UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

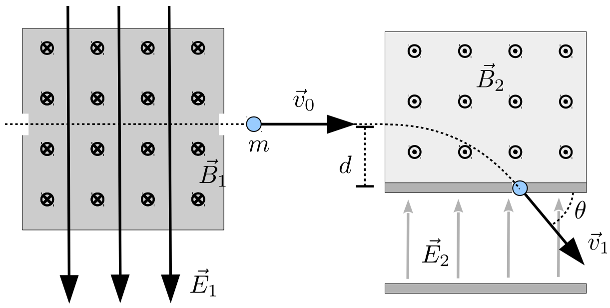
a.a. 2018-2019

Elementi di Fisica II: 24 Gennaio 2019

Seconda prova in itinere / Compito Completo

Problema 1

Una particella di massa $m = 3\mu g$ e carica $q = 1.2\,\mu C$ passa attraverso un selettore di velocità con campo magnetico $\vec{B}_1$ ed elettrico $\vec{E}_1$ come in figura. La sua velocità in uscita vale $v_0 = 30\,m/s$. La particella entra poi in una zona in cui è presente un campo magnetico $\vec{B}_2$ con modulo $B_2 = 135\,mT$, a distanza d dal bordo inferiore. Sapendo che la particella esce dalla zona di campo magnetico a un angolo θ rispetto alla direzione orizzontale (si veda la figura), calcolare:



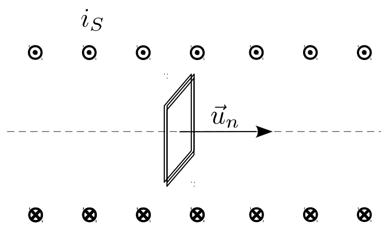
1. Il rapporto B_1/E_1 tra i campi nel selettore di velocità
2. il raggio di curvatura della traiettoria nella zona in cui c'è il campo $\vec{B}_2$.
3. Il valore di d e il modulo della velocità v_1 in funzione dell'angolo di uscita θ. In particolare calcolare il valore numerico di d quando $\theta = \frac{\pi}{2}$

4.a **(solo compito completo)** All'uscita della zona con campo $\vec{B}_2$, la particella entra in un condensatore piano con campo elettrico $\vec{E}_2$ come in figura e distanza tra le armature $h = 10cm$. Calcolare il valore minimo di E_2 affinchè la particella non raggiunga la lastra inferiore del condensatore nel caso $\theta = \pi/2$.

4.b **(solo secondo compitino)** Il tempo necessario per percorrere il tratto curvo all'interno della zona in cui c'è il campo $\vec{B}_2$ in funzione di θ. Quanto vale questo tempo quando $\theta = \pi/2$?

Problema 2

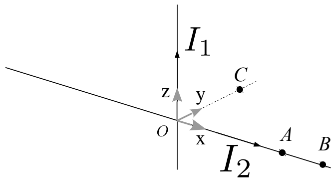
All'interno di un solenoide infinito con densità di spire pari a $n = 150\,\text{spire}/cm$ circola una corrente $i_S(t) = i_0[2 - e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}}]$ con verso indicato in figura. Nell'equazione precedente si ha $i_0 = 2.5\,A$, $t_0 = \tau/2$ e $\tau = 20\,ms$. Un avvolgimento di $N = 300$ spire quadrate di resistenza totale $R = 50\,\Omega$ e lato $\ell = 2\,cm$ è posto completamente all'interno del solenoide, con normale $\vec{u}_n$ parallela all'asse del solenoide come in figura. Calcolare:

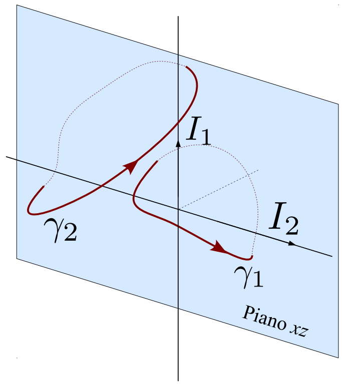


1. Il coefficiente di mutua induzione tra il solenoide e l'avvolgimento quadrato.
2. La corrente indotta nell'avvolgimento in funzione del tempo e il suo valore numerico al tempo $t_1 = \tau$.
3. Il tempo t_2 in cui la corrente indotta è nulla. Indicare il verso della corrente indotta per $t < t_2$ e per $t > t_2$ (indicare se è concorde o discorde alla corrente che circola nel solenoide).
4. Dopo che è trascorso un tempo $t_* \gg \tau$ (t_* molto più grande di τ) l'avvolgimento è collegato ad un generatore che fornisce una forza elettromotrice pari a $\mathcal{E} = 200V$. La corrente così generata ha segno positivo (rispetto alla normale $\vec{u}_n$ indicata). Calcolare il lavoro esterno necessario per ruotare l'avvolgimento di $180°$ (cioè invertire il verso di $\vec{u}_n$).

Problema 3: solo per la seconda prova in itinere

Due fili conduttori infiniti perpendicolari sono percorsi dalle correnti $I_1 = 1.2\,A$ e $I_2 = 2\,A$ come in figura. Si scelga un sistema di riferimento con il centro O coincidente con il punto di intersezione dei due fili e gli assi x e z coincidenti con i due fili conduttori (come in figura).





Calcolare:

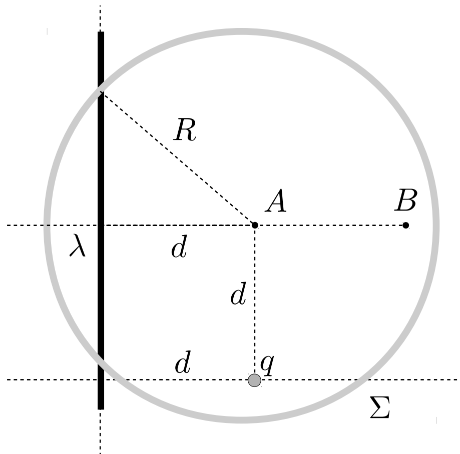
1. Il valore del campo magnetico (modulo, direzione e verso) nel punto C situato sull'asse y a distanza $d_C = 15\,cm$ dall'origine.

2. Si calcoli la forza (modulo, direzione e verso) che agisce sul segmento AB causata dal campo generato dal filo I_1. I punti A e B si trovano sull'asse x e distano rispettivamente $d_A = 20\,cm$ e $d_B = 25\,cm$ dall'origine.

3. Si calcoli la circuitazione del campo magnetico attraverso i percorsi γ_1 e γ_2 (i pezzi tratteggiati dei percorsi corrispondono ai tratti di circuito nella porzione di spazio con $y > 0$)

Problema 3: Solo per il compito completo

Un filo isolante infinito è caricato con densità lineare uniforme pari a $\lambda = 100pC/cm$. Una carica $q = -15nC$ è posta ad una distanza $d = 0.5m$ dal filo. Calcolare



1. La forza (modulo, direzione e verso) subita dalla carica q.

2. Il valore del campo elettrico nel punto A distante d dal filo e dalla carica q come in figura.

3. La differenza di potenziale $V_A - V_B$. Il punto B dista $2d$ dal filo e il segmento AB è perpendicolare al filo come in figura.

4. Calcolare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie sferica Σ. La sfera ha raggio $R = \frac{3}{2}d$.

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Per passare attraverso il selettore di velocità, la forza totale deve essere nulla, per cui $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times B)$. Quindi

$$E_1 = v_0 B_1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{B_1}{E_1} = \frac{1}{v_0} \simeq 0.033\frac{s}{m}$$

2. Il raggio di curvatura all'interno di un campo magnetico vale

$$R = \frac{mv}{qB} \simeq 55.5\, cm$$

3. La distanza d si ottiene con la formula

$$d(\theta) = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta) = \frac{mv}{qB}(1-\cos\theta)$$

   Per $\theta = \pi/2$ si ha $d = R = 55.5\, cm$.

   Il modulo di v_1 è uguale a v_0.

4.a Per conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2$$

   da cui

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2q}{m}(V_1 - V_2)$$

   La particella non raggiunge la lastra inferiore quando $v_2^2 < 0$. Siccome $V_1 - V_2 = -E_2 h$, La particella non raggiunge la lastra inferiore quando

$$v_1^2 - \frac{2q}{m}E_2 h < 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_2 > \frac{mv_1^2}{2qh} \simeq 11.25 V/m$$

4.b L'arco percorso dalla carica è lungo

$$\ell = \theta R$$

   Siccome il modulo della velocità è costante, il tempo necessario per percorrere il tratto ℓ vale

$$t_1 = \frac{\ell}{v_0} = \frac{R\theta}{v_0}$$

   . Quando $\theta = \pi/2$ si ha

$$t_1^* = \frac{R\pi}{2v_0} \simeq 29.06\, ms$$

   .

PROBLEMA 2

1. Il campo generato dal solenoide vale $B_S = \mu_0 n i_S$ e il suo flusso attraverso l'avvolgimento vale $\Phi_{avv}(B_S) = N B_S \ell^2 = \mu_0 n i_S N \ell^2$. Il coefficiente di mutua induzione è quindi
$$M = \frac{\Phi_{avv}(B_S)}{i_S} = \mu_0 n N \ell^2 \simeq 2.262\, mH$$

2. La corrente indotta vale
$$i_{ind}(t) = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_{avv}(B_S)}{\mathrm{d}t} = -\frac{M}{R}\frac{\mathrm{d}i_S(t)}{\mathrm{d}t}$$
siccome
$$\frac{\mathrm{d}i_S(t)}{\mathrm{d}t} = 2i_0\frac{t-t_0}{\tau^2}e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}}$$
si ha
$$i_{ind}(t) = \frac{2i_0 M}{R}\frac{t_0-t}{\tau^2}e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}}$$
Al tempo $t_1 = \tau$ la corrente indotta vale (si ricordi che $t_0 = \tau/2$)
$$i_{ind}(t_1) = \frac{2i_0 M}{R}\frac{t_0-t_1}{\tau^2}e^{-\frac{(t_1-t_0)^2}{\tau^2}} = -\frac{i_0 M}{\tau R}\, e^{-\frac{1}{4}} \simeq -4.4\, mA$$

3. Siccome
$$i_{ind}(t) = \frac{2i_0 M}{R}\frac{t_0-t}{\tau^2}e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}}$$
la corrente indotta è nulla al tempo $t_2 = t_0$. Il segno della corrente indotta dipende dal termine $(t_0 - t)$ poichè tutti gli altri termini sono positivi. Dunque per $t < t_2 = t_0$ la corrente è positiva, mentre per $t > t_2 = t_0$ la corrente è negativa. In base alla scelta dalla normale, se la corrente è positiva (negativa) scorre in maniera concorde (discorde) alla corrente nel solenoide.

4. Al tempo t_* la corrente indotta è nulla. Nell'avvolgimento scorre solo la corrente dovuta al generatore di corrente. Tale corrente vale
$$i_{avv} = \frac{\mathcal{E}}{R} \simeq 4A$$
Il momento magnetico della spira vale quindi
$$\vec{m} = N i_{avv}\ell^2\vec{u}_n \qquad \Rightarrow \qquad m = N i_{avv}\ell^2 \simeq 0.48\, Am^2$$
L'energia potenziale di un dipolo magnetico all'interno di un campo esterno vale $U_m = -\vec{m}\cdot\vec{B}$, dove il campo esterno vale
$$\vec{B}_\infty = B_S(t_*) = \mu_0 n i_S(t_*) \simeq 2\mu_0 n i_0 \simeq 94.25\, mT$$
. Il lavoro esterno per ruotare l'avvolgimento vale quindi
$$\mathcal{L}_{ext} = \Delta U_m = U_m^{(finale)} - U_m^{(iniziale)} = 2mB_\infty \simeq 90.5\, mJ$$

PROBLEMA 3: solo per la seconda prova in itinere

1. Detti $\vec{i}$, $\vec{j}$ and $\vec{k}$ i versori lungo gli assi x, y and z, i campi generati dal filo 1 e dal filo 2 in C valgono

$$\vec{B}_{1,C} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d_C}\vec{i} \simeq (-1.6\,\mu T)\vec{i}$$
$$\vec{B}_{2,C} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_C}\vec{k} \simeq (2.67\,\mu T)\vec{k}$$

per cui il campo totale vale

$$\vec{B}_C = \frac{\mu_0}{2\pi d_C}(-I_1\vec{i} + I_2\vec{k})$$

Il campo B giace su un piano parallelo al piano xz, e forma un angolo

$$\theta = 180 + \arctan\frac{-I_2}{I_1} \simeq 121^\circ$$

con l'asse x. Il suo modulo vale

$$B_C = \frac{\mu_0}{2\pi d_C}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} \simeq 3.11\,\mu T$$

2. Lungo il filo 2 il campo magnetico generato dal filo 1 vale

$$\vec{B}_1(x) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{j}$$

Usando la seconda legge di Laplace, la forza che agisce sul tratto AB vale

$$\vec{F} = \int_A^B I_2 \mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}_1(x)$$

Poichè $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}x\,\vec{i}$ e $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, si ha

$$\vec{F} = \int_{d_A}^{d_B} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{k}\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(\int_{d_A}^{d_B}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\vec{k} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d_B}{d_A}\vec{k}$$

La forza è parallela all'asse z e diretta verso l'alto. Il suo modulo vale

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d_B}{d_A} \simeq 107\,nN$$

3. Per la legge di Ampere le circuitazione valgono

$$\mathcal{C}_{\gamma_1}(\vec{B}) = \mu_0(I_1 + I_2) \simeq 4.02\cdot 10^{-6}\,T\cdot m\,, \qquad \mathcal{C}_{\gamma_2}(\vec{B}) = \mu_0(I_1 - I_2) \simeq -1.002\cdot 10^{-6}\,T\cdot m$$

PROBLEMA 3: solo il compito completo

1. Il campo generato dal filo nel punto in cui si trova la carica vale

$$E_f = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{d}$$

. Dunque la forza subita dalla carica vale

$$F_q = qE_f = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{|q|\lambda}{d} \simeq 5.4\,\mu N$$

Il verso è attrattivo e la direzione è perpendicolare al filo.

2. Nel punto A devo sommare il campo del filo

$$\vec{E}_{f,A} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{d}\vec{i}$$

e quello della carica

$$\vec{E}_{q,A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{d^2}\vec{j}$$

con $\vec{i}$ e $\vec{j}$ i versori verso destra e verso l'alto rispettivamente. Dunque il campo vale

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d}\left(2\lambda\vec{i} + \frac{q}{d}\vec{j}\right)$$

di modulo

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d}\sqrt{4\lambda^2 + \frac{q^2}{d^2}} \simeq 649\,V/m$$

e componenti

$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{d} \simeq +360\,V/m$$
$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{d^2} \simeq -540\,V/m$$

L'angolo rispetto all'asse x vale

$$\theta = \arctan\frac{q}{2d\lambda} \simeq -56^\circ$$

3. La differenza di potenziale dovuta al filo vale

$$\Delta V_f = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{d}{2d} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln 2 \simeq 125\,V$$

mentre quella dovuta alla carica vale

$$\Delta V_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{2}d}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq -79\,V$$

da cui

$$V_A - V_B = \Delta V_q + \Delta V_f \simeq 46\,V$$

4. La porzione di filo all'interno della superficie Σ vale

$$\ell = 2\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5}d$$

. La carica totale all'interno di Σ vale

$$q_{int} = \lambda\ell + q \simeq 11.18nC - 15nC \simeq -3.82nC$$

Per il teorema di Gauss il flusso del campo elettrico attraverso Σ vale

$$\Phi_\Sigma(E) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \simeq -432\,V\cdot m$$