Если R=0 $\Rightarrow \theta = \hat{\theta}_n$, но такое <u>невозможно</u>, поэтому нужно риск (2.54) минимизировать:

$$R = R_{\min} .$$

Оптимизация. Требуется найти такое $\hat{\theta}_n$, которое минимизировало бы (2.54).

Т.к. оценка ищется по наблюдениям $y_1,...,y_n$ $\Rightarrow$ $\hat{\theta}_n = f(y_1,...,y_n) = f(\vec{\mathbf{y}}_n)$.

Вводим апостериорный риск, который математически совпадает со средним риском $\Rightarrow$ апостериорный риск: $R = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}_n)^2 w(\theta/\vec{y}_n) d\theta$

Риск – апостериорная дисперсия. Для вероятностного усреднения используется апостериорная плотность, которая вычисляется по формуле Байеса: $w(\theta|\vec{\mathbf{y}}_n) = \dfrac{w(\theta)\cdot w(\vec{\mathbf{y}}_n|\theta)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\theta)\cdot w(\vec{\mathbf{y}}_n|\theta) d\theta}$, где $w(\theta)$ - априорная плотность распределения вероятности параметра θ , $w(\vec{\mathbf{y}}_n|\theta)$ - <u>функция правдоподобия.</u>

Априорная плотность очень размытая, она несет мало информации. Возникает она из соображений, где искать этот параметр. Апостериорная плотность имеет значительно меньший разброс, чем априорная. Возникает после наблюдений, количество информации о параметре θ сильно возрастает. Чем больше объем выборки, тем уже апостериорная плотность, и тем больше информации о θ $\Rightarrow \hat{\theta}_{n\,opt} = \arg\min R$ $\Rightarrow \dfrac{\partial R}{\partial \hat{\theta}_n} = -2\int (\theta - \hat{\theta}_n)\cdot w(\theta/\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}}) d\theta$ $\Rightarrow$

$$\hat{\theta}_{n\,opt} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta \cdot w(\theta/\vec{\mathbf{y}}_n) d\theta \qquad (2.55)$$

<u>Вывод</u>: (2.55)- оптимальная оценка неизвестного параметра θ, полученная после наблюдений $\vec{\mathbf{y}}_n$. Она является апостериорным средним. Однако, получить оценку по (2.55) достаточно сложно, т.к. сложно вычислить апостериорную плотность $w(\theta/\vec{\mathbf{y}}_n)$ по формуле Байеса и сложно провести интегрирование.

2) <u>Критерий максимума апостериорной плотности.</u>

Если мы выпишем апостериорную плотность, то нужно найти центр тяжести фигуры, образованной плотностью распределения вероятности и осью θ , тогда координата центра тяжести по оси θ и есть оптимальная оценка (2.55).