UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

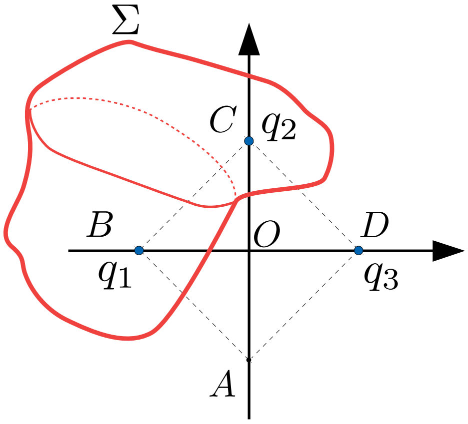
a.a. 2019-2020

Elementi di Fisica II:

Prova scritta telematica – 15 Giugno 2020

Problema 1

Si consideri un quadrato di lato $\ell = 3m$ e di vertici A, B, C e D come in figura. Nei vertici B, C e D sono posizionate rispettivamente le cariche $q_1 = q$, $q_2 = -4q$ e $q_3 = q$, dove è stata definita $q = +5pC$. Un superficie chiusa Σ è disposta come in figura.

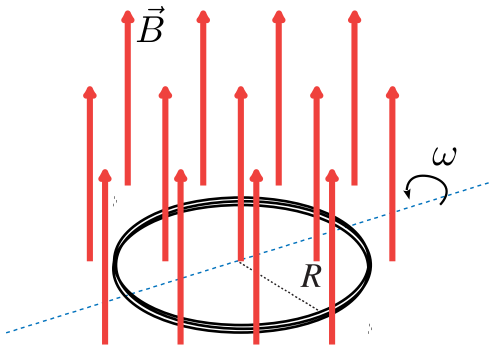


1. Calcolare il flusso del campo elettrico attraverso Σ.
2. Calcolare il valore del campo elettrico (modulo, direzione e verso) nel punto A
3. Calcolare la differenza di potenziale $V_O - V_A$ dove O è il centro del quadrato.
4. Si consideri un protone inizialmente fermo nel punto A. Calcolare la velocità del protone nel punto O, ricordando che il rapporto carica/massa del protone è pari a $|e|/m_p = 95.8 \cdot 10^6\, C/kg$.

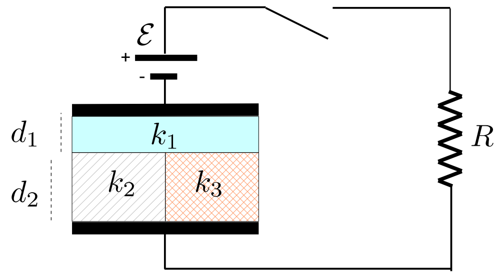
Problema 2

Si consideri un avvolgimento piano di $N = 10$ spire circolari di raggio $R = 2cm$ inizialmente parallelo ad un piano orizzontale (come in figura). Le spire sono formate da un filo di ferro (resistività $\rho = 9.68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$) di sezione $0.2\, mm^2$. L'avvolgimento è immerso all'interno di un campo magnetico $\vec{B}$ inizialmente perpendicolare al piano su cui giace l'avvolgimento e diretto verso l'alto. Il campo magnetico varia nel tempo con la legge $\vec{B}(t) = B_0 e^{-t/\tau} \vec{k}$, dove $B_0 = 140mT$, $\tau = 25ms$ e $\vec{k}$ è il versore orientato verso l'alto. Al tempo $t = 0$ l'avvolgimento comincia a ruotare con velocità angolare costante $\omega = 1/\tau$ intorno ad un asse perpendicolare al versore $\vec{k}$ passante per il centro dell'avvolgimento (come in figura).

1. Calcolare la resistenza dell'avvolgimento.
2. Calcolare la corrente indotta nell'avvolgimento in funzione del tempo
3. Detto T il periodo di rotazione dell'avvolgimento, calcolare in quali istanti $t < T$ (cioè nel primo giro) la corrente indotta si annulla
4. Illustrare la legge di Faraday-Lenz ed in particolare giustificare il segno meno.



Problema 3



Si consideri il circuito in figura costituito da una resistenza $R = 30\ \Omega$, un condensatore e un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E} = 20\ V$. Il condensatore, di armature piane e quadrate di lato $\ell = 5\ cm$, é riempito completamente con tre materiali dielettrici di costanti dielettriche $k_1 = 2$ e $k_2 = 1.5$, $k_3 = 3$ come in figura. I dielettrici k_2 e k_3 hanno le stesse dimensioni. Lo spessore dei due dielettrici k_2 e k_3 vale $d_2 = 2\ mm$ e lo spessore di k_1 vale $d_1 = 1\ mm$. Il circuito viene chiuso a tempo $t = 0$.

1. Calcolare la costante di tempo τ del circuito
2. Calcolare la corrente che scorre nella resistenza al tempo $t = \tau$.
3. Calcolare l'energia accumulata nel condensatore dopo un tempo molto lungo rispetto alla costante di tempo τ
4. Definire la capacità di un condensatore e ricavare la capacità di un condensatore sferico con armature di raggi R_1 e R_2 (ci consideri il vuoto tra le armature)

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Siccome solo le cariche q_1 e q_2 sono interne alla superficie, dal teorema di Gauss il flusso del campo elettrico è pari a :

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} = \frac{-3q}{\epsilon_0} \simeq -1.696\, V \cdot m$$

2. Per simmetria, la componente orizzontale del campo elettrico nel punto A è nulla. Calcoliamo le componenti lungo l'asse verticale (asse y):

$$E_{1y} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{\ell^2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\ell^2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$E_{2y} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{(\ell\sqrt{2})^2} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\ell^2}$$
$$E_{3y} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{\ell^2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\ell^2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il campo totale vale quindi

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\ell^2}(2 - \sqrt{2})\vec{j} \simeq (2.93\, mV/m)\vec{j}$$

diretto verso l'asse y positivo.

3. Sommando i potenziali Coulombiani nel punto O si ottiene

$$V_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{\sqrt{2}q_1}{\ell} + \frac{\sqrt{2}q_2}{\ell} + \frac{\sqrt{2}q_3}{\ell}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\sqrt{2}q}{\ell}$$

Analogamente il potenziale nel punto A vale

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{q_1}{\ell} + \frac{q_2}{\ell\sqrt{2}} + \frac{q_3}{\ell}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2(1-\sqrt{2})q}{\ell}$$

da cui

$$V_O - V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{q_1}{\ell} + \frac{q_2}{\ell\sqrt{2}} + \frac{q_3}{\ell}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2q}{\ell} \simeq -30\, mV$$

4. Per la conservazione dell'energia si ha

$$\frac{1}{2}m_p v_A^2 + q_p V_A = \frac{1}{2}m_p v_O^2 + q_p V_O$$

Poichè $v_A =$ si ha

$$v_O = \sqrt{\frac{2q_p}{m_p}(V_A - V_O)} \simeq 2397\, m/s$$

PROBLEMA 2

1. La lunghezza dell'avvolgimento è pari a

$$L = N \cdot 2\pi R \simeq 125.7\, cm$$

La sua resistenza sarà quindi

$$R_s = \frac{\rho L}{\Sigma} \simeq 608.2\, m\Omega$$

dove $\Sigma = 0.2\, mm^2$ è la sezione del filo

2. Il flusso del campo magnetico all'interno dell'avvolgimento vale

$$\Phi(\vec{B}) = N\pi R^2 B(t) \cos(\omega t + \varphi_0) = N\pi R^2 B_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t)$$

dove φ_0 poichè al tempo $t = 0$ il campo B è parallelo alla normale dell'avvolgimento.

La corrente indotta si calcola come

$$i_{\rm ind}(t) = -\frac{1}{R_s}\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = \frac{N\pi R^2 B_0}{R_s} e^{-t/\tau}\left[\frac{1}{\tau}\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right]$$

3. La corrente indotta è nulla quando

$$\frac{1}{\tau}\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tan(\omega t) = \frac{-1}{\tau\omega} = -1$$

La precedente equazione ha soluzione

$$\omega t = \frac{3}{4}\pi + k\pi \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\omega}(\frac{3}{4}\pi + k\pi) = (\frac{3}{4}\pi + k\pi)\tau$$

All'interno del primo giro ci sono due soluzioni

$$t_1 = \frac{3}{4}\pi\tau \simeq 58.9\, ms\,, \qquad\qquad t_2 = \frac{7}{4}\pi\tau \simeq 137\, ms$$

PROBLEMA 3

1. Il condensatore si può vedere come due condensatori in parallelo (k_2 e k_3) che sono in serie con il condensatore k_1. Le tre capacità valgono

$$C_1 = k_1 \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d_1} \simeq 44.20\ pF\,, \qquad C_2 = k_2 \epsilon_0 \frac{\ell^2/2}{d_2} \simeq 8.29\ pF\,, \qquad C_3 = k_3 \epsilon_0 \frac{\ell^2/2}{d_2} \simeq 16.6\ pF\,.$$

   tali per cui la capacità totale vale

$$C_T = \frac{(C_2 + C_3)C_1}{C_1 + C_2 + C_3} = \epsilon_0 \frac{k_1(k_2 + k_3)}{2k_1 d_2 + k_2 d_1 + k_3 d_1} \ell^2 \simeq 15.9\ pF$$

   La costante di tempo vale dunque

$$\tau = RC_T \simeq 0.477\ ns$$

2. Dopo la chiusura la corrente che scorre nella resistenza vale

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$

   Al tempo t_τ si avrà

$$i(\tau) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-1} \simeq 245\, mA$$

3. Dopo un tempo lungo, la tensione ai capi del condensatore è pari a $\mathcal{E}$. L'energia accumulata nel condensatore è dunque

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} C_T \mathcal{E}^2 \simeq 3.18\ \ nJ$$