Logica voor informatica

Matt ter Steege
mattttersteege@gmail.com
Universiteit Utrecht
Utrecht, Nederland

Contents

TERM	LATEX	LATEX COMMAND
1. there exists at least one	$\exists$	`\exists`
2. there exists one and only one	$\exists!$	`\exists !`
3. there is no	$\nexists$	`\nexists`
4. for all	$\forall$	`\forall`
5. not (logical not)	$\neg$	`\neg`
6. or (logical or)	$\lor$	`\lor`
7. division	$\div$	`\div`
8. and (logical and)	$\land$	`\land`
9. implies	$\implies$	`\implies`
10. right implication	$\Rightarrow$	`\Rightarrow`
11. is implied by (only if)	$\Longleftarrow$	`\Longleftarrow`
12. left implication	$\Leftarrow$	`\Leftarrow`
13. if and only if, iff	$\iff$	`\iff`
14. equivalence	$\Leftrightarrow$	`\Leftrightarrow`
15.Subset	$\subset$	`\subset`
16. Logical XOR (exclusive or)	$\oplus$	`\oplus`
17. Union of sets	$\cup$	`\cup`
18. Empty set	$\emptyset$	`\emptyset`
19. Intersection of sets	$\cap$	`\cap`
20. Union of sets	$\cup$	`\cup`

1 Propositielogica

Propositielogica is de studie van bewijzen

1.1 Proposities

We gebruiken in logica variabelen zoals P en Q, dit zijn *atomisch* proposities, deze zijn altijd geschreven in HOOFDLETTERS. Deze zijn niet verder op te delen, dus niet opgebouwd van kleinere delen zoals implicaties etc. deze waardes zijn Waar/True/1 of Onwaar/False/0.

Je hebt ook kleine letters p, q, …, dit zijn niet-atomische proposities, het zijn geen propositionele formules, maar eerder *metavariabelen*.

Elke propositionele formule bestaat uit:

- Atomitsche proposities (P, Q, R, …)
- true, (T, Waar, 1)
- false, (F, Onwaar, 0)

Deze kunnen ook kleiner opgedeeld zijn, dan zijn dit ook propositionele formules:

- $P \implies Q$ - **implicatie** als P, dan Q
- $P \wedge Q$ - **conjunctie** P én Q
- $P \vee Q$ - **disjunctie** P of Q
- $\neg P$ - **negatie** (niet P / P houd geen stand)

Zoals in de wiskunde ook is heeft propositielogica óók een volgorde, deze is:

(1) Haakjes ()
(2) Negatie $\neg$
(3) Conjunctie $\wedge$
(4) Disjunctie $\vee$
(5) Implicatie $\implies$

$\neg P \vee Q \implies Q \wedge P$ moet gelezen worden als $((\neg P) \vee Q) \implies (Q \wedge P)$

Om dit te onthouden kan je deze zij onthouden: "Hoe Navigeert Connie De Ijssel"

1.2 Semantiek van propositie operatoren

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \implies Q$	$P \equiv Q$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1		0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1		1	1	0	1	1

Tabel 1: Truthtable van basisoperaties

Maar stel, je wilt iets moeilijks bewijzen zoals $\neg P \vee Q \implies Q \wedge P$, dan kan je dat op de volgende manier doen:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \wedge P$	$\neg P \vee Q \implies Q \wedge P$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Tabel 2: Truthtable van moeilijkere propositie formule

Je kan ook met verschillende kleuren pennen een kleine thruthtable schrijven, maar dit is een hele nette manier om het ook te doen.

1.3 Voorbij thruth tables

Je kan d.m.v een truth table bewijzen of een formule wel of niet houd, maar dat kan ook anders, bijvoorbeeld door het versimpelen van de formules.

	Expression	**Law**
	$(p \implies q) \vee (q \implies p)$	original
$\Leftrightarrow$	$(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$	implication
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee ((q \vee \neg q) \vee p)$	associativity / rearrangement
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee (T \vee p)$	tertium non datur
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee T$	absorbing property of T
$\Leftrightarrow$	T	absorbing property of T

Deze afleiding kan je maken door de regels te gebruiken die hieronder stan geschreven (er zijn er nog meer).

Commutativity:

- $p \land q \Leftrightarrow q \land p$
- $p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$

Associativity:

- $p \land (q \land r) \Leftrightarrow (p \land q) \land r$
- $p \lor (q \lor r) \Leftrightarrow (p \lor q) \lor r$

Tertium non datur:

- $p \lor \neg p \Leftrightarrow T$

Idempotence:

- $p \land p \Leftrightarrow p$
- $p \lor p \Leftrightarrow p$

De Morgan:

- $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$
- $\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$

Double negation (niet niet is wel):

- $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$

Properties of T en F:

- $p \lor F \Leftrightarrow p$
- $p \land F \Leftrightarrow F$
- $q \lor T \Leftrightarrow T$
- $q \land T \Leftrightarrow q$

Implication:

- $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg p \lor q)$

Contraposition:

- $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg q \implies \neg p)$

2 sets

Propositielogica heeft ook een manier om over een groep dingen te redeneren, ***sets***. Deze schrijf tussen accolades met comma's tussen de items: $\{false, true\}$, $\{3, 7, 14\}$, $\{red, blue, yellow\}$. Dit kan voor kleine sets met de hand, maar als je grote setws wilt schrijven, dan kost dat heel veel tijd, daarom kan je ook: $1, 3, 5, \ldots, 99$ om alle oneven cijfers van 1 t/m 99 als set te hebben. Of als $1, 2, 3, \ldots$ om alle cijfers vanaf 1 te hebben (oneindig).

Ook kan je de ***set-builder notation*** gebruiken, hierbij schrijf je het soort element dat je wilt en wat het element kan zijn: {x : x has property P}

Set-builder notation Een collectie van alle prime numbers: {x : x is een priemgetal}
Of {s : s is een strand in Nederland}.

Er zijn ook een paar basis sets, die al vantevoren zijn gedefineerd:

- $\emptyset = \{\}$ (the empty set)
- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (the binaire set)
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (De natuurlijke nummers)
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (De integers)
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}$: m, n $\in$, n $\neq$ 0$\}$ (De rationele nummers)
- $\mathbb{R} = \{x$: x is a real number$\}$ (De real nummers)

$\emptyset$ en { $\emptyset$ } zijn twee verschillende dingen, de een is namelijk: { }, terwijl de ander { { } } is!

2.1 leden en gelijkheid

Je kan bekijken of een set een bepaalde member heeft door $7 \in \{3, 7, 14\}$ te doen. Hier is $\in$ te lezen als *"is element onderdeel van"* Je hebt ook de negatie vorm, $\notin, wat"iselementnietonderdeelvan", oftwel 6 \notin \{3, 7, 14\}$

Ook is goed om te weten dat gelijkheid op basis van unieke element rust, dus $\{1, 2, 3, 2, 1\}\{1, 3, 2\}$. Ongelijkheid is dus te bepalen door te kijken of een van de twee sets een waarde heeft die niet in de ander voorkomt.

2.2 subsets and supersets

Een ***subset*** is een set waarin minstens een deel van de waardes van de superset in voorkomen.

Dus $A = \{1, 2, 3\}$ is een subset van $B = \{1, 2, 3, 4\}$, hierin is B een ***superset*** van A en A een ***subset*** van B Dit schrijf je als volgt: $A \subseteq B$ *(A is included or contained in B)* en vice versa $B \supseteq A$ *(B includes or contains A).*