Definizione di funzione continua

$f: E \to \mathbb{R}$

x_0 di accumulazione per E

f si dice continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

N.B.

Se f é continua $\forall x \in E$, f si dice continua

Continuità somma/prodotto/quoziente di funzioni continue

Siano

$f, g: E \to \mathbb{R}$

f e g continue in E

Allora

1- $f+g$ é continua

2- $f \cdot g$ é continua

3- f/g é continua

Continuità della composizione di funzioni continue

Sia

$f, g: E \to \mathbb{R}$

g continua in $y_0 = f(x_0)$

f continua in x_0

Allora

$f \circ g$ é continua

Discontinuità

- Se i limiti dx e sx in x_0 sono diversi la funzione presenta una discontinuità in x_0

(caso $|x|$)

Proposizione per dimostrare Weierstass

Dati

$a, b \in \mathbb{R}$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione

Se

$a < b$

$x_n \in [a, b]$

$\lim_{n\to+\infty} x_n = l$

Allora

$l \in [a,b]$

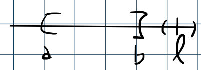
Dimostrazioni

Trovo con un $\varepsilon = \frac{l-b}{2}$ un intorno di l, che per assurdo non appartiene ad $[a,b]$, alla fine trovo che $x_n \notin [a,b]$ che è un assurdo

ipotizzo per assurdo che $l \notin [a,b]$

Da ipotesi so che $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ e quindi $\exists \bar{n}$ t.c. $n > \bar{n}$

$x_n \in \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$



- caso $l > b$, fisso $\varepsilon = \frac{|l-b|}{2}$

$x_n \in \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\iff x_n \in \,]l - \frac{|l-b|}{2}, l + \frac{|l-b|}{2}[\iff x_n \in \,]\frac{l+b}{2}, \frac{3l-b}{2}[$

ma visto che $l > b \Rightarrow \frac{l+b}{2} > b \Rightarrow x_n \notin [a,b]$

- caso $l < a$, fisso $\varepsilon = \frac{|l-a|}{2}$

$x_n \in \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\iff x_n \in \,]l - \frac{|l-a|}{2}, l + \frac{|l-a|}{2}[\iff x_n \in \,]\frac{3l-a}{2}, \frac{l+a}{2}[$

ma visto che $l < a \Rightarrow \frac{l+a}{2} < a \Rightarrow x_n \notin [a,b]$

Teorema ponte

Dati

$f: E \to \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

x_0 di accumulazione per E

Allora

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \iff \forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in E \setminus \{x_0\}$ il cui $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$

Dimostrazione

1. "$\Rightarrow$"

× Th. composizione limiti

1- $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$

2- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

3- $x_n \neq x_0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f \circ x_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$

2. "$\Leftarrow$"

ipotizziamo per assurdo che $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq l$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq l \iff \forall V$ intorno di l t.c. $\forall U$ intorno di x_0

$\exists x \in (U\cap E)\setminus\{x_0\}$ t.c. $f(x)\notin V$

Quindi $\exists V$ intorno di l t.c. $\delta>0$

$\exists x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \cap E\setminus\{x_0\}$ t.c. $f(x)\notin V$

e fissiamo $\delta = \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Di conseguenza otteniamo

$\exists x \in \,]x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}[\, \cap E\setminus\{x_0\}$ t.c. $f(x)\notin V$

Ho costruito una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c.

$x_0-\frac{1}{n} < x_n < x_0+\frac{1}{n}$, $x_n\in E\setminus\{x_0\}$ $f(x_n)\notin V$

$\Rightarrow$ x Th. due carabinieri $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ con $f(x)\notin V$

Otteniamo quindi che $\lim f(x_n)\neq l$ che è contro l'ipotesi

Teorema di Weierstass

Data

$f: E\to\mathbb{R}$

Se

E è un intervallo chiuso

E è un intervallo limitato

f è continua

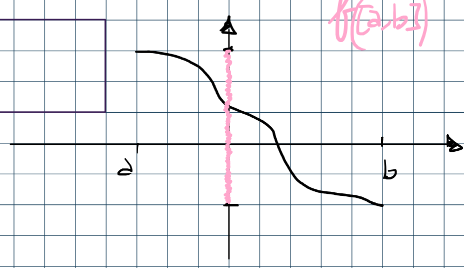
Allora

esiste almeno un punto di min e uno di max per f

N.B.

$[3,+\infty[$ è un intervallo chiuso

Dimostrazione



① Esistenza punto di minimo

immagine dominio

$f([a,b])\subseteq\mathbb{R}$

Sia $i=\inf(f([a,b]))$ → estremo inferiore

più precisamente definiamo $i = \begin{cases} -\infty & \text{se } f \text{ non è inf. limitata} \\ \inf(f([a,b])) & \end{cases}$

Affermo che

$\exists$ una successione $y_n\in f([a,b])$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} y_n = i$

infatti

$\exists$ una successione $y_n \in f([a,b])$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} y_n = i$

infatti

1 - se $i = -\infty \Rightarrow \forall n > 0 \; \exists \, y_n \in f([a,b])$ t.c. $y_n < -n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = -\infty = i$

2 - se $i = \inf(f([a,b])) \in \mathbb{R}$ per caratterizzazione inf e scelto $\varepsilon = \frac{1}{n}$

$\forall n > 0 \; \exists \, y_n \in f([a,b])$ t.c. $i < y_n \leq i + \frac{1}{n}$ → per $n \to +\infty$ $\frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow$ x Th. carabinieri $\lim_{n\to+\infty} y_n = i$

Noto che da $y_n \in f([a,b])$

$\exists \, x_n$ t.c. $y_n = f([a,b])$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in [a,b]$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione a valori nel dominio $[a,b]$

x. Th. Bolzano-Weierstrass sappiamo che esiste una sotto-successione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x} \in [a,b]$

Quindi

$f(x_n) = y_n \in f([a,b])$

$f(x_{n_k}) = y_{n_k} \in f([a,b])$ → immagine sottosuccessioni

$\lim_{n\to+\infty} y_n = i$ → siccome la successione tende ad i anche le sottosuccessioni tendono ad i

$\Updownarrow$

$\lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = i$

siccome f è continua $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

x Th. Ponte → $x_{n_k} \to \bar{x}$ (o Th. composizione limiti compongo $f(x)$ con $x_{n_k} \to f(x_{n_k})$)

x Th. composizione limiti

1 - $\lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$

2 - $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \ell$

3 - $x_n \neq \bar{x}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f \circ x_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$

$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \iff \forall \text{successione } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } x_n \in E \setminus \{x_0\} \text{ il cui } \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \text{ si ha che } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell}$

$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$

Ottengo x Th. unicità del limite

$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = i \qquad \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$

$\Rightarrow i = f(\bar{x})$

Sicuramente $i \neq -\infty$ → perché è la f di qualcosa

inoltre $f(\bar{x}) \in f([a,b])$

$f(\bar{x}) = \inf(f([a,b]))$ → siccome è estr. inferiore è anche un minimo

Inoltre

$$f(\bar{x}) \in f([a,b])$$

$$f(\bar{x}) = \inf(f([a,b])) \longrightarrow$$ siccome è estr. inferiore è anche un minimo

$$\Longrightarrow f(\bar{x}) = \min(f([a,b]))$$

② Esistenza punto di massimo

Teorema degli zeri

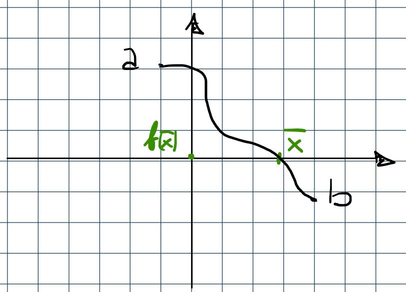
Data

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se

f è continua in $[a,b]$

$f(a) \underset{(<)}{>} 0$ e $f(b) \underset{(>)}{<} 0$



Allora

$$\exists \, \bar{x} \in]a,b[\text{ t.c. } f(\bar{x}) = 0$$

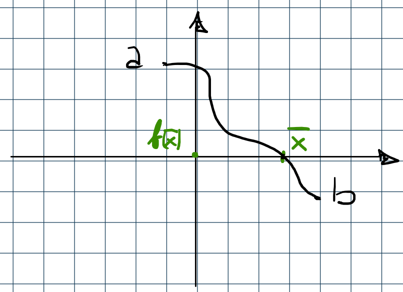
Teorema valori intermedi

Data

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se

f è continua in $[a,b]$



Allora

f assume tutti i valori nell'intervallo $[f(a), f(b)]$

Dimostrazione

$\boxed{\text{prendo } g(x) = f(x) - y \text{ continua in intervallo chiuso } [f(a), f(b)], \text{ applico il Th degli zeri } g(\bar{x}) = 0 = f(\bar{x}) - y \iff f(\bar{x}) = y \;\; \forall y}$

① se $f(a) < f(b)$

scelgo $y \in [f(a), f(b)]$

considero la funzione $g(x) = f(x) - y$ che è continua

$\forall y$ avrò

$g(a) = f(a) - y < 0 \qquad g(b) = f(b) - y > 0$

x Th degli zeri $\Longrightarrow \exists \, \bar{x}$ t.c. $g(\bar{x}) = 0$

$\iff f(\bar{x}) - y = 0 \iff f(\bar{x}) = y$

② se $f(b) < f(a)$

scelgo $y \in [f(a), f(b)]$

considero la funzione $g(x) = f(x) - y$ che è continua

$\forall y$ avrò

$g(a) = f(a) - y > 0 \qquad g(b) = f(b) - y < 0$

$\times$ Th. degli zeri $\Rightarrow \exists\, \bar{x}$ t.c. $g(\bar{x}) = 0$

$\Leftrightarrow f(\bar{x}) - y = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = y$