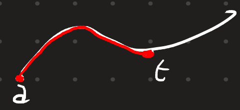
Capitolo 1

- **Lunghezza d'arco**

Data una curva parametrica $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$, la lunghezza d'arco $f|_{[a,t]}$ è $s(t) = \text{Lunghezza}(f|_{[a,t]})$



$$s(t) = \int_a^t |f'(u)|\, du \qquad \forall t \in [a,b]: \frac{ds}{dt}(t) = |f'(t)| \to ds = |f'(t)|\, dt$$

Es.

$$f(t) = R(\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$s(t) = \int_0^t R\, dt = R\, dt \qquad \forall t \in [0, 2\pi] \qquad \text{da cui}$$

$s = Rt \to t = \frac{s}{R}$ sostituisco nella parametrizzazione iniziale

ora dipende da s : $g(s) = f\left(\frac{s}{R}\right) = R\left(\cos(s/R), \sin(s/R)\right)$

Esercizi

- Mostrare che l'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2-2x,\ y\leq 0\}$ è il sostegno di una curva: fornire una parametrizzazione

$(x,\ x^2-2x)$ $\quad x\in ?$ $\quad x^2-2x\leq 0$

$x(x-2)\leq 0 \quad \begin{cases} x\leq 0 \\ x\leq 2\end{cases} \quad x\in[0,2]$

$f(x)=(x,\ x^2-2x)$ $\quad x\in[0,2]$

continue $\quad$ chiuso e limitato

- Mostrare che l'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2-4x=0,\ y\leq 0\}$ è il sostegno di una curva: fornire una parametrizzazione e abbozzarne il disegno.

1° METODO $\quad 4y^2=4x-x^2$ $\quad$ se $\ 4x-x^2<0$ $\quad$ no soluzioni

se $\quad 4x-x^2\geq 0 \quad y^2=\frac{4x-x^2}{4} \implies \begin{cases} y=\pm\sqrt{\frac{4x-x^2}{4}} \\ y\leq 0\end{cases} \implies y=-\sqrt{\frac{4x-x^2}{4}}$

$x\in[0,4]$

$f(x)=\left(x,\ -\sqrt{\frac{4x-x^2}{4}}\right) \quad x\in[0,4]$

2 METODO

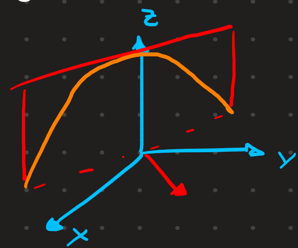
$x^2-4x+4y^2=0 \iff (x-2)^2+(2y)^2=4$ $\quad$ ellisse

($x^2-4x = (x-2)^2-4$)

$\begin{pmatrix} x-2 \\ 2y\end{pmatrix}\in$ cerchio di $R=2$ centro $(0,0)$

$\exists t : \begin{cases} x-2=2\cos t \\ 2y=2\sin t\end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x=2+2\cos t \\ y=\sin t\end{cases}$ $\qquad y\leq 0 \qquad t:[\pi,2\pi]$

- Mostrare che l'insieme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1,\ x+y=0,\ z\geq 0\}$ è il sostegno di una curva: fornire una parametrizzazione e abbozzarne il disegno

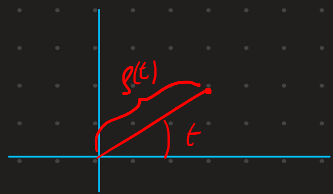


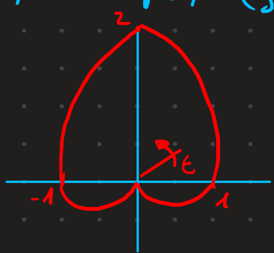
$ax+by+cz=0 \qquad \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=0$

$f(x)=\left(x,\ -x,\ \sqrt{1-2x^2}\right) \quad x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

- Disegnare la curva definita in coordinate polari da $\rho=1+\sin t,\ t\in[0,2\pi]$ scriverne una parametrizzazione

$\rho(t) \qquad f(t)=(\rho(t)\cos t,\ \rho(t)\sin t) \qquad t\in I$



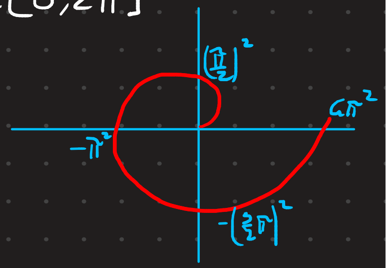


$f(t)=((1+\sin t)\cos t,\ (1+\sin t)\sin t) \qquad t\in[0,2\pi]$

- Calcolare la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho = \theta^2,\ \theta \in [0, 2\pi]$

$$L(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{f'(t)^2 + f(t)^2}\, dt$$

$\theta = t$



$$L(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^4 + 4t^2} = \int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2+4}$$

- Sia $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ curva C^1 con $f(0) = (5,-2)$, $f'(0) = (-7,5)$. Stimare $f(0{,}02)$

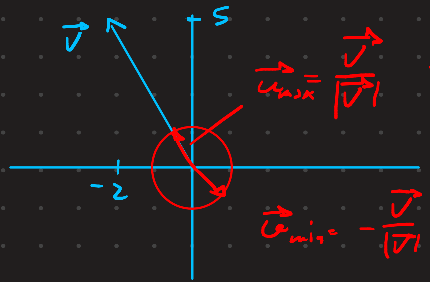
$$f(t+h) = \boxed{f(t) + f'(t)h} + o(h)$$

$$f(0{,}02) \simeq f(0) + f'(0)(0{,}02) = (5,-2) + (7,-5)\cdot 0{,}02 =$$

- Quale vettore unitario u rende minimo il prodotto scalare di u con $(-2,5)$

Th. Cauchy-Schw. $\quad |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}| \qquad -|\vec{u}||\vec{v}| \leq \vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}|$

$\vec{v} = -\lambda\vec{u} \quad \lambda \geq 0 \qquad \vec{v} = \lambda\vec{u} \quad \lambda \geq 0$



$\vec{u}_{max} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \vec{v}\cdot\vec{u}_{max} = |\vec{v}|$

$\vec{u}_{min} = -\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \vec{u}_{min}\cdot\vec{v} = -|\vec{v}|$

- Si consideri la curva definita in coordinate polari da $\rho(t) = \cos^3(t/3) \quad t \in [0, 3\pi]$

Scrivere la parametrizzazione

$$f(t) = \left(\cos^3(t/3)\cos t,\ \cos^3(t/3)\sin t\right) \qquad t \in [0, 3\pi]$$

La curva è regolare?

$$|f'(t)| = \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2} \quad \text{non deve essere nulla}$$

Abbozzare il sostegno della curva

Quale è il vettore tangente alla curva in un dato punto t? Quanto vale il suo modulo?

Quale è la formula per la lunghezza?

$$\int_0^{3\pi} \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2}$$

Capitolo 2

- **Funzioni di più variabili:**

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in D \quad f(x) \in \mathbb{R}$$

- **Grafico di una funzione**

È l'insieme nello spazio $\mathbb{R}^{n+1}$ definito da

$$\{(x, f(x)) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \ : \ x = (x_1, \dots, x_n) \in D\}$$

Es. grafico di $\log(1+x+y) : \{(x, y, \log(1+x+y)) : 1+x+y > 0\}$

- **Funzione radiale:** dipende solo dalla distanza dei punti dall'origine $f(x) = h(|x|)$

Grafico facile da tracciare: trovo un punto e traccio la circonferenza per quel punto

- **Metodo delle sezioni** (per tracciare grafici)

Es. $f(x,y) = x^2 - y^2$

Fisso la x, grafico di $y \mapsto f(x,y) = x^2 - y^2 \to$ parabola con concavità verso l'alto e max a x^2

Fisso la y, grafico di $x \mapsto f(x,y) = x^2 - y^2 \to$ parabola con concavità verso l'alto e max a $-y^2$

Unisco le informazioni e ottengo il grafico

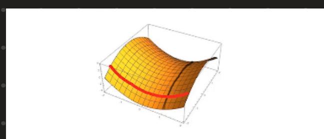
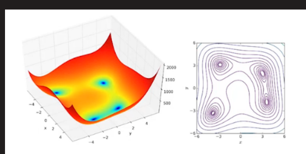


Figura: In rosso $x \mapsto x^2 - (-1)^2$, in nero $y \mapsto 1^2 - y^2$

- **Insiemi di livello** (tagliamo a "fette" la funzione e la proietto nel piano)

Sia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. L'insieme di livello $c \in \mathbb{R}$ è $Z_c(f) = \{x \in D : f(x) = c\} \subset D$



- Per una funzione radiale otteniamo dei cerchi

- **P.ti di accumulo e p.ti isolati**

$D \subset \mathbb{R}^n$. $p \in \mathbb{R}^n$ è di accumulazione per D se $\forall U_p$ intorno di p, $U_p \cap D \setminus \{p\} \neq \emptyset$

Un p.to che non è di accumulazione per D si dice isolato in D.

- **Limiti di funzioni a più variabili**

  - caso infinito

$f(x) \leq M$

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in D}} f(x) = +\infty \ (-\infty) \quad \text{se} \quad \forall M > 0 \ \exists U_p \text{ intorno di } p \quad x \in U_p \cap D \setminus \{p\} \Rightarrow f(x) \geq M$$

- **Permanenza del segno**

Sia $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ di accumulazione per D e $\lim_{x \to p} f(x) > 0$. Allora esiste U_p intorno di p t.c. $f(x) > 0 \quad \forall x \in U_p \cap D \setminus \{p\}$

- **Teorema dei carabinieri**

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ Se $f(x) \xrightarrow[p]{} l$ $\quad h(x) \xrightarrow[p]{} l$ allora $g(x) \xrightarrow[p]{} l$

- **Funzione continua** (valgono le solite proprietà e teoremi delle funzioni continue)

$f: D \in \mathbb{R}^n$ e p punto di D è continua in p se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_p$ intorno di $p \quad x \in U_p \cap D \Rightarrow |f(x) - f(p)| \leq \varepsilon$

La funzione f è continua su D se è continua in ogni punto di D.

Ogni funzione è continua in ogni p.to isolato del dominio

Se p è di acc. f continua in $p \iff \lim_{\substack{x \to p \\ x \in D}} f(p) = f(p)$

- **Insiemi aperti e chiusi**

  - A insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f: A \to \mathbb{R}$ funzione continua.
    Allora l'insieme $\{x \in A : f(x) < 0\}$ è aperto
  - C insieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ e $f: A \to \mathbb{R}$ funzione continua.
    Allora l'insieme $\{x \in A : f(x) \leq 0\}$ è chiuso

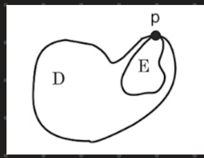
Esempio.

$$\lim_{(x,y) \to (1/2, 0)} \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - (1/2)^2 - 0^2} = \sqrt{3}/2.$$

• Limite su restrizioni

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $E \subset D$, p di accumulazione per E.

Sia $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in D}} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in E}} f(x) = \ell$



N.B. Se su due sottoinsiemi diversi del dominio troviamo limiti diversi, il limite non esiste.
Se il limite di f esiste in p, e su una restrizione vale ℓ allora il limite di f in p vale ℓ.

- Restrizioni sulle rette per un punto $p = (p_1, p_2)$ del piano dato dalle rette

$$y - p_2 = m(x - p_1) \qquad m \in \mathbb{R}$$

- Semirette per p espresse in coordinate polari

$$x = p_1 + \rho \cos t, \quad y = p_2 + \rho \cos t \qquad \text{tenendo fisso } t$$

Es. Sia $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ per $(x,y) \neq (0,0)$

Sulle rette per l'origine $\boxed{y = mx}$ $(m \in \mathbb{R})$ si ha

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{(x^2 + m^2x^2)} = \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \qquad x \to 0$$

Se $y = x \to m = 1 \longrightarrow \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$

Se $y = 0 \to m = 0 \longrightarrow \dfrac{0}{1+0^2} = 0$

Concludo che il limite di $f(0,0)$ non esiste

Es.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$y = mx$

$$x^2 < mx < 2x^2 \longrightarrow x < m < 2x$$

• Derivata direzionale (la derivabilità non implica la continuità)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $p \in int(D)$ e $u \in \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$. La derivata direzionale di f in p lungo u è il limite, se esiste finito, $D_u f(p) = \partial_u f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tu) - f(p)}{t}$

Es.
$f(x) = |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ in un p.to $p \in \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)$. Quanto vale $D_u f(p)$?

1° MODO

$$D_u f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{|p+tu|^2 - |p|^2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2tp \cdot u + t^2 |u|^2}{t} = 2p \cdot u$$

Esempio: $D_{(1,5)} f(1,2) = x^2 + xy$

$u = u_1 + u_2$ $\quad p = p_1 + p_2$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p_1 + u_1 t, p_2 + u_2 t) - f(p_1, p_2)}{t}$$

2° MODO

Poniamo $g(t): |p + tu|^2$ $t \in \mathbb{R}$, sappiamo che $D_u f(p) = g'(0)$. Si ha $g(t) = |p|^2 + 2tp \cdot u + t^2 |u|^2$ da cui $g'(t) = 2p \cdot u + 2t|u|^2$ e $g'(0) = 2p \cdot u$

• Derivate parziali (stesse proprietà delle funzioni reali)

$D \subset \mathbb{R}^n$, p interno a D, $f: D \to \mathbb{R}$. La i-esima derivata parziale di f in p è, se essa esiste, $D_{e_i} f(p)$

Es.
Sia $f(x,y) = x^2 + 2xy$. Allora $\partial_x f(x,y) = 2x + 2y$

$\partial_y f(x,y) = 2x$

Es.
$$D_u(|x|^2) = 2u(x_1, x_2) = \boxed{2u_1 x_1 + 2u_2 x_2}$$

per ogni $u = (u_1, u_2)$ $(x = x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. $D_u (x_1^2 + x_2^2)^3$?

$$D_u (x_1^2 + x_2^2)^3 = 3(x_1^2 + x_2^2)^2 \cdot D_u (x_1^2 + x_2^2) = 3(x_1^2 + x_2^2)^2 \cdot \boxed{2(u_1 x_1 + u_2 x_2)}$$
$$= 6(x_1^2 + x_2^2)^2 (u_1 x_1 + u_2 x_2)$$

• Gradiente (vettore che ha componenti tutte le n derivate parziali in un punto p)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ con derivate parziali in $p \in \text{int}(D)$. Il gradiente di f in p è il vettore $\nabla f(p) = (\partial_{x_1} f(p), \dots, \partial_{x_n} f(p))$

Es.

$$\nabla(x^2 + 2y\sin x) = (2x + 2y\cos x, 2\sin x)$$

$$\nabla(x^2+y^2) = 2(x,y)$$

Gradiente della norma $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$ $\nabla|x| = \frac{x}{|x|}$

N.B. la norma non ha derivate direzionali e parziali nell'origine

– Proprietà

1. $\nabla(f+g)(p) = \nabla f(p) + \nabla g(p)$;
2. $\nabla(fg)(p) = \nabla f(p) g(p) + f(p) \nabla g(p)$;
3. se $c \in \mathbb{R}$ allora $\nabla(cf)(p) = c\nabla f(p)$;
4. se φ è di variabile reale, derivabile in $f(p)$, allora $\nabla(\varphi \circ f)(p) = \varphi'(f(p)) \nabla f(p)$.

Es. $\forall x \neq 0$ in $\mathbb{R}^2$ $\nabla|x|^5 = 5|x|^4 \nabla|x| = 5|x|^4 \frac{x}{|x|} = 5|x|^3 x$

• Funzioni di classe C^1

$D \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \text{int}(D)$. Si dice che f è di classe C^1 in un aperto se f è continua e le derivate parziali di f esistono e sono continue in quell'aperto

Es. $f(x,y) = x^2 \sin(xy)$

• Formula del gradiente (Teorema)

Sia f di classe C^1 attorno ad un p.to $p \in \mathbb{R}^n$. Allora f ha derivate direzionali rispetto ad ogni vettore ed è

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \quad D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot u = \partial_{x_1} f(p) u_1 + \dots + \partial_{x_n} f(p) u_n$$

Es. $f(x,y) = x^2 + 2xy$. Calcolo di $D_{(3,-1)} f(1,2)$

$\nabla f(x,y) = (2x + 2y, 2x)$ $\qquad D_{(3,-1)}: \nabla f(1,2) = (6,2) \cdot (3,-1) = 16$

• Direzioni min e max crescita

Sia f funzione C^1 attorno ad un punto p e $\nabla f(p) \neq 0$. Allora, al variare dei vettori u di norma 1,

- $D_u f(p)$ assume il massimo valore, uguale a $|\nabla f(p)|$, in $u_{max} = \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$;
- $D_u f(p)$ assume il minimo valore, uguale a $-|\nabla f(p)|$, in $u_{min} = -\frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$.

• Spazio tangente

Sia f funzione con derivate parziali in un punto p di $\mathbb{R}^n$. Lo spazio tangente al grafico di f in $(p, f(p))$ è l'insieme

$$\{(p, f(p)) + (u, \nabla f(p) \cdot u) : u \in \mathbb{R}^n\} \text{ ovvero}$$

$$\{(x = (x_1, \dots, x_n), z) : z = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)\}$$

Esempio

Spazio tangente a $z = f(x,y) = x\cos y - ye^x$ in $(0, \pi, f(0,\pi) = -\pi)$

$\nabla f(x,y) = (\cos y - ye^x, -x\sin y - e^x)$ da cui $\nabla f(0,\pi) = (-1-\pi, -1)$

Il piano tangente ha equazione

$$z = -\pi + \nabla f(0,\pi) \cdot (x, y-\pi) = -\pi - (1+\pi)x - (y-\pi) = -(1+\pi)x - y$$

• Le funzioni C^1 sono differenziabili

Sia f funzione di classe C^1 attorno ad un punto p. Allora f è differenziabile in p, cioè

$$f(x) = f(p) + \nabla f(p)(x-p) + R(x) \qquad \lim_{x \to p} \frac{R(x)}{|x-p|} = 0$$

N.B.

- Una funzione differenziabile in un punto interno al suo dominio è ivi continua

• Linearizzazione

Se f è differenziabile, la funzione affine $L(x) = f(p) + \nabla f(p)(x-p)$ è la linearizzazione di f in p.

Esempio

La linearizzazione di $f(x,y,z) = x^3 + 5xe^y\cos z$ in $(1,0,\pi)$ è

$$L(x,y,z) = f(1,0,\pi) + \nabla f(1,0,\pi) \cdot (x-1, y, z-\pi)$$
$$= -4 - 2(x-1) - 5y$$

f differenziabile

$$f(1.01, -0.01, \pi + 0.01) \approx L(1.01, -0.01, \pi + 0.01) = 3.97$$

• Regola della catena

Siano $x: I \subset \mathbb{R} \to D$ curva <u>derivabile</u> in t_0 e $f: D \to \mathbb{R}$ <u>differenziabile</u> in $x(t_0)$. La funzione composta $t \in I \mapsto x(t) \in D \mapsto f(x(t)) \in \mathbb{R}$ é derivabile in t_0 e si ha

$$(f \circ x)'(t_0) = \nabla f(x(t_0)) \cdot x'(t_0) = \partial_{x_1} f(x(t_0)) x_1'(t_0) + \dots + \partial_{x_n} f(x(t_0)) x_n'(t_0)$$

Esempio

Sia f differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Allora

$$\frac{d}{dt} f(2t, t^2) = \partial_x f(2t, t^2) \cdot 2 + \partial_y f(2t, t^2) \cdot 2t$$

Esempio

Sia $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2 x_3$. Calcoliamo la derivata di $f(2t, \cos t, e^t)$.

$\partial_x f(x) = 2x_1 \quad \partial_y f(x) = 2x_3 \quad \partial_z f(x) = 2x_2$

$$\frac{d}{dt} f(2t, \cos t, e^t) = 2x_1(t)\, x_1'(t) + 2x_3(t)\, x_2'(t) + 2x_2(t)\, x_3'(t) =$$
$$= 2 \cdot (2t) \cdot 2 + 2(e^t)(-\sin t) + 2(\cos t)\, e^t =$$
$$= 8t - 2e^t \sin t + 2e^t \cos t$$

$$D_u f(p) = \frac{d}{dt} f(p + tu)_{t=0} = \nabla f(p) \cdot \frac{d}{dt}(p + tu)_{t=0} = \nabla f(p) \cdot u.$$

- Sia f funzione di due variabili differenziate in p. Supponiamo che l'insieme di livello di f per p sia, attorno a p, il sostegno di una curva C^1. Allora $\nabla f(p)$ è perpendicolare alla tangente alla curva nel punto considerato.

- **Derivate seconde**

Sia $f(x,y) = x^2 + 2xe^y$. Si ha $\partial_x f(x,y) = 2x + 2e^y$. La funzione è ancora derivabile e si ha $\partial_x(\partial_x f(x,y)) = 2$ e $\partial_y(\partial_x f(x,y)) = 2e^y$

$\partial^2_{x,x} f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ e $\partial^2_{y,x} f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

- **Definizione derivata 2ª**

- **Matrice Hessiana**

$$\text{Hess}\, f(P) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1^2} f(P) & \dots & \partial^2_{x_1,x_n} f(P) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial^2_{x_n,x_1} f(P) & \dots & \partial^2_{x_n^2} f(P) \end{pmatrix}$$

Esempi

$f(x,y) = x\cos y + ye^x$

$\partial_x f(x,y) = \cos y + ye^x$ $\qquad$ $\partial_y f(x,y) = -x\sin y + e^x$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \partial_x(\partial_x) & \partial_x(\partial_y) \end{array} \\ \text{Hess}\, f(x,y) = & \begin{pmatrix} ye^x & -\sin y + e^x \\ -\sin y + e^x & -x\cos y \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} \partial_y(\partial_x) & \partial_y(\partial_y) \end{array} \end{array}$$

- **Teorema di Schwartz**

D aperto $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2, cioè con derivate parziali doppie continue. Allora per ogni i,j e $x \in D$ si ha

$$\partial^2_{x_i,x_j} f(x) = \partial^2_{x_j,i} f(x)$$

Capitolo 6

• Estremi locali e assoluti

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in D$

- f ha un minimo in p se $f(x) \geq f(p)$ $\forall x \in D$
- f ha un minimo locale in p se esiste un intorno U_p di p in $\mathbb{R}^n$ t.c.

$$f(x) \geq f(p) \quad \forall x \in D \cap U_p \quad \text{stretto se } f(x) > f(p) \quad x \neq p$$

• Regola di Fermat

(se abbiamo un p.to max/min locale interno allora il p.to è critico)

Se $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha minimo oppure massimo locale in p interno a D, e f derivabile parzialmente in p. Allora $\nabla f(p) = 0$: si dice che p è critico: il piano tangente al grafico di f nel punto $(p, f(p))$ è orizzontale

Esempio

Sia $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6y, -6x + 6y)$

$$(x,y) \text{ critico} \iff \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

Si trova $(0,0)$ e $(1,1)$

Natura di $(0,0)$?

$$f(x,0) - \underbrace{f(0,0)}_{0} = 2x^3 \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad (0,0) \text{ punto di sella}$$

Natura di $(1,1)$? minimo locale stretto

$$\text{Hess}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \to \text{Hess}(1,1) = 6 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \det > 0$$

$x^2 + 10xy + y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x + 10y, 10x + 2y)$

$$\begin{cases} 2x + 10y = 0 \\ 10x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5y = 0 \\ 5x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$f(x,0) - \underbrace{f(0,0)}_{0} = x^2 \quad x^2 > 0 \ \forall x \quad \boxed{\text{minimo locale}}$

• Criterio dell'Hessiana

(se det = 0 il criterio non permette di concludere nulla)

Siano $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e p interno a D critico per f.

- Sia $\det(\text{Hess } f(p)) > 0$
  - se $f_{xx}(p) > 0$: p minimo locale stretto
  - se $f_{xx}(p) < 0$: p massimo locale stretto
- Sia $\det(\text{Hess } f(p)) < 0$: p è sella

Esempio

$(0,0)$ critico per x^2+y^2, $-x^2-y^2$, x^2-y^2

$$\text{Hess} f(0,0) = \underset{\text{minimo}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{massimo}}{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{sella}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ $\qquad f(x,y) = x^2 + x - 3xy + y^3 - 5$

$$\partial x = (2x + 1 - 3y, -3x + 3y^2)$$

$$\text{Hess}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det < 0$ sella

• Integrale curvilineo

Siano $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una curva parametrica di classe C^1 e $\mu: r([a,b])\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Chiamiamo integrale curvilineo di μ sulla curva r il numero

$$\int_r \mu\, ds = \int_r \mu(x)\, ds = \int_r \mu(x_1,\dots,x_n)\, ds := \int_a^b \mu(r(t))\, |r'(t)|\, dt$$

Esempio

$\mu(x,y,z) = x - 3y^2 + z \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad r(t) = (t,t,t) \quad \forall t\in[0,1]$

$$\int_r \mu\, ds = \int_0^1 (t-3t^2+t)\, |r'(t)|\, dt = \int_0^1 (t-3t^2+t)\sqrt{1^2+1^2+1^2}\, dt$$

• Baricentro

Se $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ è curva con densità $\mu: r([a,b])\to[0,+\infty[$ continua e non identicamente nulla, il baricentro di (r,μ) è il punto

$$\frac{\int_r (x_1,\dots,x_n)\mu(x)\, ds}{\int_r \mu\, ds} = \frac{\left(\int_r x_1\mu(x)\, ds, \dots, \int_r x_n \mu(x)\, ds\right)}{\int_r \mu\, ds}$$

Esempio

Calcoliamo il baricentro geometrico $(\mu=1)$ di $r(t) = R(\cos t, \sin t)$ $t\in[0,\pi]$

$$\frac{1}{\text{Lunghezza}(r)}\left(\int_r x_1\, ds, \int_r x_2\, ds\right) = \frac{1}{\pi R}\left(\int_0^\pi (R\cos t) R\, dt, \int_0^\pi (R\sin t) R\, dt\right)$$

$$= \left(0, \frac{2}{\pi}R\right)$$

Esempio

$r(t) = (3\cos t, 3\sin t, at) \quad t\in[0,2\pi] \qquad r'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, a)$

$\mu(x,y,z) = x^2+y^2+z$

$$|r'(t)| = \sqrt{(9\sin t)^2 (9\cos t)^2 + 49} = \sqrt{81(\sin^2 t+\cos^2 t)+49} = \sqrt{130}$$

$$\sqrt{130}\int_0^{2\pi} 81(\cos^2 t + \sin^2 t) + 7t\, dt = \sqrt{130}\int_0^{2\pi} 81 + 7t\, dt = 7378.2173$$

$$\int_1^a t^{\frac{1}{9}}\, 3t^2 + t^3\, \frac{1}{9}\, t^{-\frac{8}{9}} = 73.6578$$

- **Campo vettoriale** ad ogni punto del dominio associa un vettore nello spazio del dominio

Un campo vettoriale su $D \subset \mathbb{R}^n$ è una funzione
$F: D \to \mathbb{R}^n$, $x \in D \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)) \in \mathbb{R}^n$

- **Campi radiali**

Un campo vettoriale in $\mathbb{R}^n$ è detto radiale se del tipo
$F(x) = g(|x|) \frac{x}{|x|}$, $|x| \in I$, con intervallo di $]0, +\infty[$

- **Campi gradienti**

Sia D un aperto di $\mathbb{R}^n$. Un campo continuo $F: D \to \mathbb{R}$ è detto campo gradiente se esiste $U: D \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c. $F = \nabla U$. Una tale funzione è detta primitiva di F.

Esempio

$F(x_1, x_2) = (-x_1, 2x_2 e^{x_2^2})$ è un campo gradiente ed una primitiva è
$U(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} x_1^2 + e^{x_2^2}$