Definizione di derivata

$f : E \to \mathbb{R}$

pto interno = esiste almeno un intorno completo di x_0 tutto contenuto in E

x_0 interno ad E

Essendo x_0 interno è definito $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ in un intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset E$
si chiama RAPPORTO INCREMENTALE tra x_0 e x di f
(rapporto tra quanto cresce la funzione e quanto aumenta la variabile)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Se esiste questo limite si chiama la DERIVATA di f in x_0
in tal caso si dice DERIVABILE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- Derivabile con derivata $m = \frac{df}{dx} \iff$ approssimabile a meno di un o-piccolo dalla retta

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

RETTA TANGENTE

Continuità di una funzione derivabile

Dati
$f : E \to \mathbb{R}$
x_0 interno ad E

Se f è derivabile $\Longrightarrow$ f è continua in x_0

Dimostrazione

Devo dimostrare $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, siccome f è derivabile per ipotesi faccio il limite della sua approssimazione

f è derivabile in x_0 per ipotesi
$\Updownarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \underbrace{\frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)}_{0} + \underbrace{o(x - x_0)}_{0} = f(x_0)$$

Derivata dx e sx

Si dicono derivata dx e sx se esiste il rapporto incrementale

$$\frac{df}{dx}^{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^{+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x}$$

$$\frac{df}{dx}^{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^{-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Legame tra derivata sx e dx

- Legame tra derivata sx e dx

Se una funzione ha $\frac{df}{dx}^{+}(x_0) = \frac{df}{dx}^{-}(x_0) \Longrightarrow \frac{df}{dx}(x_0)$

Una funzione $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in]a,b[$ se è derivabile da dx e sx in x_0, allora $f'(x_0)$ coincide con il valore assunto dalle derivate dx e sx

Derivata della somma/prodotto di due funzioni derivabili

Siano

$f, g: E \to \mathbb{R}$

x_0 interno ad E

f, g derivabili in x_0

Allora

① $f+g$ è derivabile in x_0 e $\frac{d(f+g)}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) + \frac{dg}{dx}(x_0)$

② $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $\frac{d(f \cdot g)}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \frac{dg}{dx}(x_0)$

Dimostrazione

① $\frac{d(f+g)}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{(x-x_0)} =$ rapp. incrementale

$= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{rapp. incr. } f} + \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\text{rapp. incr. } g} = \frac{df}{dx}(x_0) + \frac{dg}{dx}(x_0)$ x proprietà limiti

② $\boxed{\frac{d(f \cdot g)}{dx}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{\left(f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\right)\left(g(x_0) + \frac{dg}{dx}(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\right) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{f(x_0) g(x_0)} + \frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0) g(x_0) + \frac{dg}{dx}(x_0)(x-x_0) f(x_0) + o(x-x_0) + \boxed{\frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0)\frac{dg}{dx}(x_0)(x-x_0))} - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{df}{dx}(x_0)\cancel{(x-x_0)} g(x_0) + \frac{dg}{dx}(x_0)\cancel{(x-x_0)} f(x_0) + o\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}}$ PSI $=$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) g'(x)(x-x_0)^2}{\cancel{x-x_0}} = 0$

è o-piccolo di x_0

$= \lim_{x \to x_0} \frac{df}{dx}(x_0) \cdot g(x_0) + \frac{dg}{dx}(x_0) f(x) =$

$= \boxed{\frac{df}{dx}(x_0) \cdot g(x_0) + \frac{dg}{dx}(x_0) f(x)}$

Derivata del quoziente

$$\frac{d(f/g)}{dx}(x) = \frac{\frac{df}{dx}(x) g(x) - f(x) \frac{dg}{dx}(x)}{(g(x))^2}$$

Derivata della funzione inversa di una funzione derivabile

Dati

$f: E \to \mathbb{R}$

x_0 interno ad E

f invertibile (in un intorno di x_0)

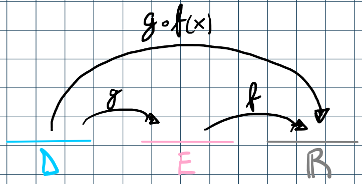
f derivabile in x_0, $D(f)(x_0) \neq 0$

Allora

1- f^{-1} l'inversa (definita in $f(E)$ o in un intorno di $y_0 = f(x_0)$ è derivabile)

2- $$D\left(f^{-1}(x)\right)(y_0) = \frac{1}{D(f(x_0))}$$

Derivata della funzione composta



Dati

$f: E \to \mathbb{R}$ $\quad g: D \to E$

x_0 interno ad E

Se

f è derivabile in x_0

g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

Allora

1- $g \circ f$ è derivabile in x_0 $\qquad g \circ f(x) = g(f(x))$

2- $$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dx}(y_0) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

Dimostrazione

N.B. f derivabile $\iff f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

Per ipotesi

- g è derivabile in $y_0 = f(x_0) \iff g(y) = g(y_0) + \frac{dg}{dx}(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$
- f è derivabile in $x_0 \iff f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + \frac{dg}{dx}(f(x_0))\left(f(x) - f(x_0)\right) + o\left(f(x) - f(x_0)\right) =$$

$$= g(f(x_0)) + \frac{dg}{dx}(f(x_0))\left(\cancel{f(x_0)} + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) - \cancel{f(x_0)}\right) + \boxed{o\left(\cancel{f(x_0)} + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) - \cancel{f(x_0)}\right)} =$$

$$= g(f(x_0)) + \frac{dg}{dx}(f(x_0))\left(\frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\right) + o(x - x_0) =$$

$$g \circ f(x) = g \circ f(x_0) + \frac{dg}{dx}(y_0)\frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$g \circ f$ è derivabile e $\dfrac{d(g \circ f)}{dx} = \dfrac{dg}{dx}(y_0) \cdot \dfrac{df}{dx}(x_0)$

$\gamma(x) = o\left(\frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\right) \Rightarrow \gamma(x) = o(x - x_0)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\gamma(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x - x_0}\left(\frac{df}{dx}(x_0) + o(1)\right)}{\cancel{x - x_0}} = 0$$

Calcolo derivate nelle funzioni elementari

Retta tangente in un punto di derivabilità

Funzione derivata e derivate successive

Teorema di Fermat

Sia

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$

$\bar{x}$ punto interno ad E

$\bar{x}$ punto di derivabilità

Se

$\bar{x}$ è punto di max o min locale allora $\frac{df}{dx}(\bar{x}) = 0$

Dimostrazione

Trovo derivata dx e sx valutando il rapp. incr., poi grazie al Th. di permanenza del segno concludo che la derivata è 0 (caso per pto di max $f(x) < f(\bar{x})$, per min $f(\bar{x}) < f(x)$ in un intorno di $\bar{x}$

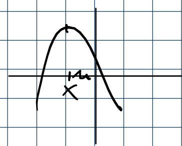
Sia $\bar{x}$ punto di massimo locale, $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$

- Studiamo il segno

(valori dopo di $\bar{x}$)

- se $x > \bar{x}$ $\quad x - \bar{x} > 0 \quad \Rightarrow \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \leq 0 \quad \forall x \in (\bar{x}, \bar{x} + \delta)$ perché

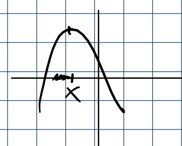
$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0$



(valori prima di $\bar{x}$)

- se $\bar{x} > x$ $\quad \bar{x} - x > 0 \quad \Rightarrow \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x} \geq 0 \quad \forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x})$ perché

$f(\bar{x}) - f(x) \leq 0$



$$\frac{df}{dx}^{+}(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \leq 0$$ × Th. permanenza segno

$$\frac{df}{dx}^{-}(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}^-} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x} \geq 0$$ × Th. permanenza segno

$\Rightarrow \frac{df}{dx}(\bar{x}) = 0$ $\quad$ per ipotesi f è derivabile in $\bar{x}$

quindi $f'_+(\bar{x}) = f'_-(\bar{x}) = 0$

Teorema di Rolle

Dati

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

f è derivabile in $]a,b[$

$f(a) = f(b)$

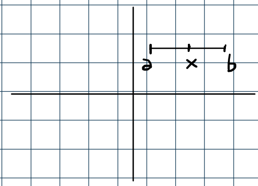
Allora

$\exists\, \bar{x} \in]a,b[$ t.c. $\frac{df}{dx} = 0$

Dimostrazione

valuto due casi: f costante quindi tutti sono pti con derivata $=0$
f non costante, rientriamo nelle ipotesi di Weierstass e quindi grazie al
Th di Fermat so che esiste un pto con derivata nulla

- I caso: f è costante, $f(x)=f(a)=f(b)\ \forall x\in]a,b[$



$$\Rightarrow \frac{df}{dx}(x)=0 \quad \forall x\in]a,b[$$

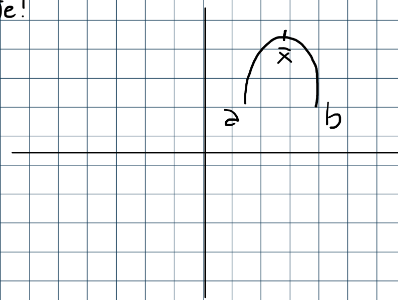
- II caso: f non è costante

× Th. di Weierstass $\exists\ \bar{x}$ di max. e un $\hat{x}$ di min.,
dove almeno uno dei due è interno

$\Big($ se per assurdo fossero entrambi agli estremi, $f(a)=f(b)$
avremmo che $\max=\min=f(a)=f(b) \Rightarrow f$ è costante $\Big)$

ma f non è costante!

Supponiamo $\bar{x}$ $(\hat{x})$ di max $(\min)$ sia interno, $\bar{x}\in]a,b[$



$$\Rightarrow \frac{df}{dx}(\bar{x})=0 \quad \times \text{ Th. di Fermat}$$

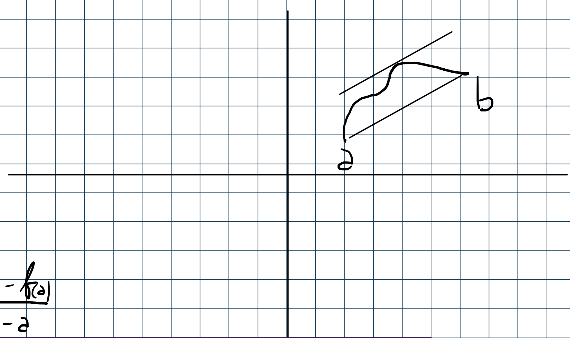
Teorema di Lagrange

Dati

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

f derivabile in $]a,b[$

f continua in $[a,b]$



Allora

$$\exists\ \bar{x}\in]a,b[\ \text{t.c.}\ \frac{df}{dx}(\bar{x})=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dimostrazione

Prendo una funzione $g(x)=f(x)+\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x$ che è continua dato che è somma di
funzioni continue, calcoliamo la funzione in a e b, dato che $f(a)=f(b)$ × Th di Rolle
ho che c'è un pto con derivata $=0$, derivo tutto e ho finito

Prendo una funzione $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ g derivabile in $[a,b]$

perché f è continua e derivabile per ipotesi

$$g(x)=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=f(a)-\frac{f(a)\cdot b-\cancel{f(a)\cdot a}-f(b)\cdot a+\cancel{f(a)\cdot a}}{b-a}=$$

$$=\boxed{\frac{f(a)\cdot b-f(b)\cdot a}{b-a}}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=f(b)-\frac{f(a)\cdot b-\cancel{f(b)\cdot b}-f(b)\cdot a+\cancel{f(b)\cdot b}}{b-a}=$$

$$=\boxed{\frac{f(a)\cdot b-f(b)\cdot a}{b-a}}$$

$g(a)=g(b)$

$g(a) = g(b)$

g é nelle ipotesi del Th. di Rolle $\Rightarrow \exists \bar{x} \in]a,b[$

t.c. $\frac{dg}{dx}(\bar{x}) = 0 = \frac{df}{dx}(\bar{x}) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff \frac{df}{dx}(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

N.B.

Grazie al Th. di Rolle sappiamo che la derivata in $\bar{x}$ interno ad $]a,b[$ é 0

Teorema di Cauchy (cercare video spiegazione)

Dati

$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f e g derivabili, quindi continue in $]a,b[$

Allora

$$\frac{df}{dx}(\bar{x})\left(g(b) - g(a)\right) = \frac{dg}{dx}(\bar{x})\left(f(b) - f(a)\right)$$

In questa situazione esiste almeno un punto c in cui il rapporto delle derivate tra f e g è pari al rapporto dei differenziali della funzioni f e g negli estremi dell'intervallo.

Costanza delle funzioni con derivata nulla

Dati

$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

funzione derivabile con derivata nulla

Allora

f é costante, cioé $\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = K \quad \forall x \in E$

Dimostro che $f(x_1)=f(x_2)$, assumo $x_1<x_2$, applico il Th di Lagrange trovo il rapp. incr. ma per ipotesi so che vale 0, quindi ho trovato

Dimostrazione

Devo dimostrare che $\forall x_1, x_2 \in I$ si ha $f(x_1) = f(x_2)$

- assumiamo $x_1 < x_2$, applichiamo il Th di Lagrange
- troviamo $\bar{x} \in]x_1, x_2[$ dove

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{df}{dx}(\bar{x})$$

poiché $f'(\bar{x}) = 0$ (per ipotesi)

si conclude che $f(x_2) = f(x_1)$

Legame tra monotonia e derivata prima

Dati

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f continua

$\frac{df}{dx}(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b[$

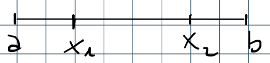
Allora

$\boxed{f \text{ è strettamente crescente}}$ $\left(f(x_1) < f(x_2) \right)$

Dimostrazione

Devo dimostrare $f(x_1) < f(x_2)$, applico Lagrange, per ipotesi la derivata è >0 quindi dato che $x_2 - x_1 > 0$ trovo che $f(x_1) < f(x_2)$

Devo dimostrare che se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$



x Th di Lagrange applicato a $]a,b[$

$\exists \bar{x} \in]x_1, x_2[$ t.c.

$$\frac{df}{dx}(\bar{x}) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

per ipotesi ho che $\frac{df}{dx}(x) > 0$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \iff \boxed{f(x_2) > f(x_1)}$

$x_1 - x_2 > 0$

N.B.

nelle stesse ipotesi ma con

$\frac{df}{dx}(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ è crescente

$\frac{df}{dx}(x) < 0 \quad \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ è strett decrescente

$\frac{df}{dx}(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ è decrescente

Teorema di De L'Hôpital

Dati

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

f e g derivabili in $]a,b[$

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$

Se

$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste

Allora

$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste

e vale $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$

Dimostrazione

Teorema sul limite della derivata

Dati

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Dati
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
f continua e derivabile in $]a,b[$

Se esiste $\lim_{x \to a^+} f'(x) = m \in \mathbb{R}$

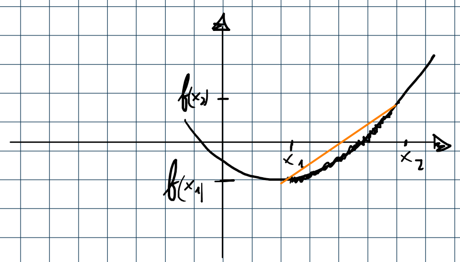
Allora $f'_+(a)$ esiste e $f'_+(a) = m \left(= \lim_{x\to a^+} f'(x)\right)$

Funzione convessa

Dati
$f : I \to \mathbb{R}$
f si dice convessa in un intervallo $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2$

$x_1 + t(x_2 - x_1) \qquad t \in [0,1]$

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t\left(f(x_2) - f(x_1)\right)$$



il segmento che congiunge 2 punti del grafico è sempre sopra al grafico

Teorema sulla monotonia della derivata prima in una funzione convessa

Dati
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
f derivabile in $]a,b[$

Allora
f é convessa se e solo se la funzione $f'(x)$ é monotona crescente

Derivata seconda

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{df}{dx}(x) - \frac{df}{dx}(x_0)}{x - x_0}$$

Convessità e segno della derivata seconda

Dati
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
Se f derivabile due volte, $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$
Allora f é convessa

Punti di flesso e zeri della derivata seconda

Asintoto orizzontale/verticale/obliquo

Polinomio di Taylor

Dati

$f: E \to \mathbb{R}$

x_0 interno ad E

supponiamo che f sia derivabile n volte in x_0

Diciamo

$$T_{n,x_0} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= \boxed{f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

POLINOMIO DI TAYLOR "CONCENTRATO IN x_0" DI GRADO N

N.B.

Esempio polinomio di Taylor di grado 5 concentrato in x_0 con $f(x) = \sin(x)$

$$T_{5,x_0} = \sin(x_0) + \cos x_0 (x-x_0) - \frac{\sin x_0}{2!}(x-x_0)^2 - \frac{\cos x_0}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{\sin x_0}{4!}(x-x_0)^4 + \frac{\cos x_0}{5!}(x-x_0)^5$$

$x_0 = 0$

$$T_{5,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad T_{n,0} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{(x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{0}{4!}x^4 + o(x^4)$$

Formula di Taylor con resto di Peano

Dati

$f: E \to \mathbb{R}$

x_0 interno ad E

f derivabile n volte in x_0

Allora

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o(x-x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \underbrace{o(x-x_0)^n}_{\text{resto}}$$

Esempio

$\sin x = x + o(x) \longleftarrow$ lo sapevo già $\left.\frac{d \sin x}{dx}\right|_0 = \cos(0) = 1$

f derivabile in $x_0 \iff f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

(Formula di Taylor al primo ordine)

Dimostrazione

$$f(x) - T_{n,x_0} \overset{?}{=} o\,(x-x_0)^n$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}}{(x-x_0)^n} \overset{?}{=} 0$$

uso De L'Hôpital perché è una forma $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \boxed{f(x_0)} - \sum_{K=1}^{N} \frac{f^{K}(x_0)}{K!}(x-x_0)^K}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{K=1}^{N} f^{k}(x_0)\frac{\cancel{K}(x-x_0)^{K-1}}{\cancel{K}(K-1)!}}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \boxed{f'(x_0)} - \sum_{K=2}^{N} f^{K}(x_0)\frac{(x-x_0)^{K-1}}{(K-1)!}}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

costante → derivata 0

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - \sum_{K=3}^{N} f^{K}(x_0)\frac{(x-x_0)^{K-2}\cancel{(K-1)}}{\cancel{(K-1)}(K-2)!}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} =$$

[Possiamo continuare ad applicare l'Hôpital poiché $f^{(K)}$ esiste per $K=1,\dots,n$ ed è derivabile fino ad $N-1$]

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{N-1}(x) - f^{N-1}(x_0) - \sum_{K=N}^{N} f^{K}(x_0)\frac{(x-x_0)^{K-(n-1)}}{K-(n-1)}}{n(n-1)\dots 1(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{N-1}(x) - f^{N-1}(x_0) - f^{n}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left(\underbrace{\frac{f^{N-1}(x) - f^{N-1}(x_0)}{x-x_0}}_{\to f^{N}(x_0)} - f^{n}(x_0)\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\cdot 0 = 0$$

Formula di Taylor con resto di Lagrange

Sia

$f: E \to \mathbb{R}$ $\qquad \bar{x} \in \,]a,b[$

x_0 interno ad E

f sia derivabile $N+1$ volte

Allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^N + \frac{f^{N+1}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{N+1}$$

(caso $x > x_0$) dove $\bar{x} \in \,]x, x_0[$

(caso $x < x_0$) dove $\bar{x} \in \,]x_0, x[$

Esempio

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \boxed{\frac{\sin(\bar{x})}{240000}} \to E \qquad \bar{x} \in \,]0, \tfrac{1}{10}[$$

con errore $|E| < \frac{1}{1000}$ $|E| \leqslant \frac{1}{240\,000}$

$\sin x = x - \frac{x^5}{6} + \frac{\sin(\bar{x})}{4!} x^4$ con $\bar{x} \in \,]x, x_0[$

$x_0 = 0$