UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

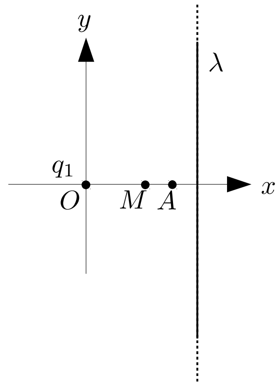
a.a. 2020-2021

Elementi di Fisica II: 14 Giugno 2021

Compito scritto

Problema 1

Si consideri una carica puntiforme $q_1 = 200nC$ posta nell'origine O del sistema di riferimento. A distanza $d = 3cm$ dalla carica si trova un filo isolante parallelo all'asse y come in figura. Il filo è caricato con una densità lineare di carica pari a $\lambda = 10\mu C/m$.



1. Calcolare il campo elettrico (modulo, direzione e verso) nel punto M, posto sull'asse x positivo a distanza $d/2$ dall'origine. In quale punto dell'asse x il campo elettrico si annulla?

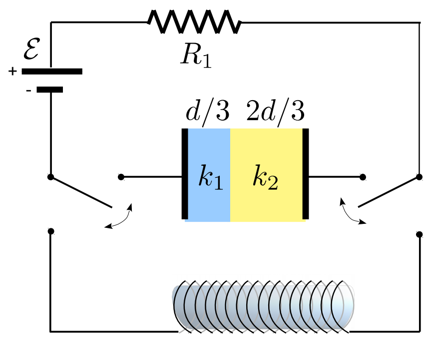
2. Calcolare il lavoro necessario per spostare una carica di prova $q_0 = 4\mu C$ dal punto M al punto A situato sull'asse x positivo a distanza $2d/3$ dall'origine.

3. Calcolare il flusso del campo elettrico attraverso una superficie Σ cubica di lato $\ell = 3d$ il cui centro è posto nell'origine.

4. Definire il momento di dipolo elettrostatico $\vec{p}$. Dimostrare che il potenziale generato da un dipolo elettrostatico in un punto P distante r dal centro del dipolo si può approssimare con la seguente espressione:
$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r}{r^2}\,,$$
dove $\vec{u}_r$ è il versore che congiunge il centro del dipolo con il punto P.

Problema 2

Si consideri il circuito illustrato in figura, composto da un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E} = 8V$, una resistore di resistenza $R_1 = 50\Omega$, un condensatore e un induttore. Il condensatore è composto da due armature quadrate di lato $\ell = 18cm$ distanti $d = 0.6cm$. Il volume tra le due armature è completamente riempito da due dielettrici con costanti dielettriche $k_1 = 3$ e $k_2 = 5$, di basi quadrate di lato ℓ e altezze rispettivamente $d_1 = d/3$ e $d_2 = 2d/3$. L'induttore è composto da un solenoide di lunghezza $L = 4cm$ formato da $N = 120$ spire circolari di raggio $r = 1mm$ e completamente riempito da un materiale ferromagnetico con costante di permeabilità magnetica relativa pari a $k_m = 420$.



Nel circuito sono presenti due interruttori che possono cambiare la configurazione tra un circuito RC e un circuito RL.

1. Calcolare le costanti di tempo τ_{RC} e τ_{RL} dei due circuiti RC e RL.

2. Al tempo $t_1 = 2s$, gli interruttori sono posizionati in modo da ottenere la configurazione RL. Calcolare in quale istante t_2 la corrente del circuito è pari a $\frac{\mathcal{E}}{2R_1}$.

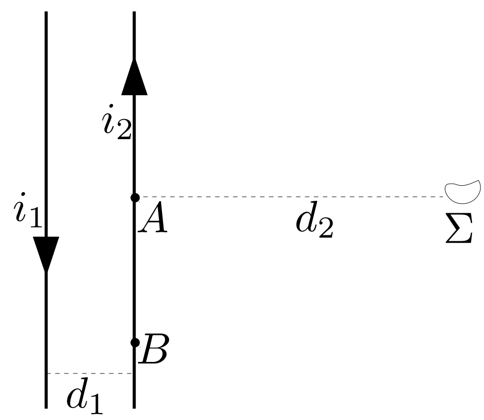
3. Nel caso gli interrutori siano posizionati per realizzare il circuito RC, calcolare la carica di polarizzazione sulle superfici dei dielettrici in condizioni di equilibrio ($t \gg \tau_{\mathrm{RC}}$).

4. Nella condizione di equilibrio del circuito RC, con il generatore collegato, calcolare il lavoro esterno necessario per estrarre completamente dal condensatore il dielettrico con costante dielettrica k_1.

5. Illustrare e giustificare le proprietà del campo elettrico, del potenziale e della distribuzione di carica di conduttori carichi in equilibrio elettrostatico.

Problema 3

Si considerino due fili f_1 e f_2, conduttori infiniti e paralleli su cui rispettivamente scorrono le correnti $i_1(t) = i_{10}e^{-t/\tau_1}$ e $i_2(t) = i_{20}e^{-t/\tau_2}$ con versi diretti come in figura e parametri dati da $i_{10} = 2A$, $i_{20} = 1.2A$, $\tau_1 = 5ms$ e $\tau_2 = 3ms$. I due fili distano $d_1 = 1cm$. A distanza $d_2 = 5cm$ dal filo f_2 si trova un avvolgimento di $N = 500$ spire la cui resistenza totale è pari ad $R = 75m\Omega$. L'area di ogni spira è pari a $\Sigma = 0.1mm^2$.



1. Calcolare i coefficienti di mutua induzione tra ognuno dei due fili e l'avvolgimento. Si consideri il campo magnetico generato dai fili costante all'interno della spira (approssimazione di piccola spira)

2. Calcolare la corrente indotta nell'avvolgimento in funzione del tempo. Quanto vale la corrente indotta al tempo $t_1 = \tau_1$?

3. Calcolare la forza subita dal tratto di filo AB di lunghezza $\ell = 3cm$ ed esercitata dal filo f_1.

4. Calcolare la carica circolata nell'avvolgimento dal tempo $t = 0$ al tempo $t = +\infty$.

5. Definire la corrente di spostamento e giustificare la sua introduzione all'interno della legge di Ampére-Maxwell

---

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Lungo l'asse x positivo il campo generato dalla carica vale

$$\vec{E}_1(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{x^2}\vec{i} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E}_1(x_M) = \vec{E}_1(d/2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4q_1}{d^2}\vec{i} \simeq (8 \cdot 10^6 V/m)\vec{i}$$

Tra il punto O e il filo, il campo generato dal filo lungo l'asse x vale

$$\vec{E}_2(x) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{|d-x|}\vec{i} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E}_2(x_M) = -\frac{1}{\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{d}\vec{i} \simeq (-12 \cdot 10^6 V/m)\vec{i}$$

Nel punto M il campo totale è dunque

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1(d/2) + \vec{E}_2(d/2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{4q_1}{d^2} - \frac{4\lambda}{d})\vec{i} \simeq (-4 \cdot 10^6 V/m)\vec{i}$$

diretto lungo l'asse x negativo.

Siccome q_1 e λ sono positivi, gli unici punti in cui il campo elettrico si può annullare sono i punti sull'asse x tra O e il filo, cioè $0 \leq x \leq d$. In questi punti il campo si annulla quando vale

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{d-x} \qquad \Rightarrow \qquad 2\lambda x^2 + q_1 x - dq_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-q_1 \pm \sqrt{q_1^2 + 8\lambda dq_1}}{4\lambda}$$

L'unica soluzione accettabile è

$$x = \frac{-q_1 + \sqrt{q_1^2 + 8\lambda dq_1}}{4\lambda} \simeq 1.3cm$$

2. Per calcolare il lavoro per prima cosa calcoliamo la differenza di potenziale tra M ed A. La d.d.p. generata dalla carica q_1 vale

$$V_A^{q_1} - V_M^{q_1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{2d/3} - \frac{1}{d/2}) = -\frac{1}{2}\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d} \simeq -30kV$$

La d.d.p. generata dal filo vale

$$V_A^f - V_M^f = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{d/3}{d/2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{3}{2} \simeq 73kV$$

Dunque

$$\Delta V_{MA} = V_M - V_A \simeq 43kV$$

e il lavoro esterno vale

$$\mathcal{L} = q_0 \Delta V_{AM} \simeq 172mJ$$

3. Il flusso si calcola tramite il teorema di Gauss. La carica del filo all'interno dell superficie cubica si calcola come

$$q_f = \lambda\ell = 3\lambda d = 900nC$$

Il flusso totale vale dunque

$$\Phi_E = \frac{q_1 + q_f}{\epsilon_0} \simeq 124kV \cdot m$$

PROBLEMA 2

1. Le costanti di tempo valgono

$$\tau_{\mathrm{RC}} = RC\,, \qquad \tau_{\mathrm{RL}} = \frac{L}{R}$$

Dobbiamo dunque calcolare C e L. La capacità del condensatore può essere calcolato come capacità di due condensatori in serie:

$$C_1 = \epsilon_0 k_1 \frac{\ell^2}{d_1} = 3\epsilon_0 k_1 \frac{\ell^2}{d} \simeq 430pF\,, \qquad C_2 = \epsilon_0 k_2 \frac{\ell^2}{d_2} = 3\epsilon_0 k_2 \frac{\ell^2}{2d} \simeq 359pF$$

da cui

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{1 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{C_1}{1 + 2\frac{k_1}{k_2}} \simeq 196pF$$

La costante di tempo RC vale quindi

$$\tau_{RC} = C_T R \sim 9.8ns$$

Per la costante RL è necessario calcolare il coefficiente di autoinduzione:

$$L = k_m \mu_0 \frac{N^2}{L} \Sigma \simeq 597\mu H$$

per cui

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R} \sim 11.93\mu s$$

2. Nel circuito RL la corrente scorre con la legge

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-(t-t_1)/\tau_{\mathrm{RL}}})$$

dove t_1 è il tempo in cui il circuito viene chiuso. Per trovare l'instante t_2 in cui la corrente vale $\frac{\mathcal{E}}{2R}$, è necessario risolvere

$$\frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-(t_2-t_1)/\tau_{\mathrm{RL}}}) = \frac{\mathcal{E}}{2R} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau_{\mathrm{RL}}}} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t_2 - t_1 = \tau_{\mathrm{RL}} \ln 2 \simeq 8.27\mu s$$

da cui

$$t_2 = t_1 + 8.27\mu s = (2 + 8.27 \cdot 10^{-6})s$$

3. In condizioni di equilibrio la tensione ai capi del condensatore è pari ad $\mathcal{E}$. La carica sulle armature vale quindi

$$Q = \mathcal{E} C_T \simeq 1.57nC$$

La carica di polarizzazione vale dunque

$$q_{1p} = \frac{k_1 - 1}{k_1} Q \simeq 1.05nC$$

$$q_{2p} = \frac{k_2 - 1}{k_2} Q \simeq 1.25nC$$

4. In condizioni di equilibrio, l'energia del condensatore vale

$$U_0 = \frac{1}{2} C_T \mathcal{E}^2 \simeq 6.26nJ$$

Se viene rimosso il primo dielettrico, la nuova capacità totale sarà

$$C'_T = \frac{C'_1 C_2}{C'_1 + C_2} = \frac{C'_1}{1 + \frac{C'_1}{C_2}}$$

con

$$C'_1 = \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d_1} = 3\epsilon_0 k_1 \frac{\ell^2}{d} \simeq 143pF$$

da cui

$$C'_T = \frac{C'_1}{1 + \frac{C'_1}{C_2}} \simeq 102.5pF$$

Dopo aver tolto il dielettrico, la tensione rimane costante (il generatore è collegato) e la nuova energia sarà

$$U_1 = \frac{1}{2} C'_T \mathcal{E}^2 \simeq 3.28nJ$$

Il lavoro esterno sarà quindi

$$\mathcal{L} = U_1 - U_0 \simeq -2.98nJ$$

PROBLEMA 3

1. Per calcolare la mutua induzione è necessario calcolare il flusso del campo magnetico generato dai fili attraverso l'avvolgimento. Nel centro dell'avvolgimento, il filo f_1 genera il campo

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(d_1 + d_2)}$$

entrante nel foglio, mentre il filo f_2 genera il campo

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d_2}$$

uscente dal foglio. Considerando la normale alla spira entrante nel foglio si avrà che i due flussi valgono

$$\Phi_1 = NB_1\Sigma = N\frac{\mu_0 i_1}{2\pi(d_1 + d_2)}\Sigma\,, \qquad \Phi_2 = -NB_2\Sigma = -N\frac{\mu_0 i_2}{2\pi d_2}\Sigma\,,$$

da cui i due coefficienti di mutua induzione

$$M_1 = \frac{\Phi_1}{i_1} = \frac{\mu_0 N\Sigma}{2\pi(d_1 + d_2)} \simeq 166pH\,, \qquad M_2 = \frac{\Phi_2}{i_2} = -\frac{\mu_0 N\Sigma}{2\pi d_2} \simeq -199pH\,.$$

2. La corrente indotta vale

$$i_{\text{ind}}(t) = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi(B)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_1 i_1(t) + M_2 i_2(t)] = -\frac{1}{R}\left(M_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{M_1}{\tau_1}i_{10}e^{-t/\tau_1} + \frac{M_2}{\tau_2}i_{20}e^{-t/\tau_2}\right)$$

Al tempo $t_1 = \tau_1$ si has

$$i_{\text{ind}}(t_1) = \frac{1}{R}\left(\frac{M_1}{\tau_1}i_{10}e^{-1} + \frac{M_2}{\tau_2}i_{20}e^{-\tau_1/\tau_2}\right) \simeq 125nA$$

3. La forza subita dal tratto AB del filo f_2 si ottiene come

$$F_{AB}(t) = i_2\ell B_1 = \frac{\mu_0 i_1(t) i_2(t)}{2\pi d_1}\ell = \frac{\mu_0 i_{10} i_{20}}{2\pi d_1}\ell e^{-t/\tau_1 - t/\tau_2}$$

poichè il campo magnetico $\vec{B}_1$ è perpendicolare al filo f_2.

4. Dalla legge di Felici si ha

$$Q = \frac{\Phi_0 - \Phi_\infty}{R} = \frac{M_1 i_1(0) + M_2 i_2(0) - M_1 i_1(\infty) - M_2 i_2(\infty)}{R}$$

Siccome le correnti sono nulla a $t = \infty$ si ha

$$Q = \frac{M_1 i_1(0) + M_2 i_2(0)}{R} \simeq 1.24nC$$