Punto di accumulazione

Dato l'insieme $E \subset \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ (x_0 non serve che appartenga ad E)

si dice che $\bar{x}$ é punto di accumulazione per l'insieme E se

$\forall$ intorno $I_{(x_0)}$ esiste almeno un elemento x diverso da $\bar{x}$ e appartenente ad E

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in E \quad x \neq \bar{x} \quad t.c. \quad |x - \bar{x}| < \delta \iff \bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$$

N.B.

- Gli estremi di un intervallo sono sempre di accumulazione

Definizione di limite

Sia

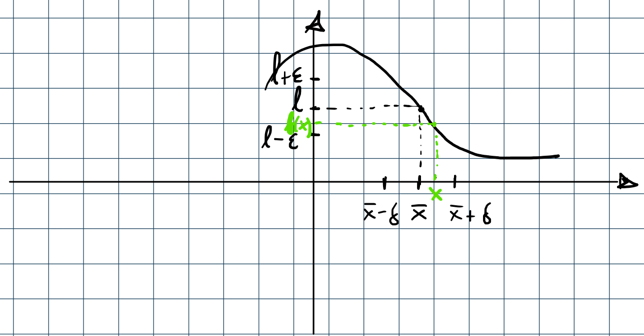
$f : E \to \mathbb{R}$

x_0 di accumulazione per E $\qquad \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l$

Si dice che $l \in \mathbb{R}$ é il limite di f che tende ad $\bar{x}$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[\setminus \{\bar{x}\} \cap E$ si ha che

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \iff |f(x) - l| < \varepsilon$$



Teorema di unicitá del limite

Sia

$f : E \to \mathbb{R}$

x_0 di accumulazione per E

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

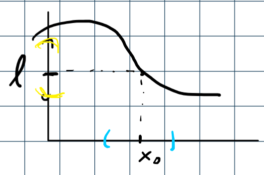
Allora il limite é univocamente determinato

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \ \text{e} \ \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \implies l_1 = l_2$$

Dimostrazione (per assurdo)

se $l_1 \neq l_2$ per la proprietá di separazione degli intorni

se $l_1 \neq l_2$ per la proprietà di separazione degli intorni
$\exists V_1$ intorno di l_1 e V_2 intorno di l_2 t.c. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$



V_1 e V_2 sono intorni sulle y

- poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ in relazione a V_1 $\exists U_1$ intorno di x_0 t.c.
  $\forall x \in U_1 \cap E \setminus \{x_0\}$ si ha che $f(x) \in V_1$
- poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ in relazione a V_2 $\exists U_2$ intorno di x_0 t.c.
  $\forall x \in U_2 \cap E \setminus \{x_0\}$ si ha che $f(x) \in V_2$

Dunque $\forall x \in (U_1 \cup U_2) \cap E \setminus \{x_0\}$ $f(x) \in V_1$ $f(x) \in V_2$

quindi $f(x) \in (V_1 \cap V_2)$ ma l'intersezione che dovevamo trovare era vuota

Locale limitatezza delle funzioni con limite finito in un punto

Sia

$f(x): E \to \mathbb{R}$

x_0 di accumulazione per E

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora $f(x)$ è limitata in un intorno di x_0,
esistono $N > 0$ e un intorno U di x_0 t.c. $|f(x)| \leq N$ $\forall x \in U \cap E$ con $x \neq x_0$

Limite destro e limite sinistro

- **Limite destro** $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

  Diciamo che f ha limite destro se

  ① x_0 punto di acc. anche per $E \cap]x_0, +\infty[$

  ② $\lim_{x \to x_0} f(x)_{|E \cap]x_0, +\infty[} = l$

- **Limite sinistro** $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

  Diciamo che f ha limite sinistro se

  ① x_0 punto di acc. anche per $E \cap]-\infty, x_0[$

  ② $\lim_{x \to x_0} f(x)_{|E \cap]-\infty, x_0[} = l$

Esistenza limite dx e sx e esistenza limite

Sia

$f: E \to \mathbb{R}$

x_0 punto di accumulazione per E sia dx che sx

Allora

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

Teorema permanenza del segno

Sia

$f: E \to \mathbb{R}$

x_0 punto di accumulazione per E

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0$

Allora

$\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\boxed{f(x) > 0}$ $\forall x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$

Dimostrazione

(caso $\ell > 0$)

scelgo $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$

per definizione di limite $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ ho

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \iff \ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \varepsilon \iff \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3}{2}\ell$$

$$0 < \frac{\ell}{2} < f(x) \iff \boxed{f(x) > 0}$$

(caso $\ell < 0$)

scelgo $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} < 0$ $\left(\varepsilon = \frac{|-\ell|}{2}\right)$

per definizione di limite $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$ ho

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \iff \ell + \frac{|\ell|}{2} < f(x) < \ell - \frac{|\ell|}{2} \iff \frac{3}{2}\ell < f(x) < \frac{\ell}{2}$$

$$f(x) < \frac{\ell}{2} < 0 \iff f(x) < 0$$

Teorema del confronto

Sia

$f, g: E \to \mathbb{R}$

x_0 di accumulazione per E

Se $f(x) \geq g(x)$

Allora $l_f \geq l_g$

Teorema dei due carabinieri

Siano $h(x), f(x), g(x) : E \to \mathbb{R}$

x_0 di accumulazione per E

$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$

Allora $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}}$

Dimostrazione

Prendo $\varepsilon > 0$ applico di definizione di limite a $h(x)$ e $g(x)$

$|h(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I_1$

$|g(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I_2$

le due disuguaglianze valgono $\forall I = I_1 \cap I_2 \setminus \{x_0\}$

allora per ipotesi $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

$$\boxed{l - \varepsilon} < h(x) \leq \boxed{f(x)} \leq g(x) < \boxed{l + \varepsilon}$$

quindi $\boxed{l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon}$

Limite fondamentale $\frac{\sin x}{x}$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

se $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\implies 0 \leq \sin x < x < \tan x$

$0 \leq 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$\times$ Th. Carabinieri $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Limiti di funzioni monotone

Sia $f: E \to \mathbb{R}$

x_0 punto di accumulazione per E

- Se f monotona in $]-\infty, x_0[$ allora

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x)$ se f è monotona crescente

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{x<x_0} f(x)$ se f è monotona decrescente

- Se f monotona in $]x_0, +\infty[$ allora

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x<x_0} f(x)$ se f è monotona crescente

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x)$ se f è monotona decrescente

Teorema del cambio di variabile

Siano $f, g: E \to \mathbb{R}$

Se g è continua in y_0 e $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$

allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$

Limite della somma

$\lim_{x \to x_0} f(x)_1 = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x)_2 = l_2$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x)_1 + f(x)_2 = l_1 + l_2$

Dimostrazione

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_1$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U_1 \cap E \setminus \{x_0\}$ $\quad l_1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x)_1 < l_1 + \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_2$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U_2 \cap E \setminus \{x_0\}$ $\quad l_2 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x)_2 < l_2 + \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x \in (U_1 \cap E \setminus \{x_0\}) \cap (U_2 \cap E \setminus \{x_0\}) = (U_1 \cap U_2) \cap E \setminus \{x_0\} \to U$ intorno di x

$(l_1 + l_2) - \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq f(x)_1 + f(x)_2 \leq (l_1 + l_2) + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)_1 + f(x)_2 = l_1 + l_2$

Prodotto di limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2 \quad , \text{cioè} \quad \left| (f(x) \cdot g(x)) - (l_1 l_2) \right| < \varepsilon^2$$

Dimostrazione

Altra dimostrazione

Dobbiamo dimostrare $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U$ intorno di x_0

$$|g(x) \cdot f(x) - l_1 \cdot l_2| < \varepsilon \qquad \forall x \in (U \cap E) \setminus \{x_0\}$$

$$|g(x) \cdot f(x) - l_1 \cdot l_2| = |g(x) f(x) - l_2 f(x) + l_2 f(x) - l_1 l_2| =$$

$$= |f(x) \cdot (g(x) - l_2) + l_2 (f(x) - l_1)| \leqslant |f(x)(g(x) - l_2)| + |l_2 (f(x) - l_1)| \leqslant ⊛$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \forall x \in (U_1 \cap E) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2|l_2|}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \quad \forall x \in (U_2 \cap E) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

$$|f(x)| \leqslant K$$

$$⊛ \quad \cancel{K} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{K}} + l_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2|l_2|} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Def. di limite per $\varepsilon > 0$

① $|f(x) - l_1| < \varepsilon \qquad \forall x \in U_1 \cap E \setminus \{x_0\}$

② $|g(x) - l_2| < \varepsilon \qquad \forall x \in U_2 \cap E \setminus \{x_0\}$

Caso $l_1 = l_2 = 0$

$$|f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in U_1$$

$$|g(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in U_2$$

$$|f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon^2 \qquad \forall x \in U_1 \cap U_2$$

Fisso $0 < \varepsilon < 1$

$$|f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon^2 < \varepsilon \quad \forall x \in U_3 \text{, cioé } |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon$$

Caso generale

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \implies \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - l_1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2 \implies \lim\limits_{x\to x_0} g(x) - l_2 = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to x_0} (f(x)-l_1)(g(x)-l_2) = 0$$

$$(f(x)-l_1)(g(x)-l_2) = f(x)\cdot g(x) - f(x)\, l_2 - g(x)\cdot l_1 + l_1\cdot l_2$$

Esplicito $f(x)\cdot g(x)$

$$f(x)\cdot g(x) = (f(x)-l_1)(g(x)-l_2) + f(x)\cdot l_2 + g(x)\cdot l_1 - l_1\cdot l_2$$

Faccio il limite

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{(f(x)-l_1)(g(x)-l_2)}_{0} + \underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)}_{l_1} \cdot l_2 + \underbrace{\lim_{x\to x_0} g(x)}_{l_2} \cdot l_1 - \lim_{x\to x_0} l_1\cdot l_2$$

$$= 0 + l_1 l_2 + \cancel{l_2 l_1} - \cancel{l_1}\cdot l_2 = \boxed{l_1\cdot l_2}$$

Limite del quoziente

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

Limite di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{y=-x}{=} \lim_{y\to -\infty} \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to -\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to -\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} =$$

$$= \lim_{y\to -\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to -\infty} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to -\infty} \left(\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\right)^{\frac{1}{y-1}} =$$

$$\lim h(x)^{k(x)} = l_1^{l_2} \implies e^1 = e$$

$$\lim_{y\to-\infty} h(x) \underset{z=y-1}{=} \left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$$

$$\lim_{y\to-\infty} k(y) = \lim_{y\to-\infty} \frac{y}{y-1} = 1$$

Il simbolo o-piccolo

Siano

$f, g: E \to \mathbb{R}$

x_0 di accumulazione per E

$g(x) \neq 0$ per $x \to x_0$

Si dice che $f(x) = o(g(x))$

se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Principio sostituzione degli infinitesimi

$f_1, f_2 \quad g_1, g_2$

$f_2 = o(f_1)$ e $g_2 = o(g_1)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{g_1}$$

Confronto tra infiniti e infinitesimi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{a^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} = 0$$

Gerarchia infiniti tra le funzioni elementari