Equazioni di Maxwell

$$C_\gamma(\vec{B}) = \mu_0\left(i_c + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_\Sigma(\vec{E})}{dt}\right) \qquad C(\vec{E}) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \mathcal{E}$$

$$\Phi(\vec{B}) = 0 \qquad \boxed{\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Elettrostatica

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u} \qquad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\vec{u}$$

$$W = \oint \vec{F}\cdot d\vec{s} = q \cdot \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad L_{AB} = -\Delta U = q(V_B - V_A) = q\cdot\int_A^B \vec{E}\cdot ds$$

$$E_K = -U_e$$

se percorso chiuso

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = -q\Delta V \qquad \mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot ds = 0$$

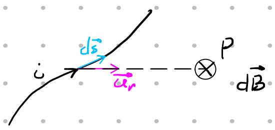
campo elettrostatico ha circuitazione nulla cioè f.e.m nulla

Gauss

$$\phi(E) = \oint \vec{E}\cdot\hat{u}_n \cdot d\Sigma = \frac{q_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

Magnetismo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, d\vec{s}\times\vec{u}_r}{r^2}$$



Per un filo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\vec{u}_r$$

$$\vec{F}_L = q(\vec{v}\times\vec{B} + \vec{E}) \quad \text{Lavoro nullo}$$

- II^a Legge di Laplace

$$d\vec{F} = dq\,\vec{v}_d \times \vec{B} \qquad dq\,\vec{v}_d = i\,d\vec{s} \qquad d\vec{F} = i\,d\vec{s}\times\vec{B}$$

Forza subita dal filo percorso dalla corrente in presenza di un campo magnetico

Legge di Ampere

$$C_\gamma(B) = \oint_\gamma B\, ds = \mu_0 i_c$$

$$C_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 i_c = \begin{cases} \mu_0 i & r \geq R \\ \mu_0 J \pi r^2 & r < R \end{cases}$$

Legge di Faraday Lentz

$$C_\gamma(\vec{E}) = \mathcal{E} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} \qquad \phi_\gamma(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{u}_n \cdot d\Sigma \qquad B\cdot u_n \cdot \cos\theta$$

Circuiti

- RC

carica

$$i_{(t)} = \frac{\varepsilon}{R_T} e^{-t/\tau} \qquad q_{(t)} = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \tau = RC$$

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{C^2}$$

- RL

carica

$$\varepsilon = Ri + \Delta V_L$$

$$\Delta V_L = L\frac{di}{dt}$$

$$i_{(t)} = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

$$\underbrace{\int_0^{t_1} \varepsilon\, i_{(t)}\, dt}_{\text{lavoro fornito dal generatore}} = \int_0^{t_1} R i_{(t)}^2 dt + \frac{1}{2} L i_{(t)}^2 = \underbrace{\int_0^{t_1} R i_{(t)}^2 dt}_{\text{effetto Joule}} + \underbrace{U_m}_{\text{energia solenoide}}$$

- Resistenze
  - serie $\quad R_s = R_1 + R_2$
  - parallelo $\quad \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

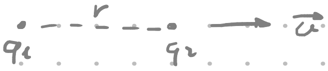
- Condensatori:
  - serie $\quad Q_1 = Q_2 \quad V = V_1 + V_2 \quad \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
  - parallelo $\quad \Delta V_1 = \Delta V_2 \quad C_p = C_1 + C_2$

- Induttori
  - Densità di energia magnetica $\quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$
  - Energia magnetica $\quad U = \frac{1}{2} L i^2$
  - Induttanza $\quad L = \frac{\phi(B)}{i}$
    - $\phi(B) = \oint B u_n \, d\Sigma$ flusso per una spira
    - $\phi(B)\, nd$ flusso per solenoide
  - Solenoide $\quad B = \mu_0 n i = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$

Forza elettrostatica/Campo elettrostatico

• Legge di Coulomb

Due cariche q_1 e q_2 a distanza r esercitano una forza



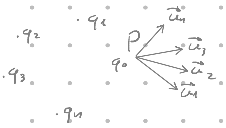
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}$$

$F > 0$: repulsione
$F < 0$: attrazione

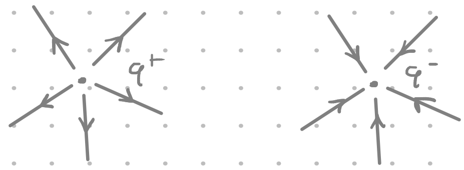
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10 \, \frac{Nm^2}{C} \qquad |e^-| = |p^+| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19} \, C$$

• Campo elettrostatico

$$[E] = N/C$$



$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{r_k^2} \vec{u}$$



$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}_P$$

- Si calcola per ogni carica: il campo che una carica esercita in un punto o su un'altra carica

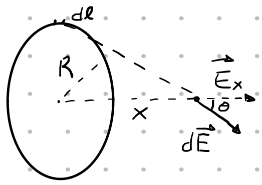
- In caso di un campo continuo

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r_i^2} \vec{u}_i \qquad \lambda = \frac{dq}{dl}$$

- Campi utili

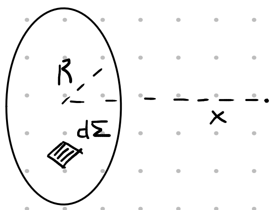
↳ anello carico

$$\vec{E}_{(x)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \vec{u}_x \quad (\text{distanza } x)$$



↳ disco carico

$$\vec{E}_{(x)} =$$



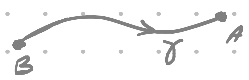
Lavoro elettrico / Potenziale elettrostatico

- Lavoro

Il lavoro di una forza è dato da $W = \int \vec{F} \cdot ds = q_0 \int \vec{E}\, ds$

- Lavoro elettrico

$$L_{AB} = \int_\gamma \vec{F}_{q_0} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



$$L_{AB} = -\Delta U = q_0 (V_B - V_A) \longrightarrow \Delta V_{BA} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$L_{AB} = -\Delta U = q (V_B - V_A) = q_0 \int_A^B E \cdot ds$$

$$C_\gamma(\vec{E}) = \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

- Potenziale Coulombiano

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \qquad [V] = V \text{ (Volt)}$$

- Energia spesa per una certa configurazione di cariche

$$L_{ext} = -\int_\infty^{r_{1,2}} \vec{F}\, d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{1,2}}$$

Lavoro opposto al campo elettrico

- Conservazione energia

$$E = E_K + U_e = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V = 0$$

- Superfici equipotenziali

Superficie in cui ogni punto ha lo stesso potenziale.

$$V(x,y,z) = \text{costante}$$

↳ Come per le linee di campo anche queste non si intersecano mai, per ogni punto passa una sola sup. equipotenziale

- Dipolo elettrico ?

Due cariche q^+ e q^- distanti d costituiscono un dipolo.
Si chiama momento di dipolo elettrico $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$ $\qquad [\vec{p}] = Cm$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Campo elettrostatico $\quad \vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(2\cos\vartheta\, \vec{u_r} + \sin\vartheta\, \vec{u_\vartheta} \right)$

Teorema di Gauss

Il flusso di un campo elettrico E prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa è pari alla somma delle cariche contenute nella superficie diviso per ε_0.

$$\phi(E) = \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n \cdot d\Sigma = \frac{q_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

Conduttori

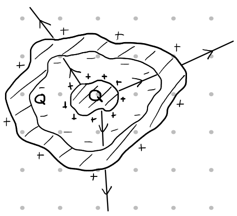
- Un conduttore in equilibrio elettrostatico è definito dalla condizione

$$E_{int} = 0$$

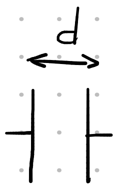
  - Eccesso di cariche distribuito solo sulla superficie del conduttore
  - Potenziale elettrostatico costante
  - Campo elettrostatico in un punto vicino alla superficie del conduttore è perpendicolare alla superficie
  - Th di Coulomb: $\vec{E}_{sup} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Condensatori

- Le armature di un condensatore sono costituite da due conduttori piani paralleli



$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$



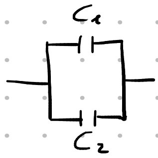
- Condensatore piano

$$\Delta V = \frac{q}{\varepsilon_0 \Sigma} d \qquad C = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{d}$$

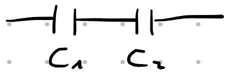
$$\Delta V = Eh = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} h = \frac{\sigma \Sigma}{\varepsilon_0 \Sigma} h \qquad \sigma = \frac{q}{\Sigma}$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0 \Sigma} h$$

- Parallelo: $\Delta V_1 = \Delta V_2$ $\quad C_p = C_1 + C_2$



- Serie: $\Delta V_s = \Delta V_1 + \Delta V_2$ $\quad \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ $\quad Q_1 = Q_2$



- Energia elettrostatica

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2}$$

- Dielettrici
  - Costante dielettrica: $\varepsilon = K \varepsilon_0$
  - Carica distribuita sulle facce del dielettrico in relazione a quelle formate sulla superficie del dielettrico

$$q = \frac{K-1}{K} q_K$$

  - Capacità condensatore pieno di dielettrico

$$C_K = K C$$

Corrente elettrica

- Intensità di corrente istantanea: $i = \frac{dq}{dt}$
- Densità di corrente: $\vec{J} = n\, q_+ \vec{v}_d$ → velocità di deriva

n: num. elettroni che si spostano; q_+: carica spostata

Posso riscrivere $\quad di = J\, \hat{u}_n\, d\Sigma$

$$i = \int di = \int_\Sigma J\, \vec{u}_n\, d\Sigma = J\,\Sigma = \phi(J)$$

Legge di Ohm della conduzione elettrica

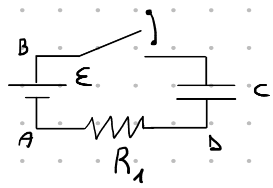
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

σ: conducibilità elettrica

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E}\, d\vec{s} = \int_A^B \rho \vec{J}\, d\vec{s} = \int_A^B \rho J\, ds = \int_A^B \rho \frac{i}{\Sigma}\, ds = i \int_A^B \frac{\rho}{\Sigma}\, ds = Ri$$

- Resistenza del conduttore: $R = \int_A^B \frac{\rho}{\Sigma}\, ds = \frac{\rho \ell}{\Sigma} \qquad [R] = \Omega$

Circuito RC



- Carica

$$\underset{V_{BA}}{\mathcal{E}} = \underset{V_{BD}}{V_C} + \underset{V_{DA}}{Ri} \qquad \mathcal{E} = \oint E \cdot ds$$

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Viene compiuto $W = C\mathcal{E}^2$

- Scarica $\qquad \tau = RC$

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$$

Viene dissipato $W = \frac{q_0^2}{2C}$

Quando un condensatore si scarica rimane costante la capacità ma varia la carica depositata sulle armature

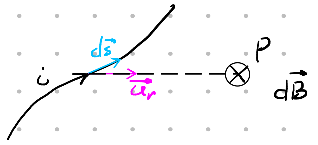
$$U_e = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \to \text{costante}$$

Magnetismo

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

- I^a legge di Laplace

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i |d\vec{s} \times \vec{u_r}|}{r^2}}$$



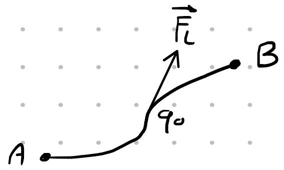
- Legge di Biot-Savat

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{u_\theta}$$

Campo magnetico uscente dai fili

- Forza di Lorentz (Lavoro nullo)

$$\boxed{F_L = q_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$



$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F_L} \cdot d\vec{s} = \int_A^B q_0 \overbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \vec{v}}^{0} dt = 0$$

- II^a Legge di Laplace

$V_d =$

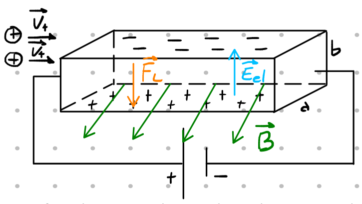
$$d\vec{F} = dq \vec{v_d} \times \vec{B} \qquad dq\vec{v_d} = i\, d\vec{s}$$

$$\boxed{d\vec{F} = i\, d\vec{s} \times \vec{B}}$$

Forza subita dal filo percorso dalla corrente in presenza di un campo magnetico

x mano dx $i \rightarrow$ pollice
$B \rightarrow$ indice

- Effetto Hall



B perpendicolare al momento delle cariche

$$\vec{F_L} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

La faccia superiore si carica negativamente, quella inferiore positivamente. Così facendo si forma un campo elettrostatico verso l'alto.

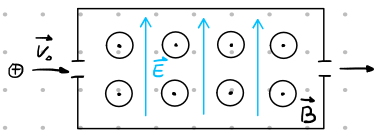
$$\vec{E_H} = \frac{\vec{F_L}}{q_+} = \vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{campo di Hall}$$

$\Rightarrow$ situazione a regime: $\vec{E_H} + \vec{E_{el}} = 0$

$$|\vec{E_{el}}| = |\vec{E_H}| = v \cdot \vec{B} \cdot \cancel{\sin 90°}^{=1} = \frac{J}{n q_+} B = \frac{i}{nabq_+} \vec{B}$$

$$\Delta V_H = |E_H| b = \frac{iB}{naq_+}$$

- Selettore di velocità



$$\vec{F_L} = q(E + v_0 \times \vec{B}) = 0$$

(la forza è 0 per avere un moto rettilineo uniforme)

$$E = v_0 \times \vec{B}$$

$$E = v_0 B \cancel{\sin\theta}^{=1} = v_0 B \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}$$

- Dipolo magnetico

$$\vec{m} = i \Sigma \vec{u}_n$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m \cdot B \cdot \cos\vartheta \qquad (W = -\Delta U = U_i - U_f)$$

- Legge di Ampere

$$C_\gamma(\vec{B}) = \oint_\gamma \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \sum_k i_k$$

Gauss

$$\phi(E) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$C_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 i_c = \begin{cases} \mu_0 i & r \geq R \\ \mu_0 J \pi r^2 & r < R \end{cases}$$

$$J = \frac{i}{\Sigma}$$

- Legge di Faraday-Lentz

$$C_\gamma(\vec{E}) = -\frac{d\phi_\gamma(\vec{B})}{dt}$$

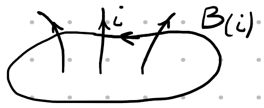
$$\mathcal{E} = \oint E \cdot ds = C_\gamma(E)$$

$$\phi_\gamma(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u}_N \cdot d\Sigma$$

flusso campo magnetico attraverso una superficie

- Coefficiente di autoinduzione (L)

$$[L] = \frac{Tm^2}{A} = H \text{ (Henry)}$$



I^a legge di Laplace

autoflusso

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma = \int_\Sigma \left(\oint_\gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma$$

dipende dalla geometria del circuito

$$= i_0 \cdot L$$

$$L = \frac{\Phi_\gamma(\vec{B})}{i_0}$$

$$i_{ind} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi B}{dt}$$

- Forza elettromotrice indotta

$$\mathcal{E}_{(t)} = -\frac{d\phi(B)}{dt}$$

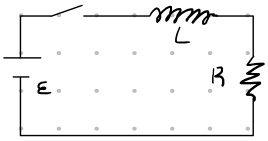
Solenoide

$$l \qquad N \text{ spire}$$

$$B = \frac{N}{l} \mu_0 i \qquad l >> R$$

Campo parallelo all'asse

- Circuito RL



$V = R \cdot i$

$$i_{(t)} = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)$$

$$\varepsilon - L\,\frac{di(t)}{dt} = R \cdot i(t)$$

La potenza erogata dal generatore quando la corrente ha valore i è

$$\varepsilon i_{(t)} dt = R i_{(t)}^2 dt + L i_{(t)} di$$

$$\underbrace{\int_0^{t_1} \varepsilon i_{(t)} dt}_{\text{lavoro fornito dal generatore}} = \int_0^{t_1} R i_{(t)}^2 dt + \frac{1}{2} L i_{(t)}^2 = \underbrace{\int_0^{t_1} R i_{(t)}^2 dt}_{\text{effetto Joule}} + \underbrace{U_m}_{\text{energia solenoide}}$$

- Energia magnetica

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2$$

- Densità energia magnetica

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \implies U_m = \int_\tau u_m \, d\tau$$

- Legge di Felici

$$Q = \frac{1}{R}\left(\phi_{iniz} - \phi_{finale}\right)$$

Formule utili

- Scalare tra due vettori : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\vartheta$
- Vettore tra due vettori: $\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b \cdot \sin\vartheta$

Acc. centripeta

$$a = \frac{v^2}{r}$$

$$F_c = m \frac{v_0^2}{R} = q v_0 B$$

Un campo è conservativo quando l'integrale non dipende dal percorso, ma dal punto inziale a quello finale. Si può anche dire quando la sua circuitazione è nulla, vd campo elettrostatico.

$$C_\gamma(\vec{E}) = \oint_\gamma \vec{E} \, d\vec{s} = 0$$

$$W = -\Delta U = -q \Delta V_{AB} = -q \int_A^B E \cdot d\vec{s}$$

Proprietà conduttori in condizioni elettrostatiche

① $\vec{E}_{interno} = 0$ Le cariche sul conduttore si modificano per creare un campo uguale e opposto al campo esterno

② La carica in eccesso si deposità sulla superficie, siccome il campo interno è 0, per qualsiasi superficie interna il flusso vale 0

③ Tutto il conduttore è allo stesso potenziale

④ Teorema di Coulomb $\vec{E}_{sup} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_n$

Effetto Joule

L'effetto Joule consiste nel riscaldamento di un conduttore metallico attraverso energia elettrica. Questa legge può essere interpretata com una trasformazione integrale dell'energia elettrica in calore.

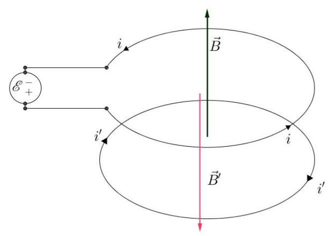
$$E_J = \int P \, dt = \int_0^{T_1} R i^2 dt$$

$$dL = dq \, \Delta V \qquad P = \frac{dL}{dt} = \frac{dq}{dt} \Delta V = i \Delta V = R \cdot i^2$$

Legge di Lenz

La legge di Lenz afferma che la forza elettromotrice indotta in un circuito genera corrente, detta corrente indotta, il cui effetto deve essere tale da opporsi alla causa che la produce.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi(B)}{dt}$$



Teorema di Gauss

$$\phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u_n} \cdot d\Sigma = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

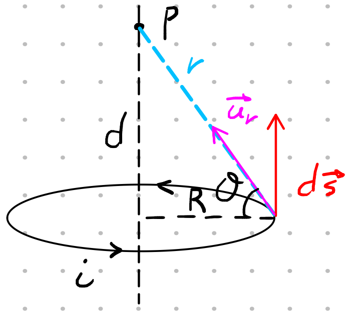
Dimostrazione

$$\vec{E} \cdot \vec{u_n} \cdot d\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \overbrace{\vec{u_r} \cdot \vec{u_n}}^{\cos\vartheta} d\Sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{d\Sigma}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \, d\Omega$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u_n} \cdot d\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \oint_{\Sigma} d\Omega = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0} q \cdot \cancel{4\pi} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ per ogni q_{int}

- Campo magnetico spira circolare



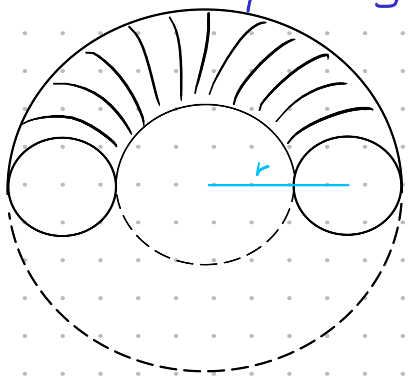
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, ds \times u_r}{r^2} = \qquad ds \perp u_r$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, ds}{d^2+R^2}\cos\vartheta \qquad R = r\cos\vartheta$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,R}{(d^2+R^2)^{3/2}}\underbrace{\int ds}_{2\pi R} = \frac{\mu_0}{2\cancel{4\pi}}\frac{i\cancel{2\pi}R^2}{(d^2+R^2)^{3/2}} \qquad r \ll d$$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2 d^3}$$

- Flusso del campo magnetico solenoide toroidale



$$C_\gamma(B) = \oint_\gamma B\, ds \overset{\text{Ampere}}{=\!=} \mu_0 N i_c$$

$$= B\, 2\pi r = \mu_0 N i_c$$

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

$$\phi(B) = N\int_\Sigma B \cdot u_n \cdot d\Sigma = N B \Sigma$$