UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

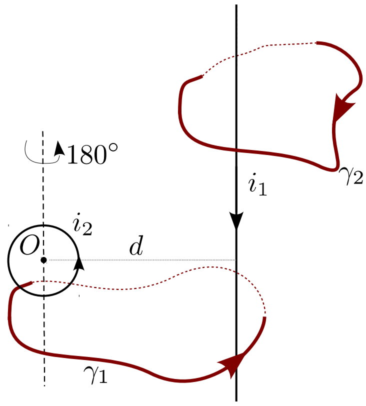
a.a. 2017-2018

Elementi di Fisica II: 16 Febbraio 2018

Seconda prova in itinere / Compito Completo

Problema 1

Un filo conduttore infinito è percorso da una corrente $i_1 = 1500\, mA$ con verso indicato in figura. A distanza $d = 5\, cm$ dal filo è posto un avvolgimento di $N = 12$ spire circolari di raggio $r = 1\, mm$ (d è la distanza tra il filo e il centro O delle spire). Sapendo che nell'avvolgimento scorre una corrente $i_2 = 1\, mA$, calcolare:



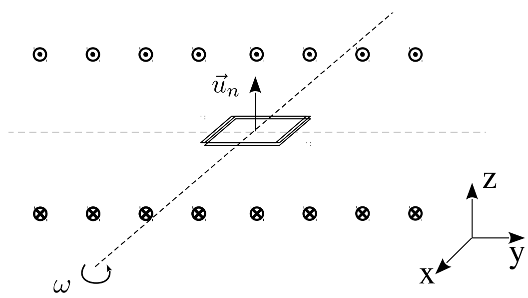
1. Il valore (modulo, direzione e verso) del campo magnetico in O
2. Il coefficiente di mutua induzione tra il filo e l'avvolgimento (si consideri che r è molto inferiore a d),

3 La circuitazione del campo magnetico attraverso i percorsi γ_1 e γ_2 indicati in figura. In γ_1 e γ_2 i pezzi tratteggiati sono al di sotto del piano su cui sono posti il filo e l'avvolgimento, mentre i tratti continui sono al di sopra del medesimo piano.

4 Il lavoro esterno necessario per ruotare l'avvolgimento di spire di 180° attorno all'asse indicato in figura

Problema 2

All'interno di un solenoide infinito con densità di spire pari a $n = 250\,\text{spire}/cm$ circola una corrente $i_1 = 3.5\, A$ con verso indicato in figura. Un avvolgimento di $N = 50$ spire quadrate di resistenza totale $R = 15\,\Omega$ e lato $\ell = 1\, cm$ è posto completamente all'interno del solenoide (il diametro del solenoide è più grande di ℓ). All'istante $t = 0$ la normale alla spira $\vec{u}_n$ è perpendicolare all'asse del solenoide come in figura (l'asse del solenoide è parallelo all'asse y). Sapendo che l'avvolgimento ruota con velocità angolare $\omega = 15\, rad/s$ attorno all'asse indicato in figura (parallelo all'asse x), calcolare (si trascuri la mutua induzione dell'avvolgimento sul solenoide e l'autoinduzione dell'avvolgimento):



1. La forza elettromotrice indotta nell'istante t_1 in cui l'avvolgimento ha compiuto un giro completo e nel primo instante t_2 in cui la normale alla spira è parallela all'asse del solenoide
2. Il valore del momento meccanico massimo subito dall'avvolgimento.
3. L'energia dissipata per effetto Joule dopo due giri completi effettuati dall'avvolgimento.

Problema 3: solo per la seconda prova in itinere

Si consideri un circuito RL formato da un generatore di tensione $\mathcal{E} = 40\,V$, una resistenza R e un solenoide. Il solenoide, di diametro $d = 2\,cm$, è lungo $\ell = 10\,cm$ e ha un numero di spire pari a $N = 125$. Il circuito viene chiuso all'istante $t = 0$. All'istante $t_1 = 1\,\mu s$ la corrente è la metà della corrente i_∞ che si misura ad un tempo infinito. Calcolare

1. La resistenza R
2. Il valore della corrente al tempo $t_2 = 2t_1$.
3. L'energia dissipata per effetto Joule dal tempo $t = 0$ al tempo t_1.
4. Dopo che è passato un tempo molto più lungo della costante di tempo τ, viene inserito nel solenoide un materiale ferromagnetico di costante magnetica $k_m = 500$ che riempie completamente lo spazio all'interno del solenoide. Calcolare il lavoro esterno necessario per inserire il materiale ferromagnetico.

Problema 4: Solo per il compito completo

Si consideri un circuito RC formato da un generatore di tensione $\mathcal{E} = 40\,V$, una resistenza R e un condensatore piano. Il condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio $r = 10\,cm$ distanti $d = 1\,mm$. Il circuito viene chiuso all'istante $t = 0$. All'istante $t_1 = 5\,\mu s$ la corrente è la metà della corrente i_0 che si misura subito dopo aver chiuso il circuito. Calcolare

1. La resistenza R
2. Il valore della corrente al tempo $t_2 = 2t_1$.
3. L'energia dissipata per effetto Joule dal tempo $t = 0$ al tempo t_1.
4. Dopo che è passato un tempo molto più lungo della costante di tempo τ, viene inserito nel condensatore un dielettrico di costante dielettrica $k = 4$ che riempie completamente lo spazio tra le armature. Calcolare il lavoro esterno necessario per inserire il dielettrico.

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Indicando con $\vec{u}_n$ is versore uscente dal foglio, il campo magnetico generato dal filo in O vale

$$\vec{B}_f = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}\vec{u}_n \simeq -(6\,\mu T)\vec{u}_n$$

poichè è $\vec{B}_f$ è entrante nel foglio. Il campo generato dall'avvolgimento vale

$$\vec{B}_s = \frac{N\mu_0 i_2}{2r}\vec{u}_n \simeq (7.5\,\mu T)\vec{u}_n$$

Notare il fattore N dovuto ad N spire. Il campo totale in O vale dunque

$$\vec{B}_O = \vec{B}_f + \vec{B}_s = \frac{\mu_0}{2}(\frac{Ni_2}{r} - \frac{i_1}{\pi d})\vec{u}_n \simeq (1.5\,\mu T)\vec{u}_n$$

2. Per calcolare il coefficiente di mutua induzione devo calcolare il flusso del campo generato dal filo attraverso l'avvolgimento. Siccome $r \ll d$ posso considerare il campo magnetico generato dal filo costante all'interno dell'avvolgimento e di valore $B_f = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$. Considerando la normale entrante nel foglio, il flusso vale

$$\Phi_{avv}(\vec{B}) = NB_f\pi r^2 = \frac{N\mu_0 i_1}{2d}r^2$$

Il coefficiente di mutua induzione vale quindi

$$M = \frac{\Phi_{avv}(\vec{B})}{i_1} = \frac{N\mu_0}{2d}r^2 \simeq 0.15\,nH$$

3. Per la legge di Ampere la circuitazione vale

$$\mathcal{C}_{\gamma_1} = \mu_0(Ni_2 - i_1) \simeq -1.88\,mT\cdot m$$
$$\mathcal{C}_{\gamma_2} = \mu_0 i_1 \simeq 1.88\,mT\cdot m$$

4. Il lavoro esterno è uguale alla variazione di energia potenziale. Considerando l'avvolgimento come un dipolo magnetico di momento di dipolo

$$\vec{m} = N\pi r^2 i_2\vec{u}_n \simeq (37.7\,nA\cdot m^2)\vec{u}_n$$

l'energia magnetica vale

$$\mathcal{U} = -\vec{m}\cdot\vec{B}_f$$

Inizialmente $\vec{m}$ e $\vec{B}_j$ sono paralleli ma opposti, quindi

$$\mathcal{U}_{\text{in}} = mB_f$$

Dopo una rotazione di 180° $\vec{m}$ e $\vec{B}_j$ sono paralleli e concordi, da cui

$$\mathcal{U}_{\text{fin}} = -mB_f$$

Il lavoro totale esterno vale

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}_{\text{fin}} - \mathcal{U}_{\text{in}} = -2mB_f \simeq -0.45\,pJ$$

PROBLEMA 2

1. Calcoliamo il flusso del campo magnetico generato dal solenoide all'interno dell'avvolgimento. Il campo del solenoide vale

$$B = \mu_0 n i_1 \simeq 110\, mT$$

e il suo flusso attraverso l'avvolgimento vale

$$\Phi(B) = NB\ell^2 \cos\theta$$

dove θ è l'angolo tra l'asse del solenoide e il versore $\vec{u}_n$. In base ai dati del problema, l'angolo θ in funzione del tempo si scrive come

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \omega t$$

Dunque la forza elettromotrice indotta vale

$$\mathcal{E}_{ind}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(B)}{\mathrm{d}t} = -NB\ell^2 \frac{\mathrm{d}\cos\theta(t)}{\mathrm{d}t} = NB\ell^2\omega \sin(\frac{\pi}{2} + \omega t)$$

Calcoliamo ora i tempo t_1 e t_2. Il periodo di rotazione vale $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Dunque $t_1 = T$ e $t_2 = T/4$ (un quarto di giro). Quindi

$$\mathcal{E}_{ind}(t_1) = NB\ell^2\omega \sin(\frac{\pi}{2} + \omega T) = NB\ell^2\omega \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = NB\ell^2\omega \simeq 8.25\, mV$$

$$\mathcal{E}_{ind}(t_2) = NB\ell^2\omega \sin(\frac{\pi}{2} + \omega \frac{T}{4}) = NB\ell^2\omega \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 0$$

2. Il momento meccanico vale

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad M = mB\sin(\frac{\pi}{2} + \omega t)$$

dove $\vec{m}$ è il momento di dipolo dell'avvolgimento

$$\vec{m}(t) = N i_{avv}(t)\ell^2 \vec{u}_n$$

e $i_{avv}(t)$ è la corrente indotta che circola nell'avvolgimento

$$i_{avv}(t) = \frac{\mathcal{E}_{ind}(t)}{R} = \frac{NB\ell^2\omega}{R}\sin(\frac{\pi}{2} + \omega t)$$

Il modulo del momento meccanico vale quindi

$$M = \frac{N^2\ell^4\omega B^2}{R}\sin^2(\frac{\pi}{2} + \omega t)$$

massimizzato quando il seno vale 1:

$$M_{max} = \frac{N^2\ell^4\omega B^2}{R} \simeq 3\cdot 10^{-7}\, N\cdot m$$

3. L'energia dissipata per effetto Joule vale

$$W_J = \int_0^{t_3} R i_{avv}^2(t)\mathrm{d}t$$

dove $t_3 = 2T$. Quindi

$$W_J = \frac{N^2B^2\ell^4\omega^2}{R}\int_0^{2T}\sin^2(\frac{\pi}{2} + \omega t)\mathrm{d}t = 2\frac{N^2B^2\ell^4\omega^2}{R}\int_0^{T}\sin^2(\frac{\pi}{2} + \omega t)\mathrm{d}t = 2\frac{N^2B^2\ell^4\omega^2}{R}\int_0^{T}\sin^2(\omega t)\mathrm{d}t$$

Cambiando variabile $z = \omega t$ tale che $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{\omega}$ si ha

$$W_J = 2\frac{N^2B^2\ell^4\omega}{R}\int_0^{2\pi}\sin^2 z\mathrm{d}z = 2\pi\frac{N^2B^2\ell^4\omega}{R} = 2\pi M_{max} \simeq 1.885\mu J$$

PROBLEMA 3: solo per la seconda prova in itinere

1. La corrente in un circuito RL chiuso al tempo $t = 0$ vale

$$i(t) = i_\infty(1 - e^{-t/\tau})$$

dove

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Dal dato del problema sappiamo che $i(t_1) = i_\infty/2$. Dunque

$$i(t_1) = i_\infty(1 - e^{-t_1/\tau}) = i_\infty/2 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{t_1}{\ln 2} \simeq 1.44\,\mu s$$

Conoscendo τ e L posso ricavare R. L'induttanza L di un solenoide vale

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi (d/2)^2}{\ell} \simeq 61.7\,\mu H$$

da cui

$$R = \frac{L}{\tau} \simeq 42.8\,\Omega$$

2. Al tempo $t_2 = 2t_1$ la corrente vale

$$i(t_2) = i_\infty(1 - e^{-t_2/\tau}) = i_\infty(1 - e^{-2\ln 2}) = \frac{3}{4} i_\infty$$

La corrente i_∞ vale $\mathcal{E}/R$ da cui

$$i(t_2) = \frac{3}{4} i_\infty = \frac{3}{4}\mathcal{E}/R \simeq 0.7\,A$$

3. L'energia dissipata per effetto Joule vale

$$W_J = \int_0^{t_1} R i^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^{t_1}(1 - e^{-t/\tau})^2 \mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^{t_1}(1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau})\mathrm{d}t$$

Svolgendo l'integrale si ottiene

$$W_J = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[t + 2\tau e^{-t/\tau} - \frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^{t_1} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[t_1 + 2\tau e^{-t_1/\tau} - \frac{\tau}{2}e^{-2t_1/\tau} - 2\tau + \frac{\tau}{2}\right]$$

Siccome $t_1 = \tau \ln 2$ si ha

$$W_J = \frac{\mathcal{E}^2}{R}(\ln 2 - \frac{5}{8})\tau \simeq 91.7\,nJ$$

4. il lavoro esterno sarà uguale alla variazione di energia. L'energia magnetica del solenoide vale $\mathcal{U}_m = \frac{1}{2}Li_\infty^2$. Inserendo il materiale ferromagnetica cambia l'induttanza, che diviene

$$L' = k_m L$$

Il lavoro esterno vale dunque

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}_{fin} - \mathcal{U}_{in} = \frac{1}{2}L' i_\infty^2 - \frac{1}{2}Li_\infty^2 = \frac{1}{2}(k_m - 1)Li_\infty^2 \simeq 13.4\,mJ$$

PROBLEMA 3: solo il compito completo

1. La corrente in un circuito RC chiuso al tempo $t = 0$ vale

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$$

dove

$$\tau = RC$$

e

$$i_0 = \mathcal{E}/R$$

Dunque

$$i(t_1) = i_0 e^{-t_1/\tau} = i_0/2 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{t_1}{\ln 2} \simeq 7.21\,\mu s$$

Conoscendo τ e C posso ricavare R. La capacità C di un condensatore piano vale

$$C = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \simeq 278\,pF$$

da cui

$$R = \frac{\tau}{C} \simeq 25.9\,k\Omega$$

2. Al tempo $t_2 = 2t_1$ la corrente vale

$$i(t_2) = i_0 e^{-t_2/\tau} = i_0 e^{-2\ln 2} = \frac{1}{4} i_0 = \frac{1}{4}\mathcal{E}/R \simeq 0.39\,mA$$

3. L'energia dissipata per effetto Joule vale

$$W_J = \int_0^{t_1} R i^2(t) \mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^{t_1} e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t$$

Svolgendo l'integrale si ottiene

$$W_J = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^{t_1} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t_1/\tau} + \frac{\tau}{2}\right] = \frac{\mathcal{E}^2\tau}{2R}\left[1 - e^{-2t_1/\tau}\right] = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2\left[1 - e^{-2t_1/\tau}\right]$$

Siccome $t_1 = \tau \ln 2$ si ha

$$W_J = \frac{3}{8}C\mathcal{E}^2 \simeq 167\,nJ$$

4. il lavoro esterno sarà uguale alla variazione di energia. L'energia elettrostatica del condensatore vale $\mathcal{U}_e = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$. Inserendo il materiale ferromagnetica cambia la capacità, che diviene

$$C' = kC$$

Il lavoro esterno vale dunque

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}_{fin} - \mathcal{U}_{in} = \frac{1}{2}C'\mathcal{E}^2 - \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}(k-1)C\mathcal{E}^2 \simeq 667\,nJ$$