Logica voor informatica

Matt ter Steege
matttersteege@gmail.com
Universiteit Utrecht
Utrecht, Nederland

Contents

Contents 1
1 Propositielogica 2
1.1 Proposities 2
1.2 Semantiek van propositie operatoren 2
1.3 Voorbij thruth tables 2
2 sets 3
2.1 leden en gelijkheid 3
2.2 subsets and supersets 3
2.3 Operaties op sets 3
2.4 Partities 4
2.5 Naive set theory 4
3 Boolean algebra 4
3.1 monoïde 4
3.2 Bool's algebra 4
3.3 dualiteit 4
3.4 waarheidstabel naar formule/circuit 4
4 Predikatenlogica 5
4.1 Predicaten en vrije variabelen 5
4.2 Kwantificatoren en gebonden variabelen 5
4.3 Universele kwantificator 5
4.4 Existentiële kwantificator 5
4.5 Gebonden kwantificatoren 5
4.6 predikatenlogica lezen 6
5 Proof strategies 6
5.1 Bewijzen voor logische operatoren 6
5.2 Bewijzen voor kwantificatoren 7
5.3 Afgeleide bewijzen 7
6 functies 7
6.1 terminologie 8
6.2 afbeelding en pre-afbeelding 8
6.3 speciale functies 8
7 Relaties 8
7.1 properties of realtions 8
7.2 relaties defineren 8
7.3 Equivalentie klasse 8
7.4 partities 8

TERM	LATEX	LATEX COMMAND
1. there exists at least one	$\exists$	`\exists`
2. there exists one and only one	$\exists!$	`\exists !`
3. there is no	$\nexists$	`\nexists`
4. for all	$\forall$	`\forall`
5. not (logical not)	$\neg$	`\neg`
6. or (logical or)	$\vee$	`\lor`
7. division	$\div$	`\div`
8. and (logical and)	$\wedge$	`\land`
9. implies	$\implies$	`\implies`
10. right implication	$\Rightarrow$	`\Rightarrow`
11. is implied by (only if)	$\Longleftarrow$	`\Longleftarrow`
12. left implication	$\Leftarrow$	`\Leftarrow`
13. if and only if, iff	$\iff$	`\iff`
14. equivalence	$\Leftrightarrow$	`\Leftrightarrow`
15.Subset	$\subset$	`\subset`
16. Logical XOR (exclusive or)	$\oplus$	`\oplus`
17. Union of sets	$\cup$	`\cup`
18. Empty set	$\emptyset$	`\emptyset`
19. Intersection of sets	$\cap$	`\cap`

1 Propositielogica

Propositielogica is de studie van bewijzen. Een propositie is te beantwoorden met waar of niet waar Een propositie is $3 < 17$, dit kan je checken op waarheid. Een propositie is $x \implies y$.

Propositielogica komt ook met een hele hoop termen, zo heb je **negatie** wat (gezien in een waarheidstabel) het omdraaien van waarde betekend, waar wordt onwaar en vice versa. Je hebt ook **conjunctie**, wat een chique woord is voor *en*, $a \wedge b$, b EN a. Een andere variant is **disjunctie**, wat dan staat voor *of*, $a \vee b$, a OF b. **Implicatie** is de er ook een, dat is de $x \implies y$, a IMPLCIEERT b. De allerlaatste is **equivalentie**, $a \Leftrightarrow b$, a is equivalent aan b. LET OP! Dit betekend niet "gelijk aan" 2 rode canta's zijn equivalent, maar niet hetzelfde, het is namelijk niet letterlijk dezelfde auto, maar ze zijn wel identiek aan elkaar.

1.1 Proposities

We gebruiken in logica variabelen zoals P en Q, dit zijn *atomisch* proposities, deze zijn altijd geschreven in HOOFDLETTERS. Deze zijn niet verder op te delen, dus niet opgebouwd van kleinere delen zoals implicaties etc. deze waardes zijn Waar/True/1 of Onwaar/False/0.

Je hebt ook kleine letters p, q, …, dit zijn niet-atomische proposities, het zijn geen propositionele formules, maar eerder *metavariabelen*.

Elke propositionele formule bestaat uit:

- Atomitsche proposities (P, Q, R, …)
- true, (T, Waar, 1)
- false, (F, Onwaar, 0)

Deze kunnen ook kleiner opgedeeld zijn, dan zijn dit ook propositionele formules:

- $P \implies Q$ - **implicatie** als P, dan Q
- $P \wedge Q$ - **conjunctie** P én Q
- $P \vee Q$ - **disjunctie** P of Q
- $\neg P$ - **negatie** (niet P / P houd geen stand)

Zoals in de wiskunde ook is heeft propositielogica óók een volgorde, deze is:

(1) Haakjes ()
(2) Negatie ¬
(3) Conjunctie ∧
(4) Disjunctie ∨
(5) Implicatie $\implies$

$\neg P \vee Q \implies Q \wedge P$ moet gelezen worden als $((\neg P) \vee Q) \implies (Q \wedge P)$

Om dit te onthouden kan je deze zij onthouden: "Hoe Navigeert Connie De Ijssel"

1.2 Semantiek van propositie operatoren

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \implies Q$	$P \equiv Q$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1		0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1		1	1	0	1	1

Tabel 1: Truthtable van basisoperaties

Maar stel, je wilt iets moeilijks bewijzen zoals $\neg P \vee Q \implies Q \wedge P$, dan kan je dat op de volgende manier doen:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \wedge P$	$\neg P \vee Q \implies Q \wedge P$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Tabel 2: Truthtable van moeilijkere propositie formule

Je kan ook met verschillende kleuren pennen een kleine waarheidstabel schrijven, maar dit is een hele nette manier om het ook te doen.

1.3 Voorbij thruth tables

Je kan d.m.v een truth table bewijzen of een formule wel of niet houd, maar dat kan ook anders, bijvoorbeeld door het versimpelen van de formules.

	Expression	**Law**
	$(p \implies q) \vee (q \implies p)$	original
$\Leftrightarrow$	$(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$	implication
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee ((q \vee \neg q) \vee p)$	associativity / rearrangement
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee (T \vee p)$	tertium non datur
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee T$	absorbing property of T
$\Leftrightarrow$	T	absorbing property of T

Mocht het nou gebeuren dat elke rij waar is, ofwel de combinatie van input waardes maakt niet uit voor de uitkomst; deze is altijd waar. Dan heet dat een **tautologie**. Voor het omgekeerde (altijd onwaar), geld dat dit een **contradictie** heet.

Deze afleiding kan je maken door de regels te gebruiken die hieronder stan geschreven (er zijn er nog meer).

Commutativity:

- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Associativity:

- $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
- $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

Tertium non datur:

- $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$

Idempotence:

- $p \wedge p \Leftrightarrow p$
- $p \vee p \Leftrightarrow p$

De Morgan:

- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Double negation (niet niet is wel):

- $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$

Properties of T en F:

- $p \vee F \Leftrightarrow p$
- $p \wedge F \Leftrightarrow F$
- $q \vee T \Leftrightarrow T$
- $q \wedge T \Leftrightarrow q$

Implication:

- $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Contraposition:

- $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg q \implies \neg p)$

2 sets

Propositielogica heeft ook een manier om over een groep dingen te redeneren, ***sets***. Deze schrijf tussen accolades met comma's tussen de items: $\{false, true\}$, $\{3, 7, 14\}$, $\{red, blue, yellow\}$. Dit kan voor kleine sets met de hand, maar als je grote sets wilt schrijven, dan kost dat heel veel tijd, daarom kan je ook: 1, 3, 5, ..., 99 om alle oneven cijfers van 1 t/m 99 als set te hebben. Of als 1, 2, 3, ... om alle cijfers vanaf 1 te hebben (oneindig). De lengte van een sets is op te schrijven door |A| of A, waar A een set is met een lengte, de **cardinality** hier tel je alleen het aantal unieke elementen. Als er maar 1 element in een set zit, dan heet dat een **singleton**.

Ook kan je de ***set-builder notation*** gebruiken, hierbij schrijf je het soort element dat je wilt en wat het element kan zijn: {x : x has the property P}

Voorbeeld **(Set-builder notation)**:

Een collectie van alle prime numbers: {x : x is een priemgetal}
Of {s : s is een strand in Nederland}.

Er zijn ook een paar basis sets, die al van tevoren zijn gedefinieerd:

- $\emptyset = \{\}$ (the empty set)
- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (the binaire set)
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ (De natuurlijke nummers)
- $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ (De integers)
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : \text{m, n} \in \mathbb{Z}, \text{n}\neg 0\}$ (De rationele nummers)
- $\mathbb{R} = \{x : \text{x is a real number}\}$ (De real nummers)

$\emptyset$ en { $\emptyset$ } zijn twee verschillende dingen, de een is namelijk: { }, terwijl de ander { { } } is!

2.1 leden en gelijkheid

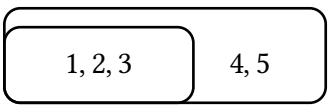
Je kan bekijken of een set een bepaalde member heeft door $7 \in \{3, 7, 14\}$ te doen. Hier is $\in$ te lezen als *"is element onderdeel van"* Je hebt ook de negatie vorm, $\notin$, wat *"is element niet onderdeel van"*, oftwel $6 \notin \{3, 7, 14\}$ betekend.

Ook is goed om te weten dat gelijkheid op basis van unieke element rust, dus $\{1, 2, 3, 2, 1\}\{1, 3, 2\}$. Ongelijkheid is dus te bepalen door te kijken of een van de twee sets een waarde heeft die niet in de ander voorkomt. Dus volgorde maakt niet uit, en hoeveelheid elementen die dan welniet hetzelfde zijn maakt ook niet uit.

2.2 subsets and supersets

Een ***subset*** is een set waarin minstens een deel van de waardes van de superset in voorkomen.

Dus $A = \{1, 2, 3\}$ is een subset van $B = \{1, 2, 3, 4\}$, hierin is B een ***superset*** van A en A een ***subset*** van B Dit schrijf je als volgt: $A \subseteq B$ *(A is included or contained in B)* en vice versa $B \supseteq A$ *(B includes or contains A).*



2.3 Operaties op sets

Union $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ Combineert A en B met elkaar
Intersection $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ Het deel wat zowel in A als in B zit
Complement $\overline{A} = \{x : x \notin A\}$, alles wat niet in A zit.
Difference $A = \{x : x \in A \wedge X \notin B\}$ Alles wat in A zit, maar niet in B

Zo heb je ook de *powerset P(A)*, dit is een set waarin alle mogelijke subsets van A zitten: $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$. Deze heeft n^2 elementen, waar n het aantal elementen van set A is.

Voorbeeld **(powerset/matchsset)**:

Stel je hebt een computer scherm, van 1680 x 1050, je wilt elke mogelijke configuratie van zwart/witte pixels opschrijven. Een set geeft aan welke pixels wit zijn, dus je wilt elke set met elke mogelijke manier van pixelcoordinaten, dat kan je zo schrijven:
$W = \{0, 1, ..., 1697\}$ voor elke X coordinaat
$H = \{0, 1, ..., 1049\}$ Voor elke Y coordinaat

$W \times H = \{\{0,0\},\{0,1\},\{0,2\},...,\{1,0\},...\{1679,1049\}\}$ dit is een volledig wit scherm, elke pixel is gerepresentateerd in deze set
$P(W \times H)$ = elke configuratie van witte pixels

2.4 Partities

Je kan een set A opdelen in meerdere sets, zoals A_1 en A_2, hier zijn de regels: $A_1 \cup A_2 = A$ en $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ Zo kan je A = $\mathbb{N}$ opsplitsen in A_1 en A_2 waar A_1 de even getallen zijn en A_2 de oneven getallen zijn.

2.5 Naive set theory

3 Boolean algebra

korte notitie* in Bolean algebra is de + hetzelfde als de OR operator, · hetzelfde als de AND operator, $^{-1}$ hetzelfde als NOT

3.1 monoïde

Monoide is een verzameling A, is niet ledig en heeft minstens 1 element e, en een binaire operator $\oplus$ Een monoide heeft een nul-element, dit is een waarde die niks doet in de operatie. $x + 0 = x$, hier doet de 0 helemenaal niks, dus 0 is het 0-element in de "+" operatie. $x \times 1 = x$, hier is 1 het nul-element in de monoide $\times$ 1; het doet niks in de operatie. het is dus een neutrale waarde.

3.2 Bool's algebra

Boolean algebra heeft een paar regels:

- een set B
- Twee elementen $0 \in B$ en $1 \in B$, genaamd **zero** en **unit**
- Twee binaire operatoren + en · som/OR en product/AND respectievelijk.
- Een Unaire operator $^{-1}$ de inverse genoemd ofwel NOT (kan ook als x' zijn genoteerd).

Voorbeeld **(Bewijs dat $x + x = x$)**:

We willen bewijzen dat voor elke x, $x + x = x$

$x + x$	$= (x + x) \cdot 1$	Ident
	$= (x + x) \cdot (x \cdot x^{-1})$	Complement
	$= x + (x \cdot x^{-1})$	Distrobution
	$= x + ()$	Complement
	$= x$	Ident

3.3 dualiteit

Je kan voor elke vergelijking die je opschrijft een soort duale tweede vergelijking maken door hetvoglende te doen:

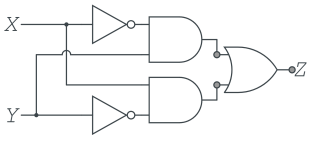
- 0 met 1 vervangen
- 1 met 0 te vervangen
- + met · te vervangen
- · met + te vervangen

3.4 waarheidstabel naar formule/circuit

Stel je krijgt een waarheidstabel zoals deze:

x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Als je dit omzet naar een propositie, dan moet je kijken naar alle rijen waar de uitkomst 1 is. Voor elke 0 waarde schrijf je de variabele (hier x of y), op als $\overline{x}$ of $\overline{y}$. Elke 1 waarde schrijf je alleen de variabele op, dus x of y. Als je dat hier zou doen dan krijg je hetvolgende antwoord: $(\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$. Dit kan je dan vervolgens omzetten naar een circuit:



4 Predikatenlogica

4.1 Predicaten en vrije variabelen

We zagen eerder de *set-builder*-notatie

$$\{x \mid x \text{ heeft eigenschap } P\},$$

waarbij P een voorwaarde is. Een voorbeeld van zo'n voorwaarde is

$$P(x) = Prime(x) = \text{“}x \text{ is een priemgetal”}.$$

Het predicaat geeft voor elke waarde x waar of onwaar terug, en op basis daarvan bepalen we of x tot de verzameling behoort. De bijbehorende *truth set* bestaat uit alle waarden die voldoen aan het predicaat.

Voorbeeld **(Eendjes)**:

We hebben zeven eendjes:

$$Eendjes = \{Kwik, Kwek, Kwak, Dagobert, Donald, Katrien, Dumbella\}.$$

We definiëren het predicaat

$$Female(x) = \text{“}x \text{ is vrouwelijk”}.$$

- $Female(Katrien) \land Female(Dumbella)$ is waar.
- $Female(Kwik) \land Female(Kwek) \land \cdots \land Female(Donald)$ is niet waar.
- De truth set van $Female(x)$ is dus $\{Katrien, Dumbella\}$.

4.2 Kwantificatoren en gebonden variabelen

Stel dat we willen controleren of elke waarde in een lijst aan een voorwaarde voldoet. Het boek geeft het volgende voorbeeld:

Er zijn vier kinderen:

$$Kinderen = \{Joel, Felix, Oskar, Amanda\}.$$

Eén van hen moet voorin op de passagiersstoel zitten, omdat er achterin maar drie plekken zijn. Het predicaat $Front(x)$ betekent dat kind x voorin zit. We weten dus zeker dat voor één waarde van x het predicaat waar moet zijn.

De samengestelde propositie

$$Front(Joel) \lor Front(Felix) \lor Front(Oskar) \lor Front(Amanda)$$

moet waar zijn. Dat levert in principe een grote lijst aan mogelijke combinaties op, wat snel onoverzichtelijk wordt.

Als je een predikaat schrijft zoals $P(x) = \ldots x \ldots$, dan is x een gebonden variabele. Als je een predikaat schrijft zoals $P(x) = \ldots y \ldots$, dan is y een vrije variabele.
Bij gebonden variabelen kan je de x vervangen door een waarde, $P(x) = x > 1337$. $P(10000)$ wordt dan $10000 > 1337$

4.3 Universele kwantificator

Om dit compacter te schrijven gebruiken we de universele kwantor $\forall$. De notatie $\forall x\, P(x)$ betekent: “voor elke x geldt $P(x)$”. De propositie is alleen waar wanneer alle waarden voldoen aan P.

Het voorbeeld

$$Happy(Joel) \land Happy(Felix) \land Happy(Oskar) \land Happy(Amanda)$$

kun je schrijven als

$$\forall x\, Happy(x),$$

waarbij de vraag is: zijn Joel, Felix, Oskar én Amanda allemaal blij?

4.4 Existentiële kwantificator

Als je wilt uitdrukken dat er minstens één waarde is waarvoor het predicaat waar is, gebruik je de existentiële kwantor $\exists$.

De notatie $\exists x\, P(x)$ betekent: “er bestaat een x waarvoor $P(x)$ geldt”. Deze propositie is waar wanneer één of meer waarden voldoen aan P.

Het voorbeeld

$$Happy(Joel) \lor Happy(Felix) \lor Happy(Oskar) \lor Happy(Amanda)$$

kan worden geschreven als

$$\exists x\, Happy(x).$$

Daarnaast bestaat er de vorm $\exists! x\, P(x)$: “Er bestaat precies één x waarvoor $P(x)$ geldt.”

4.5 Gebonden kwantificatoren

Je kunt kwantoren beperken tot een verzameling.

De universele, beperkte vorm:

$$\forall x \in A\ P(x) \quad \text{(alle waarden in } A \text{ voldoen aan } P).$$

De existentiële, beperkte vorm:

$$\exists x \in A\ P(x) \quad \text{(er bestaat minstens één waarde in } A \text{ die voldoet aan } P).$$

4.6 predikatenlogica lezen

- $\forall x\, P(x)$ → "Voor alle x geldt: $P(x)$". "Elke [type van x] heeft de eigenschap ...".
- $\exists x\, P(x)$ → "Er bestaat een x zodanig dat $P(x)$". "Er is ten minste één [type] waarvoor ...".
- $\exists! x\, P(x)$ → "Er bestaat precies één x zodanig dat $P(x)$". In goed Nederlands: "Er is precies één ... die/het ...".
- $P(x) \wedge Q(x)$ → "$P(x)$ en $Q(x)$".
- $P(x) \vee Q(x)$ → "$P(x)$ en/of $Q(x)$".
- $P(x) \rightarrow Q(x)$ → "Als $P(x)$, dan $Q(x)$".
- $\neg P(x)$ → "niet $P(x)$".
- $x = y$ → "x en y zijn hetzelfde object".
- Meerdere kwantoren: volg strikt de volgorde $\forall x \exists y \rightarrow$ "Voor elke x bestaat een y ...", $\exists y \forall x \rightarrow$ "Er bestaat een y die voor alle x ..." (volgorde verandert betekenis!).

Voorbeeld **(Een Predikatenlogica formule lezen)**:

$$\forall x\big(Student(x) \rightarrow \exists y(Course(y) \wedge Enrolled(x,y) \wedge \neg Failed(x,y))\big).$$

Stap 1: Kies domein = "personen en vakken": variabele x = persoon, y = vak.
Stap 2:

- Buitenste kwantor: $\forall x$ — "Voor alle personen x geldt: ..."
- Binnen: $Student(x) \rightarrow \exists y(\dots)$ — een implicatie: "als x student is, dan bestaat er een y zodanig dat ..."
- Binnenste existentie: $\exists y(Course(y) \wedge Enrolled(x,y) \wedge \neg Failed(x,y))$.

Stap 3:

> Voor elke persoon x: als x een student is, dan bestaat er een vak y zodanig dat y een vak is, x staat ingeschreven voor y, en het is niet zo dat x voor y gezakt is.

Stap 4: Herschrijf de zin:

> Elke student is ingeschreven voor minstens één vak waarin die niet gezakt is.

---

5 Proof strategies

5.1 Bewijzen voor logische operatoren

Implicatie-Introductie ($\Longrightarrow -I$)

Deze gaat als volgt: **Neem aan dat P waar is, bewijs Q, daarom houdt** $P \implies Q$. Dit werkt omdat de waarheidstabel van inplicatie altijd waar is, behalve als P waar is en Q niet. Dus als we ervanuit gaan dat P waar is en we bewijzen dat Q ook waar is, dan klopt de stelling. Namelijk als P niet waar blijkt te zijn, dan maakt Q niet meer uit, want de uitkomst is dan (volgens de waarheidstabel) toch waar. En Q kan onwaar zijn, want we hebben het tegendeel bewezen.

Implicatie-Eliminatie ($\Longrightarrow -E$)

Deze gaat als volgt: **Bewijs** $P \implies Q$**, bewijs P, daarom houdt Q**. Dit werkt, omdat we de volledige stelling bewijzen, daardoor weten we dat in een waarheidstabel alleen de 1e,2e en 4e rijen nog opties zijn. Als we dan bewijzen dat P waar is, dan weten we met 100% zekerheid dat Q dus ook waar moet zijn, want er is maar 1 optie waar P waar is en de stelling in zijn geheel waar is (4e rij).

Conjunctie-Introductie ($\wedge - I$)

Deze is heel simple, als je $P \wedge Q$ wilt bewijzen, dan moet je deze natuurlijk los bewijzen. Ofwel, **Bewijs P, Bewijs Q, daarom houdt** $P \wedge Q$.

Conjunctie-Eliminatie ($\wedge - E$)

Hier zijn twee varianten van. De eerste is **Bewijs** $P \wedge Q$**, bewijs P, daarom houdt Q**, de ander is **Bewijs** $P \wedge Q$**, bewijs Q, daarom houdt P**. Je bewijst namelijk al dat de gehele stelling moet waar zijn, en dat kan alleen als allebei de delen waar zijn. Als je dus bewijst dat de linker- of rechterzijde waar is, dan weet je dat de andere zijde ook waar moet zijn.

Negatie-Introdcutie ($\neg - I$)

Deze valt nog mee: **Neem aan dat P waar is, bewijs het tegendeel (**$\neg P$**), daarom houdt P niet.** Want P is altijd waar, totdat je bewijst dat het niet zo is.

Negatie-Eliminatie ($\neg - E$)

Bewijs dat P waar is én bewijs dat P niet waar is ($\neg P$**)**, dan krijg je dus $P \wedge \neg P$, die stelling komt altijd uit op $\neg P$, want waar én onwaar is onwaar.

equivalentie-Introdcutie ($\Leftrightarrow -I$)

Als je $P \Leftrightarrow Q$ wilt bewijzen, dan moet je dus de 2 onderdelen hiervan bewijzen. Namelijk: **Bewijs** $P \implies Q$**, bewijs** $Q \implies P$**, daarom houdt** $P \Leftrightarrow Q$. De definitie van equivalentie is namelijk dat beide onderdelen elkaar impliceren, dus daarom moet je ze apart van elkaar bewijzen.

equivalentie-Eliminatie ($\Leftrightarrow -E$)

Zoals elke Eliminatie strategie moet je eerst bewijzen dat de gehele stelling houdt en daarna kan je conclusies trekken. Hier is dat zo: **Bewijs $P \Leftrightarrow Q$, daarom houdt $P \implies Q$** óf **Bewijs $P \Leftrightarrow Q$, daarom houdt $Q \implies P$** Omdat (nogmaals de definitie van equivalentie) is een equivalent op te splitsen in twee implicaties.

Disjunctie-Introdcutie ($\vee - I$)

Deze is heel simpel en je hebt hier 2 vormen van als je $P \vee Q$ wilt bewijzen. Namelijk: **bewijs P, daarom houdt** $P \vee Q$, de ander is **bewijs Q, daarom houdt** $P \vee Q$. In een disjunctie (OR) is namelijk of links waar of rechts waar (of beide) dus als je er één bewijst, dan maakt het niet meer uit wat de ander is.

Disjunctie-Eliminatie ($\vee - E$)

Hoe simpel de introductie was, zo lastig is de eliminatie. Je moet namelijk heel veel stappen doorlopen om $P \vee Q$ te bewijzen. Namelijk: **Bewijs $P \vee Q$, 1. neem aan dat P waar is, bewijs R; 2. neem aan dat Q waar is, bewijs R; Daarom is R waar onafhankelijk of P of Q waar is.** Deze is wat lastiger om te bedenken, maar bekijk het zo: 1. Als ik binnen ben, dan heb ik mijn telefoon bij me. 2. Als ik buiten ben, dan heb ik mijn telefoon bij me. Ik ben binnen óf buiten, dus ik heb mijn telefoon bij me.

5.2 Bewijzen voor kwantificatoren

Universele kwantificering–Introductie ($\forall - I$)

Het is hier de bedoeling dat je bewijst dat een stelling voor elke waar de houdt. Dat doe je dus door te zeggen aan het begin van je bewijs "let a be arbitrairy". Dit geeft aan dat je het bewijs gaat geven met een waarde die niet vast staat (misschien wel alleen onderdeel is van de natuurlijke nummers e.d. maar je gaat niet in op een eigenschap van één specifiek element).

Stappen:

(1) Neem een element a, waarbij je expliciet zegt dat het willekeurig is.
(2) Bewijs dat $P(a)$ geldt zonder enig speciaal kenmerk van a te gebruiken.
(3) Concludeer vervolgens dat $P(x)$ voor alle x geldt, dus $\forall x\, P(x)$.

Universele kwantificering–Elimination ($\forall - E$)

Deze is makkelijker, namelijk dat $\forall x.P(x)$, als dat gelukt is, dan weet je al dat voor elke a, P(a) houdt.

Existentiële kwantificering–Introductie ($\exists - I$)

Deze is een stuk makkelijker dan de introductie van Universele kwantificering, want je hoeft maar één element te kunnen benoemen waarvoor de stelling houdt. En dan ben je al klaar, want de $\exists x$ geeft aan dat er minimaal één element x is waarvoor de stelling houdt.

Stappen:

(1) Neem een concreet object t.
(2) Bewijs dat $P(t)$ geldt.
(3) Concludeer dat er minstens één object bestaat waarvoor P geldt: $\exists x\, P(x)$.

Existentiële kwantificering–Introductie ($\exists - E$)

Deze gaat als volgt: **Bewijs dat $\exists x.P(x)$ houdt**, dan noem je het/een element waardoor de stelling houdt de naam R (o.i.d.). Je bewijst dat R een van/de rede is dat de propositie houdt, dan heb je bewezen dat R houdt.

5.3 Afgeleide bewijzen

Contrapositie

Je neemt hier aan: **Neem aan dat $\neg Q$, bewijs $\neg P$, daarom $P \implies Q$** Dit kan je terugzien in de een waarheidstabel:

P	Q	$P \implies Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg P$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

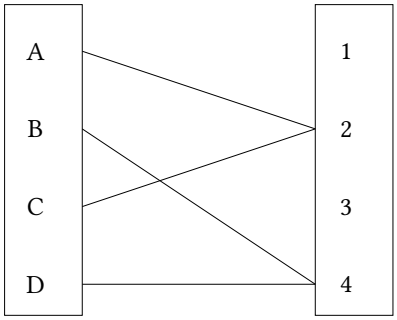
Modus tollens

De omgekeerde variant werkt volgens dezelfde waarheidstabel: **Bewijs $P \implies Q$, bewijs $\neg Q$, daarom $\neg P$**

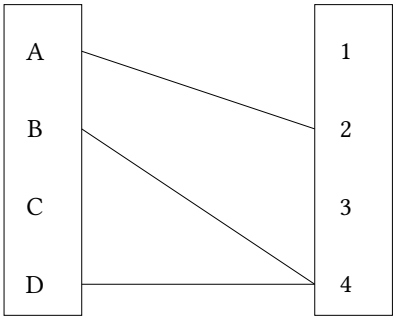
6 functies

Als je op elk element in eens set een verandering wilt doorvoeren, dan kan je daar een functie voor gebruiken. $f : A \longrightarrow B$ betekend dat je op elke element in A een functie uitvoerd en deze in de set B zet.

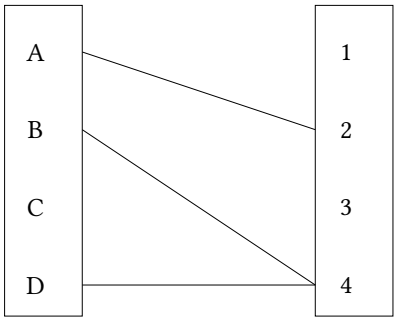
Functies zet elke member in een set om in een output (die dan wel niet altijd gelijk of anders is).



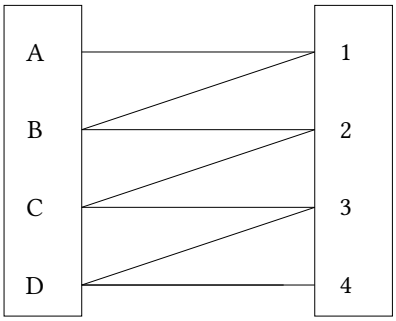
Dit is een functie: elke input geeft een output.



Dit is geen functie, want C heeft geen output, dat moet wel



Ook dit is een functie, want elke input geeft een output.



Dit is geen functie, input mogen min- en maximaal 1 output hebben

6.1 terminologie

A noemen we het **domein**, en B noemen we het **codomein**. Je kan ook meerdere argumenten meegeven: $f : A \times B \times C \longrightarrow D$ De hoeveelheid argumenten noem je de **ariteit**.

Als je een functie defineerd die 2 variabelen hebt, een **binaire functie** dan kan je die opeen speciale manier schrijven. Namelijk de functie "+" kan je hem tussen de variablene zetten, namelijk $A + B$ wat hetzelfde betekend als $+(A, B)$.

6.2 afbeelding en pre-afbeelding

de image van een set is je begint met een set en die zet je om naar de na-functie set. De pre-image is het resultaat en die wil je dan omzetten naar het origineel.

6.3 speciale functies

7 Relaties

7.1 properties of realtions

- Reflexiviteit: als $R(x, x)$ voor alle x, bijvoorbeeld gelijkheid
- Symetrie: als $R(x, y) \implies R(y, x)$, bijvoorbeeld gelijkheid, of 'is sibling of (de broer van mijn zus ben ik)'
- Asymetrie: als $R(x, y) \implies \neg R(y, x)$
- Transitief: als $R(x, y) \wedge R(y, z) \implies R(x, z)$, bijvoorbeeld gelijkheid 3 = 1 + 2 en 1 + 2 = 1 + 1 + 1 dus 3 = 1 + 1 + 1

7.2 relaties defineren

7.3 Equivalentie klasse

Als je bepaalde sets als "gelijk" wil beschouwen dan kan je dit gebruiken. Je kan dan bijvoorbeeld zeggen: auto's zijn gelijk als het model en merk het zelfde zijn, kleur maakt niet uit. Of $1/2$ is gelijk aan $2/4$, het detail dat ze niet 1 op 1 hetzelfde zijn maakt niet meer uit. Ze zijn niet gelijk, maar wel equivalent.

7.4 partities

Als je een set A heb met een eindig aantal partities $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ Dan is elke partitie $A_i \cap A_j = \emptyset$ wanneer $i \neg j$. En bij elkaar $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$. Oftewel, elke parties heeft elementen die niet in een andere set zitten. en als je ze weer samenvoegt, dan krijg je de originele set A weer.