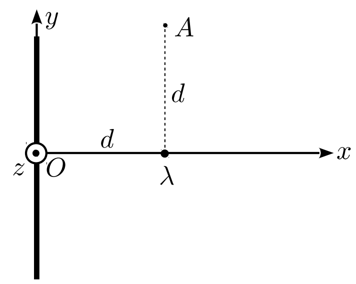
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

a.a. 2019-2020
Elementi di Fisica II:
Prova scritta telematica – 11 Settembre 2020

Problema 1

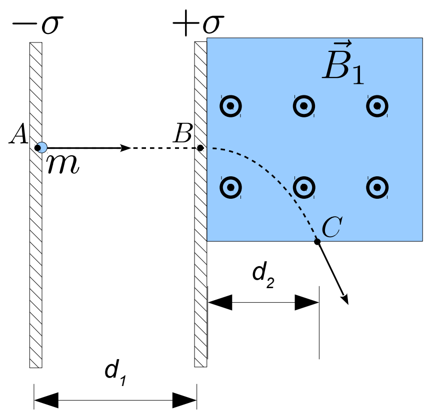
Si consideri un piano isolante infinito (di spessore trascurabile) carico con densità superficiale di carica uniforme pari a $\sigma = -12nC/m^2$. Il piano passa per l'origine O del sistema di coordinate ed è perpendicolare all'asse x come in figura. Un filo infinito parallelo all'asse z si trova ad una distanza $d = 5cm$ dal piano. Sul filo è disposta una carica negativa con densità lineare di carica uniforme pari a $\lambda = -1.1\, nC/m$.



1. Calcolare il campo elettrostatico nel punto A di coordinate (d, d).
2. Calcolare in quali punti dell'asse x il campo elettrico è nullo.
3. Calcolare la differenza di potenziale $V_O - V_A$.
4. Si dimostri che il campo elettrico generato da una carica puntiforme è conservativo.

Problema 2

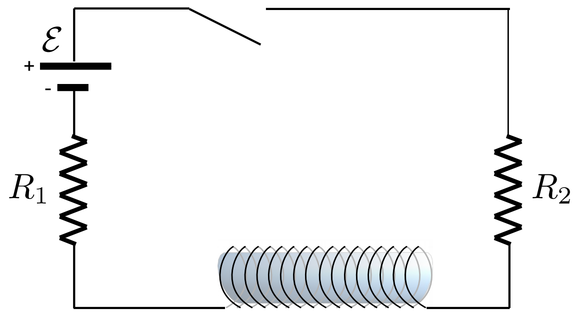
Un condensatore piano viene caricato in modo che sulle due armature sia presente una densità di carica $+\sigma$ e $-\sigma$ come in figura, con $|\sigma| = 1.5nC/m^2$. La distanza tra le armature vale $d_1 = 5cm$. Un particella con rapporto carica su massa pari a $|q|/m = 3 \cdot 10^3 C/kg$ è inizialmente ferma nel punto A. La particella viene accelerata fino al punto B e successivamente entra in una zona immersa in un campo magnetico $\vec{B}_1$ di modulo $B_1 = 135mT$, uniforme e costante con il verso uscente dal foglio come in figura. La particella seguendo la traiettoria indicata con una linea tratteggiata, raggiunge il punto C, distante $d_2 = 10cm$ dall'armatura di destra. Determinare:



1. Il segno della carica della particella e della densità di carica σ.
2. Il modulo della velocità della particella nel punto B.
3. Il raggio della traiettoria curvilinea da B a C.
4. Il tempo necessario per percorrere il tratto BC.
5. La velocità della particella (modulo, direzione e verso) nel punto C.

Problema 3

Un circuito RL, inizialmente aperto, è costituito da due resistori di resistenza $R_1 = 80\Omega$ e $R_2 = 65\Omega$ e un solenoide lungo $\ell = 4cm$ costituito da $N = 500$ spire circolari di raggio $r = 1.5cm$. L'interno del solenoide è completamente riempito da un materiale ferromagnetico con permeabilità magnetica relativa $k_m = 6000$. Il circuito viene chiuso al tempo $t_0 = 0$ ed é alimentato da un generatore di tensione $\mathcal{E} = 60V$.



1. Dimostrare che l'induttanza di un solenoide è pari a $L = k_m \mu_0 \Sigma N^2/\ell$, dove Σ è la sezione del solenoide.
2. Calcolare la costante di tempo τ del circuito.
3. Determinare il valore della corrente che circola nel circuito al tempo $t_1 = \tau$ e al tempo $t_2 >> \tau$.
4. Calcolare il modulo della f.e.m indotta dal solenoide al tempo $t_1 = \tau$.
5. Calcolare il campo magnetico nel solenoide al tempo t_2.

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Il campo generato dal piano indefinito si esprime come

$$\vec{E}_1 = -\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}\vec{u}_{1r} \simeq -678.6\, V/m \tag{1}$$

dove $\vec{u}_{1r}$ è il versore uscente dal piano.

Il campo generato dal filo infinito vale invece

$$\vec{E}_2 = -\frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{u}_{2r} \simeq -396\, V/m \tag{2}$$

dove $\vec{u}_{2r}$ è il versore uscente dal filo.

Nel punto A si avrà:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1A} &= -\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}\vec{i} \\ \vec{E}_{2A} &= -\frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 d}\vec{j} \end{aligned} \tag{3}$$

da cui

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{1A} + \vec{E}_{2A} = -\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}\vec{i} - \frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 d}\vec{j} \tag{4}$$

Il modulo del campo vale quindi:

$$|\vec{E}_A| = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\sqrt{\sigma^2\pi^2 + \frac{\lambda^2}{d^2}} \simeq 785.7\, V/m$$

orientato con un angolo θ rispetto all'asse x, dove

$$\tan\theta = \frac{|\lambda|}{\pi d|\sigma|} = 0.583 \qquad \Rightarrow \qquad \theta \simeq -149.73^\circ$$

2. L'unica zona in cui il campo di può annullare (dove i campo generato dal piano è opposto al campo generato dal filo) è la porzione di asse x compresa tra il piano e il filo. In questa zona si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1A} &= -\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}\vec{i} \\ \vec{E}_{2A} &= \frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{i} \end{aligned} \tag{5}$$

con r la distanza dal filo. Affinchè il campo si annulli deve valere:

$$\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} = \frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{|\lambda|}{\pi\sigma} \simeq 2.92\, cm$$

che è una soluzione accettabile siccome $r < d$. La corrispondente coordinata x_0 vale

$$x_0 = d - r = 2.08cm$$

3. Calcoliamo separatamente la d.d.p. generata dal piano e dal filo. Partiamo dal piano:

$$\Delta V^p = V_O^p - V_A^p = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \simeq -33.93\, V$$

Il potenziale generato da un filo vale $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$ e dipende solo dalla distanza dal filo. Siccome i punti A ed O sono alla stessa distanza dal filo, si avrà:

$$\Delta V^f = V_O^f - V_A^f = 0$$

Dunque

$$V_O - V_A = \Delta V^f + \Delta V^p \simeq -33.93\, V$$

PROBLEMA 2

1. Siccome la forza di Lorenza devia la particella verso il basso, la carica della particella deve essere positiva. Inoltre, siccome la faccia di destra del condensatore piano accelera la particella inizialmente ferma, su tale armatura deve essere presente una carica negativa, per cui $\sigma < 0$.

2. Per conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B \qquad \Rightarrow \qquad v_B = \sqrt{2\frac{q}{m}(V_A - V_B)} \simeq 225.6\,m/s$$

   dove si è usato

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d \simeq 8.48V$$

3. Il raggio del moto di una particella carica in un campo magnetico si calcola come:

$$R = \frac{mv_B}{qB_1} \simeq 55.7\,cm$$

4.

$$\sin\theta = \frac{d_2}{R} \simeq 0.179 \qquad \Rightarrow \qquad \theta \simeq 0.18\,\mathrm{rad}$$

$$BC = \theta R \simeq 10.06cm$$

$$t_1 = \frac{BC}{v_B} \simeq 446\,\mu s$$

5. La velocità in C ha lo stesso modulo della velocità nel punto B. Duque

$$v_C = v_B \simeq 225.6\,m/s \tag{6}$$

   L'angolo che forma con l'asse x è pari a θ (l'angolo calcolato in precedenza).

PROBLEMA 3

1. Vedere il libro di testo
2. La resistenza totale del circuito vale
$$R = R_1 + R_2 = 145\Omega$$
Per ottenere la costante di tempo calcoliamo l'induttanza
$$L = k_m \mu_0 \Sigma N^2/\ell \simeq 33.31\, H$$
dove si è usato l'area della sezione del solenoide
$$\Sigma = \pi r^2 \simeq 706 \cdot 10^{-6} m^2$$
La costante di tempo vale quindi
$$\tau = L/R \simeq 230\, ms$$
3. La corrente all'interno del circuito RL dopo la chiusura al tempo $t = 0$ vale
$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$
Sostituendo si ottiene
$$i(t_1) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-1}) \simeq 262\, mA$$
e
$$i(t_2) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t_2/\tau}) \simeq \frac{\mathcal{E}}{R} \simeq 414\, mA$$
4. La fem indotta si calcola dalla legge di Faraday:
$$|f_{\text{ind}}(t)| = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathcal{E}}{\tau R}e^{-t/\tau}$$
Al tempo t_1 si avrà
$$|f_{\text{ind}}(t_1)| = L\frac{\mathcal{E}}{\tau R}e^{-1} = \mathcal{E}e^{-1} \simeq 22.1\, V$$
4. Il campo magnetico al tempo t_2 vale
$$B(t_2) = k_m \mu_0 n i(t_2) \simeq 39.01\, T$$