Capitolo 1

Approssimazione attraverso la derivata

$$f(x.yy) \approx f(x) + f'(x) \cdot 0.yy$$

- Lunghezza della curva (in <u>coordinate polari</u>)

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2}\, dt \qquad t \in [a,b]$$

- Lunghezza della curva $f(t) = (t_x, t_y, t_z)$

$$L(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt \qquad t \in [a,b]$$

Lunghezza del grafico di $h(t)$

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + h'(t)^2}\, dt$$

Capitolo 2

I limiti si calcolano <u>parametrizzando con le curve</u>. Se il limite dipende da m non ha soluzione.

Metodo delle stime uniformi

Vari metodi di calcolo dei limiti a 2 variabili

Capitolo 3

Tasso di crescita

La crescita è massima lungo la direzione del gradiente.

$D_u f$ assume valore massimo per $u = \dfrac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$ dove u è il vettore unitario

Tasso max crescita : $|\nabla f(p)|$

Tasso min crescita : $-|\nabla f(p)|$

Per calcolare $\partial_x f(0,0)$ uso il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t) - f(0,0)}{t}$$

Per calcolare la derivata direzionale di f in p lungo u è il limite finito

$$D_u f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tu) - f(p)}{t}$$

$$D_{\lambda u} f(p) = \lambda D_u f(p)$$

- Spazio tangente $z = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p)$

se f è differenziabile la funzione affine $L(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p)$
è la linearizzazione di f in p

• Il gradiente $\nabla f(p) = (\partial_x f(p), \dots, \partial_n f(p))$

- Formula del gradiente: $D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot u = \partial_x f(p) \cdot u_1 + \dots + \partial_n f(p) \cdot u_n$

f di classe C^1 attorno a $p \implies f$ differenziabile in p

f è di classe C^1 in un aperto se è continua e le derivate parziali di f esistono e sono continue in quell'aperto

• Funzione differenziabile: $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - (f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p))}{|x - p|}$

Funzione differenziabile in un punto interno $\implies$ continua

differenziabile $\implies$ esistono derivate direzionali

Regola della catena: $(f \circ x)'(t_0) = \nabla f(x(t_0)) \cdot x'(t_0) = \partial_{x_1} f(x(t_0)) x_1'(t_0) + \dots + \partial_{x_n} f(x(t_0)) x_n'(t_0)$

Capitolo 6

Teorema Hessiana

$$\text{Hess}(f(p)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f_p & \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f_p \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f_p & \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f_p \end{pmatrix}$$

• I punti critici sono quelli dove $\nabla f_p = 0$

Se f è differenziabile nell'insieme aperto D, i punti $p \in D$ t.c. $\nabla f(p) = 0$ si dicono punti critici di f su D

↳ li trovo facendo $\begin{cases} \partial_{x_1} f(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \partial_{x_n} f(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$

$$\text{Hessiana} = \begin{pmatrix} \partial_{xx} & \partial_{xy} \\ \partial_{yx} & \partial_{yy} \end{pmatrix}$$

Se $\det(\text{Hess} f(p)) > 0$

- Se $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f_p < 0 \implies f_p$ è un massimo locale stretto
- Se $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f_p > 0 \implies f_p$ è un minimo locale stretto

Se $\det(\text{Hess} f(p)) < 0 \implies f_p$ è un punto di sella

• Approssimazione con piano tangente: $z = f(p) + \nabla f(p)(x - p)$

$f(x_1, x_2) \implies (x_1 - x_p, x_2 - y_p)$

Capitolo 5

- Integrale curvilineo $\int_r \mu \, ds = \int_a^b \mu(r(t)) \, |r'(t)| \, dt$

$r(t)$ è una curva di parametro t (es. $x = y^2$ con $y = t$ $r(t) = (t^2, t)$)

- Teorema fondamentale dei campi gradienti

$$\int_r F \cdot dr = U(r(b)) - U(r(a))$$

in particolare F è conservativo

- Un campo si dice conservativo se per ogni coppia di cammini r_1 e r_2 con gli stessi estremi si ha $\int_{r_1} F \cdot dr_1 = \int_{r_2} F \cdot dr_2$

- Campo irrotazionale => circuitazione nulla se non prendo dentro nulla

se $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$ $\partial_j F_i = \partial_i F_j$

Se conservativo allora F è irrotazionale

Cap. 6

- Area regione delimitata da coordinate polari

$$E = \{(\rho, t) \in [0, +\infty[\times [a, b] : 0 \leq \rho \leq \rho(t), t \in [a, b]\}$$

$$\frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(t) \, dt \qquad \text{con} \qquad t \in [a, b]$$

- Matrice della Jacobiana di $\varphi(u,v)$

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1(u,v) & \partial_v \varphi_1(u,v) \\ \partial_u \varphi_2(u,v) & \partial_v \varphi_2(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1(u,v) \\ \nabla \varphi_2(u,v) \end{pmatrix}$$

- Cambiamento di cambiamento di variabili

$$\int_D f(x,y) \, dx\,dy = \int_E f(\varphi(u,v)) \, |\varphi'(u,v)| \, du\,dv$$

- Area e Jacobiana

$\varphi(u,v) = \binom{u}{v}$ $\qquad D = \varphi(E)$ $\qquad \text{Area}(D) = \det(\varphi(u,v)) \cdot \text{Area}(E)$

coeff. moltiplicativo con il quale la trasformazione lineare $\varphi(u,v)$ muta le aree

- Cambio in coordinate polari

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f(\rho\cos t, \rho\cos t)\,\rho\,d\rho\,dt$$

Cap. 7

Volumi

- Il volume di un insieme nello spazio:

  Il volume di $\Omega \in \mathbb{R}^3$ limitato é $Vol(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx\,dy\,dz$

- Dominio semplici rispetto ad xy

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)$$

- Formula di riduzione

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

- Cambio in coordinate polari sferiche (domini radicali o anelli sferici)

  $\forall \rho \geq 0,\ \vartheta \in [0, 2\pi],\ \phi \in [0,\pi]$ $\quad \varphi(\rho,\vartheta,\phi) = (\rho\sin\phi\cos\vartheta, \rho\sin\phi\sin\vartheta, \rho\cos\phi)$

  - Negli integrali tripli

    Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Si ha $\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_\Sigma f_{(\rho\sin\phi\cos\vartheta, \rho\sin\phi\sin\vartheta, \rho\cos\phi)}\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\vartheta\,d\phi$

    $\Sigma = \{(\rho,\vartheta,\phi) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi] \times [0,\pi]$

- Cambio in coordinate cilindriche ($f(x,y,z)$ dipende dalla quota z e dalla distanza $\sqrt{x^2+y^2}$ dall'asse z) $\quad f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2}, z)$

  $\forall \rho \geq 0,\ \vartheta \in [0,2\pi],\ z \in \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(\rho,\vartheta,z) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, z)$

  - Negli integrali tripli

    Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Si ha $\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_\Sigma f_{(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, z)}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta\,d\phi$

    $\Sigma = \{(\rho,\vartheta,\phi) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi] \times \mathbb{R}$

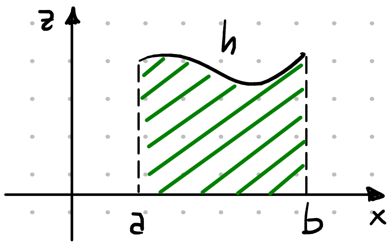
- Baricentro $\longrightarrow$ ascissa del baricentro: $x_B = \dfrac{\int_D x_i\,dx}{Area(D)}$

Volume solidi di rotazione (Pappo guldino)

Ruoto attorno a z

$$Vol(\Omega) = 2\pi\, x_D\, Area(D) = 2\pi \int_D x \, dx\, dz$$

dove x_D è l'ascissa del baricentro di D, distanza del baricentro dall'asse di rotazione



$$Vol(\Omega) = \int_a^b Area\ \Omega(x)\, dx = \int_a^b \pi\, h(x)^2\, dx$$

Cap. 8

- Area di una superficie parametrica del tipo $p(u,v) = (p_1(u,v), p_2(u,v), p_3(u,v))$

$$Area(p) = \int_D |p_x(x,y) \times p_y(x,y)|\, dx\, dy = \int_r x\, ds$$

Superficie cartesiana

- Se $p: (x,y) \in D \to (x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$ $\quad z = f(x,y)$
  calcolo la sua area con $Area(p) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}\, dx\, dy$

- La superficie di rotazione ottenuta "ruotando" r attorno all'asse z è la superficie parametrica

$$p(t,\vartheta) = (r_1(t)\cos\vartheta, r_1(t)\sin\vartheta, r_2(t)) \qquad (t,\vartheta) \in [a,b] \times [0, 2\pi]$$

- Area di una superfice di rotazione (Pappo-Guldino)
  L'area della superficie ottenuta ruotando la curva r attorno all'asse z è pari a

$$2\pi \cdot x_r \cdot Lunghezza(r) = 2\pi \cdot \int_r x\, ds$$

- $Area(p) = \int_D r_1(t)\, |r'(t)|\, dt\, d\vartheta = 2\pi \int_a^b r_1(t)\, |r'(t)|\, dt = 2\pi \int_r x\, ds$

Integrale superficiale

- Sia $p: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie e $\mu: p(D) \to \mathbb{R}$ una funzione continua
  L'integrale di μ su p è

$$\int_p \mu\, d\sigma_p = \int_D \mu(p(u,v))\, |p_u \times p_v(u,v)|\, du\, dv$$

- Trapezoide di una funzione sopra una curva

$$\mathrm{Trap}_r(h) = \{ (r(t),z) = (r_1(t), r_2(t), z) : t \in [a,b], 0 \leq z \leq h(r(t)) \}$$

$$\mathrm{Area}(\mathrm{Trap}_r(h)) = \int_a^b h(r(t)) |r'(t)| \, dt$$

$$\text{con } |r'(t)| = |p_t \times p_z| (t,z)$$

Cap 9

- Dominio Stokiano
  - attorno ad ogni punto del bordo D vi è separazione tra interno e esterno
  - "se camminassimo lungo il bordo la parte sinistra del corpo è sempre verso D"

  ↳ Su bordo positivamente orientato

$$\int_{\partial^+ D} F \cdot T = \int_{\partial^+ D} F_1 \, dx + F_2 \, dy = \int_{r_1} F_1 \cdot T \, ds + \int_{r_2} F \cdot T \, ds$$

- Formula di Green

$$\mathrm{Area} = \int_D dx\,dy$$

$$\int_{\partial^+ D} F_1(x,y) \, dx + F_2(x,y) \, dy = \int_{\partial^+ D} F \cdot T \, ds = \int_D \partial_x F_2(x,y) - \partial_y F_1(x,y) \, dx\,dy$$

- Teorema della divergenza

$$\int_{\partial^+ D} F \, ds = \int_D \mathrm{div}\, F \, dx\,dy = \partial_x F_1(x,y) + \partial_y F_2(x,y)$$

- Flusso di F attraverso r, indicato con $\int_r F_1 \cdot N_r \, ds$

$$\int_a^b \det \begin{pmatrix} F_1(r(t)) & r_1'(t) \\ F_2(r(t)) & r_2'(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b F_1(r(t)) \, r_2'(t) - F_2(r(t)) r_1'(t) \, dt$$

$$= \int_r F_1(x,y) \, dy - F_2(x,y) \, dx$$

- Flusso uscente da un dominio

$$\int_{\partial D} F \cdot N_{ext} \, ds = \int_D F_1 dy - F_2 dx$$

Formule utili

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int_a^b dx = -\int_b^a dx \quad \text{se } b < a$$

Convergenza $\int \frac{1}{x^\alpha} dx$ se $\alpha < 1$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Baricentro di un triangolo $y_D = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{5^x} = \frac{1}{(1 - 1/5)}$$

Ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 = 1^2$ Circonferenza

Capitolo 1

- Il numero di elementi di un insieme (cardinalità) si indica con $|X|$

- **Sequenze**: $I_n \times \ldots \times I_n$ (Es. estrazione palline senza ripetizione)
  ↳ con ripetizione $S((n,k)) = n^k$

- **Permutazioni**: qualunque sequenza di $(a_1, \ldots, a_k)$ riordinata
  (Es. $(1,2,3) \to (1,3,2)$)

- **Spartizioni**: sottoinsiemi a due a due distinti disgiunti, eventualmente vuoti
  (Es. Distribuzione di 7 libri a 6 persone) ← una può non riceverne

- Principio di moltiplicazione

  Gli elementi di X possono essere individuati in più fasi
  - 1^a fase che ha m_1 esiti possibili
  - 2^a fase che ha m_2 esiti possibili

  ...
  - n^a fase che ha m_n esiti possibili

  Allora $|X| = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$

- **Formula di Stirling**

  $n \geq 0 \quad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

  Cifre in un numero $(\log_{10} k) + 1$

- Sequenze senza ripetizioni $S(n,k) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} & k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

- **Binomiale**

  $$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} & k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Varie proprietà ?

- Numero sottoinsiemi di k elementi di I_n é $\binom{n}{k}$

Capitolo 2

- Probabilità uniforme $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

con $|A|$ num esiti favorevoli

$|\Omega|$ spazio campionario

- $P(A^c) = 1 - P(A)$ → complementare

- Probabilità su spazio campionario numerabile

Se $\Omega = \{x_0, x_1, \dots\}$ Se $(p_k)_k$ è successione positiva e $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ si ottiene una probabilità su Ω ponendo

$$p_k = P(x_k) \quad k \in \mathbb{N} \quad P(A) = \sum_{k : x_k} p_k$$

Capitolo 3

- **Probabilità condizionata**

Sia Ω uno spazio campionario, P una funzione di probabilità su Ω
Diciamo probabilità condizionata di E ad F il numero

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(EF)}{P(F)} \qquad P(x \cap y) = P(xy)$$

Si è realizzato F. Calcolare probabilità ... $P(\cdot|F)$

- Probabilità di una intersezione di eventi
Se $P(F) \neq 0$ si ha $P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$

- Formula del prodotto

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

- Formula di inversione

$$P(F|A) = \frac{P(A|F)\, P(F)}{P(A)}$$

- Formula della partizione (o prob totale)

$$P(E) = P(E|F_1) \cdot P(F_1) + \dots + P(E|F_n)\, P(F_n)$$

- Formula di Bayes

$$P(F_1|E) = \frac{P(E|F_1) \cdot P(F_1)}{P(E|F_1) \cdot P(F_1) + \dots + P(E|F_n)\, P(F_n)}$$

- Eventi indipendenti

Sia Ω uno spazio campionario e P una funzione di probabilità su Ω.
Siano $A, B \subseteq \Omega$. A e B sono indipendenti per (Ω, P) se $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$$A, B \text{ indipendenti} \iff P(A|B) = P(A)$$

- Tre eventi indipendenti se

1- $P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad P(AC) = P(A) \cdot P(C) \quad P(BC) = P(B) \cdot P(C)$
(indipendenza a due a due)

2- $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

- Indipendenza condizionata

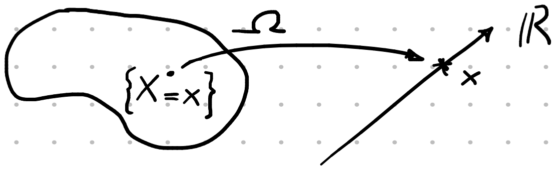
Due eventi A, B sono indipendenti condizionatamente ad F se lo sono per $P(\ |F)$ cioè se

$$P(AB|F) = P(A|F)\, P(B|F)$$

Capitolo 4

Variabili aleatorie (num di teste su 3 lanci, persone in stazione ogni giorno)

- Una variabile aleatoria su (Ω, P) è una funzione $X: \Omega \to \mathbb{R}$



- Funzioni di distribuzione

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$F_X: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$x \in \mathbb{R} \longmapsto P(X \leq x)$

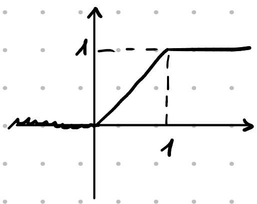
Esempio

Aspettiamo un autobus che passa a caso tra mezzogiorno e l'una: se T è la variabile aleatoria uguale all'istante di arrivo del bus riteniamo $P(T \in [a,b]) = b-a$, $0 \leq a \leq b \leq 1$
Qual è la funzione di distribuzione di T?

mezzogiorno   una

$F_T(t) = P(T \leq t)$

- $t < 0$
- $t \in [0,1]$ $F_T(t) = P(T \in [0,t]) = t$
- $t > 1$ $F_T(t) = 1$

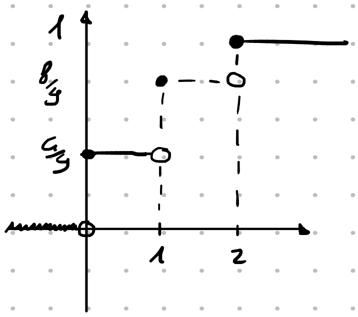


Altro esempio

Lanciamo 2 volte una moneta che dà testa con probabilità 1/3, lanci indipendenti. Sia X la variabile aleatoria uguale al numero di teste. Descrivere la distribuzione di X e tracciarne il grafico.

$X = \#$ teste sui due lanci

- $x < 0$ $P(X \leq x) = 0$
- $x \in [0,1[$ $P(X \leq x) = P(X=0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ num. lanci
- $x \in [1,2[$ $P(X \leq x) = P(x==0) + P(x==1) = \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$
- $x > 2$ $P(X \leq x) = 1$



Proprietà

- F_X è crescente
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- F_X è continua a destra
- $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha $P(X<a) = F_X(a^-) := \lim_{x \to a^-} F_X(x)$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha $P(X=a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

- **Variabile aleatorie discreta**

  Una V.A. si dice discreta se l'immagine $\mathrm{Im}(X)$ di X è un insieme finito o numerabile $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

  – Densità discreta   prob di assumere valori

  Diciamo discreta di X la funzione $p_X : \mathbb{R} \to [0,1] \quad x \mapsto P(X=x)$

- **Variabile di Bernoulli**

  V.A. di Bernoulli di parametro p se

  1- $\mathrm{Im}\, X = \{0,1\}$

  2- $p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1-p$

  Scriveremo $X \sim Be(p)$

  $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Variabile binomiale**

  V.A. di parametri (n,p) se

  1- $\mathrm{Im}\, X = \{0,1,2,\dots,n\}$

  2- $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

  Scriveremo $X \sim B(n,p)$

  – Siano $X_1, \dots, X_n$ Bernoulli di parametro p indipendenti.
  Allora $X = X_1 + \dots + X_n \sim B(n,p)$

- **Variabile geometrica** (Tot mosse affinché esca un numero da un tot di lanci)

  V.A. geometrica di parametro $p \in]0,1[$ e si scrive $X \sim Ge(p)$ se

  1- $\mathrm{Im}\, X = \mathbb{N}_{\geq 1}$ $((1-p)^k)_{k=1,2,\dots}$

  2- $p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$ per $P(X>k) = (1-p)^k$

Capitolo 5

• Variabile di Poisson

Una V.A. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice V.A. di Poisson $\lambda > 0$ (si pone $X \sim Po(\lambda)$) se

probabilità / tot. elementi

$\lambda = p \cdot n$

1- $Im\ X = \mathbb{N}$

2- $p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

• Approssimazione della variabile di Poisson

Siano $\lambda > 0$ e $X_n \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$, $n = 1,2,3,\dots$ Allora

$$\lim_{n \to +\infty} P_{(X_n = k)} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Si può fare solo con p piccola ed n grande

- Somma di Poisson indipendenti

Siano $X \sim Po(\lambda)$ e $Y \sim Po(\mu)$ due variabili aleatorie indipendenti. Allora

$$X + Y \sim Po(\lambda + \mu)$$

• Processo di Poisson

$$X_t \sim Po(\lambda t) \qquad P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

Capitolo 6

• Valore atteso di una variabile discreta con finiti valori

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P_{(X == x_i)} \qquad \{x_1, \dots, x_n\}$$

Esempio

$Im(X) = \{-1, 0, 1\}$

$p_X(-1) = \frac{1}{3} \quad p_X(0) = \frac{1}{6} \quad p_X(1) = \frac{1}{2}$

$E[X] = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

- Valore atteso di una Bernoulli: Sia $p \in [0,1]$. Se $X \sim Be(p)$ si ha $E[X] = p$
- Geometrica: $X \sim Ge(p)$ $\quad E[X] = \frac{1}{p}$

Esempio

Si lancia più volte un dado equilibrato. Quanti lanci ci aspettiamo di fare in media affinchè appaia la prima volta il 5?

$P_{(5)} = \frac{1}{6} \qquad E[X] = \frac{1}{1/6} = 6$ lanci

- Poisson : $X \sim Po(\lambda)$ $\quad E[X] = \lambda$

- Valore atteso di composte

$$E[g \circ X] = \sum g(x)\, p_X(x) = \sum g(x)\, P(X == x)$$

densità discreta

Esempio

$Im(X) = \{-1, 0, 1\}$ $\quad p_X(-1) = \frac{1}{3} \quad p_X(0) = \frac{1}{6} \quad p_X(1) = \frac{1}{2}$

Valore atteso di X^2

$$E[X^2] = -1^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

↳ Valore atteso di $aX+b$: $E[aX+b] = a\,E[X] + b$

- Valore atteso di una somma di variabile aleatorie

$$E[X_1 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n]$$

↳ Valore atteso binomiale $\quad E[X] = np$

- Valore atteso di composte di più V.A.

$$E[g(X,Y)] = \sum g(x,y)\, P(X==x, Y==y)$$

↳ Se X, Y sono indipendenti allora $E[XY] = E[X]E[Y]$

• Varianza

$$Var[X] = E[X^2] - \mu_X^2$$

$Var[X]$ → varianza di x $\quad (\geq 0)$

$E[X] = \mu_X$ → valore atteso di x

- $Var[const] = 0$
- Se $X \sim Be(p)$ allora $Var[X] = p(1-p)$

Esempio

Variabile aleatoria negativa X ha una varianza uguale a 16, mentre il valore atteso di X^2 vale 25. Qual è il valore atteso di X?

$Var[X] = 16 \qquad E[X^2] = 25$

$$\underbrace{Var[X]}_{16} = \underbrace{E[X^2]}_{25} - (E[X])^2$$

$$-\sqrt{(E[X])^2} = -\sqrt{9} = -3$$

- Deviazione standard

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$$

Una pasticceria ha invenidta 10 confezioni di pasticcini: 4 con 2 pezzi, 6 con 5 pezzi. Qual è la deviazione standard del numero di pezzi nel sacchetto?

$$E[x] = \sum x_i P(x=x_i) = 2 \cdot \frac{4}{10} + 5 \cdot \frac{6}{10} = \frac{19}{5}$$

$$E[x^2] = \sum x_i^2 P(x=x_i) = 4 \cdot \frac{4}{10} + 25 \cdot \frac{6}{10} = \frac{166}{10}$$

$$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{Var[x]}$$

- Covarianza

$$Cov[X,Y] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

$Cov[X,Y] = 0$ (se X e Y indipendenti)

- Varianza di una somma

$$Var[X_1 + \dots + X_n] = Var[X_1] + \dots + Var[X_n] + 2 \sum_{i<j} Cov[X_i, X_j]$$

4 persone lasciano il proprio cappello all'ingresso di un locale. All'uscita ognuno prendo un cappello a caso. Sia X_i la variabile di Bernoulli che vale 1 se la perona i riprende il proprio cappello.

- Determinare $Var[X_i] =$

$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ $\qquad X_i \sim Be\left(\frac{1}{4}\right)$

$$= Var[X_1] + Var[X_2] + Var[X_3] + Var[X_4] + 2 \sum_{i<j} Cov[X_i, X_j] =$$

$$Cov[X_1, X_2] = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]$$

$$= P(\text{1 e 2 riprendono proprio capp}) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

$$\underbrace{\boxed{1}\ \ \boxed{2}}_{2\cdot 1} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4}$$

1,2   2,1   3   4

seq tot $= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

varianza singola bernoulliana

$$= 4\left(\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right) + 2 \cdot \frac{1}{48} \cdot 6 \longrightarrow \text{termini } X_i, X_j \text{ con } i<j$$

Esempio

$$X = \begin{cases} -1 & p = 1/3 \\ 0 & p = 1/3 \\ 1 & p = 1/3 \end{cases} \qquad Y = X^2$$

a) X, Y indip ? No

$P(Y=0 \mid X=1) = 0$

$P(Y=0) = \frac{1}{3}$

b) $Cov[X,Y] = ?$ $\quad E[XY] - E[X]E[Y]$

$E[X^3] - E[X]E[X^2]$

$0 - 0 = 0$

X, Y non indip e $Cov[X,Y] = 0$

Capitolo 7

Variabili aleatorie continue

Una variabile aleatoria X si dice continua se esiste $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ integrabile e tale che

$$P(X \in (a,b)) = \int_a^b f_X(x)\, dx = F_X(b) - F_X(a)$$

per ogni intervallo (aperto o chiuso o misto o illimitato). La funzione si chiama densità di X.

$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$

N.B.

- $f_X \geq 0$
- $P(X \in (a,b)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

Esempio

Sia X variabile aleatoria continua $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Ce^{-2x} & x \geq 0 \end{cases}$

1- Determinare C affinché f_X sia effettivamente una densità

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = 1 \implies \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\, dx}_{=0} + \int_0^{+\infty} f_X(x)\, dx = -\frac{C}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{C}{2}$$

$$\frac{C}{2} = 1 \implies \boxed{C = 2}$$

2- Calcolare $P(X \in [1,3]) = \int_1^3 f_X(x)\, dx = 2\int_1^3 e^{-2x}\, dx = e^{-2} - e^{-6}$

3- Determinare funzione di distribuzione di X

$F_X(x) = ?$ $\quad$ • $x \leq 0$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

• $x \geq 0$ $\quad P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f_X(t)\, dt} + \int_0^x 2e^{-2t}\, dt = 1 - e^{-2x}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \end{cases}$$

7.2.3

X

$E[g(X)]$

Variabile aleatoria uniforme

$X \sim (a,b)$ $\quad a < b$

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

un autobus che passa tra le 12:00 e 13:00

$\downarrow$ a $\quad \downarrow$ b

- Se densità 0 fuori dell'intervallo e costante dentro è V.A. continua

ed esponenziale

Sia $(X_t)_t$ un processo di Poisson di parametro λ

- X_t : numero fenomeni verificatesi fino all'istante $t > 0$
- T : istante nel quale si verifica il primo fenomeno

Quale è la distribuzione $F_T(t) = P(T \leq t)$ di T ?

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

densità

- Valore atteso di una variabile aleatoria

Sia X V.A. continua di densità f_X, definiamo valore atteso di X

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx$$

$\frac{1}{b-a}$

- esponenziale: $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

↳ valore atteso composta : $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, f_X(x) \, dx$

- Varianza (V.A. continue)

$$Var[X] = E[X^2] - \mu_X^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) \, dx$$

- esponenziale: $E[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Variabile normale standard

- Integrale di Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = 1$$

$t = x/\sqrt{2}$

- Variabile normale standard

valore atteso

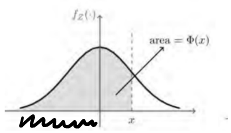
varianza

Una variabile aleatoria Z continua si dice normale standard, e si scrive Z~N(0,1), se la sua densità f_Z è data da

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

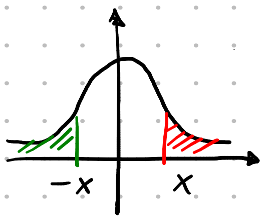
densità continua

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\,dt$$



Proprietà

- $\phi(0) = 0{,}5$ (metà area)
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi(-x) = 1 - \phi(x)$



Esempio

Calcolo $\phi(0{,}65)$

Calcolo $\phi(-0{,}53)$

$1 - 0.7019$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9031
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279

prob. di assumere valori tra [-2,2]

$$P(-2 \leq |Z| \leq 2) = \phi(2) - \phi(-2) = \phi(2) - (1 - \phi(2)) = 2 \times \phi(2) - 1 = 0{,}9544$$

Esempio

Calcolare $P(-0{,}43 < Z \leq 0{,}72)$

$$\phi(0{,}72) - \phi(-0{,}43) = \phi(0{,}72) - [1 - \phi(0{,}43)]$$

Se $Z \sim N(0,1)$, allora $E[Z] = 0$

$Var[Z] = 1$

• Variabili normali o Gaussiane

Siano $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Una variabile X si dice normale, o gaussiana, di parametri (μ, σ^2) se $Z := \frac{X-\mu}{\sigma}$ è normale standard, ovvero se

$$X = \mu + \sigma Z \qquad Z \sim N(0,1)$$

Si scrive $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad \mu$ = media $\quad \sigma^2$ = varianza

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Big| \quad E(X) = \mu$$
$$X = \mu + \sigma Z \quad \Big| \quad Var(X) = \sigma^2 \, Var(Z) = \sigma^2$$

Esempio

Sia $X \sim N(10, 36)$. Calcolare $P(X \leq 8)$

$$X = 10 + 6Z \quad , \; Z \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq 8) = P(10 + 6Z \leq 8) = P(Z \leq -1/3) = 1 - \phi(1/3) \approx 1 - \phi(0{,}33)$$

Siano $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Allora X è continua e la densità f_X di X è data da

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

• Teorema del limite centrale

Riguarda somme di V.A. indipendenti identicamente distribuite $\{X_1, \dots X_n\}$ con $E[X_i] = \mu$ e $Var[X_i] = \sigma^2$

$$E[X_1 + \dots + X_n] = n\mu \qquad Var[X_1 + \dots + X_n] = n\sigma^2$$

Allora per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$P\left(\overline{X_1 + \dots + X_n} \leq a\right) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq a\right) \longrightarrow \phi(a)$$

per $n \to +\infty$

- Approssimazione in distribuzione

$$N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$P\left(\overline{X_1 + \dots + X_n} \leq a\right) \approx P\left(n\mu + \sqrt{n\sigma^2}\, Z \leq a\right) \approx \phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

per $n \to +\infty$, $Z \sim N(0,1)$

-Variabile binomiale? bin. somma var indip.

Per $n >> 0$ $p \in]0,1[$ $B(n,p) \approx N(np, np(1-p))$ in distribuzione

$$P(B(n,p) \leq x) \approx P(N(np, np(1-p)) \leq x) \quad n \to +\infty$$

Esempio

Si lancia un dado equilibrato 60000 volte. Qual è la probabilità che il 6 esca al massimo 10000 volte?

media varianza (σ^2)

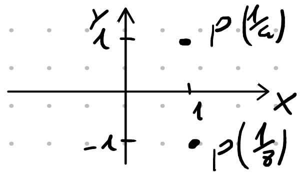
$$X \sim N\left(10000, 60000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)$$

$P(X \leq 10000)$ $X = \mu + \sigma Z$

$$P(10000 + \sigma Z \leq 10000) = P(Z \leq 0) = \phi(0) = 0.5$$

Approssimazioni corrette

Capitolo 9



• Variabili aleatorie congiunte discrete

Una variabile congiunta discreta su uno spazio campionario (Ω, P) è una coppia (X,Y) di variabili discrete: $\omega \in \Omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$

– Densità congiunta discreta: siano X ed Y due variabili discrete. Diciamo densità congiunta di X ed Y la funzione

$$p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1] \quad (a,b) \longmapsto P(X==a, Y==b)$$

p_X e p_Y densità marginali di $p_{X,Y}$

↳ sono date da somma delle densità congiunte

$$p_X(a) = \sum_{y \in \mathrm{Im}\,Y} p_{X,Y}(a,y) \qquad p_Y(b) = \sum_{x \in \mathrm{Im}\,X} p_{X,Y}(x,b)$$

Es.

$$p_{X,Y}(0,3) = 0.2 \qquad p_{X,Y}(1,3) = 0.5 \qquad p_Y(3) = 0.2 + 0.5$$
$$p_{X,Y}(0,2) = 0.3 \qquad p_{X,Y}(1,2) = 0.1 \qquad p_Y(2) = 0.3 + 0.1$$

– Valore atteso

Sia (X,Y) congiunta discreta e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora

$$E[g(X,Y)] = \sum g(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{l} E[X] = \sum x\, p_X(x) \\ E[Y] = \sum y\, p_X(x) \end{array}\right\} E[XY] = \sum x \cdot y \cdot p_{X,Y}(x,y)$$

Esempio

$$p_{X,Y}(0,3) = 0.05 \qquad p_{X,Y}(0,4) = 0.2 \qquad p_{X,Y}(1,4) = 0.1$$
$$p_{X,Y}(2,2) = 0.2 \qquad p_{X,Y}(2,3) = 0.1$$

$$E[XY] = 0 \cdot 3 \cdot 0.05 + 0 \cdot 4 \cdot 0.2 + 1 \cdot 4 \cdot 0.1 + 2 \cdot 2 \cdot 0.2 + 2 \cdot 3 \cdot 0.1$$

– Se X ed Y sono variabili discrete. Allora X ed Y sono indipendenti se e solo se $p_{X,Y}(a,b) = p_X(a) \cdot p_Y(b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}^2$

• Variabile congiunte continue ~~mm~~ continue → integrale

Colpisco un disco e voglio calcolare $P((X,Y) \in A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

Prob di prendere valori in una regione a di un disco

Una variabile congiunta continua su uno spazio campionario (Ω, P) è una coppia di variabile aleatorie $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ t.c. esiste

$$f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$$

tale che

densità

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

Si ha $f_{X,Y} \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = P((X,Y) \in \mathbb{R}^2) = 1$$

• Densità marginali di congiunte continue

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \quad \to \quad E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx \quad \to \quad E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy$$