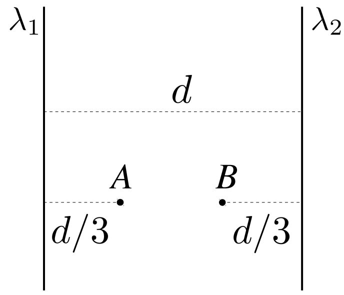
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

# a.a. 2017-2018
# Elementi di Fisica II: 11 Giugno 2018
# Scritto

## Problema 1

Si considerino due fili isolanti paralleli di lunghezza infinita come in figura. I fili distano $d = 12\ cm$ e su di essi è presente una carica per unità di lunghezza pari a $\lambda_1 = 9nC/m$ e $\lambda_2 = -\lambda_1/2$ come in figura.



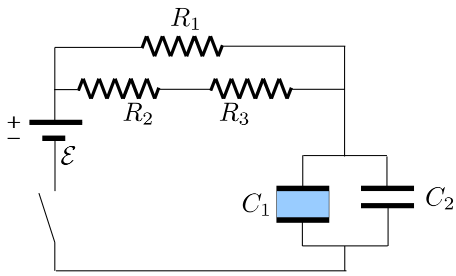

1. Determinare in quali punti del piano in cui giacciono i due fili il campo elettrostatico è nullo.

2. Calcolare la differenza di potenziale $V_A - V_B$ dove $A$ e $B$ distano $d/3$ dal filo di sinistra e destra rispettivamente.

3. Un elettrone si trova inizialmente nel punto $A$. Determinare la velocitá minima che l'elettrone deve avere per poter raggiungere il punto $B$ (si ricordi che la carica e la massa dell'elettrone valgono $e = -1.6 \cdot 10^{-19}\ C$ e $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ kg$).

## Problema 2

Si consideri il circuito mostrato in figura. La tensione fornita dal generatore vale $\mathcal{E} = 80\ V$. I condensatori sono entrambi formati da armature quadrate di lato $\ell = 5\ cm$. Nel condensatore $C_1$ le armature sono distanti $d = 2\ cm$ e lo spazio tra esse è riempito con un dielettrico di costante dielettrica $k_e = 5$. Nel condensatore $C_2$ le armature sono distanti $d/2$. Sapendo che $R_2 + R_3 = 2R_1$ e che la costante di tempo del circuito vale $\tau = 2.5\ ns$, determinare:



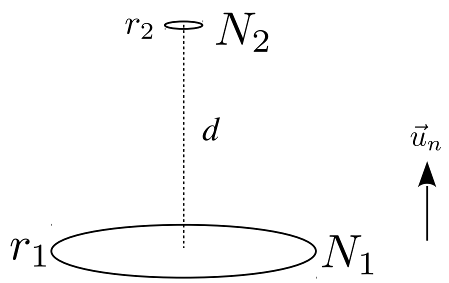

1. Il valore di $R_1$.

2. Sapendo che il circuito viene chiuso al tempo $t = 0$, determinare il valore della corrente che circola in $R_2$ e $R_3$ dopo che è passato un tempo $t_1 = \tau/2$.

3. Dopo che è passato un tempo $t_2 \gg \tau$, calcolare l'energia esterna necessaria per rimuovere il dielettrico.

## Problema 3

Si considerino un avvolgimento di $N_1$ spire circolari di raggio $r_1 = 4\ cm$ e un avvolgimento di $N_2$ spire circolari di raggio $r_2 = 1\ mm$ come in figura. Le normali ai due avvolgimenti sono parallele e i centri dei due avvolgimenti distano $d = 16\ cm$ (il centro dell'avvolgimento $N_2$ si trova sull'asse del primo avvolgimento come in figura). A partire dall'istante $t = 0$, nel primo avvolgimento scorre una corrente $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ con $i_0 = 15\ A$, $\tau = 10\ ms$ e verso positivo secondo la normale all'avvolgimento $\vec{u}_n$ mostrata in figura. La resistenza totale del secondo avvolgimento vale $R = 50\ \Omega$.




1. Calcolare il prodotto $N_1 \cdot N_2$ sapendo che il coefficiente di mutua induzione tra i due avvolgimenti vale $M_{12} = 1.4\ \mu H$ (si consideri l'approssimazione $r_2 \ll d$)
2. Calcolare il valore della corrente (modulo e verso) nel secondo avvolgimento al tempo $t_1 = \tau$.
3. Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule dall'istante $t_1$ al tempo infinito nell'avvolgimento $N_2$.

## SOLUZIONI

### PROBLEMA 1

1. Utilizzando il Teorema di Gauss, il campo elettrico generato da un filo uniformemente carico vale

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}\vec{u}_r$$

dove $r$ é la distanza dal filo e $\vec{u}_r$ il versore radiale rispetto all'asse del filo. Consideriamo unicamente il piano bidimensionale della figura, con coordinate $(x, y)$. Scegliamo l'origine in modo che la coordinata $x$ sia nulla lungo il filo con carica $\lambda_1$. Se indico con $\vec{i}$ il versore lungo l'asse $x$ positivo si ha che il primo filo genera il campo

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_1}{x}\vec{i}$$

mentre il secondo filo genera il campo

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_2}{x-d}\vec{i}$$

Le espressioni sono corrette (anche il segno) per qualunque valore di $x$. Notare che non é presente nessuna dipendenza da $y$.

Affinché il campo totale sia nullo deve valere

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{(x-d)} = 0$$

Siccome $\lambda_2 = -\lambda_2/2$ si ottiene

$$\frac{\lambda_1}{x} = \frac{\lambda_1}{2(x-d)} \quad \Rightarrow \quad x = 2x - 2d \quad \Rightarrow \quad x = 2d$$

Il campo é dunque nullo per tutti i punti paralleli ai fili che distano $2d$ dal filo 1 e sono a destra del filo 2.

2. Il potenziale si ottiene come l'integrale del campo cambiato di segno. Siccome il campo dipende solo dalla distanza dai fili, il potenziale a distanza $d$ dal filo vale $V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{d}{r_0})$. Il numero $r_0$ rappresenta il punto arbitrario in cui si fissa il valore del potenziale (nella differenza di potenziale $r_0$ sparirà).

Nel caso dei due fili, in un punto generico di coordinata $x$ il potenziale totale vale

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x)$$

con

$$V_1(x) = -\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{|x|}{r_0})$$

e

$$V_2(x) = -\frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{|x-d|}{r_0})$$

Il primo termine $V_1$ è il potenziale generato dal filo 1, il secondo $V_2$ è generato dal filo 2. Calcolo la variazione di potenziale dovuta ai singoli fili:

$$\Delta V_1 = V_1(A) - V_1(B) = -\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{d}{3r_0}) + \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{2d}{3r_0}) = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0}\ln(2) \simeq 112.3\ V$$

$$\Delta V_2 = V_2(A) - V_2(B) = -\frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{2d}{3r_0}) + \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{d}{3r_0}) = -\frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0}\ln(2) = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0}\ln(2) \simeq 56.14\ V$$

La variazione totale vale quindi

$$V_A - V_B = \frac{3\lambda_1}{4\pi\epsilon_0}\ln(2) \simeq 168.4\ V$$

3. Per la conservazione dell'energia deve valere

$$\frac{1}{2}m_e v_A^2 - |e|V_A = \frac{1}{2}m_e v_B^2 - |e|V_B$$

da cui

$$v_B^2 = v_A^2 - \frac{2|e|}{m_e}(V_A - V_B)$$

Siccome $v_B^2$ deve essere positiva è necessario che

$$v_A^2 - \frac{2|e|}{m_e}(V_A - V_B) \geq 0$$

da cui si ottiene il valore minimo della velocità in $A$ come

$$v_A \geq \sqrt{\frac{2|e|}{m_e}(V_A - V_B)} \simeq 7691\ km/s$$

**PROBLEMA 2**

1. Calcoliamo il valore della resistenza totale. Le due resistenze in serie corrispondono ad un unica resistenza $R' = R_2 + R_3 = 2R_1$. La resistenza $R'$ é in parallelo con la resistenza $R_1$ per cui la resistenza totale vale

$$R_T = \frac{R_1 R'}{R_1 + R'} = \frac{2}{3} R_1 \,.$$

Calcoliamo ora la capacità totale del circuito. La capacità di un condensatore piano vale in generale $C = k\epsilon_0 \frac{\Sigma}{d}$ con $\Sigma$ l'area delle armature e $d$ la loro distanza. Dunque le capacità valgono

$$C_1 = k_e \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d} \simeq 5.53\ pF$$
$$C_2 = \epsilon_0 \frac{2\ell^2}{d} \simeq 2.21\ pF \,.$$

Siccome le due capacità sono in parallelo, la capacità totale vale

$$C_T = C_1 + C_2 = (k_e + 2)\epsilon_0 \frac{\ell^2}{d} \simeq 7.75\ pF \,.$$

Sapendo che la costante di tempo vale

$$\tau = R_T C_T = \frac{2}{3} R_1 C_T \,,$$

il valore di $R_1$ si ricava come

$$R_1 = \frac{3}{2} \frac{\tau}{C_T} \simeq 484\ \Omega \,.$$

2. La corrente totale che scorre in un circuito $RC$ dopo la chiusura vale $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_T} e^{-t/\tau}$. Al tempo $t_1$ tale corrente vale

$$i(t_1) = \frac{\mathcal{E}}{R_T} e^{-t_1/\tau} = \frac{3\mathcal{E}}{2R_1} e^{-1/2} \simeq 150\ mA \,.$$

Nelle resistenze $R_2$ e $R_3$ scorre la stessa corrente $I_2$. Detta $I_1$ la corrente che scorre in $R_1$, siccome ai capi di $R_1$ e di $R'$ c'è la stessa tensione, si ha

$$\begin{cases} R_1 I_1 = R' I_2 = 2R_1 I_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 2I_2 \\ I_1 + I_2 = i(t_1) \,, \end{cases}$$

da cui

$$I_2 = \frac{i(t_1)}{3} \simeq 50\ mA \,.$$

3. Dopo che é passato un tempo molto lungo rispetto a $\tau$, l'energia immagazzinata nei condensatori vale

$$U_{in} = \frac{1}{2} C_T \mathcal{E}^2$$

Dopo che il dielettrico viene rimosso, cambia la capacità totale che diventa (basta sostituire $k_e \to 1$ nell'equazione di $C_T$)

$$C'_T = C'_1 + C_2$$

con

$$C'_1 = \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d} = \frac{C_1}{k_e} \simeq 1.11\ pF$$

L'energia finale diventa

$$U_{fin} = \frac{1}{2} C'_T \mathcal{E}^2$$

Il lavoro esterno é pari alla variazione di energia, data da

$$\mathcal{L}_{ext} = U_{fin} - U_{in} = \frac{1}{2}(C'_1 - C_1)\mathcal{E}^2 = \frac{1 - k_e}{2k_e} C_1 \mathcal{E}^2 \simeq -14.16\ nJ$$

**PROBLEMA 3**

1. Utilizzando la legge di Laplace
$$d\vec{b} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$$
per un filo percorso da corrente $i$ si dimostra che il campo prodotto sull'asse di un avvolgimento circolare vale
$$\vec{B}_1 = \frac{N_1 \mu_0 i_1}{2}\frac{r_1^2}{(d^2 + r_1^2)^{3/2}}\vec{u}_n$$
dove $i_1$ é la corrente che circola nel primo avvolgimento. Il flusso del campo magnetico attraverso il secondo avvolgimento vale (nell'ipotesi in cui $r_1 \ll d$ possiamo considerare il campo $B_1$ costante all'interno del secondo avvolgimento):
$$\Phi_2 = N_2 B_1 \pi r_2^2 = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \pi i_1}{2}\frac{r_1^2 r_2^2}{(d^2 + r_1^2)^{3/2}}$$
da cui il coefficiente di mutua induzione
$$M_{12} = \frac{\Phi_2}{i_1} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \pi}{2}\frac{r_1^2 r_2^2}{(d^2 + r_1^2)^{3/2}}$$
Il prodotto $N_1 N_2$ vale quindi
$$N_1 N_2 = \frac{M_{12}}{\mu_0 \pi}\frac{2(d^2 + r_1^2)^{3/2}}{r_1^2 r_2^2} \simeq 1988528$$
2. Dato il verso di $\vec{u}_n$ e siccome la corrente $i(t)$ é positiva, per la regola della vite la corrente scorre in verso antiorario se guardiamo il circuito $N_1$ dall'alto. La corrente indotta vale
$$i_{ind}(t) = -\frac{M_{12}}{R}\frac{di(t)}{dt} = \frac{M_{12} i_0}{R\tau}e^{-t/\tau}$$
il cui segno é positivo e quindi é concorde a $i(t)$. Il verso si può ottenere anche dalla legge di Lentz: siccome la corrente $i(t)$ diminuisce, il campo $B_1(t)$ (che ha lo stesso verso di $\vec{u}_n$) diminuisce e la corrente indotta deve generare un campo magnetico concorde a $\vec{u}_n$.

   Al tempo $t_1$ la corrente indotta vale
$$i_{ind}(t_1) = \frac{M_{12} i_0}{R\tau}e^{-t_1/\tau} = \frac{M_{12} i_0}{R\tau}e^{-1} \simeq 15.45\ \mu A$$
3. La potenza dissipata per effetto Joule vale $P_J = R i_{ind}(t)^2$. Per calcolare l'energia devo integrare la potenza:
$$E_J = \int_{t_1}^{+\infty} P_J(t)dt = \int_{t_1}^{+\infty} R i_{ind}^2(t)dt = \frac{M^2 i_0^2}{R\tau^2}\int_{t_1}^{+\infty} e^{-2t/\tau}dt$$
L'integrale dell'esponenziale si risolve facilmente ottenendo
$$E_J = \frac{M^2 i_0^2}{R\tau^2}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_{t_1}^{+\infty} = \frac{M^2 i_0^2}{2R\tau}e^{-2t_1/\tau} = \frac{M^2 i_0^2}{2R\tau}e^{-2} \simeq 59.7\ pJ$$