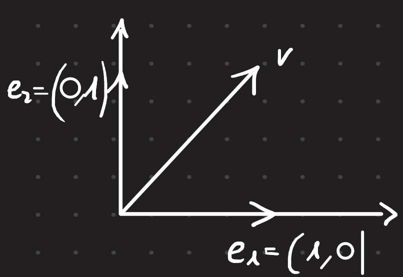
### Metodo classico

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \qquad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Verificare che ha come unica soluzione $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$




$v_2 = \lambda v_1 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$




$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$

# Basi e generatori

## Esercizio

Si dimostri che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ costruiscono una base di $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se ogni vettore $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ si può scrivere in modo univoco come combinazione lineare di $v_1, v_2, v_3$

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = b \\ \lambda_1 = c \end{cases}$$

$\lambda_1 = c$

$c + \lambda_2 = b \iff \lambda_2 = b - c$

$\cancel{c} + b - \cancel{c} + \lambda_3 = a \iff \lambda_3 = a - b$

Il fatto che il sistema ha un'unica soluzione $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ci dice che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$

$$(a, b, c) = \begin{pmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

coordinate del vettore $(a,b,c)$ rispetto alla base scelta $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

## Esercizio

Si considerino i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Verificare che sono linearmente indipendenti e completarli a base di $\mathbb{R}^3$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \implies v_1, v_2$ sono linearmente indipendenti

$L(v_1, v_2)$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ che non é esprimibile in tal modo

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin L(v_1, v_2)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 1 \\ &2 + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -2 \\ &3 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \neq 0 \end{aligned}$$

$e_1, v_1, v_2$ sono linearmente indipendenti

Per verificare che sono una base di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo verificare che $e_1, v_1, v_2$ generano $\mathbb{R}^3$, quindi che qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3$ può essere scritto come combinazione lineare di $e_1, v_1, v_2$

- $v_1, v_2, e_1$ generano $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_1 = v$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = b \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = c \end{cases}$$

$$\lambda_2 = b - 2\lambda_1$$

$$3\lambda_1 - 2b - 4\lambda_1 = c \iff -\lambda_1 + 2b = c \iff \boxed{\lambda_1 = 2b - c}$$

$$\lambda_2 = b - 2(2b - c) = b - 4b + 2c = \boxed{2c - 3b = \lambda_2}$$

$$2b - c + \lambda_3 = a$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_3 = a + c - 2b}$$

$\Rightarrow$ Il sistema ha soluzione $\forall a, b, c \Rightarrow v_1, v_2, e_1$ sono generatori di $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, e_1\}$ base di $\mathbb{R}^3$

In generale:

- $V$ sottospazio vettoriale
- $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base se sono lin. indipendenti e generano $V$

**Esercizio**

Stabilire se $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$

In caso negativo, si descriva il sottospazio da essi generato

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = v$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = a \\ 2\lambda_1 + 8\lambda_3 = b \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 13\lambda_3 = c \end{cases}$$

$2\lambda_1 = b - 8\lambda_3 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{b}{2} - 4\lambda_3}$

$\frac{3}{2}b - 12\lambda_3 - \lambda_2 + 13\lambda_3 = c$

$\frac{3}{2}b + \lambda_3 - \lambda_2 = c$

$\boxed{\lambda_2 = \frac{3}{2}b + \lambda_3 - c}$

$\frac{b}{2} - \cancel{4\lambda_3} + \frac{9}{2}b + \cancel{3\lambda_3} - 3c + \cancel{\lambda_3} = a$

$5b - 3c = a$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ non costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Non è vero che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ può essere scritto univocamente come combinazione lineare di $v_1, v_2, v_3$

Allora descrivo il sottospazio generato

$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a = 5b - 3c \right\}$

- Dimensione e base del sottospazio generato da $v_1, v_2, v_3$?

$v_3 = 4v_1 - v_2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$1 = 4 - 3 = 1$ ✓

$8 = 8$ ✓

$13 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$ ✓

$\Rightarrow v_3$ può essere scritto come comb. lineare di $v_1, v_2 \Rightarrow$ posso scartare $v_3$

$U = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{L}(v_1, v_2)$

$v_1$ e $v_2$ lin. indipendenti?

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ lin. indip.

perché sono uno il multiplo dell'altro

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ base di $U$ $\Rightarrow \dim U = 2$