Билет 27

1. Потенциальная помехоустойчивость некогерентного приема. Потенциальная помехоустойчивость ДАМ, ДЧМ и ДОФМ сигналов.

2.2.8. Потенциальная помехоустойчивость некогерентного приема.

$$P_{ош} = P(H_1)\cdot P(\gamma_2/H_1) + P(H_2)\cdot P(\gamma_1/H_2) = 0.5\left[P(\gamma_2/H_1)+P(\gamma_1/H_2)\right] =$$
$$= P(\gamma_1/H_2) = P\{X_{n1} > X_{n2}/H_2\} = P(\gamma_2/H_1) = P\{X_{n1} < X_{n2}/H_1\}$$

Положив $y_i = A_2\cdot\cos(w_2\cdot i + \Psi_{2i} + \varphi) + \eta_i$, записываем ФПВ гауссовских случайных величин $X_{nc1}, X_{ns1}, X_{nc2}, X_{ns2}$, затем переходим к величинам X_{n1}, X_{n2}. Далее весьма громоздкие вычисления вероятности $P\{X_{n1} > X_{n2}/H_2\}$ приводят к следующему окончательному результату:

$$P_{ош} = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\sigma_\eta^2}(1-\sqrt{1-\rho_S^2})}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\sigma_\eta^2}(1+\sqrt{1-\rho_S^2})}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\frac{E}{\sigma_\eta^2}}\cdot I_0\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{E}{\sigma_\eta^2}\rho_S\right), \qquad (2.44)$$

где $\sigma_\eta^2 = \frac{N_0}{2}$ - дисперсия шума, $Q(x,y) = \int\limits_y^\infty v\cdot e^{-\frac{v^2+x^2}{2}}\cdot I_0(vx)dv$ - табулированная функция, $\rho_S = \frac{1}{E}\sqrt{b_c^2+b_s^2}$, $0 \le \rho_s \le 1$, $b_c = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} A_1\cdot A_2\cos[(w_2-w_1)i + \Psi_{2i} - \Psi_{1i}]$,

$b_s = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} A_1\cdot A_2\sin[(w_2-w_1)i + \Psi_{2i} - \Psi_{1i}]$.

Потенциальная помехоустойчивость некогерентного приема сигналов ДАМ, ДЧМ, ДОФМ.

1) ДАМ сигнал: из формулы (2.44) имеем

$$P_{ош} = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-\frac{1}{2}h^2} - Q\left(\sqrt{\frac{E}{\sigma_\eta^2}}, h\right)\right],$$

где оптимальный порог h находится из уравнения $I_0\left(h\sqrt{\frac{E}{\sigma_\eta^2}}\right) = e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{E}{\sigma_\eta^2}}$.

Существует приближенная формула для вычисления вероятности ошибки при некогерентном приеме ДАМ сигнала:

$$P_{ош} = \frac{1}{2}e^{-0.25h^2}, \qquad (2.45)$$

где $h^2 = \frac{E}{N_0}$.

2) ДЧМ сигнал: сигнал ортогоналный, поэтому $\rho_s \approx 0$ => из (2.44):

$$P_{ош} = Q(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{\sigma_\eta^2}}) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{E}{\sigma_\eta^2}}.$$

Т.к. $Q(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{\sigma_\eta^2}}) = e^{\frac{-(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{\sigma_\eta^2}})^2}{2}}$, то получим следующее выражение для вероятности ошибки: $P_{ош} = e^{-\frac{\cancel{2}E}{4\sigma_\eta^2\cdot\cancel{2}}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{E}{\sigma_\eta^2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{E}{\sigma_\eta^2}}$. Дисперсия шума равна $\sigma_\eta^2 = \frac{N_0}{2}$, тогда

$$P_{ош} = \frac{1}{2}e^{-0.5\cdot h^2} \quad . \tag{2.46}$$

3) ДФМ сигнал нельзя принимать некогерентным способом , т.к. при неизвестной начальной фазе такие системы неразличимы.

4)ДОФМ – сигналы, ортогональные на интервале 2T, тогда $\rho_s = 0$ ($\rho_s = 0$, т.к. $b_c = 0$ и $b_s = 0$ => $b_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\cos(0) - \frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{2n}\cos(0) = 0$, $b_s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(0) - \frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{2n}\sin(0) = 0$). =>

$P_{ош} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{E_1}{\sigma_\eta^2}}$, где $E_1 = 2E$ => с учетом, что $\sigma_\eta^2 = \frac{N_0}{2}$

$$P_{ош} = \frac{1}{2}e^{-h^2} \quad . \tag{2.47}$$

Прием ДОФМ ведется на интервале 2T(2n). Для ДОФМ сигналов алгоритм (2.43) преобразуется:

$X_{nc1} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cos(wi) + \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n))$, $X_{ns1} = \sum_{i=1}^{n} y_i \sin(wi) + \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \sin(w(i-n))$,

$X_{nc2} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cos(wi) - \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n))$, $X_{ns2} = \sum_{i=1}^{n} y_i \sin(wi) - \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \sin(w(i-n))$.

Т.к. $S_{1i} = \begin{Bmatrix} \cos(wi), 0 < i \le n \\ \cos(w(i-n)), n < i \le 2n \end{Bmatrix}$, $S_{2i} = \begin{Bmatrix} \cos(wi), 0 < i \le n \\ -\cos(w(i-n)), n < i \le 2n \end{Bmatrix}$ =>

$X_{n1} = \sqrt{X_{nc1}{}^2 + X_{ns1}{}^2} = \Big[(\sum_{i=1}^{n} y_i \cos(wi))^2 + (\sum_{i=n+1}^{2n} y_i \cos(w(i-n)))^2 +$

$$+2\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i\cos(wi)\cdot\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\cos(w(i-n))+(\sum_{i=1}^{n} y_i\sin(wi))^2+$$

$$\left.+(\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\sin(w(i-n)))^2+2\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i\sin(wi)\cdot\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\sin(w(i-n))\right]^{\frac{1}{2}}$$

Аналогично

$$X_{n2}=\sqrt{X_{nc2}{}^2+X_{ns2}{}^2}=\left[(\sum_{i=1}^{n} y_i\cos(wi))^2+(\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\cos(w(i-n)))^2-\right.$$

$$-2\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i\cos(wi)\cdot\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\cos(w(i-n))+(\sum_{i=1}^{n} y_i\sin(wi))^2+$$

$$\left.+(\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\sin(w(i-n)))^2-2\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i\sin(wi)\cdot\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\sin(w(i-n))\right]^{\frac{1}{2}}$$

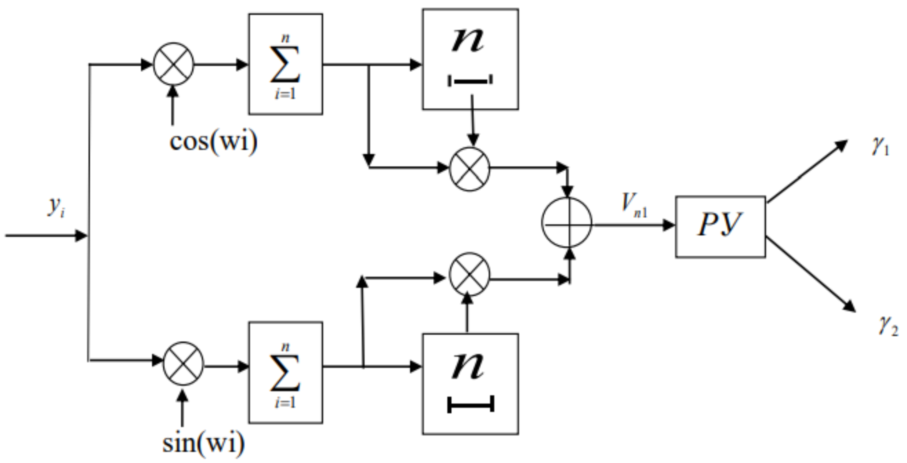
Обозначим $V_{n1}=\sum_{i=1}^{n} y_i\cos(wi)\cdot\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\cos(w(i-n))+\sum_{i=1}^{n} y_i\sin(wi)\cdot\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\sin(w(i-n))$,

$V_{n2}=-\sum_{i=1}^{n} y_i\cos(wi)\cdot\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\cos(w(i-n))-\sum_{i=1}^{n} y_i\sin(wi)\cdot\sum_{i=n+1}^{2n} y_i\sin(w(i-n))$.

Тогда $\begin{matrix} \text{если } V_{n1}>V_{n2}=>\gamma_1 \\ \text{если } V_{n1}<V_{n2}=>\gamma_2 \end{matrix}$. Так как V_{n1}, V_{n2} отличаются только знаком, то алгоритм приема можно записать в следующей форме:

$$\begin{matrix} \text{если } V_{n1}>0=>\gamma_1 \\ \text{если } V_{n1}<0=>\gamma_2 \end{matrix} \tag{2.48}$$

На рисунке 2.16. показана структура алгоритма некогерентного приема ДОФМ сигнала.



2. Цифровые модуляторы с памятью. Дифференциальное кодирование.

3.2.1. *Линейная модуляция с памятью.*

Ограничим рассмотрение базовыми сигналами (низкочастотными). Рассмотрим два базовых сигнала, которые представлены на рисунке 3.5.:

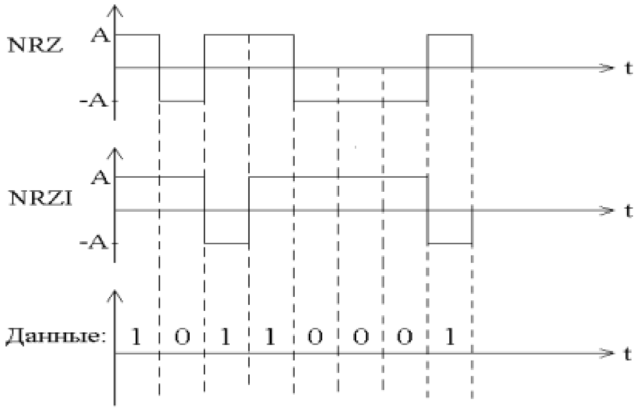


Рисунок 3.5. Временная диаграмма базовых низкочастотных сигналов.

Первый сигнал NRZ (двоичный сигнал без возвращения к нулевому уровню – ДБН) – простейший. NRZ отображает модуляцию без памяти. Он эквивалентен двоичной АМ или двоичной ЧМ ($\Theta_{1,2}=0;\ \pi$) в системе с модулированной несущей. Второй – NRZI отличается от NRZ тем, что переход от одного уровня амплитуды к другому имеет место только при передаче «1». Уровень амплитуды не меняется, когда передается «0». Этот тип преобразования называется дифференциальным кодированием. Операция кодирования математически записывается в следующем виде:

$$b_k = a_k \oplus b_{k-1}\ , \qquad (3.9)$$

где $\{a_k\}$– двоичная информационная последовательность на входе кодера, $\{b_k\}$– последовательность на выходе кодера, $\oplus$ – суммирование по модулю 2. Далее, если b_k =1, то передаваемый сигнал – прямоугольный импульс с амплитудой А, если b_k =0, то передаваемый сигнал – прямоугольный импульс с амплитудой –А. Операция дифференциального кодирования вводит память в сигнал.

3.2.2. *Нелинейные методы модуляции с памятью*

Модуляция с непрерывной фазой (МНФ).

$$S(t) = A\cos\left[2\pi f_c t + \Psi(t,I)\right]$$

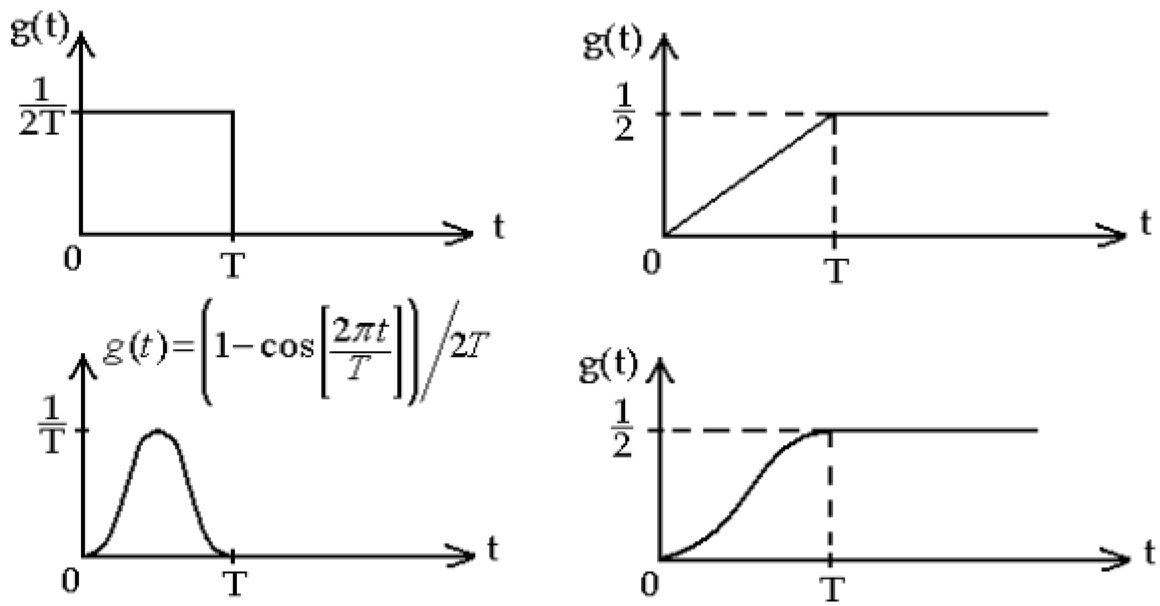
$$\Psi(t,I) = 2\pi\sum_{l=1}^{n} I_l h_l q(t-(l-1)T) \qquad (3.10)$$

$$(n-1)T \le t \le nT$$

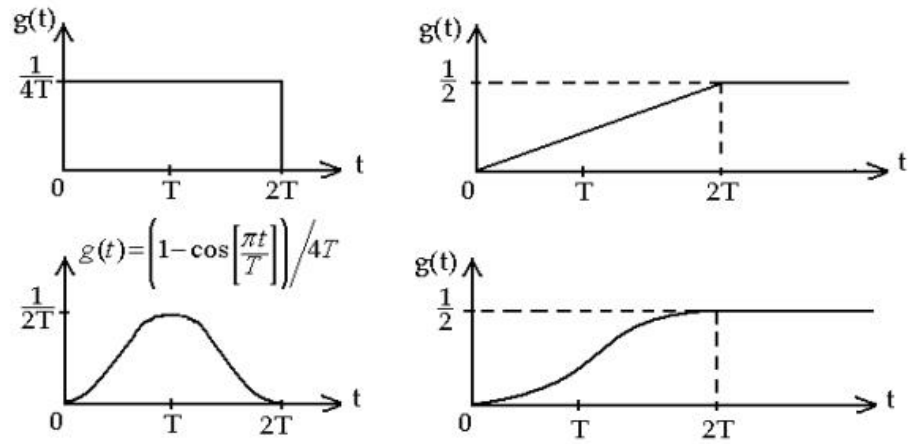
где $n = 1, 2, ...$ $, \{I_l\}$ – последовательность информационных символов, выбранных из алфавита $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm (M-1)$, $\{h_l\}$ – последовательность индексов модуляции для всех символов, $q(t)$ – нормированная огибающая сигнала. Когда h_l меняется от одного символа к другому => сигнал МНФ называется <u>многоиндексным</u> (*multi-h*).

$$q(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau,$$

где $g(\tau)$ – форма импульса. Если $g(\tau) = 0$ для $t > T$ => сигнал МНФ называют МНФ <u>с полным откликом</u>. Если $g(\tau) \neq 0$ для $t < T$ => сигнал называют МНФ <u>с парциальным откликом</u>. Функции *g(t), q(t)* для полного и парциального отклика показаны на рисунке 3.6.



а)



б)

Рисунок 3.6. Функции *g(t), q(t)* сигнала МНФ: полный отклик – а, парциальный отклик - б.

Можно нарисовать ряд фазовых траекторий $\Psi(t,I)$, генерируемых возможными значениями информационных последовательностей $\{I_n\}$.

Например, в случае ЧМНФ (ЧМ с непрерывной фазой – частный случай МНФ сигнала, $h = 2f_{dev}T = const$, f_{dev} – максимальная девиация частоты) с двоичными символами $I_n = \pm 1$ и прямоугольным импульсом $g(t)$ ряд фазовых траекторий, начинающихся при $t = 0$ показан на рисунке .3.7.

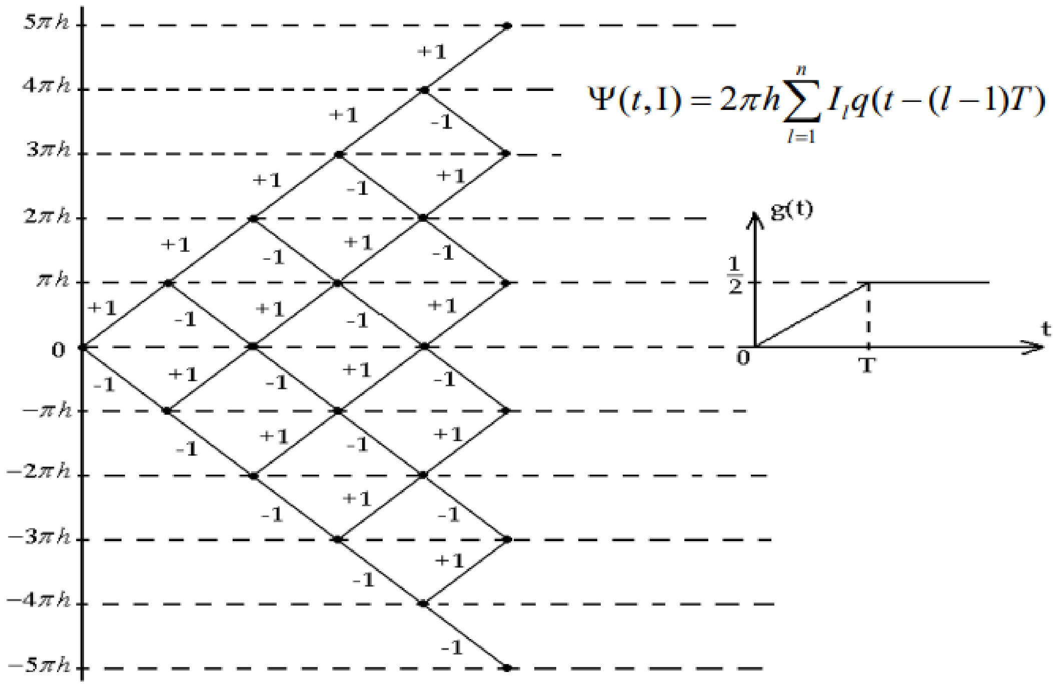


Рисунок 3.7. Фазовые траектории сигнала МНФ с полным откликом и прямоугольным импульсом.

Такие фазовые траектории называются <u>фазовым деревом.</u>

Дифференциальная ИКМ (ДИКМ).

В ИКМ каждый отсчет кодируется независимо от других. Но у многих источников сигнала при дискретизации через $\Delta t = \frac{1}{2F_в}$ или чаще проявляется значительная корреляция между отсчетами. В ДИКМ кодируется разность между отсчетами сигнала, а не сами отсчеты. Т.к. разность между отсчетами сигнала меньше, чем значения отсчетов, то нужно меньшее число бит для представления разностного сигнала. Суть подхода состоит в следующем.

Предсказывается текущее значение отсчет на основе предыдущих p отсчетов:

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^{p} a_k x_{k-i} \tag{4.28}$$

Здесь $\hat{x}_k$ - предсказанное значение для текущего отсчета x_k, $k = 1,2,...$ - дискретное время, a_i - коэффициенты предсказания, которые находятся по критерию минимума средней квадратической ошибки (СКО):

$$\{a_i, i = 1,2,...p\} = \arg\min(\, M\{e_k^2\}\,), \tag{4.29}$$

где $M\{e_k^2\} = M\{x_k - \sum_{i=1}^{p} a_i x_{k-1}\}^2 = M\{x_k\}^2 - 2\sum_{i=1}^{p} a_i M\{x_k x_{k-i}\} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j M\{x_{k-i} x_{k-j}\}$, $M\{\bullet\}$ - оператор математического ожидания, e_k - ошибка предсказания, $M\{e_k\}^2$ - дисперсия ошибки предсказания.

Пусть выход источника - стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $R_x(\Delta)$, где $\Delta = k - n$ - разность между двумя дискретными моментами времени. Тогда

$$M\{e_k\}^2 = R_x(0) - 2\sum_{i=1}^{p} a_i R_x(i) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j R_x(i-j)\,.$$

Если корреляционная функция $R_x(\Delta)$ неизвестна, то ее можно оценить по отсчетам сигнала:

$$\hat{R}_x(\Delta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-\Delta} x_k x_{k-\Delta}\ . \tag{4.30}$$

Далее минимизируя дисперсию ошибки предсказания (см. критерий (4.29)), по коэффициентам a_i, $i = 1,2,...p$, получим систему линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i R_x(i-j) = R_x(j),\ j = 1,2,...p \tag{4.31}$$

Уравнения (4.31) для коэффициентов предсказания называют **нормальными уравнениями** или **уравнениями Юли-Волкера**. Алгоритм их эффективного решения разработан Левинсоном (1974 г.) и Дурбиным (1959 г.).

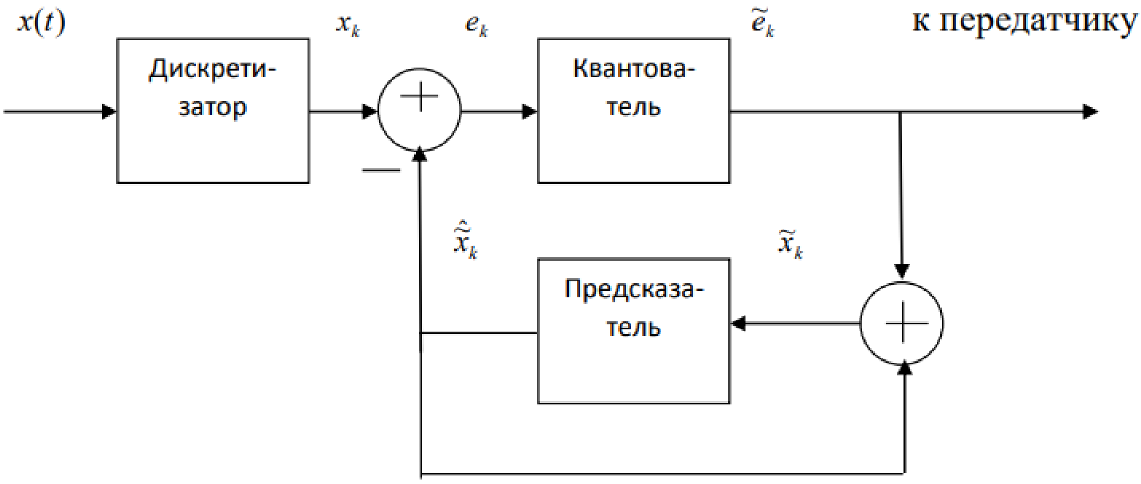


Рисунок 4.10. Блок-схема кодера ДИКМ.

$$e_k = x_k - \hat{\tilde{x}}_k = x_k - \sum_{i=1}^{p} a_i \tilde{x}_{k-i}\,, \qquad \tilde{e}_k - e_k = \tilde{e}_k - (x_k - \hat{\tilde{x}}_k) = \tilde{e}_k + \hat{\tilde{x}}_k - x_k = \tilde{x}_k - x_k = \xi_k\,,$$

где $\tilde{x}_k = \hat{\tilde{x}}_k + \tilde{e}_k$, ξ_k - ошибка квантования.

Описание схемы. Квантованный отсчет $\tilde{x}_k$ является входом предсказателя, выход предсказателя – предсказанный на следуюший шаг квантованный отсчет $\hat{\tilde{x}}_k = \sum_{i=1}^{p} a_i \tilde{x}_{k-i}$. Разность $e_k = x_k - \hat{\tilde{x}}_k$ - вход квантователя, $\tilde{e}_k$ - выход квантователя. Величина квантованной ошибки $\tilde{e}_k$ кодируется последовательностью двоичных символов и передается через канал связи.

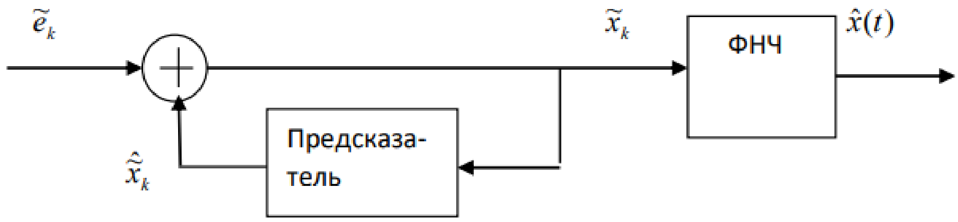


Рисунок 4.11. Блок-схема декодера ДИКМ.

Квантованный отсчет представляет собой сумму квантованной ошибки и предсказанного квантованного отсчета: $\tilde{x}_k = \hat{\tilde{x}}_k + \tilde{e}_k$. Далее по полученным $\tilde{x}_k$ восстанавливается сигнал $x(t) \approx \hat{x}(t)$.

Задача. Задан непрерывный процесс $x(t) = 5\cos(4\pi 10^3 t) - 2\cos(2\pi 10^3 t)$. Определить интервал дискретизации Т и первые 3 отсчета.

$x(t) = 5\cos(4\pi 10^3 t) - 2\cos(2\pi 10^3 t)$

$T = ?$ (интервал дискретизации)

3 отсчета $= ?$

процесс содержит 2 частоты $2\pi 10^3$ и $4\pi 10^3$

Максимальная частота $\omega_b = 4\pi 10^3$

$$T = \frac{\pi}{\omega_b} = \frac{\pi}{4\pi \cdot 10^3} = \frac{1}{4 \cdot 10^3}$$

если $t = 0$, то: $x(0) = 5\cos 0 - 2\cos 0 = 3$

если $t = T$, то: $x(T) = 5\cos\left(\frac{4\pi 10^3}{4 \cdot 10^3}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3}\right) =$

$= -5 - 2 \cdot 0 = -5$

если $t = 2T$, то: $x(2T) = 5\cos\left(\frac{4\pi \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3}\right) =$

$= 5 - 2(-1) = 7.$