UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

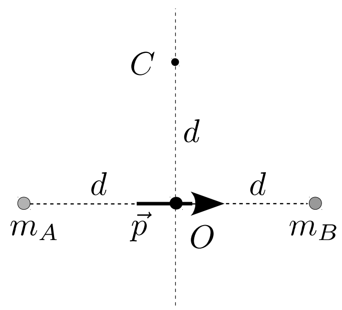
a.a. 2017-2018

Elementi di Fisica II: 4 Settembre 2018

Scritto

Problema 1

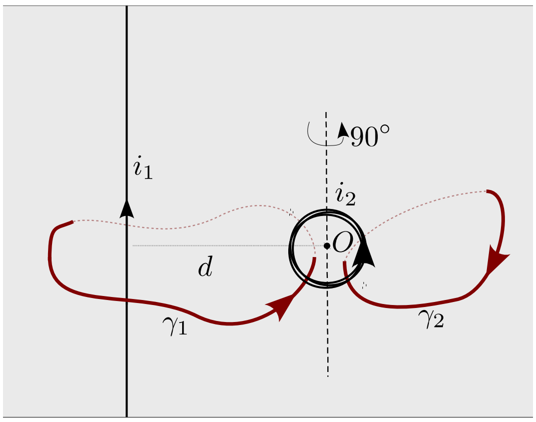
Si considerino due isolanti puntiformi m_A e m_B su cui è posta una carica pari a $q_1 = -15\,nC$ e $q_2 = -9\,nC$. I due isolanti m_A e m_B sono disposti lungo l'asse x come in figura e distano entrambi d dall'origine O. Nell'origine è posto un dipolo elettrico il cui momento di dipolo ha modulo $|\vec{p}| = 40\,\mu C\cdot m$. Il momento di dipolo $\vec{p}$ è orientato come in figura. Il dipolo si trova così in una posizione di equilibrio stabile con una energia potenziale pari a $\mathcal{U}_O = -300\,mJ$.



1. La carica q_1 si trova sull'isolante m_A o su m_B?
2. Quale è il valore della distanza d?
3. Quanto vale il lavoro compiuto da una forza esterna per spostare il dipolo dalla sua posizione fino al punto C di coordinate $(0, d)$ mantenendo fissa l'orientazione del dipolo?
4. Il dipolo viene successivamente tolto dal sistema. Calcolare la differenza di potenziale $V_C - V_O$.

Problema 2

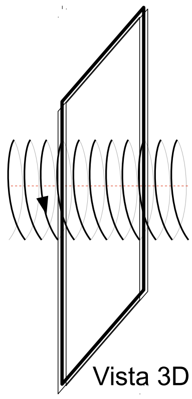
Si consideri un filo indefinito e un avvolgimento di $N = 15$ spire circolari. Il filo e l'avvolgimento sono coplanari come in figura. All'interno del filo infinito scorre una corrente $i_1 = 3\,A$, mentre all'interno dell'avvolgimento scorre la corrente $i_2 = 2\,mA$ con i versi indicati in figura. Sapendo che la distanza tra il centro dell'avvolgimento e il filo vale $d = 9\,cm$ e che il raggio dell'avvolgimento è pari a $r = 1\,mm$, calcolare:

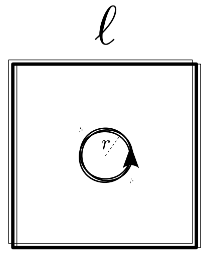


1. Il valore del campo magnetico (modulo, direzione e verso) al centro dell'avvolgimento.
2. Il valore della circuitazione del campo magnetico lungo i percorsi γ_1 e γ_2.
3. Il lavoro esterno necessario per ruotare l'avvolgimento di 90° intorno all'asse tratteggiato (parallelo al filo infinito).

Problema 3

Si consideri un solenoide infinito con numero di spire per unità di lunghezza pari a $n = 50\, mm^{-1}$. Il raggio del solenoide è pari a $r = 15\, mm$. Il solenoide è al centro di un avvolgimento formato da $N = 10$ spire quadrate di lato $\ell = 10\, cm$. La spire sono formate da un filo di rame (resistività $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$) di sezione $\Sigma = 2\, mm^2$.





1. Calcolare il coefficiente di mutua induzione tra il solenoide e l'avvolgimento.
2. Sapendo che nel solenoide scorre la corrente $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ per $t \geq 0$, calcolare il valore della corrente indotta sull'avvolgimento ($i_0 = 2\, A$ e $\tau = 5\, ms$).
3. Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule dall'istante $t_1 = 0$ all'instante $t_2 = \tau$.
4. Calcolare la carica che è fluita nell'avvolgimento quadrato dall'istante $t_1 = 0$ al tempo infinito.

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Il dipolo è in posizione di equilibrio stabile quando $\vec{p}$ è parallelo e concorde al campo elettrico $\vec{E}_O$ nel punto O. Dunque il campo elettrico $\vec{E}_O$ deve essere diretto lungo l'asse x positivo. Siccome le cariche sono negative, m_A genera un campo diretto lungo l'asse x negativo e m_B genera un campo diretto lungo l'asse x positivo. Dunque la carica in m_B deve essere maggiore (in valore assoluto). Dunque q_1 si trova sull'isolante m_B.

2. L'energia potenziale del dipolo è data da

$$\mathcal{U}_O = -\vec{p} \cdot E_O = -|\vec{p}| E_O \qquad \Rightarrow \qquad E_O = -\frac{\mathcal{U}_O}{|\vec{p}|} = 7500\, V/m$$

dove si è usata la proprietà che $\vec{p}$ è parallelo e concorde al campo elettrico $\vec{E}_O$. Il campo E_O si ottiene come somma dei campi Coulombiani generati dalle cariche. Si ha

$$\vec{E}_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^2}(q_2 - q_1)\vec{i}$$

dove $\vec{i}$ è il versore parallelo all'asse x positivo. Quindi

$$E_O = |\vec{E}_O| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^2}|q_2 - q_1| \qquad \Rightarrow \qquad d = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2 - q_1|}{E_O}} \simeq 8.485\, cm$$

3. Il lavoro di una forza esterna è pari alla variazione di energia potenziale:

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}_C - \mathcal{U}_O$$

L'energia potenziale il C vale

$$\mathcal{U}_C = -\vec{p} \cdot E_C = -|\vec{p}| E_{Cx}$$

con E_{Cx} la componente lungo l'asse x di $\vec{E}_C$. Il campo $\vec{E}_C$ è la somma dei campi generati dalle cariche q_1 e q_2:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{C1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{2d^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) \\
\vec{E}_{C2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{2d^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) \\
\vec{E}_C &= \vec{E}_{C1} + \vec{E}_{C2}
\end{aligned}$$

da cui

$$E_{Cx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 - q_1}{2d^2}\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 2651\, V/m$$

Quindi

$$\mathcal{U}_C = -|\vec{p}| E_{Cx} \simeq -106\, mJ$$

e il lavoro esterno vale

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}_C - \mathcal{U}_O \simeq 194\, mJ$$

4. La differenza di potenziale si calcola utilizzando il potenziale Coulombiano. Si ha

$$\begin{aligned}
V_O &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{d} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{d} \\
V_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{\sqrt{2}d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{\sqrt{2}d} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}d}
\end{aligned}$$

Quindi

$$V_C - V_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}d} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{d} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \simeq 745\, V$$

PROBLEMA 2

1. Definendo come $\vec{u}$ il versore uscente dal foglio, il campo generato dal filo vale (legge Biot-Savart)

$$\vec{B}_f = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}\vec{u} \simeq (-6.66\,\mu T)\vec{u}$$

   mentre il campo generato dalle spire vale

$$\vec{B}_s = \frac{N\mu_0 i_2}{2r}\vec{u} = (18.85\,\mu T)\vec{u}$$

   Il campo totale in O è quindi

$$\vec{B}_O = \vec{B}_f + \vec{B}_s = \frac{\mu_0}{4\pi}(\frac{2\pi N i_2}{r} - \frac{2i_1}{d})\vec{u} \simeq (12.2\,\mu T)\vec{u}$$

2. Per la legge di Ampere li circuitazioni valgono

$$\mathcal{C}_{\gamma_1}(\vec{B}) = \mu_0(i_1 - N i_2) \simeq 3.73\,\mu T \cdot m$$
$$\mathcal{C}_{\gamma_2}(\vec{B}) = -\mu_0 N i_2 \simeq -37.7\,nT \cdot m$$

3. Il momento magnetico dell'avvolgimento di spire inizialmente vale

$$\vec{m} = N i_2 \pi r^2 \vec{u} \qquad \Rightarrow \qquad m = N i_2 \pi r^2 \simeq 94.2\,\mu A \cdot m^2$$

   e l'energia potenziale è data da

$$\mathcal{U}_{\text{iniz}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_f = -\vec{m} \cdot \vec{B}_f = m B_f$$

   Notare che va considerato solo il campo generato dal filo infinito. Dopo la rotazione il momento di dipolo $\vec{m}'$ sarà perpendicolare a $\vec{B}_f$. Dunque l'energia potenziale finale vale

$$\mathcal{U}_{\text{fin}} = -\vec{m}' \cdot \vec{B}_f = 0$$

   Il lavoro esterno necessario per ruotare l'avvolgimento di 90° intorno all'asse tratteggiato vale quindi

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{fin}} - \mathcal{U}_{\text{iniz}} = -m B_f \simeq -628\,fJ$$

PROBLEMA 3

1. Il campo generato dal solenoide vale

$$B_s = \mu_0 n i_s$$

Il flusso del campo B_s attraverso l'avvolgimento è pari a

$$\Phi(B_s) = \int \vec{B}_s \cdot \vec{u}_n \mathrm{d}\Sigma = NB_s\pi r^2 = N\mu_0 n i_s \pi r^2$$

poichè il campo magnetico B_s è non nullo solo all'interno del solenoide e ci sono N spire quadrate. Il coefficiente di mutua induzione vale quindi

$$M = \frac{\Phi(B_s)}{i_s} = \mu_0\pi N n r^2 \simeq 444\,\mu H$$

2. La corrente indotta si calcola con la legge dell'induzione elettromagnetica:

$$i_{ind} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi(B)}{\mathrm{d}t}$$

Calcoliamo innanzitutto la resistenza R, data da

$$R = \rho\frac{N4\ell}{\Sigma} \simeq 33.6\,m\Omega$$

Siccome il flusso vale $\Phi(B) = Mi(t)$, la corrente indotta sarà

$$i_{ind} = -\frac{M}{R}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{Mi_0}{R\tau}e^{-t/\tau}$$

3. L'energia dissipata per effetto Joule si calcola come

$$W_J = \int_{t_1}^{t_2} Ri_{ind}(t)^2\mathrm{d}t = \frac{M^2 i_0^2}{R\tau^2}\int_0^{\tau} e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{M^2 i_0^2}{R\tau^2}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^{\tau} = \frac{M^2 i_0^2}{2R\tau}(1-e^{-2}) \simeq 2.03\,mJ$$

4. La carica fluita nell'avvolgimento quadrato dall'istante $t_1 = 0$ al tempo infinito si calcola con la legge di Felici

$$Q = \frac{\Phi_{iniziale} - \Phi_{finale}}{R} = M\frac{i(0) - i(+\infty)}{R} = M\frac{i_0}{R} \simeq 26.4\,mC$$