Successione

Una successione è una funzione che ha come dominio tutti i numeri naturali

Definizione di limite per una successione

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione che ha limite $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite

N.B.

a_n è limitata se $\exists M>0$ t.c. $|a_n| \leq M \ \forall n\in\mathbb{N}$

Successioni convergenti, divergenti, indeterminate

- Una successione si dice CONVERGENTE quando

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$$

- Una successione si dice DIVERGENTE quando

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$$

- Una successione si dice INDETERMINATA quando non ha limite

Gerarchia degli infiniti

- $n!$ e n^k $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$

Teorema permanenza del segno

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 0$ allora $a_n > 0$

Teorema del confronto

Sia

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$0 \leq a_n \leq b_n$

Allora

① se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

② se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

Teorema confronto asintotico

Siano

a_n e b_n successioni

$a_n \geq 0 \quad b_n > 0$ per $n > \bar{n}$

supponiamo che $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$

Allora $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (diverge) $\iff \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ converge (diverge)

Condizione necessaria di convergenza

Se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ad $l \in \mathbb{R} \implies \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

necessaria ma non sufficiente

Convergenza assoluta

Se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge $\implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente

Sottosuccessioni

Data $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione, si dice sottosuccessione ogni successione $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ strettamente crescente di numeri naturali

Teorema ponte

Dati

$f : E \to \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

x_0 di accumulazione per E

Allora

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \iff \forall$ successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in E \setminus \{x_0\}$ il cui $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ si ha che $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata, in un insieme chiuso e limitato, allora esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente nell'intervallo, cioè $\lim a_{n_k} = l$

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata, in un insieme chiuso e limitato, allora esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente nell'intervallo, cioè $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = l$

Definizione di somma parziale

Sia data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e sia $S_0 = a_0$ $S_1 = a_0 + a_1$

$S_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k \longrightarrow$ somma parziale k-esima

Convergenza, divergenza, indeterminata

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R} \longrightarrow$ converge se $\lim_{k\to+\infty} S_k = S$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty \longrightarrow$ diverge se $\lim_{k\to+\infty} S_k = \pm\infty$

Serie geometrica

vogliamo stabilire quando $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ è convergente

- $q > 0$

$$S_k(1-q) = (1+q+q^2+\ldots+q^k)(1-q) =$$
$$= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \ldots + \cancel{q^k} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \ldots - \cancel{q^k} - q^{k+1} = 1 - q^{k+1}$$
$$S_k = \frac{(1-q)^{k+1}}{1-q}$$

- $0 < q < 1$

$$\lim_{k\to+\infty} S_k = \frac{1}{1-q}$$

- $q > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} S_k = +\infty$$

La serie geometrica converge a $\frac{1}{1-q}$ se $0<q<1$

lo sapevamo già perché manca la condizione necessaria $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ $\longleftarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \text{diverge a } +\infty \text{ se } q>1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } q=1 \end{array}\right\} q \geq 1$$

Carattere della somma di serie convergenti

Se due serie convergono allora la somma converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Carattere prodotto serie per una costante

$$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Limite del termine generale di una serie convergente

Data $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a $l \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Dimostrazione

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$$

$$\circledast \quad S_n - S_{n-1} = \cancel{a_0} + \cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cancel{\dots} + \cancel{a_{n-1}} \boxed{+a_n} - \cancel{a_0} + \cancel{\dots} + \cancel{a_{n-1}} = a_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \circledast$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n - \lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Carattere serie armonica

Si dice serie armonica la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

Questa serie diverge a $+\infty$

Dimostrazione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$$

- per $a > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^a} = 0 \longrightarrow \text{condizione necessaria soddisfatta}$$

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ convergente (Serie di Mengoli)

$$b_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$a_n < b_n \iff \sum a_n < \sum b_n$$

$\times$ Th confronto $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge

- per $a \geq 2$ $\sum \frac{1}{n^a}$ converge $\times$ Th. confronto
- per $a \leq 0$ la condizione necessaria non è mai verificata
- per $a = 1$ uso gli integrali generalizzati

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^{a} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a \to +\infty} \log a - \log 1 = +\infty$$

- per $0 < a < 1$ $\sum \frac{1}{n^a}$ diverge perché $\frac{1}{n^a} > \frac{1}{n}$ $\times$ Th. confronto
- per $1 < a < 2$ uso gli integrali generalizzati poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \text{ esiste} \iff \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ è convergente}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \text{ esiste} \iff a > 1 \iff \sum \frac{1}{n^a} = \sum f(x) \text{ converge } \forall a > 0$$

$\Longrightarrow \frac{1}{n^a}$ converge per $a > 1$

Carattere serie a termini non negativi

Una serie a termini positivi o converge o diverge

Dimostrazione

$a_n \geq 0$ $\quad S_{n+1} = S_n + S_{n+1} \geq S_n$ quindi è monotona crescente

$\Longrightarrow$ ammette limite finito o infinito

NB

Se una serie è limitata è convergente, se le somme parziali non sono limitate la serie diverge

Convergenza assoluta

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge

Criterio del confronto

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $0 \leq a_n \leq b_n$

1. Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
2. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

Dimostrazione

$\overset{a}{S}_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k \qquad \overset{b}{S}_k = b_0 + b_1 + \ldots + b_k$

Da ipotesi $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n$

quindi $\quad 0 \leq \overset{a}{S}_k \leq \overset{b}{S}_k$

- Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \lim \overset{b}{S}_k = \overset{b}{S} \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{k \to +\infty} \overset{a}{S}_k = \overset{a}{S} \in \mathbb{R}$ ha limite (x Th. serie a termini positivi) ma $\overset{a}{S} < \overset{b}{S} < +\infty$

cioè $\sum a_n$ converge

Criterio asintotico del confronto

Due successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$a_n \geq 0 \qquad b_n > 0 \qquad$ per $n > \bar{n}$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} > 0$ allora $\sum a_n \Longleftrightarrow \sum b_n$

converge (diverge) $\qquad$ converge (diverge)

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ allora $\sum a_n \Longleftarrow \sum b_n$

converge $\qquad$ converge

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ allora

Criterio del rapporto

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \quad \boxed{a_n > 0} \quad \forall n > \bar{n}$ termini positivi

Se $\exists n > \bar{n}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l < 1 \quad \forall n > \bar{n}$

allora $\sum a_n$ converge

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

1. $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
2. $l = 1 \Rightarrow$ nulla si può dire

③ $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

Criterio radice

Se $\boxed{a_n > 0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\sqrt[n]{a_n} < l < 1$ $\forall n > \bar{n}$ termini positivi

allora la serie converge

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

① $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

② $l = 1 \Rightarrow$ nulla si può dire

③ $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

Criterio di Leibniz

Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ $\quad a_n \geq 0$ serie a segni alterni

Se

① a_n è decrescente per $(n \geq \bar{n})$ → basta che sia decrescente per n maggiori di un certo numero

② $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge