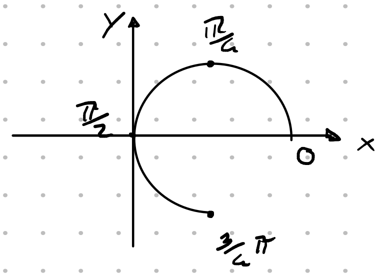
1.1 Dopo averne abbozzato un disegno calcolare la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho(t) = 5\cos t$ con $t \in [0, 3\pi/4]$, cioè la curva

$$\alpha(t) = 5\cos t(\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 3\pi/4]$$

Abbozzo il disegno prendendo qualche valore di t e lo sostituisco ai valori della curva.

$t=0 \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \qquad t = \frac{3}{4}\pi \quad \begin{cases} x = 2.5 \\ y = -2.5 \end{cases}$

$t = \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad t = \frac{\pi}{4} \quad \begin{cases} x = 2{,}5 \\ y = 2{,}5 \end{cases}$



Adesso per calcolare la lunghezza della curva uso la formula per la lunghezza di curve espresse in coordinate polari

$$L(\beta) = \int_a^b \sqrt{(\rho'(t))^2 + (\rho(t))^2}\, dt \qquad \text{con } t \in [a,b]$$

$\rho(t)' = -5\sin t \qquad \rho(t) = 5\cos t$

$$L = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{(\rho(t)')^2 + (\rho(t))^2}\, dt = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{(-5\sin t)^2 + (5\cos t)^2}\, dt = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{25\,\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{25}\, dt = 5 \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{15}{4}\pi$$

9.5 Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Usando la formula di Green calcolare

$$\int_{\partial^+ D} x^3\, dy.$$

Formula di Green (Teorema 9.2)

$$\int_{\partial^+ D} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \int_{\partial^+ D} F \cdot T\, ds = \int_D \partial_x F_2(x,y) - \partial_y F_1(x,y)\, dx dy$$

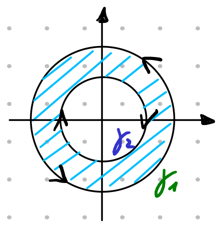
$$\int_{\partial^+ D} x^3\, dy = \int_{\partial^+ D} 0\,dx + x^3\,dy$$

Quindi

$$F_1(x,y) = 0 \qquad F_2(x,y) = x^3 \implies \partial_x F_2(x,y) = 3x^2$$

$$\int_D 3x^2\, dx dy \quad \longleftarrow \text{ devo risolvere questo integrale}$$

Riconosco che il dominio posso rappresentarlo come due percorsi circolari, quindi parametrizzo le due circonferenze in coordinate polari



$$f(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t) \quad t \in [0, 2\pi] \quad \rho \in [a,b]$$

$$x^2 + y^2 < 4 \qquad x^2+y^2 = 2^2 \qquad \rho = 2$$

$$\gamma_1 = (\rho\cos t, \rho \sin t) \qquad t \in [0,2\pi] \quad \rho \in [0, 2] \qquad \text{esterna}$$

$$x^2+y^2 > 1 \qquad x^2+y^2 = 1^2 \qquad \rho = 1$$

$$\gamma_2 = (\rho \cos t, \rho \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi] \quad \rho \in [0,1] \qquad \text{interna}$$

Risolvo l'integrale, trovato in precedenza, per le due circonferenze (teorema 6.3)

$$\int_{B(0,2)} 3x^2\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3(\rho\cos t)^2 \rho\; d\rho\, dt = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3\rho^3 \cos^2 t\; d\rho\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 12 \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} 12\left(\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\right) dt =$$

$$= 12\left[\frac{1}{2}\left(t + \sin(t)\cos(t)\right)\right]_0^{2\pi} = 12\pi$$

$$\int_{B(0,1)} 3x^2\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3(\rho\cos t)^2 \rho\; d\rho\, dt = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int_{\partial^+ D} x^3\, dy = \int_{B(0,2)} 3x^2\,dxdy + \int_{B(0,1)} 3x^2\, dxdy = 12\pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{45}{4}\pi \approx 35.3429$$

inverto il segno siccome percorriamo la circonferenza interna in senso orario (definizione 9.3, dominio Stokiano)

1.8 Trovare la probabilità che in un insieme di 9 persone almeno due abbiano il compleanno nello stesso mese (supponendo che i mesi siano equiprobabili).

$p = 9 \qquad m = 12$

Trovo la probabilità che nessuno compia gli anni nello stesso mese, posso usare il principio di moltiplicazione (proposizione 1.6)

$$P_1(p) = \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} \approx 0{,}015472$$

(spiegazione: data una persona ci sono 11/12 casi in cui un'altra compia gli anni in un mese diverso dalla prima, se considero un altra persona ci sono 10/12 casi in cui compia gli anni in un mese diverso dalle prime due, e così via per le rimanenti)

Trovo la probabilità del suo evento complementare (ovvero almeno 2 compleanni nello stesso mese)

$$P(p) = 1 - P_1(p) \approx 0{,}984528$$

4.12 Un vecchio walkman funziona con una sola pila di tipo AAA non ricaricabile; si cambia la pila appena questa è scarica. Con una pila esso funziona con un tempo (in ore) che è una variabile aleatoria continua T di densità

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{25}t, & t \in [0,5] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria T (**esprimere i risultati in frazioni** a/b, **con** a **e** b **espliciti**);

(b) siano T_1 la durata della prima pila sostituita, T_2 la durata della seconda pila sostituita,..., T_m la durata dell'm-esima batteria sostituita,...; descrivere a parole l'evento $T_1 + ... + T_{72} > 250$;

(c) Approssimare la probabilità $P(T_1 + ... + T_{72} > 250)$: semplificare le espressioni trovate ed esprimere il risultato con un numero esplicito. [Sarà utile uno dei seguenti valori della funzione di distribuzione della normale standard: $\Phi(0.7) = 0.7580$, $\Phi(0.8) = 0.7881$, $\Phi(0.9) = 0.8159$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.1) = 0.8643$].

a) Proposizione 6.11

$$Var[X] = E[X^2] - \mu_X^2$$

Definizione 7.5

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$E[t] = \mu_t = \int_{-\infty}^{+\infty} t\left(\frac{2}{25}t\right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{5} t\left(\frac{2}{25}t\right) dt + \int_{5}^{+\infty} 0\, dt = \frac{10}{3}$$

$$E[t^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{2}{25}t\right) dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{5} t^2\left(\frac{2}{25}t\right) dt + \int_{5}^{+\infty} 0\, dt = \frac{25}{2}$$

$$Var[t] = \frac{25}{2} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}$$

b) Voglio quindi sostituire 72 pile per ottenere una durata superiore alle 250 ore.

$$\frac{10}{3} \cdot 72 = 240$$

Moltiplico quindi il valore atteso per le 72 pile che voglio utilizzare ottenendo come risultato 240. Ho quindi una probabilità bassa di riuscire ad ottenere una durata superiore alle 250 ore utilizzando 72 pile.

c) $P(T_1 + T_2 + ... + T_{72} > 250)$

Corollario 8.11

$$P(X_1 + ... + X_n \leq a) \approx P(n\mu + \sqrt{n\sigma^2}Z \leq a)$$

$$n \to +\infty, \quad Z \sim N(0,1)$$

$$E[X_i] = \mu = \frac{10}{3} \qquad \sigma^2 = Var[X_i] = \frac{25}{18}$$

$$n = 72$$

$$P(T_1 + T_2 + ... + T_{72} > 250) = 1 - P(T_1 + T_2 + ... + T_{72} < 250) =$$

$$= 1 - P(n\mu + \sqrt{n\sigma^2}Z < 250) =$$

$$= 1 - P\left(Z < \boxed{\frac{250 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right) =$$

$$\frac{250 - 72 \cdot \frac{10}{3}}{\sqrt{72 \cdot \frac{25}{18}}} = 1$$

$$= 1 - \phi(1) =$$

$$= 1 - 0.8413 =$$

$$= 0.1587 \implies 15{,}87\%$$