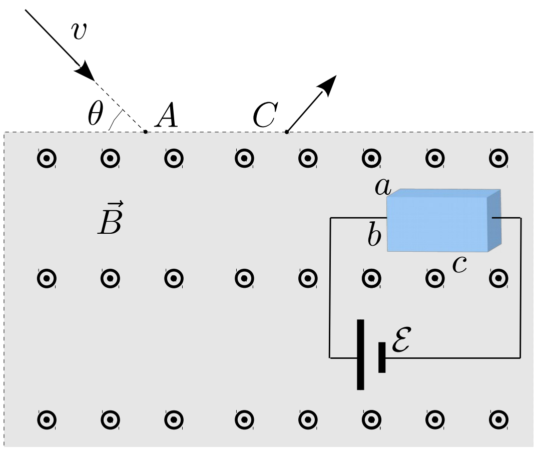
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

a.a. 2019-2020
Elementi di Fisica II: 20 Febbraio 2020
Seconda prova in itinere / Compito Completo

Problema 1

Si consideri una regione di spazio (in grigio nella figura) in cui è presente un campo magnetico costante $B = 250mT$, uniforme e uscente dal piano in figura. Una particella, di massa $m = 1ng$ e carica $q = -50nC$, si muove con velocità $\vec{v}$ ed entra in questa zona nel punto A con un angolo $\theta = \frac{\pi}{4}$ come in figura. La particella possiede inizialmente una energia cinetica pari a $E_c = 50\mu J$.



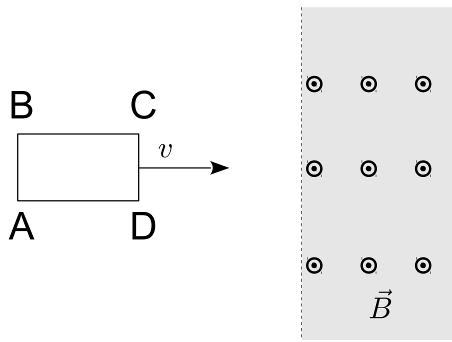
1. Sapendo che la particella esce dalla zona grigia nel punto C, determinare la distanza AC
2. Calcolare il tempo necessario per percorrere la traiettoria da A a C

Nella stessa zona è presente un nastro di rame di dimensioni $a = 0.1cm$, $b = 0.2cm$ e $c = 30cm$, completamente immerso nel campo magnetico come in figura. Il campo magnetico è perpendicolare alle facce con lati b e c. Il nastro è collegato ad un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E} = 1mV$. Sapendo che la resistività del rame vale $\rho = 1.67 \cdot 10^{-8}\Omega \cdot m$, che la densità di portatori vale $n_e = 8.48 \cdot 10^{28}m^{-3}$ e che i portatori sono elettroni ($e = -1.602 \cdot 10^{-19}C$), calcolare

3. Il campo elettrico di Hall all'interno del nastro
4. Il rapporto tra la tensione di Hall e il campo magnetico

Problema 2

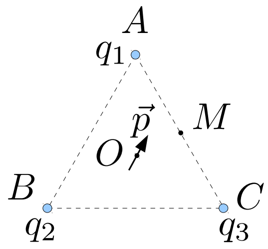
Un avvolgimento composto da $N = 200$ spire rettangolari di lati AD$\equiv$ $a = 15cm$ e AB$\equiv$ $b = 6cm$ è mantenuto a velocitá costante $v = 12cm/s$ in una zona priva di campo magnetico. Le spire sono costituite da un filo di rame (resistività $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}\Omega \cdot m$) di sezione $\Sigma = 0.01\,mm^2$. Al tempo $t = 0$ il lato CD entra in una zona in cui é presente un campo magnetico costante e uniforme $B = 40mT$, perpendicolare al piano su cui giace l'avvolgimento (zona grigia della figura). Supponendo che la velocità v rimanga costante, determinare:



1. Il flusso del campo magnetico $\Phi_B(t)$ attraverso l'avvolgimento in funzione del tempo. Disegnare in un grafico l'andamento di $\Phi_B(t)$ in funzione del tempo.
2. La corrente indotta sull'avvolgimento al tempo $t_1 = 0.1s$ e al tempo $t_2 = 2s$.
3. L'espressione simbolica della forza esterna necessaria per mantenere l'avvolgimento a velocità costante al variare del tempo. Calcolare il valore numerico di tale forza al tempo $t_3 = 0.5s$.

Problema 3: solo per il compito completo

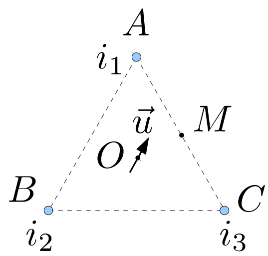
Si considerino tra cariche, q_1, q_2 e q_3 poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato $\ell = 5cm$ come in figura. Il valore numerico delle cariche è $q_2 = q_3 = q_0 = 1.5nC$, mentre la carica q_1 vale $q_1 = \frac{3}{4}q_0$.



1. Calcolare il campo elettrico (modulo, direzione e verso) nel centro O del triangolo
2. Calcolare il flusso del campo elettrico attraverso una sfera di raggio $r = 3.5cm$ centrata in M, punto medio del lato AC.
3. Calcolare il lavoro esterno necessario per spostare una carica $q_4 = 0.5q_0$ dal punto O al punto M.
4. Calcolare l'energia di un dipolo elettrostatico di momento di dipolo $\vec{p}$ di modulo $p = 1.2\,pC \cdot m$, parallelo al lato AB e con verso indicato in figura.

Problema 4: solo per la seconda prova in itinere

Si consideri un triangolo equilatero di lato $\ell = 5cm$ e con vertici A, B e C. Si considerino tre conduttori filiformi infiniti, perpendicolari al piano su cui giace il triangolo e passanti rispettivamente per i vertici A, B e C come in figura. Nei fili scorrono le correnti i_1, i_2 e i_3, con verso diretto verso l'alto rispetto al piano della figura. Il valore numerico delle correnti è $i_2 = i_3 = i_0 = 1.5mA$, mentre la corrente i_1 vale $i_1 = \frac{3}{4}i_0$.



1. Calcolare il campo magnetico (modulo, direzione e verso) nel centro O del triangolo
2. Calcolare la circuitazione del campo magnetico calcolata attraverso il percorso γ, costituito da una circonferenza di raggio $r = 3.5cm$ centrata in M, punto medio del lato AC. Il percorso γ ha verso orario.
3. Calcolare il modulo della forza per unità di lunghezza esercitata su un filo infinito perpendicolare al piano su cui giace il triangolo, passante per O e in cui scorre una corrente $i_f = 9mA$.
4. Calcolare l'energia di un dipolo magnetico costituito da una spira circolare di raggio $r = 1mm$ in cui scorre corrente $i_m = 25mA$. Il versore $\vec{u}$ normale alla spira circolare è parallelo al lato AB e con verso indicato in figura.

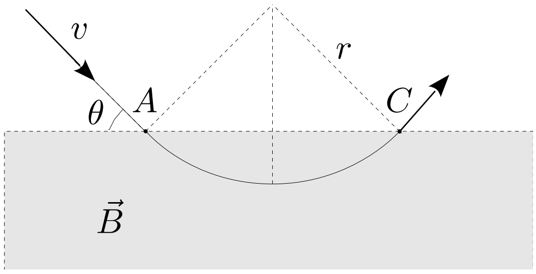
SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. La traiettoria all'interno della del campo magnetico sarà un quarto di circonferenza di raggio

$$r = \frac{mv}{qB}$$

come in figura



Dall'energia cinetica è possibile determinare la velocità della particella come

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \simeq 10km/s$$

Il raggio della traiettoria vale quindi

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{\sqrt{2E_c m}}{qB} \simeq 80cm$$

La corda AC è pari al lato di un quadrato inscritto nella circonferenza di raggio r ed è pari a

$$AC = r\sqrt{2} \simeq 113cm$$

2. La lunghezza del percorso della particella è pari ad un quarto di circonferenza, pari a

$$\ell = \frac{\pi r}{2} \simeq 1.26m$$

Il tempo necessario per percorrerlo vale

$$t = \frac{\ell}{v} \simeq 125.6\mu s$$

siccome il modulo della velocità rimane costante

3. La resistenza del nastro è pari a

$$R = \rho\frac{c}{ab} \simeq 2.5m\Omega$$

per cui la corrente che fluisce nel conduttore di rame vale

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \simeq 399mA$$

La corrispondente densità di corrente si calcola come

$$j = \frac{i}{ab} \simeq 0.1995A/mm^2$$

I precedenti paremtri permettono di calcolare il campo di Hall, dato da

$$E_H = v_d B = \frac{jB}{n_e|e|} \simeq 3.67\mu V/m$$

4. Siccome la tensione di Hall è pari a $V_H = E_H b$, il rapporto V_H/B vale

$$\frac{V_H}{B} = \frac{E_H b}{B} = v_d b = \frac{jb}{n_e|e|} \simeq 29.37nV/T$$

PROBLEMA 2

1. Il tempo t_* corrispondente all'instante in cui la spira è completamente entrata nella zona di campo magnetico vale

$$t_* = \frac{a}{v} = 1.25s$$

Il flusso del campo magnetico attraverso la spira vale dunque

$$\Phi(\vec{B}) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ NBbvt & 0 \leq t \leq t_* \\ NBab & t > t_* \end{cases}$$

2. Dalla legge di Faraday si ha che la fem indotta è pari a:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mathcal{E}_0 & 0 \leq t \leq t_* \\ 0 & t > t_* \end{cases}$$

dove

$$\mathcal{E}_0 = NBbv \simeq 57.6mV$$

Siccome la resistenza dell'avvolgimento è pari a

$$R = \rho\frac{2N(a+b)}{\Sigma} \simeq 141.12\Omega$$

la corrente indotta vale $i_{ind}(t) = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}(t)}{R}$. Si avrà:

$$i_{ind}(t_1) = i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \simeq 0.408mA$$

$$i_{ind}(t_2) = 0$$

siccome $t_2 > t_*$.

3. La forza di Lorentz che agisce sul lato CD sarà non nulla solo negli istanti $0 \leq t \leq t_*$. Dalla legge di Laplace si ha che $\vec{\mathrm{d}}F = i\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}$, che si riduce a $\mathrm{d}F = i\mathrm{d}sB$ poichè $\vec{s}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari. Sui lati BC e AD le forze sono uguali e opposte. Integrando sul lato CD in questi istanti, la forza di Lorentz vale

$$F_L = Ni_0bB \simeq 196\mu N$$

La forza esterna dovrà essere uguale e opposta a F_L. Quindi

$$F_{\text{ext}}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ni_0bB & 0 \leq t \leq t_* \\ 0 & t > t_* \end{cases}$$

Al tempo t_3 si avrà

$$F_{\text{ext}}(t_3) = F_L \simeq 196\mu N$$

PROBLEMA 3

1. Per simmetria il campo generato dalle due cariche q_2 e q_3 non avrà componente orizzontale e sarà pari a

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2+q_3}{r^2}\sin\frac{\pi}{6}\vec{j} = \frac{3}{8\pi\epsilon_0}\frac{q_2+q_3}{\ell^2}\vec{j}$$

dove $r = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$ è la distanza tra i vertici è il centro O e $\vec{j}$ è il versore dell'asse verticale (rivolto verso l'alto). Il campo generato dalla carica q_1 è pari a

$$\vec{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{j} = -\frac{3}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{\ell^2}\vec{j}$$

Il campo totale è quindi

$$\vec{E}_O = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{3}{4\pi\epsilon_0\ell^2}(\frac{q_2+q_3}{2} - q_1)\vec{j} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0\ell^2}\frac{q_0}{4}\vec{j}$$

di modulo

$$E_O = \frac{3}{16\pi\epsilon_0\ell^2}q_0 = 4.05kV/m$$

con direzione parallela all'asse y e rivolto verso l'alto.

2. Dal teorema di Gauss si ha che

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q_\int}{\epsilon_0}$$

Siccome le cariche interne sono solo q_1 e q_3 si avrà

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q_1+q_3}{\epsilon_0} \simeq 296Vm$$

3. Il lavoro esterno sarà pari alla variazione di energia potenziale. Il potenziale nel punto O vale

$$V_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{r} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2+q_3}{\ell} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{11\sqrt{3}}{4}\frac{q_0}{\ell} \simeq 1.286kV$$

per cui l'energia potenziale della carica q_4 nel punto O è data da

$$U_O = q_4V_O \simeq 964nJ$$

Il potenziale nel punto M è pari a

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{\overline{AM}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{\overline{BM}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{\overline{CM}}$$

Siccome

$$\overline{AM} = \overline{CM} = \ell/2\,, \qquad \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

si ottiene

$$V_M = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\ell}(q_1 + \frac{q_2}{\sqrt{3}} + q_3) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0\ell}(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{7}{2}) \simeq 1.257kV$$

Quindi l'energia potenziale della carica q_4 nel punto M vale

$$U_M = q_4V_N \simeq 942nJ$$

Il lavoro esterno vale quindi

$$L_{ext} = U_M - U_O \simeq -21nJ$$

4. L'energi del dipolo vale

$$U_e = -\vec{p}\cdot\vec{E}_O = -pE_O\cos\theta$$

Siccome $\vec{E}_0$ è rivolto verso l'alto e $\vec{p}$ è parallelo al lato AB l'angolo θ vale $\theta = \frac{\pi}{6}$. Quindi

$$U_e = -\frac{\sqrt{3}}{2}pE_O \simeq -4.21nJ$$

PROBLEMA 4

1. Per simmetria il campo generato dalle due correnti i_2 e i_3 non avrà componente verticale e sarà pari a

$$\vec{B}_2 + \vec{B}_3 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_2 + i_3}{r}\sin\frac{\pi}{6}\vec{i} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\sqrt{3}\frac{i_2 + i_3}{\ell}\vec{i}$$

dove $r = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$ è la distanza tra i vertici è il centro O e $\vec{i}$ è il versore dell'asse verticale (rivolto verso destra). Il campo generato dalla corrente i_1 è pari a

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{r}\vec{i} = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{3}\frac{i_1}{\ell}\vec{i}$$

Il campo totale è quindi

$$\vec{B}_O = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \sqrt{3}\frac{\mu_0}{4\pi\ell}(-i_2 - i_3 + 2i_1)\vec{i}$$

di modulo

$$B_O = \sqrt{3}\frac{\mu_0}{4\pi\ell}| - i_2 - i_3 + 2i_1| \simeq 2.6nT$$

con direzione parallela all'asse x e rivolto verso sinistra.

2. Dal teorema di Ampere si ha che

$$\mathcal{C}_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum i_{conc}$$

Siccome le correnti concatenate sono solo i_1 e i_3 (con segno negativo) si avrà

$$\mathcal{C}_\gamma(\vec{B}) = -\mu_0(i_1 + i_3) \simeq -3.3nT \cdot m$$

3. Dalla II legge di Laplace la forza per unità di lunghezza sarà pari a

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} = i_f B_O \simeq 23.4pN/m$$

4. L'energia del dipolo magnetico vale

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}_O = -mB_O \cos\theta$$

dove

$$\vec{m} = i_m \pi r^2 \vec{u}\,, \qquad m = i_m \pi r^2 \simeq 78.5nA \cdot m^2$$

Siccome $\vec{B}_0$ è rivolto verso sinistra e $\vec{m}$ è parallelo al lato AB l'angolo θ vale $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Quindi

$$U_e = \frac{1}{2}mB_O \simeq 1.02 \cdot 10^{-16}J$$