Cognome		
Nome		Matricola:

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

a.a. 2021-2022

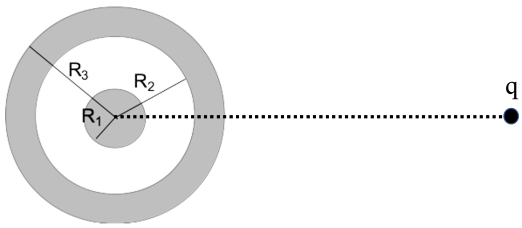
Elementi di Fisica II:

Prova scritta - 17 Febbraio 2022

Problema 1

Un conduttore sferico cavo di raggio interno $R_2 = 2$ cm e raggio esterno $R_3 = 3$ cm ha una carica pari a $Q = 3\times10^{-4}$ C. All'interno viene posto un conduttore sferico di raggio $R_1 = 1$ cm, con un'ulteriore carica pari a Q. Ad una distanza $L = 3$ m dal centro dei conduttori è posta una piccola carica puntiforme $q = -2\times10^{-7}$ C.

1. Calcolare la forza esercitata sulla carica q .
2. Calcolare il lavoro necessario per portare la carica q all'infinito.



Adesso i due conduttori vengono connessi con un filo metallico.

3. Determinare il valore di Q_1 e Q_2 alla fine sulle due sfere.
4. Calcolare l'energia dissipata in questo processo.
5. Spiegare brevemente perchè non si può caricare un isolante per induzione elettrica con lo stesso metodo seguito con i conduttori.

Soluzione problema 1

1. La carica sulle superfici di raggio R_1, R_2 e R_3 è rispettivamente Q, $-Q$(indotta) e $2Q$ (carica originale + quella indotta). La distanza tra q e i conduttori è grande rispetto al loro diametro, inoltre q è piccola rispetto a Q. Quindi l'effetto dell'induzione elettrostatica è trascurabile e le distribuzioni di carica sui conduttori possono considerarsi in buona approssimazione sferiche uniformi. La carica q vede il campo generato da una superficie sferica carica con carica $2Q$ equivalente a quello di una carica puntiforme:
$$\vec{F} = q\left(\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 L^2}\right)\vec{i} = -120\ mN\vec{i}$$
2. Il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche per portare la carica q all'infinito è pari a $q(V_{IN} - V_{FIN})$ da cui, considerando il potenziale nullo all'infinito
$$W = q\left(\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 L}\right) = -360\ mJ$$
3. Connettendo le due sfere, la carica si ridistribuisce portandosi tutta sulla superficie esterna (quella di raggio R_3). Quindi le cariche finali sulle due sfere sono $Q_1 = 0$ e $Q_2 = 2Q = 6\times10^{-4}$

4. L'energia elettrostatica del sistema è costituita dall'energia del condensatore sferico $U = \frac{Q^2}{2C}$ (sfera interna ed esterna) e dall'energia del campo esterno. La capacità di un condensatore sferico è

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = 2.22\ pF$$

Il campo elettrico esterno non varia cortocircuitando le due sfere, l'unica variazione di energia è dovuta alla variazione dell'energia del condensatore sferico:

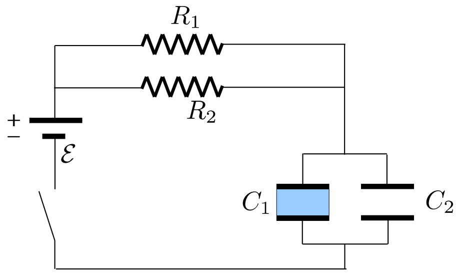
$$U_{IN} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad U_{FIN} = 0$$

Quindi energia dissipata nel processo vale:

$$U_{DISS} = \left|\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right| = 20.27\ kJ$$

Problema 2

Si consideri il circuito mostrato in figura. Le resistenze valgono $R_1 = 800\Omega$ e $R_2 = 1000\Omega$. La tensione fornita dal generatore vale $\mathcal{E}$. I due condensatori C_1 e C_2 hanno entrambi armature circolari di raggio $r = 3cm$ e distanti $d = 5mm$. Lo spazio tra le armature di C_1 è completamente riempito da un materiale dielettrico di costante dielettrica $k = 2$. Sapendo che il circuito, inizialmente aperto, viene chiuso al tempo $t = 0$, determinare:



1. Il valore della costante di tempo τ del circuito
2. Il valore di $\mathcal{E}$, sapendo che al tempo $t_1 = \tau$ la corrente che circola in R_1 vale $i_1 = 100mA$
3. Dopo che i condensatori sono stati caricati (cioè dopo un tempo $t \gg \tau$), il circuito viene aperto. Calcolare il lavoro esterno necessario per rimuovere il dielettrico dal condensatore C_1.
4. Illustrare e giustificare le proprietà dei conduttori in condizioni elettrostatiche

---

Soluzione problema 2

1. Siccome le due resistenze sono in parallelo, la resistenza totale vale
$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \simeq 444\Omega$$
Le capacità dei due condensatori valgono
$$C_1 = k\epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \simeq 10pF\,, \qquad C_2 = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \simeq 5pF$$
per cui il condensatore equivalente ha capacità pari a
$$C_T = C_1 + C_2 = 15pF$$
La costante di tempo vale dunque
$$\tau = R_T C_T \simeq 6.66ns$$
2. La corrente che circola nel circuito vale
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_T} e^{-t/\tau}$$
Ai capi delle resistenze c'è una differenza di potenziale pari a
$$\Delta V(t) = R_T i(t)$$
per cui la corrente che circola in R_1 vale
$$I_1(t) = \frac{\Delta V(t)}{R_1} = \frac{R_T}{R_1} I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} e^{-t/\tau}$$
Al tempo t_1 si ha
$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} e^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{E} = i_1 R_1 e \simeq 217V$$
3. Dopo che è trascorso un tempo $t \gg \tau$ la ddp ai capi dei condensatori vale $\mathcal{E}$. La carica totale accumulata sui condensatori vale
$$Q_T = C_T \mathcal{E} \simeq 3.26nC$$
L'energia elettrostatica accumulata nei condensatori vale
$$\mathcal{U}_1 = \frac{Q_T^2}{2C_T} \simeq 354.7nJ$$

Rimuovendo il dielettrico cambia la capacità C_1 (si ha $C_1' = C_2$ mentre la carica Q_T rimane costante. La capacità equivalente diventa

$$C_T' = C_1' + C_2 = 2C_2 \simeq 10pF$$

L'energia elettrostatica vale ora

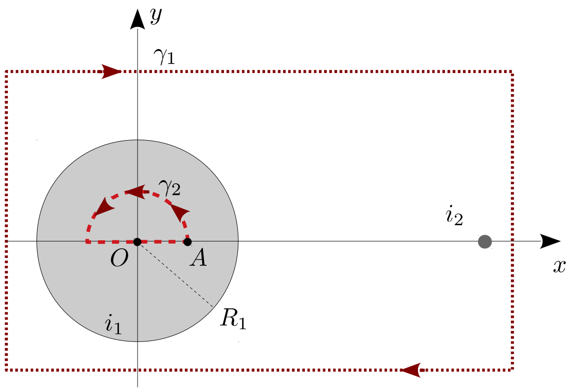
$$\mathcal{U}_2 = \frac{Q_T^2}{2C_T'} \simeq 532nJ$$

Il lavoro esterno necessario per estrarre il dielettrico è pari alla variazione di energia elettrostatica, pari a

$$\mathcal{L}_{ext} = \mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1 \simeq 177.3nJ$$

Problema 3

Si considerino un conduttori cilindrico infinito, con asse parallelo all'asse z e passante per l'origine O degli assi cartesiani come in figura. Il conduttore cilindrico ha raggio $R_1 = 2cm$ ed è percorso dalla corrente $i_1 = 350mA$ con densità uniforme e verso entrante nel foglio. A distanza $d = 5cm$ dall'origine si trova un conduttore filiforme parallelo all'asse del cilindro e al cui interno scorre la corrente i_2. Il percorso γ_1 disegnato in figura è un rettangolo e racchiude entrambi i conduttori percorsi di carrente. Il percorso γ_2 disegnato in figura è una semicirconferenza di centro O e passante per il punto A di coordinate $(R_1/2, 0)$. Sapendo che la circuitazione del campo magnetico lungo il percorso γ_1 vale $\mathcal{C}_{\gamma_1}(\vec{B}) = 3 \cdot 10^{-7} T \cdot m$, calcolare:



1. Il valore della corrente i_2 (modulo e verso)

2. Il valore della circuitazione del campo magnetico lungo il percorso γ_2

3. Il campo magnetico nel punto A (modulo, direzione e verso)

4. Si ricordi che l'energia magnetica di un dipolo magnetico con momento di dipolo $\vec{m}$ immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ vale $\mathcal{U}_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. Calcolare $\mathcal{U}_m$ per un dipolo magnetico posto nel punto A con momento di dipolo $\vec{m} = m_0\vec{i}$, dove $m_0 = 10^{-6} A \cdot m^2$ e $\vec{i}$ è il versore lungo l'asse x

5. Dimostrare la legge di Ampere.

Soluzione problema 3

1. Per calcolare i_2 utilizziamo il teorema di Ampere. Poichè il verso di γ_1 è orario, le correnti entranti nel foglio sono positive, quelle uscenti negative. Per il teorema di Ampere si ha:

$$\mathcal{C}_{\gamma_1} = \mu_0(i_1 + i_2) \qquad \Rightarrow \qquad i_2 = \frac{\mathcal{C}_{\gamma_1}}{\mu_0} - i_1 \simeq -111.3mA$$

Quindi la corrente i_2 è uscente dal foglio.

2. Il valore della circuitazione del campo magnetico lungo il percorso γ_2 si calcola con il teorema di Ampere:

$$\mathcal{C}_{\gamma_2} = -\mu_0 i_{conc}$$

dove i_{conc} è la corrente concatenata a γ_2. Siccome la densità di corrente j_1 è uniforme si ha

$$j_1 = \frac{i_1}{\pi R_1^2}$$

L'area compresa all'interno di γ_2 è pari a

$$\Sigma = \frac{1}{2}\pi(R_1/2)^2 = \frac{\pi R_1^2}{8}$$

La corrente concatenata a γ_2 vale quindi

$$i_{conc} = j_1\Sigma = \frac{i_1}{\pi R_1^2}\frac{\pi R_1^2}{8} = \frac{i_1}{8}$$

da cui la circuitazione

$$\mathcal{C}_{\gamma_2} = -\frac{\mu_0 i_1}{8} \simeq 5.48 \cdot 10^{-8} T \cdot m$$

3. Il campo magnetico nel punto A è dato dalla somma di due contributi, uno dovuto al conduttore cilindrico, l'altro dovuto al filo. Il campo generato dal conduttore cilindrico si ottiene dalla legge di ampere applicata ad un percorso circolare di raggio r. All'interno del conduttore ($r < R_1$) si ha

$$\mathcal{C}_r(\vec{B}) = B_1(r)2\pi r = \mu_0 j_1 \pi r^2 \qquad \Rightarrow \qquad B_1(r) = \frac{1}{2}\mu_0 j_1 r = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R_1^2} r$$

Nel punto A si ha $r = R_1/2$ per cui

$$B_{1A} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R_1^2}\frac{R_1}{2} = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi R_1}$$

A causa della direzione di i_1 il campo B_{1A} è diretto verso il basso, per cui

$$\vec{B}_{1A} = -\frac{\mu_0 i_1}{4\pi R_1}\vec{j} \simeq -(1.75\mu T)\vec{j}$$

Il campo generato dal filo i_2 si ottiene da Biot-Savart:

$$\vec{B}_{2A} = -\frac{\mu_0 i_2}{2\pi(d - R_1/2)}\vec{j} \simeq -(0.556\mu T)\vec{j}$$

Il campo totale vale

$$\vec{B}_A = \vec{B}_{1A} + \vec{B}_{2A} \simeq -(2.306\mu T)\vec{j}$$

4. Siccome il campo magnetico nel punto A è parallelo all'asse y, il prodotto scalare $\vec{m}\cdot\vec{B}$ è nullo. L'energia magnetica del dipolo è quindi nulla.