

## ЛЕКЦИЯ № 9

### 2.2. Задача различения сигналов.

Задача обнаружения сигнала на фоне шума является частным случаем задачи различения двух сигналов. В общем случае задача различения – задача проверки  $m$  статистических гипотез.

Рассматриваются гипотезы:  $H_k : y(t) = S_k(t) + \eta(t)$ ,  $k = \overline{1:m}$ , по каждой из которых на входе приемного устройства в смеси с шумом присутствует сигнал  $S_k(t)$ . Обработывая выборку наблюдаемого процесса  $y(t)$ , надо принять решение о том, который из  $m$  возможных сигналов пришел на вход приемника.

Для задач различения чаще более обоснованным является применение критерия идеального наблюдателя, максимума апостериорной вероятности и максимума отношения правдоподобия.

#### 2.2.1. Критерий идеального наблюдателя (критерий Зигерта-Котельникова)

Критерий идеального наблюдателя заключается в минимизации средней вероятности ошибки. Для случая  $m$  гипотез он выглядит следующим образом:

$$P_{\text{ош}} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m P(H_k) P(\gamma_j | H_k) = P_{\text{ош min}}, \quad (2.27)$$

где  $P(H_k)$  – априорные вероятности появления сигналов  $S_k(t)$ ,  $P(\gamma_j | H_k)$  – вероятность принять решение о появлении  $j$  – го сигнала при условии, что на самом деле присутствует  $k$  – ый сигнал. По критерию идеального наблюдателя решающее правило имеет вид:

приемник регистрирует сигнал  $S_k(t)$ , если для всех  $l$  ( $l \neq k$ ) выполняющиеся  $m-1$  неравенство:

$$A_{kl}(\vec{y}_n) > \frac{p_l}{p_k} \quad (2.28)$$

$$k = \overline{1:m}, \quad A_{kl}(\vec{y}_n) = \frac{w(\vec{y}_n / H_k)}{w(\vec{y}_n / H_l)}, \quad \vec{y}_n = (y_1, \dots, y_n), \quad p_l = P(H_l), \quad p_k = P(H_k) -$$

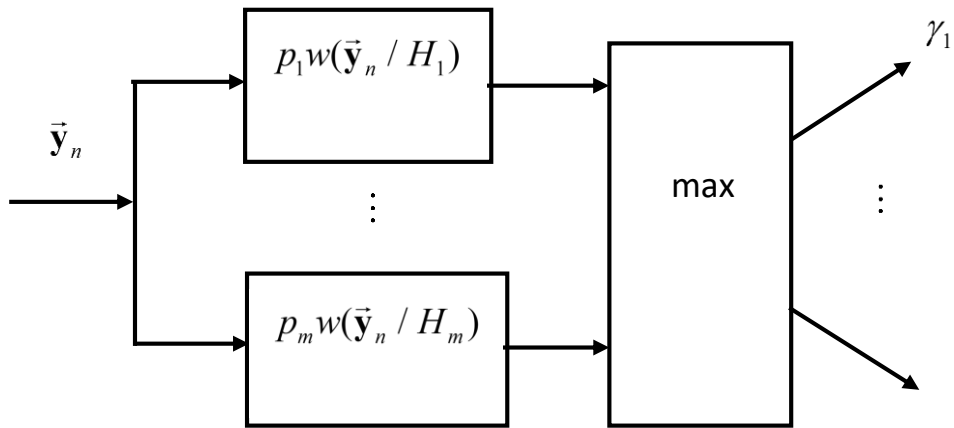
априорные вероятности появления сигналов  $S_l(t)$  и  $S_k(t)$  соответственно.

Алгоритм (2.28) можно переписать в следующем виде:

$$p_k w(\vec{y}_n / H_k) > p_l w(\vec{y}_n / H_l), k \neq l,$$

или принимается решение  $\gamma_k$  о регистрации сигнала  $S_k(t)$ , если

$$p_k w(\vec{y}_n / H_k) = \max_k \quad (2.29)$$



**Рисунок 2.7. Структурная схема алгоритма различения сигналов по критерию идеального наблюдателя.**

Приемник, работающий по правилу (2.29) назван Котельниковым В.А. *идеальным (оптимальным)*.

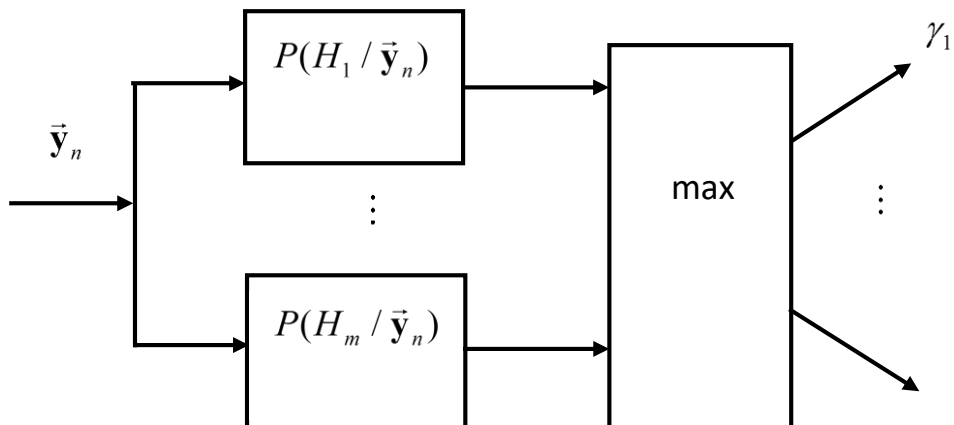
### 2.2.2. Критерий максимальной апостериорной вероятности (МАВ).

Критерий МАВ можно получить, переписав формулу (2.29) следующим образом:

$$\frac{p_k w(\vec{y}_n / H_k)}{\sum_{i=1}^m p_i w(\vec{y}_n / H_i)} = P(H_k / \vec{y}_n) \quad - \text{ апостериорная вероятность гипотезы } H_k \Rightarrow$$

совокупность неравенств, эквивалентная (2.29) принимает вид:

$$P(H_k / \vec{y}_n) = \max_k \quad (2.30)$$



**Рисунок 2.8. Структурная схема алгоритма различения сигналов по критерию МАВ.**

Недостатком алгоритмов (2.29) и (2.30) является то, что надо знать априорные вероятности гипотез  $p_k$ ,  $k = \overline{1:m}$ .

### 2.2.3. Критерий максимального отношения правдоподобия.

Приемник регистрирует сигнал  $S_k(t)$ , если

$$A_{ko}(\vec{y}_n) = \max_k \quad (2.31)$$

Индекс «0» - нулевая гипотеза  $H_0$  о действии только шума.

Если априорные вероятности гипотез  $H_k$  равны, т.е.  $P(H_k) = \frac{1}{m}$ ,  $k = \overline{1:m} \Rightarrow$  критерий максимального отношения правдоподобия совпадает с критерием идеального наблюдения.

### 2.2.4. Оптимальные алгоритмы приема при полностью известных сигналах (когерентный прием) на фоне аддитивного ГБШ.

Рассмотрим модель приходящего сигнала:  $y_i = S_{ki} + \eta_i$ ,  $i = \overline{1:n}$ , - дискретное время, сигналы  $S_{ki}$  - известны  $\eta_i$  - шум. Неизвестны реализация помехи  $\eta_i$  и индекс  $k$  переданного сигнала, который должна определить решающая схема.

Запишем отношение правдоподобия:  $A_{kl}(\vec{y}_n) = \frac{w(\vec{y}_n / H_k)}{w(\vec{y}_n / H_l)}$ , где  $w(\vec{y}_n / H_k)$  - многомерная гауссовская ФПВ выборки  $\vec{y}_n$  при условии действия гипотезы  $H_k$ .

Т.к. шум  $\eta_i$  - белый  $\Rightarrow$  выборка  $\vec{y}_n$  независимая, тогда  $w(\vec{y}_n / H_k)$  факторизуется:  $w(\vec{y}_n / H_k) = \prod_{i=1}^n w(y_i / H_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_\eta)^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - S_{ki})^2}{2\sigma_\eta^2}\right)$ . В

этом случае отношение правдоподобия приводится к виду:

$$A_{kl}(\vec{y}_n) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - S_{ki})^2}{2\sigma_\eta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - S_{li})^2}{2\sigma_\eta^2}\right).$$

Далее возьмем от левой и правой части данного выражения функцию натурального логарифма:

$$\ln \Lambda_{kl}(\vec{\mathbf{y}}_n) = \lambda_{kl}(\vec{\mathbf{y}}_n) = \frac{1}{2\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n (-y_i^2 + 2y_i S_{ki} - S_{ki}^2 + y_i^2 - 2y_i S_{li} + S_{li}^2) \Rightarrow$$

$$\lambda_{kl}(\vec{\mathbf{y}}_n) = \frac{2}{2\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n y_i S_{ki} - \frac{1}{2\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n S_{ki}^2 - \left( \frac{2}{2\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n y_i S_{li} - \frac{1}{2\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n S_{li}^2 \right).$$

По критерию идеального наблюдателя (см. 2.28)  $\Lambda_{kl}(\vec{\mathbf{y}}_n)$  сравнивается с единицей при  $p_l = \frac{1}{m}$ ,  $l = \overline{1:m}$ , а  $\lambda_{kl}(\vec{\mathbf{y}}_n)$  с «0» т.к.  $\ln 1 = 0 \Rightarrow$

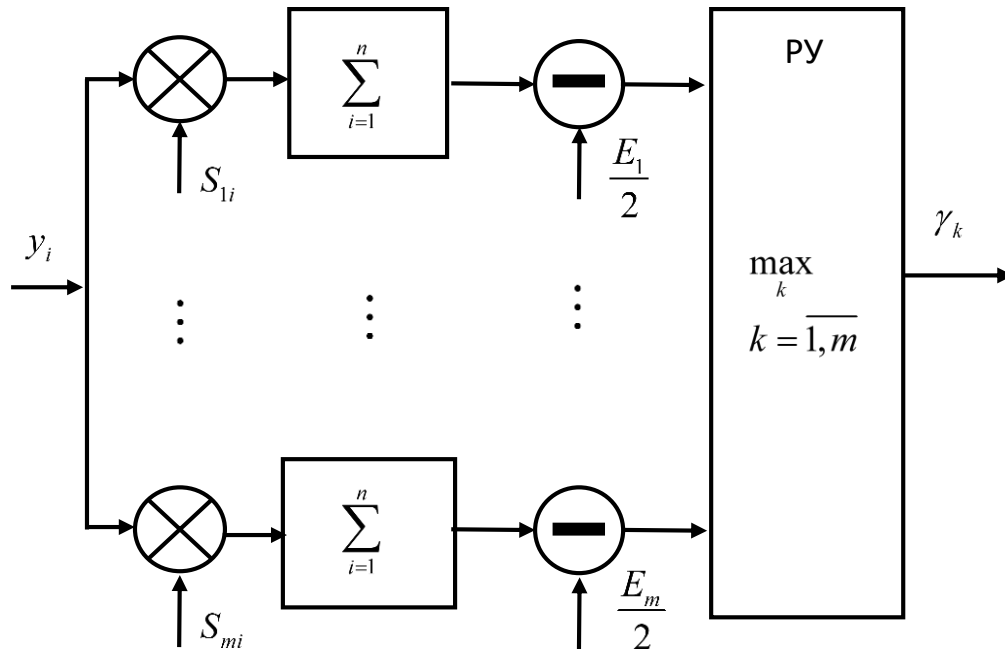
$$\frac{1}{\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n y_i S_{ki} - \frac{0,5}{\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n S_{ki}^2 - \left( \frac{1}{\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n y_i S_{li} - \frac{0,5}{\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n S_{li}^2 \right) \geq 0.$$

Обозначив  $E_k = \sum_{i=1}^n S_{ki}^2$  - энергию сигнала  $S_{ki}$ , получим алгоритм различения:

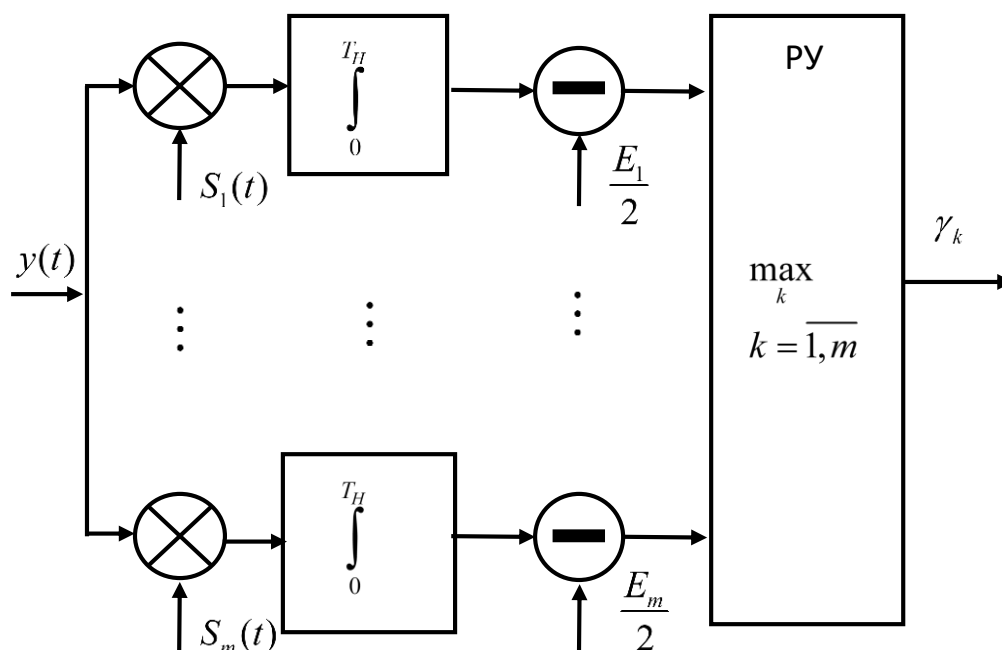
Передается сигнал  $S_{ki}$ , если

$$\sum_{i=1}^n y_i S_{ki} - 0,5 E_k \geq \sum_{i=1}^n y_i S_{li} - 0,5 E_l, \text{ при } l = \overline{1:m}, l \neq k \quad (2.32)$$

На рисунке 2.9. изображена структурная схема алгоритма (2.32) различения детерминированных сигналов в дискретном и непрерывном времени.



а)



б)

**Рисунок 2.9. Оптимальный демодулятор детерминированного сигнала, реализованный на корреляторах в дискретном времени – а, в непрерывном времени - б**  $E_k = \int_0^{T_H} S_k^2(t) dt, k = \overline{1, m}$ .

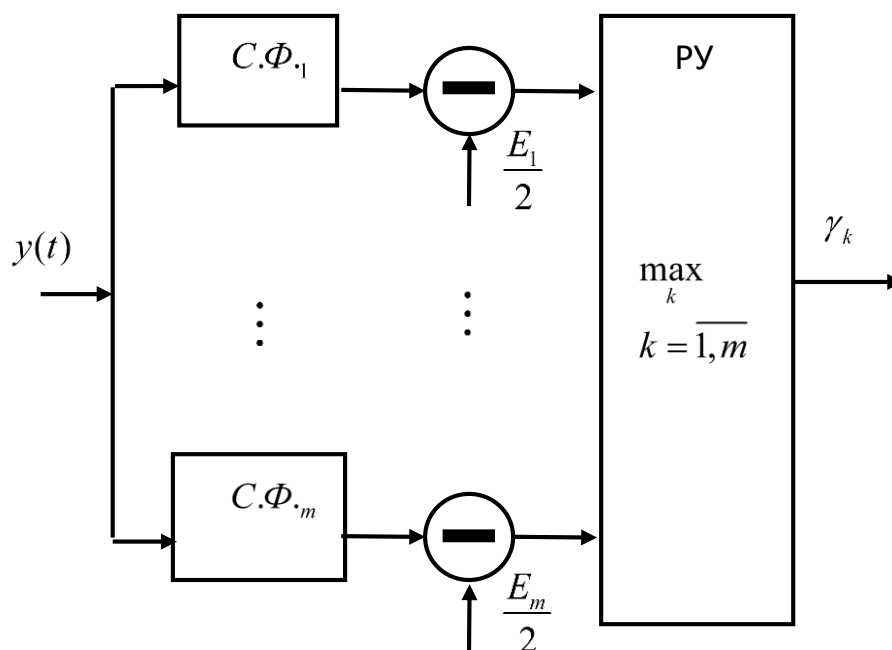
Достоинством корреляционной схемы приема сигналов является ее простота, недостатком – чувствительность к задержке сигнала.

Когерентную обработку сигналов также можно реализовать на согласованных фильтрах. Достоинство такой реализации – алгоритм приема инвариантен к задержке сигнала, недостаток – высокая стоимость схемы, т.к. С.Ф. – дорогое устройство. Физический смысл приема сигнала на основе С.Ф состоит в следующем: если на вход фильтра подан сигнал, с которым он согласован, то сигнальная составляющая на выходе определяется выражением

$$U_{с.ф.}(t) = const \int_0^{\infty} S(\tau) S(t_0 - t + \tau) d\tau = const \cdot B_{ss}(t_0 - t) \quad (B_{ss}(\cdot) \text{ - функция}$$

автокорреляции сигнала), и ее значение в момент времени, равный длительности сигнала, будет максимальным.

На рисунке 2.10. показана структура алгоритма различения сигналов, реализованная на согласованных фильтрах.



**Рисунок 2.11. Оптимальный демодулятор детерминированного сигнала, реализованный на С.Ф. в непрерывном времени.**

#### 2.2.5. Потенциальная помехоустойчивость когерентного приема.

Качество передачи зависит от свойств и технического состояния системы, от интенсивности и характера помех.

Помехоустойчивость - способность системы противостоять влиянию помех, определяется вероятностью ошибки  $P_{ош}$ .  $P_{ош}$  – вероятность неправильно принять информационный символ. При заданной интенсивности помехи  $P_{ош}$  тем меньше, чем сильнее различаются между собой сигналы, соответствующие разным сообщениям. Следовательно, необходимо выбирать сигналы с большим различием. Вероятность ошибочного приема символа  $P_{ош}$  зависит от способа приема, следовательно нужно выбрать такой способ приема, который наилучшим образом реализует различие между сигналами при заданном отношении сигнал/шум  $q = 10 \lg(\frac{P_c}{P_{ш}})$ .

В теории помехоустойчивости В.А. Котельникова показала, что существует предельная (потенциальная) помехоустойчивость при заданном методе модуляции, которая ни при каком способе приема не может быть превзойдена.

Приемник, реализующий потенциальную помехоустойчивость, называется **оптимальным** приемником.

Определим потенциальную помехоустойчивость для двоичной системы с аддитивным БГШ.

Пусть  $m=2 \Rightarrow$  известны два сигнала  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ . Пусть априорные вероятности появления этих сигналов равны, т.е.  $P(H_1) = P(H_2) = 0.5$ . Тогда

$$P_{ош} = 0.5 \left[ P(\gamma_1 | H_2) + P(\gamma_2 | H_1) \right] = \min.$$

Из формулы (2.32) имеем: если  $\sum_{i=1}^n y_i (S_{1i} - S_{2i}) - 0.5(E_1 - E_2) > 0 \Rightarrow$  принимаем решение  $\gamma_1$  (на входе приемника присутствует сигнал  $S_{1i}$ ); или в непрерывном времени: если  $\int_0^T y(t) [S_1(t) - S_2(t)] dt - 0.5(E_1 - E_2) > 0 \Rightarrow$  принимаем решение  $\gamma_1$  о присутствии сигнала  $S_1(t)$ .

По гипотезе  $H_1$ :

$$\begin{aligned} y(t) = S_1(t) + \eta(t) &\Rightarrow \int_0^T (S_1(t) + \eta(t)) [S_1(t) - S_2(t)] dt - 0.5(E_1 - E_2) = \\ &= \int_0^T S_1(t) [S_1(t) - S_2(t)] dt + \int_0^T \eta(t) [S_1(t) - S_2(t)] dt - 0.5(E_1 - E_2) = \zeta + 0.5E_9 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$P(\gamma_2 | H_1) = P\{\zeta < -0.5E_9 | H_1\}, \quad \zeta \sim N(0; \sigma_\zeta^2),$$

$$\sigma_\zeta^2 = M \left( \int_0^T \eta(t) [S_1(t) - S_2(t)] dt \right)^2 = \int_0^T M(\eta(t))^2 [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = \sigma_\eta^2 E_9,$$

где  $E_9 = \int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt$  – энергия разностного сигнала,  $M$  – оператор мат.

ожидания,  $\sigma_\eta^2 = \frac{N_0}{2}$ . ФПВ случайной величины  $\zeta$  – гауссовская:

$$w_\zeta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\zeta} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\zeta^2}} \Rightarrow$$

$$P(\gamma_2 | H_1) = \int_{-\infty}^{-0.5E_9} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\zeta} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\zeta^2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{0.5E_9}{\sigma_\zeta}}^{\frac{\sigma_\zeta}{\sigma_\zeta}} e^{-\frac{V^2}{2}} dV = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{0.5E_9}{\sigma_\zeta}}^{\infty} e^{-\frac{V^2}{2}} dV,$$

была проведена замена переменной:  $V = \frac{-x}{\sigma_\zeta} \Rightarrow dV = \frac{-dx}{\sigma_\zeta},$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{V^2}{2}} dV - \text{функция Крампа, табулирована. Т.к. } \Phi(\infty) = 1 \Rightarrow$$

$$P(\gamma_2 | H_1) = 0,5 \left[ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{V^2}{2}} dV - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{0,5E_3}{\sigma_\zeta}} e^{-\frac{V^2}{2}} dV \right] = 0,5 \left[ \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{0,5E_3}{\sigma_\zeta}\right) \right] =$$

$$= 0,5 \left[ 1 - \Phi\left(\frac{0,5E_3}{\sigma_\zeta}\right) \right].$$

$$\text{Т.к. } \sigma_\zeta^2 = \sigma_\eta^2 E_3 = \frac{N_0}{2} E_3 \Rightarrow \sigma_\zeta = \sqrt{\frac{N_0 E_3}{2}} \Rightarrow P(\gamma_2 | H_1) = 0,5 \left[ 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_3}{2N_0}}\right) \right].$$

По гипотезе  $H_2$ :

$$y(t) = S_2(t) + \eta(t) \Rightarrow \int_0^T (S_2(t) + \eta(t)) [S_1(t) - S_2(t)] dt - 0,5(E_1 - E_2) =$$

$$= \int_0^T S_2(t) [S_1(t) - S_2(t)] dt + \int_0^T \eta(t) [S_1(t) - S_2(t)] dt - 0,5(E_1 - E_2) =$$

$$\int_0^T \eta(t) [S_1(t) - S_2(t)] dt - 0,5 \int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = \xi - 0,5E_3 \Rightarrow$$

$$P(\gamma_1 | H_2) = P\{\zeta > 0,5E_3 | H_2\} = \int_{0,5E_3}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\zeta} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\zeta^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{0,5E_3}{\sigma_\zeta}}^\infty e^{-\frac{V^2}{2}} dV =$$

$$= 0,5 \left[ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{V^2}{2}} dV - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{0,5E_3}{\sigma_\zeta}} e^{-\frac{V^2}{2}} dV \right] = 0,5 \left[ \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{0,5E_3}{\sigma_\zeta}\right) \right] =$$

$$= 0,5 \left[ 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_3}{2N_0}}\right) \right],$$

$$(\text{была произведена замена переменной } V = \frac{x}{\sigma_\zeta} \Rightarrow dV = \frac{dx}{\sigma_\zeta}).$$

$$\text{Т.е. } P(\gamma_1 | H_2) = P(\gamma_2 | H_1) \Rightarrow P_{oui} = 0,5 \cdot 2P(\gamma_2 | H_1) = 0,5 \left[ 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_3}{2N_0}}\right) \right].$$



$$P_{ош} = 0,5 \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) \right] \quad (2.33)$$

Таким образом, вероятность ошибки  $P_{ош}$  тем меньше, чем больше энергия  $E_s$  разностного сигнала.

$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = \int_0^T S_1^2(t) dt + \int_0^T S_2^2(t) dt - 2 \int_0^T S_1(t) S_2(t) dt = \\ &= E_1 + E_2 - 2 \int_0^T S_1(t) S_2(t) dt. \end{aligned}$$

Энергия  $E_s$  тем больше, чем больше суммарная энергия двух сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$   $E_1 + E_2$  и чем меньше корреляция между ними  $\int_0^T S_1(t) S_2(t) dt$ .

Если  $E_1 = E_2 = E$ ,  $r_s = \frac{1}{E} \int_0^T S_1(t) S_2(t) dt$  - коэффициент взаимной корреляции между  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ , то  $E_s = 2E - 2r_s E = 2E(1 - r_s)$  и

$$P_{ош} = 0,5 \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{E(1 - r_s)}{N_0}} \right) \right] \quad (2.34)$$

Если  $r_s = -1$ , тогда  $S_1(t) = -S_2(t)$  - противоположные сигналы,  $P_{ош}$  минимальна; если  $r_s = 1$ , тогда  $S_1(t) = S_2(t)$ ,  $P_{ош} = 0.5$  - сигналы не различимы; если  $r_s = 0$ , тогда сигналы ортогональны.

Формулы (2.33), (2.34) дают выражения для потенциальной помехоустойчивости. При заданной интенсивности помехи и энергии сигналов она зависит от типа модуляции.

#### 2.2.6. Потенциальная помехоустойчивость ДАМ, ДФМ, ДЧМ, ДОФМ сигналов.

##### **1. Двоичная амплитудная модуляция (ДАМ):**

«1» передается сигналом  $S_1(t) = A \cos(\omega t)$ ,

«0» передается сигналом  $S_2(t) = 0$ ,

$0 \leq t \leq T$ .

$E_2=0$ ;  $E_1=E$ , тогда по формуле (2.33) получим выражение для потенциальной помехоустойчивости:

$$P_{ош} = 0,5 \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right) \right] \quad (2.35a)$$

или через интеграл Лапласа  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv$  :

$$P_{ош} = 1 - F \left( \sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right) \quad (2.35б)$$

## 2. Двоичная частотная модуляция (ДЧМ):

«1» передается сигналом  $S_1(t) = A \cos(\omega_1 t)$ ,

«0» передается сигналом  $S_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$ ,

$0 \leq t \leq T$ .

$r_s \approx 0 \Rightarrow$  по формуле (2.34) имеем:

$$P_{ош} = 0,5 \left( 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right) \quad (2.36a)$$

или 
$$P_{ош} = 1 - F \left( \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \quad (2.36б)$$

## 3. Двоичная фазовая манипуляция (ДФМ):

«1» передается сигналом  $S_1(t) = A \cos(\omega t)$ ,

«0» передается сигналом  $S_2(t) = -A \cos(\omega t)$ ,

$0 \leq t \leq T$ .

$r_s = -1 \Rightarrow$  по формуле (2.34) получим:

$$P_{ош} = 0,5 \left( 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right) \right) \quad (2.37a)$$

или 
$$P_{ош} = 1 - F \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right). \quad (2.37б)$$

## 4. Двоичная относительная фазовая манипуляция. (ДОФМ).

Сигнал ДОФМ, в отличие от сигналов ДАМ, ДЧМ и ДФМ, записывается на интервале двух посылок  $[0; 2T]$ :

$$S_1(t) = \begin{cases} A \cos(\omega t), 0 < t \leq T, \\ A \cos(\omega(t-T)), T < t \leq 2T. \end{cases}$$

$$S_2(t) = \begin{cases} A \cos(\omega t), 0 < t \leq T, \\ -A \cos(\omega(t-T)), T < t \leq 2T. \end{cases}$$

Сигнал  $S_1(t)$  соответствует передаче разности фаз  $\Delta\varphi = 0$ , сигнал  $S_2(t)$  – разности  $\Delta\varphi = \pi$ .

Исходное сообщение  $b_k$  ( $k=1,2,\dots$ ), состоящее из 0 и 1, преобразуется в  $J_k = 2b_k - 1$ , т.е. в последовательность, состоящую из -1 и 1 ( $0 \rightarrow -1; 1 \rightarrow 1$ ). При формировании ДОФМ сигнала символы  $J_k$  перекодируются следующим образом:

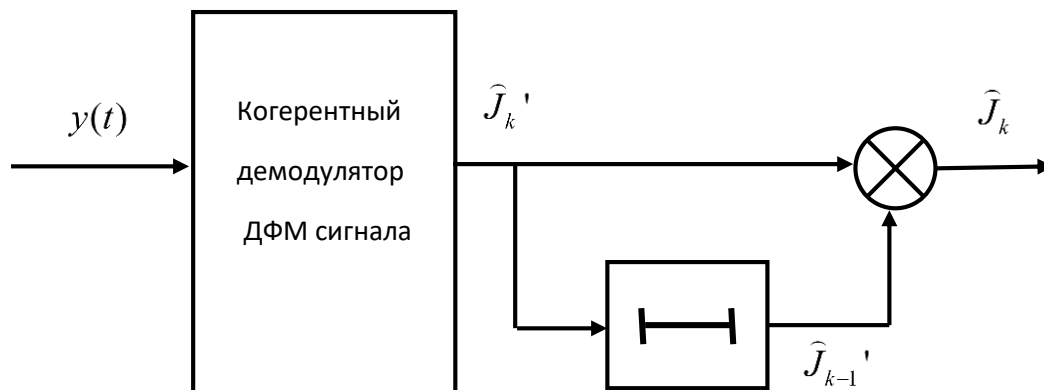
$$J_k' = J_k \cdot J_{k-1}', \quad (2.38)$$

где  $J_0' = 1$ .

Тогда для получения ДОФМ сигнала достаточно умножить несущее колебание  $A \cos(\omega t)$  на  $J_k'$ :

$$S(t) = J_k' \cdot A \cos(\omega t) = \pm A \cos(\omega t).$$

На рисунке 2.12. показана структурная схема алгоритма когерентного приема сигнала ДОФМ (метод сравнения полярностей (СП)).



**Рисунок 2.12. Структурная схема когерентного приема сигнала ДОФМ.**

Ошибочный прием двоичного символа при ДОФМ (СП) имеет место, когда происходит одно из 2-ух несовместимых событий:

- 1)  $k$ -ый символ принят верно,  $k-1$ -ый неверно или 2)  $k$ -ый символ принят неверно, а  $k-1$ -ый верно. Тогда потенциальная помехоустойчивость когерентного приема ДОФМ сигнала определяется выражением:

$$P_{\text{ДОФМ}} = 2P_{\text{ДФМ}}(1 - P_{\text{ДФМ}}), \quad (2.39)$$

где  $P_{\text{ДФМ}}$  - вероятность принять неверно один символ, определяемая по формуле (2.37). Таким образом, вероятность ошибки определяется, как

$$P_{\text{ДОФМ}} = \left( 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right) \right) \cdot \left( 1 - 0,5 \left( 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right) \right) \right) \quad (2.40a)$$

или

$$P_{\text{ДОФМ}} = 2 \left( 1 - F \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right) \right) \cdot F \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right). \quad (2.40б)$$