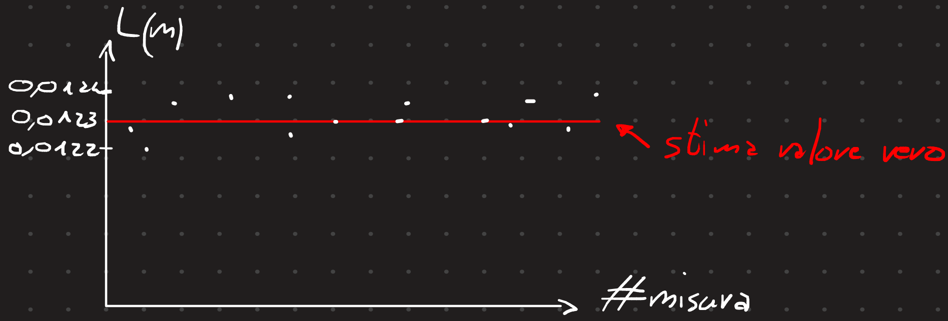
Teoria degli errori

Vogliamo misurare una grandezza fisica. Ad esempio, una lunghezza. Per farlo utilizziamo uno strumento di misura (ad esempio, un metro). Lo strumento ha una sua sensibilità (per il metro 1mm, per un orologio 1s, per un cronometro 0,001s). Inoltre nel compiere la misura è possibile che si verifichino degli errori:

1- dovuti allo strumento
2- dovuti a chi fa la misura
3- dovuti a ciò che si misura

L'approccio più comune per ottenere misure più precise è quello statistico: si ripete la misura molte volte.

Esempio



Se X è il valore "vero" dell'oggetto della misura ed io ho misurato $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, come calcolo la migliore approssimazione di X?

Nella misura ho sicuramente commesso degli errori
1- Errori casuali (che possono essere in eccesso o in difetto con ugual probabilità)
2- Errori sistematici (ad esempio, il mio metro è tarato male)

Più pericolosi, non esiste un metodo generale per trattarli

L'approccio statistico funziona bene se gli errori sono solo casuali.
Dati $x_1, x_2, \ldots, x_N$ misurati, la media è $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Si dimostra che la media è speciale perchè rende minimo un certo tipo di errore.
Definiamo lo scarto

$\varepsilon_i(x) = x_i - x$ (scarto di x da x_i)

La somma degli scarti di x dai vari x_i misura quanto x è lontano dai dati misurati. Per la media

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \sum_{i=1}^{N} 1 = \sum_{i=1}^{N} x_j - \cancel{\frac{1}{N}}\sum_{j=1}^{N} x_j \cancel{N} = 0$$

La somma degli scarti dalla media è zero.
Si dimostra inoltre che la somma dei quadrati degli scarti della media è minima.

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(\bar{x})^2 \geq 0 \quad \text{però} \quad \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(\bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(x)^2$$

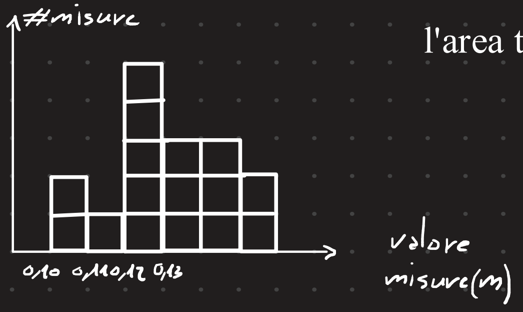
Definiamo la varianza

$$S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(\bar{x})^2$$

Definiamo lo scarto quadratico medio $\mu = \sqrt{S}$

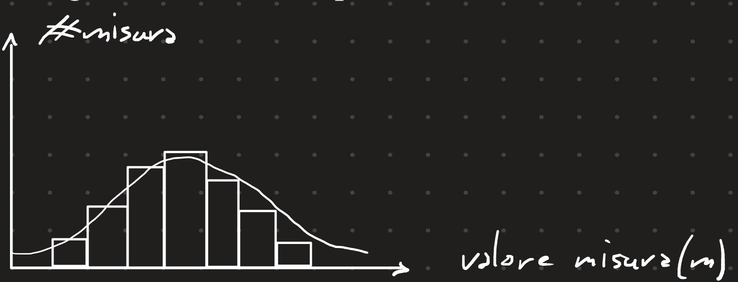
Allora ci mostri dati $x_1, x_2, \dots, x_N$ possiamo associare $\bar{x}$ e μ, diciamo che il risultato della misura è $\bar{x} \pm \mu$

Istogramma delle misure



l'area totale del grafico è il numero delle misure

Istogramma delle frequenze



Nel caso delle frequenze, per N sempre più grande, il grafico non cresce (l'area è fissata) ma può stabilizzarsi (ha un limite)

$$P(x_1, x_2) = \frac{\#\text{eventi tra } x_1 \text{ e } x_2}{N} = (\text{area del grafico tra } x_1 \text{ e } x_2)$$

Ci aspettiamo che per $N \to \infty$ il grafico diventi una curva regolare (curva Gaussiana).
Si dimostra che in effetti, se le misure sono indipendenti e soggette solo ad errori casuali, allora l'istogramma approssima veramente la curva Gaussiana.

$$P_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x - x^*)^2}{2\sigma^2}\right]$$

dipende da due parametri, x^* e σ

Proprietà della curva gaussiana

$$\underline{P}(x_1, x_2) = \frac{\#\text{eventi tra } x_1 \text{ e } x_2}{N} = \int_{x_1}^{x_2} P_G(x)\,dx$$

Quindi deve essere

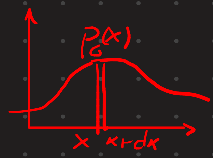
$$\underline{P}(-\infty, +\infty) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} P_G(x)\,dx$$

Questo è il motivo del coefficiente $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

Se abbiamo un istogramma ben approssimato da una gaussiana, qual'è la media delle misure?

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} \longleftarrow \text{aggiungo } \frac{x_i}{N} \text{ per ogni } x_i \text{ che misuro}$$

$$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x \, P_G(x)\, dx \longleftarrow \text{porzione di misure tra } x \text{ e } dx+x$$



$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$x - x^* = y \qquad dx = dy \qquad x = y + x^*$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y + x^*}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(\frac{y^2}{2\pi^2}\right) dy}}_{=0 \text{ perché dispari}} + x^* \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy}_{x^* \, \underline{P}_G(-\infty,+\infty) = 1}$$

$$= x^*$$

In maniera simile si dimostra che

$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_i(\bar{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i^2}{N} - \frac{2 x_i \bar{x}}{N} + \frac{\bar{x}^2}{N} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{N} - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{N} - 2(\bar{x})^2 + (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i^2}{N}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}\right)^2$$

$$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P_G(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \, P_G(x)\, dx \right)^2$$

$$= \sigma^2$$

Una serie di misure $x_1,\ldots,x_N$ soggette solo agli errori casuali, per $N \to \infty$ è ben approssimata da una distribuzione Gaussiana

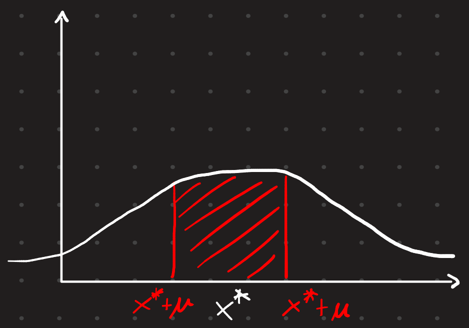
$$P_G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{con} \quad x^* = \bar{x} \quad \text{e} \quad \sigma = \mu \qquad (\sigma^2 = S)$$

La probabilità che una misura cada tra x_1 e x_2 si può calcolare con l'integrale

$$\underline{P}(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} P_G(x)\, dx$$

Quando diciamo che il risultato è $\bar{x} \pm \mu$



Stiamo dicendo che con buona probabilità il valore vero X si trova nell'intervallo $\bar{x}-\mu, \bar{x}+\mu$

$$\underline{P}(\bar{x}-\mu, \bar{x}+\mu) = \int_{\bar{x}-\mu}^{\bar{x}+\mu} P_G(x)\,dx = 68,3\%$$

$$\underline{P}(\bar{x}-2\mu, \bar{x}+2\bar{\mu}) = 95,4\% \qquad \underline{P}(\bar{x}-3\mu, \bar{x}+3\mu) = 99,7\%$$

Se abbiamo una serie di misure ripetute che dovrebbero corrispondere al valore "vero" X di una grandezza fisica, la miglior stima di X è data dalla media

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$$

(Stiamo assumendo che gli errori siano casuali, cioè si distribuiscano con uguale probabilità in eccesso o in difetto e che siano gli stessi per tutte le misure, le quali sono indipendenti)

La media $\bar{x}$ è tale che la somma degli scarti della media è zero $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(\bar{x}) = 0$, e la somma dei quadrati degli scarti è minima

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(\bar{x})^2 < \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(x)^2 \qquad \text{se} \quad x \neq \bar{x}$$

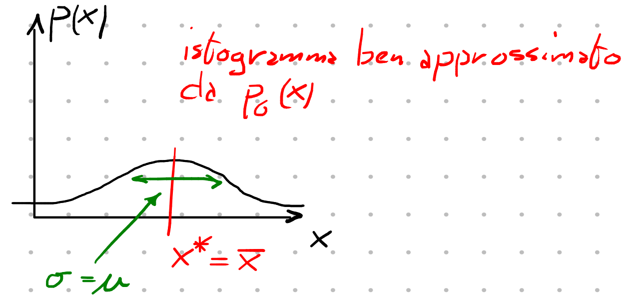
Quest'ultima quantità misura "l'incertezza" della nostra misurazione. Più precisamente definiamo la varianza

$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_i(\bar{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{N} - \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} \right)^2$$

Scarto quadratico medio $\mu = \sqrt{S}$

Per dare un significato ad μ abbiamo usato un importante teorema di probabilità (teorema del limite centrale) che dice che, per $N \to \infty$ le nostre misure {x ,i=1,...,N} si dispongono lungo una gaussiana

$$P_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\pi^2}}$$



Allora per N grande identifichiamo

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, P_G(x)\, dx = x^* \qquad S = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - \bar{x}^2)\, P_G(x)\, dx = \sigma^2$$

Grazie a questa identificazione, per N grande, noi possiamo stimare la probabilità che il valore vero X sia in un dato intervallo

$$[\bar{x} - \mu, \bar{x} + \mu] \to \int_{x^*+\sigma}^{x^*+\sigma} P_G(x)\, dx \approx 0{,}683\ldots$$

$$[\bar{x} - 3\mu, \bar{x} + 3\mu] \to \int_{x^*-3\sigma}^{x^*+3\sigma} P_G(x)\, dx \approx 0{,}997\ldots$$

Propagazione degli errori

Immaginiamo di aver misurato due grandezze X e Y, ma di essere interessati a Z = f(x,y).
Ad esempio, voglio il perimetro di un rettangolo avendo misurato i due lati

$$P = 2L_1 + 2L_2$$

oppure l'area

$$A = L_1 \cdot L_2$$

oppure una velocità data lunghezza L e tempo T

$$V = L/T$$

Caso lineare (o affine)

Supponiamo che la legge sia

$$Z = \alpha X + \beta Y + \gamma \qquad (\underbrace{\alpha,\beta,\gamma}_{\text{noti}} \in \mathbb{R})$$

Se ho $\{x_i\}$ con media $\bar{x}$ e varianza μ_x
$\{y_i\}$ con media $\bar{y}$ e varianza μ_y
$\{z_i\}$ con media $\bar{z}$ e varianza μ_z
posso definire $z_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma$

La media degli $\{z_i\}$ è

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{z_i}{N} = \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha \frac{x_i}{N} + \beta \frac{y_i}{N} + \gamma \frac{1}{N} \right) = \alpha \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} + \beta \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{N} + \gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}$$

$$\bar{z} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma$$

Definiamo gli scarti $\varepsilon_{x,i}(\bar{x}) = x_i - \bar{x}$ $\quad \varepsilon_{y,i}(\bar{y}) = y_i - \bar{y}$ $\quad \varepsilon_{z,i}(\bar{z}) = z_i - \bar{z}$

Sappiamo che $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{x,i}(\bar{x}) = 0 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{y,i}(\bar{y})$

Calcoliamo

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{z,i}(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{N} (z_i - \bar{z}) = \sum_{i=1}^{N} z_i - \sum_{i=1}^{N} \bar{z} = N \sum_{i=1}^{N} \frac{z_i}{N} - \bar{z} \sum_{i=1}^{N} 1 = N\bar{z} - N\bar{z} = 0$$

Per capire l'errore (cioè μ_z) sulla media $\bar{z}$, calcoliamo la somma dei quadrati degli scarti

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{z,i}(\bar{z})^2 = \sum_{i=1}^{N} (z_i - z)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha x_i + \beta y_i + \cancel{\gamma} - \alpha \bar{x} - \beta \bar{y} - \cancel{\gamma} \right)^2 =$$

$\alpha \varepsilon_{x,i}(\bar{x})$
$\beta \varepsilon_{y,i}(\bar{y})$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\alpha \varepsilon_{x,i}(\bar{x}) + \beta \varepsilon_{y,i}(\bar{y}) \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\alpha^2 \varepsilon_{x,i}(\bar{x})^2 + 2\alpha\beta \varepsilon_{x,i}(\bar{x}) \varepsilon_{y,i}(\bar{y}) + \beta^2 \varepsilon_{y,i}(\bar{y})^2 \right]$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{z,i}(\bar{z})^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_{x,i}(\bar{x})^2}{N} + \beta^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_{y,i}(\bar{y})^2}{N} + 2\alpha\beta \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_{x,i}(\bar{x}) \varepsilon_{y,i}(\bar{y})}{N}$$

$$S_{zz} = \alpha^2 S_{xx} + \beta^2 S_{yy} + 2\alpha\beta S_{xy}$$

L'errore su z dipende sia dall'errore su x e y $(\mu_x^2 = S_{xx},\ \mu_y^2 = S_{yy})$ ma anche dalla nuova quantità S_{xy}. Questa quantità misura la correlazione di x e y. Ancor più precisamente definiamo il numero puro $\rho_{xy} = \dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}}$

Questa quantità ("correlazione") è sempre $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

Se $\rho_{xy} \approx 0$ le variabili sono correlate
Se $\rho_{xy} \approx 1$ le variabili sono fortemente correlate
Se $\rho_{xy} \approx -1$ le variabili sono fortemente anti-correlate

Se le variabili non sono correlate

$$S_{zz} = \alpha^2 S_{xx} + \beta S_{yy}$$

$$\mu_z = \sqrt{\alpha^2 \mu_x^2 + \beta^2 \mu_y^2}$$

$$\mu_z = \sqrt{\alpha_1^2 \mu_1^2 + \alpha_2^2 \mu_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 + \mu_n^2}$$

Applicazioni

L'errore della media. Abbiamo M dati $x_1,\dots,x_M$ con scarto quadratico medio $u_1,\dots,u_M$ e vale $u_1=\dots=u_M$
Qual è l'errore sulla media $\bar{x} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i$

$$\mu_{media} = \sqrt{\frac{1}{M^2}\mu_1^2 + \frac{1}{M^2}\mu_2^2 + \dots + \frac{1}{M^2}\mu_M^2} = \sqrt{\frac{1}{M^2} M \mu^2} = \sqrt{\frac{\mu^2}{M}} = \frac{\mu}{\sqrt{M}}$$

La media pesata

Se abbiamo due numeri x e y, possiamo considerare, invece di $\frac{x+y}{2}$, una combinazione che dia più "peso" a uno dei due (0,3x+0,7y). Questa è la media pesata, che si definisce per $x_1,\dots,x_M$

$$\sum_{i=1}^{M} a_i x_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{M} a_i = 1 \qquad \left(\text{caso standard } a_i = \frac{1}{M}\right)$$

Supponiamo di avere x_1 e y_2 con $u_1 \neq u_2$
Sembra ragionevole dare "più peso" alla misura più precisa. Definisco la media pesata come

$$\bar{x}_{pes} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$

per qualche opportuno λ. L'errore è

$$\mu_{pes} = \sqrt{\lambda^2 \mu_1^2 + (1-\lambda)^2 \mu_2^2}$$

Impegno che μ_{pes} sia minimo $\Longrightarrow \frac{d}{d\lambda}\mu_{pes} = 0$

Questo mi permette di trovare $\lambda = \dfrac{\frac{1}{\mu_1}}{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2}}$

In generale, per $x_1,\dots,x_M$ e $u_1,\dots,u_M$ si trovano i pesi

$$a_i = \frac{1/\mu_i^2}{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \dots + \frac{1}{\mu_M^2}}$$

Caso non lineare

$$z = f(x,y)$$

Una funzione non lineare si può "linearizzare" intorno a un punto x_0, y_0

$$f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + (x-x_0)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + (y-y_0)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

+ termini quadratici, che trascuriamo
se $(x-x_0)$ e $(y-y_0)$ sono piccoli

Quindi

$$\bar{z} \simeq f(\bar{x},\bar{y}) + (x-\bar{x})\underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{y})}}}_{\lambda} + (y-\bar{y})\underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\bar{x},\bar{y})}}}_{\beta}$$

Quindi per gli errori

$$\mu_z = \sqrt{\alpha^2 \mu_x^2 + \beta^2 \mu_y^2} \qquad \text{con} \qquad \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(\bar{x},\bar{y})} \qquad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(\bar{x},\bar{y})}$$

Conosciamo $\bar{L}$ e u_L e $\bar{T}$ e u_T. Vogliamo $V = \frac{L}{T}$. Come stimiamo μ_V?

$$\bar{V} = \bar{L}/\bar{T}$$

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{L}{T}\right) = \frac{1}{T}\bigg|_{(\bar{L},\bar{T})} = \frac{1}{\bar{T}}$$

$$\beta = \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{L}{T}\right) = -\frac{L}{T^2}\bigg|_{(\bar{L},\bar{T})} = -\frac{\bar{L}}{\bar{T}^2}$$

$$\mu_V = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{T}}\right)^2 \mu_L^2 + \frac{\bar{L}^2}{\bar{T}^4}\mu_T^2}$$