UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

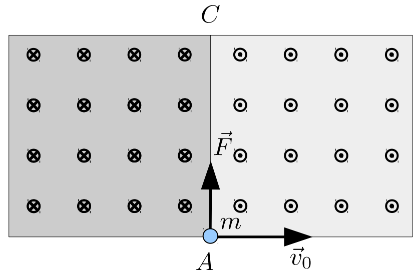
a.a. 2017-2018

Elementi di Fisica II: 25 Gennaio 2018

Seconda prova in itinere / Compito Completo

Problema 1

Una particella di massa $m = 10\mu g$ e carica q si trova nel punto A con velocità $\vec{v}_0$ di modulo $v_0 = 20m/s$ diretta lungo l'asse orizzontale. Il segmento $AC = \ell = 5cm$ divide due zone quadrate in cui è presente un campo magnetico di modulo B_0 e verso indicato in figura (uscente nella zona di destra, entrante in quella di sinistra). Sapendo che la forza di Lorentz subita dalla particella è diretta come in figura e vale in modulo $F = 0.4mN$, determinare:

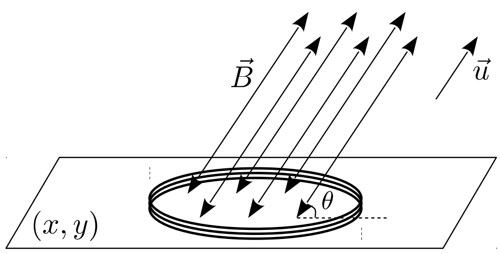


1. Il valore (modulo e segno) della carica della particella sapendo che $B_0 = 40mT$
2. La traiettoria della particella. Quanto vale il raggio di curvatura nella zona a destra? e in quella di sinistra?
3. Calcolare il tempo necessario affinchè la particella esca dalle zone in cui è presente il campo magnetico
4. Calcolare la velocità (modulo, direzione e verso) della particella nell'istante in cui esce dalle zone in cui è presente il campo magnetico

---

Problema 2

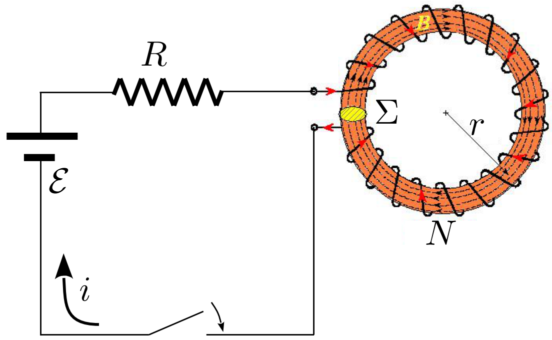
Un avvolgimento circolare di raggio $r = 4cm$ composto $N = 30$ spire di rame giace su un piano (x, y) ed è completamente immerso in un campo magnetico B. Il campo magnetico è uniforme e inclinato di un angolo di $\theta = \frac{\pi}{6}$ rispetto al piano su cui giace l'avvolgimento. Il campo magnetico varia nel tempo con la legge $\vec{B}(t) = (B_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t)\vec{u}$ con $\tau = 5ms$, $\omega = 1000s^{-1}$ e $\vec{u}$ il versore indicato in figura. La resistività del rame vale $\rho = 1.69 \times 10^{-8}\Omega m$ mentre la sezione del filo di rame vale $\Sigma = 0.8mm^2$. Calcolare:



1. La resistenza dell'avvolgimento di spire.
2. Il valore della costante B_0 sapendo che il flusso del campo magnetico al tempo $t_1 = \frac{\pi}{4\omega}$ vale $\Phi_1 = 226\mu Wb$.
3. La corrente indotta (verso e modulo) al tempo t_1.
4. La carica che circola nel circuito dal tempo $t = 0$ al tempo $t = 2t_1$.

Problema 3: solo per la seconda prova in itinere

Una resistenza $R = 20\Omega$ é collegata in serie ad un solenoide toroidale. Chiudendo il circuito al tempo $t = 0$ con un generatore di tensione continua $\mathcal{E} = 50V$ si osserva che dopo un tempo $t_1 = 30\mu s$ la tensione ai capi della resistenza vale $\Delta V_R = 20V$.

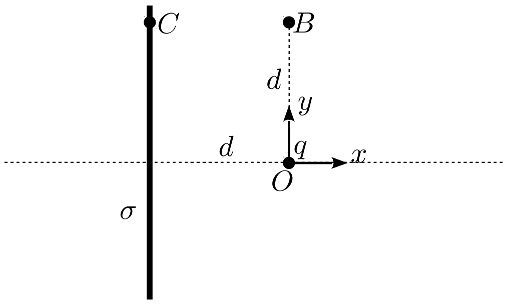


Calcolare:

1. La costante di tempo del circuito e il coefficiente di autoinduzione del solenoide.
2. L'energia magnetica immagazzinata all'interno del solenoide al tempo t_1.
3. Si consideri il solenoide formato da un avvolgimento toroidale di N spire avvolte intorno ad un toroide di materiale ferromagnetico ($k_m = 10000$) di raggio $r = 10cm$ e sezione $\Sigma = 2mm^2$. Calcolare la densità di energia magnetica u_m all'interno del solenoide al tempo t_1 considerando il diametro della sezione Σ molto piú piccolo del raggio r.
4. Calcolare il lavoro fornito dal generatore, quello dissipato per effetto Joule sulla resistenza e quello immagazzinato all'interno del solenoide dal tempo 0 al tempo t_1. Verificare la conservazione dell'energia.

Problema 4: Solo per il compito completo

Si consideri una carica puntiforme di carica negativa q posta nell'origine del sistema di coordinate e un piano isolante infinito di spessore trascurabile uniformemente carico con densità superficiale di carica $\sigma = +1\mu C/m^2$ posto a distanza $d = 10cm$ dalla carica (come in figura).



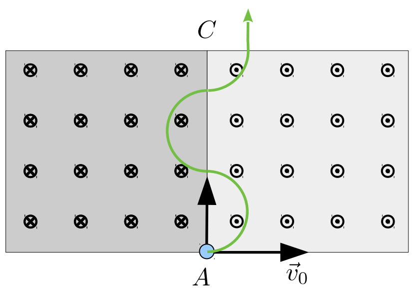
1. In quanti e quali (determinare le coordinate) punti sull'asse x il campo elettrico è nullo? Rispondere alla precedente domanda nel caso in cui $q = -250nC$ e nel caso in cui $q = -25nC$.
2. Calcolare il campo elettrico (modulo, direzione e verso) nel punto B, posto sull'asse y positivo a distanza d dalla carica nel caso in cui $q = -250nC$.
3. Nel caso in cui $q = -250nC$ si calcoli la differenza di potenziale $V_B - V_C$ dove C è il punto sul piano isolante con la stessa coordinata y di B.

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. La forza di Lorentz vale
$$\vec{F} = q\vec{v}_0 \times \vec{B}_0$$
Siccome il prodotto $\vec{v}_0 \times \vec{B}_0$ è diretto in direzione opposta rispetto alla forza $\vec{F}$, la carica della particella è negativa. Per determinarne il valore si ha
$$|\vec{F}| = F = |q|v_0B_0 \quad \Rightarrow \quad |q| = \frac{F}{v_0B_0} = 0.5\ mC \qquad \Rightarrow \qquad q = -0.5\ mC$$

2. La traiettoria iniziale sarà un arco di circonferenza. Quando la particella entra nella zona a sinistra la forza di Lorenz cambia verso, per cui la traiettoria sarà ancora circolare ma di verso opposto.
Per ottenere il raggio di curvatura si utilizza la legge
$$F = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv^2}{F} = 1\ cm$$
In figura è mostrata in verde la traiettoria della particella.



3. La particella uscirà dalle zone con campo magnetico dopo due semicirconferenze e un quarto di circonferenza, percorrendo un percorso di lunghezza $L = \pi R + \pi R + \frac{1}{2}\pi R = \frac{5}{2}\pi R$. Siccome il modulo della velocità è costante e vale sempre v_0, il tempo necessario per uscire dalle zone con campo magnetico vale
$$t = \frac{L}{v_0} = \frac{5}{2}\frac{\pi R}{v_0} \simeq 3.93\ ms$$

4. La velocità di uscita vale sempre v_0 in modulo è diretta parallelamente al segmento AC, nello stesso verso della forza $\vec{F}$ come in figura

PROBLEMA 2

1. La resistenza di una spira vale

$$R_0 = \frac{\rho 2\pi r}{\Sigma}$$

per cui la resistenza di N spire vale

$$R = NR_0 = N\frac{\rho 2\pi r}{\Sigma} \simeq 159\, m\Omega$$

2. Se scegliamo il verso della normale verso l'alto, il flusso del campo magnetico vale

$$\Phi(t) = NB(t)\pi r^2 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = NB(t)\pi r^2 \sin\theta = \frac{N}{2}B(t)\pi r^2$$

dove

$$B(t) = |\vec{B}(t)| = B_0 e^{-t/\tau}\cos\omega t$$

Al tempo t_1 si ha

$$\Phi_1 = \frac{N}{2}B(t_1)\pi r^2 = \frac{N}{2}(B_0 e^{-\frac{\pi}{4\omega\tau}}\cos\frac{\pi}{4})\pi r^2 = \frac{N}{2}(B_0 e^{-\frac{\pi}{4\omega\tau}}\frac{1}{\sqrt{2}})\pi r^2$$

da cui

$$B_0 = 2\sqrt{2}\frac{\Phi_1 e^{\frac{\pi}{4\omega\tau}}}{N\pi r^2} \simeq 4.96\, mT$$

3. La corrente indotta vale

$$i_{ind}(t) = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{N}{2}B(t)\pi r^2) = -\frac{N\pi r^2}{2R}\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{N\pi r^2}{2R}B_0 e^{-t/\tau}(\frac{1}{\tau}\cos\omega t + \omega\sin\omega t)$$

Al tempo t_1 si avrà

$$i_{ind}(t_1) = \frac{N\pi r^2}{2R}B_0 e^{-\frac{\pi}{4\omega\tau}}(\frac{1}{\tau}\cos\frac{\pi}{4} + \omega\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{N\pi r^2}{2R\sqrt{2}}B_0 e^{-\frac{\pi}{4\omega\tau}}(\frac{1}{\tau} + \omega) \simeq 1.7\, A$$

4. Per la legge di Felici la carica circolata vale

$$Q = \frac{1}{R}[\Phi(0) - \Phi(2t_1)] = \frac{1}{R}[\Phi(0) - \Phi(1t_1)] = \frac{N\pi r^2}{2R}[B(0) - B(2t_1)] = \frac{N\pi r^2 B_0}{2R}[1 - e^{-2t_1/\tau}\cos\omega 2t_1]$$

Siccome $\cos\omega 2t_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ la carica totale vale

$$Q = \frac{N\pi r^2 B_0}{2R} \simeq 2.35\, mC$$

PROBLEMA 3: solo per la seconda prova in itinere

1. Nel circuito RL chiuso al tempo $t = 0$, la corrente varia nel tempo con la legge

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

Al tempo t_1 la tensione ai capi della resistenza vale $Ri(t_1)$ per cui

$$\Delta V_R = R\frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t_1/\tau}) = \mathcal{E}(1 - e^{-t_1/\tau}) \qquad \Rightarrow \qquad \tau = -\frac{t_1}{\ln(1 - \frac{\Delta V_R}{\mathcal{E}})} \simeq 58.73\,\mu s$$

2. L'energia magnetica immagazzinata nel solenoide vale $U_m(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$. Il coefficiente di autoinduzione L si ricava dall'espressione della costante di tempo:

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad \Rightarrow \qquad L = \tau R \simeq 1.17\,mH$$

Al tempo t_1 si ha

$$i_1 = i(t_1) = \frac{\mathcal{E}^2}{R^2}(1 - e^{-t_1/\tau})^2 \simeq 1\,A$$

per cui

$$U_m(t_1) = \frac{1}{2}Li_1^2 \simeq 587\,\mu J$$

3. Il campo magnetico nel solenoide si ricava dalla legge di Ampere. Senza il materiale ferromagentico, la circuitazione del campo magnetico vale $\mathcal{C} = 2\pi r B_0$. Dalla legge di Ampere si ha che $\mathcal{C} = N\mu_0 i$, da cui $B_0 = N\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$. Aggiungendo il materiale ferromagnetico, il campo vale

$$B = N\frac{k_m\mu_0 i}{2\pi r}$$

Siccome il diametro della sezione Σ è molto più piccolo del raggio r posso considerare il campo B uniforme all'interno del solenoide. Dunque l'autoflusso del campo magnetico (necessario per ricavare il coefficiente di autoinduzione) vale

$$\Phi_B = NB\Sigma = N^2\frac{k_m\mu_0\Sigma}{2\pi r}i$$

Il coefficiente di autoinduzione vale quindi

$$L = \frac{\Phi_B}{i} = \frac{k_m\mu_0}{4\pi}\frac{2N^2\Sigma}{r}$$

da cui ricavo N

$$N = \sqrt{\frac{1}{\frac{k_m\mu_0}{4\pi}}\frac{rL}{2\Sigma}} \simeq 171$$

La densità di energia magnetica al tempo t_1 vale quindi

$$u_m(t_1) = \frac{1}{2k_m\mu_0}B^2(t_1) = k_m\frac{\mu_0}{4\pi}N^2\frac{i_1^2}{2\pi r^2} \simeq 465\,\frac{J}{m^3}$$

Siccome

4. Dall'equazione del circuito RL data da

$$\mathcal{E} = Ri + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

si ottiene l'equazione per l'energia moltiplicando per dt e integrando:

$$\int_0^{t_1} \mathcal{E}i(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} Ri^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}Li(t_1)^2 = \int_0^{t_1} Ri^2\mathrm{d}t + U_m(t_1)$$

L'energia fornita dal generatore è

$$W_{gen} = \int_0^{t_1} \frac{\mathcal{E}^2}{R}(1 - e^{-t/\tau})\mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[t + \tau e^{-t/\tau}\right]_0^{t_1} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[t_1 + \tau(e^{-t_1/\tau} - 1)\right] \simeq 813\,\mu J$$

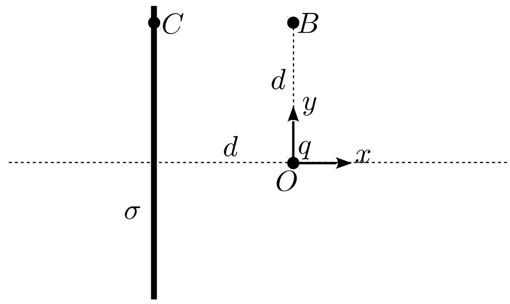
L'energia dissipata per effetto Joule vale

$$
\begin{aligned}
W_J &= \int_0^{t_1} Ri(t)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{t_1} \frac{\mathcal{E}^2}{R}(1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau})\mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[t + 2\tau e^{-t/\tau} - \frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^{t_1} \\
&= \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[t_1 + \tau(2e^{-t_1/\tau} - \frac{1}{2}e^{-2t_1/\tau} - \frac{3}{2})\right] \simeq 226\,\mu J
\end{aligned}
$$

Dal valore di $U_m(t_1)$ calcolato nel punto 2) si verifica la conservazione dell'energia $W_{gen} = W_J + U_m(t_1)$.

PROBLEMA 3: solo il compito completo

Si consideri una carica puntiforme di carica negativa q posta nell'origine del sistema di coordinate e un piano isolante infinito di spessore trascurabile uniformemente carico con densità superficiale di carica $\sigma = +1\mu C/m^2$ posto a distanza $d = 10cm$ dalla carica (come in figura).



1. Il campo elettrico generato dal piano isolate sull'asse x vale

$$\vec{E}_p = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i} & x > -d \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i} & x < -d \end{cases}$$

dove $\vec{i}$ è il versore lungo l'asso x. Lungo l'asse x, il campo generato dalla carica vale

$$\vec{E}_q = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\vec{i} & x > 0 \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\vec{i} & x < 0 \end{cases}$$

Per ottere campo nullo è necessario risolvere $\vec{E}_q + \vec{E}_p = 0$. Dividiamo in tre casi

$x > 0)$

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\vec{i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2\pi}\frac{q}{\sigma}}$$

Poichè sono nel caso $x > 0$ posso accettare solo le soluzioni positive, quindi

$$x \simeq \begin{cases} +20\,cm & q = -250nC \\ +6.3\,cm & q = -25nC \end{cases}$$

$-d < x < 0)$

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\vec{i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \frac{1}{2\pi}\frac{q}{\sigma} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{impossibile}$$

$x < -d)$

$$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\vec{i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2\pi}\frac{q}{\sigma}}$$

Poichè sono nel caso $x < -d = -10cm$ posso accettare solo le soluzioni negative inferiori a $-10cm$:

$$x \simeq \begin{cases} -20\,cm & q = -250nC \\ -6.3\,cm (\text{non accettabile}) & q = -25nC \end{cases}$$

Riassumendo: se $q = -250nC$ ho due punti in cui il campo si annulla $x_1 = 20cm$ e $x_2 = -20cm$. Se $q = -25nC$ il campo è nullo solo per $x_1 = 6.3cm$.

2. Nel punto B il piano e la carica generano rispettivamente i campi

$$\vec{E}_{pB} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i}, \qquad \vec{E}_{qB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{d^2}\vec{j}$$

dove $\vec{j}$ è il versore lungo l'asse y. Il campo totale in B vale

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{pB} + \vec{E}_{qB} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{d^2}\vec{j}$$

di modulo

$$E_B = \frac{1}{2\epsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + (\frac{q}{2\pi d^2})^2} \simeq 232\,kV/m$$

inclinato di un angolo θ rispetto all'asse x, dove

$$\tan\theta = \frac{E_{qB}}{E_{pB}} = \frac{q}{2\pi\sigma d^2} \simeq -3.98 \qquad \Rightarrow \qquad \theta \simeq -75°$$

3. Calcoliamo la differenza di potenziale come somma di due contributi, dovuti al piano e alla carica

$$\Delta V = V_B - V_C = \Delta V_p + \Delta V_q$$

Si ha

$$\Delta V_p = V_B^{(p)} - V_C^{(p)} = -E_p d = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} d \simeq -5.654\, kV$$

e

$$\Delta V_q = V_B^{(q)} - V_C^{(q)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{d} - \frac{1}{d\sqrt{2}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{d}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \simeq -6.59\, kV$$

da cui

$$\Delta V = \Delta V_p + \Delta V_q \simeq -12.244\, kV$$