UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

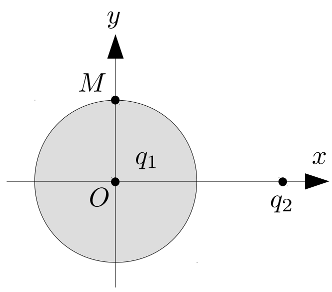
a.a. 2020-2021

Elementi di Fisica II: 26 Agosto 2021

Compito scritto

Problema 1

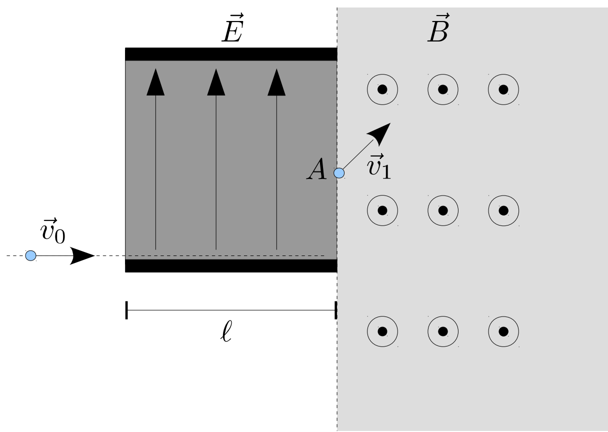
Si consideri una sfera isolante di raggio $R = 2cm$ e centro O. La sfera è caricata con una carica $q_1 = 2nC$ con densità volumetrica di carica ρ costante. A distanza $d = 5cm$ dal centro della sfera è posta una carica $q_2 = 3nC$. Si consideri un sistema di riferimento centrato in O e con l'asse x diretto verso q_2 come in figura.



1. Calcolare il campo elettrico (modulo, direzione e verso) nel punto O e nel punto M, posto sulla superficie della sfera sull'asse y come in figura.
2. Determinare se esiste un punto sull'asse x all'esterno della sfera in cui il campo elettrico si annulla.
3. Calcolare il lavoro necessario per spostare una carica di prova $q_0 = 30\mu C$ dal punto O al punto M.
4. Determinare il lavoro esterno necessario per ruotare di 180° nel piano del disegno un dipolo elettrico posto nel punto M. Il dipolo ha inizialmente momento di dipolo $\vec{p} = p_0\vec{i}$ dove $p_0 = 5nC \cdot m$ e $\vec{i}$ è il versore orientato verso l'asse x positivo.
5. Illustrare la relazione tra campo elettrico e potenziale elettrostatico. In particolare, illustrare come il potenziale elettrostatico può essere definito a partire dal campo elettrostatico e illustrare come il campo elettrostatico può essere definito a partire dal potenziale.

Problema 2

Si consideri una particella di rapporto carica su massa $q/m = 2C/kg$ con velocità $v_0 = 500m/s$ diretta orizzontalmente come in figura. La particella entra all'interno di un condensatore piano in prossimità dell'armatura inferiore (si consideri trascurabile la distanza dall'armatura inferiore), in cui il campo elettrico $\vec{E}$ è orientato come in figura. Le armature, di forma quadrata, hanno lato $\ell = 5m$. Si supponga che la distanza tra le armature sia tale per cui la particella riesca ad uscire dal condensatore senza urtare l'armatura superiore.

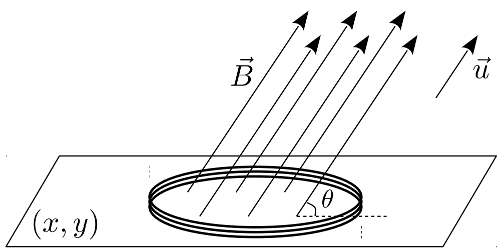


All'uscita del condensatore, nel punto A, la particella ha velocità $\vec{v}_1$ inclinata a $45°$ rispetto alla velocità iniziale ed entra in una zona in cui è presente un campo magnetico $B = 7T$ uscente dal foglio come in figura. Questa seconda zona è delimitata a sinistra dalla retta verticale tratteggiata in figura, e non ha confini a destra, in basso e in alto.

1. Determinare il valore della densità di carica sulle armature del condensatore
2. Determinare il valore minimo della distanza tra le armature affinché la particella riesca ad uscire dal condensatore senza urtare l'armatura superiore
3. A partire dal punto A, determinare il tempo necessario alla particella per raggiungere nuovamente il bordo sinistro della zona in cui è presente il campo magnetico.
4. Determinare a che distanza dal punto A la particella raggiunge nuovamente il bordo sinistro della zona in cui è presente il campo magnetico.
5. Illustrare il principio di conservazione dell'energia per una particella carica in moto all'interno di un campo elettrostatico.

Problema 3

Un avvolgimento circolare di raggio $r = 5cm$ composto $N = 350$ spire di rame giace su un piano (x, y) ed è completamente immerso in un campo magnetico B. Il campo magnetico è uniforme e inclinato di un angolo di $\theta = \frac{\pi}{4}$ rispetto al piano su cui giace l'avvolgimento. Il campo magnetico varia nel tempo con la legge $\vec{B}(t) = (B_0 e^{-t/\tau} \frac{t}{\tau})\vec{u}$ con $\tau = 11ms$ e $\vec{u}$ il versore indicato in figura. La resistività del rame vale $\rho = 1.69 \times 10^{-8}\Omega m$ mentre la sezione del filo di rame vale $\Sigma = 0.5mm^2$. Calcolare:



1. La resistenza dell'avvolgimento di spire.
2. Il valore della costante B_0 sapendo che il flusso del campo magnetico al tempo $t_1 = \tau$ vale $\Phi_1 = 400\mu Wb$ scegliendo la normale al piano diretta verso l'alto.
3. La corrente indotta (verso e modulo) in funzione del tempo. Quanto vale la corrente indotta al tempo $t_2 = \tau/2$?
4. In quale istante la corrente indotta si annulla?
5. Enunciare e dimostrare la legge di Felici

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Calcoliamo il campo elettrico generato dalla sfera. La densità di carica vale

$$\rho = \frac{q_1}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Utilizzando il teorema di Gauss attraverso una superficie Σ sferica di raggio r, si ottiene che

$$\Phi_\Sigma(E) = 4\pi r^2 E_s(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E_s(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q(r)}{r^2}$$

Nel caso $r < R$ si ha che $q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, mentre per $r \geq R$ si ha che $q(r) = q_1$. Dunque

$$E_s(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2} & r \geq R \end{cases}$$

Nel punto O il campo E_s si annulla e quindi solo il contributo di q_2 è presente. Quindi

$$\vec{E}_O = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{d^2}\vec{i}$$

dove $\vec{i}$ è il versore dell'asse x. Il modulo vale

$$E_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{d^2} \simeq 10.8\,kV/m$$

Nel punto M, il campo generato dalla sfera vale

$$\vec{E}_{M,s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{R^2}\vec{j}$$

Nel punto M, il campo generato dalla carica q_2 vale

$$\vec{E}_{M,q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{R^2+d^2}(-\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$$

dove $\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+d^2}}$ e $\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{R^2+d^2}}$.
Il campo totale vale

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{M,s} + \vec{E}_{M,q} = E_{Mx}\vec{i} + E_{My}\vec{j}$$

dove

$$E_{Mx} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{R^2+d^2}\cos\theta \simeq -8644\,V/m$$
$$E_{My} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_2}{R^2+d^2}\sin\theta + \frac{q_1}{R^2}\right] \simeq 48458\,V/m$$

inclinato di un angolo θ rispetto all'asse x pari a

$$\tan\theta = \frac{E_{My}}{E_{Mx}} \simeq -5.6 \qquad \Rightarrow \qquad \theta \simeq 100^\circ$$

Il suo modulo vale

$$E_M = \sqrt{E_{Mx}^2 + E_{Mx}^2} \simeq 49222\,V/m$$

2. In base al verso dei campi generati dalla sfera e dalla carica, il campo si può annullare solo tra il punto O e la carica q_2. In questa zona, all'esterno della sfera è necessario risolvere l'equazione

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{(d-x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad (d-x)^2 q_1 = q_2 x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2(q_1-q_2) - 2dxq_1 + d^2 q_1 = 0$$

con il vincolo che $R \leq x \leq d$. La soluzione della precedente eq. è

$$x = d\frac{q_1 \pm \sqrt{q_1 q_2}}{q_1 - q_2} = \begin{cases} 2.25\,cm & \text{accettabile poichè maggiore di } R \text{ e minore di } d \\ -22\,cm & \text{non accettabile} \end{cases}$$

3. La differenza di potenziale tra O e M può essere calcolata separando i contributi della sfera e della carica:

$$\Delta V^s_{OM} = V^s_O - V^s_M = \int_O^M E(r)\mathrm{d}r = \int_O^M \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\mathrm{d}r = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_O^M = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{q_1}{8\pi\epsilon_0 R} \simeq 450V$$
$$\Delta V^q_{OM} = V^q_O - V^q_M = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{d^2+R^2}}\right) \simeq 38V$$

La ddp totale vale

$$V_O - V_M = \Delta V^s_{OM} + \Delta V^q_{OM} \simeq 488V$$

Il lavoro esterno per spostare la carica q_0 da O ad M vale quindi

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = q_0 \Delta V = q_0(V_M - V_O) \simeq -14.6\, mJ$$

4. L'energia potenziale del dipolo vale $\mathcal{U} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$. Dunque, nella posizione iniziale si ha $\vec{p}_{\text{in}} = p_0\vec{i}$ mentre nella posizione finale si ha $\vec{p}_{\text{fin}} = -p_0\vec{i}$. Dunque

$$\mathcal{U}_{\text{in}} = -\vec{p}_{\text{in}}\cdot\vec{E}_M = -p_0\vec{i}\cdot(E_{Mx}\vec{i} + E_{My}\vec{j}) = -p_0 E_{Mx}$$
$$\mathcal{U}_{\text{fin}} = -\vec{p}_{\text{in}}\cdot\vec{E}_M = p_0\vec{i}\cdot(E_{Mx}\vec{i} + E_{My}\vec{j}) = p_0 E_{Mx}$$

da cui il lavoro esterno

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \mathcal{U}_{\text{fin}} - \mathcal{U}_{\text{in}} = 2p_0 E_{Mx} \simeq -86\mu J$$

PROBLEMA 2

1. All'interno del condensatore la componente orizzontale della velocità rimane costante $v_x(t) = v_0$, mentre la componente verticale cambia secondo la legge

$$v_y(t) = at = \frac{q}{m}Et$$

dove a è l'accelerazione e E il campo elettrico. All'uscita del condensatore, al tempo t_1, siccome la velocità è orientata a 45° le due componenti sono uguali. Dunque:

$$v_x(t_1) = v_y(t_1) \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \frac{q}{m}Et_1 \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{v_0}{t_1 \frac{q}{m}}$$

Il tempo t_1 si ottiene calcolando il tempo che la particella impiega per attraversare il lato di lunghezza ℓ, pari a

$$t_1 = \frac{\ell}{v_0} = 10ms$$

da cui

$$E = \frac{v_0^2}{\ell \frac{q}{m}} \simeq 25kV/m$$

La densità di carica è data da

$$\sigma = E\epsilon_0 \simeq 221nC/m^2$$

2. Il moto in direzione verticale è un moto accelerato uniforme. Lo spazio percorso in direzione verticale vale:

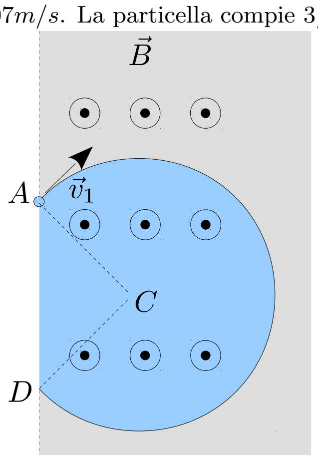
$$d = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2 = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E\frac{\ell^2}{v_0^2} = \frac{1}{2}\ell = 2.5m$$

Dunque la distanza tra le armature deve essere superiore a 2.5m.

3. Il moto nella zona del campo magnetico è circolare con raggio

$$R = \frac{mv_1}{qB} = \frac{\sqrt{2}mv_0}{qB} \simeq 50.5\,m$$

dove $v_1 = |\vec{v}_1| = \sqrt{2}v_0 \simeq 707m/s$. La particella compie 3/4 di giro come in figura



La lunghezza del percorso circolare è quindi

$$L = \frac{3}{4}2\pi R = \frac{3}{2}\pi R \simeq 238m$$

percorso in un tempo

$$t_1 = \frac{L}{v_1} \simeq 336ms$$

4. Siccome il segmento AC è perpendicolare al segmento AD, la distanza tra A e il punto D in figura è pari a

$$d_1 = \sqrt{2}R \simeq 71.41m$$

PROBLEMA 3

1. La resistenza di una spira vale
$$R_0 = \frac{\rho 2\pi r}{\Sigma} \simeq 10.6 m\Omega$$
per cui la resistenza di N spire vale
$$R = NR_0 = N\frac{\rho 2\pi r}{\Sigma} \simeq 3.72\,\Omega$$
2. Se scegliamo il verso della normale verso l'alto, il flusso del campo magnetico vale
$$\Phi(t) = NB(t)\pi r^2 \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{N}{\sqrt{2}}B(t)\pi r^2$$
dove
$$B(t) = |\vec{B}(t)| = B_0 e^{-t/\tau}\frac{t}{\tau}$$
Al tempo t_1 si ha
$$\Phi_1 = \frac{N}{\sqrt{2}}B(t_1)\pi r^2 = \frac{N}{\sqrt{2}}(B_0 e^{-t_1/\tau}\frac{t_1}{\tau})\pi r^2 = \frac{N}{\sqrt{2}}B_0\pi r^2 e^{-1}$$
da cui
$$B_0 = \sqrt{2}\frac{\Phi_1 e}{N\pi r^2} \simeq 559\,\mu T$$
3. La corrente indotta vale
$$i_{ind}(t) = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{N}{\sqrt{2}}B(t)\pi r^2) = -\frac{N\pi r^2}{\sqrt{2}R}\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{N\pi r^2}{\sqrt{2}R}B_0 e^{-t/\tau}(\frac{1}{\tau} - \frac{t}{\tau^2})$$
Al tempo t_2 si avrà
$$i_{ind}(t_2) = \frac{N\pi r^2}{\sqrt{2}R\tau}B_0 e^{-t_2/\tau}(1 - \frac{t_2}{\tau}) = \frac{NB_0\pi r^2}{\sqrt{2}R\tau}e^{-1/2}\frac{1}{2} = \frac{\Phi_1}{R\tau}e^{1/2}\frac{1}{2} \simeq 8.06 mA$$
4. La corrente indotta sia annulla a $t_1 = \tau$