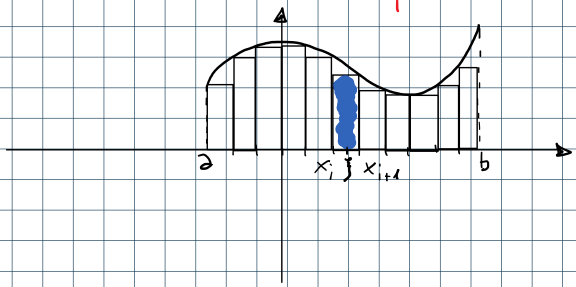
Suddivisione e suddivisioni puntate di un intervallo



ogni rettangolo ha area

$$\min_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)\,(x_{i-1} - x_i)$$

altezza base

- Si dice suddivisione di $[a,b]$ un insieme finito di punti

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} x_i,\ i=0,\dots,N,\ x_i < x_{i+1} \\ x_0 = a \quad x_N = b \end{array} \right\}$$

- Data $\mathcal{S}$ suddivisione scegliamo $\forall i = 0, \dots, N-1$ $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$

$$\tilde{\mathcal{S}} = \left\{ \begin{array}{ll} (x_i, \xi_i),\ i=0,\dots,N, & x_i < x_{i+1},\ \forall i = 0,\dots,N-1 \\ x_i < \xi_i < x_{i+1} & \forall i = 1,\dots,N-1 \end{array} \right\}$$

Si dice suddivisione puntata

- Data una suddivisione $\mathcal{S} = \{x_0 < \dots < x_n\}$ di $[a,b]$

chiamiamo ampiezza della suddivisione

$$\Delta(\mathcal{S}) := \max_{i=0,\dots,N} \{x_{i+1} - x_i\}$$

Somma di Cauchy-Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\text{base}} \cdot \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{altezza}} \qquad \text{relativa a } \tilde{\mathcal{S}}$$

Integrale come area

Chiamiamo area del trapezoide $\{(x,y),\ x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ un numero $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall$ suddivisione puntata $\mathcal{S}$ t.c. l'ampiezza di $\mathcal{S} > \delta$

$$\left| \sum_{i=0}^{N} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) - \mathcal{J} \right| \leq \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{J} - \varepsilon \leq \sum_{i=0}^{N} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \mathcal{J} + \varepsilon$$

In tal caso l'area $\mathcal{J}$ si dice integrale (definito) di f in $[a,b]$

$$\mathcal{J} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Integrabilità delle funzioni continue a tratti

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti

Integrabilità delle funzioni continue a tratti

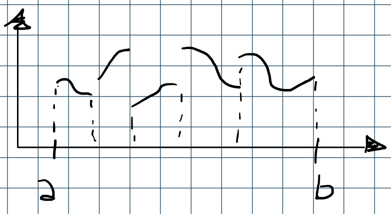
Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti

allora f è integrabile

N.B. **Definizione funzioni continue a tratti**

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti, se $\exists\, y_0, \ldots, y_N$ suddivisione

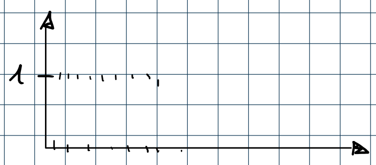
t.c. f è continua su ogni $]y_i, y_{i+1}[$



Esempio di funzione non integrabile

$f:]0,1[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Qualsiasi suddivisione ξ_i razionali

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$$

Qualsiasi suddivisione ξ_i irrazionali

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = 1$$

Linearità dell'integrale

Dati

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

f e g integrabili in $[a,b]$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

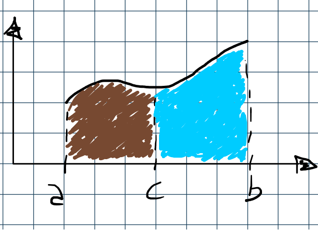
Allora la funzione $(\alpha f + \beta f)(x) := \alpha f(x) + \beta f(x)$

è integrabile e $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$

Additività rispetto all'intervallo di integrazione

Dati $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

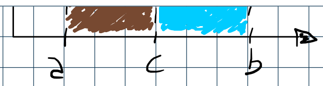
Se $a < c < b$



Allora essa è integrabile in $[a,c]$ e $[c,b]$

$\int^b \quad \int^c \quad \int^b$

Allora essa è integrabile in $[a,c]$ e $[c,b]$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Monotonia

Dati

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

f e g integrabili in $[a,b]$

$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Teorema della media

- Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile definiamo media integrale di f su $[a,b] = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

- Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile

Allora $$\boxed{\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)}$$

N.B.

Quando dico che è integrabile sottointendo che è limitata cioè esiste un sup e un inf

Dimostrazione

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ suddivisione puntata $\mathcal{S} = \{ x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 < \dots x_n \}$ t.c.

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \right| < \varepsilon$$

$f(\xi_k) \leq \sup_{x\in[a,b]} (f(x))$

$$\leq \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \varepsilon \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) + \varepsilon \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) \sum_{k=1}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) + \varepsilon \implies \sup_{x\in[a,b]} f(x)\,(b-a) + \varepsilon$$

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \sum_{k=1}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) - \varepsilon \leq \implies \inf_{x\in[a,b]} f(x)\,(b-a) - \varepsilon$$

perché $\sum (x_{k+1} - x_k) = (a-b)$ perché la somma degli intervalli è $a-b$

dunque $\forall \varepsilon > 0$ ho stabilito che

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) - \varepsilon \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) + \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)(b-a)$$

(Questo vale perché:

$$\phi_1 - \varepsilon \leq \phi_2 \leq \phi + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \phi_1 \leq \phi_2 \leq \phi$$
)

se vale $\forall \varepsilon > 0$, allora vale anche senza ε

$$\Rightarrow \boxed{\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)}$$

Teorema della media per f continua

Dati $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

Allora

$$\exists\, \bar{x} \in [a,b] \quad t.c. \quad f(\bar{x}) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Dimostrazione

x Th. di Weierstass sappiamo che esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

$\min f = f(x_m) = \inf f$ e $\max f = f(x_M) = \sup f$

$f(x_m) < f(x_M)$

Da Th della media

$$f(x_m) < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < f(x_M)$$

x Th tutti i valori possiamo dire che $\exists\, \bar{x} \in [x_m, x_M]$ se $x_m < x_M$ oppure $\bar{x} \in [x_M, x_m]$ se $x_m > x_M$

$$f(\bar{x}) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

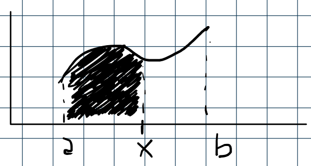
Teorema fondamentale calcolo integrale

Sia

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ funzione continua, quindi integrabile

Definiamo $F:[a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$



Allora $\forall x \in]a,b[$

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

N.B.

La derivata dell'area é l'altezza

Primitive di una funzione

Data $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

f continua

Una funzione $G:[a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $\frac{dG}{dx}(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

é detta primitiva di f

Legame tra primitive di una stessa funzione su un intervallo

Sia

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua

G primitiva di f

Allora

$$\boxed{G(x) - \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{F(x)} = \text{costante}}$$

Due qualsiasi primitive di f differiscono per una costante

Dimostrazione

× Th. fondamentale calcolo integrale

$$\frac{d}{dx}\left(G(x) - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{dG}{dx}(x) - \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \text{costante}}$$

Integrazione per parti

Dati

$f, g : E \to \mathbb{R}$

Allora

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right] - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Dimostrazione

Supponiamo di dover integrare $\int f(x) g'(x)\, dx$ dove $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$

f,g derivabili, quindi continue e con f', g' sempre continue

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \frac{df}{dx}(x)\; g(x) + \frac{dg}{dx}(x)\, f(x) = f' g(x) + g' f(x)$$

Integro da tutte le parti

$$\int \frac{\cancel{d}}{\cancel{dx}} f(x)\cdot g(x)\, \cancel{dx} = \int f' g(x) + g'(x) f(x)\, dx$$

$$f(x) g(x) = \int f' g(x)\, dx + \int g' f(x)\, dx$$

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$$

Integrazione per sostituzione

Integrale generalizzato

$f :]a,b] \to \mathbb{R}$

supponiamo che $\forall [c,b] \subseteq]a,b] \quad \exists \int_c^b f(x)\, dx$

se esiste finito $\lim_{a \to c} \int_a^b f(x)\, dx = I$

Questo è detto integrale generalizzato di f su $]a,b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{a \to c} \int_c^a f(x)\, dx$$

Assoluta integrabilità

Se f è integrabile assolutamente allora f è integrabile

Criterio del confronto

Dati

$f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$

f e g integrabili in $[a,c]$ $\forall$ sottointervallo $[a,c] \subseteq [a,b[$

$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b[$

Se g è integrale in senso generalizzato allora lo è anche f

Dimostrazione

x monotonia integrale

$$\int_a^c f(x) dx \leq \int_a^c g(x)\, dx \qquad \varphi(c) \leq \psi(c)$$

$\lim_{c \to b} \varphi(c)$ esiste finito o ha limite finito uguale a $\int_a^b g(x)\, dx$

$\lim_{c\to b} \varphi(c)$ esiste finito o ha limite finito uguale a $\int_a g(x)\,dx$

$$\lim_{c\to b} \varphi(c) = l \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow l \in \mathbb{R} \quad \text{quindi} \quad l = \int_a^b f(x)\,dx$$

Criterio asintotico del confronto

Dati

$$f, g : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$f(x), g(x) \geq 0$$

$g(x) > 0$ in un intorno di b

Se f è un o-piccolo di g

Allora se g è integrabile in senso generalizzato

$$\Downarrow$$

f è integrabile in senso generalizzato

Criterio dell'integrale per le serie

Dati

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ → $f(x)$ positiva, decresce ed è infinitesima

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \iff \sum_{n=1}^{\infty} f(x)$$

esiste — converge

(per questo la serie armonica diverge)

Integrabilità di $1/x^a$ in $[0,1]$ e in $[1,+\infty[$

① $\frac{1}{x^a}$ in $[0,1]$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{c\to0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{c\to0^+} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_c^1 = \lim_{c\to+0} \left(\frac{1}{1-a} - \frac{c^{1-a}}{1-a}\right)$$

Verifico gli alpha

$$-\ a > 1 \quad \lim_{c\to0^+} \left(\frac{1}{1-a} - \frac{c^{1-a}}{1-a}\right) = \lim_{c\to0^+} \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{(1-a)c^{a+1}}\right) = +\infty$$

$$-\ a = 1 \quad \lim_{c\to0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} = \lim_{c\to0^+} \Big[\log x\Big]_c^1 = -\infty$$

- $\alpha < 1$ $\quad \lim_{c\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \frac{1}{1-\alpha}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{converge per } \alpha < 1}$

② $\frac{1}{x^\alpha}$ in $[1, +\infty[$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right)$$

Verifico gli alpha

- $\alpha > 1$ $\quad \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \lim_{c\to 0^+} \left(\frac{1}{(1-\alpha)c^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha-1} \right) = \frac{1}{\alpha-1}$

- $\alpha = 1$ $\quad \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x} = \lim_{c\to 0^+} \left[\log x \right]_1^c = +\infty$

- $\alpha < 1$ $\quad \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = +\infty$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{converge per } \alpha > 1}$

N.B.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{per } \alpha<1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{per } \alpha>1} \Longrightarrow \text{non converge mai}$$

Integrabilità di $\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ in $[2, +\infty]$

① $\alpha > 1$

- $\alpha > 1$ e $\beta \geq 0$

$\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \leq \frac{1}{x^\alpha}$ $\quad$ Th. confronto $\frac{1}{x^\alpha}$ é integrabile in senso generalizzato

e quindi anche $\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ é int. in senso generalizzato

- $\alpha > 1$ e $\beta \leq 0$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{x^{3/2}}\,dx$$

$\lim \frac{\log x}{\ldots} = 0$ $\quad$ x Th. confronto asintotico

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{\bar\alpha}} = 0 \quad \times \text{ Th. confronto asintotico}$$

Integrabile in senso generalizzato $\forall \alpha > 1 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$

② $\alpha = 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{(\log x)^{1-\beta}}{1-\beta} \right]_2^c = \lim_{c\to+\infty} \frac{(\log c)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\log 2)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

Se $1-\beta > 0 \iff \beta < 1$ limite $+\infty$ dunque non integrabile ✗

Se $1-\beta < 0 \iff \beta > 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx = \frac{(\log 2)^{1-\beta}}{1-\beta} \quad ✓$$

Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ ✗

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \Big[\log(\log x)\Big]_2^c = \lim_{c\to+\infty} \log(\log c) - \log(\log 2) = +\infty$$

Integrabile in senso generalizzato per $\alpha = 1$ e $\beta > 1$

③ $\alpha < 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}\,dx \qquad \text{prendiamo } \bar\alpha = \frac{1+\alpha}{2} < 1$$

Per assurdo: se $\frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}$ fosse integrabile in senso generalizzato per Th. confronto asintotico anche $\frac{1}{x^{\bar\alpha}}$ sarebbe integrabile ma ciò è falso perché abbiamo $\bar\alpha < 1$!