Logica voor informatica

Matt ter Steege
mattersteege@gmail.com
Universiteit Utrecht
Utrecht, Nederland

Contents

Contents ... 1
1 Propositielogica ... 2
1.1 Proposities ... 2
1.2 Semantiek van propositie operatoren ... 2
1.3 Voorbij thruth tables ... 2

TERM	LATEX	LATEX COMMAND
1. there exists at least one	$\exists$	`\exists`
2. there exists one and only one	$\exists!$	`\exists !`
3. there is no	$\nexists$	`\nexists`
4. for all	$\forall$	`\forall`
5. not (logical not)	$\neg$	`\neg`
6. or (logical or)	$\lor$	`\lor`
7. division	$\div$	`\div`
8. and (logical and)	$\land$	`\land`
9. implies	$\implies$	`\implies`
10. right implication	$\Rightarrow$	`\Rightarrow`
11. is implied by (only if)	$\Longleftarrow$	`\Longleftarrow`
12. left implication	$\Leftarrow$	`\Leftarrow`
13. if and only if, iff	$\iff$	`\iff`
14. equivalence	$\Leftrightarrow$	`\Leftrightarrow`
15.Subset	$\subset$	`\subset`
16. Logical XOR (exclusive or)	$\oplus$	`\oplus`
17. Union of sets	$\cup$	`\cup`
18. Empty set	$\emptyset$	`\emptyset`
19. Intersection of sets	$\cap$	`\cap`
20. Union of sets	$\cup$	`\cup`

1 Propositielogica

Propositielogica is de studie van bewijzen

1.1 Proposities

We gebruiken in logica variabelen zoals P en Q, dit zijn *atomisch* proposities, deze zijn altijd geschreven in HOOFDLETTERS. Deze zijn niet verder op te delen, dus niet opgebouwd van kleinere delen zoals implicaties etc. deze waardes zijn Waar/True/1 of Onwaar/False/0.

Je hebt ook kleine letters p, q, …, dit zijn niet-atomische proposities, het zijn geen propositionele formules, maar eerder *metavariabelen.*

Elke propositionele formule bestaat uit:

- Atomitsche proposities (P, Q, R, …)
- true, (T, Waar, 1)
- false, (F, Onwaar, 0)

Deze kunnen ook kleiner opgedeeld zijn, dan zijn dit ook propositionele formules:

- $P \implies Q$ - **implicatie** als P, dan Q
- $P \wedge Q$ - **conjunctie** P én Q
- $P \vee Q$ - **disjunctie** P of Q
- $\neg P$ - **negatie** (niet P / P houd geen stand)

Zoals in de wiskunde ook is heeft propositielogica óók een volgorde, deze is:

(1) Haakjes ()
(2) Negatie $\neg$
(3) Conjunctie $\wedge$
(4) Disjunctie $\vee$
(5) Implicatie $\implies$

$\neg P \vee Q \implies Q \wedge P$ moet gelezen worden als $((\neg P) \vee Q) \implies (Q \wedge P)$

Om dit te onthouden kan je deze zij onthouden: “Hoe Navigeert Connie De Ijssel”

1.2 Semantiek van propositie operatoren

P	$\neg P$
0	1
1	0

Tabel 1: Truthtable van negatie/NOT

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 2: Truthtable van Conjunctie/AND

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabel 3: Truthtable van Disjunctie/OR

P	Q	$P \oplus Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabel 4: Truthtable van XOR

P	Q	$P \implies Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabel 5: Truthtable van implicatie

P	Q	$P \equiv Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 6: Truthtable van equivalent/==

Maar stel, je wilt iets moeilijks bewijzen zoals $\neg P \vee Q \implies Q \wedge P$, dan kan je dat op de volgende manier doen:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \wedge P$	$\neg P \vee Q \implies Q \wedge P$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Tabel 7: Truthtable van moeilijkere propositie formule

Je kan ook met verschillende kleuren pennen een kleine thruthtable schrijven, maar dit is een hele nette manier om het ook te doen.

1.3 Voorbij thruth tables

Je kan d.m.v een truth table bewijzen of een formule wel of niet houd, maar dat kan ook anders, bijvoorbeeld door het versimpelen van de formules.

	Expression	Law
	$(p \implies q) \vee (q \implies p)$	original
$\Leftrightarrow$	$(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$	implication
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee ((q \vee \neg q) \vee p)$	associativity / rearrangement
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee (T \vee p)$	tertium non datur
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee T$	absorbing property of T
$\Leftrightarrow$	T	absorbing property of T

Deze afleiding kan je maken door de regels te gebruiken die hieronder stan geschreven (er zijn er nog meer).

Commutativity:

- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Associativity:

- $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
- $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

Tertium non datur:

- $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$

Idempotence:

- $p \wedge p \Leftrightarrow p$
- $p \vee p \Leftrightarrow p$

De Morgan:

- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Double negation (niet niet is wel):

- $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$

Properties of T en F:

- $p \vee F \Leftrightarrow p$
- $p \wedge F \Leftrightarrow F$
- $q \vee T \Leftrightarrow T$
- $q \wedge T \Leftrightarrow q$

Implication:

- $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Contraposition:

- $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg q \implies \neg p)$