

## ЛЕКЦИЯ № 10

### 2.2.7. Различение сигналов с неопределенной фазой (некогерентный прием сигналов).

При построении алгоритма приема сигналов с неопределенной фазой воспользуемся критерием максимального отношения правдоподобия (2.31):

$$\Lambda_{k0}(\bar{\mathbf{y}}_n) = \max_k$$

По гипотезе  $H_k: y_i = A_k \cdot \cos(w_k \cdot i + \Psi_{ki} + \varphi) + \eta_i$ , где  $i = \overline{1:n}$  - дискретное время.

В зависимости от вида модуляции известная  $A_k$  - амплитуда сигнала,  $w_k = \frac{2\pi}{T_k} \cdot \Delta t$  - нормированная частота,  $T_k$  - период  $k$ -ого сигнала ( $\Delta t$  - интервал дискретизации),  $\Psi_{ki}$  - информационная фаза сигнала;  $\varphi$  - случайная начальная фаза (неизвестная),  $k = \overline{1:m}$ .

По гипотезе  $H_0: y_i = \eta_i$  - гауссовский шум, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_\eta^2$ .

Далее используем отношение правдоподобия, полученное в п.2.1.5. для задачи обнаружения гармонического сигнала со случайной начальной фазой. Основываясь на нем, запишем отношение правдоподобия для задачи различения  $m$  сигналов с неизвестной начальной фазой:

$$\Lambda_{k0}(\bar{\mathbf{y}}_n) = \exp\left\{-\frac{E_k}{2\sigma_\eta^2}\right\} \cdot I_0\left\{\frac{A_k X_{nk}}{\sigma_\eta^2}\right\}, \quad (2.41)$$

где  $I_0(\cdot)$  - функция Бесселя нулевого порядка,  $X_{nk} = \sqrt{X_{nck}^2 + X_{nsk}^2}$ ,

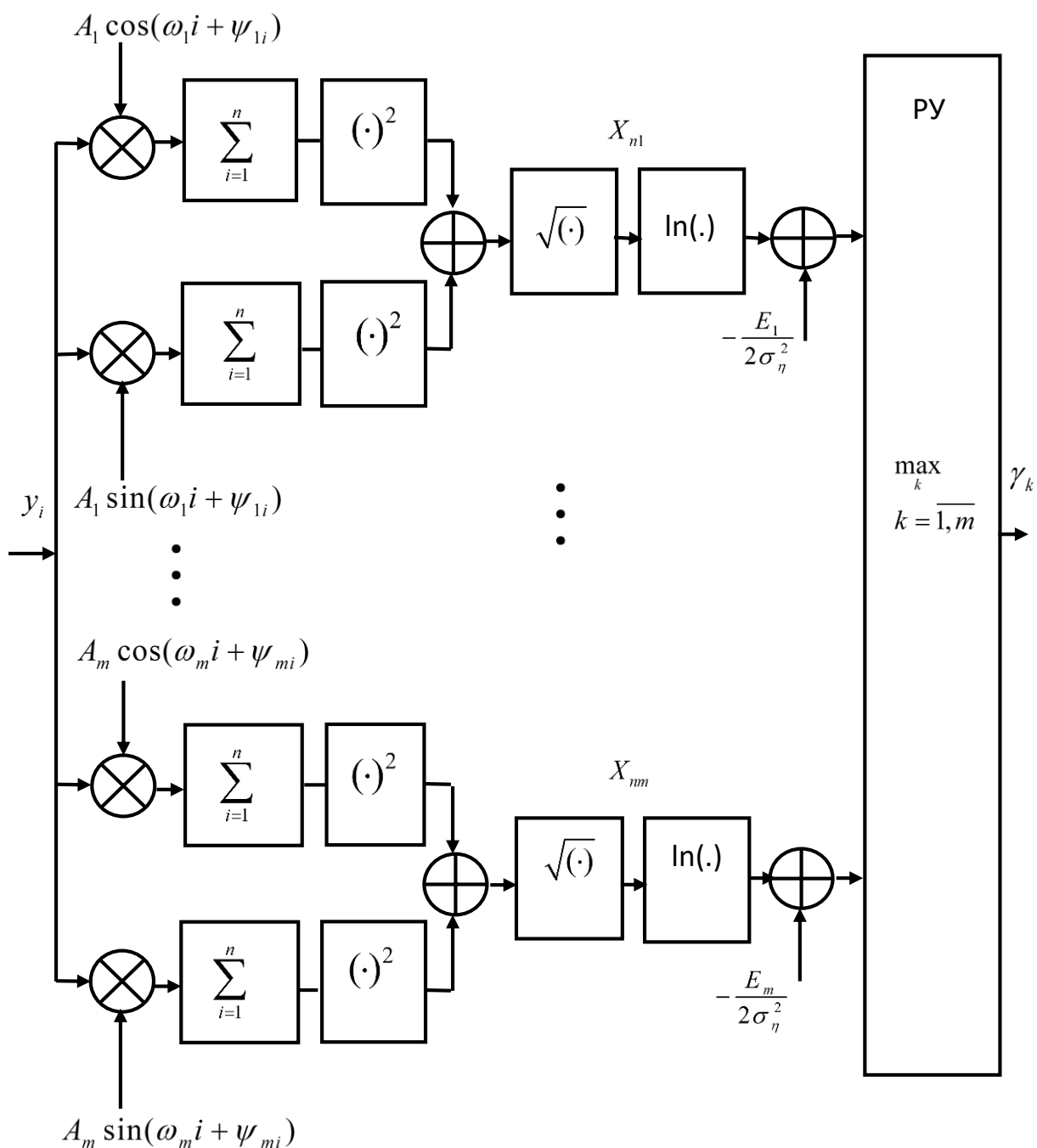
$$X_{nck} = \sum_{i=1}^n y_i \cos(w_k i + \Psi_{ki}), \quad X_{nsk} = \sum_{i=1}^n y_i \sin(w_k i + \Psi_{ki}). \quad \text{Тогда выражение (2.41)}$$

можно преобразовать, взяв от левой и правой его части функцию натурального логарифма:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_{k0}(\bar{\mathbf{y}}_n) &= \lambda_{k0}(\bar{\mathbf{y}}_n) = \ln\left\{e^{-\frac{E_k}{2\sigma_\eta^2}} \cdot I_0\left(\frac{A_k X_{nk}}{\sigma_\eta^2}\right)\right\} = \ln\left\{e^{-\frac{E_k}{2\sigma_\eta^2}}\right\} + \ln\left\{I_0\left(\frac{A_k X_{nk}}{\sigma_\eta^2}\right)\right\} = \\ &= \ln\left\{I_0\left(\frac{A_k X_{nk}}{\sigma_\eta^2}\right)\right\} - \frac{E_k}{2\sigma_\eta^2} \end{aligned}$$

=> алгоритм оптимального приема имеет вид:

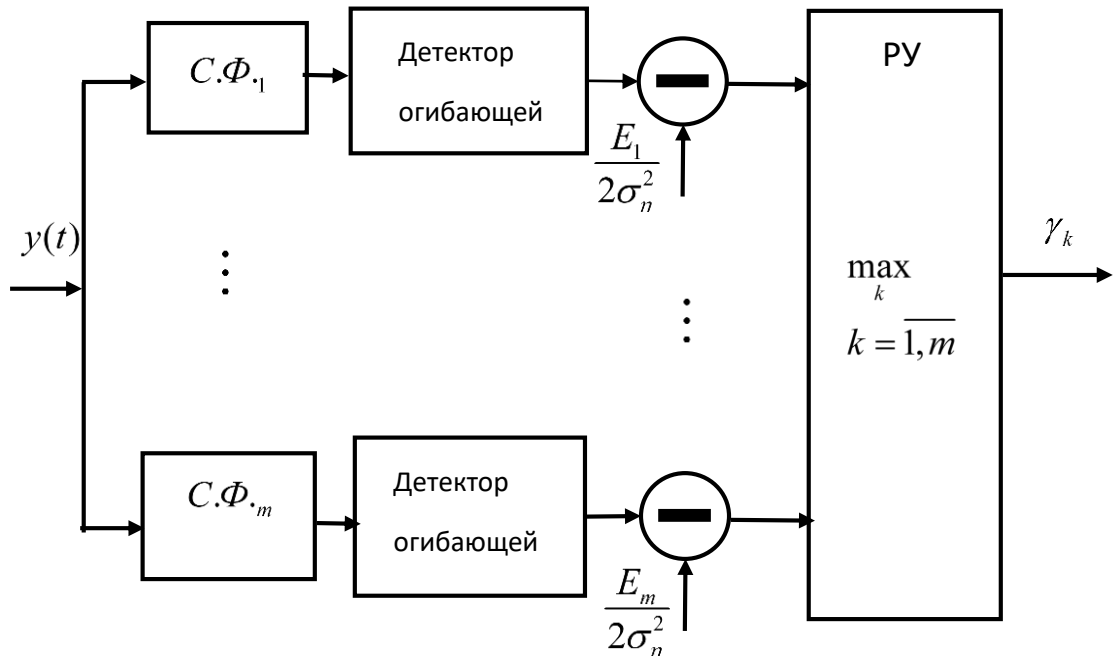
$$\lambda_{k0}(\bar{\mathbf{y}}_n) = \ln\left\{I_0\left(\frac{A_k X_{nk}}{\sigma_\eta^2}\right)\right\} - \frac{E_k}{2\sigma_\eta^2} = \max_k \quad (2.42)$$



**Рисунок 2.13. Структурная схема алгоритма некогерентного приема сигналов в дискретном времени.**

Здесь  $\ln(\cdot) = \ln\{I_0(\frac{A_k X_{nk}}{\sigma_\eta^2})\}, k = \overline{1:m}$ . В непрерывном времени вместо оператора  $\sum_{i=1}^n$  будет  $\int_0^{T_H}$ .

Реализация алгоритма (2.42) с использованием СФ показана на рисунке 2.14.



**Рисунок 2.14. Структурная схема алгоритма некогерентного приема с использованием согласованных фильтров.**

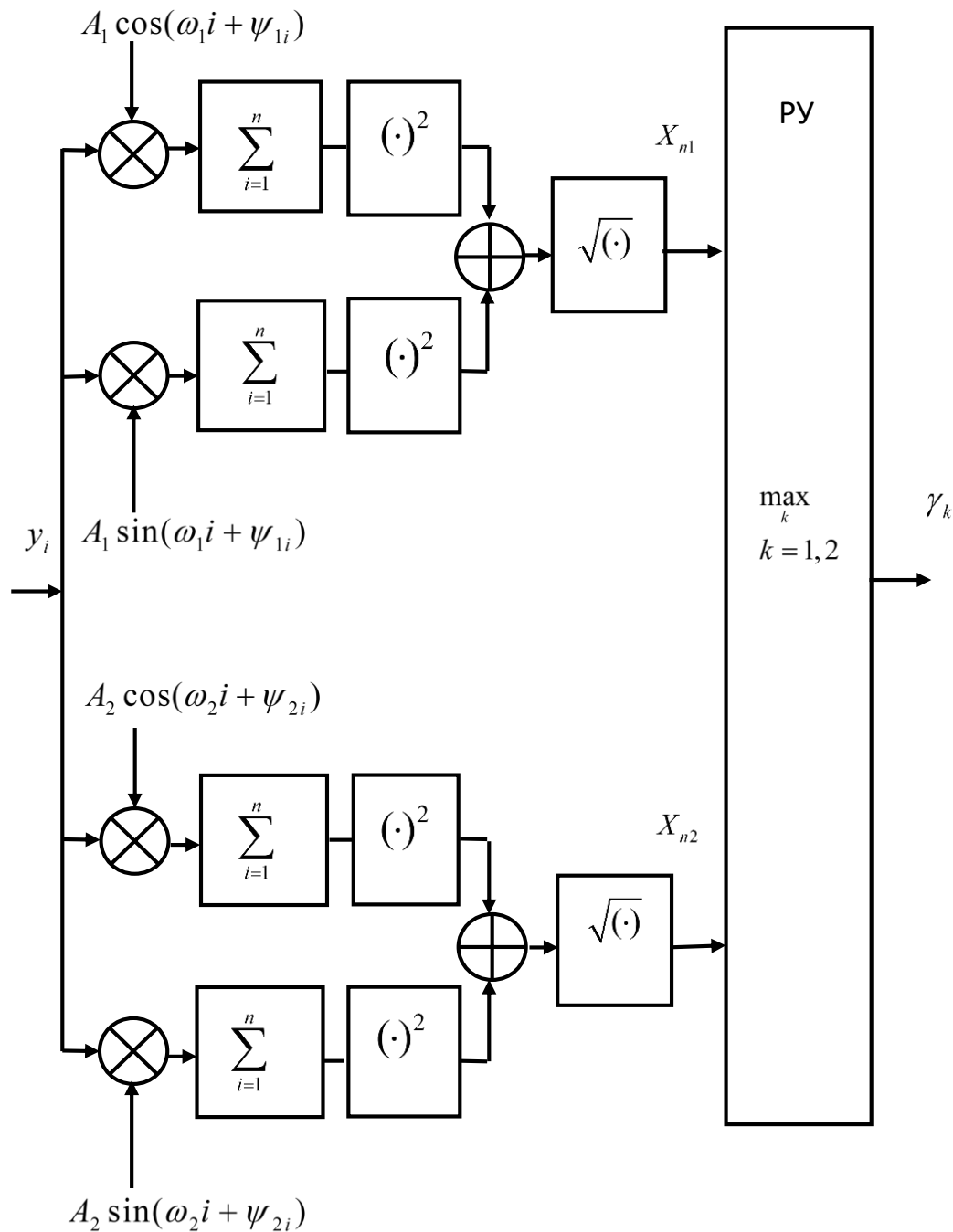
Далее рассмотрим случай, когда  $m=2$  и канал симметричный, т.е.  $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$ ,  $E_1 = E_2 = E$ ,  $P(\gamma_1/H_2) = P(\gamma_2/H_1) \Rightarrow$  алгоритм принятия решения имеет вид:

Если  $\ln\{I_0(\frac{A_1 X_{n1}}{\sigma_n^2})\} > \ln\{I_0(\frac{A_1 X_{n2}}{\sigma_n^2})\} \Rightarrow$  принимаем решение  $\gamma_1(S_{1i})$

Если  $\ln\{I_0(\frac{A_1 X_{n1}}{\sigma_n^2})\} < \ln\{I_0(\frac{A_1 X_{n2}}{\sigma_n^2})\} \Rightarrow$  принимаем решение  $\gamma_2(S_{2i})$ .

Функция Бесселя  $I_0(x)$  является монотонной функцией аргумента  $\Rightarrow$  решение можно принимать по  $X_n$  и алгоритм (2.42) упрощается:

$$\begin{aligned} \text{если } X_{n1} > X_{n2} &\Rightarrow \gamma_1 \\ \text{если } X_{n1} < X_{n2} &\Rightarrow \gamma_2 \end{aligned} \quad (2.43)$$



**Рисунок 2.15. Структурная схема алгоритма некогерентного различения двух сигналов.**

#### 2.2.8. Потенциальная помехоустойчивость некогерентного приема.

$$P_{out} = P(H_1) \cdot P(\gamma_2/H_1) + P(H_2) \cdot P(\gamma_1/H_2) = 0.5[P(\gamma_2/H_1) + P(\gamma_1/H_2)] = \\ = P(\gamma_1/H_2) = P\{X_{n1} > X_{n2} / H_2\} = P(\gamma_2/H_1) = P\{X_{n1} < X_{n2} / H_1\}$$

Положив  $y_i = A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot i + \Psi_{2i} + \varphi) + \eta_i$ , записываем ФПВ гауссовских случайных величин  $X_{nc1}, X_{ns1}, X_{nc2}, X_{ns2}$ , затем переходим к величинам  $X_{n1}, X_{n2}$ . Далее весьма громоздкие вычисления вероятности  $P\{X_{n1} > X_{n2} / H_2\}$  приводят к следующему окончательному результату:

$$P_{oui} = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\sigma_\eta^2}}(1-\sqrt{1-\rho_s^2}), \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\sigma_\eta^2}}(1+\sqrt{1-\rho_s^2})\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\frac{E}{\sigma_\eta^2}} \cdot I_0\left(\frac{1}{4}\frac{E}{\sigma_\eta^2}\rho_s\right), \quad (2.44)$$

где  $\sigma_\eta^2 = \frac{N_0}{2}$  - дисперсия шума,  $Q(x, y) = \int_y^\infty v \cdot e^{-\frac{v^2+x^2}{2}} \cdot I_0(vx)dv$  - табулированная

функция,  $\rho_s = \frac{1}{E}\sqrt{b_c^2 + b_s^2}$ ,  $0 \leq \rho_s \leq 1$ ,  $b_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_1 \cdot A_2 \cos[(w_2 - w_1)i + \Psi_{2i} - \Psi_{1i}]$ ,

$b_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_1 \cdot A_2 \sin[(w_2 - w_1)i + \Psi_{2i} - \Psi_{1i}]$ .

### Потенциальная помехоустойчивость некогерентного приема сигналов ДАМ, ДЧМ, ДОФМ.

1) ДАМ сигнал: из формулы (2.44) имеем

$$P_{oui} = \frac{1}{2} \left[ 1 + e^{-\frac{1}{2}h^2} - Q\left(\sqrt{\frac{E}{\sigma_\eta^2}}, h\right) \right],$$

где оптимальный порог  $h$  находится из уравнения  $I_0\left(h\sqrt{\frac{E}{\sigma_\eta^2}}\right) = e^{\frac{1}{2}\frac{E}{\sigma_\eta^2}}$ .

Существует приближенная формула для вычисления вероятности ошибки при некогерентном приеме ДАМ сигнала:

$$P_{oui} = \frac{1}{2} e^{-0.25h^2}, \quad (2.45)$$

где  $h^2 = \frac{E}{N_0}$ .

2) ДЧМ сигнал: сигнал ортогональный, поэтому  $\rho_s \approx 0 \Rightarrow$  из (2.44):

$$P_{oui} = Q\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{\sigma_\eta^2}}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\frac{E}{\sigma_\eta^2}}.$$

Т.к.  $Q\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{\sigma_\eta^2}}\right) = e^{-\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{\sigma_\eta^2}})^2}{2}}$ , то получим следующее выражение для

вероятности ошибки:  $P_{oui} = e^{-\frac{\frac{1}{2}E}{4\sigma_\eta^2 \cdot 2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\frac{E}{\sigma_\eta^2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\frac{E}{\sigma_\eta^2}}$ . Дисперсия шума равна

$\sigma_\eta^2 = \frac{N_0}{2}$ , тогда

$$P_{ouu} = \frac{1}{2} e^{-0.5 \cdot h^2} . \quad (2.46)$$

3) ДФМ сигнал нельзя принимать некогерентным способом , т.к. при неизвестной начальной фазе такие системы неразличимы.

4)ДОФМ – сигналы, ортогональные на интервале  $2T$ , тогда  $\rho_s = 0$  ( $\rho_s = 0$  , т.к.  $b_c = 0$  и  $b_s = 0 \Rightarrow b_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos(0) - \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^{2n} \cos(0) = 0$  ,  $b_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sin(0) - \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^{2n} \sin(0) = 0$ ).  $\Rightarrow$

$$P_{ouu} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4} \cdot \frac{E_1}{\sigma_\eta^2}} , \text{ где } E_1 = 2E \Rightarrow \text{с учетом, что } \sigma_\eta^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$P_{ouu} = \frac{1}{2} e^{-h^2} . \quad (2.47)$$

Прием ДОФМ ведется на интервале  $2T(2n)$ . Для ДОФМ сигналов алгоритм (2.43) преобразуется:

$$X_{nc1} = \sum_{i=1}^n y_i \cos(wi) + \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n)) , X_{ns1} = \sum_{i=1}^n y_i \sin(wi) + \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \sin(w(i-n)) ,$$

$$X_{nc2} = \sum_{i=1}^n y_i \cos(wi) - \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n)) , X_{ns2} = \sum_{i=1}^n y_i \sin(wi) - \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \sin(w(i-n)) .$$

$$\text{Т.к. } S_{1i} = \begin{cases} \cos(wi), 0 < i \leq n \\ \cos(w(i-n)), n < i \leq 2n \end{cases} , \quad S_{2i} = \begin{cases} \cos(wi), 0 < i \leq n \\ -\cos(w(i-n)), n < i \leq 2n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} X_{n1} = \sqrt{X_{nc1}^2 + X_{ns1}^2} = & \left[ \left( \sum_{i=1}^n y_i \cos(wi) \right)^2 + \left( \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n)) \right)^2 + \right. \\ & + 2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cos(wi) \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n)) + \left( \sum_{i=1}^n y_i \sin(wi) \right)^2 + \\ & \left. + \left( \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \sin(w(i-n)) \right)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i \sin(wi) \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \sin(w(i-n)) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Аналогично

$$X_{n2} = \sqrt{X_{nc2}^2 + X_{ns2}^2} = \left[ \left( \sum_{i=1}^n y_i \cos(wi) \right)^2 + \left( \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n)) \right)^2 - \right. \\ \left. - 2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cos(wi) \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n)) + \left( \sum_{i=1}^n y_i \sin(wi) \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \sin(w(i-n)) \right)^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i \sin(wi) \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \sin(w(i-n)) \right]^{\frac{1}{2}}$$

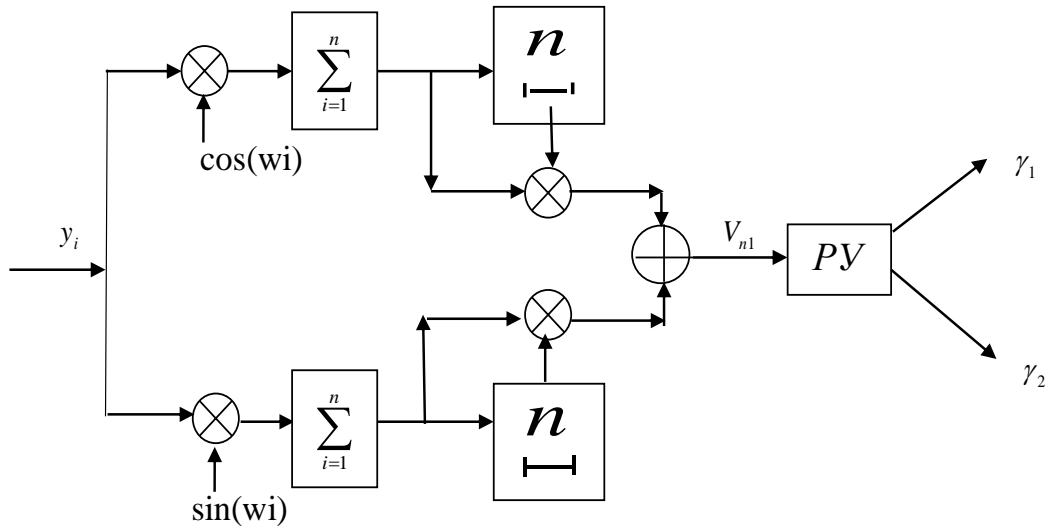
Обозначим  $V_{n1} = \sum_{i=1}^n y_i \cos(wi) \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n)) + \sum_{i=1}^n y_i \sin(wi) \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \sin(w(i-n))$ ,

$$V_{n2} = -\sum_{i=1}^n y_i \cos(wi) \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n)) - \sum_{i=1}^n y_i \sin(wi) \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \sin(w(i-n)).$$

Тогда  $\begin{matrix} \text{если } V_{n1} > V_{n2} \Rightarrow \gamma_1 \\ \text{если } V_{n1} < V_{n2} \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix}$ . Так как  $V_{n1}$ ,  $V_{n2}$  отличаются только знаком, то алгоритм приема можно записать в следующей форме:

$$\begin{matrix} \text{если } V_{n1} > 0 \Rightarrow \gamma_1 \\ \text{если } V_{n1} < 0 \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix} \quad (2.48)$$

На рисунке 2.16. показана структура алгоритма некогерентного приема ДОФМ сигнала.



**Рисунок 2.16.** Структурная схема оптимального некогерентного приёма сигналов ДОФМ.

### 2.3. Основы теории точечного оценивания. Основы теории оценивания неизвестных параметров сигнала.

Наблюдается реализация случайного процесса  $y(t)$ . Результат наблюдений представляется в виде независимой выборки  $y_1, \dots, y_n$ ,  $y_i = S(i, \theta) + \eta_i$ , где  $i = \overline{1:n}$  -

дискретное время,  $\theta$  - неизвестный параметр. Требуется по выборке  $y_1, \dots, y_n$  найти оценку  $\hat{\theta}_n$  параметра  $\theta$  по некоторому критерию качества.

### 2.3.1. Свойства оценок.

1) Несмещенность оценки: оценка  $\hat{\theta}_n$  называется несмещенной, если

$$E(\theta - \hat{\theta}_n) = 0 \quad (2.49)$$

где  $E$  – оператор математического ожидания,  $\hat{\theta}_n$  - оценка, полученная по выборке объемом  $n$ .

Оценка  $\hat{\theta}_n$  называется асимптотически несмещенной, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\theta - \hat{\theta}_n) = 0 \quad (2.50)$$

2) Эффективность оценки: оценка называется эффективной, если

$$E(\theta - \hat{\theta}_n)^2 = \min_{\hat{\theta}_n} \quad (2.51)$$

Оценка называется асимптотически эффективной, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\theta - \hat{\theta}_n)^2 = 0 \quad (2.52)$$

3) Состоятельность оценки: оценка  $\hat{\theta}_n$  называется состоятельной, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \theta - \hat{\theta}_n \right| \geq \varepsilon \right\} = 0, \varepsilon > 0, \quad (2.53)$$

т.е. если она сходится по вероятности к оцениваемой величине при неограниченном увеличении объема выборки  $n$ .

Замечание: Если оценка асимптотически эффективная, тогда она и состоятельная, обратное неверно.

### 2.3.2. Критерии оптимальности оценок.

1) Критерий минимального среднего риска (байесовская оценка).

Предположим, что средний риск  $R$ , который характеризует качество оценивания, есть дисперсия, которая записывается в виде:

$$\sigma^2 = E(\theta - \hat{\theta}_n)^2 = R \quad (2.54)$$



Если  $R=0 \Rightarrow \theta = \hat{\theta}_n$ , но такое невозможно, поэтому нужно риск (2.54) минимизировать:

$$R = R_{\min}.$$

**Оптимизация.** Требуется найти такое  $\hat{\theta}_n$ , которое минимизировало бы (2.54).

Т.к. оценка ищется по наблюдениям  $y_1, \dots, y_n \Rightarrow \hat{\theta}_n = f(y_1, \dots, y_n) = f(\vec{y}_n)$ .

Вводим апостериорный риск, который математически совпадает со средним

риском  $\Rightarrow$  апостериорный риск: 
$$R = \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}_n)^2 w(\theta/\vec{y}_n) d\theta$$

Риск — апостериорная дисперсия. Для вероятностного усреднения используется апостериорная плотность, которая вычисляется по формуле

Байеса: 
$$w(\theta|\vec{y}_n) = \frac{w(\theta) \cdot w(\vec{y}_n|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} w(\theta) \cdot w(\vec{y}_n|\theta) d\theta},$$
 где  $w(\theta)$  — априорная плотность

распределения вероятности параметра  $\theta$ ,  $w(\vec{y}_n|\theta)$  — функция правдоподобия.

Априорная плотность очень размытая, она несет мало информации. Возникает она из соображений, где искать этот параметр. Апостериорная плотность имеет значительно меньший разброс, чем априорная. Возникает после наблюдений, количество информации о параметре  $\theta$  сильно возрастает. Чем больше объем выборки, тем уже апостериорная плотность, и тем больше

информации о  $\theta \Rightarrow \hat{\theta}_{n \text{ opt}} = \arg \min R \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial \hat{\theta}_n} = -2 \int (\theta - \hat{\theta}_n) \cdot w(\theta/\vec{y}_n) d\theta \Rightarrow$

$$\hat{\theta}_{n \text{ opt}} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta \cdot w(\theta/\vec{y}_n) d\theta \quad (2.55)$$

Вывод: (2.55)- оптимальная оценка неизвестного параметра  $\theta$ , полученная после наблюдений  $\vec{y}_n$ . Она является апостериорным средним. Однако, получить оценку по (2.55) достаточно сложно, т.к. сложно вычислить апостериорную плотность  $w(\theta/\vec{y}_n)$  по формуле Байеса и сложно провести интегрирование.

## 2) Критерий максимума апостериорной плотности.

Если мы выпишем апостериорную плотность, то нужно найти центр тяжести фигуры, образованной плотностью распределения вероятности и осью  $\theta$ , тогда координата центра тяжести по оси  $\theta$  и есть оптимальная оценка (2.55).

Если апостериорная плотность вероятности симметричная, то координата максимума апостериорной плотности, совпадает с координатой центра тяжести, значит, оценку можно искать по максимуму  $w(\theta/\vec{y}_n)$ . Максимум найти проще, чем центр тяжести. Если максимум не совпадает с центром тяжести, то получим ошибку  $\Delta\theta$ .

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} (w(\theta/\vec{y}_n)) \quad (2.56)$$

### 3) Критерий max-го правдоподобия (МП)

По формуле Байеса апостериорная плотность вычисляется следующим

образом:  $w(\theta|\vec{y}_n) = \frac{w(\theta) \cdot w(\vec{y}_n|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} w(\theta) \cdot w(\vec{y}_n|\theta) d\theta}$ . Пусть  $w(\theta)$  - несобственная, т.е.

$w(\theta/\vec{y}_n) = \text{const} \rightarrow 0$  при  $\theta \in (-\infty; \infty)$ , тогда  $w(\theta)$  сокращается, а  $\int_{-\infty}^{\infty} w(\vec{y}_n|\theta) d\theta = 1$

=> получим  $w(\theta|\vec{y}_n) = w(\vec{y}_n|\theta)$ . Тогда можно взять функцию правдоподобия и

найти её максимум:  $\frac{\partial w(\vec{y}_n|\theta)}{\partial \theta} = 0$ . Решая это уравнение, получим:

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} w(\vec{y}_n/\theta) \quad (2.57)$$

Оценка (2.57) совпадает с оценкой (2.56) и является оптимальной байесовской оценкой (2.55) при симметричных апостериорных плотностях.

### 4) Критерий максимального отношения правдоподобия.

Вместо функций правдоподобия можно взять отношение правдоподобия:

$\Lambda(\vec{y}_n, \theta) = \frac{w(\vec{y}_n/\theta)}{w(\vec{y}_n/\theta=0)}$ , тогда

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} \Lambda(\vec{y}_n, \theta) \quad (2.58)$$

Такое отношение правдоподобия для гауссовского случая реализуется в виде СФ. Оценка (2.58) является оптимальной как оценка (2.57) при указанных выше условиях.

#### 2.3.3. Характеристики качества МП оценивателей.

Дисперсия оценки определяется выражением:

$$\sigma_{\theta_n}^2 = E(\theta_n^\wedge - M(\theta_n^\wedge))^2.$$

В общем,  $\sigma_{\theta_n}^2$  вычислить трудно. Однако хорошо известным результатом в теории оценивания параметров является нижняя граница Рао-Крамера для среднеквадратической ошибки:

$$E(\theta_n^\wedge - \theta)^2 \geq \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial \theta} E(\theta_n^\wedge) \right]^2}{E \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(w(\vec{y}_n / \theta)) \right]^2 \right\}} \quad (2.59)$$

Если оценка  $\theta_n^\wedge$  несмещенная ( $E(\theta_n^\wedge) = \theta$ ), то числитель = 1 и (2.59) приводит к нижней границе для дисперсии оценки  $\theta_n^\wedge$ :

$$\sigma_{\theta_n}^2 \geq \frac{1}{E \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(w(\vec{y}_n / \theta)) \right]^2 \right\}} \quad (2.60)$$

Т.к.  $\ln(w(\vec{y}_n / \theta))$  отличается от  $\ln(\Lambda(\vec{y}_n, \theta))$  постоянным множителем, не зависящим от  $\theta$ , то получим:

$$\sigma_{\theta_n}^2 \geq \frac{1}{E \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(\Lambda(\vec{y}_n, \theta)) \right]^2 \right\}} \quad (2.61)$$

(2.60) и (2.61) определяют потенциальную помехоустойчивость оценивания. У эффективной оценки дисперсия достигает нижней границы Рао-Крамера.