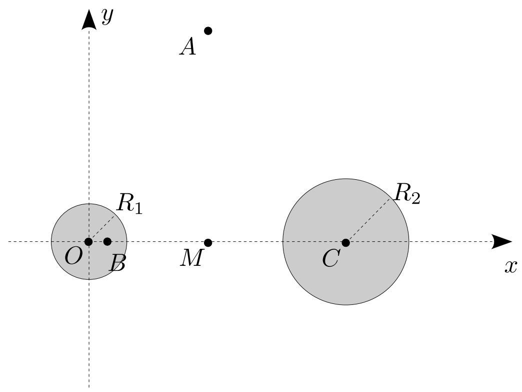
Cognome		
Nome		Matricola:

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

a.a. 2021-2022
Elementi di Fisica II:
Prova scritta - 16 Giugno 2022

Problema 1

Si considerino due sfere isolanti di raggi $R_1 = 1cm$ e $R_2 = 2cm$ rispettivamente di centri O e C. Il punto O è l'origine di un sistema di assi cartesiani, mentre il punto C si trova sull'asse x positivo a distanza $d = 4cm$ dall'origine. Le due sfere sono caricate con densità di carica uniforme e la carica depositata vale rispettivamente $q_1 = -12pC$ e $q_2 = -15pC$.



1. Calcolare il campo elettrico nel punto A di coordinate $(d/2, d)$.
2. Calcolare il campo elettrico nel punto B di coordinate $(R_1/2, 0)$.
3. Calcolare la differenza di potenziale $V_A - V_M$ dove M è il punto medio del segmento OC.
4. Calcolare il lavoro necessario per ruotare di 90° un dipolo elettrico che ha inizialmente momento di dipolo $\vec{p} = p_0\vec{i}$ ($\vec{i}$ è il versore parallelo all'asse x positivo) ed è situato nel punto M. Il valore di p_0 è $p_0 = 220 \cdot 10^{-3}\, C \cdot m$
5. Illustrare come sia possibile derivare il potenziale elettrostatico a partire dal campo elettrico e viceversa (come ottenere il campo a partire dal potenziale). Dimostrare la formula del potenziale Coulombiano a partire dal campo Coulombiano $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_n$

Soluzione problema 1

1. All'esterno di una sfera isolante carica uniformemente il campo è Coulombiano. Nel punto A si avrà

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{1A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{d^2 + (d/2)^2}\left(\frac{d/2}{\sqrt{d^2 + (d/2)^2}}\vec{i} + \frac{d}{\sqrt{d^2 + (d/2)^2}}\vec{j}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4q_1}{5d^2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) \\
\vec{E}_{2A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{d^2 + (d/2)^2}\left(-\frac{d/2}{\sqrt{d^2 + (d/2)^2}}\vec{i} + \frac{d}{\sqrt{d^2 + (d/2)^2}}\vec{j}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4q_2}{5d^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\right)
\end{aligned}$$

Il campo totale vale quindi

$$\begin{aligned}\vec{E}_A &= \vec{E}_{1A} + \vec{E}_{1A} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4}{5\sqrt{5}d^2}\left[(q_1 - q_2)\vec{i} + 2(q_1 + q_2)\vec{j}\right]\end{aligned}$$

di componenti

$$\begin{aligned}E_{Ax} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4}{5\sqrt{5}d^2}(q_1 - q_2) \simeq 6.03V/m \\ E_{Ay} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4}{5\sqrt{5}d^2}2(q_1 + q_2) \simeq 108.67V/m\end{aligned}$$

2. All'interno della sfera isolante uniformemente carica il campo vale $\vec{E}_1 = \frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0}\vec{u}_r$ dove $\rho_1 = \frac{q_1}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}$. Quindi il campo in B è dato da due contributi:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{1B} &= \frac{\rho R_1/2}{3\epsilon_0}\vec{i} = \frac{1}{2}\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}\vec{i} \simeq -540V/m\vec{i} \\ \vec{E}_{2B} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{(d - R_1/2)^2}\vec{i} \simeq 110.2V/m\vec{i}\end{aligned}$$

Il campo totale vale

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{1B} + \vec{E}_{2B} \simeq -429.8V/m\vec{i}$$

3. Sia in A che in M siamo all'esterno delle sfere, dunque la differenza di potenziale è di tipo Coulombiana. In particolare, calcoliamo la diff. di pot. separatamente per le due sfere. Si ha

$$\begin{aligned}\Delta V_1 = V_A^{(1)} - V_M^{(1)} &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{5}/2} - \frac{1}{d/2}\right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d}\left(\frac{2}{\sqrt{5}d} - 2\right) \simeq 2.98V \\ \Delta V_2 = V_A^{(2)} - V_M^{(2)} &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{5}/2} - \frac{1}{d/2}\right) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d}\left(\frac{2}{\sqrt{5}d} - 2\right) \simeq 3.73V\end{aligned}$$

da cui

$$V_A - V_M = \Delta V_1 + \Delta V_2 \simeq 6.72V$$

4. Il lavoro esterno è pari alla variazione di energia potenziale. L'energia potenziale del dipolo è data da $\mathcal{U} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. Nel punto M il campo elettrico vale

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 - q_2}{(d/2)^2}\vec{i} = E_M\vec{i}$$

con

$$E_M \simeq 67.5V/m$$

Il potenziale iniziale è

$$\mathcal{U}_0 = -p_0\vec{i} \cdot \vec{E}_M = -p_0 E_M$$

Quello finale è

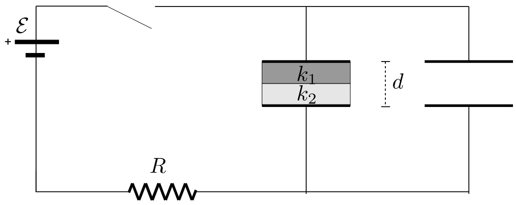
$$\mathcal{U}_1 = -p_0\vec{j} \cdot \vec{E}_M = 0$$

siccome il dipolo è perpendicolare al campo. Dunque il lavoro vale

$$\mathcal{L} = U_1 - U_0 = -U_0 = p_0 E_M \simeq 14.85J$$

Problema 2

Si consideri il circuito mostrato in figura costituito da un generatore che eroga una tensione $\mathcal{E}$, da una resistenza $R = 50\Omega$ e due condensatori C_1 e C_2. I due condensatori hanno entrambi armature circolari di raggio $r = 3cm$ distanti $d = 5mm$. Il volume tra le due armature del condensatore C_2 è vuoto, mentre quello tra le armature del condensatore C_1 è riempito con cilindri dielettrici di spessore $d/2$ e superficie uguale a quelle delle armature. Le costanti dielettriche valgono $k_1 = 1.5$ e $k_2 = 2$. Al tempo $t = 0$ il circuito viene chiuso. Sapendo che la differenza di potenziale tra le armature dei condensatori vale $\Delta V = 250V$ al tempo $t \gg \tau$ (τ è la costante di tempo del circuito), calcolare:



1. Il valore della tensione $\mathcal{E}$
2. La costante di tempo τ del circuito.
3. Il valore del campo elettrico all'interno dei due condensatori al tempo $t = \tau$.
4. La differenza di potenziale ai capi della resistenza al tempo $t = \tau/2$.
5. Si enunci l'effetto Joule e si dimostri l'equazione che ne regola il comportamento.

Soluzione problema 2

1. A tempo $t \gg \tau$ i condensatori sono completamente carichi e non scorre corrente. In questa condizione la differenza di potenziale tra le armature è uguale alla tensione del generatore, per cui

$$\mathcal{E} = \Delta V = 250V$$

2. Per calcolare la costante di tempo è necessario calcolare la capacità equivalente dei due condensatori. Essendo in parallelo si avrà $C_T = C_1 + C_2$. RIcordando che la capacità di un condensatore piano è $C = k\epsilon_0\Sigma/d$, la capacità del secondo condensatore vale

$$C_2 = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \simeq 5pF$$

Il primo condensatore può essere visto come il risultato di due condensatori in serie con armature distanti $d/2$. Quindi

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{k_1\epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d/2}} + \frac{1}{k_2\epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d/2}} = (\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})\frac{d}{2\epsilon_0 \pi r^2} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}\frac{\epsilon_0\pi r^2}{d} = \frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}C_2 \simeq 8.57pF$$

da cui

$$C_T = C_1 + C_2 = 13.57pF$$

La costante di tempo vale

$$\tau = RC_T \simeq 678ps$$

3. Il campo elettrico all'interno dei condensatori è uniforme e vale $\Delta V/d$. Al tempo $t = \tau$ la differenza di potenziale tra le armature dei due condensatori vale

$$V_t = \Delta V(1 - e^{-t/\tau}) = \Delta V(1 - e^{-1}) \simeq 158.03V$$

Nel condensatore C_2 il campo vale

$$E_2 = V_t/d \simeq 31.6kV/m$$

Calcoliamo il campo nei due dielettrici del condensatore C_1. Il condensatore C_1 è la serie di due condensatori C_{1A} e C_{1B}. Al tempo $t = \tau$ la carica accumulata sulle armature vale

$$Q_t = C_1 V_t \simeq 1.354 nC$$

per cui la differenza di potenziale ai capi di C_{1A} e C_{1B} vale

$$\Delta V_{1A} = Q_t / C_{1A} \simeq 90.3V \qquad \Delta V_{1B} = Q_t / C_{1B} \simeq 67.73$$

Il campo all'interno dei dielettrici vale dunque

$$E_{1A} = \Delta V_{1A} / (d/2) \simeq 31.1 kV/m \qquad E_{1B} = \Delta V_{1B} / (d/2) \simeq 27.1 kV/m$$

4. La corrente che scorre nel circuito al tempo $t_2 = \tau/2$ valle

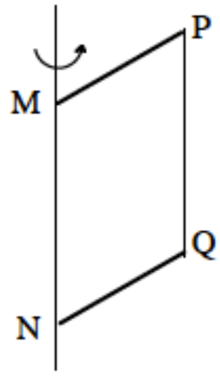
$$i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t_2/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-1/2} \simeq 3.03A$$

La differenza di potenziale ai capi della resistenza vale quindi

$$\Delta V_R = i_2 R \simeq 151.63V$$

Problema 3

Una spira conduttrice di lati MN = PQ = a = 20 cm e MP = NQ= b = 10 cm, è costituita da filo omogeneo di sezione costante S = 1 mm^2 e resistività $\rho = 10^{-3}\ \Omega m$. La spira ruota attorno al suo lato MN con velocità angolare ω = 157 rad/s. Nella zona della spira è presente un campo magnetico uniforme e costante nel tempo, di modulo B = 0.5 T, perpendicolare all'asse di rotazione della spira. All'istante iniziale il piano della spira è perpendicolare al campo $\vec{B}$. Calcolare:



1. l'istante in cui la forza elettromotrice indotta raggiunge per la prima volta il suo valore massimo
2. il valore massimo della corrente indotta;
3. il valore massimo della differenza di potenziale fra i punti P e Q della spira.
4. Enunciare la legge di Lenz e spiegare le sue implicazioni riguardo alla conservazione dell'energia.

Soluzione problema 3

1. Per calcolare fem utilizziamo la legge di Faraday:
$$fem = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\cdot\hat{n}dS = -\frac{d}{dt}(Bab\cos\omega t) = Bab\omega\sin\omega t$$
Il valore massimo sia ha per la prima volta quando $\omega t = \frac{\pi}{2}$ cioè quando t_1 = 10 ms. In questo istante, t_1, la fem ha valore massimo $fem_{max} = Bab\omega$
2. Quando fem è massima anche la corrente che circola nella spira è massima:
$$i_{max} = \frac{fem_{max}}{R}.$$
La resistenza R della spira si determina usando la seconda legge di Ohm:
$$R = \rho\frac{2(a+b)}{S} = 600\Omega$$
Quindi la corrente
$$i_{max} = \frac{fem_{max}}{R} = \frac{Bab\omega}{R} = 2.62\cdot 10^{-3}\ A$$
3. La corrente che circola nel circuito vale $i(t) = \frac{Bab\omega\sin\omega t}{R}$. La corrente è identica in ogni punto del circuito per cui la ddp tra P e Q si calcola come
$$V_{PQ} = i(t)R_{PQ}$$
dove R_{PQ} è la resistenza del tratto PQ che vale
$$R_1 = \rho\frac{a}{S} = 200\Omega$$
Dunque la ddp tra P e Q si ottiene come
$$V_{PQ} = i(t)R_1 = \frac{R_1}{R}Bab\omega\sin\omega t$$
Il valore massimo vale
$$V_{PQ}^{(max)} = i(t)R_1 = \frac{R_1}{R}Bab\omega \simeq 523mV$$