Stirling : $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Eventi indipententi : $P_{(A \cap B)} = P_{(A)} \cdot P_{(B)}$

Binomiale : $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Formula di Poisson $\quad P_{(X_n = k)} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ con $\lambda = np$

Processo di Poisson $\quad P_{(T>t)} = e^{-\lambda t}$

Variabile geometrica $\quad P = p(1-p)^n$ numero esca al n+1 tentativo

per $k \to +\infty$ $\quad P_{(X>n)} = (1-p)^n$ sempre uscita al n+1 ma con sequenza infinita

Formula della partizione $\quad P_{(E)} = P_{(E|F_1)} + P_{(E|F_2)}$

## Variabili aleatorie

Variabile aleatoria di Poisson

↳ discreta $\quad X \sim P_o(\lambda) \quad E[X] = Var[X] = \lambda = np$

$B(n,p) \sim P_o(\lambda)$ con $\lambda = np$

- Variabile aleatorie continue

$$P_{(X \in [a,b])} = \int_a^b f(x)\,dx = 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Variabile esponenziale : $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ e densità $f_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$

$1 - e^{-\lambda t}$ (è in un quiz)

$$P_{(X|Y)} = \frac{P_{(X \cap Y)}}{P_{(Y)}}$$

- Valore atteso

V.A. discrete $E[X] = \sum_{i=0}^{X} x \cdot P_{(X==i)}$ → densità discreta

continue $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$

Valore atteso composta

↳ discrete $E[g(x)] = \sum_{x=0}^{\infty} g(x) \cdot P_{(X==x)}$

↳ continue $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$

$Var[X] = E[X^2] - \mu_X^2$

$Var[X+Y] = n_X \cdot Var[X] + n_Y \cdot Var[Y] + 2\, Cov[X,Y]$

Se $X$ e $Y$ indipendenti $\Longrightarrow Cov[X,Y] = 0$

## Variabile normale standard

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X = \mu + \sigma Z$

$\mu \to$ valore atteso
$\sigma^2 \to$ varianza
$\sigma \to$ deviazione standard

$$P_{(X \leq K)} = P_{(\mu + \sigma Z \leq K)} = P\left(Z \leq \frac{K-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right)$$

$\phi(K) = x$

$K = \phi^{-1}(x)$

↳ se $x$ no in tabella $K = -\phi^{-1}(1-x)$

$$P_{(X \geq K)} = 1 - P_{(X \leq K)}$$

- Teorema Centrale del Limite

$$P_{(\overline{X_1 + \dots + X_n} \leq a)} \approx P\left(n\mu + \sqrt{n\sigma^2}\, Z \leq a\right) \longrightarrow \phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

↳ Correzione in continuità

$$X \sim B(n,p) \approx N(np, np(1-p))$$

- Variabili aleatorie congiunte

$$\sum p_x = \sum p_y = 1$$ discreta

$$Cov[x,y] = E[xy] - \mu_x \mu_y$$

$$E[xy] = \sum x \cdot y \cdot p_{x,y}(x,y)$$

$$P_{(x<y)} = \int_T f_{x,y}(x,y)\, dx dy = \int f_x(x)\, f_y(y)\, dx dy$$

$$P_{(x+y<k)} = \int_0^k \int_0^{k-x} f_{x,y}(x,y)\, dy dx$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)\, dy$$ continua

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

Una curva ha un grafico, ma un grafico può rappresentare più curve

Sostegno = grafico

$$f(x.yy) = f(x) + f(x) \cdot 0.yy$$

Lunghezza curva in coordinate polari $L = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2}\, dt \quad t \in [a,b]$

Lunghezza curva $L = \int_a^b |f'(t)|\, dt \quad t \in [a,b]$

Lunghezza grafico $L = \int_a^b \sqrt{1 + (h'(t))^2}\, dt \quad t \in [a,b]$

Sia, per ogni $t \in [0, 2\pi]$

$$D_t := \{(\rho\cos t, \rho\sin t) : \rho > 0, \}.$$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si abbia $\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in D_t} f(x,y) = 3$. Allora $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 3$.

No

Sia, per ogni $n = 0, \ldots, 99\,999$

$$D_n := \left\{(\rho\cos t, \rho\sin t) : \rho > 0, t \in \left[n\frac{2\pi}{100\,000}, (n+1)\frac{2\pi}{100\,000}\right]\right\}.$$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $n = 0, \ldots, 99\,999$ si abbia $\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in D_n} f(x,y) = 3$. Allora $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 3$.

Select one:
- True ✔
- False

Sì

Siano $D$ un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione. Si supponga che $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_m$ e che per ogni $i = 1, \ldots, m$, $p \in \mathbb{R}^m$ sia di accumulazione per $D_i$ e $\lim_{x \to p, x \in D_i} f(x) = l$. Allora $\lim_{x \to p, x \in D} f(x) = l$

$t$ varia su un numero finito di intervalli

## Vettore unitario di crescita

$$\frac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$$ se voglio prima componente $\frac{\partial x}{|\nabla f(x,y)|}$

Tasso crescita max $+|\nabla f(x,y)|$

min $-|\nabla f(x,y)|$

$$D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot u = \partial x \cdot u_1 + \partial y \cdot u_2$$

$u$ vettore unitario può essere

| | |
|---|---|
| Una funzione differenziabile è di classe $C^1$ | FALSO ✔ |
| Una funzione che ammette derivate parziali in un punto è differenziabile su quel punto | FALSO ✔ |
| Una funzione differenziabile in un punto $p$ è continua in $p$ | VERO ✔ |
| Una funzione che ammette derivate parziali in $p$ è continua in $p$ | FALSO ✔ |
| Una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n$ è differenziabile in $p \in D$ se e solo se $\nabla f(p)$ esiste ed è $\lim_{x\to p} f(x) - [f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p)] = 0.$ ($/ \vert x-p \vert$) | FALSO ✔ |
| Una funzione di variabile **reale** derivabile in $t_0$ è differenziabile in $t_0$ | VERO ✔ |

Una funzione $C^1 \Rightarrow$ differenziabile

La funzione deve essere continua per $p$ (def. $C^1$)

Differenziabilità $\Rightarrow$ continuità

Non bastano le derivate parziali

la definizione di derivabili in e differenziabile in $p$ coincide

| | |
|---|---|
| Se una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$ ha un minimo locale in $p \in D$ allora $\nabla f(p) = 0$ | FALSO ✓ |
| Un punto critico è necessariamente un massimo o minimo locale | FALSO ✓ |
| Se una funzione di classe $C^2$ ha un punto critico, il criterio dell'Hessiana permette sempre di concludere sulla natura del punto | FALSO ✓ |
| La definizione di massimo o minimo coinvolge solo delle disuguaglianze, non il gradiente o l'hessiana | VERO ✓ |
| Un punto critico $p \in D$ è di sella per una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se e solo se per ogni intorno $U$ di $p$ esistono $x_1, x_2 \in U \cap D$ tali che $f(x_1) \leq f(p)$ e $f(x_2) \geq f(p)$ | FALSO ✓ |

Verifico se esiste la derivata parziale con il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p+t) - f(p)}{t}$$

Corollario regola della catena $\frac{d}{dt} f(p(t)) = \nabla f(p) \cdot f'(p(t)) = \partial x f_p \cdot f(p(t))_1 + \partial y f_p \cdot f(p(t))_2$

• Hessiana

Valuto p.ti max, min, sella

$$Hess\,(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \partial x \partial x & \partial y \partial x \\ \partial x \partial y & \partial y \partial y \end{pmatrix}$$

per i punti critici dati dal sistema

$$\begin{cases} \partial x\, f(x,y) = 0 \\ \partial y\, f(x,y) = 0 \end{cases}$$

Approssimazione piano tangente $\quad p = (p_1, p_2) \quad x = (x_1, x_2)$

$$f(x_1,x_2) = f_p + \nabla f_p (x - p) = f_p + \partial x f_p \cdot (x_1 - p_1) + \partial y f_p \cdot (x_2 - p_2)$$

• Integrale curvilineo

$$\int_r \mu_x \, ds = \int_a^b \mu_{(r(t))} \, |r'(t)| \, dt$$

| | |
|---|---|
| L'integrale di un campo su un cammino coincide con l'integrale dello stesso campo sul cammino inverso | FALSO ✓ |
| Un campo continuo radiale su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è conservativo. | VERO ✓ |
| Un campo continuo conservativo è un campo gradiente | VERO ✓ |
| Un campo continuo gradiente è conservativo | VERO ✓ |
| Siano $F, G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due campi, con $F$ conservativo. Allora $F + G$ è conservativo se e solo se $G$ è conservativo. | VERO ✓ |
| Un campo $C^1$ irrotazionale su un dominio è conservativo | FALSO ✓ |

Continuo radiale $\Rightarrow$ gradiente $\Rightarrow$ conservativo

gradiente $\Leftrightarrow$ conservativo

gradiente $\Rightarrow$ conservativo

Se conservativo $\Rightarrow$ irrotazionale

Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ campo $C^1$ **irrotazionale**. Quali delle seguenti affermazioni sono vere, indipendentemente dal campo dato? Si perde 25% per risposta errata.

Select one or more:

- ☐ a. La circuitazione di $F$ sul disco di centro l'origine e raggio 1 è uguale zero
- ☐ b. $F$ è un campo gradiente
- ☑ c. $F$ è conservativo sul semipiano $x > 0$ ✔ Per dominio
- ☐ d. $F$ è conservativo
- ☑ e. La circuitazione di $F$ sul disco di centro (2,2) e raggio 1 è uguale zero ✔

conservativo $\Longleftrightarrow$ circuitazioni nulle

## Teorema fondamentale dei campi gradienti

$$\int F \cdot dr = U_{(b)} - U_{(a)}$$

$$r_{(a)} = (x,y) \qquad r_{(b)} = (x,y)$$

## • Matrice Jacobiana

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} \partial u_1 & \partial u_2 \\ \partial v_1 & \partial v_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E) = \det \varphi'(u,v) \cdot \text{Area}(E)$$

det Jacobiana

– Quando cambio le variabili $\displaystyle\int_D f(x,y)\, dx dy = \int f(\varphi(u,v)) \cdot |\varphi'(u,v)|\, du dv$

## • Baricentro

ascissa del baricentro $\rightarrow$ $$x_D = \frac{\int_D x_i \, dx dy}{\text{Area}(D)}$$

$$\text{Area}(D) = \int_D 1 \, dx dy$$

## • Integrazione per fili paralleli

$$\iiint dz\, dy dx = \iiint dy dx\, dz$$

## • Area superficie parametrica

$$\text{Area}(p) = \int_D |p_u(u,v) \times p_v(u,v)| \, du dv$$

- Integrale superficiali → trovo superficie

$$\int_{p} \mu \, d\sigma_p = \int_D \mu(p(u,v)) \, |p_u \times p_v(u,v)| \, du dv$$

$$p(t,\theta) = (r_1(t)\cos\theta, r_1(t)\sin\theta, r_2(t)) \quad \text{con } r(t) = (r_1(t), r_2(t))$$

↳ rotazione attorno a z (è il parametro)

- Trapezoide di una funzione sopra una curva

$$Trap_r(h) = \{ (r(t), z) = (r_1(t), r_2(t), z) : t \in [a,b], 0 \leq z \leq h(r(t)) \}$$

$$Area(Trap_r(h)) = \int_a^b h(r(t)) \, |r'(t)| \, dt$$

$$\text{con } |r'(t)| = |p_t \times p_z| (t,z)$$

- Coordinate polari sferiche

$$r_{(\phi,\vartheta)} = (\rho\cos\vartheta\sin\phi, \rho\sin\vartheta\sin\phi, \rho\cos\phi) \quad \phi \in [0,\pi] \quad \vartheta \in [0,2\pi]$$

- Teorema Pappo-Guldino

$$Vol(D) = 2\pi \cdot x_D \cdot Area(D)$$

– Area superficie di rotazione

rotazione attorno a z

$$2\pi \cdot x_r \cdot Lunghezza(r) = 2\pi \cdot \int_r x \, ds$$

superficie

$$Area(p) = 2\pi \cdot \int_a^b r_1(t) \cdot |r'(t)| \, dt$$

– Volume di rotazione

ruoto attorno ad x

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_D z \, dz dx$$

- Su dominio positivamente orientato

$$\int_{\partial^+ D} F \cdot T \, ds = \int_{r_1} F_1 \cdot T \, ds + \int_{r_2} F_1 \cdot T \, ds$$

- **Formula di Green**

$$\int_{\partial^+ D} F \cdot T \, ds = \int \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dx dy$$

- **Teorema divergenza**

$$\int_{\partial^+ D} F \cdot T \, ds = \int_D \operatorname{div} F \, dx dy = \int_D \partial_x F_1(x,y) + \partial_y F_2(x,y) \, dx dy$$

- **Flussi di F attraverso r**

$$\int_a^b \det \begin{pmatrix} F_1(r(t)) & r_1'(t) \\ F_2(r(t)) & r_2'(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b F_1(r(t)) \, r_2'(t) - F_2(r(t)) \, r_1'(t) \, dt$$

- **Flusso uscente da un dominio**

$$\int_{\partial D} F \cdot N_{ext} \, ds = \int_D F_1 dy - F_2 dx$$

## Cap 10

- Equazione differenziabile esatta

$$y' = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \qquad M_{(x,y)} dx - N_{(x,y)} dy = 0 \implies \text{quindi conservativo}$$

Trovo primitiva di $M_{(x,y)}$ e $N_{(x,y)}$ $\implies U_{(x,y)} = c$

- Variabili separabili

$$\begin{cases} y' = g(x) y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\int \frac{y'}{y(x)} dx = \int g(x) \, dx \implies \int \frac{du}{u} = \int g(x) \, dx$$

cambio $y(x)$ con $u$

$$y_{(x)} = X_{(x)} + C$$

- Equazione differenziabile lineare del I ordine

$y'_{(x)} + a y_{(x)} = b$

$y_{(x)} = B e^{-A} + C e^{-A}$

- $A$ primitiva di $a$
- $B$ primitiva di $b e^{A}$

# Formule utili

$\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

$\int_a^b dx = -\int_b^a dx$ se $b < a$

Convergenza $\int \frac{1}{x^a} dx$ se $a < 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

Baricentro di un triangolo $y_b = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{5^x} = \frac{1}{(1 - 1/5)}$

Ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 = 1^2$ Circonferenza

Superficie sfera $= 4\pi r^2$