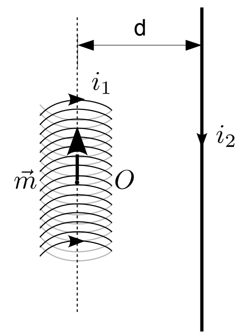
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

a.a. 2018-2019
Elementi di Fisica II: 15 Febbraio 2019
Seconda prova in itinere / Compito Completo

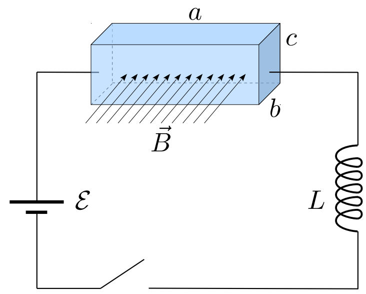
Problema 1



Si consideri un solenoide lungo $L = 12\,cm$ con un numero di spire $N = 150$ nel quale circola una corrente i_1. La sezione del solenoide é un cerchio di raggio $R = 1.5cm$. Ad una distanza $d = 3cm$ dall'asse del solenoide, un filo conduttore parallelo all'asse del solenoide é percorso da una corrente $i_2 = 2A$ con verso indicato in figura. Sapendo che il modulo del campo magnetico nel centro O del solenoide vale $B_O = 20\,\mu T$, calcolare:

1. La corrente i_1 che circola nel solenoide (si approssimi il solenoide con un solenoide infinito)
2. L'angolo tra il campo magnetico $\vec{B}_O$ e l'asse del solenoide.
3. Un dipolo magnetico di momento magnetico $|\vec{m}| = 45A \cdot m^2$ é inizialmente posto sull'asse del solenoide con momento magnetico concorde al campo generato dal solenoide (come in figura). Calcolare il lavoro esterno necessario per ruotare il dipolo in modo che sia parallelo e con verso contrario al campo magnetico $\vec{B}_O$.
4. Una spira quadrata di lato $\ell = 2cm$ ha il lato AB che giace sull'asse del solenoide. Sapendo che nella spira scorre una corrente $i_3 = 650mA$, calcolare il modulo della forza che subisce il lato AB.

Problema 2

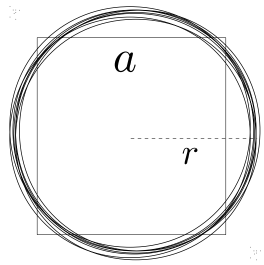


Un circuito RL è formato da un solenoide con coefficiente di autoinduzione L e da un conduttore di rame a forma di parallelepipedo (lati $a = 80cm$, $b = 1mm$ e $c = 2mm$ come in figura) collegati in serie ad un generatore di tensione $\mathcal{E} = 50\,V$. L'energia magnetica accumulata nel solenoide ad un tempo $t \gg \tau$ (τ è la costante di tempo del circuito) vale $U_L = 0.5\,J$. Sapendo che la resistività del rame vale $\rho = 17.1 \cdot 10^{-9}\Omega \cdot m$, calcolare:

1. La resistenza R del conduttore.
2. La costante di tempo circuito.
3. Il modulo della differenza di potenziale ai capi del solenoide al tempo $t_1 = \tau/3$.
4. Ad un tempo $t \gg \tau$ viene acceso un campo magnetico $\vec{B}$ di modulo $B = 15T$ come in figura. Calcolare la tensione di Hall tra le faccia superiore e inferiore della resistenza, sapendo che la densità dei portatori nel rame è $n = 8.49{\cdot}10^{28}m^{-3}$. Sapendo che i portatori sono elettroni, quale faccia sarà caricata positivamente?

Problema 3: solo per la seconda prova in itinere

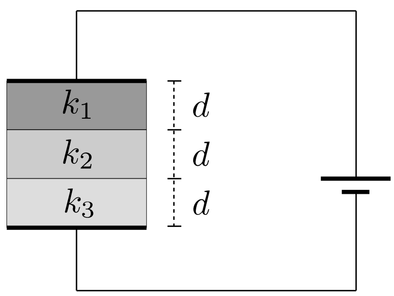
Al centro di un solenoide infinito con numero di spire per unità di lunghezza pari a $n = 1500 spire/m$ é posto un avvolgimento di $N = 8$ spire quadrate di lato $a = 2cm$. L'avvolgimento, di resistenza complessiva $R = 200\Omega$ è coassiale al solenoide. Nel solenoide scorre una corrente variabile nel tempo $i_S(t) = i_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}+2\frac{t}{\tau}}$ ($i_0 = 2A$, $\tau = 50ms$). Calcolare:



1. Il coefficiente di mutua induzione tra il solenoide e l'avvolgimento nel caso in cui il raggio della sezione solenoide sia $r = r_1 = 3a$ oppure $r = r_2 = a/2$.
2. Considerando il caso $r = r_1$, si calcoli il modulo della corrente indotta nell'avvolgimento al tempo $t_1 = 2\tau$. Per che valore di t la corrente indotta è nulla?
3. Considerando il caso $r = r_1$, calcolare la carica totale fluita all'interno dell'avvolgimento dal tempo $t = 0$ al tempo infinito.

Problema 3: Solo per il compito completo

Un condensatore piano è formato da due armature quadrate di lato $\ell = 12cm$. La distanza tra le armature vale $3d = 2cm$. Le armature sono riempite da lastre dielettriche di spessore d e con costanti dielettriche $k_1 = 2$, $k_2 = 5$, $k_3 = 3$ come in figura. Il condensatore è collegato ad un generatore di tensione che fornisce una differenza di potenziale pari a $\mathcal{E}$. Sapendo che la carica depositata sulle armature vale $Q = 2nC$, calcolare:



1. La differenza di potenziale fornita dal generatore.
2. Il campo elettrico nelle tre zone all'interno delle armature del condensatore e la differenza di potenziale ai capi di ogni lastra dielettrica.
3. Con il generatore collegato, calcolare il lavoro esterno necessario per sostituire la lastra k_3 con una lastra dielettrica di ugual dimensione ma con costante dielettrica $k_3' = 10$.
4. Il generatore viene poi staccato dai condensatori. Calcolare il lavoro esterno necessario per rimuovere tutte le lastre dielettriche dal condensatore.

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Detto $\vec{u}_z$ il versore parallelo all'asse del solenoide, il campo generato dal solenoide vale

$$\vec{B}_O^{(s)} = \mu_0 n i_1 \vec{u}_z$$

Il campo generato dal filo vale

$$\vec{B}_O^{(f)} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}\vec{u}_x \simeq (13.33\,\mu T)\vec{u}_x$$

dove $\vec{u}_x$ è il versore uscente dal foglio del disegno. Il campo totale è quindi

$$B_O = \sqrt{(B_O^{(s)})^2 + (B_O^{(f)})^2} \qquad \Rightarrow \qquad B_O^{(s)} = \sqrt{(B_O)^2 - (B_O^{(f)})^2} \simeq 14.91\,\mu T$$

La corrente i_1 si ricava invertendo la relazione precedente

$$i_1 = \frac{B_O^{(s)}}{\mu_0 n} \simeq 9.49\,mA$$

2. Il seno dell'angolo cercato si trova come

$$\sin\theta = \frac{B_O^{(f)}}{B_O} \simeq 0.667 \qquad \Rightarrow \qquad \theta \simeq 41.8^\circ$$

3. Il lavoro esterno è uguale alla variazione di energia potenziale. Si ha che

$$U_{iniz} = -\vec{m}\cdot\vec{B}_O = -\vec{m}\cdot(\vec{B}_O^{(f)} + \vec{B}_O^{(s)}) = -\vec{m}\cdot\vec{B}_O^{(s)} = -mB_O^{(s)} \simeq -0.671mJ$$

dove si è usato il fatto che $\vec{m}$ è perpendicolare a $\vec{B}_O^{(f)}$ e parallelo a $\vec{B}_O^{(s)}$.

Siccome alla fine il momento è opposto al campo magnetico totale, l'energia finale vale

$$U_{fin} = -\vec{m}\cdot\vec{B}_O = mB_O \simeq 0.9mJ$$

Dunque

$$\mathcal{L}_{ext} = U_{fin} - U_{in} \simeq 1.57mJ$$

4. Sul lato AB agisce la forza dovuta solo al campo generato dal filo. Il campo generato dal solenoide è infatti parallelo al lato AB. La forza infinitesima vale

$$\mathrm{d}\vec{F} = i_3 \mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}_f$$

Poichè il campo $\vec{B}_f$ è costante sul segmento AB, la forza totale vale

$$\vec{F} = i_3\left(\int_A^B \mathrm{d}\vec{s}\right)\times\vec{B}_f = i_3\vec{AB}\times\vec{B}_f$$

il cui modulo è

$$F_3 = i_3 \ell B_f \simeq 173nN$$

PROBLEMA 2

1. La resistenza vale
$$R = \rho \frac{\ell}{\Sigma} = \rho \frac{a}{bc} \simeq 6.84\, m\Omega$$

2. Al tempo $t \gg \tau$ la corrente che scorre nel circuito vale
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \simeq 7.31\, kA$$
Siccome l'energia magnetica del solenoide vale $U_L = \frac{1}{2}LI^2$ si ha che
$$L = \frac{2U_L}{I^2} \simeq 18.7\, nH$$
La costante di tempo vale quindi
$$\tau = \frac{L}{R} \simeq 2.736\, \mu s$$

3. La ddp ai capi del solenoide vale
$$\Delta V_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$
Siccome la corrente che scorre in un circuito RL vale $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau})$ si ottiene
$$\Delta V_L(t) = L\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau}\frac{1}{\tau} = \mathcal{E}e^{-t/\tau}$$
In maniera analoga si può ottenere ricordando che $\Delta V_L(t) + Ri(t) = \mathcal{E}$, da cui
$$\Delta V_L(t) = \mathcal{E} - \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau}) = \mathcal{E}e^{-t/\tau}$$
Al tempo t_1 si ha
$$\Delta V_L(t_1) = \mathcal{E}e^{-1/3} \simeq 35.8\, V$$

4. $$\Delta V_H = \frac{IB}{neb} \simeq 8.07 mV$$
La forza di Lorentz spinge gli elettroni verso l'alto, per cui la faccia inferiore è caricata positivamente.

PROBLEMA 3: solo per la seconda prova in itinere

1. Nel caso $r = r_1$ l'avvolgimento è completamente contenuto all'interno del solenoide. Quindi il flusso del campo $B = \mu_0 n i_S$ generato dal solenoide all'interno dell'avvolgimento vale

$$\Phi_B = NBa^2 = \mu_0 N n a^2 i_S$$

da cui il coeff. di mutua induzione

$$M_1 = \frac{\Phi_B}{i_S} = \mu_0 N n a^2 \simeq 6.03 \mu H$$

Nel caso $r = r_2$, l'area dell'avvolgimento contenuta all'interno del solenoide è pari a πr^2. Dunque il flusso del campo $B = \mu_0 n i_S$ generato dal solenoide all'interno dell'avvolgimento vale

$$\Phi_B = NB\pi r_2^2 = \mu_0 N n \pi r_2^2 i_S$$

da cui il coeff. di mutua induzione

$$M_2 = \frac{\Phi_B}{i_S} = \mu_0 N n \pi r_2^2 \simeq 4.74 \mu H$$

2. La corrente indotta vale

$$i_{ind}(t) = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{M_1}{R}\frac{\mathrm{d}i_S(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2M_1}{R} i_S(t) \frac{t-\tau}{\tau^2} = \frac{2M_1 i_0}{R}\frac{t-\tau}{\tau^2} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}+2\frac{t}{\tau}}$$

Al tempo $t_2 = 2\tau$ si ha

$$i_{ind}(t_2) = \frac{2M_1 i_0}{R\tau} \simeq 2.41 \mu A$$

Siccome l'esponenziale non è mai nullo, la corrente indotta si annulla quando $\frac{t-\tau}{\tau^2} = 0$ e cioè

$$t_3 = \tau \qquad \Rightarrow \qquad i_{ind}(t_3) = 0$$

3. Per la legge di Felici la carica totale che è passata nell'avvolgimento vale

$$Q = \frac{\Phi_{in} - \Phi_{fin}}{R} = M_1 \frac{i_S(t=0) - i_S(t=+\infty)}{R} = \frac{M_1 i_0}{R} \simeq 60.3 nC$$

PROBLEMA 3: solo il compito completo

1. Il condensatore è equivalente a tre condensatori in serie di capacità

$$C_1 = \epsilon_0 k_1 \frac{\ell^2}{d} \simeq 38.25\,pF\,, \qquad C_2 = \epsilon_0 k_2 \frac{\ell^2}{d} \simeq 95.62\,pF\,, \qquad C_3 = \epsilon_0 k_3 \frac{\ell^2}{d} \simeq 57.37\,pF\,,$$

   La capacità equivalente è quindi

$$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d} \simeq 18.51\,pF$$

   La differenza di potenziale $\mathcal{E}$ vale quindi

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C_T} \simeq 108\,V$$

2. Il campo generato dalle cariche libere depositate sulle armature vale

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 \ell^2} \simeq 15.68\,kV/m$$

   per cui i campi nei tre dielettrici valgono

$$E_1 = \frac{E_0}{k_1} = \frac{Q}{\epsilon_0 \ell^2} \simeq 7.84\,kV/m\,, \qquad E_2 = \frac{E_0}{k_2} = \frac{Q}{\epsilon_0 \ell^2} \simeq 3.14\,kV/m\,, \qquad E_3 = \frac{E_0}{k_3} = \frac{Q}{\epsilon_0 \ell^2} \simeq 5.23\,kV/m\,,$$

   La differenza di potenziale ai capi di ogni lastra si calcola come $\Delta V_j = E_j d$ da cui

$$\Delta V_1 = E_1 d = 52.3 V\,, \qquad \Delta V_2 = E_2 d \simeq 20.9 V\,, \qquad \Delta V_3 = E_3 d \simeq 34.8 V\,,$$

3. Cambiando la lastra k_3 la capacità equivalente diventa

$$C'_T = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k'_3}} \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d} \simeq 23.91\,pF$$

   Il lavoro esterno è pari alla variazione di energia potenziale

$$\mathcal{L}_{ext} = U_{fin} - U_{in} = \frac{1}{2} C'_T \mathcal{E}^2 - \frac{1}{2} C_T \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}(C'_T - C_T)\mathcal{E}^2 \simeq 31.5\,nJ$$

4. Se il generatore viene staccato rimane costante la carica accumulata che vale

$$Q' = C'_T \mathcal{E} \simeq 2.58\,nC$$

   Se rimuoviamo tutte le lastre la capacità finale diventa

$$C''_T = \epsilon_0 \frac{\ell^2}{3d} \simeq 6.37\,pF$$

   Anche in questo caso il lavoro esterno è pari alla variazione di energia potenziale

$$\mathcal{L}_{ext} = U_{fin} - U_{in} = \frac{1}{2} \frac{(Q')^2}{C''_T} - \frac{1}{2} \frac{(Q')^2}{C'_T} = \frac{(Q')^2}{2} \left(\frac{1}{C''_T} - \frac{1}{C'_T}\right) \simeq 383\,nJ$$