Forma algebrica

$z = x + iy$ coniugato $\overline{z} = x - iy$ norma $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Forma trigonometrica

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$\cos\vartheta = \frac{x}{\rho}$ $\qquad$ $\sin\vartheta = \frac{y}{\rho}$

Forma esponenziale

$z = \rho e^{i\vartheta}$

Significato geometrico del prodotto di due numeri complessi

Notiamo che il prodotto di due numeri complessi è un numero avente:

- per modulo $\rightarrow$ il prodotto dei due moduli
- per argomento $\rightarrow$ la somma degli argomenti

Dimostrazione

Dati:

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \rho(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta)$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = \rho(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$$

Allora

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) =$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2 ((\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\vartheta_2) + i(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_2\cos\vartheta_1) =$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2 [(\cos\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)]$$

grazie alle formule trigonometriche

Radici n-esime dei numeri complessi

Da Th. prodotto di numeri complessi deduco che

$$z^2 = \rho^2 (\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta)$$

$$z^3 = \rho^3 (\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta)$$

$\dots \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))$$

Dimostrazione

Procediamo per induzione

① P_1 è vera (forma algebrica)

② $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$z^{n+1} = z^n \cdot z =$$

$$\overset{!}{=} \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) \cdot \rho (\cos\vartheta + i \sin\vartheta) =$$

$$\overset{!}{=} \rho^{n+1} (\cos(n+1)\vartheta + i \sin(n+1)\vartheta)$$

Per le radici

$$z^n = w \iff \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$\rho = r^{\frac{1}{n}} \quad e \quad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Notiamo quindi

- ci sono radici $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$ distinte
- vengono disposte sui vertici di un poligono regolare inscritto in un cerchio di raggio $r^{\frac{1}{n}}$

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $P_{(z)}$ un polinomio di grado n, con coefficienti reali, allora $P_{(z)} = 0$

è risolubile in $\mathbb{C}$ e se $z_1, \dots, z_n$ sono le soluzioni, ognuna rispettivamente con molteplicità $K_1, K_2, \dots, K_n$ allora la somma

$K_1 + K_2 + \dots + K_n = n$

OPPURE

Ogni polinomio a coefficienti reali o complessi di grado maggiore o uguale ad 1, ammette almeno una radice complessa