

Logica voor informatica

Matt ter Steege
matttersteege@gmail.com
Universiteit Utrecht
Utrecht, Nederland

CONTENTS	TERM	LATEX	LATEX COMMAND
Contents	1. there exists at least one	\exists	\exists
1 Propositional logic	2. there exists one and only one	$\exists!$	\exists !
1.1 Propositions	3. there is no	\nexists	\nexists
1.2 Semantics of propositional operators	4. for all	\forall	\forall
1.3 Beyond truth tables	5. not (logical not)	\neg	\neg
2 sets	6. or (logical or)	\vee	\lor
2.1 elements and equality	7. division	\div	\div
2.2 subsets and supersets	8. and (logical and)	\wedge	\land
2.3 Operations on sets	9. implies	\implies	\implies
2.4 Partitions	10. right implication	\Rightarrow	\Rightarrow
2.5 Naive set theory	11. is implied by (only if)	\Leftarrow	\Longleftarrow
3 Boolean algebra	12. left implication	\Leftarrow	\Leftarrow
3.1 monoids	13. if and only if, iff	\iff	\iff
3.2 Boolean's algebra	14. equivalence	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow
3.3 duality	15. Subset	\subset	\subset
3.4 truth table to formulas/circuit	16. Logical XOR (exclusive or)	\oplus	\oplus
4 Predication logic	17. Union of sets	\cup	\cup
4.1 Predicates and free variables	18. Empty set	\emptyset	\emptyset
4.2 Quantifiers and bound variables	19. Intersection of sets	\cap	\cap
5 Proof Strategies			
6 functions			
6.1 terminology			
6.2 mapping and pre-mapping			
6.3 special functions			
7 Relations			
7.1 properties of relations			
7.2 relations define			
7.3 Equivalence classes			
7.4 partitions			

1 Propositielogica

Propositielogica is de studie van bewijzen. Een propositie is te beantwoorden met waar of niet waar. Een propositie is $3 < 17$, dit kan je checken op waarheid. Een propositie is $x \Rightarrow y$.

Propositielogica komt ook met een hele hoop termen, zo heb je **negatie** wat (gezien in een waarheidstabbel) het omdraaien van waarde betekend, waar wordt onwaar en vice versa. Je hebt ook **conjunctie**, wat een chique woord is voor *en*, $a \wedge b$, *b EN a*. Een andere variant is **disjunctie**, wat dan staat voor *of*, $a \vee b$, *a OF b*. **Implicatie** is de er ook een, dat is de $x \Rightarrow y$, *a IMPLIEERT b*. De allerlaatste is **equivalentie**, $a \leftrightarrow b$, *a is equivalent aan b*. LET OP! Dit betekend niet “gelijk aan” 2 rode canta’s zijn equivalent, maar niet hetzelfde, het is namelijk niet letterlijk dezelfde auto, maar ze zijn wel identiek aan elkaar.

1.1 Propositionele formules

We gebruiken in logica variabelen zoals P en Q, dit zijn *atomisch* propositions, deze zijn altijd geschreven in HOOFDLETTERS. Deze zijn niet verder op te delen, dus niet opgebouwd van kleinere delen zoals implicaties etc. deze waarden zijn Waar/True/1 of Onwaar/False/0.

Je hebt ook kleine letters p, q, ..., dit zijn niet-atomische propositions, het zijn geen propositionele formules, maar eerder *metavariablen*.

Elke propositionele formule bestaat uit:

- Atomitsche propositions (P, Q, R, ...)
- true, (T, Waar, 1)
- false, (F, Onwaar, 0)

Deze kunnen ook kleiner opgedeeld zijn, dan zijn dit ook propositionele formules:

- $P \Rightarrow Q$ - **implicatie** als P, dan Q
- $P \wedge Q$ - **conjunctie** P én Q
- $P \vee Q$ - **disjunctie** P of Q
- $\neg P$ - **negatie** (niet P / P houdt geen stand)

Zoals in de wiskunde ook is heeft propositielogica óók een volgorde, deze is:

- (1) Haakjes ()
- (2) Negatie \neg
- (3) Conjunctie \wedge
- (4) Disjunctie \vee
- (5) Implicatie \Rightarrow

$\neg P \vee Q \Rightarrow Q \wedge P$ moet gelezen worden als $((\neg P) \vee Q) \Rightarrow (Q \wedge P)$

Om dit te onthouden kan je deze zelf onthouden: “Hoe Navigeert Connie De IJssel”

1.2 Semantiek van propositionele operatoren

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1		0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1		1	1	0	1	1

Tabel 1: Truthtable van basisoperaties

Maar stel, je wilt iets moeilijks bewijzen zoals $\neg P \vee Q \Rightarrow Q \wedge P$, dan kan je dat op de volgende manier doen:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \wedge P$	$\neg P \vee Q \Rightarrow Q \wedge P$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Tabel 2: Truthtable van moeilijkere propositionele formule

Je kan ook met verschillende kleuren pennen een kleine waarheidstabbel schrijven, maar dit is een hele nette manier om het ook te doen.

1.3 Voorbij truth tables

Je kan d.m.v een truth table bewijzen of een formule wel of niet houdt, maar dat kan ook anders, bijvoorbeeld door het versimpelen van de formules.

Expression	Law
$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$	original
\Leftrightarrow	implication
$(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$	associativity / rearrangement
\Leftrightarrow	tertium non datur
$\neg p \vee (T \vee p)$	absorbing property of T
\Leftrightarrow	absorbing property of T
$\neg p \vee T$	
\Leftrightarrow	
T	

Mocht het nou gebeuren dat elke rij waar is, ofwel de combinatie van input waarden maakt niet uit voor de uitkomst; deze is altijd waar. Dan heet dat een **tautologie**. Voor het omgekeerde (altijd onwaar), geld dat dit een **contradictie** heet.

Deze afleiding kan je maken door de regels te gebruiken die hieronder staan geschreven (er zijn er nog meer).

Commutativity:	Idempotence:	Properties of T en F:
- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	- $p \wedge p \Leftrightarrow p$	- $p \vee F \Leftrightarrow p$
- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	- $p \vee p \Leftrightarrow p$	- $p \wedge F \Leftrightarrow F$
Associativity:	De Morgan:	- $q \vee T \Leftrightarrow T$
- $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	- $q \wedge T \Leftrightarrow q$
- $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	Implication:
Tertium non datur:	Double negation (niet niet is wel):	- $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$	- $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$	Contraposition:
		- $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg q \implies \neg p)$

2 sets

Propositielogica heeft ook een manier om over een groep dingen te redeneren, **sets**. Deze schrijf tussen accolades met comma's tussen de items: $\{false, true\}$, $\{3, 7, 14\}$, $\{red, blue, yellow\}$. Dit kan voor kleine sets met de hand, maar als je grote sets wilt schrijven, dan kost dat heel veel tijd, daarom kan je ook: 1, 3, 5, ..., 99 om alle oneven cijfers van 1 t/m 99 als set te hebben. Of als 1, 2, 3, ... om alle cijfers vanaf 1 te hebben (oneindig). De lengte van een sets is op te schrijven door $|A|$ of A, waar A een set is met een lengte, de **cardinality** hier tel je alleen het aantal unieke elementen. Als er maar 1 element in een set zit, dan heet dat een **singleton**.

Ook kan je de **set-builder notation** gebruiken, hierbij schrijf je het soort element dat je wilt en wat het element kan zijn: $\{x : x \text{ has the property } P\}$

Voorbeeld (**Set-builder notation**):

Een collectie van alle prime numbers: $\{x : x \text{ is een priemgetal}\}$

Of $\{s : s \text{ is een strand in Nederland}\}$.

Er zijn ook een paar basis sets, die al van tevoren zijn gedefinieerd:

- $\emptyset = \{\}$ (the empty set)
- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (the binaire set)
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (De natuurlijke nummers)
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (De integers)
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ (De rationele nummers)
- $\mathbb{R} = \{x : x \text{ is a real number}\}$ (De real nummers)

Ø en { Ø } zijn twee verschillende dingen, de een is namelijk: {}, terwijl de ander {{ }} is!

2.1 leden en gelijkheid

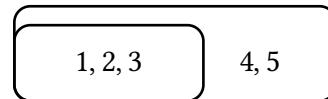
Je kan bekijken of een set een bepaalde member heeft door $7 \in \{3, 7, 14\}$ te doen. Hier is \in te lezen als "is element onderdeel van". Je hebt ook de negatie vorm, \notin , wat "is element niet onderdeel van", oftewel $6 \notin \{3, 7, 14\}$ betekend.

Ook is goed om te weten dat gelijkheid op basis van unieke element rust, dus $\{1, 2, 3, 2, 1\} \neq \{1, 3, 2\}$. Ongelijkheid is dus te bepalen door te kijken of een van de twee sets een waarde heeft die niet in de ander voorkomt. Dus volgorde maakt niet uit, en hoeveelheid elementen die dan wel niet hetzelfde zijn maakt ook niet uit.

2.2 subsets and supersets

Een **subset** is een set waarin minstens een deel van de waardes van de superset in voorkomen.

Dus $A = \{1, 2, 3\}$ is een subset van $B = \{1, 2, 3, 4\}$, hierin is B een **superset** van A en A een **subset** van B. Dit schrijf je als volgt: $A \subseteq B$ (*A is included or contained in B*) en vice versa $B \supseteq A$ (*B includes or contains A*).



2.3 Operaties op sets

Union $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ Combineert A en B met elkaar

Intersection $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ Het deel wat zowel in A als in B zit

Complement $\bar{A} = \{x : x \notin A\}$, alles wat niet in A zit.

Difference $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ Alles wat in A zit, maar niet in B

Zo heb je ook de **powerset** $P(A)$, dit is een set waarin alle mogelijke subsets van A zitten: $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$. Deze heeft n^2 elementen, waar n het aantal elementen van set A is.

Voorbeeld (**powerset/matchset**):

Stel je hebt een computer scherm, van 1680 x 1050, je wilt elke mogelijke configuratie van zwart/witte pixels omschrijven. Een set geeft aan welke pixels wit zijn, dus je wilt elke set met elke mogelijke manier van pixelcoordinaten, dat kan je zo schrijven:

$W = \{0, 1, \dots, 1697\}$ voor elke X coördinaat

$H = \{0, 1, \dots, 1049\}$ Voor elke Y coördinaat

$W \times H = \{\{0, 0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \dots, \{1, 0\}, \dots, \{1679, 1049\}\}$ dit is een volledig wit scherm, elke pixel is gerepresenteerd in deze set
 $P(W \times H) = \text{elke configuratie van witte pixels}$

2.4 Partities

Je kan een set A opdelen in meerdere sets, zoals A_1 en A_2 , hier zijn de regels: $A_1 \cup A_2 = A$ en $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Zo kan je $A = \mathbb{N}$ opsplitsen in A_1 en A_2 waar A_1 de even getallen zijn en A_2 de oneven getallen zijn.

2.5 Naive set theory

3 Boolean algebra

korte notitie* in Boolean algebra is de + hetzelfde als de OR operator, · hetzelfde als de AND operator, $^{-1}$ hetzelfde als NOT

3.1 monoïde

Monoïde is een verzameling A, is niet ledig en heeft minstens 1 element e, en een binaire operator \oplus . Een monoïde heeft een nul-element, dit is een waarde die niks doet in de operatie. $x + 0 = x$, hier doet de 0 helemaal niks, dus 0 is het 0-element in de "+" operatie. $x \times 1 = x$, hier is 1 het nul-element in de monoïde \times ; het doet niks in de operatie. het is dus een neutrale waarde.

3.2 Bool's algebra

Boolean algebra heeft een paar regels:

- een set B
- Twee elementen $0 \in B$ en $1 \in B$, genaamd **zero** en **unit**
- Twee binaire operatoren $+$ en \cdot som/OR en product/AND respectievelijk.
- Een Unaire operator $^{-1}$ de inverse genoemd ofwel NOT (kan ook als x' zijn genoteerd).

Voorbeeld (**Bewijs dat $x + x = x$:**)

We willen bewijzen dat voor elke x , $x + x = x$

$x + x$	$= (x + x) \cdot 1$	Ident
	$= (x + x) \cdot (x \cdot x^{-1})$	Complement
	$= x + (x \cdot x^{-1})$	Distribution
	$= x + ()$	Complement
	$= x$	Ident

3.3 dualiteit

Je kan voor elke vergelijking die je opschrijft een soort duale tweede vergelijking maken door hetvolgende te doen:

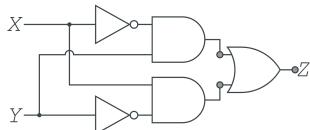
- 0 met 1 vervangen
- 1 met 0 te vervangen
- $+$ met \cdot te vervangen
- \cdot met $+$ te vervangen

3.4 waarheidstabell naar formule/circuit

Stel je krijgt een waarheidstabell zoals deze:

x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Als je dit omzet naar een propositie, dan moet je kijken naar alle rijen waar de uitkomst 1 is. Voor elke 0 waarde schrijf je de variabele (hier x of y), op als \bar{x} of \bar{y} . Elke 1 waarde schrijf je alleen de variabele op, dus x of y . Als je dat hier zou doen dan krijg je hetvolgende antwoord: $(\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$. Dit kan je dan vervolgens omzetten naar een circuit:



4 Predikatenlogica

4.1 Predicaten en vrije variabelen

We zagen eerder de *set-builder*-notatie

$$\{x \mid x \text{ heeft eigenschap } P\},$$

waarbij P een voorwaarde is. Een voorbeeld van zo'n voorwaarde is

$$P(x) = \text{Prime}(x) = "x \text{ is een priemgetal".}$$

Het predicaat geeft voor elke waarde x waar of onwaar terug, en op basis daarvan bepalen we of x tot de verzameling behoort. De bijbehorende *truth set* bestaat uit alle waarden die voldoen aan het predicaat.

Voorbeeld (**Eendjes**):

We hebben zeven eendjes:

$$\text{Eendjes} = \{\text{Kwik}, \text{Kwek}, \text{Kwak}, \text{Dagobert}, \text{Donald}, \text{Katrien}, \text{Dumbella}\}.$$

We definiëren het predicaat

$$\text{Female}(x) = "x \text{ is vrouwelijk".}$$

- $\text{Female}(\text{Katrien}) \wedge \text{Female}(\text{Dumbella})$ is waar.

- $\text{Female}(\text{Kwik}) \wedge \text{Female}(\text{Kwek}) \wedge \dots \wedge \text{Female}(\text{Donald})$ is niet waar.

- De truth set van $\text{Female}(x)$ is dus $\{\text{Katrien}, \text{Dumbella}\}$.

4.2 Kwantificatoren en gebonden variabelen

Stel dat we willen controleren of elke waarde in een lijst aan een voorwaarde voldoet. Het boek geeft het volgende voorbeeld:

Er zijn vier kinderen:

$$\text{Kinderen} = \{\text{Joel}, \text{Felix}, \text{Oskar}, \text{Amanda}\}.$$

Eén van hen moet voorin op de passagiersstoel zitten, omdat er achterin maar drie plekken zijn. Het predicaat $\text{Front}(x)$ betekent dat kind x voorin zit. We weten dus zeker dat voor één waarde van x het predicaat waar moet zijn.

De samengestelde propositie

$$\text{Front}(\text{Joel}) \vee \text{Front}(\text{Felix}) \vee \text{Front}(\text{Oskar}) \vee \text{Front}(\text{Amanda})$$

moet waar zijn. Dat levert in principe een grote lijst aan mogelijke combinaties op, wat snel onoverzichtelijk wordt.

Als je een predicaat schrijft zoals $P(x) = \dots x \dots$, dan is x een gebonden variabele. Als je een predicaat schrijft zoals $P(x) = \dots y \dots$, dan is y een vrije variabele.

Bij gebonden variabelen kan je de x vervangen door een waarde, $P(x) = x > 1337$. $P(10000) = 10000 > 1337$

4.3 Universele kwantificator

Om dit compacter te schrijven gebruiken we de universele kwantor \forall . De notatie $\forall x P(x)$ betekent: "voor elke x geldt $P(x)$ ". De propositie is alleen waar wanneer alle waarden voldoen aan P .

Het voorbeeld

$$\text{Happy}(\text{Joel}) \wedge \text{Happy}(\text{Felix}) \wedge \text{Happy}(\text{Oskar}) \wedge \text{Happy}(\text{Amanda})$$

kun je schrijven als

$$\forall x \text{Happy}(x),$$

waarbij de vraag is: zijn Joel, Felix, Oskar én Amanda allemaal blij?

4.4 Existentiële kwantificator

Als je wilt uitdrukken dat er minstens één waarde is waarvoor het predicaat waar is, gebruik je de existentiële kwantor \exists .

De notatie $\exists x P(x)$ betekent: "er bestaat een x waarvoor $P(x)$ geldt". Deze propositie is waar wanneer één of meer waarden voldoen aan P .

Het voorbeeld

$$\text{Happy}(\text{Joel}) \vee \text{Happy}(\text{Felix}) \vee \text{Happy}(\text{Oskar}) \vee \text{Happy}(\text{Amanda})$$

kan worden geschreven als

$$\exists x \text{Happy}(x).$$

Daarnaast bestaat er de vorm $\exists!x P(x)$: "Er bestaat precies één x waarvoor $P(x)$ geldt."

4.5 Gebonden kwantificatoren

Je kunt kwantoren beperken tot een verzameling.

De universele, beperkte vorm:

$$\forall x \in A P(x) \quad (\text{alle waarden in } A \text{ voldoen aan } P).$$

De existentiële, beperkte vorm:

$$\exists x \in A P(x) \quad (\text{er bestaat minstens één waarde in } A \text{ die voldoet aan } P).$$

4.6 predikatenlogica lezen

- $\forall x P(x) \rightarrow$ “Voor alle x geldt: $P(x)$ ”. “Elke [type van x] heeft de eigenschap ...”.
- $\exists x P(x) \rightarrow$ “Er bestaat een x zodanig dat $P(x)$ ”. “Er is ten minste één [type] waarvoor ...”.
- $\exists!x P(x) \rightarrow$ “Er bestaat precies één x zodanig dat $P(x)$ ”. In goed Nederlands: “Er is precies één ... die/het ...”.
- $P(x) \wedge Q(x) \rightarrow$ “ $P(x)$ en $Q(x)$ ”.
- $P(x) \vee Q(x) \rightarrow$ “ $P(x)$ en/of $Q(x)$ ”.
- $P(x) \rightarrow Q(x) \rightarrow$ “Als $P(x)$, dan $Q(x)$ ”.
- $\neg P(x) \rightarrow$ “niet $P(x)$ ”.
- $x = y \rightarrow$ “ x en y zijn hetzelfde object”.
- Meerdere kwantoren: volg strikt de volgorde $\forall x \exists y \rightarrow$ “Voor elke x bestaat een y ...”, $\exists y \forall x \rightarrow$ “Er bestaat een y die voor alle x ...” (volgorde verandert betekenis!).

Voorbeeld (**Een Predikatenlogica formule lezen**):

$$\forall x (\text{Student}(x) \rightarrow \exists y (\text{Course}(y) \wedge \text{Enrolled}(x, y) \wedge \neg \text{Failed}(x, y))).$$

Stap 1: Kies domein = “personen en vakken”: variabele x = persoon, y = vak.

Stap 2:

- Buitenste kwantor: $\forall x$ – “Voor alle personen x geldt: ...”
- Binnen: $\text{Student}(x) \rightarrow \exists y (\dots)$ – een implicatie: “als x student is, dan bestaat er een y zodanig dat ...”
- Binnenste existentie: $\exists y (\text{Course}(y) \wedge \text{Enrolled}(x, y) \wedge \neg \text{Failed}(x, y))$.

Stap 3:

Voor elke persoon x : als x een student is, dan bestaat er een vak y zodanig dat y een vak is, x staat ingeschreven voor y , en het is niet zo dat x voor y gezakt is.

Stap 4: Herschrijf de zin:

Elke student is ingeschreven voor minstens één vak waarin die niet gezakt is.

5 Proof Strategies

Implicatie-Introductie ($\implies -I$)

Deze gaat als volgt: **Neem aan dat P waar is, bewijs Q, daarom houdt $P \implies Q$** . Dit werkt omdat de waarheidstabell van implicatie altijd waar is, behalve als P waar is en Q niet. Dus als we ervanuit gaan dat P waar is en we bewijzen dat Q ook waar is, dan klopt de stelling. Namelijk als P niet waar blijkt te zijn, dan maakt Q niet meer uit, want de uitkomst is dan (volgens de waarheidstabell) toch waar. En Q kan onwaar zijn, want we hebben het tegendeel bewezen.

Implicatie-Eliminatie ($\implies -E$)

Deze gaat als volgt: **Bewijs $P \implies Q$, bewijs P, daarom houdt Q**. Dit werkt, omdat we de volledige stelling bewijzen, daardoor weten we dat in een waarheidstabell alleen de 1e, 2e en 4e rijen nog opties zijn. Als we dan bewijzen dat P waar is, dan weten we met 100% zekerheid dat Q dus ook waar moet zijn, want er is maar 1 optie waar P waar is en de stelling in zijn geheel waar is (4e rij).

Conjunctie-Introductie ($\wedge - I$)

Deze is heel simple, als je $P \wedge Q$ wilt bewijzen, dan moet je deze natuurlijk los bewijzen. Ofwel, **Bewijs P, Bewijs Q, daarom houdt $P \wedge Q$** .

Conjunctie-Eliminatie ($\wedge - E$)

Hier zijn twee varianten van. De eerste is **Bewijs $P \wedge Q$, bewijs P, daarom houdt Q**, de ander is **Bewijs $P \wedge Q$, bewijs Q, daarom houdt P**. Je bewijst namelijk al dat de gehele stelling moet waar zijn, en dat kan alleen als allebei de delen waar zijn. Als je dus bewijst dat de linker- of rechterzijde waar is, dan weet je dat de andere zijde ook waar moet zijn.

Negatie-Introductie ($\neg - I$)

Deze valt nog mee: **Neem aan dat P waar is, bewijs het tegendeel ($\neg P$), daarom houdt P niet**. Want P is altijd waar, totdat je bewijst dat het niet zo is.

Negatie-Eliminatie ($\neg - E$)

TODO: BETER UITWERKEN. Bewijs dat P waar is, Bewijs dat P niet waar is, dan krijg je $P \wedge \neg P$, en die stelling komt altijd uit op $\neq P$, dus je hebt bewezen dat de stelling niet houdt.

equivalentie-Introductie ($\leftrightarrow -I$)

Als je $P \leftrightarrow Q$ wilt bewijzen, dan moet je dus de 2 onderdelen hiervan bewijzen. Namelijk: **Bewijs $P \implies Q$, bewijs $Q \implies P$, daarom houdt $P \leftrightarrow Q$** . De definitie van equivalentie is namelijk dat beide onderdelen elkaar impliceren, dus daarom moet je ze apart van elkaar bewijzen.

equivalentie-Eliminatie ($\leftrightarrow -E$)

Zoals elke Eliminatie strategie moet je eerst bewijzen dat de gehele stelling houdt en daarna kan je conclusies trekken. Hier is dat zo: **Bewijs** $P \leftrightarrow Q$, **daarom houdt** $P \implies Q$ óf **Bewijs** $P \leftrightarrow Q$, **daarom houdt** $Q \implies P$ Omdat (nogmaals de definitie van equivalentie) is een equivalent op te splitsen in twee implicaties.

Disjunctie-Introductie ($\vee - I$)

Deze is heel simpel en je hebt hier 2 vormen van als je $P \vee Q$ wilt bewijzen. Namelijk: **bewijs P, daarom houdt** $P \vee Q$, de ander is **bewijs Q, daarom houdt** $P \vee Q$. In een disjunctie (OR) is namelijk of links waar of rechts waar (of beide) dus als je er één bewijst, dan maakt het niet meer uit wat de ander is.

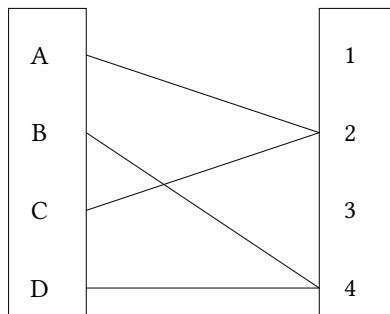
Disjunctie-Eliminatie ($\vee - E$)

Hoe simpel de introductie was, zo lastig is de eliminatie. Je moet namelijk heel veel stappen doorlopen om $P \vee Q$ te bewijzen. Namelijk: **Bewijs** $P \vee Q$, **1. neem aan dat P waar is, bewijs R; 2. neem aan dat Q waar is, bewijs R; Daarom is R waar onafhankelijk of P of Q waar is.** Deze is wat lastiger om te bedenken, maar bekijk het zo: 1. Als ik binnen ben, dan heb ik mijn telefoon bij me. 2. Als ik buiten ben, dan heb ik mijn telefoon bij me. Ik ben binnen óf buiten, dus ik heb mijn telefoon bij me.

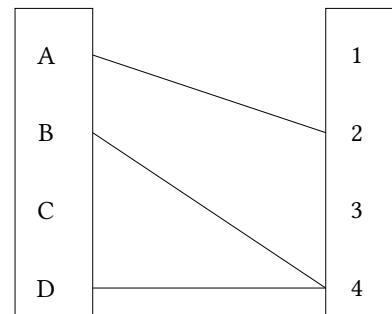
6 functies

Als je op elk element in eens set een verandering wilt doorvoeren, dan kan je daar een functie voor gebruiken. $f : A \rightarrow B$ betekend dat je op elke element in A een functie uitvoert en deze in de set B zet.

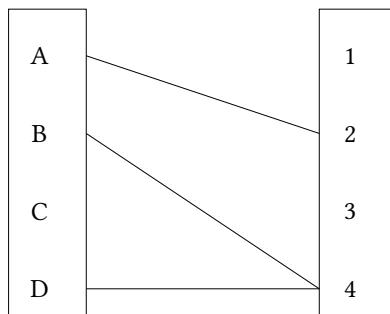
Functies zet elke member in een set om in een output (die dan wel niet altijd gelijk of anders is).



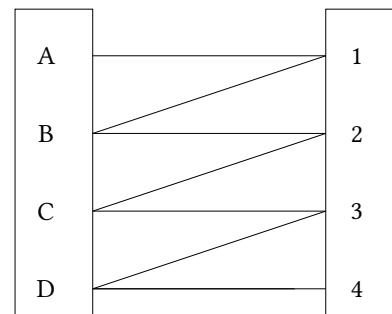
Dit is een functie: elke input geeft een output.



Dit is geen functie, want C heeft geen output, dat moet wel



Ook dit is een functie, want elke input geeft een output.



Dit is geen functie, input mogen min- en maximaal 1 output hebben

6.1 terminologie

A noemen we het **domein**, en B noemen we het **codomein**. Je kan ook meerdere argumenten meegeven: $f : A \times B \times C \rightarrow D$ De hoeveelheid argumenten noem je de **ariteit**.

Als je een functie definiert die 2 variabelen hebt, een **binaire functie** dan kan je die opeen speciale manier schrijven. Namelijk de functie “+” kan je hem tussen de variablene zetten, namelijk $A + B$ wat hetzelfde betekend als $+(A, B)$.

6.2 afbeelding en pre-afbeelding

de image van een set is je begint met een set en die zet je om naar de na-functie set. De pre-image is het resultaat en die wil je dan omzetten naar het origineel.

6.3 speciale functies

7 Relaties

7.1 properties of realtions

- Reflexiviteit: als $R(x, x)$ voor alle x , bijvoorbeeld gelijkheid
- Symetrie: als $R(x, y) \implies R(y, x)$, bijvoorbeeld gelijkheid, of 'is sibling of (de broer van mijn zus ben ik)'
- Asymetrie: als $R(x, y) \implies \neg R(y, x)$
- Transitief: als $R(x, y) \wedge R(y, z) \implies R(x, z)$, bijvoorbeeld gelijkheid $3 = 1 + 2$ en $1 + 2 = 1 + 1 + 1$ dus $3 = 1 + 1 + 1$

7.2 relaties definieren

7.3 Equivalentie klasse

Als je bepaalde sets als "gelijk" wil beschouwen dan kan je dit gebruiken. Je kan dan bijvoorbeeld zeggen: auto's zijn gelijk als het model en merk hetzelfde zijn, kleur maakt niet uit. Of $1/2$ is gelijk aan $2/4$, het detail dat ze niet 1 op 1 hetzelfde zijn maakt niet meer uit. Ze zijn niet gelijk, maar wel equivalent.

7.4 partities

Als je een set A heb met een eindig aantal partities $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Dan is elke partitie $A_i \cap A_j = \emptyset$ wanneer $i \neq j$. En bij elkaar $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$. Oftewel, elke parties heeft elementen die niet in een andere set zitten. En als je ze weer samenvoegt, dan krijg je de originele set A weer.