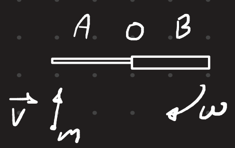
Un'asta è di lunghezza totale $2\ell = 1\,m$ è composta di due parti, di materiali diversi, di eguale lunghezza $\ell = 0.5\,m$. I materiali hanno densità diverse. Indicando le due metà dell'asta con A e B, la massa della parte A è $m_A = 2kg$; la massa della parte B è $m_B = 5kg$. Alla metà dell'asta (cioé alla giunzione tra la parte A e la parte B) c'è un perno O intorno al quale l'asta può ruotare. Un proiettile di massa m colpisce l'asta all'estremità della parte A (a distanza ℓ da O) con velocità $v = 3\,m/s$ ortogonale all'asta stessa. Il proiettile si conficca nell'asta. Determinare

1. La velocità angolare ω del sistema subito dopo l'urto.
2. La velocità del centro di massa v_{CM} subito dopo l'urto.
3. L'impulso $\mathcal{J}$ esercitato sul perno in O durante l'urto assumedo che $m = 1\,kg$.



$m_A = 2\,kg \quad m_B = 5\,kg \quad m = 1\,kg$

$v = 3\,m/s \quad \ell = 0{,}5\,m$

Ciascuna metà dell'asta è omogenea, ma le densità sono diverse.
Quali leggi di conservazione possiamo applicare all'urto?
Non l'energia meccanica (urto completamente anelastico) nè la quantità di moto (il vincolo in 0 genera un impulso esterno), ma il momento angolare rispetto ad O:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o$$

ma $\vec{M}_o = \vec{OP} \times \vec{F}$ per una forza applicata in P, quindi essendo la forza impulsiva applicata in O, $\vec{M}_o = 0$ e $\vec{L}_o = costante$

$(\vec{L}_o = \vec{OP} \times m\vec{v})$

Prima dell'urto: $L = \ell m v$
Dopo l'urto: $L = I\omega$

e dobbiamo ricordare il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione (asse passante per O e verticale al foglio)
Il momento di inerzia ha 3 componenti: la metà A,B della sbarra e il proiettile di massa m conficcato.
Sappiamo che $I = \int R^2\,dm$ dove R è la distanza dall'asse. Per la parte A abbiamo

$$\frac{dm}{dR} = \lambda_A \qquad \lambda_A = \frac{m_A}{\ell} \implies m_A = \ell\lambda_A$$

$$I_A = \int_0^\ell R^2\,dm = \int_0^\ell R^2\lambda_A\,dR = \lambda_A \frac{R^3}{3}\Big|_0^\ell = \frac{\lambda_A \ell^3}{3}$$

$$I_A = \frac{m_A}{\ell}\frac{\ell^{3\,2}}{3} = m_A\frac{\ell^2}{3} \qquad I_B = m_B\frac{\ell^2}{3}$$

$$I_m = \int R^2\,dm = \ell^2\int dm = \ell^2 m$$

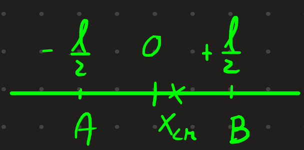
$$I = I_A + I_B + I_m$$

Dunque la velocità angolare dopo l'urto è data da

$$\ell m v = I\omega \implies \omega = \frac{\ell m v}{I} = 1{,}8\ rad/s$$

La seconda domanda chiede la velocità del CM dopo l'urto. Dunque determiniamo la posizione x del CM lungo la sbarra:

$$x_{CM} = \frac{-m\ell - m_A\frac{\ell}{2} - m_B\frac{\ell}{2}}{m + m_A + m_B} = 0{,}031\ m$$



la velocità lineare del CM è

$$v_{CM} = -x_{CM}\,\omega = -0{,}056\ m/s$$

Infine per calcolare l'impulso esercitato sul vincolo O applichiamo il teorema dell'impulso

$$p_f - p_i = J$$

$$\begin{cases} p_i = mv \\ p_f = m_{tot} V_{CM} \end{cases}$$

$$J = m_{TOT} V_{CM} - mv = -3{,}65 \ Ns$$