4.2.1. Теорема отсчетов для детерминированных функций.

Если спектр функции $x(t)$ заключен в интервале частот $-F_в < f < F_в$, то она может быть представлена в виде:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\frac{k}{2F_в}) \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)} \qquad (4.19)$$

Здесь $x(\frac{k}{2F_в}) = x_k$ - отсчеты функции $x(t)$, взятые через интервал времени $\Delta t = \frac{1}{2F_в}$, $F_в$ - верхняя частота спектра.

Обобщение теоремы отсчетов.

Теорема отсчетов применима

1) если отсчеты взяты через интервал времени $\Delta t \le \frac{1}{2F_в}$, т.е. частота дискретизации $f_d \ge 2F_в$,

2) к непрерывным случайным стационарным процессам с ограниченной по частоте спектральной плотностью мощности (СПМ) $G_x(\omega)$.

4.2.2. Ошибки в теории дискретизации и восстановлении непрерывных функций.

1. Ошибка за счет округления.

При цифровой записи сигнала вместо отсчетов x_k запоминаются их приближенные значения $\tilde{x}_k$. Тогда появляется ошибка, которая называется ошибкой квантования $\xi_k = \tilde{x}_k - x_k$. В этом случае восстановленный сигнал имеет вид (см. (4.19)):

$$\hat{x}_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_k \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)},$$

а ошибка восстановления определяется как

$$e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)}.$$

Найдем энергию ошибки $e_1(t)$.

$$W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e_1^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)})^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(2F_в t - k))}{(\pi(2F_в t - k))^2} dt,$$

т.к. случайные величины ξ_k независимые. Введем замену переменной $\pi(2F_в t - k) = z$, тогда $dz = 2\pi F_в dt$. Далее $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(2F_в t - k))}{(\pi(2F_в t - k))^2} dt = \frac{1}{2\pi F_в} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(z)}{z^2} dz = \frac{1}{2F_в}$.