Combinatoria

Esempio

Persone e cappelli con diverso indice

$$(1,2,\dots,10) \qquad [1,2,3] \qquad \begin{matrix}(2,3,1)\\(3,1,2)\end{matrix} \qquad \boxed{2/6}$$

$i_1, i_2, \dots, i_{10}$

$i_1 \neq 1, \dots, i_{10} \neq 10$

Permutazioni

Data una k-sequenza $(a_1,\dots,a_k)$ di un insieme, diciamo permutazione una qualsiasi sequenza $(b_1,\dots,b_k)$ ottenuta riordinando $(a_1,\dots,a_k)$

$(1,3,2)$ è permutazione di $(1,2,3)$

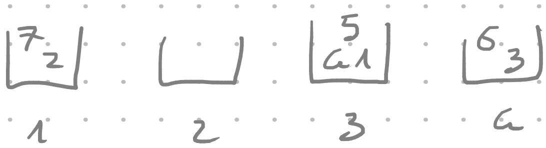
Il numero di permutazioni di $(1,2,3,\dots,n)$ è $S(n,n)$

Spartizioni

Diciamo n-spartizione di I_k una n-upla ordinata $(C_1,\dots,C_n)$ di sottoinsieme a due a due disgiunti, anche vuoti, la cui unione $C_1 \cup \dots \cup C_n$ è I_k

Distribuzione di 7 libri distinti a 4 persone

$$I_7 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$



$$(\{7,2\}, \emptyset, \{1,4,5\}, \{3,6\})$$

Le n-spartizioni di I_k, sono $S((n,k))$, cioè tante quante le k-sequenze di I_n

52 carte a 4 giocatori $\quad C_1 \subseteq I_{52} \quad C_2 \subseteq I_{52} \quad C_3 \subseteq I_{52} \quad C_4 \subseteq I_{52}$

$C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = I_{52} \quad C_i \cap C_j \neq \emptyset \quad i \neq j$

(C_1, C_2, C_3, C_4) 4-spartizione di I_{52}

Principio di moltiplicazione

Elementi di un insieme X: procedura in n fasi

- prima fase con m_1 esiti possibili
- seconda fase con m_2 esiti possibili
- ...
- n-esima fase con m_n esiti possibili

Allora $|X| = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$

Sequenze con ripetizioni

Siano $n, k \in \mathbb{N}$. Allora $S((n,k)) = n^k$

Numero di sottoinsiemi di $\{1,2\}$

$\emptyset \quad \{1,2\} \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \Rightarrow 4$ sottoinsiemi

$\{1,2\}^{n=10} \longleftrightarrow \{1,1,0,0,\dots,0\}$ (due valori per un insieme n di 10 elementi)

$\emptyset \longleftrightarrow \{0,0,0,0,\dots,\overset{10}{0}\}$

$\{1,2,3,4,\dots,10\} \longleftrightarrow \{1,1,1,1,\dots,1\}$

Sottoins. di I_n = #n. seq di I_2: 2^n

#sottoinsiemi = 2-spartizioni di I_n: 2^n

$$E \subseteq I_n \longleftrightarrow (E, I_n \setminus E)$$

$n=10$

$$\{1,2\} \longleftrightarrow (\{1,2\},\{3,4,\dots,10\})$$

Fattoriale

Sia $n \geq 0$ un numero naturale. Il fattoriale di n è

$$n! = \begin{cases} n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 & \text{per } n \geq 1 \\ 1 & \text{per } n = 0 \end{cases}$$

#Permutazioni di $(1,2,\dots,n)$

$(a_1,a_2,\dots,a_n)$: $n\times(n-1)\times\dots\times 2\times 1$

- 1ª tappa : scelta di $a_1 \longrightarrow n$
- 2ª tappa $a_2 \longrightarrow n-1$
- nª tappa $a_n \longrightarrow 1$

Formula di Stirling

Sia $n \geqslant 0$ un numero naturale. Si ha

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad n \to +\infty : \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Il numero di cifre decimali di un numero K è uguale a $[\log_{10} K]+1$

Numero di sequenze senza ripetizione

Siano $n,k \in \mathbb{N}$. Allora il numero di K-sequenze senza ripetizioni di I_n è

$$S(n,K) = \begin{cases} \frac{K!}{(n-K)!} & \text{se } K \leqslant n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In particolare $S(n,0)=1$ e $S(n,n)=n!$

Esempio

Si effettua una estrazione di 3 palline senza reimissione da un'urna che ha 12 palline delle quali 6 nere e 4 rosse. Quante sono le terne possibili nelle quali l'ultima pallina è una rossa?

$\{N_1,\dots,N_8\}$ $\{R_1,\dots,R_6\}$

① Scelta della terza pallina: tra 6

② tra 11

③ tra 10

$\boxed{6\times 10\times 11}$

(R_3, N_6, R_1)

Esercizio

Da un'urna con 8 palline numerate si fanno tre estrazioni senza trucchi una dopo l'altra senza reimissione. Calcolare la probabilità che vengano estratte esattamente due palline pari.

~~$P=\{2,4,6,8\}$ $D=\{1,3,5,7\}$~~

~~$\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{6}=\frac{3}{14}$~~

$$|\Omega| = \binom{8}{3}$$

2 pari 1 dispari

$$\frac{\binom{4}{2}\times 4}{\underbrace{\binom{8}{3}}_{3 \text{ estrazioni}}} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!}\times 4}{\frac{8!}{5!\,3!}} = \frac{3}{7}$$

---

n esperimenti di Bernoulli con lo stesso parametro p
#successi indipendenti è binomiale (n,p)

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-esimo succ} \\ 0 & \text{se } i\text{-esimo insucc.} \end{cases}$$

$X = X_i + \dots + X_n$ $\qquad \{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ indipendenti tra di loro

X binomiale $(n,p) \iff X = X_1 + \dots + X_n$

$X_i \sim B(p)$ indipendenti

Da un'urna con 100 palline numerate si fanno due estrazioni con reimissione, una dopo l'altra senza trucchi. Dire se la variabile che conta il numero di palline pari estratte è una binomiale. Sì
Sì perchè ogni volta ho probabilità 1/2 di estrarre una pari, ma le estrazioni sono indipendenti.

Si lancia un dado equilibrato con facce numerate da 1 a 6 per 100 volte, lanci indipendenti. La variabile che conta il numero di volte che esce un numero maggiore o uguale di 5 è

Binomiale $(100, 1/3)$

Una fabbrica produce bulloni in modo indipendente l'uno dall'altro. La probabilità che un bullone sia difettore è del 10%. La variabile che conta quanti pezzi vengono prodotti finchè veng aprodotto il primo pezzo difettoso è una variabile

geometrica di parametro 0.1

Una lotteria vende tanti (30 milioni di biglietti), 500 dei quali sono vincenti.
Acquistandone 5 milioni, quale è la probabilità di averne esattamente 90 vincenti?

n : biglietti venduti $= 30\,000\,000$

Ω = insiemi di 5 mil di elem tra 30 mil

$$|\Omega| = \binom{30\,000\,000}{5\,000\,000}$$

A : 90 vincenti

- 90 vincenti $\binom{500}{90}$
- $5\times10^6 - 90$ non vincenti

$$\frac{\binom{30\,000\,000-500}{5\,000\,000-90}\binom{500}{90}}{\binom{30\,000\,000}{5\,000\,000}} = 0{,}0331$$

Metodo semplificato

5 milioni di esperimenti indipendenti $\rightarrow$ probabilità $p = \frac{500}{30 \text{ milioni}}$

$p(90)$ vincenti

$$\binom{5\times 10^6}{90} p^{90} (1-p)^{5\times 10^6 - 90}$$

n esperimenti di Bernoulli $\quad p = \frac{\lambda}{n}$ di avere successo

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \qquad n \to \infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{\lambda^k}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \frac{1}{k!}}_{\frac{\lambda^k}{k!}} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}}_{1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}}$$

$$\boxed{P(X_n = k) \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}} \qquad X_n \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$

Variabile di Poisson

Num persone medio 5000

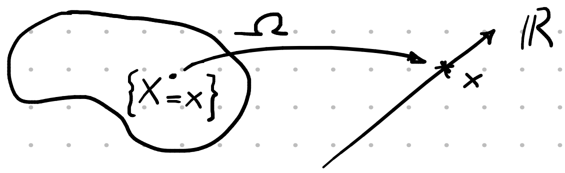
Ognuno va in stazione con $p = \frac{5000}{n}$

$X_n \sim B\left(n, \frac{5000}{n}\right)$

$$P(X_1 = 5100) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-5000} \frac{5000^{5100}}{5100!}$$

Variabili aleatorie (num di teste su 3 lanci, persone in stazione ogni giorno)

- Una variabile aleatoria su (Ω, P) è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$



- Funzioni di distribuzione

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$x \in \mathbb{R} \mapsto P(X \leq x)$$

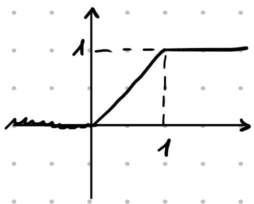
Esempio

Aspettiamo un autobus che passa a caso tra mezzogiorno e l'una: se T è la variabile aleatoria uguale all'istante di arrivo del bus riteniamo $P(T \in [a,b]) = b-a$, $0 \leq a \leq b \leq 1$
Qual è la funzione di distribuzione di T?

mezzogiorno una

$$F_T(t) = P(T \leq t)$$

- $t < 0$
- $t \in [0,1]$ $F_T(t) = P(T \in [0,t]) = t$
- $t > 1$ $F_T(t) = 1$

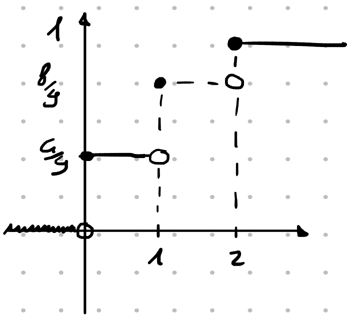


Altro esempio

Lanciamo 2 volte una moneta che dà testa con probabilità 1/3, lanci indipendenti. Sia X la variabile aleatoria uguale al numero di teste. Descrivere la distribuzione di X e tracciarne il grafico.

$X = \#$ teste sui due lanci

- $x < 0$ $P(X \leq x) = 0$
- $x \in [0,1[$ $P(X \leq x) = P(X=0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ num. lanci
- $x \in [1,2[$ $P(X \leq x) = P(x==0) + P(x==1) = \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$
- $x > 2$ $P(X \leq x) = 1$



Proprietà

- F_X è crescente
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- F_X è continua a destra
- $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha $P(X < a) = F_X(a^-) := \lim_{x \to a^-} F_X(x)$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Variabili aleatorie

$$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

$Var[x] \longrightarrow$ varianza di x (>0)

$E[x] \longrightarrow$ valore atteso di x

Esempio

Variabile aleatoria negativa X ha una varianza uguale a 16, mentre il valore atteso di X^2 vale 25. Qual è il valore atteso di X?

$Var[x] = 16 \qquad E[x^2] = 25$

$$\underset{16}{Var[x]} = \underset{25}{E[x^2]} - (E[x])^2$$

$$-\sqrt{(E[x])^2} = -\sqrt{9} = -3$$

- Deviazione standard

$$\sigma_x = \sqrt{Var[x]}$$

Una pasticceria ha invenidta 10 confezioni di pasticcini: 4 con 2 pezzi, 6 con 5 pezzi. Qual è la deviazione standard del numero di pezzi nel sacchetto?

$$E[x] = \sum x_i P(x = x_i) = 2 \cdot \frac{4}{10} + 5 \cdot \frac{6}{10} = \frac{19}{5}$$

$$E[x^2] = \sum x_i^2 P(x = x_i) = 4 \cdot \frac{4}{10} + 25 \cdot \frac{6}{10} = \frac{166}{10}$$

$$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{Var[x]}$$

- Covarianza

$$Cov[X, Y] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

$$Cov[X, Y] = 0 \quad (\text{se } X \text{ e } Y \text{ indipendenti})$$

- Varianza di una somma

$$Var[X_1 + \ldots + X_m] = Var[X_1] + \ldots + Var[X_m] + 2 \sum_{i<j} Cov[X_i, X_j]$$

4 persone lasciano il proprio cappello all'ingresso di un locale. All'uscita ognuno prendo un cappello a caso. Sia X_i la variabile di Bernoulli che vale 1 se la perona i riprende il proprio cappello.

- Determinare $Var[X_i] =$

$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \qquad X_i \sim Be\left(\frac{1}{4}\right)$

$= Var[X_1] + Var[X_2] + Var[X_3] + Var[X_4] + 2\sum_{i<j} Cov[X_i, X_j] =$

$Cov[X_1, X_2] = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]$

$= P_{(1 \text{ e } 2 \text{ riprendono propio capp})} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} =$

$= \frac{2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{48}$

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ seq. poss $= 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

$\underbrace{1,2 \quad 2,1}_{2\cdot 1} \quad 3 \quad 4$

→ varianza singola bernoulliana

$= 4\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)\right) + 2\cdot\frac{1}{48}\cdot 6$ → termini X_i, X_j con $i<j$

Esempio

$$X = \begin{cases} -1 & p = 1/3 \\ 0 & p = 1/3 \\ 1 & p = 1/3 \end{cases} \qquad Y = X^2$$

a) X, Y indip ? No

$P(Y=0 \mid X=1) = 0$

$P(Y=0) = \frac{1}{3}$

b) $Cov[X,Y] = ?$ $\quad E[XY] - E[X]E[Y]$

$E[X^3] - E[X]E[X^2]$

$0 - 0 = 0$

X, Y non indip e $Cov[X,Y] = 0$

Variabili aleatorie continue