Cognome

Nome

Matricola:

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

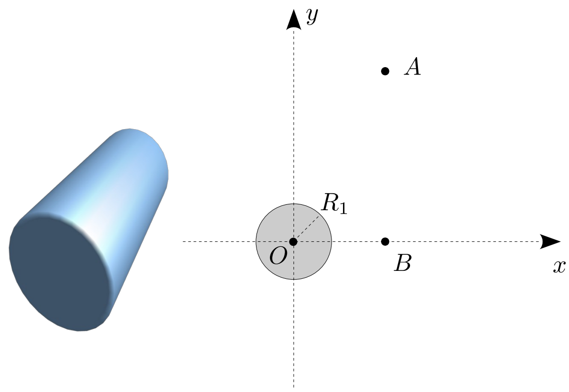
**a.a. 2021-2022**

**Elementi di Fisica II:**

**Prova scritta - 7 Settembre 2022**

## Problema 1

Si consideri un cilindro infinito di materiale isolante. Il cilindro ha raggio $R_1 = 1.5cm$ ed è caricato con una denstià di carica costante $\rho = -0.9\mu C/m^3$. Si consideri un piano $(x, y)$ perpendicolare all'asse del cilindro e si consideri un sistema di assi cartesiani con l'origine $O$ situato sull'asse del cilindro come in figura.




1. Calcolare il campo elettrico nel piano $(x, y)$ in funzione della distanza $r$ dall'origine, sia all'interno che all'esterno del cilindro.

2. Calcolare la forza subita da un carica $q_0 = +5mC$ (modulo, direzione e verso) posta nel punto $B$ di coordinate $(d, 0)$ dove $d = 3cm$.

3. Calcolare il potenziale elettrostatico elettrico nel piano $(x, y)$ in funzione della distanza $r$ dall'origine (sia all'interno che all'esterno del cilindro) sapendo che il potenziale è nullo nell'origine $O$.

4. Calcolare il lavoro esterno necessario per spostare la carica $q_0$ dal punto $B$ al punto $A$ di coordinate $(d, 2d)$.

5. Cosa si intende per "campo conservativo"? Dimostrare che il campo elettrostatico è conservativo.

---

**Soluzione problema 1**

1. Per trovare il campo elettrico utilizziamo il teorema di Gauss attraverso una superficie $\Sigma$ cilindrica di raggio $r$ e lunghezza $L$. Siccome il campo è radiale $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$ il flusso attraverso $\Sigma$ vale

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = E(r)2\pi rL$$

La carica contenuta all'interno di $\Sigma$ vale

$$q(r) = \begin{cases} \rho\pi r^2 L & r \leq R_1 \\ \rho\pi R_1^2 L & r > R_1 \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Gauss si ha

$$E(r) = \frac{q(r)}{2\pi\epsilon_0 rL} = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0}r & r \leq R_1 \\ \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0 r} & r > R_1 \end{cases}$$

2. Il modulo della forza subita dalla carica vale

$$F_{q_0} = E(r_B)q_0 = E(d)q_0 = \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0 d}q_0 \simeq 1.9N$$

diretta verso l'asse $x$ negativo.

3. Per un campo radiale, il potenziale si calcola attraverso la formula generale

$$V(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r$$

Utilizzando l'espressione del campo elettrico si ha

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\epsilon_0}r^2 + c_1 & r \leq R_1 \\ -\frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{r}{c_2} & r > R_1 \end{cases}$$

Utilizzando la condizione $V(0) = 0$ otteniamo che $V(0) = c_1$ da cui $c_1 = 0$. Imponendo la continuità in $R_1$ otteniamo

$$-\frac{\rho}{4\epsilon_0}R_1^2 = -\frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{R_1}{c_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} = \ln\frac{R_1}{c_2}$$

E' possibile riscrivere come

$$\ln\frac{r}{c_2} = \ln\frac{r}{R_1} + \ln\frac{R_1}{c_2} = \ln\frac{r}{R_1} + \frac{1}{2}$$

da cui

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\epsilon_0}r^2 & r \leq R_1 \\ -\frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{r}{R_1} - \frac{\rho R_1^2}{4\epsilon_0} & r > R_1 \end{cases}$$

4. Il lavoro per spostare la carica vale

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = q_0\Delta V = q_0(V_A - V_B)$$

La ddp si calcola come

$$V_A - V_B = V(r_A) - V(r_B) = -\frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{r_A}{r_B}$$

Siccome $r_B = d$ e $r_A = \sqrt{5}d$ si ha

$$V_A - V_B = -\frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0}\ln\sqrt{5} \simeq 9.21V$$

da cui

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = q_0\Delta V = q_0(V_A - V_B) \simeq 46.07mJ$$

## Problema 2

Un protone la cui velocitá iniziale è diretta lungo $x$, si muove lungo una traettoria circolare di diametro $d = 8.1$ cm in un campo magnetico di modulo $B = 0.58 \times 10^{-8} T$ diretto lungo l'asse $Z$ verso positivo.

1. Determinare la forza che agisce sulla particella nell'istante iniziale.
2. Il campo elettrico, modulo, direzione e verso, che si deve applicare perchè il protone segua una traettoria rettilinea.
3. Che cosa cambia se il protone viene sostituito da un elettrone? Calcolare il nuovo campo elettrico necessario perchè l'elettrone segua una traettoria rettilinea.
4. Si presentino le proprietà magnetiche della materia con qualche breve esempio.

Valori numerici da usare: $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$, $m_e = 9.12 \times 10^{-31}\ kg$, $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$

**Soluzione problema 2**

1. $\vec{B} = B_0\hat{z}$ e $\vec{v_0} = v_0\hat{x}$. La forza di Lorentz è $\vec{F} = q\vec{v_0} \times \vec{B} = -qv_0B_0\hat{y}$. Poichè all'inizio la traettoria è circolare velocità e raggio di curvatura $R = D/2$ sono collegati dalla relazione $v_0 = \frac{qB_oR}{m_p}$. Sostituendo nella forza si ottiene il modulo di $F$, $F = \frac{q^2B_0^2R}{m_p}$ numericamente $F = 2.11 \cdot 10^{-29}$ N.
2. Perchè la traettoria sia rettilinea la forza totale agente sul protone deve essere uguale a zero: $\vec{F_T} = q\vec{v_0}\times\vec{B}+q\vec{E} = 0$. Si ricava che il campo elettrico $\vec{E} = E\hat{y}$ con $E = v_0B_0 = \frac{qB_0^2R}{m_p} = 1.3 \cdot 10^{-10}$ V/m
3. Se il protone viene sostituito dall'elettrone cambia la massa della particella e il segno della carica elettrica, cambiando il segno e il modulo della forza di Lorentz. Il campo elettrico non cambia direzione e verso, ma solo modulo. Quindi abbiamo modulo della forza di Lorentz $F_e = \frac{q^2B_0^2R}{m_e} = 3.8 \cdot 10^{-26}$ N e il modulo del campo elettrico $E_e = v_0B_0 = \frac{qB_0^2R}{m_e} = 2.3 \cdot 10^{-7}$ V/m.

## Problema 3

Un solenoide è costituito da $N = 10.000$ spire di raggio $r = 1\ cm$ avvolte uniformemente attorno a un anello di raggio $R = 20\ cm$. Nel solenoide è possibile far passare una corrente $I_0 = 10^3\ A$.

1. Calcolare il campo magnetico all'interno del solenoide.
2. Calcolare l'energia magnetica immagazzinata nel solenoide.
3. Determinare la differenza di potenziale media che si stabilisce ai capi dell'avvolgimento del solenoide se la corrente viene fatta scendere bruscamente a metà del suo valore in un tempo pari a 1 ms.
4. Definire l'energia di un'onda elettromagnetica piana

---

**Soluzione problema 3**

1. Applichiamo la leggere di Ampère alla circonferenca di raggio $R$ e otteniamo $B2\pi R = \mu_0 I_0 N$ da cui il modulo del campo magnetico $B = \mu_0 I_0 \frac{N}{2\pi R} = 10$ T.
2. La densitá di energia associata ad un campo magnetico è $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = 4 \cdot 10^7 J/m^3$. Il volume che contiene tale campo magnetico è il volume totale delle spire $V = SL = \pi r^2 2\pi R = 3.9 \cdot 10^{-2} m^3$.
   L'energia immagazzinata nel solenoide è
   $$U_B = u_B V = \frac{\mu_0 N^2 r^2 I_0^2}{4R} = 1.57 \cdot 10^4 J.$$
   In alternativa è possibile utilizzare l'espressione $U_B = \frac{1}{2} L I_0^2$. Il coefficiente di autoinduzione $L$ si ottiene calcolando l'autoflusso $\Phi = B\pi r^2 N = \mu_0 I_0 \frac{N^2 r^2}{2R}$ da cui
   $$L = \frac{\Phi}{I_0} = \frac{\mu_0 N^2 r^2}{2R} \simeq 31.4 mH$$
   da cui
   $$U_B = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{\mu_0 N^2 r^2 I_0^2}{4R} = 1.57 \cdot 10^4 J.$$
3. Quando la corrente diminuisce cambia il campo magnetico e quindi il flusso attraverso la superfice del solenoide, $S = \pi r^2$ nel tempo $\Delta t = 1$ ms. Questa variazione genera una differenza di potenziale ai capi dell'avvolgimento del solenoide: $\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta BSN}{\Delta t} = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi R} \frac{I_0}{2} \frac{\pi r^2}{\Delta t} \simeq 15.7$ kV. Alternativamente
   $$\mathcal{E} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -L\frac{I_0}{2\Delta t} \simeq 15.7 kV.$$