UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

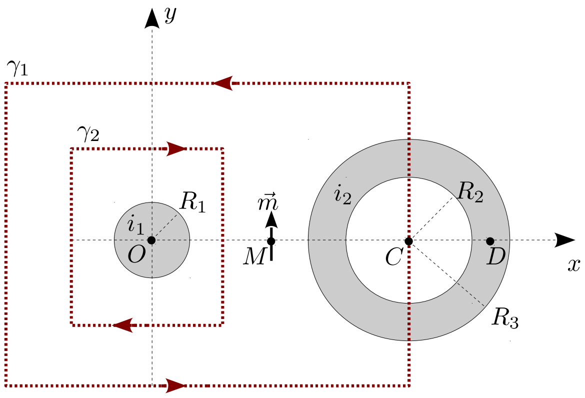
a.a. 2019-2020

Elementi di Fisica II: 22 Gennaio 2020

Seconda prova in itinere / Compito Completo

Problema 1

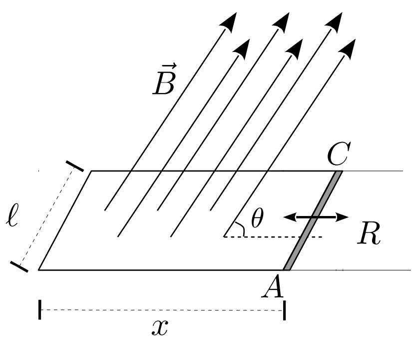
Si considerino due conduttori cilindrici infiniti, con gli assi paralleli all'asse z. Il primo conduttore cilindrico ha raggio $R_1 = 1cm$, mentre il secondo conduttore (cavo) ha raggio interno $R_2 = 2cm$ e raggio esterno $R_3 = 3cm$. Gli assi dei due cilindri distano $d_1 = OC = 7cm$ e l'asse del primo cilindro passa per l'origine O degli assi cartesiani come in figura. I conduttori sono percorsi dalle correnti i_1 e i_2 con densità di corrente uniforme. Sapendo che le circuitazioni del campo magnetico lungo i percorsi γ_1 e γ_2 valgono rispettivamente $\mathcal{C}_{\gamma_1}(\vec{B}) = 0$ e $\mathcal{C}_{\gamma_2}(\vec{B}) = 1.5 \times 10^{-7} T \cdot m$, calcolare:



1. le correnti i_1 e i_2 (modulo e verso)
2. Il modulo del campo magnetico nel punto C (posto sull'asse del secondo cilindro) e nel punto D posto sull'asse x a distanza $d_2 = 2.5cm$ dal punto C. Considerare note le correnti i_1 e i_2 se non si é risolto il punto precedente.
3. Una piccola spira di raggio $r = 100\mu m$ e percorsa dalla corrente $i_3 = 200mA$ è posta nel punto medio tra O e C con momento magnetico $\vec{m}$ come in figura. Calcolare il lavoro necessario per ruotare la spira in modo da cambiare il momento magnetico della spira da $\vec{m}$ a $-\vec{m}$.

Problema 2

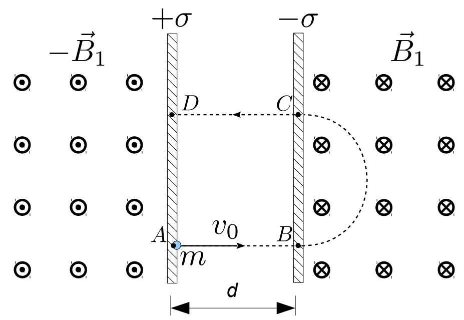
Si consideri un circuito rettangolare di lati ℓ e x come in figura. Tre lati sono fissi e hanno resistenza trascurabile. Il quarto lato AC (di lunghezza $\ell = 10cm$) ha resistenza $R = 50\Omega$ ed é libero di muoversi come in figura su due guide semi-infinite. Il circuito é situato in una zona in cui é presente un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme, la cui direzione forma un angolo $\theta = \pi/3$ con il piano su cui giace il circuito. Il modulo del campo magnetico varia con la legge $B(t) = B_0 e^{-t/\tau}$ con $B_0 = 100mT$ e $\tau = 50ms$, mentre il lato AC si muove in modo che il segmento x vari con la legge $x(t) = x_0 + vt$ con $x_0 = 12cm$ e $v = 10km/h$. Calcolare:



1. Il flusso del campo magnetico al tempo $t = 0$ e al tempo $t = +\infty$.
2. La corrente indotta in funzione del tempo. In quale istante la corrente cambia verso?
3. La carica che circola nel circuito dal tempo $t = 0$ al tempo $t = 2\tau$.
4. Si consideri il circuito precedente nel caso in cui il campo magnetico sia costante ($B = B_0$). Calcolare in questo caso l'energia dissipata per effetto Joule tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = \tau$.

Problema 3: solo per il compito completo

Un condensatore piano viene caricato in modo che sulle due armature, distanti $d_1 = 8cm$, sia presente una densità di carica $+\sigma$ e $-\sigma$ con $|\sigma| = 1.2nC/m^2$. Un particella di massa m e carica $q > 0$ inizialmente posizionate nel punto A, viene lanciata orizzontalmente dal piano di sinistra con velocità $v_0 = 90m/s$. La particella, dopo aver toccato l'armatura di destra nel punto B, entra in una zona immersa in un campo magnetico $\vec{B}_1$ uniforme e costante con il verso entrante nel foglio come in figura.

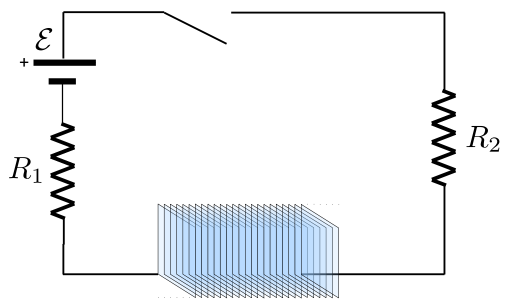


La particella seguendo la traiettoria indicata con una linea tratteggiata, ritorna tra le armature del condensatore e passa attraverso l'armatura di sinistra nel punto D. A sinistra dell'armatura positiva è presente un campo megantico $-\vec{B}_1$ (uguale e opposto al campo a destra dell'armatura negativa). Sapendo che il rapporto q/m della particella vale $|q|/m = 2 \cdot 10^3 C/kg$, determinare:

1. La velocità della particella nel punto B
2. Il modulo del campo magnetico sapendo che la distanza BC vale $d_2 = 30cm$.
3. Dopo aver passato il punto D la particella percorre una traiettoria circolare e tocca nuovamente l'armatura positiva nel punto E. Determinare il raggio di questa traiettoria e la distanza del punto E dal punto A

Problema 4: solo per la seconda prova in itinere

Un circuito RL è formato da una generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E} = 15V$, da due resistenze $R_1 = 50\Omega$ e $R_2 = 70\Omega$, e da un solenoide lungo $d = 13cm$ e con sezione quadrata di lato pari a $\ell = 3cm$ come in figura. Il solenoide è completamente riempito da un materiale ferromagnetico di permeabilità magnetica relativa pari a $k_m = 600$. Il circuito è inizialmente aperto e viene chiuso al tempo $t = 0$. Sapendo che la densità di energia magnetica all'interno del solenoide in situazione stazionarie (cioé ad un tempo $t \gg \tau$, con τ costante di tempo del circuito) vale $u_m = 0.5J/m^3$, calcolare:



1. La densità di spire del solenoide (si consideri l'approssimazione di solenoide infinito)
2. La costante di tempo τ del circuito
3. La corrente che circola nel circuito al tempo $t_1 = 2\tau$
4. Il lavoro fornito dal generatore dal tempo $t = 0$ al tempo $t_1 = 2\tau$.

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Definendo positive le correnti uscenti dal foglio, utilizzando il teorema di Ampere, le circuitazioni valgono :

$$\mathcal{C}_{\gamma_1}(\vec{B}) = \mu_0(i_1 + \frac{1}{2}i_2) = 0\,, \qquad \mathcal{C}_{\gamma_2}(\vec{B}) = -\mu_0 i_1 = 1.5 \times 10^{-7} T\cdot m$$

   da cui

$$i_1 = -\frac{1.5\times 10^{-7} T\cdot m}{\mu_0} \simeq -119\, mA\,, \qquad i_2 = -2i_1 \simeq 239\, mA$$

   Dunque i_1 è entrante nel foglio, mentre i_2 è uscente.

2. Il campo magnetico generato dal filo i_1 all'esterno del filo vale

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1}$$

   dove r_1 è la distanza da O.

   Il campo magnetico generato dal filo i_2 vale invece (usando il teorema di Ampere)

$$B_1 = \begin{cases} 0 & r_2 \leq R_1 \\ \dfrac{\mu_0 i_2}{2\pi r_2}\dfrac{r_2^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} & R_1 < r_2 < R_2 \\ \dfrac{\mu_0 i_2}{2\pi r_2} & r_2 \geq R_2 \end{cases}$$

   dove r_2 è la distanza da C.

   Nel punto C, il campo generato dal filo i_2 è nullo, per cui il campo totale vale

$$\vec{B}_C = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d_1}\vec{j} \simeq -(340nT)\vec{j}$$

   Nel punto D, vanno sommati i due campo:

$$\vec{B}_D = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(d_1+d_2)}\vec{j} + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d_2}\frac{d_2^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\vec{j} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{2i_1}{d_1+d_2} + \frac{2i_2}{d_2}\frac{d_2^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\right]\vec{j} \simeq (610nT)\vec{j}$$

3. il momento magnetico della spira vale

$$m = |\vec{m}| = i_3\pi r^2 = 6.28\cdot 10^{-9}\, A\cdot m^2$$

   Siccome l'energia di un dipolo magnetico vale $U_m = -\vec{m}\cdot\vec{B}$ è necessario calcolare il campo in M. Dunque

$$\vec{B}_M = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d_1/2}\vec{j} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d_1/2}\vec{j} = \frac{\mu_0}{\pi d_1}(i_1 - i_2)\vec{j} = \frac{\mu_0}{\pi d_1}(-|i_1| - |i_2|)\vec{j} \simeq -(2.06\,\mu T)\vec{j}$$

   Il lavoro esterno è pari alla variazione di energia magnetica, pari a

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \Delta U_m = -\vec{m}_{fin}\cdot\vec{B}_M + \vec{m}_{in}\cdot\vec{B}_M$$

   Siccome il momento magnetico finale $\vec{m}_{fin}$ è uguale e opposto a quello iniziale $\vec{m}_{in}$, si ha

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = 2\vec{m}_{in}\cdot\vec{B}_M = -2mB_M \simeq -25.7\, fJ$$

PROBLEMA 2

1. Il flusso del campo magnetico attraverso la spira vale

$$\Phi(\vec{B}) = \ell x(t) B(t) \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \ell x(t) B(t) \sin\theta$$

Utilizzando le espressioni di $x(t)$ e di $B(t)$ si ottiene

$$\Phi(t) = \ell \sin\theta B_0 e^{-t/\tau}(x_0 + vt)$$

Dunque

$$\Phi(0) = \ell \sin\theta B_0 x_0 \simeq 1.04 mWb$$

$$\Phi(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = 0$$

2. Dal teorema di Faraday si ha

$$i_{\text{ind}}(t) = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell \sin\theta B_0}{R} e^{-t/\tau}[\frac{1}{\tau}(x_0 + vt) - v]$$

La corrente cambia verso quando il termine all'interno della parentesi quadra si annulla, dunque

$$\frac{1}{\tau}(x_0 + vt) - v = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \tau - \frac{x_0}{v} \simeq 6.8 ms$$

3. Per la legge di Felici si ha

$$Q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\Phi(0) - \Phi(2\tau)}{R}$$

Siccome

$$\Phi(2\tau) = \ell \sin\theta B_0 e^{-2}(x_0 + 2v\tau) \simeq 0.46\, mWb$$

si ha

$$Q = \frac{\Phi(0) - \Phi(2\tau)}{R} \simeq 11.4\, \mu C$$

4. Se il campo fosse costante di avrebbe

$$\Phi(t) = \ell \sin\theta B_0(x_0 + vt)$$

e la corrente indotta diventa

$$i_{\text{ind}} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{v\ell \sin\theta B_0}{R}$$

indipendente dal tempo. L'energia dissipata per effetto Joule diventa

$$W_J = \int_0^\tau i_{\text{ind}}^2 R \mathrm{d}t = i_{\text{ind}}^2 R\tau = \frac{(v\ell \sin\theta B_0)^2 \tau}{R} \simeq 578\, nJ$$

PROBLEMA 3

1. Per conservazione dell'energia si ha

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + q(V_A - V_B)$$

   Siccome la d.d.p. vale

$$V_A - V_B = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0} d_1 \simeq 10.86\, V$$

   si ha

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + \frac{2q}{m}(V_A - V_B)} \simeq 227\, m/s$$

2. Siccome il raggio della traiettoria circolare all'interno del campo magnetico vale

$$R_1 = \frac{mv}{qB}$$

   e in questo caso $R_1 = d_2/2$, il campo magnetico si ottiene come

$$B = \frac{mv_B}{qR_1} = \frac{2mv_B}{qd_2} \simeq 757\, mT$$

3. Per conservazione dell'energia, la particella nel punto D ha la stessa velocità iniziale v_0. Data la direzione del campo, la particella verrà deviata verso l'alto, con raggio di curvatura

$$R_2 = \frac{mv_0}{qB} = \frac{v_0}{v_B} R_1 \simeq 5.95 cm$$

   . Il punto E si trova quindi a distanza dal punto A pari a

$$AE = AD + 2R_2 \simeq 41.9\, cm$$

PROBLEMA 4

1. La corrente che circola nel ciruito in situazione stazionaria vale

$$i_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = 125mA$$

   In queste condizioni, siccome il campo magnetico vale $B_\infty = \mu_0 k_m n i_\infty$, la densità di energia vale

$$u_m = \frac{1}{2k_m\mu_0} B_\infty^2 = \frac{1}{2}\mu_0 k_m n^2 i_\infty^2$$

   da cui si ricava la densità di spire

$$n = \sqrt{\frac{2u_m}{\mu_0 k_m i_\infty^2}} \simeq 291 \frac{\text{spire}}{m}$$

2. Il coefficiente di autoinduzione del solenoide vale

$$L = \mu_0 k_m n^2 \ell^2 d = 7.5mH$$

   Quindi la costante di tempo si ottiene come

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} \simeq 62\,\mu s$$

3. La corrente che circola in un circuito RL vale

$$i(t) = i_\infty (1 - e^{-t/\tau})$$

   dove $i_\infty = \mathcal{E}/(R_1 + R_2) = 125mA$. Dunque al tempo t_1 si ha

$$i(t_1) = i_\infty(1 - e^{-2}) \simeq 108mA$$

4. Il lavoro fornito dal generatore vale

$$\mathcal{L}_{\text{gen}} = \int_0^{t_1} \mathcal{E} i(t) \mathrm{d}t = \mathcal{E} i_\infty \int_0^{t_1} (1 - e^{-t/\tau}) \mathrm{d}t = \mathcal{E} i_\infty \left[t + \tau e^{-t/\tau}\right]_0^{2\tau} = \mathcal{E} i_\infty \left[\tau + \tau e^{-2}\right] \simeq 132\,\mu J$$