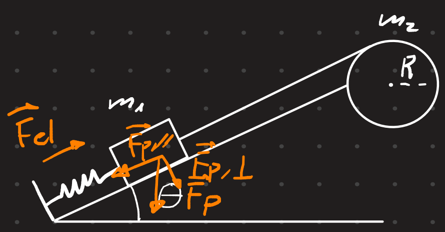
Un corpo di massa $m_1 = 3\,kg$ si trova su un piano inclinato di $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale, in assenza di attrito. A valle, il corpo è collegato ad una molla di costante elastica $k = 300\,N/m$ e massa trascurabile, che è compressa da m_1. A monte, è collegata tramite un filo inestensibile a un disco di massa $m_2 = 10\,kg$ e raggio $R = 0.2\,m$ intorno al quale il filo è avvolto. Inizialmente, m_1 è a riposo e la corda non è tesa. Al tempo t_0, un motore pone il disco in rotazione tramite un momento costante $\vec{M}$. Il motore mette in tensione la corda e trascina m_1 verso l'alto. Al tempo $t_1 > t_0$, la molla è a riposo (non è più compressa). Tra il tempo t_0 ed il tempo t_1, il motore compie il lavoro $W = 3\,J$. Calcolare:



$m_1 = 3\,kg \qquad m_2 = 10\,kg$

$K = 300\,N/m \qquad R = 0{,}2\,m$

$W = 3\,J \qquad \theta = 30°$

1. Il modulo del momento $\vec{M}$ applicato dal motore al disco;

$$\begin{cases} F_R = m_1 g\cos\theta \\ \vec{F}_{el} + \vec{F}_{P,//} = 0 \iff K\Delta x - m_1 g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{m_1 g\sin\theta}{K} = 0{,}049\ m$$

Tra t_1 e t_0, un pezzo di corda di lunghezza Δx si avvolge intorno al disco

$* \; R\underbrace{\Delta\varphi}_{\text{angolo di rotazione del disco}} = \Delta x$ e il lavoro svolto dal motore è

$$W = \int M\,d\varphi = M\,\Delta\varphi$$

$$\Rightarrow M = \frac{W}{\Delta\varphi} = \frac{WR}{\Delta x} = 12{,}2\ Nm$$

$* \; v = R\omega$

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}$$

2. L'accelerazione a_0 di m_1 nel momento in cui la corda si tende;

$$-m_1 g\sin\theta + K(\Delta x - x) + T = m_1 a$$

Per il disco abbiamo $\vec{M} = I\vec{\lambda}$

$$M - TR = I\lambda$$

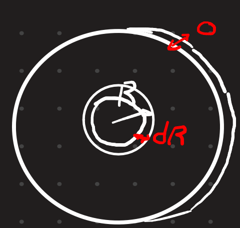
mom. d'inerzia

acc. angolare

momento applicato dal motore

momento della tensione della corda

Calcoliamo il momento di inerzia del disco



densità $\rightarrow \rho = \dfrac{dm}{dV}$ dove $dV = 2\pi R\,dR\,o$

quindi

$$I = \int R^2 dm = \int R^2 \rho\, dV = \int R^2 \rho\, 2\pi R\,dR\,o =$$

$$= 2\pi\rho o\int R^3 dR = 2\pi\rho o \left.\frac{R^4}{4}\right|_0^R = 2\pi\rho o\frac{R^4}{4}$$

ora $m = \rho V$ con $V = \pi R^2 o$

quindi $I = \cancel{2\pi o}\dfrac{R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}\,2} \times \dfrac{m}{\cancel{\pi R^2 o}} = \dfrac{mR^2}{2}$

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\theta + K(\Delta x - x) + T = m_1 a \\ M - TR = \dfrac{m_2 R^2}{2} \alpha \end{cases}$$

Però $R\,d\varphi = dx \implies R\dfrac{d\varphi^2}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ cioè $R\alpha = a$

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\theta + K(\Delta x - x) + T = m_1 a \\ M - TR = \dfrac{m_2 R^{\cancel{2}}}{2} \dfrac{a}{\cancel{R}} \end{cases}$$

A $t = t_0$ si ha $x = 0$

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\theta + K\Delta x + T = m_1 a_0 \\ \dfrac{M}{R} - T = \dfrac{m_2 a_0}{2} \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{m_1 g \sin\theta}{K}$$

$$a_0 = \frac{2M}{R(m_2 + 2m_1)} = 7{,}65 \ m/s^2$$

3. La velocità v_1 di m_1 nell'istante t_1.

$$W = E_{tot,t_1} - E_{tot,t_0}$$

- en. cinetica corpo 1
- en. cinetica disco
- en. gravitazionale corpo 1
- en. elastica molla

- Al tempo t_0

$$E_{tot,t_0} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

- Al tempo t_1

$$E_{tot,t_1} = m_1 g \Delta x \sin\theta + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

$$R\omega = v$$

$$I = \frac{m_2 R^2}{2}$$

⋮

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{W + \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - m_1 g \Delta x \sin\theta}{m_2 + 2m_1}} = 0{,}81 \ m/s$$