$$y'(x) = -a\,y(x) + b(x)$$

$$y'(x) + a\,y(x) = b(x)$$

$\int 1 = x$

$$\begin{cases} y'(x) + a\,y(x) = x \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

$a = A$

$1 = x$

$e^{A} = e^{x}$

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

- $y'e^{x} + y e^{x} = x e^{x}$

$$(ye^{x})' = x e^{x}$$

$$ye^{x} = \int x e^{x}\,dx$$

$f(x)\,g(x) - f'(x)\,g(x)$

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = e^{x} \qquad g(x) = e^{x}$

$$ye^{x} = xe^{x} - e^{x} + c$$

$$y = x - 1 + ce^{-x}$$

$$y(2) = 2 - 1 + ce^{-2} = 2$$

$$\cancel{2} - 1 + ce^{-2} = \cancel{2}$$

$$\frac{c}{e^{2}} = 1 \rightarrow c = e^{2}$$

$$y(1) = \cancel{1} - \cancel{1} + e^{2}\cdot e^{-1} = e^{1}$$

---

y soluzione problema di Cauchy $y' = \frac{e^{x}}{y}$ $\quad y(0) = 1$

Determinare $\quad y(\log 5)$

$$y' = \frac{e^{x}}{y}$$

$$\int y' y\,dx = \int e^{x}\,dx \qquad y = u$$

$$\int u\,du = \int e^{x}\,dx$$

$$\frac{y(x)^{2}}{2} = e^{x} + c$$

$$y(0) = 1 \qquad \frac{1}{2} = e^{0} + c \rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$y(\log 5) = ? \qquad y(x) = \sqrt{2e^{x} - 1}$$

$$y(\log 5) = \sqrt{2e^{\log 5} - 1}$$
$$= \sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 3$$

Si consideri il problema di Cauchy

$$y' = \frac{8x+5y}{32y-5x}, \quad y(0) = 1.$$

Dopo aver mostrato che i punti del grafico $(x, y(x))$, al variare di x nel dominio della soluzione y appartengono all'insieme di livello $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ di una opportuna funzione di due variabili, determinare $x > 0$ tale che $(x, x) \in \Sigma$.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{8x+5y}{32y-5x} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad I : \{(x, y(x)) \in \Sigma : x \in D, \Sigma \subset \mathbb{R}^2\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x+5y}{32y-5x} \implies (32y-5x)\,dy = (8x+5y)\,dx$$

$$(32y-5x)\,dy - (8x+5y)\,dx = 0$$
$$(8x+5y)\,dx - (32y-5x)\,dy = 0 \qquad \partial_x = 8$$
$$\nabla U = (8x+5y, -32y+5x) \qquad \partial_y = 32$$
$$\int 8x+5y\,dx = 4x^2+5yx + c$$
$$\int 32y+5x\,dy = -16y^2 + 5xy + c$$

$$U_{(x,y)} = 4x^2 - 16y^2 + 5xy$$

$$U_{(0,1)} = 0 - 16 + 0 = c \implies c = -16$$

$$4x^2 - 16y^2 + 5xy$$
$$U_{(x,x)} = 4x^2 - 16x^2 + 5x^2 = -16$$
$$-7x^2 = -16$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{16}{7}} \rightarrow x = \sqrt{\frac{16}{7}} = 1.5118$$

In quanti modi si possono distribuire 52 carte da gioco a 4 giocatori in modo che ciascuno abbia 13 carte?

$$\frac{52!}{(13!)^4}$$

In quanti modi 8 persone possono sedersi in fila se ci sono 4 coppie e ognuno è vicino al proprio partner?

è la stessa roba

$$n = 2^4 \cdot 4! = 384$$

Un'urna è composta da 20 palline numerate da 1 a 20. Si estraggono una ad una senza reimmissione e si mettono in fila in posti numerati da 1 a 20. In quanti modi si può fare in modo che le pari vadano sulle caselle pari e le dispari vadano sulle caselle dispari?

Esprimere il risultato con un intero

pari $= 10$

dispari $= 10$

$$10! \cdot 10!$$

Dire in quanti modi si possono distribuire 12 carte distinte a 4 giocatori N, S, E, W (senza che l'ordine delle carte conti per un singolo giocatore) in modo tale che:

- N abbia 2 carte;
- S abbia 4 carte;
- E abbia 3 carte;
- W abbia 3 carte.

Esprimere il risultato in forma di numero intero

$n = 12$

$K = \#$ carte

$$\frac{n!}{K!(n-K)!}$$

① $\binom{12}{2} \binom{10}{1} \binom{9}{2} \binom{7}{7}$

$$\frac{12!}{2!\,\cancel{10!}} \quad \frac{\cancel{10!}}{1 \cdot \cancel{9!}} \quad \frac{\cancel{9!}}{2!\,7!} \quad 1 = \frac{12!}{2!\,2!\,7!} =$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4} = 23760$$

NUOVO QUIZ

$$\binom{12}{2}\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$$

$$\frac{12!}{\cancel{10!}\,2!} \cdot \frac{\cancel{10!}}{\cancel{6!}\,4!} \cdot \frac{\cancel{6!}}{3!\,3!} \cdot 1 = \frac{12!}{2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3!} = 277\,200$$

QUIZ 22/11

Un dado truccato ha le facce 1,2,3,4,5,6 che escono con queste probabilità:

- 1 esce con probabilità 0.17
- 2 esce con probabilità 0.13
- 3 esce con probabilità 0.17
- 4 esce con probabilità 0.18
- 5 esce con probabilità 0.15
- 6 esce con probabilità 0.2

Qual è la probabilità che esca **1**, sapendo che esce un numero dispari?

$$P(1) = \frac{0{,}17}{0{,}17+0{,}17+0{,}15} = 0{,}3469$$

Un dado truccato ha le facce 1,2,3,4,5,6 che escono con queste probabilità:

- 1 esce con probabilità 0.17
- 2 esce con probabilità 0.13
- 3 esce con probabilità 0.17
- 4 esce con probabilità 0.18
- 5 esce con probabilità 0.15
- 6 esce con probabilità 0.2

Se l'esito del lancio dà 1 o 2 ci fermiamo, altrimenti rilanciamo. Qual è la probabilità che la somma degli esiti sia minore o uguale a 4?

Formula partizione

$$0{,}17 + 0{,}13 + 0{,}17 \cdot 0{,}17$$

$$0{,}3289$$

$$1 \mid 2 \mid 1 \ +3$$

QUIZ 9

Un'urna contiene infinite palline numerate con gli interi 1, 2, 3, 4,..... La pallina $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ può essere estratta con probabilità $\frac{6}{7^k}$. Determinare, estraendo una di queste palline, di estrarre un multiplo di **3**.

$$\Omega = +\infty \qquad P_K = \frac{6}{7^K} \qquad P(\text{multiplo di } 3) = ?$$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{6}{7^K} = 6\left(\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{7^K}\right) = 6\left(\sum_{J=0}^{\infty} \frac{1}{7^{J+1}}\right) = 6\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots\right) = \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{6}} = 1$$

$$P(3) + P(6) + P(9) + \dots = 6\left(\frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^9} + \dots\right) =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{7^3}\left(1 + \left(\frac{1}{7^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{7^3}\right)^3\right) = \frac{6}{7^3} \cdot \frac{1}{1 - 1/7^3} = \frac{6}{\cancel{7^3}} \cdot \frac{\cancel{7^3}}{7^3 - 1} =$$

$$= \frac{6}{7^3 - 1} = 0{,}0175$$

Tra le 240 persone che fanno questo quiz, 83 fanno gli esercizi da soli, gli altri li fanno in compagnia. Scelte tre persone a caso, calcolare la probabilità che almeno una di queste faccia gli esercizi da sola.

240 TOT
83 SINGOLI
157 COMPAGNIA

$240 : 100 = 83 : X$

$X_S = \frac{415}{12} = 34{,}5833$

$X_C = 65{,}4167$

$\frac{3}{237} \cdot 34{,}5833$

$$|S| = 83 \qquad |C| = 240 - 83 = 157 \qquad 3\text{-sequenze di } I_{240}$$

$$P(S_{TOT}) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_3)$$

$$|\Omega| = \binom{240}{3} = \frac{240!}{237!\,3!} = \frac{\cancel{240}^{\cancel{120}\,40} \cdot 239 \cdot 238 \cdot \cancel{237!}}{\cancel{237!} \cdot \cancel{3}_1 \cdot \cancel{2}_1} = 2275280$$

$$\binom{83}{1} = \frac{83!}{82!\,1} = 83 \qquad \binom{157}{2} = \frac{157!}{155! \cdot 2!} = \frac{157 \cdot \cancel{156}^{78}}{\cancel{2}_1} = 157 \cdot 78$$

$$\binom{83}{2} = \frac{83!}{81!\,2!} = 83 \cdot 41 \qquad \binom{157}{1} = \frac{157!}{156!\,1} = 157$$

$$\binom{83}{3} = \frac{83!}{80!\,3!} = \frac{83\cdot \cancel{82}^{41}\cdot \cancel{81}^{27}\cdot \cancel{80!}}{\cancel{80!}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 83\cdot 41\cdot 27 \qquad \binom{157}{0} = 1$$

$$P_{(E)} = \frac{83\cdot 157\cdot 78 + 83\cdot 41\cdot 157 + 83\cdot 41\cdot 27}{40\cdot 239\cdot 238} = 0.7219$$

Nel Veneto il 35% delle persone adulte non legge mai un quotidiano, il 27% fa regolarmente attività sportiva e il 23% non legge mai un quotidiano e non fa regolarmente attività sportiva.

Scelta casualmente una persona adulta, calcolare la probabilità che non legga mai un quotidiano se fa regolarmente attività sportiva.

$P_{(NL)} = 35\%$ $\quad P_{(S)} = 27\%$ $\quad P_{(NL e NS)} = 23\%$ $\quad P_{(NL e S)} = ?$

NL, ma S $\quad 35\% - 23\% = 12\%$

$$\frac{0{,}12}{0{,}27} = 0{,}4444$$

Abbiamo due dadi indistinguibili. Uno è equilibrato, l'altro quando viene lanciato dà 6 nel 16% dei casi. Prendiamo a caso uno dei due dadi e lo lanciamo. Se non esce 6, qual è la probabilità di aver preso il dado equilibrato?

$P_{(6)} = 16\%$ $\quad P_{(!=6)} = 84\%$

$$\frac{\frac{5}{6}\cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{6}+0{,}84\right)} = 0{,}4980$$

Si deve formare una squadra di calcetto formata da 3 donne e 2 uomini scelti da un gruppo di 8 donne e di 8 uomini. Calcolare la probabilità che Francesca e Giulia non siano contemporaneamente nella squadra e che Alberto sia uno dei componenti della squadra.

3 donne su 8 $\quad \binom{8}{3}$ $\{X, X, G\}$ $\{X, X, F\}$

2 uomini su 8 $\quad \binom{8}{1}$ $\{X, A\}$

$S = \{3D, 2U\}$ $\quad |D| = 8$ $\quad |U| = 11$ $\quad E$: Alberto $\cap$ Francesca o Giulia

$$\binom{8}{3} - \binom{6}{1} = \frac{8!}{5!\,3!} - \frac{6!}{5!\,1} = \frac{\cancel{8}^{4}\cdot 7\cdot \cancel{6}^{2}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,\cancel{3}\cdot \cancel{2}} - 6 = 50$$

$$C_{(10,1)} = \binom{8}{1} = \frac{7!}{6!\,1} = 7$$

$$|\Omega| = \binom{8}{3}\binom{11}{2} = \frac{8!}{5!\,3!}\quad \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{\cancel{8}^{4}\cdot 7\cdot \cancel{6}^{2}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,\cancel{3}\cdot \cancel{2}}\cdot \frac{\cancel{8}^{4}\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot \cancel{2}} = 1568$$

$$|E| = \binom{8}{1}\left[\binom{8}{3} - \binom{6}{1}\right] = 7\cdot 50 = 350$$

$$P_{(E)} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{350}{1568} = 0{,}2232$$

La probabilità di fare bene il TOLC di ingresso a Ingegneria è pari a 0.13. La probabilità di finire gli studi in 3 anni è uguale a 0.72. Chi supera bene il TOLC ha una probabilità 0.39 di finire gli studi entro il terzo anno. Se uno studente si laurea entro il terzo anno, qual è la probabilità che abbia fatto bene il TOLC di ingresso?

$P_{(T)} = 0{,}13 \qquad P_{(S)} = 0.72 \qquad P_{(S|T)} = 0.39$

$$P_{(T|S)} = \frac{P_{(T)} \cdot P_{(S|T)}}{P_{(S)}} = 0.0704$$

Per un dato candidato alle presidenziali di uno stato straniero, che si svolgono in tre turni, la probabilità di superare il I turno è del 39%. Una volta superato il primo turno, la probabilità di superare il secondo è del 65%, e la probabilità di vincere all'ultimo turno è del 61%. Qual è la probabilità che il candidato vinca le elezioni?

$P_{(1)} = 0.39 \qquad P_{(2)} = 0.65 \qquad P_{(3)} = 0.61$

$$P_{(TOT)} = P_{(1)} \cdot P_{(2|1)} \cdot P_{(3|1\,2)} = 0.39 \cdot 0.65 \cdot 0.61 = 0.1546$$

In un condominio il 32% è soddisfatto, il 68% non lo è. In una assemblea partecipano il 40% dei soddisfatti e il 66% degli insoddisfatti. Un condomino che partecipa all'assemblea è scelto a caso. Qual è la probabilità che si tratti di un condomino soddisfatto?

$P_{(S)} = 0.32 \qquad P_{(NS)} = 0.68$

$P_{(SA)} = 0.40 \qquad P_{(NSA)} = 0.66$

$$\frac{0.32 \cdot 0.40}{0.32 \cdot 0.40 + 0.68 \cdot 0.66} = 0.2219$$

Supponiamo che, per i test antigenici rapidi per COVID-19, si abbia

P(+|Malato) = 0.761 e P(-|Sano) = 0.994.

Le persone che fanno questo particolare tipo di test sono però più a rischio della popolazione generale, poiché tipicamente lo fanno in quanto esposte a un contagiato: non si possono quindi usare le consuete statistiche nazionali per P(Malato).

In una farmacia, però, si osserva una probabilità totale, sugli antigenici rapidi fatti presso di loro, pari a P(+) = 0.01. Usando la formula della probabilità totale (detta anche della partizione) su P(+), trovare per quale valore di P(Malato) si ottiene P(+) =0.01.

$P_{(+|M)} = 0.761 \qquad P_{(-|S)} = 0.994$

$P_{+} = 0.01 \qquad P_{(M)} = ?$

$$P_{(+|M)} = \frac{P_{(M|+)}\, P_{(+)}}{P_M} \implies P_{(M)} = \frac{P_{(M|+)}\, P_{(+)}}{P_{(+|M)}}$$

$$P_{(+)} = P_{(+|M)}\, P_{(M)} + P_{(+|S)}\, P_S \implies 0.01 = 0.761\, p + (1 - 0.994)(1-p)$$

$$0.01 = 0.761 p + 0.006 - 0.006 p$$

$$P_{(M)} = p = \frac{0.01 - 0.006}{0.761 - 0.006} = 0{,}0052$$

Siano C e D due eventi di uno spazio campionario (Ω, P) con $P(C) = 0.37, P(D) = 0.5$, e $P(C \cap D) = 0.44$. Quanto vale $P(C^c \cap D)$?

$$P(C^c \cap D) = P(D) - P(C \cap D) = 0.5 - 0.44 = 0.06$$

Un mazzo di carte contiene 19 carte Nere e 14 carte rosse. Dopo averlo mescolato, si scelgono a caso tre carte, una dopo l'altra, senza rimetterle nel mazzo. Qual è la probabilità che la terza carta sia Nera?

$N = 19 \quad R = 14 \quad TOT = 33$

$|\Omega| = 33 \cdot 32 \cdot 31 = 32736$

3ª carta nera tra 19, // 32, // 31 $\} \quad 19 \cdot 32 \cdot 31 = 18848$

$$\frac{18848}{32736} = 0.5757$$

Il canale 1 di FAMP ha 171 studenti, il canale 2 ne ha 156. Si scelgono a caso 5 studenti dall'unione dei due canali. Qual è la probabilità che il gruppo formato abbia almeno tre studenti del canale 1?

$C1 = 171 \quad C2 = 156 \quad TOT = 327$

5-seq di $I_{327} \Rightarrow S_{(327,5)} = \frac{327!}{322!\,5!}$

Scelgo 3 stud di C1 $\binom{171}{3}$ Scelgo 2 stud di C1 $\binom{156}{2}$

4 $\binom{171}{4}$ 1 $\binom{156}{1}$

5 $\binom{171}{5}$ 0 $\binom{156}{0}$

$$P_{(E)} = \frac{\frac{171!}{168!\,3!} \cdot \frac{156!}{154!\,2!} + \frac{171!}{167!\,3!} \cdot \frac{156!}{155!\,1} + \frac{171!}{166!\,5!}}{\frac{327!}{322!\,5!}} =$$

$$= \frac{\frac{171 \cdot 170 \cdot 169}{3 \cdot 2} \cdot \frac{156 \cdot 155}{2} + \frac{171 \cdot 170 \cdot 169 \cdot 168}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{156}{1} + \frac{171 \cdot 170 \cdot 169 \cdot 168 \cdot 167}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\frac{327 \cdot 326 \cdot 325 \cdot 324 \cdot 323}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} =$$

$$\boxed{0.5432}$$

Usando la formula di Stirling, qual è, approssimativamente, il numero di decimali di $145!$? rispondere con un numero intero (tolleranza di ± 1).

$$[\log_{10} k] + 1 = \log_{10}\left(\sqrt{2\pi \cdot 145}\left(\frac{145}{e}\right)^{145}\right) + 1$$

Una marca di cioccolatini permette, una volta scartati, di vincerne un altro con probabilità del 36%. Qual è la probabilità che si riescano ad avere 5 cioccolatini prima di perdere (cioè i cioccolatini da 1 a 4 permettono di vincerne un altro, mentre il cioccolatino 5 no).

$$0{,}36^4 \cdot (1-0{,}64) = 0{,}0038$$

Ad un esame FAMP svolto sui terminali, Moodle mostra che non è stato superato dal 12% degli studenti. Il docente prende la pila di elaborati scritti e ad uno ad uno procede finché non trova il compito di uno studente che secondo Moodle non ha superato l'esame. Qual è la probabilità che debba esaminarne almeno 7 prima di trovare il compito "insufficiente" secondo Moodle (cioè che il primo compito insufficiente sia il numero 8 o successivo)?

$$P(x>k) = (1-p)^7 = (1-0{,}12)^7 = 0{,}4086$$

QUIZ 10

Un imballaggio di arance deve contenere frutti di diametro simile. La probabilità che un'arancia abbia un diametro accettabile è pari a 0.958. Calcolare la probabilità che su 100 arance ve ne siano almeno 98 adatte all'imballaggio supponendo l'indipendenza dei diametri delle arance.

0.21

$p = 0.958 \quad n = 100 \quad K = 98$

$P_{TOT} = p(98) + p(99) + p(100) = 0,2060$

$\binom{100}{98}(0.958)^{98}(1-0.958)^2 + \binom{100}{99}(0.958)^{99}(1-0.958) + (0,958)^{100}$

$\frac{100 \cdot 99}{2} \qquad \frac{100!}{99!} = 100$

Un imballaggio di arance deve contenere frutti di diametro simile. La probabilità che un'arancia abbia un diametro accettabile è pari a 0.929. Calcolare la probabilità che su 100 arance ve ne siano almeno 98 adatte all'imballaggio, utilizzando una opportuna variabile aleatoria di **Poisson**, supponendo che i diametri delle arance siano indipendenti.

Scrivere il risultato troncando a 5 decimali dopo la virgola.

$p_A = 0,929 \quad n = 100 \quad K = 98$

Con Poisson

$P_{NA} = P(0) + P(1) + P(2) = e^{-7.1}\frac{7.1^0}{0!} + e^{-7.1}\frac{7.1^1}{1!} + e^{-7.1}\frac{7.1^2}{2!} = 0,02748$

$p_{NA} = 1 - 0.929 = 0.071 \Rightarrow \lambda = n\,p_{NA} = 7.1 \Rightarrow P_o(7.1)$

Una fabbrica produce motori elettrici. Un motore può essere, indipendentemente da un altro, difettoso con probabilità 0.01.

Qual è la probabilità che un campione di 300 motori contenga esattamente 5 motori difettosi? Choose...

Approssimare la probabilità che un campione di 300 motori contenga esattamente 5 motori difettosi usando una opportuna variabile di Poisson. Choose...

con binomiale

$P = 0.01 \qquad P(5) \text{ su } 300 = ?$

$\binom{300}{5}(0.01)^5(1-0.01)^{295} = 0.100585$

$\lambda = n \cdot p$

$e^{-3}\frac{3^5}{5} = 0.10081$

Un'urna contiene i numeri da 1 a 23. Pesco a caso un numero e lo reinserisco nell'urna; ne pesco un'altro e lo reinserisco nell'urna, e così via. Calcolare la probabilità che il numero 10 esca per la prima volta al dodicesimo tentativo.

$$P_{(x=12)} = p(1-p)^{11} = \frac{1}{23}\left(1-\frac{1}{23}\right)^{11} = 0.0266$$

$$p = \frac{1}{23} =$$

Si distribuiscono a caso 1134 caramelle uguali a 100 bambini, indipendentemente una dall'altra. Calcolare la probabilità che Mario riceva esattamente 11 caramelle.

Troncare il risultato a 5 decimali

Ogni caramella va a Mario con $p = \frac{1}{100}$

$$\underbrace{\binom{1134}{11}}_{\text{possibili distribuzioni}} \underbrace{(0.01)^{11}}_{\text{numero successi}} \underbrace{(1-0.01)^{1123}}_{\text{numero insuccessi}} = 0.11933$$

Si considerano due mazzi di carte Rosse e Nere . Il mazzo A è normale (26 Rosse, 26 Nere), mentre il mazzo B ha 25 carte rosse e 29 carte nere.

Una procedura permette di scegliere uno dei due mazzi, il mazzo A viene scelto con probabilità 0.51.

Una volta scelto il mazzo, si estrae una prima carta dal mazzo, la si rimette poi nel mazzo e si mescola. Si estrae poi una seconda carta a caso da quel mazzo.

Qual è la probabilità che la seconda carta sia rossa, sapendo che la prima è rossa, ma non sapendo quale dei due mazzi e' stato scelto?

$$A = \{\overset{R}{26}, \overset{R}{26}\}$$

$$B = \{25, 29\}$$

$$P_A = 0.51 \qquad P_B = 0.49$$

$$P_{(R|A)} = \frac{R_A}{|A|} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} \qquad P_{(R|B)} = \frac{R_B}{|B|} = \frac{25}{54}$$

$$P_{(2R\ 1R)} = P_{(2°1°|A)} P_{(A)} + P_{(2°1°|B)} P_{(B)} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) 0.51 + \left(\frac{25}{54}\cdot\frac{25}{54}\right)\cdot 0.49$$

$$P_{(1R)} = P_{(1°R|A)} P_{(A)} + P_{(1°R|B)} P_{(B)} = \frac{1}{2}\, 0.51 + \frac{25}{54}\cdot 0.49$$

$$P_{(2°R|1°R)} = \frac{P_{(2R\ 1R)}}{P_{(1R)}} = 0.4825$$

Si mettono a caso 190928 oggetti in 24713 cassetti, indipendentemente uno dall'altro. Approssimare, usando una opportuna variabile di **Poisson**, la probabilità che il primo cassetto contenga esattamente 8 oggetti.

$n = 190928$

$p = \dfrac{1}{24713}$ ogni oggetto finisce in un cassetto con questa probabilità

$\lambda = np = \dfrac{190928}{24713}$

$$P_{(8)} = e^{-\frac{190928}{24713}} \frac{\left(\frac{190928}{24713}\right)^8}{8!} = 0.1389$$

Si consideri l'esperimento aleatorio che consiste nel lanciare una moneta non truccata due volte. Si descriva lo spazio campionario Ω e si considerino:

- A_1 l'evento di avere testa al primo lancio;
- A_2 l'evento di avere testa al secondo lancio;
- A_3 l'evento di avere testa una ed una sola volta.

Allora gli eventi A_1, A_2, A_3:

Select one:

- a. sono a due a due indipendenti ma non indipendenti
- b. alcune coppie di eventi non sono indipendenti fra loro
- c. sono indipendenti
- d. altro

Agli studenti vengono proposti 6 quiz con 4 risposte a scelta ciascuno. Il docente distrattamente ha messo online i quiz di un insegnamento più avanzato, sicché gli studenti rispondono a caso.

Qual è la probabilità che lo studente risponda correttamente ad almeno 4 quiz (compreso solo a 4)?

Rispondere nella forma 0.abcd troncando ai primi quattro decimali dopo la virgola.

$$P(X \geq 4) = P\left(B\left(6,\tfrac{1}{4}\right) \geq 4\right) = P\left(B\left(6,\tfrac{1}{4}\right) = 4\right) + P\left(B\left(6,\tfrac{1}{4}\right) = 5\right) + P\left(B\left(6,\tfrac{1}{4}\right) = 6\right) =$$

$$= \binom{6}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^4\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\tfrac{1}{4}\right)^5\left(\tfrac{3}{4}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\tfrac{1}{4}\right)^6\left(\tfrac{3}{4}\right)^0 = 0.0375$$

In un laboratorio c'è una sequenza (infinita!) di computer numerati 1, 2, 3, 4,.... Ognuno di questi può essere infettato da un virus, indipendentemente dall'altro, con probabilità 0.07. Qual è la probabilità che testandoli uno ad uno, occorra testare almeno i primi 22 per individuare la presenza di un virus (cioè che i primi 21 non siano infettati)?

$$(1-0.07)^{21} = 0.2178$$

In alcuni telefilm polizieschi, si sente dire "il criminale ha questa inusuale caratteristica... trovare questa persona e avrete il vostro uomo". Supponiamo che ogni dato individuo abbia questa inusuale caratteristica con probabilità 9.1×10^{-6}, indipendentemente dagli altri individui, e che la città in questione abbia 3.9 milioni di abitanti. Supponendo che l'ispettore trovi una tale persona, approssimare con una opportuna variabile discreta la probabilità che ce ne sia almeno un'altra.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esima persona presenta la caratteristica} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$p = 9.1 \times 10^{-6} \qquad n = 3.9 \cdot 10^6$$

$$\lambda = 9.1 \cdot 3.9 = 35.49$$

$$\frac{1 - e^{-\lambda}\lambda - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = 0.9999$$

La assicurazione VITASALVA dà un premio di 63641 € in caso di decesso entro l'anno dalla stipula. Un gruppo di persone ha probabilità 0.9989 di sopravvivere entro l'anno. Quale deve essere il costo dell'assicurazione affinché la VITASALVA abbia un guadagno netto medio di 116 su tale gruppo di persone? (guadagno netto: differenza tra incasso e premio versato)

$$\text{costo} = 116 + 63641(1 - 0{,}9989) = 186.0051$$

Sia X variabile aleatoria che assume i valori:

- -4 con probabilità 0.19
- 4 con probabilità 0.1
- 3 con probabilità 0.14
- x con probabilità 0.57

Determinare $x < 0$ **[NEGATIVO!]** affinché $E[X^2] = 22$

$$E[x^2] = x_1^2 \cdot p_1 + \dots + x_n^2 p_n$$

$$22 = -4^2 \cdot 0{,}19 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}14 + x^2 \cdot 0.57$$

$$x = 5{,}3146$$

Sia X variabile aleatoria con funzione di distribuzione

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^x \text{ se } x < 0, \\ \left(1 - \frac{1}{7}e^{-x}\right) \text{ se } x \geq 0. \end{cases}$$

Determinare $P(X < 0)$.

Proprietà funzioni di distribuzione

$\forall a \in \mathbb{R}$ si ha $P(X<a) = F_X(a^-) = \lim_{x \to a^-} F_X(x)$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{4} e^x = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Sia X variabile aleatoria con funzione di distribuzione

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^x \text{ se } x < 0, \quad 0^- \\ \left(1 - \frac{1}{7}e^{-x}\right) \text{ se } x \geq 0. \quad 0 \end{cases}$$

calcolare $P(X = 0)$.

$$P(X=a) = F_X(a) - F_X(a^-)$$

$$F(0) - F(0^-) = \left(1 - \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} = 0{,}6071$$

QUIZ 11

In una zona sismica del pianeta, in un mese ci sono in media 9 terremoti di magnitudo maggiore di 4 (i mesi sono assunti di uguale durata). Se durante due mesi se ne sono verificati 19, qual è la probabilità che 10 di questi si siano verificati nel primo mese?

$\lambda = 9$ $X = $ terremoti in 2 mesi $X \sim P_o(2\lambda)$ $\Rightarrow 19 = x_0 = x_1 + x_2 = 10 + 9$

$$P_{(x=19)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-18}\, 18^{19}}{19!}$$

$$P_{(x_1=10 \cap x_2=9)} = \frac{e^{-9}\, 9^{10}}{10!} \cdot \frac{e^{-9}\, 9^{9}}{9!} = \frac{e^{-18}\, 9^{19}}{10! \cdot 9!} =$$

$$P_{(x_1=10 / x_2=9)} = \frac{P_{(x_1=10 \cap x_2=9)}}{P_{(x=19)}} = 0.1761$$

18 persone estraggono una ad una delle palline senza reimmissione da un'urna che contiene inizialmente 66 palline Rosse e 119 palline Nere. (quindi la persona 1 estrae 2 palline che non vengono rimesse dentro, la persona 2 ne estrae 2 dalle rimanenti, ecc...) Determinare il numero atteso di persone che pescano due palline dello stesso colore.

persone $= 18$ $R = 66$ $N = 119$ $\Rightarrow TOT = 185$

$E_{[x]} = ?$ $X = \#$ persone con stesso colore $\Rightarrow X = \begin{cases} 1 & \text{stesso colore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\binom{66}{2} = \frac{66!}{64!\; 2!} = 2145$$

$$\binom{119}{2} = \frac{119!}{117!\; 2!} = 7021$$

$$\binom{185}{2} = \frac{185!}{183!\; 2!} = 17020$$

$$P = \frac{\binom{78}{2} + \binom{116}{2}}{\binom{185}{2}} = \frac{2145 + 7021}{17020} = 0.5385$$

$$E_{[x]} = \sum_{i=1}^{18} E_{[x_i]} = 18 \cdot E_{[x_i]} = 9.693$$

Una variabile aleatoria discreta X assume i valori $\{1, 2, \ldots, 16\}$ con densità discreta pari a

$$p_X(k) = \frac{24.5 - k}{256}, \quad k = 1, \ldots, 16.$$

Determinare la varianza di X

$$Var[x] = E[x^2] - \mu_x^2$$

$$E[x] = \mu_x = \frac{1}{256} \sum_{k=1}^{16} k(24,5 - k) = 7.1718$$

$$E[x^2] = \frac{1}{256} \sum_{k=1}^{16} k^2(24,5 - k) = 70.9219$$

$$Var[x] = 70.9219 - 7.1718^2 = 19.4871$$

Un mazzo ha 9 carte Rosse e 5 carte Nere. Se ne estraggono tre. Qual è la varianza del numero di carte Rosse estratte?

$R = 9 \quad N = 5 \quad TOT = R + N = 14 \quad 3$ estratte

$X_i = \# R$ estratte $= \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-esima } R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\quad X_i$ NON INDIP

$$P_{(x=1)} = \frac{\binom{9}{1}\binom{4}{2}}{\binom{14}{3}} = \qquad 1R \quad 2N$$

$$P_{(x=2)} = \frac{\binom{9}{2}\binom{4}{1}}{\binom{14}{3}} = \qquad 2R \quad 1N$$

$$P_{(x=3)} = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{14}{3}} = \qquad 3R \quad 0N$$

$$E[x] = \sum_{i=1}^{3} i(p_{x}(x_i)) = 1 \cdot P_{(x=1)} + 2 \cdot P_{(x=2)} + 3 \cdot P_{(x=3)} =$$

$$= \frac{1\left(\frac{9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 1!}\right) + 2\left(\frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 2!} \cdot \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 1!}\right) + 3\left(\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 3!}\right)}{\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{\cancel{11!}\ 3!}} =$$

$$= 1.5082$$

$$E[x^2] = 1 \cdot P_{(x=1)} + 4 \cdot P_{(x=2)} + 9 \cdot P_{(x=3)} = 3.6840$$

$$Var[x] = E[x^2] - \mu_x^2 = 3.6840 - (1.5082)^2 = 1.4093$$

Supponiamo che il numero giornaliero di persone ricoverate per attacchi violenti di asma in un dato ospedale sia una variabile aleatoria di Poisson di media 37. In giornate in cui l'inquinamento dell'aria aumenta, la distribuzione di attacchi su un giorno diventa una legge di Poisson con media 45. Se in un anno non bisestile(quindi formato da 365 giorni) 45 giorni sono di alto inquinamento, qual è la varianza dei ricoveri per asma in quell'anno?

Assumiamo che il numero giornaliero di persone ricoverate sia indipendente da ciò che succede nelle altre giornate.

$X \sim P_o(37) \qquad 37 = \lambda_x = np = E[x] = Var[x]$

$Y \sim P_o(45) \qquad 45 = \lambda_y = np = E[y] = Var[y]$

365 giorni 45 alto inquinamento

$$Var[X+Y] = 320 \cdot Var[X] + 45 \cdot Var[Y] + 2\underbrace{Cov[X,Y]}_{=0 \text{ poiché indipendenti}} = 320 \cdot 37 + 45 \cdot 45 =$$

$$= 13865$$

Il cosiddetto test del DNA non fa altro che misurare la lunghezza di K geni, senza controllare le basi azotate che li compongono. Per ognuno di tali geni, la probabilità che due dati individui presentino una lunghezza uguale viene assunta come pari a $1/10$. Un'altra ipotesi che viene comunemente fatta è che le lunghezze di geni diversi siano indipendenti l'una dall'altra. Supponiamo di misurare la lunghezza di $K = 7$ geni da un campione di DNA trovato su una scena del crimine. Supponendo di avere un database di 15134228 individui, calcolare il numero medio di individui che si troveranno con il test del DNA che corrisponde al campione incriminato.

$p = \frac{1}{10}$ $\forall$ gene $\Rightarrow p = \frac{1}{10^7}$ prob che tutti e 7 corrispondano

$K = 7$ $\quad n = 15134228$

$B(15134228, 10^{-7}) \approx P_o(\lambda)$ $\quad \lambda = np = 1,5134228$

$E[X] = \lambda = np = 1,5134228$

Due giocatori disputano una serie di partite che termina solo quando uno dei due arriva a vincerne due. Supponiamo che ogni partita venga vinta, indipendentemente dalle altre, dal primo giocatore con probabilità 0.65 e dall'altro con probabilità 1-0.65. Sia N la variabile aleatoria uguale al numero di partite disputate.

Calcolare la densità discreta di N e dedurne il valore atteso.

$P_1 = 0,65$ $\quad P_2 = 0,35$ $\quad N = \#$partite disputate

$N_i = \begin{cases} 1 & \text{partite vinte} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$P_{(N=2)} = 0,65^2 + 0,35^2 = 0,545$

$P_{(N=3)} = 2 \cdot 0,65 \cdot 0,35 = 0,455$

$E[N] = 2\, P_{(N=2)} + 3\, P_{(N=3)} = 2,455$

Sia X variabile di Poisson di parametro 0.7. Sia poi $g(x) = (0.7)^x$ per ogni $x \geq 0$. Calcolare il valore atteso di $g(X)$.

$X \sim P_o(0,7)$ $\quad \lambda = np = 0,7$ $\quad g(x) = (0,7)^x$

$$E[g(x)] = \sum_{x=0}^{+\infty} \lambda^x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2x}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda^2} = e^{\lambda^2 - \lambda} = 0,8105$$

Sia X una variabile aleatoria su uno spazio con probabilità (Ω, P) la cui funzione di distribuzione è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x < -7, \\ 1/29,\ -7 \leq x < 0, \\ 8/87,\ 0 \leq x < 10, \\ \frac{8}{58} + \frac{21}{58}\frac{x-10}{8},\ 10 \leq x < 18 \\ 1,\ x \geq 18. \end{cases}$$

Quanto vale $P(X \in]0, 18[)$?

$$P(x<18) = F_X(18^-) - F_X(0) = \frac{8}{58} + \frac{21}{58}\frac{x-10}{8} - \frac{8}{87} =$$

$$\lim_{x \to 18^-} \frac{8}{58} + \frac{21}{58}\frac{18-10}{8} - \frac{8}{87} = 0,4080$$

Quali delle seguenti funzioni **NON** possono essere funzioni di distribuzione di una *variabile continua*? Ci possono essere più risposte corrette: selezionarle tutte!

1) $F(x) = \begin{cases} \frac{5}{10}e^{x} \text{ se } x < 0, \\ 1 - \frac{5}{10}e^{-x} \text{ se } x \geq 0; \end{cases}$

2) $F(x) = \begin{cases} \frac{5}{10}e^{x} \text{ se } x < 0, \\ 1 - \frac{9}{10}e^{-x} \text{ se } x \geq 0; \end{cases}$

3) $F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(9x) + \frac{1}{2};$

4) $F(x) = \frac{9}{\pi}\arctan(x);$

5) $F(x) = \begin{cases} \frac{5}{10}e^{x} \text{ se } x < 0, \\ \frac{5}{10}e^{-x} \text{ se } x \geq 0. \end{cases}$

Controllo se le funzioni sono continue facendo limite destro e sinistro

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{5}{10} e^{x} = \frac{5}{10}$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{5}{10} e^{-x} = \frac{5}{10}$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \overset{=0}{\boxed{\frac{5}{10} e^{-x}}} - \lim_{x \to -\infty} \overset{=0}{\frac{5}{10} e^{x}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{5}{10} e^{x} = \frac{5}{10}$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{9}{10} e^{-x} = \frac{1}{10}$$

NON CONTINUA

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\pi} \arctan(9x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{9}{\pi} \arctan(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x) = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9 \neq 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{5}{10} e^{x} = \frac{5}{10}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{5}{10} e^{-x} = \frac{5}{10}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \overset{=0}{\boxed{\frac{5}{10} e^{-x}}} - \lim_{x \to -\infty} \overset{=0}{\frac{5}{10} e^{x}} = 0 \neq 1$$