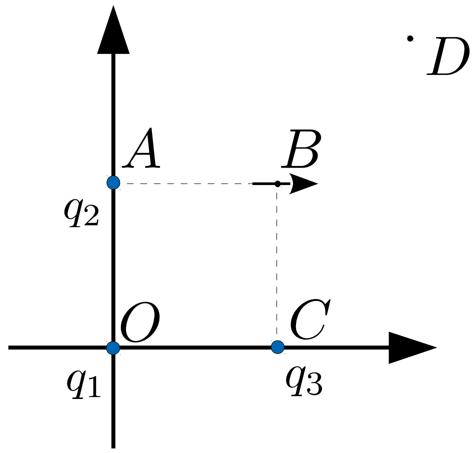
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

# a.a. 2021-2022
# Elementi di Fisica II:
# Prova scritta - 26 Gennaio 2022

## Problema 1

Si consideri un quadrato di lato $\ell = 13cm$ e di vertici $O$, $A$, $B$ e $C$ come in figura. Nei vertici $O$, $A$ e $C$ sono posizionate rispettivamente le cariche $q_1 = q$, $q_2 = 2q$ e $q_3 = q$. Il campo elettrico nel punto $B$ vale in modulo $E_B = 400V/m$.




1. Sapendo che $q < 0$, calcolare $q$.
2. Si consideri un dipolo elettrico di momento di dipolo $\vec{p} = p_0\vec{i}$ nel punto B, con $\vec{i}$ il versore lungo l'asse $x$ positivo e $p_0 = 2 \cdot 10^{-3} C \cdot m$. Calcolare l'energia esterna necessaria per ruotare il dipolo di $\pi/2$ in verso orario.
3. Si consideri una carica $q_0 = 500\mu C$ nel punto $B$. Che lavoro esterno è necessario compiere per spostare la carica $q_0$ dal punto $B$ al punto $D$ di coordinate $(2\ell, 2\ell)$?
4. Illustrare e dimostrare il teorema di Gauss per il campo elettrostatico

---

**Soluzione problema 1**

1. Il campo elettrico nel punto $B$ si calcola come somma dei campi generati dalle tre cariche:

$$\vec{E}_{1B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{2\ell^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j})$$
$$\vec{E}_{2B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{\ell^2}\vec{i}$$
$$\vec{E}_{3B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{\ell^2}\vec{j}$$

dove $\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono i versori relativi agli assi cartesiani.

Il campo totale è quindi

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{1B} + \vec{E}_{2B} + \vec{E}_{3B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\ell^2}\left[(\frac{q_1}{2\sqrt{2}} + q_2)\vec{i} + (\frac{q_1}{2\sqrt{2}} + q_3)\vec{j}\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\ell^2}\left[(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2)\vec{i} + (\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1)\vec{j}\right]$$

Il suo modulo vale

$$E_B = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0\ell^2}\sqrt{(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2)^2 + (\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1)^2} = \frac{|q|}{8\pi\epsilon_0\ell^2}\sqrt{3(7 + 2\sqrt{2})}$$

da cui

$$|q| = \frac{8\pi\epsilon_0\ell^2 E_B}{\sqrt{3(7 + 2\sqrt{2})}} \simeq 276\,pC \qquad \Rightarrow \qquad q = -276\,pC$$

2. L'energia di un dipolo in un campo elettrico è pari a

$$\mathcal{U} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_B$$

L'energia iniziale vale quindi

$$\mathcal{U}_0 = -(p_0\vec{i}) \cdot \vec{E}_B = -p_0 E_{Bx} = -p_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell^2}(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2) \simeq 693\, mJ$$

L'energia finale vale invece

$$\mathcal{U}_1 = -(-p_0\vec{j}) \cdot \vec{E}_B = p_0 E_{By} = p_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell^2}(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1) \simeq -399\, mJ$$

Il lavoro esterno vale quindi

$$\mathcal{L}_{ext} = \Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_0 \simeq -1.09\, J$$

3. Il potenziale nel punto $B$ vale

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{2}\ell} + \frac{q_2}{\ell} + \frac{q_3}{\ell}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right) \simeq -71V$$

Il potenziale nel punto $D$ vale

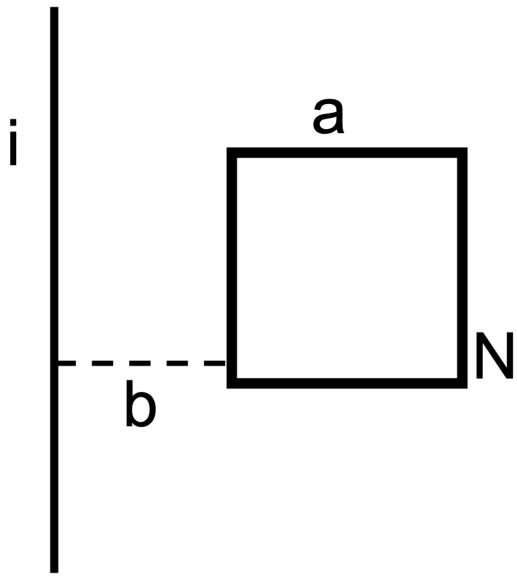
$$V_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{2\sqrt{2}\ell} + \frac{q_2}{\sqrt{5}\ell} + \frac{q_3}{\sqrt{5}\ell}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \simeq -32V$$

Il lavoro per spostare la carica vale

$$\mathcal{L}_{ext} = q_0(V_D - V_B) \simeq 19.2\, mJ$$

## Problema 2

Un lungo filo rettilineo è percorso da una corrente di intensità variabile con la legge $i = I_0 \sin\omega t$. Nel piano del filo è disposto un pacchetto di $N$ spire quadrate di lato $a$, con un lato del quadrato parallelo al filo. La distanza dal filo del lato vicino delle spire è $b$. Calcolare:



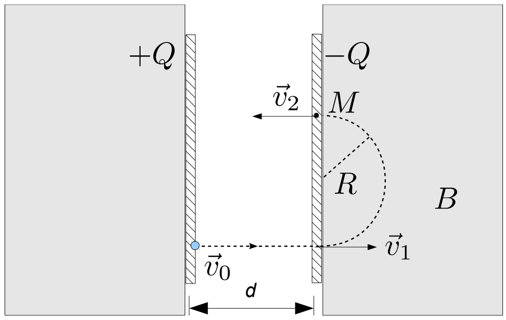

1. il flusso del campo magnetico attraverso le spire in funzione del tempo;
2. la forza elettromotrice indotta nel pacchetto di spire in funzione del tempo;
3. la forza elettromotrice nel caso particolare $I_0 = 1\ A$, $N = 1000$, $a = b = 10\ cm$, $\omega = 2\pi \cdot 50\ s^{-1}$ e $t = 1/400\ s$.
4. Descrivere brevemente le caratteristiche dei campi elettrico e magnetico nelle onde elettromagnetiche piane

**Soluzione problema 2**

1. Il campo magnetico generato dal filo vale
$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$
dove $r$ è la distanza dal filo. Il flusso attraverso il pacchetto di spire vale
$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = N \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u}_n \mathrm{d}\Sigma$$
Prendendo come $\mathrm{d}\Sigma$ delle strisce di altezza $a$ e larghezza $\mathrm{d}r$ si ottiene
$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = N \int_b^{b+a} B(r) a \mathrm{d}r = N \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} a \mathrm{d}r = \frac{N\mu_0 i a}{2\pi} \ln\frac{b+a}{b}$$
Siccome la corrente $i$ dipende dal tempo si avrà
$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \frac{Na\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi} \ln\frac{b+a}{b}$$
2. La fem indotta si calcola come
$$f_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{Na\mu_0 I_0 \omega \cos(\omega t)}{2\pi} \ln\frac{b+a}{b}$$
3. Il valore numerico della fem indotta vale
$$f_{ind} \simeq -3.08\, mV$$

## Problema 3

Un elettrone (massa $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$ e carica $|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$) con velocità iniziale $\vec{v}_0$ perpendicolare all'armatura si trova inizialmente all'interno di una armatura di un condensatore come in figura. Sulle armature di forma quadrata (lato $\ell = 50cm$) é posta una carica $Q = 150fC$. Le armature sono distanti $d = 1\ mm$. Dopo aver percorso il tratto $d$ entra in una zona in cui presente un campo magnetico perpendicolare alla sua velocità $\vec{v}_1$. Dopo aver percorso un mezza circonferenza di raggio $R = 1cm$ come in figura, l'elettrone ha velocità $\vec{v}_2$ di modulo $v_2 = 10km/s$.




Calcolare:

1. Modulo e verso (entrante o uscente dal foglio) del campo magnetico
2. Il modulo della velocità iniziale $v_0$
3. Calcolare il tempo necessario, a partire dall'istante iniziale, per raggiungere il punto $M$.
4. Descrivere l'effetto Hall e illustrare perchè può essere utilizzare per determinare il segno dei portatori di carica

---

**Soluzione problema 3**

1. Siccome la forza di Lorenza esercitata dal campo magnetico è verso l'alto, il campo magnetico deve essere uscente dal foglio. Il suo modulo si ricava sapendo il raggio della traiettoria, che vale

$$R = \frac{m_e v_2}{|e|B} \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{m_e v_2}{|e|R} \simeq 5.69\mu T$$

2. L'elettrone è accelerato dal campo elettrico di modulo

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\ell^2 \epsilon_0} \simeq 67.9 \cdot 10^{-3}\, V/m$$

che crea la differenza di potenziale tra le armature pari a

$$\Delta V = Ed \simeq 67.9\mu V$$

Siccome la velocità $v_1$ è in modulo uguale a $v_2$, per conservazione dell'energia vale

$$\frac{1}{2} m_e v_1^2 = \frac{1}{2} m_e v_0^2 - |e|\Delta V \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2|e|}{m_e}\Delta V} \simeq 11128 m/s$$

3. Il moto è inizialmente un moto uniformemente accelerato con legge oraria

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

dove

$$a = \frac{Ee}{m_e} \simeq -1.19 \cdot 10^{10} m/s^2$$

Per percorrere un tratto $d$ è necessario un tempo pari a $t_1$, dove $t_1$ è la soluzione più piccola dell'equazione

$$d = \frac{1}{2} a t_1^2 + v_0 t_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2ad}}{a} \simeq 94\, ns$$

Il tempo $t_1$ si ottiene anche ricordando la legge della velocità

$$v_1 = v_0 + at_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a} \simeq 94\, ns$$

Il tratto di circonferenza è invece percorso a velocità costante. Il tempo $t_2$ per percorrerla vale

$$t_2 = \frac{\pi R}{v_2} \simeq 3.142\, \mu s$$

Il tempo totale vale quindi

$$t_1 + t_2 \simeq 3.236 \mu s$$