QUIZ 1

L'insieme

$\{(3x, e^x) : x \in [1,2]\}$ è: (può esserci più di una risposta esatta)

Select one or more:

- a. Il grafico di $e^{x/3}, x \in [3,6]$ ✔
- b. una curva
- c. una linea
- d. il grafico di $e^x, x \in [1,2]$
- e. il sostegno di una curva ✔

$$(3x, e^x) \quad x \in [1,2]$$

$$3x = u$$

$$x = u/3$$

$$(u, e^{u/3}) \quad u \in [3,6]$$

Sia $f : [0,10] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $f(3) = -3$ e $f'(3) = -8$.

Usando l'approssimazione dei valori di una funzione attraverso la derivata stimare $f(3.05)$.

$$f(x.yy) = f(x) + f(x) \cdot (0.yy)$$

$$f(3.05) = -3 + (-8) \cdot (0.05) = -3.4$$

Per ogni $x \geq 0$ sia $L(x)$ la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho(t) = 2e^{-3t}, t \in [0, x]$.

Calcolare il limite $\lim_{x \to +\infty} L(x)$; scrivere 10000 se il limite è $+\infty$.

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{(\rho(t)')^2 + (\rho(t))^2}$$

$$\rho(t) = 2e^{-3t} \qquad \rho(t)' = -6e^{-3t}$$

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{(\rho(t)')^2 + (\rho(t))^2} \, dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{4e^{-6t} + 36e^{-6t}} \, dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{40e^{-6t}} \, dt =$$

$$u = -6t \qquad du = -6\,dt \qquad dt = -1/6 \, dt$$

$$= -\frac{\sqrt{40}}{6} \int_0^{+\infty} \sqrt{e^u} \, du = -\frac{\sqrt{40}}{6} \int_1^0 \frac{\sqrt{x}}{x} \, dx = -\frac{20}{3} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$x = e^u \qquad dx = e^u \, du \qquad du = \frac{dx}{e^u}$$

$$= -\frac{\sqrt{40}}{6} \cdot \left[2\sqrt{x}\right]_1^0 = -\frac{\sqrt{40}}{6} \cdot (-2) = 2.1082$$

Calcolare la lunghezza della curva $f(t) = (3\cos t, 3\sin t, 5t)$, $t \in [-1,1]$.

$$L = \int_a^b |f(t)'| \, dt$$

$$L = \int_a^b |f(t)'| \, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{(3\sin t)^2 + (-3\cos t^2) + (5)^2} \, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 25} \, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{9+25} \, dt = \sqrt{34} \left[x\right]_{-1}^{1} = 11.6619$$

Si calcoli la lunghezza del *grafico* di $h(t) = 4t^{3/2}$, $t \in [3, 6]$.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (h'_{(t)})^2}$$

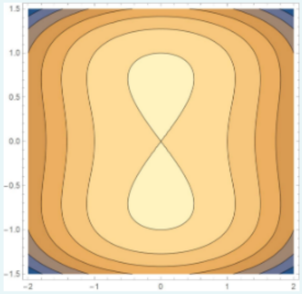
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (h'_{(t)})^2} = \int_3^6 \sqrt{1 + 36t}\ dt = \frac{1}{36} \int_{109}^{217} \sqrt{u}\ du =$$

$$u = 1 + 36t \qquad du = 36dt \qquad dt = \frac{1}{36} du$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{109}^{217} = 38.1225$$

QUIZ 2

Quale funzione corrisponde alle curve di livello disegnate in figura? Suggerimento: usare l'immaginazione o un software di calcolo simbolico, ad esempio Wolframalpha, free su internet.



Select one:

- a. $\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$
- b. $(\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}/4}$
- c. $e^{-y}\cos x$
- d. $\dfrac{1}{4x^2+y^2}$
- e. $-\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$
- f. $y^2-y^4-x^2$ ✔

Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2+4xy+y^2}{4x^2-y^2}.$$

Se si ritiene che il limite non esista indicare come risposta -1000.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2+4xy+y^2}{4x^2-y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2+4mx^2+m^2x^2}{4x^2-m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}(4+4m+m^2)}{\cancel{x^2}(4-m^2)}$$

$y = mx$

il risultato dipende da m
quindi <u>NON ESISTE</u>

Sia, per ogni $t \in [0, 2\pi]$

$$D_t := \{(\rho\cos t, \rho\sin t) : \rho > 0, \}.$$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si abbia $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in D_t} f(x,y) = 3$. Allora $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 3$.

Applicazione Th. su restrizioni

Siano D un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione. Si supponga che $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_m$ e che per ogni $i = 1, \ldots, m$, $p \in \mathbb{R}^m$ sia di accumulazione per D_i e $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in D_i}} f(x) = l$. Allora $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in D}} f(x) = l$

Limiti su restrizioni

Siano $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $E \subset D$, con p di accumulazione per E. Si supponga che $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in D}} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in E}} f(x) = l$

Considero $(0,0)$ di accumulazione per D_i

Siccome $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)\ x,y\in D_i} f(x,y) = 3 \implies \exists \lim\limits_{(x,y)\to 00} f(x,y) = 3$

Sia $f(x,y) = e^{(x^2y/3)}$. Determinare la prima componente u_1 del vettore unitario $u = (u_1, u_2)$ lungo il quale la crescita di f è massima nel punto $(-6, 2)$.

[Il tasso di massima crescita di f in p è $D_u f(p)$, dove u è il vettore unitario lungo il quale la crescita di f è massima in p]

$$D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot u = \partial_x f(p) \cdot u_1 + \partial_y f(p) \cdot u_2$$

$$\nabla f(x,y) = (\partial x, \partial y) = \left(\frac{2}{3}xy e^{\frac{x^2y}{3}}, \frac{x^2}{3} e^{\frac{x^2y}{3}}\right) = e^{\frac{x^2y}{3}}\left(\frac{2}{3}xy, \frac{x^2}{3}\right)$$

$$u = \left(\boxed{\frac{\partial x f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}}, \frac{\partial y f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}\right)$$

devo trovare questa in $p(-6,2)$

$$u_1 = \frac{\frac{2}{3}xy}{\sqrt{\left(\frac{2xy}{3}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2}} \xrightarrow{p(-6,2)} \frac{-8}{\sqrt{64 + 144}} = -0.5547$$

Calcolare la seconda componente del gradiente di $\sin^3(|(x,y)|)$ in

$$(x,y) = \left(\frac{\pi}{39}\sqrt{160}, -\frac{\pi}{13}\right).$$

Regola della catena

① $u = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(\sqrt{x^2+y^2})\right)^3 = \frac{\partial u^3}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 3\sin^2(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(\sqrt{x^2+y^2})\right)$$

② $u = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial \sin(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\cos(\sqrt{x^2+y^2})\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}$$

③ $u = x^2+y^2$

$$\frac{\partial \sqrt{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} x^2+y^2$$

④ $$\frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x} = 2y$$

$$3\sin^2(\sqrt{x^2+y^2})\left(\cos(\sqrt{x^2+y^2})\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = -0.2596$$

Sia $f(x,y,z) = x^2y^4 - 3xz^2$. Determinare il tasso di massima crescita di f nel punto $p = (6,-6,3)$.

[Il tasso di massima crescita di f in p è $D_u f(p)$, dove u è il vettore unitario lungo il quale la crescita di f è massima in p]

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2y^4x - 3z^2,\ 4x^2y^3,\ -6xz\right) =$$

$$= (15525, -31104, -108)$$

$$|\nabla f(x,y,z)| = \sqrt{15525^2 + (-31104)^2 + (-108)^2} = 34763.4305$$

Sia f funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Siano $u = (3,-4)$, $v = (2,1)$ due vettori e $p = (7,7)$. Si supponga che

$$D_u f(p) = 10, \quad D_v f(p) = -8.$$

Calcolare $D_{(-1,4)} f(p)$.

$$\begin{cases} D_u f(p) = 10 = 3\partial x - 4\partial y \\ D_v f(p) = -8 = 2\partial x + \partial y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial y = -8 - 2\partial x \\ 3\partial x = 10 + 4(-8 - 2\partial x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial y = -8 - 2(-2) \\ 3\partial x = 10 - 32 - 8\partial x \end{cases}$$

$$11\partial x = -22 \rightarrow \partial x = -2$$
$$\partial y = -4$$

$$D_{(-1,4)} f(p) = -2\cdot(-1) + 4\cdot(-4) = -14$$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Si supponga che per ogni vettore $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ si abbia $D_u f(0,0) = 9u_1 - 5u_2$.
Determinare il tasso di crescita **minimo** di f in $(0,0)$.

Il tasso di minima crescita di f in p è $D_u f(p)$, dove u è il vettore unitario lungo il quale la crescita di f è minima in p

$$D_u f(0,0) = 9u_1 - 5u_2$$

$$\partial x = 9$$
$$\partial y = -5$$

$$-|\nabla f(x,y)| = -\sqrt{9^2 + (-5)^2} = -10.2956$$

QUIZ 3

Dire se le affermazioni sono vere o false

Una funzione differenziabile è di classe C^1	FALSO ✓
Una funzione che ammette derivate parziali in un punto è differenziabile su quel punto	FALSO ✓
Una funzione differenziabile in un punto p è continua in p	VERO ✓
Una funzione che ammette derivate parziali in p è continua in p	FALSO ✓
Una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n$ è differenziabile in $p \in D$ se e solo se $\nabla f(p)$ esiste ed è $\lim_{x\to p} f(x) - [f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p)] = 0.$	FALSO ✓
Una funzione di variabile **reale** derivabile in t_0 è differenziabile in t_0	VERO ✓

Rispondere alle domande seguenti

Se una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ha un minimo locale in $p \in D$ allora $\nabla f(p) = 0$	FALSO ✓
Un punto critico è necessariamente un massimo o minimo locale	FALSO ✓
Se una funzione di classe C^2 ha un punto critico, il criterio dell'Hessiana permette sempre di concludere sulla natura del punto	FALSO ✓
La definizione di massimo o minimo coinvolge solo delle disuguaglianze, non il gradiente o l'hessiana	VERO ✓
Un punto critico $p \in D$ è di sella per una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se e solo se per ogni intorno U di p esistono $x_1, x_2 \in U \cap D$ tali che $f(x_1) \le f(p)$ e $f(x_2) \ge f(p)$	FALSO ✓

Sia $f(x,y) = \dfrac{7y^3}{x^2+y^2}$ fuori dall'origine, estesa per continuità nell'origine.

Calcolare, se esiste, $\partial_y f(0,0)$.

nell'origine vale 0

Uso il limite del rapporto incrementale per verificare l'esistenza

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t(0,1)) - f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = \frac{1}{\cancel{t}} \frac{7\cancel{t^3}}{\cancel{t^2}} = 7$$

Nell'esercizio precedente, la funzione f è differenziabile nell'origine?

NO

f di classe C^1 attorno ad un punto p. Allora f è differenziabile in p.

Si dice che f è di classe C^1 in un aperto se f è continua e le derivate parziali di f esistono e sono continue in quell'aperto. Ma le derivate parziali non esistono.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\partial_x f(1,2) = 4, \partial_y f(1,2) = -5$

Determinare $\frac{d}{dt} f(2\log(1+t)+1, 2(t-1)^2)_{t=0}$.

? Formula

$\partial_x f(1,2) = 4$

$\partial_y f(1,2) = -5$

$$\frac{d}{dt} f\left(2\log(1+t)+1, 2(t-1)^2\right)_{t=0} = \overset{4}{\partial_x} \cdot \frac{2}{1+t} + \overset{-5}{\partial_y}\left(4(t-1)\right) = 8 + 20 = 28$$

Due amici effettuano due percorsi distinti su una montagna che ha la forma del grafico di una funzione f di classe C^1 sul piano. Entrambi i percorsi passano per il punto $P = (1, 0, f(1,0))$.

Luigi passa nel punto P all'istante $t = 0$ e la sua quota ad un istante t è data da $f(\cos(t), 2\sin(2t)) = 18\cos^2(t) + 16\sin^2(2t) + 12\sin(2t)\cos(t)$, Francesca passa nel punto P all'istante $t = 1$ e la sua quota ad ogni istante t è data da $f(t, t^2-1) = 4 - 6t + 10t^2 + 6t^3 + 4t^4$.

Determinare il tasso di crescita massimo di f nel punto $(1,0)$. Scrivere -1000 se i dati non sono sufficienti per concludere.

L passa per P in $t=0$ quota $f(\underset{x}{\cos(t)}, \underset{y}{2\sin(2t)}) = 18\cos^2(t) + 16\sin^2(2t) + 12\sin(2t)\cos(t) =$

$= 18x^2 + 8y^2 + 6xy$

F passa per P in $t=1$ quota $f(t, t^2-1) = 4 - 6t + 10t^2 + 6t^3 + 4t^4 = 4 + 6t(t^2-1) + 10t^2 + 4t^4 =$

$= 4 + 6xy + 10x^2 + 4x^4$

$4 - 6x + 10x^2 + 6x^3 + 4x^4$

$\nabla f(1,0) = (-6 + 10x + 6x^2 + 4x^4, 0) =$ $\frac{(14,0)}{14} = \frac{14}{14}^2$

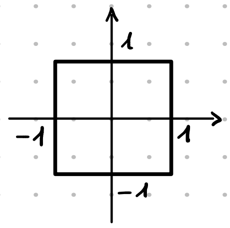
$f_L(x,y) = 18x^2 + 8y^2 + 6xy = 18$

$f_F(x,y) = 4 + 6xy + 10x^2 + 4x^4 = 18$

$D_u f_P = \nabla f_P \cdot u$

$$u_{maxL} = \frac{\nabla f(1,0)}{|\nabla f(1,0)|} = \frac{(36x+6y,\ 16y+6x)}{\sqrt{(36x+6y)^2+(16y+6x)^2}} = \frac{(36,\ 6)}{\sqrt{1332}}$$

$$D_{u_{max}} f_L = \nabla f(1,0) \cdot u_{max} = (36,6)\left(\frac{36}{\sqrt{1332}}, \frac{6}{\sqrt{1332}}\right) = 36.4965$$



Sia $f(x,y) = x^2 + 10y^2 - 10x^2y + 10$. Determinare il valore del massimo assoluto di f sul quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$ (NB: se in p c'è il massimo assoluto si chiede quindi il valore di $f(p)$).

Devo trovare i punti critici e calcolare il determinante dell'hessiana per quei punti.
Trovare i punti critici equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 20xy = 0 \\ 20y - 10x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1-10y) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1/\sqrt{5} \\ y = \frac{1}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1/\sqrt{5} \\ y = 1/10 \end{cases}$$ p.ti critici interni

$$Hess(f(x,y)) = \begin{array}{cc} \partial x \partial x & \partial y \partial x \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2-20y & -20x \\ -20x & 20 \end{pmatrix}} \\ \partial x \partial y & \partial y \partial y \end{array}$$

$Det(Hess(f(0,0))) = 40 \Rightarrow f(0,0) = 10$ min. locale stretto

$$Det\left(Hess\, f\left(\tfrac{1}{\sqrt5}, \tfrac{1}{10}\right)\right) = 2 - \cancel{20}^{\,2}\left(\frac{1}{\cancel{10}_{\,1}}\right) \cdot 20 - 20\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) 20\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) =$$

$$= \cancel{40} - \cancel{40} - \frac{200}{5} = -40$$ p.to di sella

$Det\left(Hess\, f\left(-\frac{1}{\sqrt5}, \frac{1}{10}\right)\right) = -40$ p.to di sella

$f(-1,y) = 1 + 10y^2 - 10y + 10$

$f(1,y) = 1 + 10y^2 - 10y + 10$

$\Rightarrow f'(\pm1,y) = 20y - 10 \Rightarrow f' > 0 \iff y > 1/2$

$f(\pm1,1) =$

$f(x,-1) = x^2 + 10 + 10x^2 + 10$ $\quad f'(x,-1) = 22x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1,-1) = 1 + 10 + 10 + 10 = 31$

$f(x,1) = x^2 + 10 - 10x^2 + 10$ $\quad f'(x,1) = -18x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x = -1$

$f(1,1) = 11$

Max assoluto $= 31$

Sia $f(x,y) = 4x^2y - 40y^3 - 4x^2 + 58y^2$.
Determinare il numero di punti di sella di f. Rispondere con un intero naturale (0 se non ve ne sono)

Punti critici, poi Hessiana sui punti (Hess>0 e $f(x,y)<0$)

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8xy - 8x = 0 \\ 6x^2 - 120y^2 + 116y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x(y-1) = 0 \\ x = \sqrt{\frac{120y^2 - 116y}{6}} \end{cases}$$

① $x=0 \cup y=1$

② per $x=0$ $\sqrt{\frac{120y^2-116y}{6}} = 0 \Rightarrow 120y^2 - 116y = 0 \Rightarrow 6y(30y-29) = 0$

$y=0$ e $y = 29/30$ $\quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{29}{30} \end{cases}$

② per $y=1$ $\quad x^2 = \frac{120-116}{6} = \pm 1$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{Hess}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} 8y-8 & 8x \\ 8x & -240y+116 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 8xy - 8x = 0 \\ 6x^2 - 120y^2 + 116y = 0 \end{cases}$$

$\text{Det Hess } f(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 116 \end{pmatrix} < 0$ p.to sella

$\text{Det}(\text{Hess } f(0,\frac{29}{30})) = \begin{pmatrix} 8\cdot\frac{29}{30}-8 & 0 \\ 0 & -240\cdot\frac{29}{30}+116 \end{pmatrix} = \frac{464}{15} > 0$

$\text{Det}(\text{Hess } f(1,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & -124 \end{pmatrix} < 0$ p.to sella

$\text{Det}(\text{Hess } f(-1,1)) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & -124 \end{pmatrix} < 0$ p.to sella

3 punti sella

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Si supponga che

$$f(1,3) = -6, \quad \partial_x f(1,3) = 7, \quad \partial_y f(1,3) = 8.$$

Usando l'approssimazione con il piano tangente, fornire il valore approssimato di $f(1.08, 2.95)$.

$z = f(P) + \nabla f(P)(x-P)$

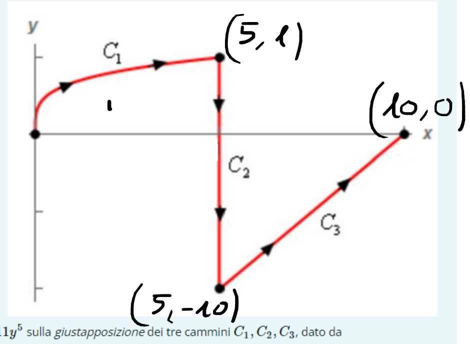
$z = -6 + (7,8)(0.08, -0{,}05) = -5.36$

QUIZ 4

Siano :

- C_1 la curva cartesiana $x = 5y^4, y \in [0,1]$;
- C_2 il segmento verticale da $(5,1)$ a $(5,-10)$;
- C_3 il segmento da $(5,-10)$ a $(10,0)$.

Il disegno qui sotto è puramente indicativo.



Calcolare l'integrale in ds di $11y^5$ sulla *giustapposizione* dei tre cammini C_1, C_2, C_3, dato da

$$\int_{C_1} 11y^5\, ds + \int_{C_2} 11y^5\, ds + \int_{C_3} 11y^5\, ds.$$

Scegliere l'*approssimazione* (non troncatura) migliore del risultato.

Integrale curvilineo

$$\int_a^b \mu(r(t))\, |r'(t)|\, dt$$

C_1 Parametrizzo con $y = t$ $\quad r(t) = (5t^4, t) \quad t \in [0,1]$

$$r(t)' = (20t^3, 1)$$

$$C_1 = \int_0^1 11t^5 \sqrt{(20t^3)^2 + 1^2}\, dt = 31.4835$$

C_2 $\quad r(t) = (5, t) \quad t \in [-10, 1]$

$r(t)' = (0,1) \quad |r'(t)| = 1$

$$C_2 = \int_{-10}^1 11t^5\, dt = -1833331.5$$

C_3 $\quad \overset{x_A\ \ y_A}{(5, -10)} \quad \overset{x_B\ \ y_B}{(10, 0)}$

$$\frac{y+10}{10} = \frac{x-5}{10-5} \iff 5(y+10) = 10(x-5)$$

$$y + 10 = 2x - 10$$

$$x = \frac{y+20}{2}$$

$y = t \quad t \in [-10, 0]$

$$x = \frac{1}{2}t + 4$$

$$r(t) = \left(\frac{1}{2}t + 4, t\right) \quad r'(t) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$C_3 = \int_{-10}^0 11t^5 \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}\, dt = -2.04972 \cdot 10^6$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = -3.883035 \cdot 10^6$$

Rispondere alle seguenti domande.

L'integrale di un campo su un cammino coincide con l'integrale dello stesso campo sul cammino inverso	FALSO ✓
Un campo continuo radiale su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è conservativo.	VERO ✓
Un campo continuo conservativo è un campo gradiente	VERO ✓
Un campo continuo gradiente è conservativo	VERO ✓
Siano $F, G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due campi, con F conservativo. Allora $F+G$ è conservativo se e solo se G è conservativo.	VERO ✓
Un campo C^1 irrotazionale su un dominio è conservativo	FALSO ✓

Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ campo C^1 **irrotazionale**. Quali delle seguenti affermazioni sono vere, indipendentemente dal campo dato? Si perde 25% per risposta errata.

Select one or more:

- [ ] a. La circuitazione di F sul disco di centro l'origine e raggio 1 è uguale zero
- [ ] b. F è un campo gradiente
- [x] c. F è conservativo sul semipiano $x > 0$ ✓
- [ ] d. F è conservativo
- [x] e. La circuitazione di F sul disco di centro (2,2) e raggio 1 è uguale zero ✓

Sia $F(x,y) = \left(\frac{3(y^2-x^2)-6xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{3(x^2-y^2)-6xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$.

Sia poi $r(t) = (\cos t, 8\sin^2 t), t \in [0, \pi/2]$. Calcolare l'integrale di F su r. Esprimere il risultato troncando a due cifre dopo la virgola.

?

Th. 5.1

$$\int_r F \cdot dr = U(r(b)) - U(r(a))$$ In particolare F conservativo

$$\int \frac{3(y^2-x^2)-6xy}{(x^2+y^2)^2} dx = \int \frac{3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} dx - \int \frac{6xy}{(x^2+y^2)^2} dx = \frac{3(x+y)}{x^2+y^2} + c$$

$$\int \frac{3(y^2-x^2)-6xy}{(x^2+y^2)^2} dy = \frac{3(x+y)}{x^2+y^2} + c$$

$$r\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = (0,8) \qquad r(0) = (1,0)$$

$$\int_r F\, dr = U(r(\tfrac{\pi}{2})) - U(r(0)) = U(0,8) - U(1,0) = \frac{24}{64} - 3 = -\frac{21}{8} = -2.625$$

Sia $F(x,y) = (9x^8 - 5y\sin(5xy), -5x\sin(5xy))$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sia poi $r(t) = (t^3 \log((e-1)t+1) + 6, 27\pi t), t \in [0,1]$.

Calcolare l'integrale di F su r. Esprimere il risultato troncando a due decimali dopo la virgola.

Suggerimento: può essere utile per semplificare (ma in nessun modo obbligatorio!) scrivere il campo come somma di due campi opportuni...

logaritmo naturale $\to \ln((e-1)t+1)$

Applico sempre il Teorema fondamentale dei campi gradienti

$$U_x = \int 9x^8 - 5y\sin(5xy)\, dx = x^9 + \cos(5xy) + c$$

$$U_y = \int -5x\sin(5xy)\, dy = \cos(5xy) + c$$

$$\int -5x\sin(5xy)\, dy = \int -\cancel{5x}\sin(u) \frac{du}{\cancel{5x}} = \cos(5xy) + c$$

$$u = 5xy \qquad dy = \frac{du}{5x}$$

Una primitiva del campo gradiente è $x^9 + \cos(5xy)$

$$r(0) = (6,0) \qquad r(1) = (7, 27\pi)$$

$$\int_r F\, dr = U(r(1)) - U(r(0)) = 7^9 + \cos(5 \cdot 27 \cdot \pi) - 6^9 - \cos(0) = 30275909$$

Sia

$F(x,y,z) = (12e^x\cos(5yz) + 14x, -60e^x z\sin(5yz), 13\cos(13z) - 60e^x y\sin(5yz))$.

Dopo aver determinato la primitiva U di F tale che $U(0,0,0) = 10$, determinare $U\left(1, 0, \frac{\pi}{26}\right)$. Esprimere il risultato troncando a due decimali dopo la virgola.

Suggerimento: può essere utile per semplificare (ma in nessun modo obbligatorio!) scrivere il campo come somma di due campi opportuni...

$$\int 12e^x\cos(5yz) + 14x \, dx = 12e^x\cos(5yz) + 7x^2 + c$$

$$\int -60e^x z\sin(5yz) \, dy = 12e^x\cos(5yz) + c$$

$$\int 13\cos(13z) - 60e^x y\sin(5yz) \, dz = \sin(13z) + 12e^x\cos(5yz) + c$$

$$U = 12e^x\cos(5yz) + 7x^2 + \sin(13z) + c$$

Trovo c per $U_{(0,0,0)} = 10$

$$12e^0\cos(0) + 7\cdot 0^2 + \sin(0) + c = 10$$

$$12 + c = 10 \implies c = -2$$

Determino $U_{(1,0,\frac{\pi}{26})}$

$$U = 12e^1\cos(0) + 7\cdot 1^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = 38.6193$$

Calcolare l'integrale di $f(x,y) = yx^8\cos(yx^9)$ su $R := [0,1]\times[1,3]$. Esprimere il risultato troncando a due decimali dopo la virgola.

Integrale doppio alla Riemann

$$\int_{[0,1]\times[1,3]} f(x,y)\, dx dy = \int_0^1\int_1^3 yx^8\cos(yx^9)\, dy dx = \int_1^3\int_0^1 yx^8\cos(yx^9)\, dx dy$$

$$yx^9 = u \qquad 9yx^8 dx = du \implies dx = \frac{du}{9yx^8}$$

$$\frac{1}{9}\int \cos(u)\, du$$

$$\left[\frac{1}{9}\sin(yx^9) - \frac{1}{9}\sin(yx^9)\right]_0^1 = \frac{1}{9}\sin(y)$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{9}\sin y \, dy = -\frac{1}{9}\left[\cos y\right]_1^3 = -\frac{1}{9}\left(\cos(3) - \cos(1)\right) = 0.17$$

Sia $f : D := [0,3] \times [0,3] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\forall (x,y) \in D \qquad \begin{cases} 4(x-3)^2 \text{ se } x > y, \\ 4(y-3)^2 \text{ se } x \leq y \end{cases}$$

Calcolare l'integrale

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Esprimere il risultato troncando a due decimali.

$$\int_0^3 \int_y^9 4(x-3)^2\,dx\,dy + \int_0^3 \int_x^3 4(y-3)^2\,dy\,dx = 54$$

QUIZ 5

Calcolare l'integrale iterato

$$\int_0^{4^5}\int_{\sqrt[5]{y}}^{4}\sqrt{x^6+1}\,dx\,dy$$

$y \in [0, 4^5]$

$\sqrt[5]{y} \le x \le 4$

$\sqrt[5]{y}$ può valere: minimo $\sqrt[5]{0} = 0$; massimo $\sqrt[5]{4^5} = 4$

quindi x può variare da 0 a 4 $\quad x \in [0, 4]$

Scrivo y compresa tra due funzioni di x

$$\sqrt[5]{y} \le x \Rightarrow y \le x^5 \Rightarrow 0 \le y \le x^5$$

$$\int_0^4\int_0^{x^5}\sqrt{x^6+1}\,dy\,dx = 29137.6673$$

Calcolare l'integrale sul disco di centro l'origine e raggio **3** della funzione

$$(x, y) \mapsto 3\,x\cos(xy)$$

0 per simmetria. Dato che il centro l'origine e il raggio è 5 integrando i contributi infinitesimi si annullano uno ad uno. Vale perchè la funzione è dispari.

Determinare l'area della regione definita in coordinate polari da $\rho \le \sqrt{\sin(4t)}$, $t \in [0, \pi/4]$.

Area di una regione delimitata da una curva in coordinate polari

$$\frac{1}{2}\int_a^b \rho^2(t)\,dt$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\sqrt{\sin(4t)}\right)^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin(4t)\,dt =$$

$u = 4t \qquad du = 4\,dt \Rightarrow dt = \frac{du}{4}$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin(u)\,du = \frac{1}{8}\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{8}(1+1) = \frac{1}{4} = 0.25$$

Siano $\varphi(u,v) := (9u + 1v, 4u + 7v)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ e E regione del piano di area 14. Quanto vale l'area di $\varphi(E)$?

$$\text{Jacobiana} = \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1(u,v) \\ \nabla \varphi_2(u,v) \end{pmatrix}$$

Area e Jacobiana

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad D = \varphi(E) \qquad \text{Area}(D) = \det(\varphi(u,v)) \cdot \text{Area}(E)$$

$$\begin{array}{ccc} & du & dv \\ |\varphi'(u,v)| = & \left(9 \right. & \left. 1 \right) \\ & \left(4 \right. & \left. 7 \right) \end{array} = 9 \cdot 7 - 1 \cdot 4 = 59$$

$$\text{Area}(D) = 59 \cdot 14 = 826$$

Calcolare, se esiste finito,

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B((0,0),1/3)} (x^2+y^2)^6 e^{-(x^2+y^2)^7}\, dx\, dy.$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B[(0,0), 1/3]} (x^2+y^2)^6 e^{-(x^2+y^2)^7} dxdy$$

$\mathbb{R}^2$ − palla raggio $\frac{1}{3}$ centro in $(0,0)$

Prima trovo il piano

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho \left(\rho^2 \cos^2\vartheta + \rho^2 \sin^2\vartheta\right)^6 e^{-\left(\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2 \sin^2\vartheta\right)^7} d\rho\, d\vartheta =$$

devo girare perché $b < a$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho^{13} e^{-\rho^{14}} d\rho\, d\vartheta = \frac{1}{14} \int_0^{2\pi} \int_0^{-\infty} e^u \, du\, d\vartheta = +\frac{1}{14} \int_0^{2\pi} \left[e^u\right]_0^{-\infty} d\vartheta =$$

$$-\rho^{14} = u \qquad -14\rho^{13} d\rho = du \qquad d\rho = -\frac{du}{14\rho^{13}}$$

$$= +\frac{1}{14} \int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta = \frac{\pi}{7} \quad (\text{Area piano})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1/3} \rho^{13} e^{-\rho^{14}} d\rho\, d\vartheta = -\frac{1}{14} \int_0^{2\pi} \left[e^{-\rho^{14}}\right]_0^{\frac{1}{3}} d\vartheta = -\frac{1}{14} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{3}^{14}} - 1 \, d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{14}\left(e^{-\frac{1}{3}^{14}} - 1\right) 2\pi = -\frac{1}{7}\pi\left(e^{-\frac{1}{3}^{14}} - 1\right) \quad (\text{Area palla})$$

$$\text{Tot area} = \frac{\pi}{7} - \left(-\frac{1}{7}\pi\left(e^{-\frac{1}{3}^{14}} - 1\right)\right) = 0.4487$$

Per $a > 0$ sia $f_a(x,y) = \frac{1}{(|(x,y)|)^{2a}}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. Tale funzione è illimitata attorno all'origine. Selezionare, se ve ne sono, TUTTI i valori di a per i quali l'integrale $\int_{B((0,0),1]} f_a(x,y)\,dx\,dy$ esiste finito.

Cambio in coordinate polari

$$2\pi \int_0^1 \rho \frac{1}{\rho^{2a}}\,d\rho = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-1}}\,d\rho$$

Teorema convergenza integrali di $\frac{1}{x^a}$ in $[0,1[$ converge a $a<1$

$$2a - 1 < 1 \Rightarrow a < 1$$

Calcolare l'integrale $\int_{B((0,0),7]} \sqrt{1+5(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^7 \rho \sqrt{1+5(\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta)}\,d\rho\,d\vartheta = 2\pi \int_0^7 \rho\sqrt{1+5\rho^2}\,d\rho =$$

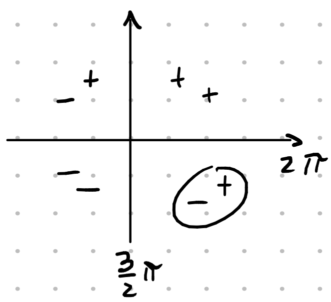
$$1+5\rho^2 = u \qquad 10\rho\,d\rho = du \qquad d\rho = \frac{du}{10\rho}$$

$$= 2\pi \int_1^{246} \cancel{\rho}\sqrt{u}\,\frac{1}{10\cancel{\rho}}\,du = \frac{1}{5}\pi \cdot \frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{246} = 1615.7668$$

Calcolare l'integrale iterato $\int_0^3 \int_{-\sqrt{3^2-x^2}}^0 e^{(x^2+y^2)/100}\,dy\,dx$.

$$0 \leq x \leq 3$$

$$-\sqrt{3^2-x^2} \leq y \leq 0$$



Cambio in coordinate polari

$$\frac{3}{2}\pi \leq \vartheta \leq 2\pi$$

$$-\sqrt{3^2-\rho^2\cos^2\vartheta} \leq \rho\sin\vartheta$$

$$3^2 - \rho^2\cos^2\vartheta \geq \rho^2\sin^2\vartheta \leq 0$$

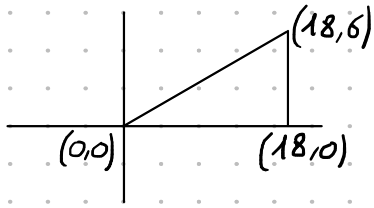
$$\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta \leq 9 \qquad \rho \leq 3 \qquad 0 \leq \rho \leq 3$$

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\int_0^3 \rho\, e^{\frac{\rho^2}{100}}\,d\rho\,d\vartheta = \left(2\pi - \frac{3}{2}\pi\right)\cdot 50 \cdot \int_0^{9/100} e^u\,du =$$

$$\frac{\rho^2}{100} = u \qquad \frac{1}{50}\rho\,d\rho = du \qquad d\rho = \frac{50}{\rho}\,du$$

$$= \left(2\pi - \frac{3}{2}\pi\right)\cdot 50 \cdot \left(e^{\frac{9}{100}} - 1\right) = 25\pi\cdot\left(e^{\frac{9}{100}} - 1\right) = 7.3964$$

Calcolare il volume del trapezoide di $f(x, y) = 3 + \cos(x^2)$ sopra il triangolo di vertici $(0, 0), (18, 0), (18, 6)$.



$x \in [0, 18]$

$(0,0) \qquad (18,6)$

$$\frac{x-0}{18-0} = \frac{y-0}{6-0} \qquad \frac{x}{18} = \frac{y}{6} \qquad y = \frac{x}{3} \quad \text{quindi} \quad 0 \leq y \leq \frac{x}{3}$$

$$\int_0^{18} \int_0^{\frac{x}{3}} 3 + \cos(x^2) \, dy \, dx = \int_0^{18} x + \frac{x\cos(x^2)}{3} \, dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{18} + \frac{1}{6}\left[\sin x^2\right]_0^{18} = 161.9326$$

Sia $D = \{(x, y) : 5 \leq xy \leq 9, \ 5 \leq y \leq 9\}$. Effettuando il calcolo dell'integrale

$$\int_D x\, y^8 \, dx \, dy$$

con il cambio di variabile $u = xy, v = y$, ci si riconduce ad un integrale del tipo

$$\int_5^9 \int_5^9 \ldots . \, du \, dv = \int_5^9 K u \, du$$

per una qualche costante K. Determinare K.

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y \end{cases} \qquad \begin{matrix} 5 \leq u \leq 9 \\ 5 \leq y \leq 9 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = \frac{u}{v} \\ y = v \end{matrix}$$

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{u}{v}, v\right) \qquad |\varphi'(u,v)| = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{v} - 0 = \frac{1}{v}$$

$$\int_D xy^8 \, dx dy = \int uv^7 \cdot \frac{1}{v} \, dv du = \int_5^9 \int_5^9 uv^6 \, dv du$$

$$= \int_5^9 u\left[\frac{v^7}{7}\right]_5^9 du = \int_5^9 u\left(\frac{9^8}{8} - \frac{5^8}{8}\right) du = \int_5^9 672120.5714\, u \, du$$

QUIZ 6

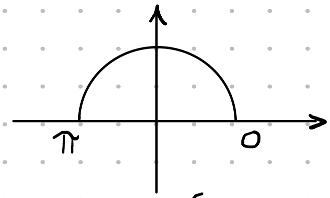
Calcolare il volume di

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 6^2, y \ge 0,\ 0 \le z \le y+2y^2\}$$

$$Vol\ \Omega = \int_\Omega dxdydz$$

Per la formula di riduzione per fili paralleli ottengo

$$\int_{\substack{x^2+y^2\le 6^2 \\ y\ge 0}} \int_0^{y+2y^2} dz\,dx\,dy = \int_{\substack{x^2+y^2\le 6^2 \\ y\ge 0}} y+2y^2\,dxdy$$



Cambio in coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

$$\int_0^\pi \int_0^6 (\rho\sin\vartheta + 2\rho^2\sin^2\vartheta)\,\rho\ d\rho d\vartheta = \int_0^\pi\int_0^6 \rho^2\sin\vartheta\ d\rho d\vartheta + 2\int_0^\pi\int_0^6 \rho^3\sin^2\vartheta\, d\rho d\vartheta =$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^6 \sin\vartheta\ d\vartheta + 2\int_0^\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^6 \sin^2\vartheta\ d\vartheta =$$

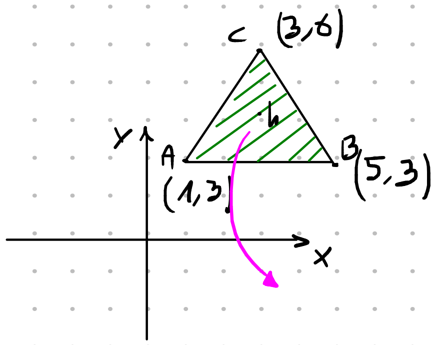
$$= 72\int_0^\pi \sin\vartheta\ d\vartheta + 648\int_0^\pi \sin^2\vartheta\ d\vartheta =$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= 72\left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi + 648 \cdot \frac{1}{2}\left[\vartheta\right]_0^\pi = 1161.80$$

Si consideri il triangolo T di vertici $(1,3)$, $(5,3)$, $(3,6)$ sul piano xy. Calcolare il volume del solido Ω che si ottiene facendo ruotare tale triangolo attorno all'asse delle x.

$$\text{Volume} = \text{area triangolo} \cdot y_b \cdot 2\pi = \frac{\overline{AB}\cdot h}{2} \cdot y_b \cdot 2\pi$$



y_b = distanza del baricentro dell'asse di rotazione

$$y_b = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} = \frac{3+3+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\text{Area triangolo} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$$

$$\text{Volume} = 6\cdot 4\cdot 2\pi = 150.7964$$

Sia $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x)=\sqrt{6x+2}$. Calcolare il volume del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare il trapezoide di f attorno all'asse delle x.

Per il teorema di Pappo-Guldino $Vol(\Omega) = 2\pi\int_D z\,dxdz$

$$\int_D z\,dxdz = \int_1^3\int_0^{\sqrt{6x+2}} z\,dz dx = \int_1^3 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{6x+2}} dx$$

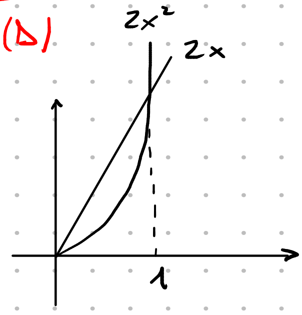
$$Vol(\Omega) = 2\pi\int_1^3 \frac{1}{2}(6x+2)\,dx = \pi\int_1^3 6x+2\ dx = \pi\left(\left[\frac{6x^2}{2}\right]_1^3 + \left[2x\right]_1^3\right) =$$

$$\pi\left(\left[3x^2\right]_1^3 + \left[2x\right]_1^3\right) = \pi\left(3\cdot 3^2 - 3 + 2\cdot 3 - 2\right) = 28\pi \approx 87.9645$$

Determinare l'ascissa del baricentro di

$$D = \{(x,y) : 2x^2 \le y \le 2x\}$$

il baricentro geometrico di G corrisponde a $\dfrac{\int_D x_i \, dx}{Area(D)}$



$$Area(D) = \int_0^1 \int_{2x^2}^{2x} dy\,dx = \int_0^1 2x - 2x^2 \, dx =$$

$$2x^2 = 2x$$
$$2x^2 - 2x = 0$$
$$2x(x-1) = 0$$
$$x = 0 \quad x = 1$$

$$= \left[x^2\right]_0^1 - \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 =$$

$$= 1 - 0 - \frac{2}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\int_D x\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{2x^2}^{2x} x\,dy\,dx = \int_0^1 x \int_{2x^2}^{2x} dy\,dx = \int_0^1 x\left(2x - 2x^2\right) dx = \int_0^1 2x^2 - 2x^3 \, dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$x_{baricentro} = \frac{1/6}{1/3} = 0.5$$

Siano $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le \frac{1}{2},\, 0 \le z \le 8,\, 15x^2 \le y \le \frac{15}{4}\}$ e $f(x,y,z) = xze^{zy^2}$. L'integrale di f su Ω si può ricondurre all'integrale di una funzione $g(z)$ della terza variabile z su $[0,8]$. Calcolare $g(1)$.

$$\int_\Omega xze^{zy^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^8 \int_D xze^{zy^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^8 \int_0^{1/2} \int_{15x^2}^{15/4} xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz =$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 15x^2 \le y \le \frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in \left[0, \frac{15}{4}\right] \\ x \in \left[0, \sqrt{\frac{y}{15}}\right] \end{cases} \qquad 0 \le x \le \sqrt{\frac{y}{15}} \le \frac{1}{2}$$

$$= \int_0^8 \int_0^{15/4} \int_0^{\sqrt{y/15}} xze^{zy^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^8 \int_0^{15/4} \frac{\frac{y}{15} ze^{zy^2}}{2}\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{30} \int_0^8 \left[\frac{e^{zy^2}}{2}\right]_0^{15/4} dz =$$

$$u = zy^2 \qquad du = 2yz\,dy \Rightarrow dy = \frac{du}{2yz} \qquad \int \cancel{yz}\, e^u \frac{du}{2\cancel{yz}} = \int \frac{e^u}{2}\,du$$

$$= \frac{1}{30} \int_0^8 \left(\frac{e^{\frac{225}{16}z}}{2} - \frac{1}{2}\right) dz =$$

$$= \int_0^8 \underbrace{\frac{1}{60}\left(e^{\frac{225}{16}z} - 1\right)}_{g(z)} dz$$

$$g(1) = \frac{1}{60}\left(e^{\frac{225}{16}} - 1\right) = 21336.0766$$

Sia $f(x,y,z)$ funzione continua su $\mathbb{R}^3$. L'integrale iterato

$$\int_{-12}^{12}\int_{-\sqrt{12^2-x^2}}^{\sqrt{12^2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{50-(x^2+y^2)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

è l'integrale di f su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$?

? NO   Domini normali?

se $x=12 \Rightarrow y=0$ ma $144 \le z \le -94$ imp.

$x\in[-12,12]$ $x^2+y^2\le 12^2$ $x^2+y^2\le z\le 50-(x^2+y^2)$

$x^2+y^2\le 25 \to \rho=\sqrt{25}$

$-\sqrt{12^2-x^2}\le y\le\sqrt{12^2-x^2}$

Calcolare il volume di $\Omega=\{(x,y,z):\, x^2+y^2\le 78:\, x^2+y^2\le z\le 6x+4y\}$.

$Vol(\Omega)=\int_\Omega dx\,dy\,dz$

$x^2+y^2\le 78$

$(x-3)^2+(y-2)^2\le 13$

$x^2+y^2\le 6x+4y$

$x^2+y^2-6x-4y\le 0$

completamento del quadrato

$(y-2)^2 \quad (x-3)^2$

$x^2+y^2-6x-4y+4+9-13\le 0$

$(x-3)^2+(y-2)^2-13\le 0$

$$\begin{cases} x-3=\rho\cos\theta \\ y-2=\rho\sin\theta \end{cases}$$

$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\le 13$

$\rho^2\le 13 \Rightarrow \rho\le\sqrt{13}$ $\rho\in[0,\sqrt{13}]$

$$\iint_{(x-3)^2+(y-2)^2-13\le 0}\int_{x^2+y^2}^{6x+4y} dz\,dy\,dx = \iint_{(x-3)^2+(y-2)^2-13\le 0}\int_{\rho^2}^{13} 6x+4y-x^2-y^2\,dy\,dx =$$

$(3x-x^2)+(3x+2y)+(2y-y^2) = -x(x-3)+(3x+2y)-y(y-2)$

$-(\rho\cos\theta+3)(\rho\cos\theta)+3\rho\cos\theta+9+2\rho\sin\theta+4-(\rho\sin\theta+2)(\rho\sin\theta)$

$-\rho^2\cos^2\theta-\cancel{3\rho\cos\theta}+\cancel{3\rho\cos\theta}+13+\cancel{2\rho\sin\theta}-\rho^2\sin^2\theta-\cancel{2\rho\sin\theta}$

$13-\rho^2$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{13}}(13-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\cdot\left(\left[\frac{13\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{13}}-\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{13}}\right)=$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{13\cdot 13}{2}-\frac{(\sqrt{13})^4}{4}\right)=265.4645$$

In $\mathbb{R}^3$ sia D il sottoinsieme del piano xy definito da
$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 3 + \cos(14y),\ y \in [0,\pi]\}$.
Calcolare il solido ottenuto ruotando D di 2π attorno all'asse y.

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$2\pi \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{3+\cos(14y)} x \, dx\,dy = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \frac{9 + \cos^2(14y) + 6\cos(14y)}{2} \, dy =$$

devo integrare sull'asse opposto a quello di rotazione

$$= \pi \cdot \left(9 \cdot \pi + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(28y)\, dy + 18 \int_0^{\pi} \cos(14y)\, dy \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(9\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{56}\underbrace{\left(\cancel{\sin(28\pi) - \sin 0}\right)}_{=0} + 18\underbrace{\left(\cancel{\sin 14\pi - \sin 0}\right)}_{=0} \right) =$$

$$= 9\pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 = 93.7612$$

In $\mathbb{R}^3$ un sottoinsieme D del semipiano xz, $zx \ge 0$ di area pari ad 7 viene fatto ruotare attorno all'asse x: si ottiene un solido di volume pari a 9. Determinare l'ordinata (cioè la componente lungo l'asse z) del baricentro di D.

$$Vol(D) = Area(D) \cdot z_D \cdot 2\pi$$

$$z_D = \frac{Vol(D)}{Area(D) \cdot 2\pi} = \frac{9}{7 \cdot 2\pi} = 0.2046$$

Calcolare l''area della superficie parametrica

$$p(u,v) = (2(u+v), 10v, 2u) \quad u^2 + v^2 \le 64$$

Superficie parametrica $p(x,y) = (x, y, f(x,y))$ $x,y \in D$

$$Area(p) = \int_D |p_x(x,y) \times p_y(x,y)| \, dx\,dy$$

$$p(u,v) = (2(u+v), 10v, 2u)$$

$$p_u = (2, 0, 2) \qquad p_v = (2, 10, 0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$a \cdot 0 + 4b + 20c - 0c - 20a - 0b$$

$$(-20, 4, 20)$$

$$|p_u \times p_v|(u,v) = \sqrt{(-20)^2 + 4^2 + 20^2} = 4\sqrt{51}$$

$$\int_{u^2+v^2 \le 64} 4\sqrt{51}\, du\,dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{8} 4\sqrt{51}\, \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \cdot 4\sqrt{51} \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^8 = 5743.6775$$

Calcolare l'area della superficie $z = 12 + 7y + \frac{1}{6}x^6$, $0 \le y \le x^9$, $0 \le x \le 1$.

Superficie cartesiana $z = f(x,y)$ $x,y \in D$, calcolo la sua area con

$$Area(p) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}\, dx\,dy$$

$$\nabla f = (x^5, 7) \qquad |\nabla f| = \sqrt{(x^5)^2 + 7^2} = \sqrt{x^{10} + 49}$$

$$Area(p) = \int_0^1 \int_0^{x^9} \sqrt{x^{10} + 50}\, dy\,dx = \int_0^1 x^9 \sqrt{x^{10} + 50}\, dx = \frac{1}{10}\int_{50}^{51} \sqrt{u}\, du = 0.7106$$

$$u = x^{10} + 50 \qquad dx = \frac{du}{10x^9}$$

QUIZ 7

Formula per integrale superficiale 8.6

Calcolare l'integrale della funzione $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$(x,y,z) \mapsto \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sulla superficie ottenuta ruotando attorno all'asse delle z la curva $x = 2z^2$, con $1 \le z \le 5$.

ruoto attorno a z

$x = 2z^2 \qquad 1 \le z \le 5$

$z = t \implies x = 2t^2 \qquad t \in [1,5] \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$p(t,\theta) = (r_1(t)\cos\theta, r_1(t)\sin\theta, r_2(t)) \qquad r_1(t) = x \qquad r_2(t) = t = z$

$p(t,\theta) = (2t^2\cos\theta, 2t^2\sin\theta, t)$

Derivo per t e per θ

$p_t = (4t\cos\theta, 4t\sin\theta, 1) \qquad p_\theta = (-2t^2\sin\theta, 2t^2\cos\theta, 0)$

Prodotto vettore

$$p_t \times p_\theta = \begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ 4t\cos\theta & 4t\sin\theta & 1 & 4t\cos\theta & 4t\sin\theta \\ -2t^2\sin\theta & 2t^2\cos\theta & 0 & -2t^2\sin\theta & 2t^2\cos\theta \end{array}$$

$$= 0 + b(-2t^2\sin\theta) + c(8t^3\cos^2\theta) + c(8t^3\sin^2\theta) + a(-2t^2\cos\theta)$$

$$= (-2t^2\cos\theta, -2t^2\sin\theta, 8t^3(\cos^2\theta + \sin^2\theta))$$

$$|p_t \times p_\theta| = \sqrt{(-2t^2\cos\theta)^2 + (-2t^2\sin\theta)^2 + (8t^3(\cos^2\theta+\sin^2\theta))^2} =$$

$$= \sqrt{4t^4\cos^2\theta + 4t^4\sin^2\theta + 64t^6} = \sqrt{4t^4 + 64t^6}$$

$$= \sqrt{4t^4(1+16t^2)} = 2t^2\sqrt{1+16t^2}$$

$$\mu(t) = \frac{t}{\sqrt{4t^4}} = \frac{1}{2t} \qquad x = 2t^2\cos\theta \qquad y = 2t^2\sin\theta \qquad z = t$$

$$\text{Area}(p) = 2\pi \int_1^5 \frac{1}{2t}\, 2t^2 \sqrt{1+16t^2}\, dt = 1041.9518$$

Calcolare l'area del trapezoide della funzione $f(x,y) = 5x$ sulla curva $y = 5x^2$ con $x \in [0,5]$.

$x = t$

1 - Parametrizzo la curva $\quad p(t) = (t, 5t^2) \implies p'(t) = (1, 10t)$

2 - Modulo della derivata $\quad |p'(t)| = \sqrt{1^2 + 100t^2}$

$$\text{Area}(\text{Trap}(f(x,y))) = \int_0^5 5t\sqrt{1+100t^2}\, dt = 2084.5668$$

Integrale curvilineo $\quad \displaystyle\int_r \mu\, ds = \int_a^b \mu(r(t))\, |r'(t)|\, dt$

Determinare l'area della superficie cilindrica

$$x^2+y^2=7y$$

compresa tra i piani $z=y$ e $z=0$.

$x^2+y^2=7y$ base del cilindro

$0 \leq z \leq y$ altezza //

$x^2+y^2-7y+(3,5)^2-(3,5)^2=0 \Rightarrow x^2+(y-3,5)^2=(3,5)^2 \Rightarrow R=3,5$

$K=y-3,5 \Rightarrow y=K+3,5$

$x^2+K^2=(3,5)^2$ K diventa $R\sin t$ con le coor. cil.

$z=K+3,5$ con $z=y$

$P(t,z)=(R\cos t, R\sin t, z)$

$P_t=(-R\sin t, R\cos t, 0)$ $\qquad P_z=(0,0,1)$

$|P_t \times P_z|=R$

$$\text{Area (cilindro)}=\int_0^{2\pi}\int_0^{R\sin t+R} R\, dz\, dt = R\int_0^{2\pi} R\sin t+R\, dt = 76.9690$$

La temperatura su una sfera di raggio 8 è data dalla funzione $T(x,y,z)=10+\frac{2}{8}\sqrt{x^2+y^2}$. Calcolare la media di T sulla sfera data da

$$\frac{\int_{\partial B(0,8)} T(x,y,z)\, d\sigma}{\text{Area } \partial B(0,8)}.$$

(al numeratore c'è l'integrale superficiale di T sulla sfera di raggio 8).

$\rho=8$

$\text{Area } \partial B_{(0,8)}=4\pi\rho^2=256\pi$

Coordinate polari sferiche

$P(\phi,\theta)=(R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)$ $\qquad \phi\in[0,\pi]$ $\quad \theta\in[0,2\pi]$

$=(8\sin\phi\cos\theta, 8\sin\phi\sin\theta, 8\cos\phi)$

$$T(P_{\phi,\theta})=10+\frac{2}{8}\sqrt{(8\sin\phi\cos\theta)^2+(8\sin\phi\sin\theta)^2}=10+\frac{2}{8}\sqrt{64\sin^2\phi\cos^2\theta+64\sin^2\phi\sin^2\theta}$$

$$\int_{\partial B(0,8)} T(x,y,z)\, d\sigma=\int_D \mu(P(\phi,\theta))\,|P_\phi\times P_\theta(\phi,\theta)|\, d\phi\, d\theta=$$

$$=\int_D 10+\frac{2}{8}\sqrt{64\sin^2\phi\cos^2\theta+64\sin^2\phi\sin^2\theta}\cdot \underbrace{R^2}_{=64}\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(10+2\sin\phi)\,64\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}640\sin\phi\, d\phi\, d\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}128\sin^2\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=1280\pi\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\phi\, d\phi}_{=2}+256\pi\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2\phi\, d\phi}_{=\pi/2}=128\pi(20+\pi)$$

$$\text{media di } T=\frac{128\pi(20+\pi)}{256\pi}=11.5707$$

Si fa ruotare di 2π attorno all'asse z la curva cartesiana del semipiano $xz, x \geq 0$ definita da $z = \sqrt[3]{12x}$, $x \in [0,5]$. Determinarne l'area.

$z = \sqrt[3]{12x} \quad x \in [0,5]$ ruota attorno a z

deve diventare il parametro

$z = \sqrt[3]{12x} \Rightarrow z^3 = 12x \Rightarrow x = \frac{z^3}{12} \qquad z = t \qquad x = \frac{t^3}{12}$

$r(t) = \left(\frac{t^3}{12}, t\right) \qquad r'(t) = \left(\frac{t^2}{4}, 1\right) \qquad$ con $t \in [0, \sqrt[3]{60}]$

$\text{Area} = 2\pi \cdot x_r \cdot \text{Lunghezza}(r) = 2\pi \int_r x \, ds =$

$= 2\pi \int_0^{\sqrt[3]{60}} r_1(t) \, |r'(t)| \, dt = 2\pi \int_0^{\sqrt[3]{60}} \frac{t^3}{12} \cdot \sqrt{1^2 + \frac{t^4}{16}} \, dt =$

$u = 1 + \frac{t^4}{16} \qquad du = \frac{t^3}{4} dt \Rightarrow dt = \frac{4}{t^3} du \qquad u = 1, \quad u = 1 + \frac{60^{4/3}}{16}$

$= 2\pi \int_1^{1+\frac{60^{4/3}}{16}} \frac{\cancel{t^3}}{\cancel{12}_3} \cdot \sqrt{u} \, \frac{\cancel{4}}{\cancel{t^3}} du = 8\pi \int_1 \sqrt{u} \, du = 85.3035$

Facciamo ruotare l'ellisse E contenuta nel semipiano xy con $y > 0$

$$E = \left\{(x,y) : \frac{(x-10)^2}{5^2} + \frac{(y-9)^2}{1^2} = 1\right\}$$

attorno all'asse x, si ottiene il sostegno S di una superficie parametrica. Determinare $y > 0$ affinché il punto

$(10 + \frac{5}{2}, y, 9 + \frac{1}{2})$

appartenga a S.

?

$P\left(10 + \frac{5}{2}, y, 9 + \frac{1}{2}\right)$ con $y > 0$

$(x_\theta, y_\theta) = (10 + 5\cos\theta, 9 + \sin\theta)$

$P(\theta, \varphi) = (10 + 5\cos\theta, (9 + \sin\theta)\cos\varphi, (9 + \sin\theta)\sin\varphi) \qquad \theta, \varphi \in [0, 2\pi]$

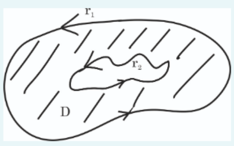
$$\begin{cases} 10 + \frac{5}{2} = 10 + 5\cos\theta \\ y = (9 + \sin\theta)\cos\varphi \\ 9 + \frac{1}{2} = (9 + \sin\theta)\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ y = (9 + \sin\theta)\cos\varphi \\ \sin\varphi = \frac{9 + \frac{1}{2}}{9 + \sin\theta} \end{cases}$$

$\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\varphi = \frac{9 + \frac{1}{2}}{9 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad y = 2{,}6624$

Si consideri un campo $F = (F_1, F_2)$ di classe C^1 sulla chiusura del dominio Stokiano D in figura. L'area di D è uguale ad 6;
$\nabla F_1(x,y) = (3x^2 \log(6x^2 + 6) + 3y^2, 6xy + 12), \nabla F_2(x,y) = (6xy + 6, \arctan(6y) + 3x^2)$.

Si sa che $\int_{r_1} F \cdot T \, ds = 4$; quanto vale l'integrale di F su r_2 con l'orientamento indicato? Troncare ali primi due decimali dopo la virgola.



$\partial_x F_2(x,y) = 6xy + 6$

$\partial_y F_1(x,y) = 6xy + 12$

$\int_{\partial^+ D} F \cdot T = \int_{\partial^+ D} F_1(x,y) \, dx + F_2(x,y) \, dy = \int_{\partial^+ D} \partial_x F_2(x,y) - \partial_y F_1(x,y) \, dx\,dy =$

$= \int \cancel{6xy} + 6 - \cancel{6xy} - 12 = -6 \int_{\partial^+ D} \text{Area}(D) = -6 \cdot 6 = -36$

$\int_{\partial^+ D} F \cdot T = \int_{r_1} F \cdot T \, ds - \int_{r_2} F \cdot T \, ds \Rightarrow \int_{r_2} F \cdot T \, ds = \int_{r_1} F \cdot T \, ds - \int_{\partial^+ D} F \cdot T \, ds = 4 + 36 = 40$

Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y) = (5x + \log(y^2+1), y^2 - x^3)$$

uscente dalla regione D compresa tra il cerchio $x^2+y^2=1$ e l'ellisse $x^2+5^2y^2=50$.

$$\int_{\partial^+ D} F\,ds = \int_D \operatorname{div} F\,dx\,dy \quad (\text{Th. divergenza})$$

funzione dispari

$$\operatorname{div} F = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 = 5 + 2y$$

$$\int_D \operatorname{div} F\,dx\,dy = \int_D 5+2y\,dx\,dy = \int_D 5\,dx\,dy + \cancel{\int 2y\,dx\,dy} = 5\int_D dx\,dy = 5 \cdot \text{Area}(D)$$

$$\text{Area}(D) = \text{Area ellisse} - \text{Area cerchio} = 18\pi - \pi = 9\pi$$

$$5 \cdot 9\pi = 141.3716$$

$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \begin{cases} x^2 = 50 \\ y^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sqrt{50} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 5\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{matrix}$$

$$\text{Area ellisse} = \pi \cdot x \cdot y = 10\pi$$

Calcolare il flusso di $F(x,y) = (3x, 7x - 7y)$ attraverso la curva $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

Def 9.1

$$\int_0^{\pi/2} \det\begin{pmatrix} F_1(\cos t, \sin t) & -\sin t \\ F_2(\cos t, \sin t) & \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} 3\cos^2 t + \sin t(7\cos t - 7\sin t) = 0.3584$$

$$\begin{pmatrix} 3\cos t & -\sin t \\ 7\cos t - 7\sin t & \cos t \end{pmatrix} = 3\cos^2 t + \sin t(7\cos t - 7\sin t)$$

Calcolare il flusso di $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ uscente da $\partial B(0,4)$.

$$r(t) = (\rho\cos t, \rho\sin t) \qquad \rho = 4 \qquad t \in [0, 2\pi]$$
$$= (4\cos t, 4\sin t)$$

$$\int_{\partial B} F_1\,dy - F_2\,dx = \int_{\partial B} \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx =$$

$$= \int_{\partial B} \frac{4\cos t}{16} 4\cos t - \frac{4\sin t}{16}(-4\sin t)\,dt = \int_{\partial B} \cancel{\frac{16}{16}} \cos^2 t + \cancel{\frac{16}{16}} \sin^2 t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi = 6.2831$$

QUIZ 8

Sia $y(x)$ la soluzione di $y'(x)+y(x)=x$; $y(2)=2$. Determinare $y(1)$.

$$\begin{cases} y'(x)+a\,y(x)=x \\ y(2)=2 \end{cases}$$

soluzione generale di $y'+a(t)y=b(t)$ è

$$y(t)=B(t)e^{-A(t)}+Ce^{-A(t)}$$

- A primitiva di a
- B primitiva di be^{A}

$$A'=a=1 \implies A(x)=\int 1\,dx=x$$

$$B=be^{A}=xe^{x} \implies B(x)=\int xe^{x}\,dx=xe^{x}-\int e^{x}dx=xe^{x}-e^{x}$$

$$\begin{cases} y(x)=(xe^{x}-e^{x})e^{-x}+Ce^{-x} \implies 2=(2e^{2}-e^{2})e^{-2}+Ce^{-2} \implies 2=1+Ce^{-2} \\ y(2)=2 \end{cases}$$

$$C=e^{2}$$

$$y(1)=(e-e)e+e^{2}e^{-1}=0+\frac{e^{2}}{e}=e$$

Sia y soluzione del problema di Cauchy $y'=\frac{e^{x}}{y}$, $y(0)=1$. Determinare $y(\log 5)$.

Variabili separabili

$$\begin{cases} y'(x)=\frac{e^{x}}{y(x)} \\ y(0)=1 \end{cases} \implies y'(x)\,y(x)=e^{x}$$

$$\int \frac{dy(x)}{\cancel{dx}}\,y(x)\,\cancel{dx}=\int e^{x}\,dx$$

$$\int y(x)\,dy=\int e^{x}dx$$

$$\frac{y^{2}}{2}=e^{x}+c \xrightarrow{\text{con } x=0} \frac{1^{2}}{2}=e^{0}+c \implies c=-\frac{1}{2}$$

$$y(\log 5)=\sqrt{2e^{\log 5}-1}=\sqrt{2\cdot 5-1}=\sqrt{9}=3$$

Si consideri il problema di Cauchy

$$y' = \frac{8x+5y}{32y-5x}, \quad y(0)=1.$$

Dopo aver mostrato che i punti del grafico $(x, y(x))$, al variare di x nel dominio della soluzione y appartengono all'insieme di livello $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ di una opportuna funzione di due variabili, determinare $x > 0$ tale che $(x, x) \in \Sigma$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x+5y}{32y-5x} \iff (32y-5x)\,dy = (8x+5y)\,dx$$

$$(8x+5y)\,dx - (5x-32y)\,dy = 0 \qquad \partial_y F_1 = 5$$

$$\nabla F = (8x+5y,\ 5x-32y) \qquad \partial_x F_2 = 5$$

Irrotazionale $\Rightarrow$ conservativo

$\int dx$

$$U^1_{(x,y)} = 4x^2 + 5yx + c$$

$$U^2_{(x,y)} = -16y^2 + 5xy + c \quad \Rightarrow \quad U_{(x,y)} = 4x^2 - 16y^2 + 5xy + c$$

$\int dy$

$$U_{(0,1)} = 0 - 16 + 0 = c \Rightarrow c = -16 \qquad U_{(x,y)} = 4x^2 - 16y^2 + 5xy - 16$$

per $(x,x) = 4x^2 - 16x^2 + 5x^2 - 16$

$$-7x^2 = -16 \qquad x = \sqrt{\frac{16}{7}} = 1.5118$$

In quanti modi si possono distribuire 52 carte da gioco a 4 giocatori in modo che ciascuno abbia 13 carte?

Permutazioni

$$\frac{52!}{(13!)^4}$$

$52!$ = modi per distribuirle tutte

$(13!)^4$ = modi per ogni giocatori

In quanti modi 8 persone possono sedersi in fila se ci sono 4 coppie e ognuno è vicino al proprio partner?

$$n = 2^4 \cdot 4! = 384$$

$4!$ → posizione delle coppie

2^4 → ordine delle due persone nella coppia

$\boxed{x\,o}\ \boxed{o\,x}$ moltiplicato per le 4 coppie

$4!$ l'ordine delle coppie

QUIZ 9

Un'urna contiene infinite palline numerate con gli interi 1, 2, 3, 4,..... La pallina $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ può essere estratta con probabilità $\frac{6}{7^k}$. Determinare, estraendo una di queste palline, di estrarre un multiplo di 3.

Convergenza probabilità?

Es. 2.12

$|\Omega| = +\infty \qquad P_{(k)} = \frac{6}{7^k} \qquad P_{(\text{multiplo di } 3)} = ?$

Verifico che converge con criterio del rapporto $\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{7^k} = 6\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{7^{j+1}}\right) = 6\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots\right) = \frac{6}{7}\left(\underbrace{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots}_{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{7^j} = \frac{7}{6}}\right) = \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{6}} = 1$$

$$P_{(3)} + P_{(6)} + P_{(9)} + \dots = 6\left(\frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^9} + \dots\right) = 6 \cdot \frac{1}{7^3}\left(1 + \left(\frac{1}{7^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{7^3}\right)^3 + \dots\right) =$$

$$= \frac{6}{7^3} \cdot \frac{1}{1 - 1/7^3} = \frac{6}{\cancel{7^3}} \cdot \frac{\cancel{7^3}}{7^3 - 1} = \frac{6}{7^3 - 1} = 0.0175$$

Tra le 240 persone che fanno questo quiz, 83 fanno gli esercizi da soli, gli altri li fanno in compagnia. Scelte tre persone a caso, calcolare la probabilità che almeno una di queste faccia gli esercizi da sola.

$|\Omega| = 240 \qquad S = 83 \qquad G = 157 \qquad 3 \text{ scelte}$

$\Omega = \binom{240}{3}$

$$P_{(x==1)} = \frac{\binom{157}{2}\binom{83}{1}}{\binom{240}{3}} = \frac{\frac{157 \cdot 156 \cdot \cancel{155!}}{\cancel{155!} \cdot 2} \cdot \frac{83 \cdot \cancel{82!}}{\cancel{82!} \cdot 1}}{\frac{240 \cdot 239 \cdot 238 \cdot \cancel{237!}}{\cancel{237!} \cdot 3 \cdot 2}} =$$

$$P_{(x==2)} = \frac{\binom{157}{1}\binom{83}{2}}{\binom{240}{3}} = \frac{\frac{157 \cdot \cancel{156!}}{\cancel{156!} \cdot 1} \cdot \frac{83 \cdot 82 \cdot \cancel{81!}}{\cancel{81!} \cdot 2}}{\frac{240 \cdot 239 \cdot 238 \cdot \cancel{237!}}{\cancel{237!} \cdot 3 \cdot 2}} =$$

$$P_{(x==3)} = \frac{\binom{83}{3}}{\binom{240}{3}} = \frac{\frac{83 \cdot 82 \cdot 81 \cdot \cancel{80!}}{\cancel{80!} \cdot 3 \cdot 2}}{\frac{240 \cdot 239 \cdot 238 \cdot \cancel{237!}}{\cancel{237!} \cdot 3 \cdot 2}} =$$

$$P = P_{(x==1)} + P_{(x==2)} + P_{(x==3)} = 0.7219$$

Nel Veneto il 35% delle persone adulte non legge mai un quotidiano, il 27% fa regolarmente attività sportiva e il 23% non legge mai un quotidiano e non fa regolarmente attività sportiva.

Scelta casualmente una persona adulta, calcolare la probabilità che non legga mai un quotidiano se fa regolarmente attività sportiva.

$P_{NL} = 0.35$ $\quad P_S = 0.27$ $\quad P_{(NL \cap NS)} = 0.23$ $\quad P_{(NL|S)} = ?$

$P_{(NL \cap S)} = (NL) - (NL \cap NS) = 0.35 - 0.23 = 0.12$

Non legge − Non legge ∩ No sport = Non legge ∩ Sport

$$P_{(NL|S)} = \frac{NL \cap S}{S} = \frac{0.12}{0.27} = 0.4444$$

Abbiamo due dadi indistinguibili. Uno è equilibrato, l'altro quando viene lanciato dà 6 nel 16% dei casi. Prendiamo a caso uno dei due dadi e lo lanciamo. Se non esce 6, qual è la probabilità di aver preso il dado equilibrato?

D_1: prob. uniforme $\quad D_2$: prob. non uniforme $\quad P_{(6D_2)} = 0.16$ $\quad P_{(RD_2)} = 0.84$

$|\Omega| = 12$ $\quad |D| = 2$

P dado equilibrato sapendo che non è uscito 6

$D_1 \cap R$ (prendo 1 e non esce 6)

Prob. di scegliere dado equilibrato: $P_{(D1)} = \frac{1}{2} = 0.5$

Prob che non esca 6 in D_1 $\quad P_{(R,D1)} = \frac{5}{6}$

$$P_R = \frac{P_{(R,D1)} + P_{(R,D2)}}{|D|} = \frac{\frac{5}{6} + 0.84}{2}$$

$$P_{(R|D_1)} = \frac{P_{(R,D1)} P_{(D1)}}{P_{(R)}} = \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{\frac{5}{6} + 0.84}{2}\right)} = 0.4980$$

Si deve formare una squadra di calcetto formata da 3 donne e 2 uomini scelti da un gruppo di 8 donne e di 8 uomini. Calcolare la probabilità che Francesca e Giulia non siano contemporaneamente nella squadra e che Alberto sia uno dei componenti della squadra.

Squadra = 3 donne e 2 uomini $|U| = 8$ $|D| = 8$

$P_{(A + F \circ G)} = ?$

Numero di squadre senza Francesca e Giulia

$$\binom{8}{3} - \binom{6}{1} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} - \frac{6!}{5! \cdot 1} = 50$$

combinazioni totali

Francesca e Giulia stessa squadra e prendo una donna a caso per completare

Combinazioni Alberto e uno a caso $\binom{8}{1} = 7$

$|\Omega| = \binom{8}{3}\binom{8}{2} = 1568$

$E = \binom{8}{1}\left[\binom{8}{3} - \binom{6}{1}\right] = 350$

$P_{(E)} = \frac{E}{|\Omega|} = 0.2232$

La probabilità di fare bene il TOLC di ingresso a Ingegneria è pari a 0.13. La probabilità di finire gli studi in 3 anni è uguale a 0.72. Chi supera bene il TOLC ha una probabilità 0.39 di finire gli studi entro il terzo anno. Se uno studente si laurea entro il terzo anno, qual è la probabilità che abbia fatto bene il TOLC di ingresso?

$P_{(F|A)} = \frac{P_{(A|F)} \cdot P_{(F)}}{P(A)}$

$P_{(T)} = 0.13$ $P_{(3)} = 0.72$ $P_{(3|T)} = 0.39$

$P_{(T|3)} = \frac{P_{(3|T)} \cdot P_{(T)}}{P_{(3)}} = \frac{0.39 \cdot 0.13}{0.72} = 0.0704$

Per un dato candidato alle presidenziali di uno stato straniero, che si svolgono in tre turni, la probabilità di superare il I turno è del 39%. Una volta superato il primo turno, la probabilità di superare il secondo è del 65%, e la probabilità di vincere all'ultimo turno è del 61%. Qual è la probabilità che il candidato vinca le elezioni?

$P_{(I)} = 0.39$ $P_{(II|I)} = 0.65$ $P_{(III|(II|I))} = 0.61$

$P_{(vittoria)} = 0.39 \cdot 0.65 \cdot 0.61 = 0.1546$

In un condominio il 32% è soddisfatto, il 68% non lo è. In una assemblea partecipano il 40% dei soddisfatti e il 66% degli insoddisfatti. Un condomino che partecipa all'assemblea è scelto a caso. Qual è la probabilità che si tratti di un condomino soddisfatto?

$P_S = 0.32$ $P_{NS} = 0.68$ $P_{(A S)} = 0.60$ $P_{(A \cup S)} = 0.66$

$P_{(S \text{ scelto a caso})} = \frac{0.32 \cdot 0.68}{0.32 \cdot 0.60 + 0.68 \cdot 0.66} =$

$= \frac{X}{|\Omega|} = \frac{\text{soddisfatto}}{\text{soddisfatto} + \text{non soddisf.}}$

Supponiamo che, per i test antigenici rapidi per COVID-19, si abbia

P(+ | Malato) = 0.761 e P(- | Sano) = 0.994.

Le persone che fanno questo particolare tipo di test sono però più a rischio della popolazione generale, poiché tipicamente lo fanno in quanto esposte a un contagiato: non si possono quindi usare le consuete statistiche nazionali per P(Malato).

In una farmacia, però, si osserva una probabilità totale, sugli antigenici rapidi fatti presso di loro, pari a P(+) = 0.01. Usando la formula della probabilità totale (detta anche della partizione) su P(+), trovare per quale valore di P(Malato) si ottiene P(+) =0.01.

Formula partizioni: $P_{(+)} = P_{(+|m)} \cdot P_{(m)} + P_{(+|s)} \cdot P_{(s)}$

$$P_{(m)} + P_{(s)} = 1 \Rightarrow P_{(m)} = 1 - P_{(s)}$$

$$P_{(+)} = P_{(+|m)} \cdot P_{(m)} + P_{(+|s)} \cdot P_{(s)} \Rightarrow P_m = \frac{P_{(+)} - P_{(+|s)} P_{(s)}}{P_{(+|m)}} = 0.0052$$

Un mazzo di carte contiene 19 carte Nere e 14 carte rosse. Dopo averlo mescolato, si scelgono a caso tre carte, una dopo l'altra, senza rimetterle nel mazzo. Qual è la probabilità che la terza carta sia Nera?

$$|E| = \binom{19}{1} \cdot \binom{32}{1} \cdot \binom{31}{1} =$$

$$|\Omega| = 33 \cdot 32 \cdot 31 =$$

$$P = \frac{|E|}{|\Omega|} = 0.5727$$

Il canale 1 di FAMP ha 171 studenti, il canale 2 ne ha 156. Si scelgono a caso 5 studenti dall'unione dei due canali. Qual è la probabilità che il gruppo formato abbia almeno tre studenti del canale 1?

$TOT = 327 \quad C1 = 171 \quad C2 = 156 \quad 5$ scelte

$$P_{(x==3)} = \frac{\binom{171}{3}\binom{156}{2}}{\binom{327}{5}} = \frac{\quad}{\frac{327!}{(322! \cdot 5!)}} =$$

$$P_{(x==4)} = \frac{\binom{171}{4} \cdot \binom{156}{1}}{\binom{327}{5}} = \frac{\quad}{\frac{327!}{(322! \cdot 5!)}} =$$

$$P_{(x==5)} = \frac{\binom{171}{5}}{\binom{327}{5}} = \frac{\frac{171!}{166! \cdot 5!}}{\frac{327!}{(322! \cdot 5!)}} =$$

$$P = P_{(x==3)} + P_{(x==4)} + P_{(x==5)} = 0.5632$$

Usando la formula di Stirling, qual è, approssimativamente , il numero di decimali di $145!$?
rispondere con un numero intero (tolleranza di ± 1).

Formula di Stirling

$(\log_{10} K)+1$

$$(\log_{10} 145!)+1 = \log_{10}\left(\sqrt{2\pi \cdot 145}\left(\frac{145}{e}\right)^{145}\right)+1 = 252.9054$$

Dire in quanti modi si possono distribuire 12 carte distinte a 4 giocatori N, S, E, W (senza che l'ordine delle carte conti per un singolo giocatore) in modo tale che:

- N abbia 2 carte;
- S abbia 4 carte;
- E abbia 3 carte;
- W abbia 3 carte.

Esprimere il risultato in forma di numero intero

$$\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3} = 277200$$

Un'urna è composta da 18 palline numerate da 1 a 18. Si estraggono una ad una senza reimmissione e si mettono in fila in posti numerati da 1 a 18. In quanti modi si può fare in modo che le pari vadano sulle caselle pari e le dispari vadano sulle caselle dispari?

Esprimere il risultato con un intero

$$9!\cdot 9! = 13168189$$

Siano C e D due eventi di uno spazio campionario (Ω, P) con $P(C) = 0.61, P(D) = 0.7$, e $P(C \cap D) = 0.14$. Quanto vale $P(C^c \cap D)$?

$$P(C^c \cap D) = P_{(D)} - P_{(C\cap D)}$$

$$P_{(D)} - P_{(C\cap D)} = 0.7 - 0.14 = 0.56$$

QUIZ 10

Si consideri l'esperimento aleatorio che consiste nel lanciare una moneta non truccata due volte. Si descriva lo spazio campionario Ω e si considerino:

- A_1 l'evento di avere testa al primo lancio;
- A_2 l'evento di avere testa al secondo lancio;
- A_3 l'evento di avere testa una ed una sola volta.

Allora gli eventi A_1, A_2, A_3:

Select one:

- a. sono a due a due indipendenti ma non indipendenti ✓
- b. alcune coppie di eventi non sono indipendenti fra loro
- c. sono indipendenti
- d. altro

Due eventi sono indipendenti quando il verificarsi di uno non modifica la probabilità di verificarsi dell'altro

cioè quando $P(A|B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

Posso schematizzare le due condizioni con $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\rightarrow P_{(A \cdot B)}$

$$|\Omega| = \{ (T,C), (C,T), (T,T), (C,C) \} = 4$$

$$|A_1| = \{ (T,C), (T,T) \} \Rightarrow P_{(A_1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$|A_2| = \{ (C,T), (T,T) \} \Rightarrow P_{(A_2)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$|A_3| = \{ (T,C), (C,T) \} \Rightarrow P_{(A_3)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

verifico indipendenza

$$P_{(A_1 \cdot A_2)} = \frac{1}{4} = P_{(A_1)} \cdot P_{(A_2)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{indipendenti}$$

$$P_{(A_2, A_3)} = \frac{1}{4} = P_{(A_2)} \cdot P_{(A_3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{indipendenti}$$

$$P_{(A_1, A_3)} = \frac{1}{4} = P_{(A_1)} \cdot P_{(A_3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{indipendenti}$$

$$P_{(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)} = 0 \neq P_{(A_1)} \cdot P_{(A_2)} \cdot P_{(A_3)} = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{dipendenti}$$

A_1, A_2 e A_3 non possono verificarsi insieme

Agli studenti vengono proposti 6 quiz con 4 risposte a scelta ciascuno. Il docente distrattamente ha messo online i quiz di un insegnamento più avanzato, sicché gli studenti rispondono a caso.

Qual è la probabilità che lo studente risponda correttamente ad almeno 4 quiz (compreso solo a 4)?

Rispondere nella forma 0.abcd troncando ai primi quattro decimali dopo la virgola.

Binomiale

$$\binom{n}{k} \underbrace{p^k}_{\text{vittoria}} \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{sconfitte}}$$

6 quiz con $P_{giusto} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$P_{(x \geq 4)} = P\left(B\left(6,\tfrac{1}{4}\right) = 4\right) + P\left(B\left(6,\tfrac{1}{4}\right) = 5\right) + P\left(B\left(6,\tfrac{1}{4}\right) = 6\right) =$$

$$= \binom{6}{4}(0{,}25)^4(0.75)^2 + \binom{6}{5}(0{,}25)^5(0.75)^1 + \binom{6}{6}(0{,}25)^6(0.75)^0 =$$

$$= 0.0375$$

Un imballaggio di arance deve contenere frutti di diametro simile. La probabilità che un'arancia abbia un diametro accettabile è pari a 0.958. Calcolare la probabilità che su 100 arance ve ne siano almeno 98 adatte all'imballaggio supponendo l'indipendenza dei diametri delle arance.

$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\binom{100}{98} \cdot 0.958^{98}(1-0.958)^2 + \binom{100}{99} 0.958^{99}(1-0.958) + 0.958^{100} =$$

$$= 0.2060$$

Un imballaggio di arance deve contenere frutti di diametro simile. La probabilità che un'arancia abbia un diametro accettabile è pari a 0.929. Calcolare la probabilità che su 100 arance ve ne siano almeno 98 adatte all'imballaggio, utilizzando una opportuna variabile aleatoria di **Poisson**, supponendo che i diametri delle arance siano indipendenti.

Scrivere il risultato troncando a 5 decimali dopo la virgola.

$X_n \sim B_n\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

Formula Poisson

$P_n = \frac{\lambda}{n}$ $\quad P_{(X_n=k)} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ per $n \rightarrow +\infty$

$X \sim B(\underset{n}{100}, \underset{p}{0.929})$ probabilità arancia adatta su 100 totali

$P_{(adatta)} = 0.929$ $\quad P_{(non\ adatta)} = 1-0.929 = 0.071$ $\quad \lambda_{non\ adatta} = n \cdot P_{(non\ adatta)} = 7,1$

$P_{(tot)} = P_{(0\ non\ adatte)} + P_{(1\ non\ adatte)} + P_{(2\ non\ adatte)} =$

$$= e^{-7,1} \cdot \frac{(7,1)^0}{0!} + e^{-7,1} \cdot \frac{(7,1)^1}{1!} + e^{-7,1} \cdot \frac{(7,1)^2}{2!} = 0.02768$$

Una fabbrica produce motori elettrici. Un motore può essere, indipendentemente da un altro, difettoso con probabilità 0.01.

Qual è la probabilità che un campione di 300 motori contenga esattamente 5 motori difettosi? 0.10099 ✓

Approssimare la probabilità che un campione di 300 motori contenga esattamente 5 motori difettosi usando una opportuna variabile di Poisson. 0.10082 ✓

Binomiale

$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Poisson

$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$$\binom{300}{5} \cdot 0.01^5 (1-0.01)^{295} = \frac{300 \cdot 299 \cdot 298 \cdot 297 \cdot 296 \cdot \cancel{295!}}{\cancel{295!} \cdot 5!} \cdot 0.01^5 \cdot 0.99^{295}$$

$$= 0.10099$$

$$\lambda = 0.01 \cdot 300 = 3$$

$$P_{(X_n=5)} = e^{-3} \frac{3^5}{5!} = 0.10082$$

Un'urna contiene i numeri da 1 a 23. Pesco a caso un numero e lo reinserisco nell'urna; ne pesco un'altro e lo reinserisco nell'urna, e così via. Calcolare la probabilità che il numero 10 esca per la prima volta al dodicesimo tentativo.

Variabile geometrica

$P_{(10)} = \frac{1}{23}$ $\quad P_{(X=10)} = P(1-P)^{11} = \frac{1}{23}\left(1-\frac{1}{23}\right)^{11} = 0.0266$

Si distribuiscono a caso 1134 caramelle uguali a 100 bambini, indipendentemente una dall'altra. Calcolare la probabilità che Mario riceva esattamente 11 caramelle.

Troncare il risultato a 5 decimali

Variabile Binomiale

$$P_{(\text{caramella})} = \frac{1}{100}$$

$$\binom{1134}{11} \cdot 0.01^{11} \cdot (1-0.01)^{1134-11} = 0.11933$$

Si considerano due mazzi di carte Rosse e Nere . Il mazzo A è normale (26 Rosse, 26 Nere), mentre il mazzo B ha 25 carte rosse e 29 carte nere.

Una procedura permette di scegliere uno dei due mazzi, il mazzo A viene scelto con probabilità 0.51.

Una volta scelto il mazzo, si estrae una prima carta dal mazzo, la si rimette poi nel mazzo e si mescola. Si estrae poi una seconda carta a caso da quel mazzo.

Qual è la probabilità che la seconda carta sia rossa, sapendo che la prima è rossa, ma non sapendo quale dei due mazzi e' stato scelto?

$$|A| = \{26, 26\} = 52$$

$$|B| = \{29, 25\} = 54$$

$$P_A = 0.51 \qquad P_B = 0.49$$

prob rossa / prob mazzo

$$P_{(E)} = P_{(E|F_1)} P_{(F_1)} + P_{(E|F_2)} P_{(F_2)}$$

Formula della partizione

Prob primo tentativo rossa $P_{(R_1)} = \frac{26}{52} \cdot 0,51 + \frac{25}{54} \cdot 0.49$

Prob 2 tentativi rossa

$$P_{(R_2 R_1)} = P_{(R_2 R_1 | A)} P_{(A)} + P_{(R_2 R_1 | B)} P_{(B)} = \frac{26}{52} \cdot \frac{26}{52} \cdot 0.51 + \frac{25}{54} \cdot \frac{25}{54} \cdot 0.49 =$$

$$= 0.2325$$

Applico Th. di Bayes per ricavare $P_{(R_2, R_1)}$

$$P_{(R_1 R_2)} = P_{(R_2|R_1)} \cdot P_{(R_1)} \iff P_{(R_2|R_1)} = \frac{P_{(R_2 R_1)}}{P_{(R_1)}}$$

$$P_{(R_2|R_1)} = \frac{0.2325}{\frac{51}{106}} = 0.4825$$

Si mettono a caso 190928 oggetti in 24713 cassetti, indipendentemente uno dall'altro. Approssimare, usando una opportuna variabile di **Poisson**, la probabilità che il primo cassetto contenga esattamente 8 oggetti.

$K = 9$ Poisson

$$p = \frac{1}{24713} \qquad \lambda = \frac{1}{24713} \cdot 190928 = 7.725$$

$$P_{(8)} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!} = 0.1389$$

In un laboratorio c'è una sequenza (infinita!) di computer numerati 1, 2, 3, 4,.... Ognuno di questi può essere infettato da un virus, indipendentemente dall'altro, con probabilità 0.07. Qual è la probabilità che testandoli uno ad uno, occorra testare almeno i primi 22 per individuare la presenza di un virus (cioè che i primi 21 non siano infettati)?

Geometrica per $K \to +\infty$

$X \sim Ge(0.06)$

$$P_{(X > 21)} = (1-0.07)^{21} = 0.2178$$

In alcuni telefilm polizieschi, si sente dire "il criminale ha questa inusuale caratteristica... trovare questa persona e avrete il vostro uomo". Supponiamo che ogni dato individuo abbia questa inusuale caratteristica con probabilità 9.1×10^{-6}, indipendentemente dagli altri individui, e che la città in questione abbia 3.9 milioni di abitanti. Supponendo che l'ispettore trovi una tale persona, approssimare con una opportuna variabile discreta la probabilità che ce ne sia almeno un'altra.

$\lambda = np \qquad p = 9.1 \cdot 10^{-6} \qquad n = 3'900'000$

$\lambda = n \cdot p = 35.49$

con $K=1 \qquad P_{(\text{solo } 1)} \quad e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^K}{K!} \Rightarrow e^{-35.49} \cdot 35.49 = 1.370 \cdot 10^{-14}$

$$P(\text{almeno un altro}) = 1 - P_{(\text{solo } 1)} = 0.9999$$

La ruota della roulette ha 38 settori: 18 Neri, 18 Rossi e 2 Verdi.

Puntando sul rosso in 5 giocate consecutive, si perdono soldi se si vince al massimo due volte, si guadagnano soldi se si vince almeno 3 volte.

Qual è la probabilità di perdere i soldi?

Binomiale

$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$|\Omega| = 38 \qquad R = 18R \qquad V = 2 \qquad N = 18$

$$P_{rosso} = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} = 0.4736$$

$$P_X(0) = \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 = (1-p)^5$$

$$P_X(1) = \binom{5}{1} p^1 (1-p)^4 = 5p(1-p)^4$$

$$\underbrace{P_X(2)}_{\text{tutti i casi in cui perdo soldi}} = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$$

$$P_{(L)} = P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) = \left(1-\frac{9}{19}\right)^5 + 5 \cdot \frac{9}{19} \cdot \left(1-\frac{9}{19}\right)^4 + 10 \cdot \left(\frac{9}{19}\right)^2 \left(1-\frac{9}{19}\right)^3 =$$
$$\approx 0.5492$$

QUIZ 11

In una zona sismica del pianeta, in un mese ci sono in media 9 terremoti di magnitudo maggiore di 4 (i mesi sono assunti di uguale durata). Se durante due mesi se ne sono verificati 19, qual è la probabilità che 10 di questi si siano verificati nel primo mese?

variabile di Poisson

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$\lambda = 9$ X = terremoti in 2 mesi $X \sim P_o(2\lambda) \Rightarrow 19 = X_o = x_1 + x_2 = 10 + 9$

$$P_{(X=19)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-18}\,18^{19}}{19!} = 0.0886$$

prob 19 terremoti in 2 mesi

$$P_{(x_1=10 \wedge x_2=9)} = \frac{e^{-9}\,9^{10}}{10!}\cdot\frac{e^{-9}\cdot 9^9}{9!} = 0.0156$$

prob 10 il primo mese e 9 il secondo

$$P_{(x_1=7 \mid x_2=10)} = \frac{P_{(x_1 \wedge x_2)}}{P_{(X=17)}} = 0.1761$$

18 persone estraggono una ad una delle palline senza reimmissione da un'urna che contiene inizialmente 66 palline Rosse e 119 palline Nere. (quindi la persona 1 estrae 2 palline che non vengono rimesse dentro, la persona 2 ne estrae 2 dalle rimanenti, ecc...) Determinare il numero atteso di persone che pescano due palline dello stesso colore.

X = # persone che pescano 2 palline dello stesso colore

$$x = \begin{cases} 1 & \text{stesso colore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\binom{66}{2} = 2145$$

$$\binom{119}{2} = 7021$$

$$\binom{185}{2} = 17020$$

$$P = \frac{\binom{66}{2} + \binom{119}{2}}{\binom{185}{2}} = 0.5385 = E[x_i]$$

$$E[x] = \sum_{i=1}^{18} E[x_i] = 18 \cdot E[x_i] = 9.6937$$

Una variabile aleatoria discreta X assume i valori $\{1, 2, \ldots, 16\}$ con densità discreta pari a

$$p_X(k) = \frac{24.5 - k}{256}, \quad k = 1, \ldots, 16.$$

Determinare la varianza di X

$$Var[x] = E[x^2] - \mu_x^2$$

$$E[x] = \mu_x = \frac{1}{256}\sum_{k=0}^{16} k(24,5-k) = \frac{459}{64}$$

$$E[x^2] = \frac{1}{256}\sum_{k=0}^{16} k^2(24,5-k) = \frac{4539}{64}$$

$$Var[x] = E[x^2] - \mu_x^2 = \frac{4539}{64} - \left(\frac{459}{64}\right)^2 = 19.4860$$

Un mazzo ha 9 carte Rosse e 5 carte Nere. Se ne estraggono tre. Qual è la varianza del numero di carte Rosse estratte?

$X_i = \#$ carte rosse estratte $\quad X = \begin{cases} 1 & \text{se rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad 9R + 5N = 14$ TOT

X_i non indipendente (ad ogni estrazione diminuisce il numero di carte)

$Var[x] = E[x^2] - \mu_x^2$

$$E[x] = \sum_{i=0}^{3} x_i p_x(x_i) = \cancel{0 \cdot P(x==0)} + 1 \cdot P(x==1) + 2 \cdot P(x==2) + 3 \cdot P(x==3) =$$

$$= 1 \cdot \frac{45}{182} + 2 \cdot \frac{45}{91} + 3 \cdot \frac{3}{13} = \frac{27}{14}$$

$$P(x==1) = \frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{14}{3}} = \frac{\frac{9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2}}{\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{\cancel{11!} \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{45}{182}$$

$$P(x==2) = \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{14}{3}} = \frac{\frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}}}{\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{\cancel{11!} \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{45}{91}$$

$$P(x==3) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 3 \cdot 2}}{\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{\cancel{11!} \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{3}{13}$$

$$E[x^2] = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 p_x(x_i) = \cancel{0 \cdot P(x==0)} + 1^2 \cdot P(x==1) + 2^2 \cdot P(x==2) + 3^2 \cdot P(x==3) =$$

$$= 1 \cdot \frac{45}{182} + 4 \cdot \frac{45}{91} + 9 \cdot \frac{3}{13} = \frac{783}{182}$$

$$Var[x] = E[x^2] - \mu_x^2 = \frac{783}{182} - \left(\frac{27}{14}\right)^2 = 0.5828$$

Supponiamo che il numero giornaliero di persone ricoverate per attacchi violenti di asma in un dato ospedale sia una variabile aleatoria di Poisson di media 37. In giornate in cui l'inquinamento dell'aria aumenta, la distribuzione di attacchi su un giorno diventa una legge di Poisson con media 45. Se in un anno non bisestile(quindi formato da 365 giorni) 45 giorni sono di alto inquinamento, qual è la varianza dei ricoveri per asma in quell'anno?

Assumiamo che il numero giornaliero di persone ricoverate sia indipendente da ciò che succede nelle altre giornate.

Variabile aleatoria di Poisson

$X \sim P_o(37) \quad 37 = \lambda_x = np = E[x] = Var[x]$

$Y \sim P_o(45) \quad 47 = \lambda_y = np = E[y] = Var[y]$

$Var[x+y] = 320 \cdot Var[x] + 45\, Var[y] + 2\, Cov[xy] = 320 \cdot 37 + 45 \cdot 45 = 13865$

Il cosiddetto test del DNA non fa altro che misurare la lunghezza di K geni, senza controllare le basi azotate che li compongono. Per ognuno di tali geni, la probabilità che due dati individui presentino una lunghezza uguale viene assunta come pari a $1/10$. Un'altra ipotesi che viene comunemente fatta è che le lunghezze di geni diversi siano indipendenti l'una dall'altra. Supponiamo di misurare la lunghezza di $K = 7$ geni da un campione di DNA trovato su una scena del crimine. Supponendo di avere un database di 15134228 individui, calcolare il numero medio di individui che si troveranno con il test del DNA che corrisponde al campione incriminato.

$P(\text{lunghezza uguale}) = \frac{1}{10} = p$ indipendenti $E[X] = ?$

$B(\underbrace{15134228}_{=n}, 10^{-7}) \approx P_o(7)$ $\lambda = np = 1{,}5134228$

Per la var. aleatoria di Poisson $\Rightarrow E[X] = \lambda = np = 1{,}5134228$

Due giocatori disputano una serie di partite che termina solo quando uno dei due arriva a vincerne due. Supponiamo che ogni partita venga vinta, indipendentemente dalle altre, dal primo giocatore con probabilità 0.65 e dall'altro con probabilità 1-0.65. Sia N la variabile aleatoria uguale al numero di partite disputate.

Calcolare la densità discreta di N e dedurne il valore atteso.

$P_1 = (0.65)$ $P_2 = 0.35$ $N = \#$ partite disputate

Uso la densità discreta

$P_N(2) = P_1 \cdot P_1 + P_2 \cdot P_2 = 0.65 \cdot 0.65 + 0.35 \cdot 0.35 = 0.545$

$P_N(3) = 2 \cdot P_1^2 \cdot P_2 + 2 \cdot P_2^2 \cdot P_1 = 0.455$

$E[N] = 2 \cdot 0.545 + 3 \cdot 0.455 = 2.455$

Sia X variabile di Poisson di parametro 0.7. Sia poi $g(x) = (0.7)^x$ per ogni $x \geq 0$. Calcolare il valore atteso di $g(X)$.

Valore atteso composta $E[g(x)] = \sum g(x) P(X==x)$

$X \sim P_o(0.7)$ $\lambda = np = 0.7$ $E[g(x)] = ?$

$E[g(x)] = \sum_{x=0}^{\infty} \lambda^x e^{-\lambda} \frac{\lambda}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2x}}{x} = e^{-\lambda} e^{\lambda^2} = e^{\lambda^2 - \lambda} = 0.8106$

Sia X una variabile aleatoria su uno spazio con probabilità (Ω, P) la cui funzione di distribuzione è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -7, \\ 1/29, & -7 \leq x < 0, \\ 8/87, & 0 \leq x < 10, \\ \frac{8}{58} + \frac{21}{58}\frac{x-10}{8}, & 10 \leq x < 18 \\ 1, & x \geq 18. \end{cases}$$

Quanto vale $P(X \in]0, 18[)$?

$P(x<18) = F_X(18^-) - F_X(0) = \frac{8}{58} + \frac{21}{58}\frac{x-10}{8} - \frac{8}{87} =$

$= \lim_{x \to 18^-} \frac{8}{58} + \frac{21}{58}\frac{18-10}{8} - \frac{8}{87} = 0.4080$

Quali delle seguenti funzioni **NON** possono essere funzioni di distribuzione di una *variabile continua*? Ci possono essere più risposte corrette: selezionarle tutte!

1) $F(x) = \begin{cases} \frac{5}{10}e^x \text{ se } x < 0, \\ 1 - \frac{5}{10}e^{-x} \text{ se } x \geq 0; \end{cases}$

2) $F(x) = \begin{cases} \frac{5}{10}e^x \text{ se } x < 0, \\ 1 - \frac{9}{10}e^{-x} \text{ se } x \geq 0; \end{cases}$

3) $F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(9x) + \frac{1}{2};$

4) $F(x) = \frac{9}{\pi}\arctan(x);$

5) $F(x) = \begin{cases} \frac{5}{10}e^x \text{ se } x < 0, \\ \frac{5}{10}e^{-x} \text{ se } x \geq 0. \end{cases}$

- [ ] 1
- [x] 2
- [ ] 3
- [x] 4
- [x] 5

faccio limite dx e sx

se sono uguali $\Rightarrow$ funzione continua

QUIZ 12

Il numero di automobili che passa al casello autostradale è descritta da un Processo di Poisson di intensità 747.7 all'**ora**. Qual è la probabilità che, ad un dato istante, la prima automobile passi dopo 0.11 **minuti**?

Processo di Poisson

$X \sim Exp(\lambda)$ $X =$ # auto al minuto

$747.7\ \text{auto/ora} = 12.46\ \text{auto/min}$ $P(T > 0.11) = e^{-12.46 \cdot 0.11} = 0.2539$

Sia X variabile uniforme sull'intervallo $[1, 3]$. Calcolare il valore atteso della variabile $\exp(3X - 3)$.

Valore atteso V.A. continua : $E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$

$$E[e^{3x-3}] = \int_1^3 e^{3x-3}\, f_x(x)\, dx =$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{(3-1)} \cdot e^{3x-3}\, dx = 67.0714$$

Sia X variabile esponenziale di **media** (non parametro !) 3. Determinare il **valore atteso** di $\exp(-8X + 7)$. (Notazione: $\exp(x) = e^x$)

$E[x] = \frac{1}{\lambda} = 3 \implies \lambda = \frac{1}{3}$

$$x = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)$ con

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

Composta di funzioi continue

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_x(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-8t+7} \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t}\, dt$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-8t+7-\frac{1}{3}t}\, dt = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{25}{3}t+7}\, dt = 63.8653$$

Il periodo di quarantena per una certa malattia varia tra i 3 e gli 14 giorni dal contagio. Il tempo che intercorre tra il contagio e l'apparizione dei sintomi è descritto da una variabile aleatoria continua X la cui densità su quell'intervallo è data da (t è espresso in giorni)

$$f(t) = \begin{cases} k(t-3)(14-t), & t \in [3,14] \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

per qualche $k \in \mathbb{R}$. Determinare la probabilità che i sintomi appaiano entro 9 giorni dal contagio.

Esempio su formulario

$$\int_3^{14} k(t-3)(14-t) = 1$$

$$k\int_3^{14} 14t - 42 - t^2 + 3t = 1$$

$$k\left(\left[\frac{17t^2}{2}\right]_3^{14} - 42[x]_3^{14} - \frac{1}{3}[t^3]_3^{14}\right) = 1$$

$$k\left(\frac{17}{2}(14^2-3^2) - 42(14-3) - \frac{1}{3}(14^3-3^3) + \frac{3}{2}(14^2-3^2)\right) = 1$$

$$k\left(\frac{3179}{2} - 462 - \frac{2717}{3}\right) = 1$$

$$-\frac{1331}{6}k = 1 \Rightarrow k = \frac{6}{1331}$$

$$\int_3^9 \frac{6}{1331}(t-3)(14-t) = 0.5679$$

La durata, in chilometri, di un pneumatico, è una variabile aleatoria espressa in **migliaia** di chilometri, la cui densità continua è data da

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x/46}, x > 0, \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

per qualche $k \in \mathbb{R}$. Determinare la probabilità che il pneumatico resista almeno 36 mila chilometri.

$$P(x>k) = 1 - P(x<k)$$

$$P(x>36) = ?$$

$$\int_0^{+\infty} ke^{-x/46}\,dx = 1$$

$$k\left[-46e^{-\frac{x}{46}}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$k = \frac{1}{46}$$

$$P(x>36) = 1 - P(x<36) = 1 - \int_0^{36} \frac{1}{46} e^{-\frac{x}{46}}\,dx = 0.4572$$

I risultati di un test universitario sono distribuiti con una variabile normale di media 69 e deviazione standard 10. Qual è la soglia di punteggio da assegnare affinché la probabilità di fallire al test sia la più vicina al 10.03%?

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

$\mu = 69 \quad \sigma = 10$

$X \sim N(\overset{\mu}{69}, \overset{\sigma^2}{100})$

$X = \mu + \sigma Z$

$P(X \leq K) = 0.1003$

$P(\mu + \sigma Z \leq K) = 0.1003$

$P\left(Z \leq \frac{K-\mu}{\sigma}\right) = 0.1003$

$\phi\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right) = 0.1003$

$\frac{K-\mu}{\sigma} = -1.28$

$1 - 0.1003 = 0.8997$

$K = -1.28 \cdot 10 + 69 = 56.2$

Sia X variabile normale di media 5 e deviazione standard 7.9. Calcolare la probabilità che $X \in [3.4, 5.7]$.

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

$\mu = 5 \quad \sigma = 7.9$

$P(3.4 \leq X \leq 5.7) = P(5.7) - P(3.4)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X = \mu + \sigma Z$

$P(X \leq 5.7) = P(\mu + \sigma Z \leq 5.7) =$

$= P\left(Z \leq \frac{5.7-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{5.7-\mu}{\sigma}\right)$

$= \phi(0.08) = 0.5319$

$P(3.4 \leq X) = 1 - P(X \leq 3.4) = 1 - P\left(Z \leq \frac{3.4-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \phi(0.20) =$

$= 1 - 0.5793$

$P(3.4 \leq X \leq 5.7) = 0.5319 + 0.5793 - 1 = 0.1112$

Un autovelox misura la velocità delle auto in tangenziale di Padova dove il limite è di 88 km/ora: chi supera i 88.1 km/ora prende la multa. Le velocità delle auto sono distribuite normalmente con media di 88 km/ora e deviazione standard di 13 km/ora. Qual è la probabilità che un'automobilista che passa davanti all'autovelox prenda la contravvenzione?

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

$\mu = 88 \qquad \sigma = 13$

$P(X \geq 88.1) = ?$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X = \mu + \sigma Z$

$P\left(Z \geq \frac{88.1 - 88}{13}\right) = P\left(Z \geq \frac{0.1}{13}\right)$

$1 - P\left(Z \geq \frac{0.1}{13}\right) = 1 - \phi\left(\frac{0.1}{13}\right)$

$\phi\left(\frac{0.1}{13}\right) \approx 0.01$

$1 - 0.5040 = 0.4969$

La durata di una pila per orologi è una variabile aleatoria continua di media 117 ore e deviazione standard σ ore. Usando il Teorema Centrale del Limite calcolare, approssimativamente, il minimo valore di σ affinché utilizzando 277 pile si possa garantire il funzionamento dell'orologio per almeno 32673 ore con una probabilità superiore a 0.1271. Non usare la correzione di continuità.

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

$\mu = 117 \qquad \sigma = ? \qquad n = 277$

$a = 32673$

$P(X > 32673) \geq 0.1271$

$P(X < 32673) = 1 - P(X > 32673) = 1 - 0.1271$

$= 0.8729$

$\phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 0.8729$

$z = 1.14$

$\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = 1.14$

$\sigma = \sqrt{\left(\frac{32673 - 277 \cdot 117}{1.14^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{277}} = 13.9142$

In un esperimento di telepatia, una persona scelta a caso da un computer tra quattro individui effettua una telefonata ad uno sperimentatore. Qual è la probabilità che lo sperimentatore indovini correttamente chi lo sta chiamando per almeno 1161 volte su 4765 esperimenti effettuati scegliendo a caso uno dei quattro interlocutori? [redacted] utilizzare la correzione di continuità.

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

$K = 1161 \quad n = 4765 \quad p = \frac{1}{4} = 0.25$

$X \sim B(n,p) \approx N(np, np(1-p))$

$N(1191.25, 893.4375)$

$P(X \geq 1161) = 1 - P(X \leq 1161) =$

$= 1 - P(1191.25 + \sqrt{893.4375}\, Z \leq 1161)$

$= 1 - P(Z \leq -1.01)$

$= 1 - (1 - P(Z \leq 1.01)) =$

$= \cancel{1} - \cancel{1} + \phi(1.01) = 0.8438$

Un gioco elettronico fa uscire 3 valori:

- 1 con probabilità 1/2
- 2 con probabilità 1/4
- 3 con probabilità 1/4

Si effettuano un certo numero n di giocate indipendenti e si sommano i punteggi ottenuti. Determinare il minimo n naturale affinché la somma dei punti ottenuti sia maggiore o uguale a $n \times 1.69$ con probabilità maggiore o uguale a 0.9114. Non usare la correzione di continuità.

Rispondere con un numero intero (es. 198); tolleranza di ± 10.

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

$E[X] = \mu = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$E[X^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

$Var[X] = E[X^2] - \mu^2 = \frac{11}{16}$

$Var[X] = \sigma^2 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{11}{16}}$

$\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{11}{16}}} \rightarrow \frac{n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{n\sqrt{n}}{\cancel{n}}$

$P(\Sigma x_i \geq \underbrace{n \cdot 1.69}_{a}) = 1 - P(\Sigma x_i \leq n \cdot 1.69) = 1 - \phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \geq 0.9114$

$= 1 - \phi\left(\frac{1.69\sqrt{n} - 1.75\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{11}{16}}}\right) \geq 0.9114$

$= 1 - \phi\left(-\frac{0.06\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{11}{16}}}\right) \geq 0.9114 \qquad 1 - 1 + \phi(\ldots) \geq 0.9114$

$\frac{0.06\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{11}{16}}} \geq 1.35$

$n = \left(\frac{1.35 \cdot \sqrt{\frac{11}{16}}}{0.06}\right)^2 \simeq 348$

QUIZ 13

Siano X ed Y due variabili aleatorie. La variabile X assume i valori -2,-1,0,1; la variabile Y assume i valori 0,1,2. La densità congiunta $p_{(X,Y)}$ vale:

$$p_{(X,Y)}(-2,0) = 1/37, \quad p_{(X,Y)}(-1,0) = 3/37, \quad p_{(X,Y)}(0,0) = 5/37, \quad p_{(X,Y)}(1,0) = 5/37,$$
$$p_{(X,Y)}(-2,1) = 2/37, \quad p_{(X,Y)}(-1,1) = 4/37, \quad p_{(X,Y)}(0,1) = 1/37, \quad p_{(X,Y)}(1,1) = 4/37,$$

$$p_{(X,Y)}(-2,2) = 1/37, \quad p_{(X,Y)}(-1,2) = 2/37, \quad p_{(X,Y)}(0,2) = 2/37, \quad p_{(X,Y)}(1,2) = ?.$$

Dopo aver trovato il valore di $p_{(X,Y)}(1,2)$, indicare qui sotto il valore di $P(XY \leq 0 \mid X > -2)$.

$p(x,y)(1,2) = ? \qquad P(XY \leq 0 \mid X > -2) = ?$

$p_X(-2) = \frac{6}{37} \qquad p_X(-1) = \frac{9}{37} \qquad p_X(0) = \frac{8}{37} \qquad p_X(1) = \frac{9}{37} + X$

$p_Y(0) = \frac{16}{37} \qquad p_Y(1) = \frac{11}{37} \qquad p_Y(2) = \frac{5}{37} + Y$

$\sum p_X = 1 \implies p(x)(-2) + p(x)(-1) + p_X(0) + p_X(1) = 1 \implies$

$\frac{6}{37} + \frac{9}{37} + \frac{8}{37} + \frac{9}{37} + X = 1 \implies X = 1 - \frac{30}{37} = \frac{7}{37}$

$\sum p_Y = 1 \implies p(y)(0) + p_Y(1) + p_Y(2) = 1 \implies$

$\frac{16}{37} + \frac{11}{37} + \frac{5}{37} + Y = 1 \implies Y = 1 - \frac{30}{37} = \frac{7}{37}$

$p_X = p_Y = p(x,y)(1,2) = \frac{7}{37}$

$$\begin{array}{cccc} \cancel{p(-2,0)} & p(-1,0) & p(0,0) & p(1,0) \\ \cancel{p(-2,1)} & p(-1,1) & p(0,1) & p(1,1) \\ \cancel{p(-2,2)} & p(-1,2) & p(0,2) & p(1,2) \end{array}$$

$$P(XY \leq 0 \mid X > -2) = \frac{P(XY \leq 0 \cap X > -2)}{P(X > -2)} = \frac{p(-1,0)+p(-1,1)+p(-1,2)+p(0,0)+p(0,1)+p(0,2)+p(1,0)}{p(-1,0)+p(-1,1)+p(-1,2)+p(0,0)+p(0,1)+p(0,2)+p(1,0)+p(1,1)+p(1,2)} =$$

$$= \frac{\frac{22}{\cancel{37}}}{\frac{33}{\cancel{37}}} = \frac{22}{33} = 0{,}6666$$

Siano X ed Y due variabili aleatorie. La variabile X assume i valori -2,-1,0,1; la variabile Y assume i valori 0,1,2. La densità congiunta $p_{(X,Y)}$ vale:

NO

NO $p_{(X,Y)}(-2,0) = 1/39, \quad p_{(X,Y)}(-1,0) = 3/39, \quad p_{(X,Y)}(0,0) = 5/39, \quad p_{(X,Y)}(1,0) = 5/39,$

$\rightarrow$ $p_{(X,Y)}(-2,1) = 2/39, \quad p_{(X,Y)}(-1,1) = 4/39, \quad p_{(X,Y)}(0,1) = 1/39, \quad p_{(X,Y)}(1,1) = 4/39,$

$\rightarrow$ $p_{(X,Y)}(-2,2) = 1/39, \quad p_{(X,Y)}(-1,2) = 2/39, \quad p_{(X,Y)}(0,2) = 2/39, \quad p_{(X,Y)}(1,2) = 9/39.$

Calcolare la covarianza di X, Y.

$$Cov[x,y] = E[x,y] - \mu_x \mu_y = E[x,y] - E[x]\,E[y]$$

$$E[x] = \sum x\, p_x(x) \quad \text{dove} \quad p_x(x) = \sum_{x=x} p_{x,y}(x,y)$$

$$-2(p(-2,0)+p(-2,1)+p(-2,2)) - 1(p(-1,0)+p(-1,1)+p(-1,2)) + 1(p(1,0)+p(1,1)+p(1,2)) =$$

$$= -2\left(\frac{1}{39}+\frac{2}{39}+\frac{1}{39}\right) - 1\left(\frac{3}{39}+\frac{4}{39}+\frac{2}{39}\right) + 1\left(\frac{5}{39}+\frac{4}{39}+\frac{9}{39}\right) =$$

$$= -2\left(\frac{4}{39}\right) - 1\left(\frac{9}{39}\right) + 1\left(\frac{18}{39}\right) = -\frac{8}{39} - \frac{9}{39} + \frac{18}{39} = \frac{1}{39}$$

$$E[y] = \sum y\, p_y(y) \quad \text{dove} \quad p_y(y) = \sum_{y=y} p_{x,y}(x,y)$$

$$1(p(-2,0)+p(-2,1)+p(-2,2)+p(-2,1)) + 2(p(-2,0)+p(-2,1)+p(-2,2)+p(-2,1)) =$$

$$= 1\left(\frac{2}{39}+\frac{4}{39}+\frac{1}{39}+\frac{4}{39}\right) + 2\left(\frac{1}{39}+\frac{2}{39}+\frac{2}{39}+\frac{9}{39}\right) =$$

$$= 1\left(\frac{11}{39}\right) + 2\left(\frac{14}{39}\right) = \frac{11}{39} + \frac{28}{39} = 1$$

$$E[xy] = \sum xy\, p_{x,y}(x,y) =$$

$$= (-2)\cdot 1 \cdot \frac{2}{39} + (-1)\cdot 1 \cdot \frac{4}{39} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{39} + (-2)\cdot 2 \cdot \frac{1}{39} + (-1)\cdot 2 \cdot \frac{2}{39} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{9}{39} =$$

$$= -\frac{4}{39} - \cancel{\frac{4}{39}} + \cancel{\frac{4}{39}} - \frac{4}{39} - \frac{4}{39} + \frac{18}{39} = \frac{6}{39}$$

$$Cov[x,y] = E[x,y] - \mu_x \mu_y = \frac{6}{39} - \frac{1}{39} = \frac{5}{39} = 0.1282$$

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

- $c(x^2+xy)$ se $0 \le y \le x \le 1$
- 0 altrimenti

Calcolare

$$P\left(X^2 < Y \mid X < \frac{1}{4}\right).$$

$$P((x,y)\in A) = 1 \iff \int_0^1\int_0^x cx^2+cxy \, dy dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 x(cx^2)\, dx + \int_0^1 (cx)\frac{x^2}{2}\, dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 cx^3\, dx + \int_0^1 \frac{cx^3}{2}\, dx = 1$$

$$\Rightarrow c\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{c}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}c + \frac{1}{8}c = 1 \Rightarrow \frac{3}{8}c = 1 \Rightarrow c = \frac{8}{3}$$

$$P\left(x^2<y \mid x<\frac{1}{4}\right) = \frac{\int_0^{1/4}\int_{x^2}^x \frac{8}{3}(x^2+xy)\, dydx}{\int_0^{1/4}\int_0^x \frac{8}{3}(x^2+xy)\, dydx} = \frac{307}{360} = 0.8527$$

Angela e Tiziano arrivano in dipartimento uno indipendentemente dall'altro. Angela arriva alle 8 e X_A minuti, dove X_A è uniformemente distribuita tra le 0 e 25 minuti. Tiziano invece arriva in dipartimento X_T minuti dopo le 8:00 con X_T variabile esponenziale di parametro 0.7. Calcolare la probabilità che Tiziano arrivi in dipartimento prima di Angela.

Angela $\in [8:00, 8:25]$ $\qquad P(x_A) = \frac{1}{25}$ (prob. uniforme)

Tiziano $\in [8:00 : e^{-0.7t}]$ $\qquad P(x_T) = 1 - e^{-0.7t}$ (prob. esponenziale)

$T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,25],\ y\in[0,x]\}$ considerando $x = x_A$ $\quad y = x_T$

poiché $x_T < x_A$ dove $x_T = y$ e $x = x_A$

$$P(x_T<x_A) = \int_T f_{X,Y}(x,y)\, dxdy = \int_T f_X(x) f_Y(y)\, dxdy = \int_0^{25}\int_0^x \frac{0.7e^{-0.7y}}{25}\, dydx = 0.9428$$

Sia (X, Y) congiunta continua con densità $f(x,y) = e^{-x-y}$ se $x, y > 0$, 0 altrimenti. Calcolare la probabilità dell'evento $X+Y < 11/17$.

$$P\left(x+y<\frac{11}{17}\right) = P\left(y<\frac{11}{17}-x\right) = P((x,y)\in B)$$

$$B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } 0<y<\frac{11}{17}-x,\ 0<x<\frac{11}{17}\right\}$$

$$P\left(x+y<\frac{11}{17}\right) = \int_B f_{X,Y}(x,y)\, dxdy = \int_0^{11/17}\int_0^{\frac{11}{17}-x} e^{-x-y}\, dydx = 0.1376$$

Sia (X, Y) congiunta con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{9}x^2 + \frac{21}{9}y^2 & \text{se } x, y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la covarianza di X, Y.

$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$E[XY] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} xy \, f_{X,Y}(x,y)\, dx dy = \int_{[0,1]\times[0,1]} xy \left(\frac{6x^2+21y^2}{9}\right) dx dy = \frac{3}{8}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^1 \frac{6}{9}x^2 + \frac{21}{9}y^2 \, dy = \frac{6}{9}x^2 + \frac{7}{9}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^1 x\left(\frac{6}{9}x^2 + \frac{7}{9}\right) dx = \frac{5}{9}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_0^1 \frac{6}{9}x^2 + \frac{21}{9}y^2\, dx = \frac{7}{3}y^2 + \frac{2}{9}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_0^1 y\left(\frac{7}{3}y^2 + \frac{2}{9}\right) dy = \frac{25}{36}$$

$$Cov[X,Y] = \frac{3}{8} - \frac{5}{9}\cdot\frac{25}{36} = -\frac{7}{648} = -0.0108$$

Sia (X, Y) congiunta continua con densità $f_{X,Y}(x,y) = \frac{c}{(1+x+y)^{11}}$ se $x, y \geq 0$, 0 altrimenti, dove c èuna opportuna costante. Calcolare la covarianza di X, Y.

$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$\{(x,y) \in [0,+\infty[\times [0,+\infty[\}$

f é continua con densità $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{c}{(1+x+y)^{11}}\, dx\, dy = \frac{c}{90} = 1 \implies c = 90$$

$$E[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{90xy}{(1+x+y)^{11}}\, dx\, dy = \frac{1}{56}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{90}{(1+x+y)^{11}}\, dy = \frac{9}{(x+1)^{10}}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{9x}{(x+1)^{10}}\, dx = \frac{1}{8}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{90}{(1+x+y)^{11}}\, dx = \frac{9}{(y+1)^{10}}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{9y}{(y+1)^{10}}\, dy = \frac{1}{8}$$

$$Cov[X,Y] = \frac{1}{56} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{448} = 0.0022$$