UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

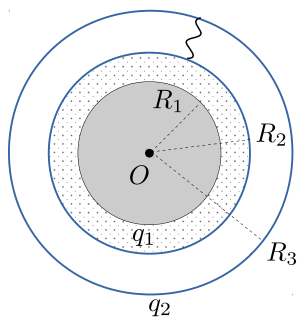
a.a. 2020-2021

Elementi di Fisica II: 15 Febbraio 2021

Compito scritto

Problema 1

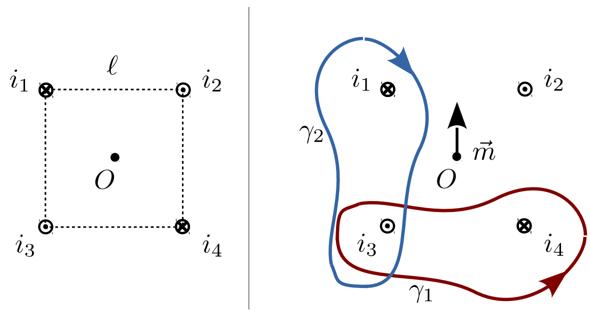
Si consideri una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 2cm$ su cui è stata depositata una carica $q_1 = 5\mu C$. Concentrici alla sfera sono presenti due gusci sferici conduttori di spessore trascurabile. Lo spazio tra la sfera e il guscio interno è completamente riempito con un liquido dielettrico con costante dielettrica relativa pari a $k = 2.5$. I due gusci, di raggi $R_2 = 2.5cm$ e $R_3 = 4cm$ sono collegati come in figura da un filo conduttore. Dopo che sul guscio interno viene depositata la carica $q_2 = 3\mu C$ si raggiunge una situazione di equilibrio elettrostatico. In queste condizioni, calcolare:



1. Il modulo del campo elettrico in funzione della distanza dal centro $E(r)$.
2. Il potenziale elettrostatico in funzione della distanza dal centro, supponendo nullo il potenziale a $r = +\infty$.
3. Calcolare la capacità del condensatore formato dalla sfera e dal guscio interno
4. Calcolare il lavoro esterno necessario per estrarre completamente il liquido dielettrico.
5. Illustrare e giustificare le proprietà del campo elettrico, del potenziale e della distribuzione di carica di conduttori carichi in equilibrio elettrostatico.

Problema 2

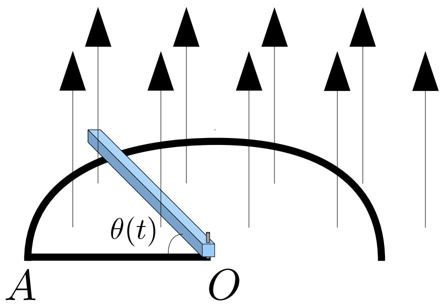
Si considerino 4 fili rettilinei infiniti percorsi da corrente e passanti per i vertici di un quadrato di lato $\ell = 2cm$ come in figura. Definendo $i_0 = 250mA$, i moduli delle correnti valgono $i_1 = i_2 = i_0$, $i_3 = 2i_0$ e $i_4 = 3i_0$, mentre i versi sono indicati in figura.



1. Calcolare il campo magnetico (modulo, direzione e verso) nel centro O del quadrato.
2. Calcolare la circuitazione del campo magnetico lungo i percorsi γ_1 e γ_2
3. Calcolare la forza per unità di lunghezza (modulo, direzione e verso) subita dal filo con corrente i_1.
4. Si consideri una piccola spira circolare di raggio $r = 1mm$ percorsa da corrente $i_s = 0.5A$. Il momento magnetico della spira $\vec{m}$ giace nel piano del disegno (perpendicolare ai fili) nel verso indicato in figura. Calcolare l'energia necessaria per ruotare la spira di 90° in senso orario sul piano del disegno.
5. Enunciare e dimostrare il teorema di Ampère

Problema 3

Si consideri una guida semicircolare metallica di raggio $r = 10cm$ e resistività trascurabile. La guida é completamente immersa in un campo magnetico $B_0 = 150mT$ perpendicolare al piano su cui si trova la guida. Nel centro O é ancorato un estremo di una barra di ferro libera di ruotare intorno ad O. La barra, di resistività $\rho = 9.68 \cdot 10^{-8}\Omega \cdot m$ ha sezione quadrata di lato $\ell = 0.5mm$ ed ha una lunghezza maggiore del raggio r. Il tratto OA è costituito da una guida conduttrice di resistività trascurabile. La barra si mette in moto al tempo $t = 0$ e l'angolo θ formato tra la barra di ferro e il segmento AO varia con la legge $\theta(t) = \pi(1 - e^{-t/\tau})$ con $\tau = 200ms$.



Calcolare:

1. Il flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dalla guide, la barra di ferro e il tratto AO, in funzione del tempo. Quanto vale il flusso al tempo $t_1 = \tau$?
2. Calcolare il modulo della corrente indotta sulla barretta di ferro al tempo $t_1 = \tau$.
3. Calcolare l'energia spesa per muovere la barra di ferro dall'instante $t = 0$ all'istante t_2 in cui $\theta(t_2) = \pi/2$.
4. La carica circolata nel circuito dal tempo $t = 0$ al tempo $t = +\infty$.
5. Mostrare come sia possibile generare corrente alternata tramite induzione elettromagnetica.

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. La carica q_1 si deposita solo sulla superficie del conduttore sferico. I due gusci collegati costituiscono un unico conduttore. Per induzione elettrostatica, una carica $-q_1$ si deposita sul guscio interno, mentre una carica $q = +q_1 + q_2$ è depositata sul guscio esterno, in modo che la carica totale sui gusci valga appunto $+q_2$. Il campo elettrico si ottiene con il teorema di Gauss. Il campo elettrico nel vuoto, nel caso non ci fosse il dielettrico, si ottiene come:
$$E_0(r)4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q(r)}{r^2}$$
dove $q(r)$ è la carica totale contenuta in una sfera di raggio r. Per come sono disposte le cariche si avrà
$$q(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ q_1 & R_1 \le r < R_2 \\ 0 & R_2 \le r < R_3 \\ q_1 + q_2 & R_2 \le r < R_3 \end{cases}$$
da cui
$$E_0(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2} & R_1 \le r < R_2 \\ 0 & R_2 \le r < R_3 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2}{r^2} & R_2 \le r < R_3 \end{cases}$$
A causa del dielettrico il campo tra R_1 and R_2 deve essere diviso per k, per cui
$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi k\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2} & R_1 \le r < R_2 \\ 0 & R_2 \le r < R_3 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2}{r^2} & R_2 \le r < R_3 \end{cases}$$

2. Il potenziale si ottiene integrando il campo elettrico, per cui
$$V(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} c_1 & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi k\epsilon_0}\frac{q_1}{r} + c_2 & R_1 \le r < R_2 \\ c_3 & R_2 \le r < R_3 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2}{r} + c_4 & R_2 \le r < R_3 \end{cases}$$
La condizione $V(+\infty) = 0$ impone $c_4 = 0$. Per richiedere continuità in tutti i punti devono essere soddisfatte le seguenti condizioni
$$\begin{cases} V(R_1^-) = V(R_1^+) \\ V(R_2^-) = V(R_2^+) \\ V(R_3^-) = V(R_3^+) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{4\pi k\epsilon_0}\frac{q_1}{R_1} + c_2 \\ \frac{1}{4\pi k\epsilon_0}\frac{q_1}{R_2} + c_2 = c_3 \\ c_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{q_1}{kR_1} - \frac{q_1}{kR_2} + \frac{q_1+q_2}{R_3}) \\ c_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(-\frac{q_1}{kR_2} + \frac{q_1+q_2}{R_3}) \\ c_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_3} \end{cases}$$

3. La capacità si calcola come
$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$
dove $Q = q_1$ è la carica depositata sulle armature, mentre ΔV è la ddp tra la sfera e il guscio interno, che vale
$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \frac{q_1}{4\pi k\epsilon_0}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$
per cui la capacità vale
$$C = \frac{q_1}{\Delta V} = 4\pi k\epsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} \simeq 27.8\,pF$$

4. Dopo la rimozione del liquido la capacità cambia e varrà

$$C' = \frac{C}{k}$$

mentre la carica sulle armature rimarrà costante.

L'energia iniziale vale

$$U = \frac{q_1^2}{2C} \simeq 450\, mJ$$

mentre quella finale sarà

$$U' = \frac{q_1^2}{2C'} = k\frac{q_1^2}{2C} = kU$$

Il lavoro necessario per rimuovere il liquido vale dunque

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \Delta U = U' - U = (k-1)U \simeq 675\, mJ$$

PROBLEMA 2

1. Prendendo un sistema di riferimento xy centrato in O, i campo generati da ogni filo sono dati dalla legge di Biot-Savart. Si ha:

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$
$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$
$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i_3}{2\pi r}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$
$$\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 i_4}{2\pi r}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

con

$$r = \ell\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il campo totale vale

$$\vec{B}_O = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\mu_0}{2\pi r}\left[(-i_1 + i_2 - i_3 + i_4)\vec{i} + (-i_1 - i_2 + i_3 + i_4)\vec{j}\right] = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi\ell}\left[\vec{i} + 3\vec{j}\right]$$

Il modulo vale

$$B_O = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi\ell}\sqrt{10} \simeq 7.9\,\mu T$$

Il verso è in alto a destra con un angolo rispetto all'asse x pari a

$$\theta = \arctan\frac{B_{Oy}}{B_{Ox}} = \arctan 3 \simeq 71.56°$$

2. Le circuitazioni valgono

$$\mathcal{C}_{\gamma_1}(\vec{B}) = \mu_0(i_3 - i_4) = -\mu_0 i_0 \simeq -314\,nWb$$
$$\mathcal{C}_{\gamma_2}(\vec{B}) = \mu_0(i_1 - i_3) = -\mu_0 i_0 \simeq -314\,nWb$$

3. La forza per unità di lunghezza si calcola come $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} = \frac{\mu_0 i_A i_B}{4\pi r_{AB}}$ ed è attrattiva (repulsiva) se le correnti sono concordi (discordi). Dunque si avrà

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}_2}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi\ell}\vec{i} = -\frac{\mu_0 i_0^2}{4\pi\ell}\vec{i}$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}_3}{\mathrm{d}s} = \frac{\mu_0 i_1 i_3}{2\pi\ell}\vec{j} = \frac{2\mu_0 i_0^2}{4\pi\ell}\vec{j}$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}_4}{\mathrm{d}s} = \frac{\mu_0 i_1 i_4}{2\pi\ell\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = \frac{3\mu_0 i_0^2}{2\pi\ell}\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

La forza totale sarà la somma delle forze, pari a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mu_0 i_0^2}{4\pi\ell}(\vec{i} + \vec{j})$$

Di modulo

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi\ell}\sqrt{2} \simeq 442\,nN/m$$

inclinata di $+45°$ rispetto all'asse x.

4. Il momento della spira $\vec{m}$ ha modulo

$$m = i_s\pi r^2 \simeq 1.57\,A\cdot mm^2$$

Nella condizione iniziale si ha

$$\vec{m}_1 = m\vec{j}$$

mentre in quell finale si ha

$$\vec{m}_2 = m\vec{i}$$

L'energia necessaria per ruotare la spira è pari alla variazione di energia magnetica $U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$. Dunque

$$U_1 = -\vec{m}_1\cdot\vec{B}_O = -mB_{Oy} = -m\frac{3\mu_0 i_0}{2\pi\ell} \simeq -11.79\,pJ$$
$$U_2 = -\vec{m}_2\cdot\vec{B}_O = -mB_{Ox} = -m\frac{\mu_0 i_0}{2\pi\ell} \simeq -3.92\,pJ$$

da cui

$$\Delta U = U_2 - U_1 \simeq 7.86\,pJ$$

PROBLEMA 3

1. Siccome il campo è costante il flusso è pari a $\Phi = B_0\Sigma$. L'area Σ di un settore circolare è pari a $\Sigma = \frac{\theta}{2}r^2$ per cui

$$\Phi_B(t) = B_0\frac{\theta(t)}{2}r^2 = \frac{1}{2}B_0\pi r^2(1 - e^{-t/\tau})$$

Al tempo $t_1 = \tau$ si avrà

$$\Phi_B(t_1) = \frac{1}{2}B_0\pi r^2(1 - e^{-1}) \simeq 1.49\, mWb$$

2. La resistenza della barra si calcola come

$$R = \frac{\rho r}{\ell^2} \simeq 38.7\, m\Omega$$

La fem indotta si ottiene dalla legge di Faraday:

$$f_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{B_0\pi r^2}{2\tau}e^{-t/\tau}$$

da cui la corrente

$$|i_{\text{ind}}(t)| = \frac{B_0\pi r^2}{2\tau R}e^{-t/\tau} \qquad \Rightarrow \qquad |i_{\text{ind}}(t_1)| = \frac{B_0\pi r^2}{2\tau R}e^{-1} \simeq 112\, mA$$

3. L'istante t_2 si trova risolvendo

$$\theta(t_2) = \pi/2 \qquad \Rightarrow \qquad \pi(1 - e^{-t_2/\tau}) = \pi/2 \qquad \Rightarrow \qquad e^{-t_2/\tau} = 1/2$$

da cui

$$t_2 = \tau \ln 2 \simeq 138.6\, ms$$

L'energia spesa per muovere la barretta è equivalente all'energia dissipata per effetto Joule:

$$W_J = \int_0^{t_2} Ri_{\text{ind}}(t)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{t_2} \frac{B_0^2\pi^2 r^4}{4\tau^2 R}e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{B_0^2\pi^2 r^4}{4\tau^2 R}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^{t_2} = \frac{B_0^2\pi^2 r^4}{8\tau R}\left[1 - e^{-2t_2/\tau}\right] =$$
$$= \frac{3(B_0\pi r^2)^2}{32\tau R} \simeq 269\, \mu J$$

4. La carica si calcola con la legge di Felici

$$Q = \frac{\Phi(0) - \Phi(+\infty)}{R} = \frac{B_0 r^2}{2R}[\theta(0) - \theta(+\infty)] = -\frac{\pi B_0 r^2}{2R} \simeq -61\, mC$$