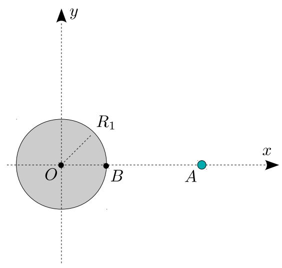
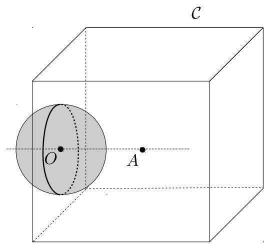
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

a.a. 2020-2021
Elementi di Fisica II: 25 Gennaio 2021
Compito scritto

Problema 1

Si consideri una sfera isolante di raggio $R_1 = 3cm$ e carica uniformemente con densità volumetrica di carica $\rho = 250\mu C/m^3$. Un carica $q = 20nC$ è posta nel punto A a distanza $2d = 10cm$ dal centro O della sfera.





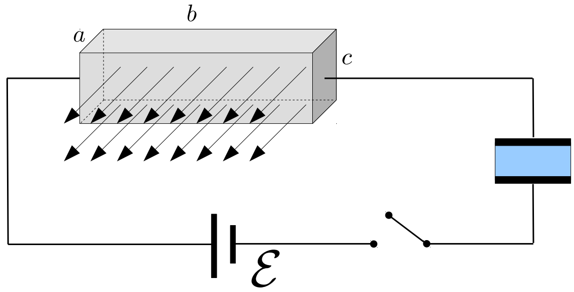
1. Calcolare le componenti del campo elettrico in tutti i punti dell'asse del segmento AO. Quanto vale in modulo in campo nel punto medio M del segmento AO?

1.(bonus) In quali punti il campo è massimo?

2. Si definisca B come il punto del segmento AO sulla superficie della sfera (come in figura). Calcolare la differenza di potenziale $V_O - V_B$.
3. Calcolare il flusso del campo elettrico attraverso una superficie cubica $\mathcal{C}$ di lato $\ell = 4d$. Il centro O della sfera si trova al centro di una faccia della superficie cubica come in figura, mentre il punto A è al centro del cubo.
4. Illustrare e dimostrare il teorema di Gauss.

Problema 2

Si consideri un conduttore di rame a forma di parallelepipedo è immerso in un campo magnetico $B = 3T$. I lati del parallelepipedo, indicati in figura, valgono rispettivamente $a = 100\mu m$, $b = 8cm$ e $c = 1mm$. Il conduttore è collegato ad un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E} = 30mV$ e ad un condensatore piano come in figura. Le armature del condensatore sono di forma circolare (raggio $r = 40cm$) e sono separate da una distanza $d = 1mm$. Lo spazio tra le armature è completamente riempito da un dielettrico di costante dielettrica $k = 5$. Il circuito viene chiuso al tempo $t = 0$. Sapendo che la resistività del rame è $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}\Omega \cdot m$ e la sua densità dei portatori (elettroni) vale $n = 8.46 \cdot 10^{22} cm^{-3}$, calcolare:



1. La costante di tempo del circuito
2. La tensione di Hall sul conduttore parallelepipedo al tempo $t_0 = 0$ e al tempo $t_1 = \tau$.

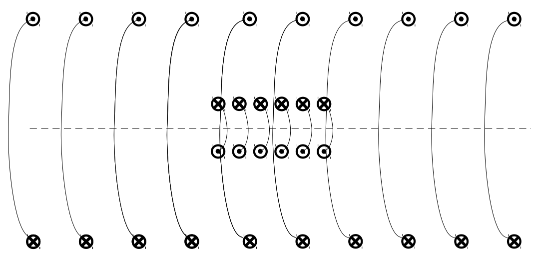
3. Il campo elettrico all'interno del dielettrico al tempo $t_2 = \tau/2$.

4. L'energia dissipata per effetto Joule dal tempo $t_0 = 0$ e al tempo $t_1 = \tau$

5. L'effetto Hall riesce a distinguere il segno dei portatori di carica? motivare la risposta con un esempio.

Problema 3

Due solenoidi sono coassiali come in figura. Il solenoide esterno ha una densità di spire pari a $n_1 = 250 spire/cm$, una lunghezza $\ell_1 = 20cm$ e spire circolari di raggio $R_1 = 3cm$. Il solenoide interno ha una densità di spire pari a $n_2 = 800 spire/cm$, una lunghezza $\ell_2 = 5cm$ e spire circolari di raggio $R_2 = 1cm$. L'interno dei solenoidi è completamente riempito da una sostanza ferromagnetica con permeabilità magnetica relativa $k_m = 50$.
A partire dall'istante $t = 0$ nel solenoide esterno scorre una corrente $i_1(t) = i_0 e^{-t/\tau} \frac{t}{\tau}$, con $i_0 = 5A$ e $\tau = 1ms$.



Sapendo che la resistenza del solenoide interno vale $R = 50\Omega$, calcolare

1. Il coefficiente di mutua induzione tra i due solenoidi.

2. La corrente indotta nel solenoide interno e il suo valore massimo

3. L'energia magnetica di ogni solenoide (si trascuri il contributo dovuto alla mutua induzione) al tempo $t_1 = \tau$

4. La carica circolata nel solenoide interno dal tempo $t_0 = 0$ al tempo $t_1 = \tau$.

5. Definire e spiegare il significato del coefficiente di mutua induzione tra due circuiti.

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. La carica totale presente sulla sfera vale

$$Q = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho \simeq 28.27nC$$

Un punto generico sull'asse del segmento AO ha coordinte $P = (d, y)$. Il campo generato dalla sfera vale

$$\vec{E}_{1P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{y^2+d^2}\left(\frac{d}{\sqrt{y^2+d^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{y^2+d^2}}\vec{j}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{(y^2+d^2)^{3/2}}\left(d\vec{i}+y\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_{2P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y^2+d^2}\left(-\frac{d}{\sqrt{y^2+d^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{y^2+d^2}}\vec{j}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(y^2+d^2)^{3/2}}\left(-d\vec{i}+y\vec{j}\right)$$

Il campo totale vale

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{2P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(y^2+d^2)^{3/2}}\left[d(Q-q)\vec{i} + y(Q+q)\vec{j}\right]$$

Nel punto medio M si ha $y = 0$ per cui

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q-q}{d^2}\vec{i} \simeq 29.772kV/m\,\vec{i}$$

Nel caso "asse del segmento" sia stato interpretato come i punti tra O ed A, in campo varrebbe

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} (\frac{\rho x}{3\epsilon_0} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(2d-x)^2})\vec{i} & 0 \le x \le R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{Q}{x^2} - \frac{q}{(2d-x)^2})\vec{i} & R_1 \le x \le 2d \end{cases}$$

1.(bonus) Il modulo del campo vale

$$|\vec{E}_P| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(y^2+d^2)^{3/2}}\sqrt{d^2(Q-q)^2 + y^2(Q+q)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sqrt{\frac{d^2Q_-^2 + y^2Q_+^2}{(y^2+d^2)^3}}$$

dove è stato definito

$$Q_+ = Q + q \qquad Q_- = Q - q$$

Per trovare il massimo in funzione di y è necessario massimizzare l'argomento della radice

$$f(y) = \frac{d^2Q_-^2 + y^2Q_+^2}{(y^2+d^2)^3}$$

la cui derivata vale

$$f'(y) = 2y\frac{d^2(Q_+^2 - 3Q_-^2) - 2y^2Q_+^2}{(y^2+d^2)^4}$$

e si annulla per

$$y_0 = 0, \qquad y = \pm d\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3Q_-^2}{2Q_+^2}} \simeq \pm 3.38cm$$

Studiando il segno i massimi si trovano a $y_\pm$.

2. Per calcolare la ddp $V_O - V_B$ consideriamo i due contributi, uno della sfera e uno della carica. Per la sfera si ha che il campo elettrico all'interno della sfera vale

$$E_S(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

per cui

$$V_O^{(S)} - V_B^{(S)} = \int_O^B E_S(r)\mathrm{d}r = \int_0^{R_1}\frac{\rho r}{3\epsilon_0}\mathrm{d}r = \frac{\rho R_1^2}{6\epsilon_0} = \frac{Q}{8\pi R_1\epsilon_0} \simeq 4241V$$

Per la carica invece, il potenziale coulombiano vale $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$ da cui

$$V_O^{(q)} - V_B^{(q)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2d} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2d-R_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{2d} - \frac{1}{2d-R_1}) \simeq -771V$$

da cui

$$V_O - V_B = 4241V - 771V \simeq 3470V$$

3. Dal teorema di Gauss, si ha

$$\Phi_{\mathcal{C}}(E) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

La carica interna vale

$$q_{int} = Q/2 + q \simeq 34.13nC$$

da cui

$$\Phi_{\mathcal{C}}(E) \simeq 3860V \cdot m$$

PROBLEMA 2

1. La resistenza del conduttore di rame vale
$$R = \frac{\rho b}{ac} = 13.44 m\Omega$$
La capacità vale
$$C = k\epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \simeq 22.25 nF$$
da cui
$$\tau = RC = 0.299 ns$$

2. La tensione di Hall vale
$$\Delta V_H(t) = \frac{i(t)B}{nea}$$
Siccome la corrente in funzione del tempo vale
$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$
si ha
$$i(t_0) = \frac{\mathcal{E}}{R} \simeq 2.23\, A$$
$$i(t_1) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-1} \simeq 0.821\, A$$
da cui
$$\Delta V_H(t_0) = \frac{i(t_0)B}{nea} \simeq 4.95 \mu V$$
$$\Delta V_H(t_1) = \frac{i(t_1)B}{nea} \simeq 1.82 \mu V$$

3. La tensione ai capi del condensatore vale
$$\Delta V_C(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})$$
e al tempo $t_2 = \tau/2$ si ha
$$V_2 \equiv \Delta V_C(t_2) = \mathcal{E}(1 - e^{-1/2}) \simeq 11.8 mV$$
Il campo elettrico varrà
$$E_2 = \frac{V_2}{d} \simeq 11.8 V/m$$

4. L'energia dissipata per effetto Joule vale
$$W_J = \int_{t_0}^{t_1} R i(t)^2 \mathrm{d}t = \int_{t_0=0}^{t_1=\tau} \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/\tau} \mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{\tau} = \frac{\mathcal{E}^2 \tau}{2R} (1 - e^{-2}) \simeq 8.66 pJ$$

PROBLEMA 3

1. Il campo generato dal solenoide esterno vale

$$B_1 = k_m \mu_0 n_1 i_1$$

Il flusso attraverso il secondo solenoide vale

$$\Phi_2 = N_2 B_1 \pi R_2^2 = N_2 k_m \mu_0 n_1 \pi R_2^2 i_1$$

per cui

$$M = N_2 k_m \mu_0 n_1 \pi R_2^2 = k_m \mu_0 n_1 n_2 \ell_2 \pi R_2^2 = 1.974H$$

2. La corrente indotta nel solenoide interno vale

$$i_2(t) = -\frac{M}{R}\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_0 M}{R\tau} e^{-t/\tau}(\frac{t}{\tau} - 1)$$

la cui derivata vale

$$i_2'(t) = \frac{i_0 M}{R\tau^2} e^{-t/\tau}(2 - \frac{t}{\tau})$$

che si annulla per $t_* = 2\tau$.

Il massimo della corrente (siccome il segno dipende dalla convenzione andrà considerato il modulo) sarà dunque o a $t = 0$ o a $t = t_*$. Sostituendo si ottiene

$$|i_2(0)| = \frac{i_0 M}{R\tau}\,, \qquad |i_2(t_*)| = \frac{i_0 M}{R\tau} e^{-2}\,,$$

e il massimo vale

$$i_{max} = |i_2(0)| = \frac{i_0 M}{R\tau} \simeq 197A$$

3. Al tempo $t = \tau$ si ha

$$i_1(\tau) = i_0 e^{-1} \simeq 1.84A, \qquad i_2(\tau) = 0$$

Siccome l'energia magnetica vale $U_m = \frac{1}{2}Li^2$, e il coefficiente di autoinduzione del primo solenoide vale

$$L_1 = k_m \mu_0 n_1^2 \ell_1 \pi R_1^2 \simeq 22.21H$$

si ha

$$U_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(\tau) \simeq 37.6J \qquad U_2 = \frac{1}{2} L_2 i_2^2(\tau) = 0$$

4. Dalla legge di Felici si ha

$$Q = \frac{\Phi_{in} - \Phi_{fin}}{R} = \frac{\Phi(t=0) - \Phi_{fin}(t=\tau)}{R} = \frac{M}{R}\left[i_1(0) - i_1(\tau)\right] = -\frac{i_0 M e^{-1}}{R} \simeq -72.6mC$$

siccome $i_1(0) = 0$.