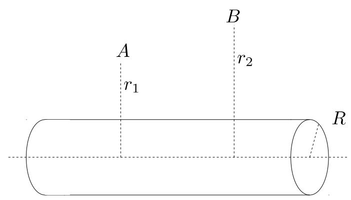
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

a.a. 2020-2021
Elementi di Fisica II: 23 Settembre 2021
Compito scritto

Problema 1

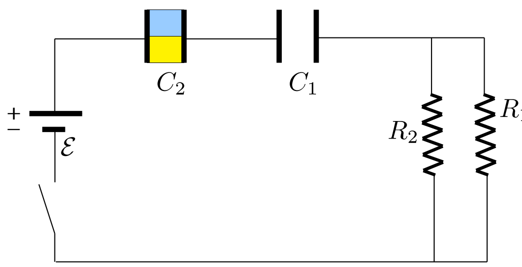
Si consideri un cilindro pieno e isolante di lunghezza infinita. Il raggio del cilindro vale $R = 5cm$. Il cilindro è caricato con una densità volumetrica di carica uniforme e pari a $\rho = 3\mu C/m^3$. Si considerino i punti A e B distanti rispettivamente $r_1 = 12cm$ e $r_2 = 15cm$ dall'asse del cilindro.



1. Dimostrare che che il campo elettrico all'esterno del cilindro vale $E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$, dove r è la distanza dall'asse del cilindro.
2. Calcolare il campo elettrico all'interno del cilindro
3. Calcolare il potenziale in funzione della distanza r dall'asse del cilindro, ponendo a zero il potenziale sull'asse del cilindro.
4. Calcolare il lavoro esterno necessario per spostare una carica $q_0 = -50nC$ dal punto A al punto B.
5. Calcolare la velocità che deve avere un carica con rapporto carica su massa $q/m = -30mC/kg$ per poter muoversi di moto circolare uniforme attorno all'asse del cilindro a distanza r_2 dallo stesso.
6. Enunciare e dimonstrare il teorema di Gauss per il campo elettrico e magnetico

Problema 2

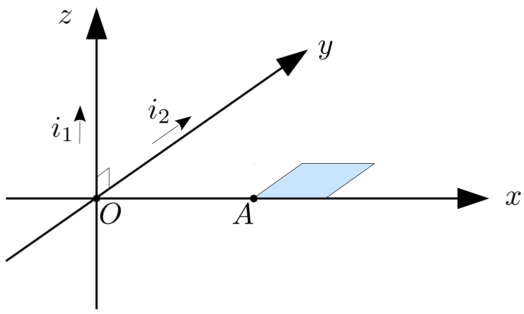
Si consideri il circuito mostrato in figura. La tensione fornita dal generatore vale $\mathcal{E} = 60\ V$, mentre il valore delle due resistenze è pari a $R_1 = 500\Omega$ e $R_2 = 300\Omega$. I due condensatori C_1 e C_2 sono identici e formati da armature quadrate di lato $\ell = 3\ cm$ distanti $d = 1cm$. Lo spazio tra la armature del condensatore C_1 è vuoto mentre quello di C_2 è completamente riempito da due dielettrici di uguale volume e costanti dielettriche $k_1 = 4$ e $k_2 = 3$. Il circuito viene chiuso al tempo $t = 0$.



1. Calcolare la costante di tempo del circuito
2. Determinare il valore della corrente che circola in R_1 e R_2 al tempo $t_1 = \tau$.
3. Determinare il valore della densità di carica di polarizzazione sulle superfici dei dielettrici al tempo $t_1 = \tau$.
4. Dopo che è passato un tempo $t_2 \gg \tau$, calcolare l'energia esterna necessaria per rimuovere entrambi i dielettrici. Se invece il circuito venisse aperto prima di rimuovere i dielettrici, quanta energia esterna sarebbe necessaria per rimoverli?
5. Enunciare la legge di Ohm microscopica e dimostrare come è possibile ottenere la legge $\Delta V = R \cdot I$ a partire da essa.

Problema 3

Si considerino due fili conduttori infiniti posti sugli assi y e z di un sistema di coordinate ortogonali. Sui fili scorrono le correnti $i_1(t) = I_1 e^{-t/\tau}\sin(\omega t)$ e $i_2 = I_2 e^{-2t/\tau}\cos(\omega t)$ nei versi indicati in figura. I parametri valgono $I_1 = 0.6A$, $I_2 = 0.4A$, $\tau = 0.4s$ e $\omega = 3Hz$. Si consideri una spira quadrata di lato $\ell = 3cm$ posizionata sul piano (x, y) come in figura. Il vertice A dista $d = 9cm$ dall'origine O.



1. Calcolare il valore del modulo del campo magnetico nel punto A al tempo $t_1 = 0$ e al tempo $t_2 = \frac{\pi}{4\omega}$
2. Il valore assoluto del flusso del campo magnetico attraverso la spira al tempo $t = 0$.
3. Il valore assoluto della corrente indotta nella spira al tempo $t_1 = 0$ e al tempo $t_2 = \tau$, sapendo che la sua resistenza vale $R = 5\Omega$.
4. La carica circolata nella spira dal tempo $t = 0$ al tempo $t = +\infty$
5. Definire la corrente di spostamento e giustificare la necessità della sua introduzione all'interno della legge di Ampère

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Calcoliamo il campo elettrico. Consideriamo una superficie cilindrica Σ di raggio r e lunghezza L, si ottiene che:

$$\Phi_\Sigma(E) = 2\pi r L E(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E_s(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{q(r)}{Lr}$$

Nel caso $r < R$ si ha che $q(r) = \rho L \pi r^2$, mentre per $r \geq R$ si ha che $q(r) = \rho L \pi R^2$. Dunque

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & r < R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} & r \geq R \end{cases}$$

2. Punto precedente

3.
$$V(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + c_1 & r < R \\ -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{r}{r_0} & r \geq R \end{cases}$$

$$V(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 0$$

$$V(R_-) = V(R_+) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{R}{r_0} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} = \ln\frac{R}{r_0} \qquad \Rightarrow \qquad r_0 = \frac{R}{\sqrt{e}}$$

4.
$$V_B - V_A = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{r_B}{r_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{r_A}{r_0} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} \simeq -94.6V$$

$$\mathcal{L} = q_0(V_B - V_A) = q_0\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} \simeq 4.73\mu J$$

5.
$$\frac{mv^2}{r_2} = |q|E(r_2) \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{|q|}{m}\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}} \simeq 3.57m/s$$

PROBLEMA 2

1. E' necessario calcolare la resistenza e la capacità totale. La resistenza totale vale

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \simeq 187.5\Omega$$

La capacità C_1 vale

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d} \simeq 0.795pF$$

Il condensatore C_2 può essere visto come due condensatori in parallelo C_{2a} e C_{2b}, le cui capacità si sommano:

$$C_{2a} = k_1 \epsilon_0 \frac{\ell^2}{2d} = \frac{k_1}{2} C_1 \quad , \quad C_{2b} = k_2 \epsilon_0 \frac{\ell^2}{2d} = \frac{k_2}{2} C_1 \quad ,$$

$$C_2 = k_1 \epsilon_0 \frac{\ell^2}{2d} + k2 \epsilon_0 \frac{\ell^2}{2d} = \frac{k_1 + k_2}{2} \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d} = \frac{k_1 + k_2}{2} C_1 \simeq 2.78pF$$

La capacità totale vale

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \simeq 0.619pF$$

da cui

$$\tau = C_T R \simeq 116ps$$

2. La corrente che circola nel circuito vale

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} \qquad \Rightarrow \qquad i(t_1) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-1} \simeq 118mA$$

La tensione ai capi delle resistenze va quindi

$$\Delta V_R(t) = R i(t) = \mathcal{E} e^{-t/\tau}$$

Le correnti attraverso R_1 ed R_2 valgono rispettivamente

$$i_1(t) = \frac{\Delta V_R(t)}{R_1} = \frac{\mathcal{E}}{R_1} e^{-t/\tau}$$

$$i_2(t) = \frac{\Delta V_R(t)}{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_2} e^{-t/\tau}$$

Al tempo t_1 si ha

$$i_1(t_1) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} e^{-1} \simeq 44.14mA$$

$$i_2(t_1) = \frac{\mathcal{E}}{R_2} e^{-1} \simeq 73.57mA$$

3. La tensione ai capi del condensatore equivalente vale

$$\Delta V_C(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})$$

e la carica accumulata è pari a

$$Q_C(t) = \Delta V_C(t) C_T = \mathcal{E} C_T (1 - e^{-t/\tau}) \qquad \Rightarrow \qquad Q_C(t_1) = \mathcal{E} C_T (1 - e^{-1}) \simeq 23.47pC$$

La tensione ai capi di C_2 vale quindi

$$\Delta V_{C_2}(t) = \frac{Q_C(t)}{C_2} = \frac{C_T}{C_2} \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})$$

La carica accumulata sui condensatori C_{2a} e C_{2b} vale

$$Q_a(t) = \Delta V_{C_2}(t) C_{2a} = \frac{C_T C_{2a}}{C_2} \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \Rightarrow \qquad Q_a(t_1) = \frac{C_{2a}}{C_2} Q_C(t_1) = \frac{k_1}{k_1 + k_2} Q_C(t_1) \simeq 13.4pC$$

$$Q_b(t) = \Delta V_{C_2}(t) C_{2b} = \frac{C_T C_{2b}}{C_2} \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \Rightarrow \qquad Q_b(t_1) = \frac{C_{2b}}{C_2} Q_C(t_1) = \frac{k_2}{k_1 + k_2} Q_C(t_1) \simeq 10.1pC$$

mentre la corrispondente carica di polarizzazione al tempo t_1 vale

$$q_a(t_1) = \frac{k_1 - 1}{k_1} Q_a(t_1) = \frac{k_1 - 1}{k_1} \frac{C_T C_{2a}}{C_2} \mathcal{E}(1 - e^{-1}) \simeq 10.06pC$$

$$q_b(t_1) = \frac{k_2 - 1}{k_2} Q_b(t_1) = \frac{k_2 - 1}{k_2} \frac{C_T C_{2b}}{C_2} \mathcal{E}(1 - e^{-1}) \simeq 6.71pC$$

Le densità di carica si calcolano dividendo per la superficie

$$\sigma_a(t_1) = \frac{q_a(t_1)}{2\ell^2} \simeq 5.59nC/m^2$$

$$\sigma_b(t_1) = \frac{q_b(t_1)}{2\ell^2} \simeq 3.73nC/m^2$$

4. Al tempo $t \gg \tau$ il condensatore C_T ha una ddp pari a $\mathcal{E}$. La sua energia vale quindi

$$U_{in} = \frac{1}{2} C_T \mathcal{E}^2 \simeq 1.11nJ$$

Eliminando i dielettrici la nuova capacità del condensatore completo vale

$$C'_T = \frac{1}{2} C_1 \simeq 0.398pF$$

Consideriamo il generatore collegato. In questo caso il potenziale rimane costante, per cui

$$U_{fin} = \frac{1}{2} C'_T \mathcal{E}^2 \simeq 716pJ$$

da cui il lavoro

$$\mathcal{L}_{ext} = U_{fin} - U_{in} = \frac{1}{2}(C'_T - C_T)\mathcal{E}^2 \simeq -398pJ$$

Se il generatore fosse staccato, la carica totale si conserva pari a

$$Q_T = C_T \mathcal{E} \simeq 37.13pC$$

per cui

$$U'_{fin} = \frac{1}{2} \frac{Q_T^2}{C'_T} \simeq 1.73nJ$$

Il lavoro vale in questo caso

$$\mathcal{L}_{ext} = U'_{fin} - U_{in} \simeq 619pJ$$

PROBLEMA 3

1. Detti $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ i versori paralleli agli assi cartesiani, i due campi magnetici in A valgono

$$\vec{B}_{1A}(t) = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi d}\vec{j}$$

$$\vec{B}_{2A}(t) = -\frac{\mu_0 i_2(t)}{2\pi d}\vec{k}$$

per cui il campo totale è

$$\vec{B}_A(t) = \vec{B}_{1A}(t) + \vec{B}_{2A}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi d}(i_1(t)\vec{j} - i_2(t)\vec{k})$$

Il suo valore assoluto vale

$$B_A(t) = \frac{\mu_0}{2\pi d}\sqrt{i_1^2(t) + i_2^2(t)}$$

Al tempo $t_1 = 0$ si ha $i_1(t_1) = 0$ e $i_2(t_1) = I_2$. Al tempo $t_2 = \frac{\pi}{4\omega}$ si ha $i_1(t_2) = \frac{I_1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4\omega\tau}}$ e $i_2(t_2) = \frac{I_1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{2\omega\tau}}$. Dunque

$$B_A(t_1) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \simeq 888nT$$

$$B_A(t_2) = \frac{\mu_0}{2\sqrt{2}\pi d}\sqrt{I_1^2 e^{-\frac{\pi}{2\omega\tau}} + I_2^2 e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}}} \simeq 518nT$$

2. Il campo magnetico generato dal filo i_1 è parallelo al piano (x, y) e dunque non contribuisce al flusso. L'unico campo che contribuisce al flusso è il campo B_2, parallelo alla normale alla spira. Il flusso vale quindi

$$\Phi_{B_2}(t) = \int \vec{B}_2 \cdot n\mathrm{d}\Sigma = \int B_2 \mathrm{d}\Sigma = \int_d^{d+\ell} \frac{\mu_0 i_2(t)}{2\pi x}\ell \mathrm{d}x = \frac{\mu_0 i_2(t)\ell}{2\pi}\ln\frac{d+\ell}{d} = M i_2(t)$$

con

$$M = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\frac{d+\ell}{d} \simeq 1.73nH$$

Al tempo t_1 si ha $i_2(t_1) = I_2$ per cui

$$\Phi_{B_2}(t_1) = \frac{\mu_0 I_2 \ell}{2\pi}\ln\frac{d+\ell}{d} = M I_2 \simeq 0.69nWb$$

3. Il modulo della corrente indotta vale

$$i_{ind}(t) = \frac{1}{R}\left|\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{M}{R}\left|\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{M}{R}|I_2 e^{-2t/\tau}[\frac{2}{\tau}\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)]|$$

Al tempo $t_1 = 0$ e $t_2 = \tau$ si ha

$$i_{ind}(0) = \frac{2MI_2}{\tau R} \simeq 690pA$$

$$i_{ind}(\tau) = e^{-2}\frac{MI_2}{R}|[\frac{2}{\tau}\cos(\omega\tau) + \omega\sin(\omega\tau)]| \simeq 86pA$$

4. Per la legge di Felici la carica circolata vale

$$Q = \frac{\Phi_B(0) - \Phi_B(+\infty)}{R} = \frac{M}{R}[i_2(0) - i_2(\infty)] = \frac{MI_2}{R} \simeq 138pC$$