Teorema

Sia V spazio vettoriale

$\{v_1, \dots, v_n\}$ insieme di generatori

$\{w_1, \dots, w_r\}$ linearmente indipendente

Allora $r \leq n$

Dimostrazione

So che i vettori lin. indipendenti come tutti non nulli

Parto da w_1. Sarà $w_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ ma $w_i \neq \vec{0}$, quindi esiste i t.c. $\lambda_i \neq 0$

Posso supporre $i = n$, ossia $\lambda_n \neq 0$

Per il lemma di lezione 5 $w_1, v_1, \dots, v_{n-1}$ é sistema di generatori

Considero w_2 : $w_2 = \gamma w_1 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$

Se $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$, avrei $w_2 = \gamma w_1$

quindi w_1, w_2 lin. dipendenti, assurdo!

Esiste allora i t.c. $\lambda_i \neq 0$. Posso assumere $i = n-1$, $\lambda_{n-1} \neq 0$

Di nuovo per lemma lezione 5 $w_2, w_1, v_1, \dots, v_{n-2}$ generatori di V

e proseguo, trovando $w_s, w_{s-1}, \dots, w_2, w_1, v_1, \dots, v_{n-s}$ per ogni s

Devo dimostrare $r \leq n$. Supponiamo $r > n$, quindi $r \geq n+1$.

Alla fine troverei $\{w_n, w_{n-1}, \dots, w_2, w_1\}$ sistema di generatori

Ho ancora $w_{n+1} = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$, quindi $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}$ sono lin. dipendenti

Pertanto $w_1, \dots, w_r$ sono lin. dipendenti assurdo!

Quindi $r \leq n$

Teorema

Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi

Dimostrazione

Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_r\}$ basi di V

1- $\{v_1, \dots, v_n\}$ insieme di generatori

$\{w_1, \dots, w_n\}$ vettori lin. indipendenti

$\Rightarrow r \leq n$

2- $\{v_1, \dots, v_n\}$ insieme di generatori
$\{v_1, \dots, v_r\}$ vettori lin. indipendenti
$\Longrightarrow n \leq r$

Quindi $r = n$

Definizione

La dimensione di uno spazio vettoriale è il numero di elementi di una sua base. Si denota $\dim V$

Esempio

$V = \mathbb{R}^3$ (su $\mathbb{R}$). V ha base $\{e_1, e_2, e_3\}$ dove
$e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$

Infatti se $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, v si scrive in modo unico come
$v = ae_1 + be_2 + ce_3$

Quindi $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

In generale K^n sp. vett. su K ha la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$
$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$
$\vdots$
$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$

$\dim K^n = n$

Esempio

$V = K_n[x]$ pol. di grado $\leq n$
V ha base $\{v_0, \dots, v_n\}$
$v_0 = 1$, $v_1 = x, \dots, v_n = x^n$

Quindi $\dim K_n[x] = n+1$

Teorema

Sia V uno spazio vettoriale, $S = \{v_1, \dots, v_s\}$ insieme di generatori (quindi V è finitamente generato). Da S si può estrarre una base di V. In particolare
$\dim V \leq s$

Dimostrazione

$v_1, \dots, v_s$ sono generatori di V. Sono anche lin. indipendenti?

Se sì: ho concluso: $\{v_1, \dots, v_s\}$ è base di V

Se no: $v_1, \dots, v_s$ sono lin. dipendenti, almeno uno tra $v_1, \dots, v_s$ è comb. lineare dei rimanenti. Posso assumere che sia v_s.

Allora $\{v_1, \dots, v_{s-1}\}$ è ancora insieme di generatori di V. Infatti avremo $v_s = a_1 v_1 + \dots + a_{s-1} v_{s-1}$. Sia $v \in V$

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s =$

$= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{s-1} v_{s-1} + \lambda_s (a_1 v_1 + \dots + a_{s-1} v_{s-1}) = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{s-1} v_{s-1}$

$\{v_1, \dots, v_{s-1}\}$ è un sistema di generatori

Procedo come prima: $v_1, \dots, v_{s-1}$ sono lin. indipendenti?

se sì: $\{v_1, \dots, v_{s-1}\}$ è base

se no: ripeto il ragionamento

$\{v_1, \dots, v_n\}$ (con $n = \dim V$) che è un sistema di generatori ed anche un insieme lin. indipendente. Quindi $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V

Per convenzione $V = \{\vec{0}\}$ ha per base $\emptyset$ (l'insieme vuoto) ed ha dimensione 0.

Teorema

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, $\dim V = n$. Siano $\{v_1, \dots, v_r\}$ vettori lin. indipendenti ($r \leq n$). L'insieme $\{v_1, \dots, v_r\}$ può essere completato ad una base di V.

Dimostrazione

$\{v_1, \dots, v_r\}$ generano V?

Se sì: so già una base

Se no: esiste un vettore v_{r+1} di V che non è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_r$ (vuol dire che esiste $v_{r+1} \in V \setminus L(v_1, \dots, v_r)$)

Considero $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}$. Allora $v_1, \dots, v_{r+1}$ sono lin. indipendenti.

Infatti sia $a_1 v_1 + \dots + a_{r+1} v_{r+1} = \vec{0}$. Se $a_{r+1} \neq 0$, v_{r+1} è comb. lineare di $v_1, \dots, v_r$ (assurdo)

Quindi $a_{r+1} = 0$. Rimane $a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = \vec{0}$, quindi $a_1 = \dots = a_r = 0$ perché $v_1, \dots, v_r$ sono lin. indipendenti

Perciò $v_1, \dots, v_{n+1}$ sono lin. indipendenti $v_1, \dots, v_{n+1}$ generano V?

Se sì: $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ è base

Se no: esiste $v_{n+2} \in V \setminus L(v_1, \dots, v_{n+1})$ e così via

Una volta ottenuti n vettori il procedimento termina.

Esempio

$V = \mathbb{R}^3$, $\dim V = 3$

$v_1 = (1,0,-2)$ $\quad v_2 = (2,1,-1)$ $\quad v_3 = (3,2,0)$

$U = L(v_1, v_2, v_3)$ il più piccolo sottospazio di V che contiene v_1, v_2, v_3

$\dim U = ?$ $\quad$ base $U = ?$

Soluzione

$\{v_1, v_2, v_3\}$ generano U. v_1, v_2, v_3 sono lin. indipendenti?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_2 = -2\lambda_3$ $\quad$ quindi $\lambda_1 = \lambda_3$

$\lambda_2 = -2\lambda_1$

$\lambda_1 + 2(-2\lambda_1) + 3\lambda_1 = 0 \iff \lambda_1 - 4\lambda_1 + 3\lambda_1 = 0 \iff 0\lambda_1 = 0$ sempre vera

$$\begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \end{cases}$$ al variare di λ_1 in $\mathbb{R}$

infinite soluzioni: v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti

Ad esempio per $\lambda_1 = 1$, si ha $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$

$v_1 - 2v_2 + v_3 = \vec{0}$ (e posso controllare)

$v_3 = -v_1 + 2v_2 \Rightarrow U = L(v_1, v_2)$ (ho tolto v_3)

oppure

$v_1 = 2v_2 - v_3 \Rightarrow U = L(v_2, v_3)$ (ho tolto v_1)

oppure

$v_2 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3 \Rightarrow U = L(v_1, v_3)$ (ho tolto v_2)

Prendo $U = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ $\quad (= \langle v_1, v_2 \rangle)$

v_1, v_2 sono lin. indipendenti?

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \vec{0}$ $\qquad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

v_1, v_2 sono lin. indipendenti

$\{v_1, v_2\}$ è una base di U, $\dim U = 2$

(U è un piano di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine)

Osservazione

Siano $v_1, v_2 \in V$, V spazio vettoriale. Allora v_1, v_2 sono lin. dipendenti se e solo se uno è multiplo dell'altro (v_1, v_2 si dicono paralleli)

Dimostrazione

Supponiamo v_1, v_2 lin. dipendenti: esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ non entrambi nulli t.c. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \vec{0}$

Supponiamo $\lambda_1 \neq 0$. Allora $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$

v_1 è multiplo di v_2

Viceversa, supponiamo $v_1 = \lambda v_2$ $\quad \lambda \in K$

Allora $\underset{1 \neq 0}{1} \cdot v_1 - \lambda v_2 = \vec{0}$

quindi v_1, v_2 sono lin dipendenti

Esempi

1- $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$v_2 = 2v_1$, quindi v_1, v_2 sono lin. dipendenti

2- $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = 0 \cdot v_1$, quindi v_1, v_2 sono lin. dipendenti

3- $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda v_2 = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \forall \lambda \in K$

v_1, v_2 sono linearmente indipendenti perché $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ non ha soluzioni

4- $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$

v_1, v_2, v_3 sono lin. dipendenti?

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \vec{0}$

Mi accorgo che $v_3 = v_1 + v_2$ quindi v_1, v_2, v_3 sono lin. dipendenti $(v_1 + v_2 - v_3 = \vec{0})$

5- $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$

v_4 qualunque vettore di $\mathbb{R}^3$

v_1, v_2, v_3, v_4 sono lin. indipendenti?

Lo so già che v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti $(v_1 + v_2 - v_3 = \vec{0})$

$v_1 + v_2 - v_3 + 0 \cdot v_4 = \vec{0}$

Perciò v_1, v_2, v_3, v_4 sono lin. dipendenti

In generale se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dipendenti, allora $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_s$ sono linearmente dipendenti.

Osservazione

Sia V spazio vettoriale $R, S \subseteq V$. Allora $R \subseteq S \Rightarrow L(R) \leq L(S)$

Dimostrazione

So che $S \subseteq L(S)$, quindi $R \subseteq S$ segue $R \subseteq S \subseteq L(S)$, quindi $R \subseteq L(S)$

Ma allora $L(R) \leq L(S)$ perché $L(R)$ è il più piccolo sottospazio di V contenuto R

Teorema

Sia V sp. vettoriale, $\dim V = n$. Siano $v_1, \dots, v_n$ n vettori di V.

Sono equivalenti

1. $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indipendenti
2. $v_1, \dots, v_n$ generano V.
3. $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V

Dimostrazione

$1 \Rightarrow 2$ $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti. Posso completare ad una base di V che però ha n elementi, quindi $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V.

In particolare è un sistema di generatori

$2 \Rightarrow 1$ $v_1, \dots, v_n$ generano V. Posso cancellarne qualcuno per ottenere una base di V, che però ha n elementi. Quindi non ne cancello nessuno, $\{v_1, \dots, v_n\}$ era già una base.

In particolare $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indipendenti

Infine "3" = "1" + "2", quindi abbiamo concluso perché 1 e 2 sono equivalenti

Esempio

Sia V uno spazio vettoriale $\dim V = n$

Sia $U \leqslant V$ (U sottospazio di V). Allora

1. $\dim U \leqslant \dim V$
2. $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$

Dimostrazione

1. Sia $\{u_1, \dots, u_r\}$ una base di U
   In particolare $u_1, \dots, u_r$ sono lin. indipendenti e sono vettori di V.
   Quindi $r \leqslant n$. Perciò $\dim U = r \leqslant n = \dim V$
2. Sia $\{u_1, \dots, u_n\}$ base di U. Allora $u_1, \dots, u_n$ sono n vettori lin. indipendenti di V, che ha dim n. In particolare $u_1, \dots, u_n$ generano V, quindi $U = V$.

Esempio

$V = \mathbb{R}^2$ $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

$U = \mathbb{R} e_1$ $W = \mathbb{R} e_2$

U e W sottospazi di V

$\{e_1\}$ è base di U $\dim U = 1$

$\{e_2\}$ è base di W $\dim W = 1$

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$

Come sono i sottospazi Z di $\mathbb{R}^2$?

$\dim Z = 0$ $Z = \{\vec{0}\} = \{(0,0)\}$

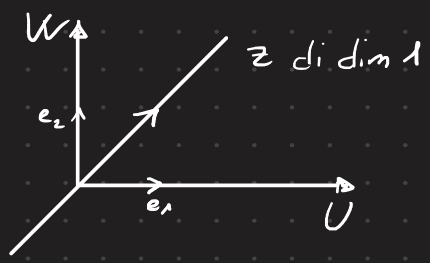
$\dim Z = 2$ solo $Z = \mathbb{R}^2$

$\dim Z = 1$?

Di sicuro $Z = \mathbb{R} e_1$ hanno dim 1

In generale $Z = \mathbb{R}v$, dove $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$v \neq \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: sono tutte le rette del piano passanti per l'origine



Esempio

$V = \mathbb{R}^3$? $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\quad Z \leqslant \mathbb{R}^3$

$\dim Z = 0$ solo $Z = \{\vec{0}\} = \{(0,0,0)\}$

$\dim Z = 3$ solo $Z = \mathbb{R}^3$

$\dim Z = 1$, $Z = \mathbb{R}v$, $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

tutte le rette passanti per l'origine

$\dim Z = 2$, $Z = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ v_1, v_2 lin indipendenti. Tutti i piani passanti per l'origine

Esempio

$V = \mathbb{R}^2$ $\quad U = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ dove $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Calcolare la dimensione ed una base di U

Soluzione

v_1, v_2 generano U. v_1, v_2 sono non nulli, uno non é multiplo dell'altro, quindi v_1, v_2 sono lin. indipendenti

(oppure risolvo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$\{v_1, v_2\}$ é base di U e $\dim U = 2$

(quindi $U = \mathbb{R}^2$)

Esempio

Sia $V = \mathbb{R}^3$ $\quad v_1 = (1, 0, -2)$ $\quad v_2 = (2, 1, -1)$

v_1, v_2 sono lin. indipendenti (uno non é multiplo dell'altro)

Completare $\{v_1, v_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$

Soluzione

Devo trovare $v \in \mathbb{R}^3 \setminus L(v_1, v_2)$

Descrivo $L(v_1, v_2)$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Basta trovare $v \in \mathbb{R}^3$, v non esprimibile in questo modo

Ad esempio $\mathbb{R}^3 = L(e_1, e_2, e_3)$

Di sicuro almeno uno tra e_1, e_2, e_3 non é in $L(v_1, v_2)$ perché e_1, e_2, e_3 generano $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^3$ non puó essere generato da 2 vettori.

Provo a vedere se $e_1 \in L(v_1, v_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Ma la 1ª diventa $1 = 0$, assurdo.

Quindi $e_1 \notin L(v_1, v_2)$ $\quad v_1, v_2, e_1$ sono lin. indipendenti

Poiché $\dim \mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, e_1\}$ é base di $\mathbb{R}^3$

Teorema

V spazio vettoriale U, W sottospazi (vettoriali) di V

$U \cap W$ é sottospazio di V

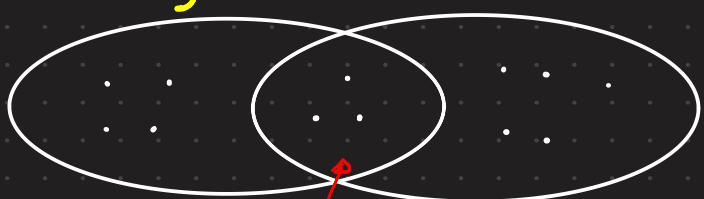
$U + W = \{ u + w \mid u \in U, w \in W \}$

Allora

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

(Formula di Grassmann)

Esempio con gli insiemi



$A \cap B$

Se x é un insieme, $|x|$ é il numero di elementi di x (cardinalitá di x)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Dimostrazione

Partiamo da $U \cap W$

Sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base di $U \cap W$ $\quad \dim(U \cap W) = r$

$v_1, \dots, v_r$ sono vettori lin. indipendenti di U

Estendo ad una base di U $\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$ base di U $\quad \dim U = r+s$

$v_1, \dots, v_r$ sono vettori lin. indipendenti di W

Estendo ad una base di W $\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_t\}$ base di W $\quad \dim W = r+t$

Base di $U+W$?

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t\}$ è una base di $U+W$

$\dim U+W = r+s+t$

$\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = r+s+\cancel{r}+t-\cancel{r} = r+s+t$

Quindi

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Dimostriamo che $\mathcal{B}$ è base di $U+W$

$U = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s)$

$W = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_t)$

Siano $u \in U, w \in W$

$$u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{s} \partial_i u_i \qquad w = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i v_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i w_i$$

$$\Rightarrow u+w = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i + \gamma_i) v_i + \sum_{i=1}^{s} \partial_i u_i + \sum_{i=1}^{t} \beta_i w_i$$

Quindi $\mathcal{B}$ genera $U+W$

I vettori di $\mathcal{B}$ sono lin. indipendenti?

Supponiamo

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \partial_1 u_1 + \dots + \partial_s u_s + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_t w_t = \vec{0}$$

Allora

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \partial_1 u_1 + \dots + \partial_s u_s}_{\in U} = \underbrace{-\beta_1 w_1 - \dots - \beta_t w_t}_{\in W}$$

Chiamo v questo vettore: $v \in U \cap W$

Basta dimostrare che $v = \vec{0}$ perché allora $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \partial_1 = \dots = \partial_s = \beta_1 = \dots = \beta_t = 0$

Poiché $v \in U \cap W$, posso scrivere $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r$ in quanto $\{v_1, \ldots, v_r\}$ è base di $U \cap W$ ma $v = -\beta_1 w_1 - \ldots - \beta_t w_t$ quindi

$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r = -\beta_1 w_1 - \ldots - \beta_t w_t$

$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_t w_t = \vec{0}$

e infine $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \beta_1 = \ldots = \beta_t = 0$

poiché $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_t$ sono lin. indipendenti

Quindi $v = \vec{0}$ e $\mathcal{B}$ è base di $U+W$

Caso particolare

Supponiamo $U \cap W = \{\vec{0}\}$ allora $\dim U \cap W$ e

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W$$

Definizione

Due sottospazi U e W di V si dicono in somma diretta se $U \cap W = \{\vec{0}\}$

Si scrive $U+W = U \oplus W$

Perciò $U \oplus W$ vuol di $U+W$ con $U \cap W = \{\vec{0}\}$

Teorema

Un vettore di $U \oplus W$ si scrive in modo unico nella forma $u+w$ con $u \in U$, $w \in W$

Dimostrazione

Supponiamo $v = u_1 + w_1$ e di avere $v = u_1 + w_1$, $v = u_2 + w_2$

$u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$

Da $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ segue $\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$ quindi

$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{\vec{0}\}$. Perciò $u_1 - u_2 = \vec{0}$, $w_2 - w_1 = \vec{0}$ e infine

$u_2 = u_1$, $w_2 = w_1$ e la scrittura è unica

Esempio

$V = \mathbb{R}^3$ $\quad U = \mathcal{L}(e_1)$ $\quad W = \mathcal{L}(e_2)$

Allora $U \cap W = \{\vec{0}\}$, quindi $U+W = U \oplus W$

Esempio

$V = \mathbb{R}^3$ $\quad U = \mathcal{L}(e_1, e_2)$ $\quad W = \mathcal{L}(e_3, e_4)$

Allora $U \cap W = \{\vec{0}\}$, quindi $U+W = U \oplus W$

Funzioni lineari

Definizione

Siano V, W spazi vettoriali sul campo K

$f: V \to W$ si dice lineare se:

1- $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

2- $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall v \in V \quad \lambda \in K$

1+2 equivalgono a

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in V \quad \lambda_1, \lambda_2 \in K$$

Inoltre se f è lineare allora

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \quad \forall v_1, \dots, v_n \in V \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

Esempio

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2) \longmapsto 2x_1 + 3x_2$

è lineare

Dimostrazione

Siano $v, w \in \mathbb{R}^2$ devo dimostrare che

$f(v+w) = f(v) + f(w)$

$v = (x_1, x_2) \qquad w = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$v+w = (x_1+y_1, x_2+y_2)$

$$\begin{aligned} f(v+w) &= 2(x_1+y_1) + 3(x_2+y_2) = \\ &= 2x_1 + 2y_1 + 3x_2 + 3y_2 = \\ &= \underbrace{2x_1 + 3x_2}_{f(v)} + \underbrace{2y_1 + 3y_2}_{f(w)} = f(v) + f(w) \end{aligned}$$

$v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda v = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

$$f(\lambda v) = 2\lambda x_1 + 3\lambda x_2 = 2\,\underbrace{(2x_1 + 3x_2)}_{f(v)} = \lambda f(v)$$

Quindi f è lineare

In generale, se $a_1, \dots, a_n \in K$, K campo

$$f: K^n \to K$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

è lineare.

In generale se V è spazio vettoriale su K e se $f_1, \dots, f_r: V \to K$ sono lineari posso costruire

$$f: V \to K^r$$
$$v \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \vdots \\ f_r(v) \end{pmatrix}$$

f è lineare

Dimostrazione

Siano $v, w \in V$. Allora

$$f(v+w) = \begin{pmatrix} f_1(v+w) \\ \vdots \\ f_r(v+w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(v) + f_1(w) \\ \vdots \\ f_r(v) + f_r(w) \end{pmatrix}$$ (perché $f_1, \dots, f_r$ sono lineari)

$$= \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \vdots \\ f_r(v) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(w) \\ \vdots \\ f_r(w) \end{pmatrix}$$

$$= f(v) + f(w)$$

Siano $v \in V$, $\lambda \in K$

$$f(\lambda v) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda v) \\ \vdots \\ f_r(\lambda v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda f_1(v) \\ \vdots \\ \lambda f_r(v) \end{pmatrix}$$ perché $f_1, \dots, f_r$ sono lineari

$$= \lambda \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \vdots \\ f_r(v) \end{pmatrix} = \lambda f(v)$$

Quindi f è lineare

Esempio

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$$

è lineare (tutte le componenti sono lineari)

Osservazione

Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare

Allora $f(\vec{0}) = \vec{0}$

(dovrei scrivere $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$)

Dimostrazione

Sia $w = f(\vec{0})$. Da $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$ segue $f(\vec{0}) = f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$

f lineare

quindi $w = w + w$. Ma w ha opposto pertanto $w = \vec{0}$ (sottraggo w a destra e a sinistra). Quindi $f(\vec{0}) = \vec{0}$

Esempio

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_3 + 5 \\ 2x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

f è lineare?

No perché

$$f(\vec{0}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Esempio

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 x_2$

è lineare ?

Soluzione

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad f(\lambda v) = f\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} = \lambda^2 ab$

$\lambda f(v) = \lambda f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda ab$

Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$

$f(v) = 1 \quad f(\lambda v) = 2^2 = 4$

$\lambda f(v) = 2 \cdot 1 = 2$, quindi

$f(\lambda v) \neq \lambda f(v)$: f non è lineare

Terminologia

Funzione lineare = omomorfismo

Funzione lineare biettiva = isomorfismo

Sia $f: V \to W$ isomorfismo

f biettiva $\iff$ f invertibile

esiste $f^{-1}: W \to V$ (l'inversa di f)

f^{-1} è lineare

Sia V spazio vettoriale su K, $\dim V = n$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V

Sia $v \in V$, v si scrive in modo unico come $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Posso definire una applicazione

$f: V \to K^n$

$v \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

f è biettiva (basta dimostrare che f è invertibile: la sua inversa manda $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ in $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$)

f è lineare, quindi f è isomorfismo

Teorema

Tutti gli spazi vettoriali nel campo K di dimensione n sono isomorfi a K^n

L'isomorfismo dipende dalla scelta di una base V.

Esempio

$V = \mathbb{R}_3[x]$ polinomi di grado ≤ 3 su $\mathbb{R}$

$\dim V = 4$ ($V = \{1, x, x^2, x^3\}$ è base di V)

Quindi $V \cong \mathbb{R}^4$ ($\cong$ vuol dire isomorfo)

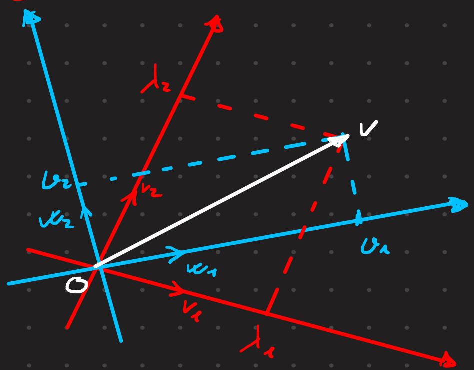
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \longmapsto (a_0, a_1, a_2, a_3))$

$V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ $\dim V = 4$ $V \cong \mathbb{R}^4$

Esempio

Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ $\quad \dim V = 2$

Siano $\mathcal{V}=\{v_1,v_2\}$, $\mathcal{B}=\{w_1,w_2\}$ basi di V



$v \in V$

$v \longleftrightarrow (\lambda_1,\lambda_2)$ coordinate di v nel sistema di riferimento

$v \longleftrightarrow (\omega_1,\omega_2)$ coordinate di v nel sistema di riferimento

Esercizio

$\mathbb{R}^2$ con basi $\mathcal{E}=\{e_1,e_2\}$ base canonica

$\mathcal{B}=\{v_1,v_2\}$ $\quad v_1=\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}$ $\quad v_2=\left\{\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right\}$

($\mathcal{B}$ è base perché v_1,v_2 sono lin. indipendenti in quanto non sono multiplo dell'altro)

$v=\left\{\begin{matrix}6\\2\end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}^2$. Quali sono le coordinate di v rispetto $\mathcal{E},\mathcal{B}$?

Soluzione

$e_1=\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}$ $\quad e_2=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\}$

$v = a_1e_1 + a_2e_2 \qquad \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ $\qquad$ Quindi $a_1=6$, $a_2=2$

$\mathcal{B}=\{v_1,v_2\} \qquad v=\beta_1v_1+\beta_2v_2$

$$\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1+\beta_2\\\beta_1-\beta_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2=6\\\beta_1-\beta_2=2\end{cases}$$

$2\beta_1 = 8 \qquad \beta_1 = 4$

$\beta_2 = 6-\beta_1 = 6-4=2$

Quindi $\beta_1=4$, $\beta_2=2$

v ha coordinate $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ rispetto ad $\mathcal{E}$

v ha coordinate $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_{\mathcal{E}}} \mathbb{R}^2$ $\qquad f_{\mathcal{E}}$ = coordinate rispetto ad $\mathcal{E}$

$f_{\mathcal{E}}(v) = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ era $v = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_{\mathcal{B}}} \mathbb{R}^2$ $\qquad f_{\mathcal{B}}$ = coordinate rispetto a $\mathcal{B}$

In generale sia $w = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

voglio $f_{\mathcal{E}}(w)$ ed $f_{\mathcal{B}}(w)$

$$w = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}$$

Quindi $\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = x_2$:

$$f_{\mathcal{E}}(w) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$f_{\mathcal{B}}(w) = ?$ $\qquad w = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1+\beta_2\\\beta_1-\beta_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2 = x_1\\ \beta_1-\beta_2 = x_2\end{cases}$$ (nelle incognite β_1 e β_2)

$2\beta_1 = x_1 + x_2 \qquad \beta_1 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$

$$\beta_2 = x_1 - \beta_1 = x_1 - \frac{1}{2}(x_1+x_2) = x_1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

$$f_{\mathcal{B}}(w) = f_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\end{pmatrix}$$

Definizione

Siano V, W spazi vettoriali sul campo K.

Sia $f: V \to W$ una funzione lineare

Poniamo nucleo di f

$$\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\} \subseteq V$$

(kernel)

immagine di f

$$\mathrm{Im}(f) = \{w \in W \mid \text{esiste } v \in V \text{ t.c. } f(v) = w\} \subseteq W$$

Teorema

Sia $f: V \to W$ lineare

1- $\operatorname{Ker} f$ è sottospazio vettoriale di V

2- $\operatorname{Im} f$ è sottospazio vettoriale di W

Dimostrazione

① So che $f(\vec{0}) = \vec{0}$ Quindi $\vec{0} \in \operatorname{Ker} f$

$v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} f \overset{?}{\Longrightarrow} v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} f$

$v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(v_1) = \vec{0}, \ f(v_2) = \vec{0}$

$f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

f lineare

quindi $v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} f$

$v \in \operatorname{ker} f \quad \lambda \in K \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda v \in \operatorname{Ker} f$

$v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(v) = \vec{0}$

$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

f è lineare

Pertanto $\operatorname{Ker} f$ è sottospazio di V $(\operatorname{Ker} f \leqslant V)$

② So che $f(\vec{0}) = \vec{0}$ quindi $\vec{0} \in \operatorname{Im} f$

$w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f \overset{?}{\Longrightarrow} w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} f$

$w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f \Rightarrow$ esistono $v_1, v_2 \in V$ t.c.

$f(v_1) = w_1, \ f(v_2) = w_2$. Poniamo $v_3 = v_1 + v_2$

$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) = f(v_3)$

f è lineare

quindi $w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} f$

$w \in \operatorname{Im} f \quad \lambda \in K \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda w \in \operatorname{Im} f$

$w \in \operatorname{Im} f \Rightarrow$ esiste $v \in V$ t.c. $f(v) = w$

$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda w$ quindi $\lambda w \in \operatorname{Im} f$

Quindi $\operatorname{Im} f$ è sottospazio di W
$(\operatorname{Im} f \leqslant W)$

Esempio

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto 2x_1 - 3x_2 + 8x_3$$

f è lineare

Sia $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 0 \right\}$

Dimostrare che U è sottospazio di $\mathbb{R}^3$

Soluzione

1° metodo: verificare direttamente

- U non vuoto $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \right)$
- U chiuso per la somma
- U chiuso per il prodotto tra scalari

2° metodo: osservo che

$$U = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = 0 \} = \operatorname{Ker} f$$

Ma in generale se f è lineare, $\operatorname{Ker} f$ è sottospazio (vettoriale).
Quindi è sottospazio di $\mathbb{R}^3$

Teorema

Sia $f: V \to W$ una funzione lineare.
Allora f è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} f = \{ \vec{0} \}$

Dimostrazione

Supponiamo f iniettiva.
Ricordo che iniettiva vuol dire $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$
So che f lineare $\Rightarrow f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
Sia $v \in V$ t.c. $f(v) = \vec{0}_W$. Allora $f(v) = f(\vec{0})$, quindi $v = \vec{0}$ perché f è iniettiva. Quindi $\operatorname{Ker} f = \{ \vec{0}_V \}$. Viceversa supponiamo $\operatorname{Ker} f = \{ \vec{0}_V \}$.
Siano $v_1, v_2 \in V$ t.c. $f(v_1) = f(v_2)$. Devo dim. che $v_1 = v_2$

$f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = \vec{0} \Rightarrow f(v_1 - v_2) = \vec{0}_W \Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow v_1 - v_2 = \vec{0}_V \Rightarrow v_1 = v_2$. Quindi f è iniettiva

Ricordo che $f: V \to W$ è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im} f = W$

Osservazione

In generale una funzione lineare non manda vettori lin. indipendenti in vettori lin. indipendenti

Esempi

$V = K^n \quad n \geq 1$

$f: K^n \to K \qquad v \longmapsto 0$

la funzione costante 0 (funzione nulla)

$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in K^n \quad \{e_1\}$ lin. indipendente

$\{e_1\} \xrightarrow{f} \{0\}$ che non è lin. indipendente

Esempio 2

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

f è lineare $\quad \{e_1, e_2\}$ è lin. indipendente

$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$

$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1$

$\underbrace{\{e_1, e_2\}}_{\text{lin. indipendente}} \xrightarrow{f} \underbrace{\{e_1, 2e_1\}}_{\text{lin. dipendente}}$

Osservazione

Sia $f: V \to W$ lineare, $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori di V (in particolare $\{v_1, \dots, v_n\}$ può essere una base di V)

Allora $\{w_1 = f(v_1), \dots, w_n = f(v_n)\}$ è un insieme di generatori di Im di f

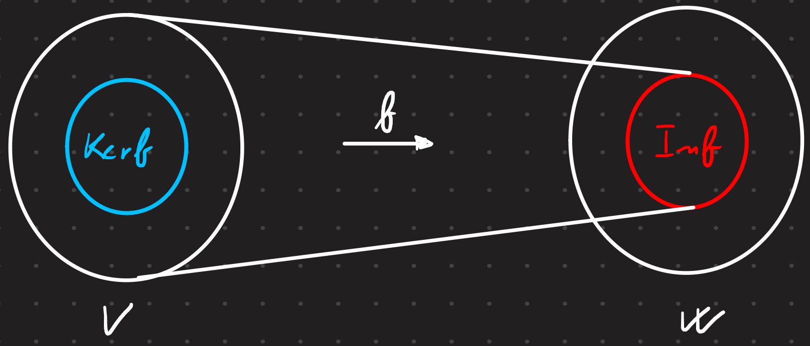
Dimostrazione

Sia $w \in \mathrm{Im} f$. Esiste $v \in V$ t.c. $f(v) = w$. Esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Allora

$w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$

$= \lambda_1 \underbrace{f(v_1)}_{w_1} + \dots + \lambda_n \underbrace{f(v_n)}_{w_n}$

$w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ e $w_1, \dots, w_n$ generano $\mathrm{Im}\, f$



In generale non è vero che se $f: V \to W$ è lineare e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V allora $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è base di $\mathrm{Im}\, f$

Esempio

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

f è lineare

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

$w_1 = f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$w_2 = f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\{w_1, w_2\}$ genera $\mathrm{Im}\, f$

$\mathrm{Im}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

w_1, w_2 non sono lin. indipendenti

$w_2 = -w_1 \qquad w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

Una base di $\mathrm{Im}\, f$ è $\{w_1\}$ (oppure $\{w_2\}$)

Teorema

Sia $f: V \to W$. Allora $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$

Dimostrazione

Sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base di $\mathrm{Ker}\, f$ quindi $\dim \mathrm{Ker}\, f = r$

Completo ad una base di V: $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots v_{r+s}\}$ base di V

$\dim V = r + s$

$$\begin{array}{ccccccc} v_1, & v_2, & \dots, & v_r, & v_{r+1}, & \dots, & v_{r+s} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ f(v_1) & f(v_2) & & f(v_r) & f(v_{r+1}) & & f(v_{r+s}) \\ \parallel & \parallel & & \parallel & \parallel & & \parallel \\ \vec{0} & \vec{0} & & \vec{0} & \vec{0} & & \vec{0} \end{array}$$

Im f è generato da $\{w_1, \dots, w_s\}$

Dimostro che $w_1, \dots, w_s$ sono lin indipendenti

$\lambda w_1 + \dots + \lambda_s w_s = \vec{0}$

$\lambda_1 f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_s (v_{r+s}) = \vec{0}$

$\parallel$ f lineare

$f(\lambda_1 v_{r+1} + \dots + \lambda_s v_{r+s}) = \vec{0}$

quindi $\lambda_1 v_{r+1} + \dots + \lambda_s v_{r+s} \in \operatorname{Ker} f$

$\{v_1, \dots, v_r\}$ è base di Ker f quindi

$$\lambda_1 v_{r+1} + \dots + \lambda_s v_{r+s} = \partial_1 v_1 + \dots \partial_r v_r$$

$$-\partial_1 v_1 - \partial_2 v_2 - \dots - \partial_r v_r + \lambda_1 v_{r+1} + \dots + \lambda_s v_{r+s} = \vec{0}$$

ma $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}\}$ è base di V

quindi $\partial_1 = \dots = \partial_r = 0$ $\quad \lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$

ossia $w_1, \dots, w_s$ sono lin. indipendenti

Pertanto $\{w_1, \dots, w_s\}$ è base di Im f

In particolare $\dim \operatorname{Im} f = s$ e $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{= r} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{= s} = \underbrace{\dim V}_{= r+s}$

Definizione

Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare:

la nullità di f è $\dim \operatorname{Ker} f$

il rango di f è $\dim \operatorname{Im} f$

Quindi

$$\operatorname{null}(f) + \operatorname{rango}(f) = \dim V$$

Esempio

Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 \end{pmatrix} = f(v)$$

f è lineare

1. Dim e base di $\ker f$ $\to$ null(f)

2. Dim e base di $\operatorname{Im} f$ $\to$ rango(f)

Soluzione 2

$\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$\operatorname{Im} f \leq \mathbb{R}^2$, in particolare $\dim \operatorname{Im} f \leqslant 2$.

Di sicuro $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sono lin. dipendenti

Se due tra $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sono lin. indipendenti, allora costituiscono una base di $\operatorname{Im} f$

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$f(e_1), f(e_3)$ sono lin. indipendenti, infatti

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(e_1), f(e_2)$ sono lin. indipendenti

$\{f(e_1), f(e_3)\} = \left\{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ è base di $\operatorname{Im} f$

In particolare $\dim \operatorname{Im} f = 2$

Poiché $\operatorname{Im} f \leqslant \mathbb{R}^2$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$, si ha $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$

(f è suriettiva)

Soluzione 1

So che $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$

$$\underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim \operatorname{Im} f} \qquad \underset{\substack{\| \\ 3}}{\dim \mathbb{R}^3}$$

quindi $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$

Per trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ basta trovare $v \in \operatorname{Ker} f$ $v \neq \vec{0}$, ossia $v \in \mathbb{R}^3$ t.c. $f(v) = \vec{0}$ $v \neq \vec{0}$

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $f(v) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vuol dire

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

sommo $x_1 + 3x_2 = 0$, $x_1 = -3x_2$

dalla 2^a $x_3 = -2x_1 + 6x_2$

$$= 6x_2 + 6x_2 = 10x_2$$

$x_2 \in \mathbb{R}$ varia liberamente, pongo $x_2 = \lambda$ a parametro

$$\begin{cases} x_1 = -3\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 10\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -3\lambda \\ \lambda \\ 10\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Per $\lambda = 1$, trovo $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$

$v \neq \vec{0}$, $\{v\}$ è base di $\operatorname{Ker} f$

Funzioni lineari e basi

Teorema

Sia $f: V \longrightarrow W$ una funzione lineare, $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.
Allora f è univocamente determinata dalla conoscenza di $f(v_1), \dots, f(v_n)$

Dimostrazione

Sia $v \in V$. Chi è $f(v)$?
Esistono unici $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ t.c.

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

f lineare $\Rightarrow f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$

Se conosco $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ posso calcolare $f(v)$ per ogni $v \in V$

Teorema

Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base dello spazio vettoriale V. Siano $w_1, \ldots, w_n$ arbitrari vettori dello spazio vettoriale W (V, W sul campo K).
Allora esiste un'unica funzione lineare $f: V \to W$ t.c.
$f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_n) = w_n$

Dimostrazione

Devo definire $f: V \longrightarrow W$ che soddisfi le condizioni richieste.
Pongo $f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_n) = w_n$ ed estendo per linearità a tutto V
Cosa vuol dire? Sia $v \in V$. Esistono unici $a_1, \ldots, a_n \in K$ t.c.
$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$. Pongo $f(v) \overset{def}{=} a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n$
Si dimostra che $f: V \longrightarrow W$ è lineare, e soddisfa $f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_n) = w_n$
Inoltre f è unica (con questa proprietà) per il teorema precedente.

Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare
Fisso

$\underline{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V $\quad \dim V = n$
$\underline{w} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ base di W $\quad \dim W = m$

Sarà $f(v_1) \in W \quad f(v_1) = a_1 w_1 + \ldots + a_m v_m$
$\qquad\qquad\qquad\qquad f(v_2) = b_1 w_1 + \ldots + b_m w_m$

Conviene usare una notazione più comoda

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \ldots + a_{mj} w_m$$

$$f(v_1) = a_{11} w_1 + \ldots + a_{m1} w_m$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = a_{1n} w_1 + \ldots + a_{mn} v_m$$

Posso mettere tutti i coefficienti in una tabella

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è una matrice $m \times n$ (m righe, n colonne) a coefficienti in K.

Si scrive anche

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad (m = \dim W, \; n = \dim V)$$

N.B.

La j-sima colonna è costituita dalle coordinate di $f(v_j)$ rispetto alla base $\underline{w}$

Conclusione

Ad una funzione lineare $f: V \to W$ si può associare una matrice A, che dipende dalle basi $\underline{v}$ di V, $\underline{w}$ di W

$$A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$$

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\overset{!}{=} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Esempio

$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

f è lineare

$\underline{v}$ = base canonica di $\mathbb{R}^4$

$\overset{!}{=} \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$\underline{w}$ = base canonica di $\mathbb{R}^2$

$\overset{!}{=} \{f_1, f_2\}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) = ?$$

$$f(e_1)=f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{\underline{w}}=f_1+0\cdot f_2$$

$$f(e_1)=f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=-2\cdot f_1+0\cdot f_2$$

$$f(e_1)=f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0\cdot f_1+1\cdot f_2$$

$$f(e_1)=f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0\cdot f_1+1\cdot f_2$$

$$A=M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

- Supponiamo $f,g:V\to W$ lineari

$f+g$ è definita mediante

$$f+g:V\to W$$
$$v\mapsto f(v)+g(v)$$

$f+g$ è lineare

- Sia $\lambda\in K$. Si definisce

$$\lambda f:V\to W$$
$$v\mapsto \lambda f(v)$$

λf è lineare

- L'insieme $Hom(V,W)$ delle funzioni lineari $f:V\to W$ diventa uno spazio vettoriale su K

In termini di matrici?

$\underline{v}=\{v_1,\dots,v_n\}$ base di V $\quad\dim V=n$

$\underline{w}=\{w_1,\dots,w_m\}$ base di W $\quad\dim W=m$

$f,g:V\to W$ lineari

$$A=(a_{ij})=M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$$
$$B=(b_{ij})=M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(g)$$

Chi è $M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f+g)$?

$$(f+g)(v_j)=f(v_j)+g(v_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}w_i+\sum_{i=1}^{m}b_{ij}w_i$$
$$=\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})\,w_i$$

Si definisce la somma di due matrici $m \times n$ $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ mediante $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 11 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Quindi
$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f+g) = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) + M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(g)$$

$f,g : V \to W$ lineari

Sia $\lambda \in K$. Chi è $M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\lambda f)$?

$(\lambda f)(v_j) = \lambda f(v_j) = \lambda \sum_i a_{ij} w_i = \sum_i \lambda a_{ij} w_i$

Se $\lambda \in K$, $A=(a_{ij})$ si definisce λA mediante $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

prodotto di una matrice per uno scalare

Esempio

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Quindi
$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\lambda f) = \lambda M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$$

L'insieme $M_{m,n}(K)$ delle matrici $m \times n$ a coeff. in K è spazio vettoriale su K.

Inoltre si ha, se $f,g : V \to W$ sono funzioni lineari, $\underline{v}$ base di V, $\underline{w}$ base di W

$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f+g) = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) + M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(g)$$

$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\lambda f) = \lambda M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$$

per ogni $\lambda \in K$

- L'elemento neutro per la somma di $M_{m,n}(K)$ è la matrice nulla che ha tutte le entrate a_{ij} uguali a 0

- Una base di $M_{m,n}(K)$ è costituita dalle matrici $\{E_{h,k} \mid h=1,\dots,m \quad k=1,\dots,n\}$

$E_{h,k}$ ha tutte le entrate nulle, tranne nel posto (h,k) dove c'è 1

Esempio

In $M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \quad (= M_{2,3}(\mathbb{R}))$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare $\dim M_{m\times n}(K) = mn$

Composizione di funzioni

Siano V, W, Z spazi vettoriali su K

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & W \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Supponiamo f, g lineari

$(g\circ f)(v) \overset{def}{=} g(f(v)) \qquad v \in V$

$g\circ f$ è lineare

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V \qquad \dim V = n$

$\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di $W \qquad \dim W = m$

$\underline{z} = \{z_1, \dots, z_r\}$ base di $Z \qquad \dim Z = r$

$A = (a_{ij}) = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) \in M_{m,n}(K)$

$B = (b_{hi}) = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(g) \in M_{r,m}(K)$

$C = (c_{hj}) = M^{\underline{z}}_{\underline{v}}(g\circ f) \in M_{r,n}(K)$

Cerco una relazione tra A, B, C

$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad g(w_i) = \sum_{h=1}^{r} b_{hi} z_h$

$(g\circ f)(v_j) = \sum_{h=1}^{r} c_{hj} z_h \qquad$ Ma $(g\circ f)(v_j) = g(f(v_j))$

$g(f(v_j)) = g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) = \leftarrow$ g lineare

$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, g(w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{h=1}^{r} b_{hi} z_h\right) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ h=1,\dots,r}} a_{ij} b_{hi} z_h =$

$= \sum_{h=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{hi} a_{ij}\right) z_h$

Ma era $(g\circ f)(v_j) = \sum_{h=1}^{r} c_{hj} z_h$

Quindi $c_{hj} = \sum_{i=1}^{m} b_{hi} a_{ij}$

La matrice $C = (c_{hj})$ si ottiene dalle matrici B ed A tramite la formula

$$c_{hj} = \sum_{i=1}^{m} b_{hi}\, a_{ij}$$

Questo per definizione è il prodotto di matrici

$$\begin{array}{ccccc} C & = & B & \cdot & A \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ g\circ f & & g & & f \end{array}$$

$$M^{\underline{z}}_{\underline{v}}(g\circ f) = M^{\underline{z}}_{\underline{w}}(g) \cdot M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$$

Il prodotto di matrici corrisponde alla composizione di funzioni lineari

Esempio

V, W spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$\dim V = 3 \qquad \dim W = 2$

$f : V \longrightarrow W$ lineare

$\underline{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di V

$\underline{w} = \{w_1, w_2\}$ base di W

Supponiamo

$$f(v_1) = 3w_1 - 2w_2$$
$$f(v_2) = w_1 + 5w_2$$
$$f(v_3) = -6w_1 - 7w_2$$

$A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) = ?$

Le colonne di A sono costituite dalle coordinate di $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ rispetto a $\underline{w}$. Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -2 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

Date due matrici

$$A \in M_{m,n}(K) \qquad B \in M_{n,r}(K)$$

il loro prodotto è la matrice

$$AB = C = (c_{ij}) \in M_{m,r}(K)$$

dove

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}\, b_{hj} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, r \end{array}$$

A ha n colonne

B ha n righe

$$\underset{\text{riga } i \quad \text{colonna } j}{(c_{ij})} = \overset{\text{riga } i}{\underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}}_{A}} \; \overset{\text{colonna } j}{\underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}_{B}}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

Esempio

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 2 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 5 + 0\cdot(-2) \\ 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 3\cdot 2 & 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 5 + 3\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -17 \end{pmatrix} \qquad \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Esempio: Prodotto matrice per vettore (colonna)

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 4\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad (\text{è } 2\times 1)$$

Esempio: Prodotto vettore (riga) per matrice

$$\underset{1\times 4}{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad (\text{è } 1\times 2)$$

Osservazione

Per matrici quadrate di ordine n (n righe, n colonne) il prodotto é sempre definito

$$M_n(K) = M_{n,n}(K) = M_{n\times n}(K)$$

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$A, B \in M_2(\mathbb{R})$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \neq \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esistono matrici quadrate non nulle A per cui $A^K = 0$ per un certo K (elementi nilpotenti)

In particolare esistono matrici non nulle A, B per cui $AB = 0$ (divisori di zero)

Proprietà

Siano $A, B, C \in M_n(K)$, $\lambda \in K$

1 - In generale $AB \neq BA$

2 - $(AB)C = A(BC)$ associativa

3 - $(A+B)C = AC + BC \qquad C(A+B) = CA + CB$

4 - $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

5 - Esiste elemento neutro per il prodotto

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AI_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

$$I_2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} = A$$

$AI_2 = I_2 A = A$ $\quad$ I_2 è l'elemento neutro per il prodotto (in $M_2(K)$)

In generale

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

è l'elemento neutro per il prodotto in $M_n(K)$

Esempio

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$

in generale non è vero che

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(vale se e solo se $AB = BA$)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\in M_2(\mathbb{R})$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AB \neq BA$

$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (A+B)^2$

Trasposizione

$A \in M_{m,n}(K)$ (m righe, n colonne)

La trasposta di A è la matrice che nel posto (i,j) ha entrata a_{ij} (indici invertiti)

Se $A = (a_{ij})$, la trasposta di A

...

Si scrive anche ${}^tA = A^t = A_t$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,2}(\mathbb{R})$$

- Proprietà

1- ${}^t({}^tA) = A$

2- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

3- ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ (inverto le posizioni)

V, W spazi vettoriali su k, $f: V \to W$ lineare

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

$v \in V$. Allora

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Avendo fissato la base di $\underline{v}$ di V abbiamo l'isomorfismo tra V e K^n

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$$

. Dovrei scrivere

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}$$

per indicare che queste sono le componenti rispetto alla base $\underline{v}$

$v \in W$ allora

$$w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n = \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i$$

Ho un isomorfismo tra W e K^m

$$w \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in K^n$$

$$w \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}^{\underline{w}}$$

Sia $A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$, $A = (a_{ij})$

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "iso"'] & W \arrow[d, "iso"] \\ K^n & K^m \end{tikzcd}$$

$v \in V \qquad v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j, \qquad w = f(v)$

$$w = \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i$$

f lineare

$$w = f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i =$$

$$= \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}} a_{ij} \lambda_j w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j\right) w_i \quad \text{ma era}$$

$w = \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i$ quindi

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Formula per ottenere le coordinate di $f(v)$ dalle coordinate di v

In realtà dobbiamo tener conto delle basi scelte

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}$$

Posso chiudere il diagramma di prima

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "iso"'] & W \arrow[d, "iso"] \\ K^n \arrow[r, "L_A"] & K^m \end{tikzcd}$$

$L_A : K^n \longrightarrow K^m$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$L_A =$ moltiplicazione per A

L_A è lineare: dati $v, v_1, v_2 \in K^n$ $\quad \lambda \in K$

$L_A(v_1+v_2) = A(v_1+v_2) = Av_1 + Av_2 =$

$= L_A(v_1) + L_A(v_2)$

$L_A(\lambda v) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda L_A(v)$

quindi L_A è lineare

$(M_n(K), +, 0, \cdot, I_n)$ è un anello con unità

Esempio

$f: V \to W$ lineare $\quad V, W$ spazi vettoriali su $\mathbb{R}$

$\underline{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di V

$\underline{w} = \{w_1, w_2\}$ base di W

$f(v_1) = 2w_1 + w_2 \qquad f(v_2) = -w_1 + w_2 \qquad f(v_3) = 3w_1 + 2w_2$

Sia $v = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3$

Calcolare $f(v)$

Soluzione

Un modo è scrivere

$f(v) = f(2v_1 - 3v_2 + 4v_3) \overset{f \text{ lineare}}{=}$

$\overset{!}{=} 2f(v_1) - 3f(v_2) + 4f(v_3)$

$\overset{!}{=} 2(2w_1 + w_2) - 3(-w_1 + w_2) + 4(3w_1 + 2w_2)$

$\stackrel{!}{=} 6w_1 + 2w_2 + 3w_1 - 3w_2 + 12w_1 + 8w_2$

$= 19w_1 + 7w_2$

Alternativa: chi è $A = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$?

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$v = 2v_1 - 3v_2 + 6v_3$, v ha coordinate (rispetto $\underline{v}$) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Le coordinate di $f(v)$ (rispetto $\underline{w}$) sono

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3+12 \\ 2-3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

sono le coordinate di $f(v)$ (rispetto $\underline{w}$):

vuol dire $f(v) = 19w_1 + 7w_2$

Calcolo di $\operatorname{Im} f$

V, W sono spazi vettoriali su K, $f: V \to W$ lineare

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V $\dim V = n$

$\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W $\dim W = m$

$\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$ poiché $v_1, \dots, v_n$ generano V

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$$

$$A = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial_{\underline{v}} = \text{iso}"'] & W \arrow[d, "\text{iso} = B_{\underline{w}}"] \\ K^n \arrow[r, "L_A"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$\updownarrow$

$f(v_j)$

$$L_A : x \longmapsto Ax$$

Le coordinate di $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono le colonne di A

$\operatorname{Im} f \leq W$; $\operatorname{Im} f$ corrisponde tramite $B_{\underline{w}}$ al sottospazio K^m generato dalle colonne di A:

$A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ $C_1, \dots, C_n$ le colonne di A

$C_j \in K^m$, $j = 1, \dots, n$

$$< f(v_1), \dots, f(v_m) > = \operatorname{Im} f \leq W$$

$$\updownarrow B_w$$

$$< C_1, \dots, C_n > \leq K^m$$

Ricordo che rango $f = \dim \operatorname{Im} f$

Definiamo il rango di una matrice

Definizione

Il rango di una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ (m righe, n colonne quindi ogni colonna è elemento di K^m) è la dimensione del sottospazio di K^n generato dalle colonne di A (è $\dim < C_1, \dots, C_n >$) o, in modo equivalente, il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A

Se A rappresenta $f : V \longrightarrow W$ lineare rispetto a $\underline{v}$ base di V, $\underline{w}$ base di W allora rango f = rango A

Se $A \in M_{m,n}(K)$ allora rango $A \leq m$

perché $\dim K^m = m$ e $< C_1, \dots, C_n > \leq K^m$

(quindi rango $A = \dim < C_1, \dots, C_n > \leq m$)

Ma anche rango $A \leq n$ in quanto uno spazio vettoriale generato da n vettori ha dimensione al più n.

Quindi rango $A \leq \min \{m, n\}$

Esempio

- $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ rango ≤ 3
- rango $A = 0 \iff A$ è la matrice nulla

Siano $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $f: V \longrightarrow W$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ x + 2z \end{pmatrix} \quad f \text{ lineare}$$

① Determinare la matrice $A = M^{\underline{W}}_{\underline{V}}(f)$

$\underline{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$\underline{W} = \{w_1, w_2\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

Soluzione

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3w_1 + w_2$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2w_1$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = w_1 + 2w_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ matrice di f rispetto alle basi canoniche

non richiesto: rango $A = ?$

$A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ rango $A \leq \min\{2,3\} = 2$

rango $A \leq 2$

Inoltre $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1^a colonna) e $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2^a colonna) sono lin. indipendenti

dato che sono solo due: perché uno non è multiplo dell'altro

Quindi sono una base del sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato dalle colonne di A: rango $A = 2$

② Siano $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\underline{V}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di $\mathbb{R}$ (verificarlo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ $\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Determinare $A' = M^{\underline{W}}_{\underline{V}'}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ x + 2z \end{pmatrix}$$

$$f(v_1') = f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = 5w_1 + 5w_2$$

$$f(v_2') = f\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = -4w_1 + w_2$$

$$f(v_3') = f\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = 5w_1 + 6w_2$$

$$A' = \begin{pmatrix}5 & -4 & 5\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix} \qquad (\text{rango } A' = 2)$$

③ Siano $w_1' = \begin{Bmatrix}2\\3\end{Bmatrix}$ $\quad w_2' = \begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}$

$\underline{w}' = \{w_1, w_2\}$ è base di $\mathbb{R}^2$ (verificare)

Determinare $A'' = M^{\underline{w}'}_{\underline{v}'}(f)$

$\underline{v}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ e conosco $f(v_1')$, $f(v_2')$ e $f(v_3')$

ma devo esprimerli come comb. lineare di w_1', w_2'

$$\lambda_1 w_1' + \lambda_2 w_2' = \lambda_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda_1 - \lambda_2\\ 3\lambda_1 + \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$f(v_1') = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = \lambda_1 w_1' + \lambda w_2' = 2w_1' - w_2'$$

$$\begin{cases}2\lambda_1 - \lambda_2 = 5\\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 5\end{cases} \qquad \lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1$$

$$f(v_2') = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \lambda_1 w_1' + \lambda_2 w_2' = -\frac{3}{5}w_1' + \frac{14}{5}w_2'$$

$$\begin{cases}2\lambda_1 - \lambda_2 = -4\\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 1\end{cases} \qquad \lambda_1 = -\frac{3}{5} \qquad \lambda_2 = \frac{14}{5}$$

$$f(v_2') = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \lambda_1 w_1' + \lambda_2 w_2' = \frac{11}{5}w_1' - \frac{3}{5}w_2'$$

$$\begin{cases}2\lambda_1 - \lambda_2 = 5\\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 6\end{cases} \qquad \lambda_1 = \frac{11}{5} \qquad \lambda_2 = -\frac{3}{5}$$

$$A'' = \begin{pmatrix}2 & -3/5 & 11/5\\ -1 & 14/5 & -3/5\end{pmatrix}$$

Matrice del cambiamento di base

Sia V spazio vettoriale su K

$\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\underline{v}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ basi di V

Sia $v \in V$

$$v = \begin{cases} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \\ \lambda_1' v_1' + \dots + \lambda_n' v_n' \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}$ coordinate di v rispetto alla base $\underline{v}$

$\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}^{\underline{v}'}$ coordinate di v rispetto alla base $\underline{v}'$

Posso esprimere $v_1, \dots, v_n$ rispetto a $\underline{v}'$

$$v_i = p_{1i} v_1' + \dots + p_{ni} v_n' = \sum_{h=1}^{n} p_{hi} v_h' \qquad i = 1, \dots, n$$

Costruisco la matrice quadrata $n \times n$

$$P = (p_{hi})_{\substack{h=1,\dots,n \\ i=1,\dots,n}}$$

$$P = \begin{pmatrix} & p_{1i} & \\ \cdots & p_{2i} & \cdots \\ & \vdots & \\ & p_{ni} & \end{pmatrix}$$

le colonne di P sono le coordinate di $v_1, \dots, v_n$ rispetto alla base $\underline{v}'$

Vediamo come possiamo interpretare P

$id: V \to V \quad v \mapsto v \quad (\forall v \in V)$

è lineare

Sul dominio metto la base $\underline{v}$, sul codominio metto la base $\underline{v}'$

$$\underset{\underline{v}}{V} \xrightarrow{id} \underset{\underline{v}'}{V}$$

Essendo $v_i = \sum_{h=1}^{n} p_{hi} v_h'$ si ha $P = M_{\underline{v}}^{\underline{v}'}(id)$

Scambiando il ruolo $\underline{v}, \underline{v}'$ esprimo $v_1', \dots, v_n'$ rispetto alla base $\underline{v}$

$$v_i' = q_{1i} v_1 + \dots + q_{ni} v_n = \sum_{l=1}^{n} q_{li} v_l \qquad i = 1, \dots, n$$

$$Q = (q_{li})_{\substack{l = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n}}$$

matrice quadrata $n \times n$

$$Q = \begin{array}{c} v_i' \\ \begin{pmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ \vdots \\ q_{ni} \end{pmatrix} \\ \text{colonna } i \end{array}$$

le colonne di Q sono le coordinate di $v_1', \dots, v_n'$ rispetto alla base $\underline{v}$

$$Q = M^{\underline{v}}_{\underline{v}'}(id) \qquad \underset{\underline{v}'}{V} \xrightarrow{id} \underset{\underline{v}}{V}$$

P, Q matrici quadrate di ordine n. Chi sono PQ, QP?

Osservo che $M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(id) = I_n$

$$\underset{\underline{v}}{V} \xrightarrow{id} \underset{\underline{v}}{V} \qquad v_i \longmapsto v_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

In generale se $\underset{\underline{v}}{V} \xrightarrow{f} \underset{\underline{w}}{W} \xrightarrow{g} \underset{\underline{z}}{Z}$

Allora
$$M^{\underline{z}}_{\underline{v}} = (g \circ f) = M^{\underline{z}}_{\underline{w}}(g) \, M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$$

Considero
$$\underset{\underline{v}}{V} \xrightarrow{id} \underset{\underline{v}'}{V} \xrightarrow{id} \underset{\underline{v}}{V}$$

$$M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(id \circ id) = M^{\underline{v}}_{\underline{v}'}(id) \, M^{\underline{v}'}_{\underline{v}}(id)$$

ma $M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(\underbrace{id \circ id}_{= id}) = M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(id) = I_n$

$$I_n = \underbrace{M^{\underline{v}}_{\underline{v}'}(id)}_{= Q} \, \underbrace{M^{\underline{v}'}_{\underline{v}}(id)}_{= P} \qquad QP = I_n$$

Considero
$$\underset{\underline{v}'}{V} \xrightarrow{id} \underset{\underline{v}}{V} \xrightarrow{id} \underset{\underline{v}'}{V} \qquad \text{segue}$$

$$I_n = \underbrace{M^{\underline{v}'}_{\underline{v}}(id)}_{= P} \, \underbrace{M^{\underline{v}}_{\underline{v}'}(id)}_{= Q} \qquad PQ = I_n$$

Quindi

$$QP = I_n = PQ$$

Definizione

Sia $A \in M_n(K)$. A si dice invertibile se esiste $B \in M_n(K)$ t.c.

$$AB = I_n = BA$$

Se B esiste, è unica, e si chiama l'inversa di A: si denota A^{-1}

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K, $\underline{v}, \underline{v}'$ basi di V. La matrice $M_{\underline{v}}^{\underline{v}'}(id)$ si chiama matrice del cambiamento di base

Le matrici del cambiamento di base sono invertibili

$$\left(M_{\underline{v}'}^{\underline{v}}(id)\right)^{-1} = M_{\underline{v}}^{\underline{v}'}(id)$$

(da $PQ = I_n = QP$)

Effetto delle matrici del cambiamento di base sulle coordinate dei vettori

Sia $v \in V$ $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\underline{v}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ basi di V

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\left(\sum_{h=1}^{n} \gamma_{hi} v_h'\right)}_{v_i} = \sum_{i,h} \gamma_{hi} \lambda_i v_h' = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{hi} \lambda_i\right) v_h'$$

Ma era $v = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h' v_h'$ quindi $\lambda_h' = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{hi} \lambda_i \qquad h = 1, \dots, n$

Avevamo $v = \begin{cases} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \\ \lambda_1' v_1' + \dots + \lambda_n' v_n' \end{cases}$

Vuol dire che

$$\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ricordo che $P = M_{\underline{v}}^{\underline{v}'}(id)$ $\quad V_{\underline{v}} \xrightarrow{id} V_{\underline{v}'}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}^{\underline{v}'} = M_{\underline{v}}^{\underline{v}'}(id) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}$$

La matrice $P = M_{\underline{v}}^{\underline{v}'}(id)$ trasforma le coordinate di v rispetto alla base $\underline{v}$ nelle coordinate di v rispetto alla base $\underline{v}'$

Dal resto $\underset{\underline{v}}{V} \xrightarrow{id} V$, $P = M^{\underline{v}'}_{\underline{v}}(id)$

So che se $v = \sum \lambda_i v_i$ allora $f(v) = id(v) = v = \sum \lambda_i' v_i'$ dove

$$\begin{pmatrix}\lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n'\end{pmatrix}^{\underline{v}'} = P \begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}^{\underline{v}}$$

Siano V, W spazio vettoriale su K $\quad f : V \to W$ lineare

$\underline{v}$ base di V, $\underline{w}$ base di W $\quad A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$

$\underline{v}'$ base di V, $\underline{w}'$ base di W $\quad A' = M^{\underline{w}'}_{\underline{v}'}(f)$

Cerchiamo una relazione tra A ed A'

$$\begin{tikzcd}
\underset{\underline{v}'}{V} \arrow[r, "id_V"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \underset{\underline{v}}{V} \arrow[r, "f"] & \underset{\underline{w}}{W} \arrow[r, "id_W"] & \underset{\underline{w}'}{W}
\end{tikzcd}$$