

Medición del módulo de Young para acero y latón bajo régimen dinámico

González M. , Nieto F. y Venegas M.

Laboratorio 4 B, primer cuatrimestre 2023, cátedra Larotonda

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Resumen

Se planteó como objetivo la medición del módulo de Young de un par de varillas de latón y de acero mediante sus frecuencias de resonancia. El procedimiento consistió en excitar la varilla a partir de un golpe, haciéndola oscilar, mientras se pasaba un haz de luz por el filo de una navaja incorporada a la varilla que lo obstruía parcialmente. Empleando un fotodiodo se adquirieron valores de intensidad lumínica en función de las oscilaciones presentes en las varillas excitadas y se realizó un análisis de Fourier para obtener las frecuencias propias del sistema. Haciendo uso de estas y de los parámetros del armado experimental se despejaron los respectivos módulos de Young. Las estimaciones obtenidas para este valor correspondieron a $E = (97.700 \pm 3.500)MPa$ para el acero y de $E = (44.100 \pm 1.100)MPa$ para el latón.

1. Introducción

En este trabajo se estudiará el comportamiento de la elasticidad del latón y acero usando un método dinámico con láser que nos permitirá encontrar las frecuencias de oscilación de una varilla. A partir de estas y de los parámetros del sistema se puede estimar el módulo de Young del material.

La elasticidad es la propiedad de los materiales de regresar a un estado de equilibrio en referencia a su geometría una vez se quita la fuerza que la deforma. La Ley de Hooke indica que la fuerza aplicada, si es lo suficientemente pequeña, sobre el material es proporcional a un Δl . La fuerza se puede calcular a partir de la siguiente expresión

$$F = EA \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

donde F es la fuerza aplicada, E es el módulo de Young, A es el área transversal al apartamiento Δl y l es la longitud original del material. Dicho módulo es una propiedad exclusiva del material.

Si a un material cilíndrico, como una barra rígida, se le produce una perturbación mecánica inicial en un extremo libre, el sistema evolucionará a un régimen estacionario en el cual describirá una movimiento periódico descrito por

$$W(x, t) = v(x) \sin(\omega t) \quad (2)$$

donde ω es la frecuencia angular temporal. Dichas frecuencias no pueden ser continuas, ya que se discretizan al introducir las condiciones de contorno de la varilla. Como solución general, $v(x)$ re-

sulta una combinación lineal de exponenciales, tanto reales como imaginarias. En el experimento planteado, la varilla posee un extremo fijo en $x=0$ y un extremo libre en $x=L$, lo que se traduce en una frecuencia angular de la forma

$$\omega_n = \sqrt{\frac{IE}{\rho_l}} K_n^2 \quad (3)$$

donde I es el momento de inercia de área (equivalente a $\frac{\pi d^4}{64}$ para el caso del cilindro), ρ_l es la densidad lineal de masa y K_n es el modo espacial de oscilación. La frecuencia K_n (donde $K_n = \frac{k_n}{L}$ y k_n es dato) es una sucesión de valores reales de los cuales se nota que no hay una relación de multiplicidad entre ellos, a diferencia de casos como el de una sogá ideal atada a un punto, por ejemplo, K_2 no es múltiplo de K_1 . Algunos valores conocidos son: $K_1 = \frac{1,875}{L}$, $K_2 = \frac{4,694}{L}$ y $K_3 = \frac{7,855}{L}$.

Una expresión más general del movimiento surge de cuando se tiene en cuenta el amortiguamiento por rozamiento con el aire. Esta condición es fácil de integrar ya que solo consiste en agregar un término equivalente a $e^{-\alpha \omega_n t}$, donde α es un factor de amortiguamiento adimensional. Una nueva frecuencia teniendo en cuenta esta corrección queda determinada como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{IE}{\rho_l} K_n^4 - \alpha^2} \quad (4)$$

De todas formas es de esperar que este factor α sea despreciable contra el término con K_n por lo que si se lo descarta se regresa a la ecuación 3.

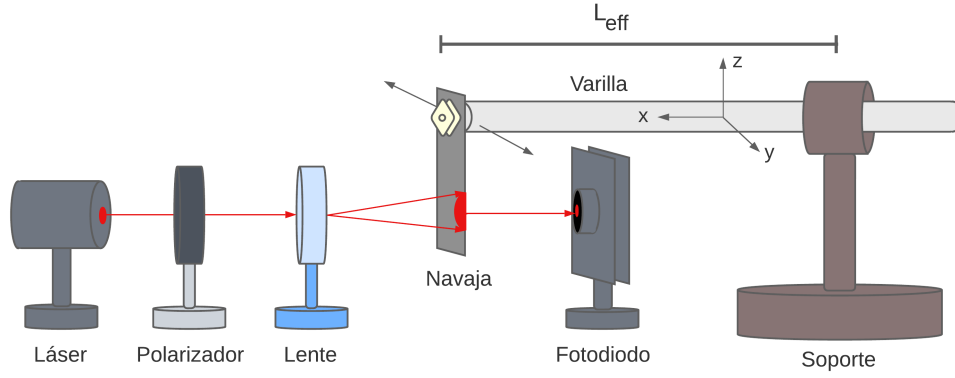


Figura 1: Dispositivo experimental compuesto de un láser, un polarizador, una lente, la navaja de la varilla y un fotodiodo todos sobre el mismo eje. El polarizador tiene la función de evitar la saturación del fotodiodo y el de la lente de dispersar el haz uniformemente sobre el fotodiodo. La navaja estuvo sujeta a una varilla compuesta de latón o acero sostenida por un soporte con mordaza en forma de cuña.

Para analizar los datos que se obtienen a partir de las mediciones de intensidad lumínica se puede emplear la transformada de Fourier. La transformada de Fourier es una función matemática de la forma

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx \quad (5)$$

la cual tiene la propiedad de desarmar el compendio de frecuencias que forman la señal y devuelve las amplitudes para cada una de ellas y sus respectivas frecuencias.

2. Detalle experimental

Para el armado experimental se diseñó un dispositivo consistente en un láser montado a un mesa óptica en la cual también se dispuso un polarizador, una lente, una varilla y un detector, todos alineados en un solo eje como se observa en la figura 1.

El láser es un Melles Griot Rojo y dado que el ancho del haz no cubría por completo al detector de luz se decidió incorporar frente al láser una lente la cual dispersara lo suficiente. Dicha lente poseía una distancia focal f de valor 50 mm . Entre ambos se ubicó un polarizador para modificar a gusto la intensidad del haz linealmente polarizado del láser.

La varilla se encontraba sostenida en posición paralela a la mesa óptica con dos soportes que permitían ajustar la altura. La navaja incorporada al extremo libre de la varilla se encontraba apuntando hacia abajo en dirección vertical de manera de que, cuando la varilla se encontrase quieta, la navaja oculte aproximadamente la mitad del haz alrededor de donde será el punto de equilibrio.

El fotodiodo THORLABS DET 36A/M se ubicó

a una distancia de $0,925 \text{ m}$ del láser y luego de la navaja y se lo conectó a un osciloscopio Tektronix TBS1002B para registrar la intensidad lumínica y leerla en la pantalla. Sin embargo las mediciones fueron registradas mediante una placa de adquisición D.A.Q conectada a una computadora utilizando un script de lenguaje Python. Toda la experiencia se realizó en una habitación a oscuras, para que luces ajenas a la de la fuente no intervengan en el fotodiodo.

El experimento consistió en determinar el módulo de Young para dos varillas de distintas proporciones y distinto material. Una de ellas, la primera en ser empleada, era de latón y poseía un largo de $L = (0,50 \pm 0,01) \text{ m}$ y un diámetro de $d = (5,01 \pm 0,01) \text{ mm}$. La otra varilla, de acero, poseía un largo de $L = (0,51 \pm 0,01) \text{ m}$ y un diámetro de $d = (6,02 \pm 0,01) \text{ mm}$. Para las mediciones de los diámetros se utilizó un calibre digital.

Una vez armado el dispositivo el procedimiento fue el siguiente: manteniendo los soportes en las ubicaciones ya antes comentadas, se modificó el largo de la varilla con respecto al punto fijo, obteniendo así un largo efectivo L_{eff} para el experimento que es la parte de la varilla que efectivamente oscilaba. Una vez alcanzada la medida adecuada se procedió excitando la varilla mediante un leve golpe un punto específico. De esta forma la varilla realiza una oscilación, en principio horizontal, y la cual en el proceso cubre y descubre al haz de luz, logrando que durante un periodo del movimiento un porcentaje del láser alcance al fotodiodo múltiples veces. Para cada largo efectivo de la varilla se realizó la excitación en 3 puntos distintos, en el extremo libre, en el extremo fijo y en el punto medio.

3. Resultados y discusión

3.1. Oscilaciones

Como se comentó en el desarrollo experimental, en esta experiencia se hicieron vibrar dos barras, una de acero y otra de latón en la configuración de la figura 1 con diferentes longitudes efectivas. Esta oscilación se adquirió a través de un fotodiodo y algunas de las mediciones obtenidas se muestran en las figuras 2 y 3.

En estas se observa la oscilación con diferentes escalas, como se puede apreciar en la primera figura de ambas, no se obtuvo una oscilación simplemente modulada por una exponencial decreciente, sino que a su vez la amplitud está modulada por otro armónico que produce una suerte de batido de un periodo mucho mayor. Esto trajo problemas a la hora de encontrar la constante de decaimiento α ya que no se pudo ajustar la amplitud de la oscilación por una exponencial decreciente ya que el modelo teórico difiere de lo observado.

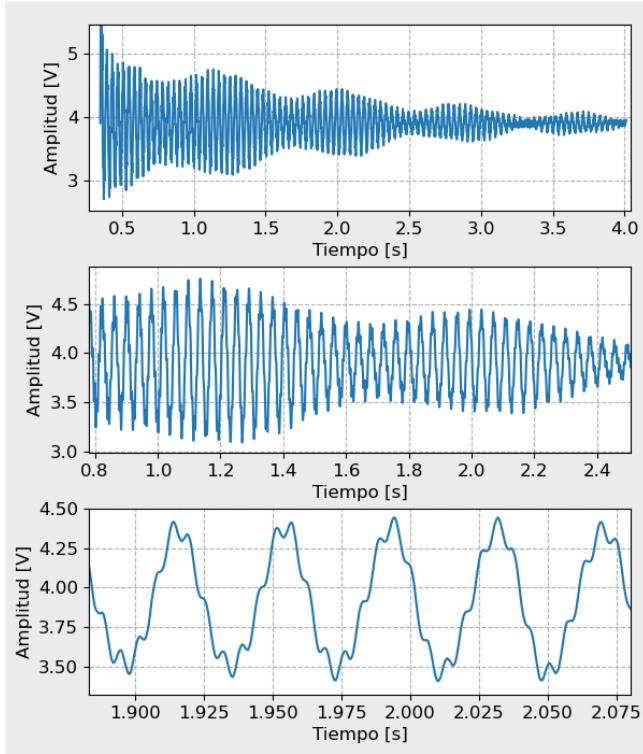


Figura 2: Oscilación de la barra de latón con $L_{eff} = (0,26 \pm 0,01)m$ con diferentes escalas

Por otra parte, si se presta atención al último gráfico de la figura 2 correspondiente a la oscilación del latón, observamos que la onda a su vez tiene montada otra oscilación con una frecuencia mayor que da esa apariencia de “rizado” que se ve en la figura de abajo. A partir del gráfico esta frecuencia se puede aproximar que es de 160 Hz pero

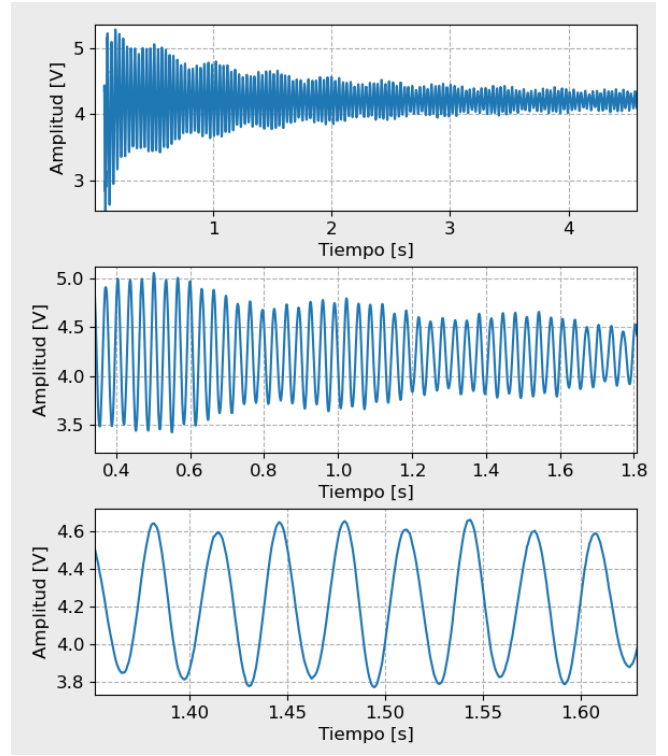


Figura 3: Oscilación de la barra de acero con $L_{eff} = (0,33 \pm 0,01)m$ con diferentes escalas

se hará un análisis más a fondo cuando se analice la descomposición espectral de estas oscilaciones. Este fenómeno aparece en todas las mediciones de la varilla de latón en mayor o menor medida pero en cambio en las varillas de acero no se llega a apreciar, un ejemplo de esto es la figura 3

3.2. Análisis de Fourier

Ahora se analizará la descomposición en frecuencias de algunas de estas oscilaciones y cómo se obtuvo la frecuencia fundamental para ejemplificar el procedimiento que se llevó a cabo con todas las demás. En las figuras 4 y 5 se observa la oscilación en el primer gráfico junto con su análisis de Fourier donde también se aumenta la escala para apreciar mejor la frecuencia fundamental.

En la figura 4 que corresponde a una oscilación de la barra de latón, se observan tres picos sin embargo al aumentar la escala en la zona donde se encuentra el primero de estos se hace evidente que este está formado en realidad por dos picos. Al primero de estos le asignaremos el nombre de frecuencia fundamental f_1 ya que es el de mayor amplitud que en este caso corresponde a $f_1 = (25,6 \pm 0,1)Hz$ y el de al lado en $f'_1 = (26,8 \pm 0,1)Hz$ es el culpable de los batidos que se observan en el primer gráfico. Esto es porque la oscilación al estar compuesta en

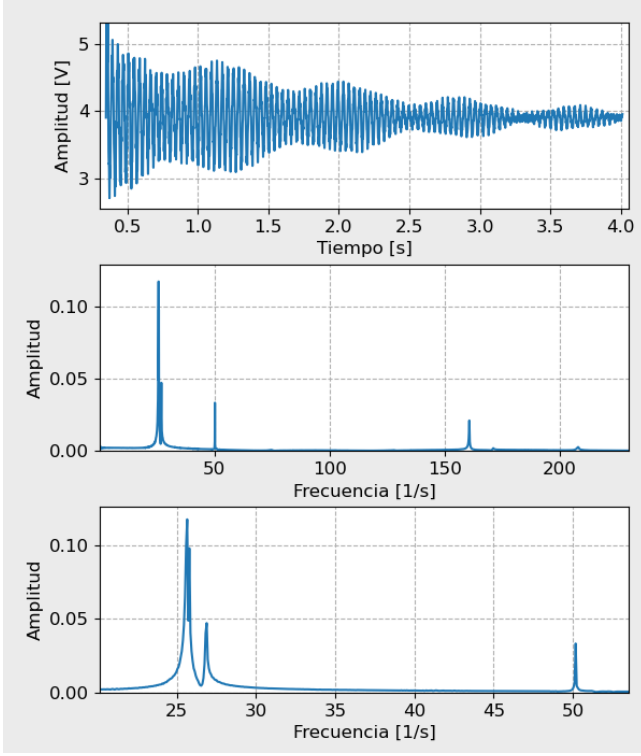


Figura 4: Oscilación (1er gráfico) y Análisis de Fourier (2do y 3er gráfico) de la barra de latón con $L_{eff} = (0.26 \pm 0.01)m$ con diferentes escalas

parte por la suma de dos armónicos a frecuencias cercanas esto se puede reescribir como el producto de dos armónicos cuyas frecuencias corresponden a la semidiferencia y el promedio de las anteriores, como se puede ver en el apéndice 5.3. Como ambas frecuencias son similares, la semidiferencia nos da una modulación de la amplitud a una frecuencia muy baja y eso es lo que causa los batidos. Sin embargo, no es tan simple como esto sino que también se observa un pico en $f_r = (50, 1 \pm 0, 1)Hz$ que también va a aportar al fenómeno.

Está última frecuencia aparece en todas las mediciones tomadas, hasta en aquellas mediciones de calibración que se hicieron con el fotodiodo tapado (apéndice 5.1), por eso es que la llamamos frecuencia del ruido (f_r) debido a que coincide con la frecuencia de la instalación eléctrica del edificio del laboratorio. Este es un efecto que no puede ser despreciado. Por ejemplo, si se presta atención a la figura 5 no hay un pico de gran amplitud cercano a la frecuencia fundamental que en este caso es $f_1 = (44, 4 \pm 0, 1)Hz$, sino que el que está causando los batidos es el mismo pico de la frecuencia de ruido.

Algo que cabe destacar de la figura 4 es que como ya se pudo encontrar la frecuencia fundamental que se reportó como $f_1 = (25, 6 \pm 0, 1)Hz$, partien-

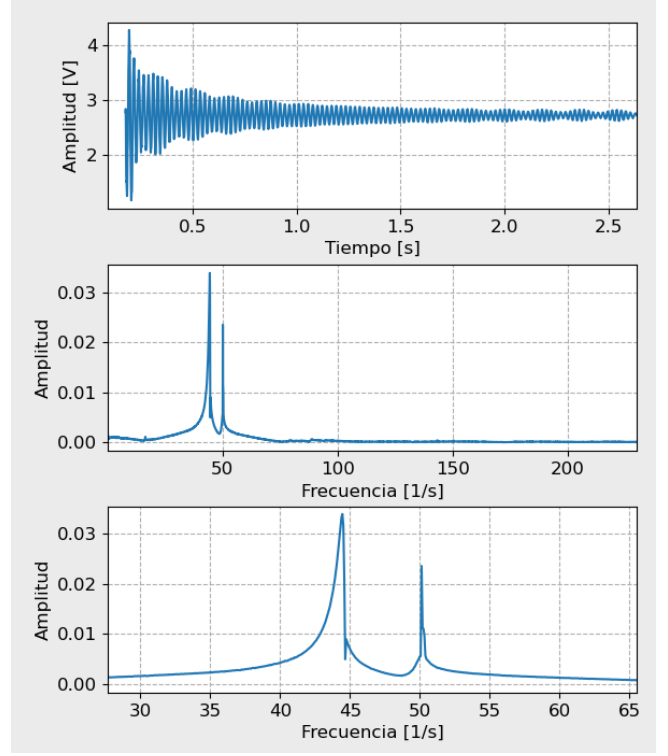


Figura 5: Oscilación (1er gráfico) y Análisis de Fourier (2do y 3er gráfico) de la barra de acero con $L_{eff} = (0, 26 \pm 0, 01)m$ con diferentes escalas

do de la formula 4 y despreciando el decaimiento podemos despejar la frecuencia del segundo modo de oscilación de la barra sin necesidad de conocer el módulo de Young de la siguiente forma partiendo de la fórmula 3 podemos escribir la frecuencia fundamental de la siguiente forma:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{IE}{\rho l}} K_1^2 \quad (6)$$

Siendo el contenido de la raíz en el lado derecho constante entre subíndices n , se pueden relacionar las frecuencias fundamentales y las del segundo modo de tal manera:

$$\frac{\omega_1}{K_1^2} = \sqrt{\frac{IE}{\rho l}} = \frac{\omega_2}{K_2^2} \quad (7)$$

Con último paso algebraico (y reemplazando valores) llegamos a una conclusión de la siguiente forma:

$$\omega_2 = \omega_1 \left(\frac{K_2}{K_1} \right)^2 = \omega_1 \cdot 6.269 \quad (8)$$

Ahora haciendo uso del valor de f_1 encontramos $f_2 = (160, 4 \pm 0, 6)Hz$. Si se presta atención al segundo gráfico de esta figura se llega a apreciar un pico en la frecuencia $(160, 7 \pm 0, 1)Hz$ por lo que se

puede hipotetizar que el “rizado” del que se habla en la sección de Oscilaciones (3.1) es debido a que en el latón la frecuencia del segundo modo f_2 es lo suficientemente baja como para aparecer con una amplitud significativa.

Antes de cerrar esta sección hay que desarrollar un poco más sobre por qué pueden aparecer estos picos de amplitud en una frecuencia cercana a la fundamental. Esto es importante recalcar ya que es un fenómeno que está presente en todas las mediciones tomadas así como los batidos. En primer lugar la barra por sí sola tiene una simetría cilíndrica alrededor del eje x del esquema en la figura 1 y por lo tanto las frecuencias de oscilación en el plano xy deben ser las mismas que aquellas en el plano xz. Sin embargo la barra utilizada tiene una hoja metálica en la punta que rompe con esta simetría por lo tanto puede llegar a alterar la frecuencia de oscilación en una de esas direcciones y esto nos da que el movimiento de la barra esté compuesto, en parte, por dos frecuencias muy cercanas.

Otra posible causa puede ser el amarre que tiene la barra en el extremo fijo y que este no sea simétrico en todas las direcciones y esté causando oscilaciones en alguna dirección no deseada y por lo tanto la barra se “alterne” entre oscilaciones en el plano xy y xz, ya que en los lapsos en los que se mide que la amplitud disminuye, por conservación de la energía, es porque la varilla está oscilando más en la dirección xz.

3.3. Cálculo Módulo de Young

Para empezar a hacer el análisis de los datos obtenidos de la configuración experimental primero se deben de aclarar un par de detalles que serán constantes para todo análisis.

El primero es la depreciación del decaimiento. Esto es debido a dos factores claves, por un lado siendo la imposibilidad de definirlo con certeza debido a que el batido analizado en la sección 3.1 de la señal medida hace difícil caracterizar el decaimiento con la forma de una exponencial decreciente. Por otro lado, se lo despreció debido a su orden de magnitud en comparación a la frecuencia ya que teniendo un rango de posibles valores de decaimiento eran insignificantes frente al valor de las frecuencias utilizadas.

La segunda consideración está relacionada a los picos de frecuencia observados en los ya mencionados análisis de Fourier. Los mismos presentan amplitudes destacables en frecuencias fundamentales, f_1 , y en frecuencias de ruido, f_r (de nula utilidad

para nuestro fin, véase apéndice 5.1). Las frecuencias fundamentales a utilizar fueron elegidas con criterio de mayor amplitud en relación a sus contrapartes.

Teniendo en cuenta estos detalles sobre la ponderación de datos pasemos al cálculo del módulo de Young. El mismo se calculó para diferentes modos de excitación y materiales (como ya fue mencionado en el apartado desarrollo experimental). Sin embargo, también fue considerada una relación lineal entre los factores de frecuencia angular al cuadrado (ω^2) y longitud efectiva inversa elevado a la 4 (L_{eff}^{-4}). Esta misma relación se desarrolla más en detalle en el apéndice 5.2.

Ya habiendo propuesto la relación lineal, el valor del módulo de Young podría deducirse de un ajuste lineal de la mencionada relación (figuras 6 y 8 con sus respectivos residuos en las figuras 7 y 9). Los datos de este ajuste son de mismo material variando la longitud efectiva y el modo de excitación.

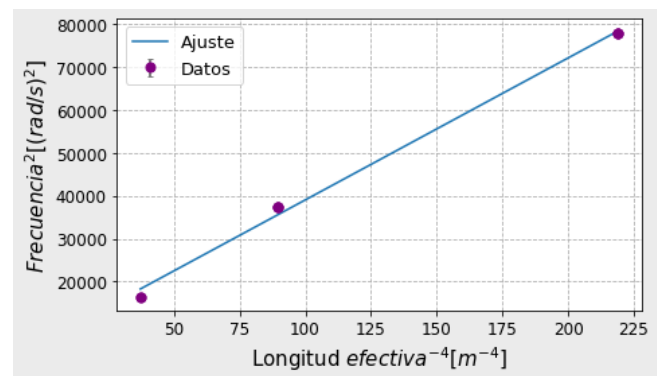


Figura 6: Ajuste de relación lineal de frecuencia al cuadrado (ω^2) y longitud efectiva inversa elevada a la 4 (L_{eff}^{-4}) de las mediciones hechas con la varilla de acero.

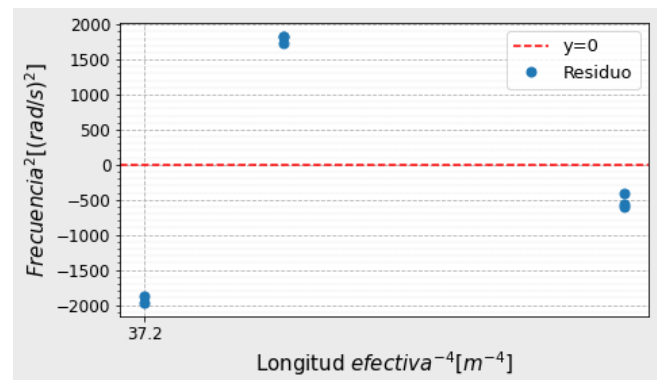


Figura 7: Residuos del ajuste de relación lineal de frecuencia al cuadrado (ω^2) y longitud efectiva inversa elevada a la 4 (L_{eff}^{-4}) de las mediciones hechas con la varilla de acero.

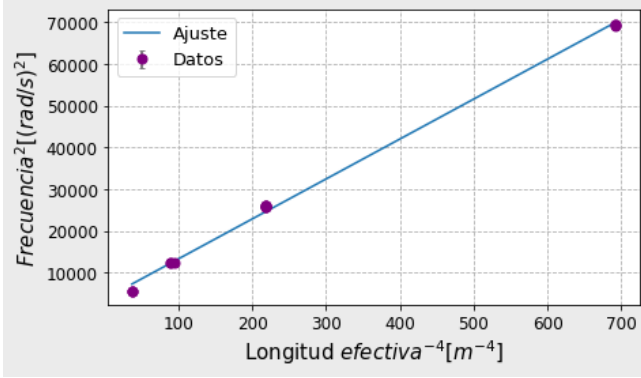


Figura 8: Ajuste de relación lineal de frecuencia al cuadrado (ω^2) y longitud efectiva inversa elevada a la 4 (L_{eff}^{-4}) de las mediciones hechas con la varilla de latón.

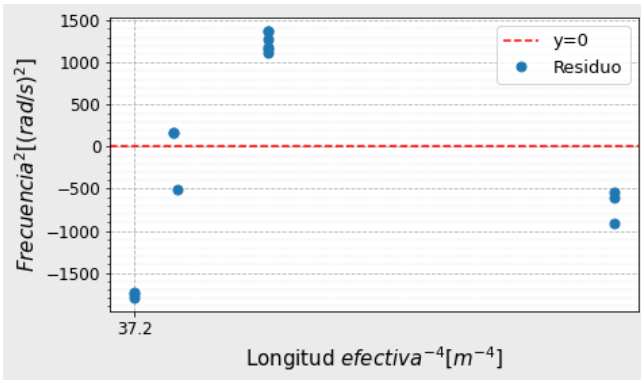


Figura 9: Residuos del ajuste de relación lineal de frecuencia al cuadrado (ω^2) y longitud efectiva inversa elevada a la 4 (L_{eff}^{-4}) de las mediciones hechas con la varilla de latón.

De estos mismos se ajustes se obtienen dos pendientes $(331, 1 \pm 8, 1) \left(\frac{kg \cdot m}{s}\right)^2$ para el acero y $(95, 7 \pm 1, 4) \left(\frac{kg \cdot m}{s}\right)^2$ para el latón.

Utilizando la ecuación 9 del apéndice 5.2 con la ya reportada pendiente el valor del módulo de Young a reportar es de $E = (97.700 \pm 3.500) MPa$ para el acero y de $E = (44.100 \pm 1.100) MPa$ para el latón. Comparando con los valores indexados para los materiales (acero: 210.000 MPa y latón: 110.000 MPa) se puede denotar una diferencia significativa. Más específicamente los valores tabulados son 2,1 veces mayor que el obtenido para el acero y 2,5 veces para el latón.

Las posibles causas de la incongruencia con los valores indexados pueden referirse al momento de inercia, la composición de las varillas y/o a condiciones de contorno no ideales.

El momento de inercia utilizado es el de una varilla de un cierto diámetro dado pero no nos hemos de olvidar que hay una navaja con una masa no despreciable acoplada a un extremo que cambiaría

la geometría del mismo. Por otro lado, la aleación exacta de las varillas utilizada es desconocida, y por ello quizás los valores indexados para el módulo de Young puedan referir a otras composiciones de estos materiales. Esto es decir que un mayor porcentaje de un compuesto u otro presentes en la aleación podría variar el valor teórico del módulo de Young utilizado. Y por último pero no menos importante, las condiciones de contorno a no ser ideales imponen una incerteza en relación a la posibilidad de la excitación de las varillas en direcciones no deseadas. De hecho, la existencia de excitaciones parásitas de más de un grado de libertad son una explicación satisfactoria al fenómeno de batidos ya mostrado en las medidas.

4. Conclusiones

Los valores a reportar como consecuencia del análisis de los datos experimentales obtenidos del experimento del módulo de Young son $(97.700 \pm 3.500) MPa$ para el acero y de $(44.100 \pm 1.100) MPa$ para el latón. Con una incongruencia no despreciable de los valores indexados (acero: 210.000 MPa y latón: 110.000 MPa). Esta diferencia es de un factor 2,1 para el acero y de 2,5 para el latón respecto de lo obtenido como ya fue previamente mencionado.

Se puede hipotetizar que la diferencia entre valores concluidos mediante esta experiencia y los indexados fue debido a características limitantes en la configuración experimental. Uno de estos siendo que el valor de inercia de la varilla (I) utilizado fue el de una varilla ideal, siendo que la utilizada poseía una distribución de masa diferente a la ideal debido a un contrapeso en la punta (navaja no despreciable). Otro punto a destacar que las condiciones de contorno (extremo fijo) tampoco fue ideal ya que la mordaza utilizada permitía un movimiento vertical dando lugar a más de un grado de libertad en la cinemática del movimiento de la varilla. Por último, la aleación de la varilla utilizada es desconocida y por lo tanto podría no corresponder su módulo de Young con el valor tabulado utilizado ya que podrían referir a diferentes variaciones de la misma aleación con diferentes propiedades elásticas.

Sin embargo se rescata que el análisis de Fourier de las oscilaciones de la varilla fue exitoso ya que se pudieron encontrar las frecuencias de resonancia del modo fundamental de oscilación para diferentes longitudes y aleaciones y en algunos casos también modos superiores. Sumado a esto se logró llegar a una hipótesis del motivo de la modulación

armónica de la amplitud de la oscilación. Para futuras configuraciones se recomienda la utilización de artefactos capaces de proporcionar condiciones de contornos más cercanas a las ideales (posible encastre diseñado especialmente según el diámetro de la varilla y que esté mas firme), una varilla en la cual la proporción de aleación sea conocida y una navaja acoplada más chica de forma que interfiera lo menos posible con la distribución de masa y la geometría, es decir que sea despreciable.

5. Apéndice

5.1. Ruido

Antes de realizar las mediciones mediante el método dinámico, se caracterizó el ruido que percibía el fotodiodo. Para ello se realizaron 2 mediciones distintas, una con una tapa evitando cualquier entrada de luz al detector, y por otro lado otra medición en la que el haz del láser incide sin obstrucciones sobre el detector.

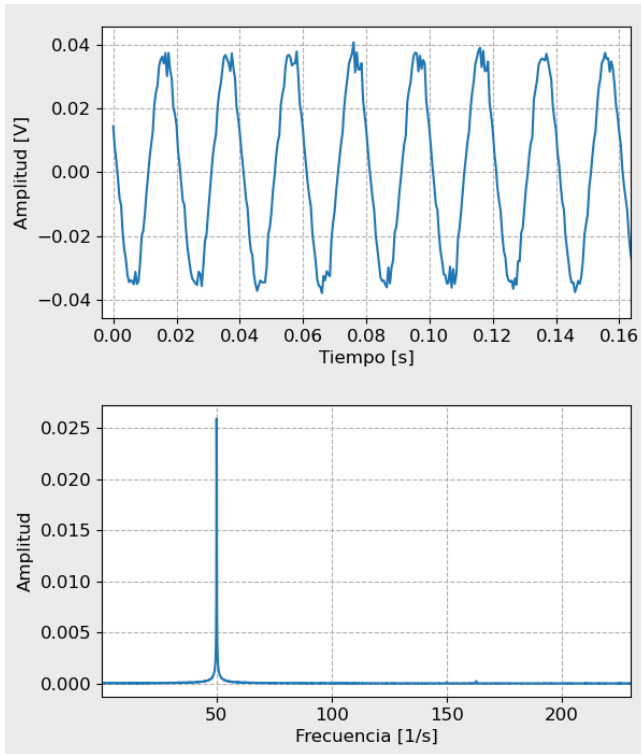


Figura 10: Ruido medido mientras la navaja cubre completamente al fotodiodo

En la figura 10 se aprecia el ruido en el primer escenario mientras que en la figura 11 se aprecia el ruido en el segundo escenario. En ambos casos la forma sinusoidal de la señal es similar, incluyendo el valor de amplitud de la misma, la cual es aproximadamente de 0,08V pero difieren en el número en el cual están centradas. Se trata de una señal muy débil, una posibilidad es que se trate de una fuente de luz externa, pero se continua con la hipótesis de que la experiencia se realizó en una habitación oscura. Por otro lado es probable que se trate de un ruido no lumínica, sino proveniente de la tensión de corriente de línea.

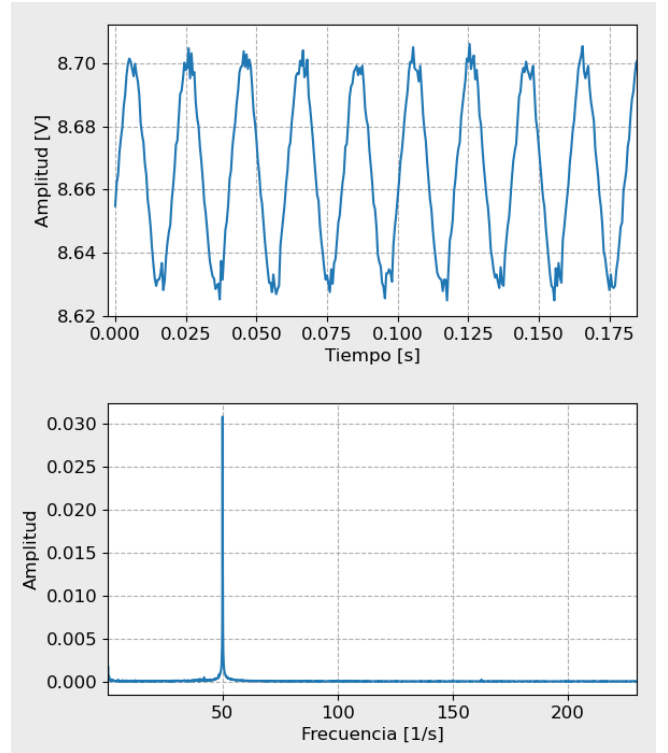


Figura 11: Ruido medido mientras la navaja descubre completamente al fotodiodo

Si se hace un análisis de Fourier, como se muestra en la zona inferior de ambas figuras se ve que el ruido posee una frecuencia temporal única de aproximadamente $50Hz$ lo cual apoya la hipótesis de que el ruido sea proveniente de la tensión de línea

5.2. Linealidad ω_n^2 vs L_{eff}^{-4}

La linealidad surge de proponer que la fórmula del módulo de Young (formula 3) las únicas dos variables a cambiar en el experimentos son la frecuencia y la longitud efectiva (inversamente proporcional al K_n). Por consecuencia el módulo de Young, la inercia y a densidad serán constantes e iguales a nuestra pendiente lineal al tomar como variables ω^2 y L_{eff}^{-4} .

$$\omega_n^2 = \frac{I \cdot E \cdot k_n^4}{\rho} \frac{1}{L_{eff}^4} \quad (9)$$

Siendo $\frac{I \cdot E \cdot k_n^4}{\rho}$ la pendiente de nuestro ajuste lineal.

5.3. Batido

El desplazamiento de dos ondas se pueden (en cada punto) se pueden escribir como:

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 \cdot \cos(2\pi f_1 t) \quad (10)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 \cdot \cos(2\pi f_2 t) \quad (11)$$

Si hacemos superposición, la resultante será:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon_0(\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t) \quad (12)$$

Esta última expresión utilizando relaciones trigonométricas se puede escribir:

$$\epsilon = 2\epsilon_0 \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \cdot \cos 2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t \quad (13)$$

6. Referencias

1. R.P. Feynman, The Feynman Lectures on Physics, Vol. II (Addison-Wesley Iberoamericana, 1987)
2. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, Theory of Elasticity (Pergamon Press, Oxford, 1959).
3. S.C. Hunter, Mechanics of continuous media (J. Wiley Sons, New York, 1986).
4. W.B. Callister, Materials Science and Engineering, (J. Wiley Sons, New York, 1995).