Equazioni di Maxwell

$$C_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \left(i_c + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_\Sigma(\vec{E})}{dt} \right) \qquad C(\vec{E}) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \mathcal{E}$$

$$\Phi(\vec{B}) = 0 \qquad \boxed{\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Elettrostatica

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \qquad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}$$

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \cdot \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad L_{AB} = -\Delta U = q(V_B - V_A) = q \cdot \int_A^B E \cdot ds$$

se percorso chiuso

$$\mathcal{E} = \oint E \cdot ds = 0$$

campo elettrostatico ha circuitazione nulla
cioè f.e.m nulla

$$E_K = -U_e$$

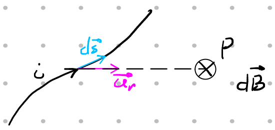
$$\frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = -q \Delta V$$

Gauss

$$\phi(E) = \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n \cdot d\Sigma = \frac{q_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

Magnetismo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \, d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$$



Circuiti

- RC

carica

$$i_{(t)} = \frac{\mathcal{E}}{R_T} e^{-t/\tau} \qquad q_{(t)} = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \tau = RC$$

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{C^2}$$

- RL

- Resistenze

  - serie $\quad R_s = R_1 + R_2$

  - parallelo $\quad \dfrac{1}{R_p} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

- Condensatori:

  - serie $\quad Q_1 = Q_2 \qquad V = V_1 + V_2 \qquad \dfrac{1}{C_s} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$

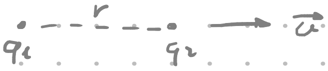
  - parallelo $\quad \Delta V_1 = \Delta V_2 \qquad C_p = C_1 + C_2$

- Induttori

Forza elettrostatica/Campo elettrostatico

- Legge di Coulomb

Due cariche q_1 e q_2 a distanza r esercitano una forza

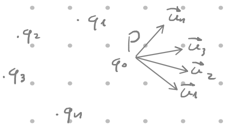


$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}$$

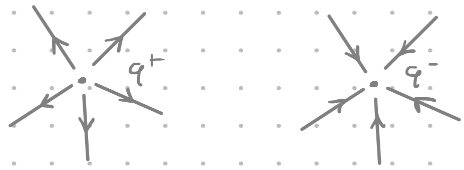
$F > 0$: repulsione
$F < 0$: attrazione

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10 \frac{Nm^2}{C} \qquad |e^-| = |p^+| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$$

- Campo elettrostatico $\qquad [E] = N/C$



$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{r_k^2} \vec{u}$$



$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}_P$$

- Si calcola per ogni carica: il campo che una carica esercita in un punto o su un'altra carica

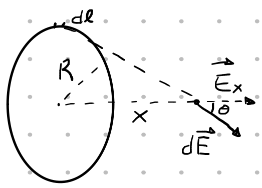
- In caso di un campo continuo

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r_i^2} \vec{u}_i \qquad \lambda = \frac{dq}{dl}$$

- Campi utili

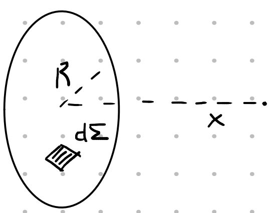
↳ anello carico

$$\vec{E}_{(x)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \vec{u}_x \quad (\text{distanza } x)$$



↳ disco carico

$$\vec{E}_{(x)} =$$



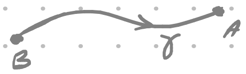
Lavoro elettrico / Potenziale elettrostatico

• **Lavoro**

Il lavoro di una forza è dato da $W = \int \vec{F} \cdot ds = q_0 \int \vec{E}\, ds$

• **Lavoro elettrico**

$$L_{AB} = \int_\gamma \vec{F}_{q_0} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



$$L_{AB} = -\Delta U = q_0 (V_B - V_A) \longrightarrow \Delta V_{BA} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$L_{AB} = -\Delta U = q(V_B - V_A) = q_0 \int_A^B E \cdot ds$$

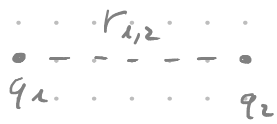
$$C_\gamma(\vec{E}) = \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

• **Potenziale Coulombiano**

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \qquad [V] = V \ (\text{Volt})$$

• **Energia spesa per una certa configurazione di cariche**

$$L_{ext} = -\int_\infty^{r_{1,2}} \vec{F}\, d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{1,2}}$$



Lavoro opposto al campo elettrico

• **Conservazione energia**

$$E = E_k + U_e = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V = 0$$

• **Superfici equipotenziali**

Superficie in cui ogni punto ha lo stesso potenziale.

$$V(x,y,z) = \text{costante}$$

↳ Come per le linee di campo anche queste non si intersecano mai, per ogni punto passa una sola sup. equipotenziale

• **Dipolo elettrico** ?

Due cariche q^+ e q^- distanti d costituiscono un dipolo.
Si chiama momento di dipolo elettrico $\vec{p} = q\,\vec{d}$ $\qquad [\vec{p}] = Cm$

Campo elettrostatico $\qquad \vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\vartheta\, \vec{u_r} + \sin\vartheta\, \vec{u_\vartheta}\right)$

Teorema di Gauss

Il flusso di un campo elettrico E prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa è pari alla somma delle cariche contenute nella superficie diviso per ε_0.

$$\boxed{\phi(E) = \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n \cdot d\Sigma = \frac{q_{TOT}}{\varepsilon_0}}$$

Conduttori

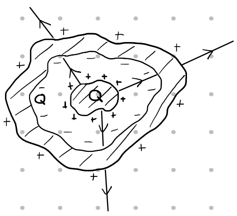
- Un conduttore in equilibrio elettrostatico è definito dalla condizione

$$E_{int} = 0$$

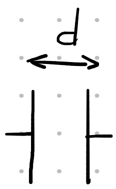
  - Eccesso di cariche distribuito solo sulla superficie del conduttore
  - Potenziale elettrostatico costante
  - Campo elettrostatico in un punto vicino alla superficie del conduttore è perpendicolare alla superficie
  - Th di Coulomb: $\vec{E}_{sup} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Condensatori

- Le armature di un condensatore sono costituite da due conduttori piani paralleli



$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$



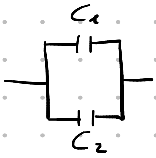
- Condensatore piano

$$\Delta V = \frac{q}{\varepsilon_0 \Sigma} d \qquad C = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{d}$$

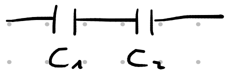
$$\Delta V = E h = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} h = \frac{\sigma \Sigma}{\varepsilon_0 \Sigma} h \qquad \sigma = \frac{q}{\Sigma}$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0 \Sigma} h$$

- Parallelo: $\Delta V_1 = \Delta V_2$ $\quad C_p = C_1 + C_2$



- Serie: $\Delta V_s = \Delta V_1 + \Delta V_2$ $\quad \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ $\quad Q_1 = Q_2$



• Energia elettrostatica

$$U_e = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

• Dielettrici

- Costante dielettrica: $\varepsilon = K \varepsilon_0$

- Carica distribuita sulle facce del dielettrico in relazione a quelle formate sulla superficie del dielettrico

$$q = \frac{K-1}{K} q_K$$

- Capacità condensatore pieno di dielettrico

$$C_K = K C$$

Corrente elettrica

- Intensità di corrente istantanea: $i = \frac{dq}{dt}$
- Densità di corrente: $\boxed{\vec{J} = n\, q_+ \vec{v}_d}$ → velocità di deriva

  n: num. elettroni che si spostano; q_+: carica spostata

Posso riscrivere $\quad di = J\, \hat{u}_n\, d\Sigma$

$$\boxed{i =} \int di = \int_\Sigma J\, \vec{u}_n\, d\Sigma = \boxed{J\,\Sigma} = \phi(J)$$

Legge di Ohm della conduzione elettrica

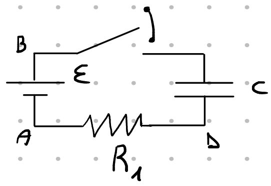
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$

σ: conducibilità elettrica

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E}\, d\vec{s} = \int_A^B \rho \vec{J}\, d\vec{s} = \int_A^B \rho J\, ds = \int_A^B \rho \frac{i}{\Sigma}\, ds = i \int_A^B \frac{\rho}{\Sigma}\, ds = Ri$$

- Resistenza del conduttore: $\boxed{R =} \int_A^B \frac{\rho}{\Sigma}\, ds = \boxed{\frac{\rho l}{\Sigma}} \qquad [R] = \Omega$

Circuito RC



- Carica

$$\underset{V_{BA}}{\mathcal{E}} = \underset{V_{BD}}{V_c} + \underset{V_{DA}}{Ri} \qquad \mathcal{E} = \oint E \cdot ds$$

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Viene compiuto $W = C\mathcal{E}^2$

- Scarica $\qquad \tau = RC$

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$$

Viene dissipato $W = \frac{q_0^2}{2C}$

Quando un condensatore si scarica rimane costante la capacità ma varia la carica depositata sulle armature

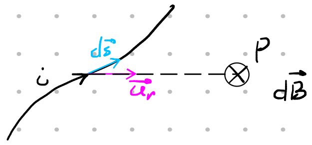
$$U_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \rightarrow \text{costante}$$

Magnetismo

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \ \frac{T \cdot m}{A}$$

- I^a legge di Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \, |d\vec{s} \times \vec{u_r}|}{r^2}$$



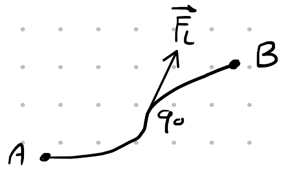
- Legge di Biot-Savat

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{u_\theta}$$

Campo magnetico uscente dai fili

- Forza di Lorentz (Lavoro nullo)

$$F_L = q_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$



$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F_L} \, d\vec{s} = \int_A^B q_0 \overbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \, \vec{v}}^{0} \, dt = 0$$

- II^a Legge di Laplace

$V_d =$

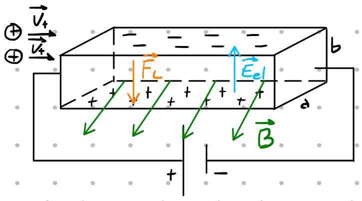
$$d\vec{F} = dq \, \vec{v_d} \times \vec{B} \qquad dq \, \vec{v_d} = i \, d\vec{s}$$

$$\boxed{d\vec{F} = i \, d\vec{s} \times \vec{B}}$$

Forza subita dal filo percorso dalla corrente in presenza di un campo magnetico

$\times$ mano dx $\quad i \to$ pollice
$B \to$ indice

- Effetto Hall



B perpendicolare al momento delle cariche

$$\vec{F_L} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

La faccia superiore si carica negativamente, quella inferiore positivamente. Così facendo si forma un campo elettrostatico verso l'alto.

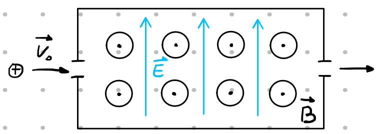
$$\vec{E_H} = \frac{\vec{F_L}}{q_+} = \vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{campo di Hall}$$

$\Rightarrow$ situazione a regime: $\vec{E_H} + \vec{E_{el}} = 0$

$$|\vec{E_{el}}| = |\vec{E_H}| = v \cdot \vec{B} \cdot \cancel{\sin 90°}^{\,1} = \frac{J}{n q_+} B = \frac{i}{n a b q_+} \vec{B}$$

$$\Delta V_H = |E_H| \, b = \frac{i B}{n a q_+}$$

- Selettore di velocità



$$\vec{F_L} = q (E + v_0 \times \vec{B}) = 0$$

(la forza è 0 per avere un moto rettilineo uniforme)

$$E = v_0 \times \vec{B}$$

$$E = v_0 B \cancel{\sin\theta}^{=1} = v_0 B \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}$$

- Dipolo magnetico

$$\vec{m} = i \, \Sigma \, \vec{u}_n$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m \cdot B \cdot \cos\vartheta \qquad (W = -\Delta U = U_i - U_f)$$

- Legge di Ampere

Gauss

$$C_\gamma(\vec{B}) = \oint_\gamma \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \sum_K i_K \qquad \phi(E) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$C_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 i_c = \begin{cases} \mu_0 i & r \geq R \\ \mu_0 J \pi r^2 & r < R \end{cases} \qquad J = \frac{i}{\Sigma}$$

- Legge di Faraday-Lentz

$$\mathcal{E} = \oint E \cdot ds = C_\gamma(E)$$

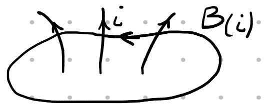
$$C_\gamma(\vec{E}) = -\frac{d\phi_\gamma(\vec{B})}{dt}$$

$$\phi_\gamma(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u}_N \cdot d\Sigma$$

flusso campo magnetico attraverso una superficie

- Coefficiente di autoinduzione (L)

$$[L] = \frac{T m^2}{A} \equiv H \text{ (Henry)}$$



I^a legge di Laplace

autoflusso

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma = \int_\Sigma \left(\oint_\gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \, d\vec{s} \times \vec{u}}{r^2} \right) \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma$$

dipende dalla geometria del circuito

$$= i_0 \cdot L$$

$$L = \frac{\Phi_\gamma(\vec{B})}{i_0}$$

$$i_{ind} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi B}{dt}$$

- Forza elettromotrice indotta

$$\mathcal{E}_{(t)} = -\frac{d\phi(B)}{dt}$$

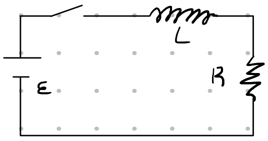
Solenoide

N spire

$$B = \frac{N}{l} \mu_0 i \qquad l >> R$$

Campo parallelo all'asse

• Circuito RL



$V = R \cdot i$

$$i_{(t)} = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)$$

$$\varepsilon - L\frac{di(t)}{dt} = R \cdot i(t)$$

La potenza erogata dal generatore quando la corrente ha valore i è

$$\varepsilon i_{(t)} dt = R i_{(t)}^2 dt + L i_{(t)} di$$

$$\underbrace{\int_0^{t_1} \varepsilon i_{(t)} dt}_{\text{lavoro fornito dal generatore}} = \int_0^{t_1} R i_{(t)}^2 dt + \frac{1}{2} L i_{(t)}^2 = \underbrace{\int_0^{t_1} R i_{(t)}^2 dt}_{\text{effetto Joule}} + \underbrace{U_m}_{\text{energia solenoide}}$$

- Energia magnetica

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2$$

- Densità energia magnetica

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \implies U_m = \int_\tau u_m \, d\tau$$

• Legge di Felici

$$Q = \frac{1}{R}\left(\phi_{iniz} - \phi_{finale}\right)$$

Formule utili

- Scalare tra due vettori : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\vartheta$
- Vettore tra due vettori: $\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b \cdot \sin\vartheta$

Acc. centripeta

$$a = \frac{v^2}{r}$$

$$F_c = m \frac{v_0^2}{R} = q v_0 B$$

Un campo è conservativo quando l'integrale non dipende dal percorso, ma dal punto inziale a quello finale. Si può anche dire quando la sua circuitazione è nulla, vd campo elettrostatico.

$$C_\gamma(\vec{E}) = \oint_\gamma \vec{E} \, d\vec{s} = 0$$

$$W = -\Delta U = -q \Delta V_{AB} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Proprietà conduttori in condizioni elettrostatiche

① $\vec{E}_{interno} = 0$ Le cariche sul conduttore si modificano per creare un campo uguale e opposto al campo esterno

② La carica in eccesso si depositá sulla superficie, siccome il campo interno è 0, per qualsiasi superficie interna il flusso vale 0

③ Tutto il conduttore è allo stesso potenziale

④ Teorema di Coulomb $\vec{E}_{sup} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_n$

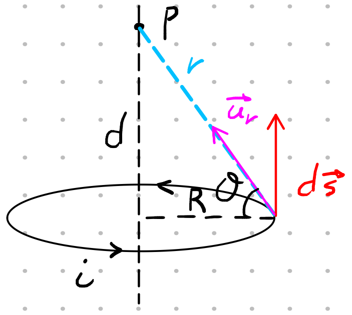
Effetto Joule

L'effetto Joule consiste nel riscaldamento di un conduttore metallico attraverso energia elettrica. Questa legge può essere interpretata com una trasformazione integrale dell'energia elettrica in calore.

$$E_J = \int P \, dt = \int_0^{T_1} R i^2 dt$$

$$dL = dq \, \Delta V \qquad P = \frac{dL}{dt} = \frac{dq}{dt} \Delta V = i \Delta V = R \cdot i^2$$

- Campo magnetico spira circolare



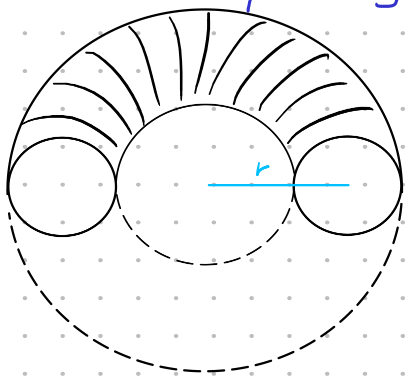
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,ds \times u_r}{r^2} = \qquad ds \perp u_r$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,ds}{d^2+R^2}\cos\vartheta \qquad R = r\cos\vartheta$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,R}{(d^2+R^2)^{3/2}}\underbrace{\int ds}_{\to 2\pi R} = \frac{\mu_0}{2\cancel{4\pi}}\,\frac{i\cancel{2\pi}R^2}{(d^2+R^2)^{3/2}} \qquad r<<d$$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2d^3}$$

- Flusso del campo magnetico solenoide toroidale



$$C_\gamma(B) = \oint_\gamma B\,ds \overset{Ampere}{=} \mu_0 N i_c$$

$$= B\,2\pi r = \mu_0 N i_c$$

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

$$\phi(B) = N\int_\Sigma B\cdot u_n \cdot d\Sigma = N B \Sigma$$