ЛЕКЦИЯ № 5.

СООБЩЕНИЯ, СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ КАК СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ.

Случайная функция – семейство случайных величин $\zeta(t)$, зависящих от действительного параметра t. Если t - текущее время, то $\zeta(t)$ - случайный процесс (СП). СП характеризуется множеством функций времени:

$$\zeta(t) = \{x^{(k)}(t), t \in T_0\}$$

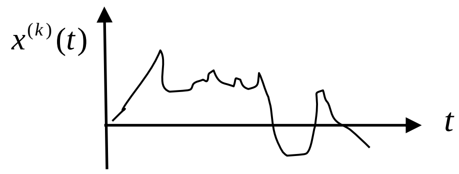
и вероятностной мерой, заданной на этом множестве, где k - номер реализации, T_0 - область определения СП. Множество χ, которому принадлежат возможные значения $\zeta(t)$ - пространство значений процесса.

СП

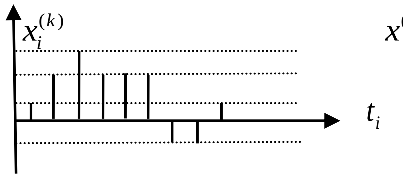
с дискретным временем | с непрерывным временем

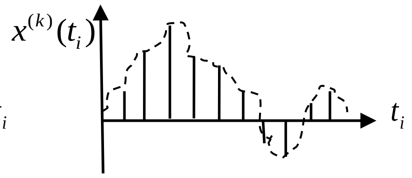
(случайные последовательности)

дискретные | непрерывные



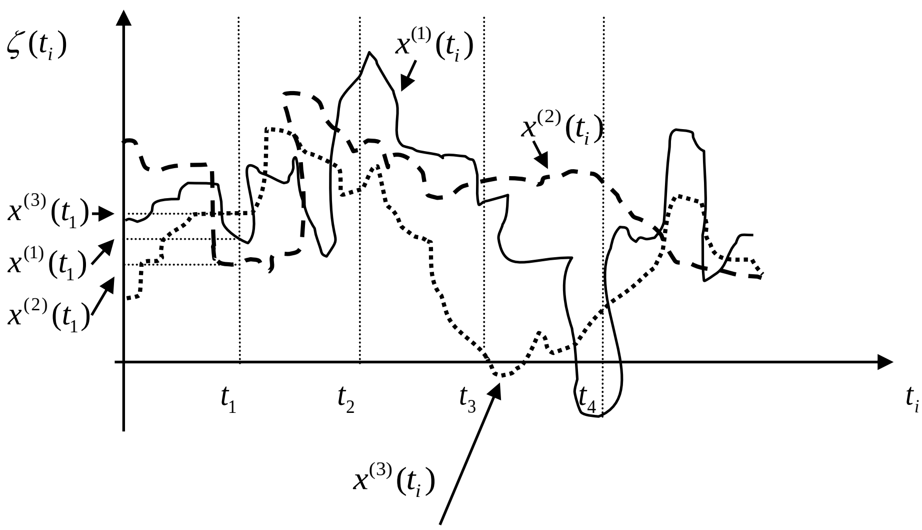
χ - конечное (счетное) | χ - континуум





$t_i = \Delta ti, i = 1,2.3....., \Delta t$ - шаг временной дискретизации.

Совокупность значений случайного процесса в моменты времени t_i образуют векторную случайную величину $\zeta = (\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \cdots \quad \zeta_n), \zeta_i = \zeta(t_i)$.



Функции распределения и плотности вероятности СП.

Фиксируем последовательно $i = 1,2,3,.....,n$. Тогда одномерная функция распределения СП $\zeta(t)$ определяется следующим образом $F_1(x_i,t_i) = P\{\zeta(t_i) \le x_i\}$,

двумерная - $F_2(x_i,x_j,t_i,t_j) = P\{\zeta(t_i) \le x_i, \zeta(t_j) \le x_j\}$, где x_i - пороги и т.д. В общем случае n - мерная функция распределения задается выражением:

$$F_n(x_1,...x_n,t_1,....t_n) = P\{\zeta(t_1) \le x_1,....\zeta(t_n) \le x_n\}, \qquad (5.1)$$

где x_i - пороги, t_i - параметры, $P\{\bullet\}$ - совместная вероятность того, что значения СП $\zeta(t_i)$ не превысят порогов x_i. Функция распределения должна удовлетворять условиям **симметрии**: $F_n(x_1,...x_n,t_1,...t_n) = F_n(x_{k_1},...x_{k_n},t_{k_1},...t_{k_n})$, где

$k_1,...k_n$ - целые числа от 1 до n, расположенные в произвольном порядке, и условию **согласованности**: $\lim\limits_{\substack{x_j \to \infty \\ j=k+1,....n}} F_n(x_1,...x_n,t_1,...t_n) = F_k(x_1,...x_k,t_1,....t_k)$.

Одномерная плотность распределения вероятности СП $\zeta(t)$ - $w_1(x,t) = \dfrac{dF_1(x,t)}{dx}$,

двумерная - $w_2(x_i,x_j,t_i,t_j) = \dfrac{\partial^2 F_2(x_i,x_j,t_i,t_j)}{\partial x_i \partial x_j}$ и т.д. Тогда n- мерная плотность распределения СП имеет вид:

$$w_n(x_1,....x_n,t_1,...t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1,....x_n,t_1,...t_n)}{\partial x_1....\partial x_n} \quad . \qquad (5.2)$$

Условие **симметрии**: $w_n(x_1...x_n,t_1,...t_n) = w_n(x_{k_1},....x_{k_n},t_{k_1},...,t_{k_n})$, условие **согласованности**: $w_k(x_1,...x_k,t_1,...t_k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1,...x_k,x_{k+1},...x_n,t_1,...t_k,t_{k+1},...t_n) dx_{k+1}...dx_n$.

Моментные функции случайного процесса.

1) Среднее значение СП:

$$M\{\zeta(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x w_1(x,t) dx = m_x(t). \qquad (5.3)$$

2) Дисперсия СП:

$$M\{\zeta t) - m_x(t)\}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))^2 w_1(x,t) dx = \sigma_x^2(t). \qquad (5.4)$$

$\pm\sigma_x(t)$ - наиболее вероятное максимальное отклонение значений СП от среднего значения $m_x(t)$ в момент времени t.

3) Корреляционная функция СП:

$$M\{\zeta(t_i)\zeta(t_j)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j w_2(x_i, x_j, t_i, t_j) dx_i dx_j = R_x(t_i, t_j). \qquad (5.5)$$

4) Ковариационная функция СП:

$$M\{(\zeta(t_i) - m_x(t_i))(\zeta(t_j) - m_x(t_j))\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x(t_i))(x_j - m_x(t_j)) w_2(x_i, x_j, t_i, t_j) dx_i dx_j = B_x(t_i, t_j) \qquad (5.6)$$

Здесь $M\{\bullet\}$ - оператор математического ожидания. Корреляционная и ковариационная функция показывают статистическую связь, между значениями процесса $\zeta(t_i)$ и $\zeta(t_j)$.

Совокупность случайных процессов.

Рассмотрим два СП $\zeta(t)$ и $\eta(t)$: $\zeta = \begin{pmatrix}\zeta_1 & \cdots & \zeta_n\end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix}\eta_1 & \cdots & \eta_m\end{pmatrix}$, где $\zeta_i = \zeta(t_i)$,

$\eta_j = \eta(t_j)$, $i = 1,2,....,n;\ j = 1,2,....m$. Тогда **совместная** функция распределения определяется следующим образом:

$$F_{n+m}(\vec{x}_n, \vec{y}_m, \vec{t}_n, \vec{t}_m) = P\{\zeta \le \vec{x}_n, \eta \le \vec{y}_m), \qquad (5.7)$$

где $\vec{x}_n = \begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}, \vec{y}_m = \begin{pmatrix}y_1 & \cdots & y_m\end{pmatrix}, \vec{t}_n = \begin{pmatrix}t_1 & \cdots & t_n\end{pmatrix}, \vec{t}_m = \begin{pmatrix}t_1^{'} & \cdots & t_m^{'}\end{pmatrix}$.

Совместная плотность распределения вероятности двух процессов имеет вид:

$$w_{n+m}(\vec{x}_n, \vec{y}_m, \vec{t}_n, \vec{t}_m) = \frac{\partial^{n+m} F_{n+m}(\vec{x}_n, \vec{y}_m, \vec{t}_n, \vec{t}_m)}{\partial\vec{x}_n \partial\vec{y}_m}. \qquad (5.8)$$

Два случайных процесса называются **независимыми**, если для любого n и m выполняются равенства

$$\begin{aligned} F_{n+m}(\vec{x}_n, \vec{y}_m, \vec{t}_n, \vec{t}_m) &= F_{nx}(\vec{x}_n, \vec{t}_n) \cdot F_{my}(\vec{y}_m, \vec{t}_m), \\ w_{n+m}(\vec{x}_n, \vec{y}_m, \vec{t}_n, \vec{t}_m) &= w_{nx}(\vec{x}_n, \vec{t}_n) \cdot w_{my}(\vec{y}_m, \vec{t}_m) \end{aligned} \qquad (5.9)$$

Т.е. процессы независимы, если их совместная функция распределения (5.7) или совместная плотность распределения вероятности (5.8) факторизуется.

Определим взаимную корреляционную и ковариационную функцию двух СП

$$M\{\zeta(t_i)\eta(t_j)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyw_2(x,y,t_i,t_j)dxdy = R_{xy}(t_i,t_j),$$
$$M\{(\zeta(t_i)-m_x(t_i))(\eta(t_j)-m_y(t_j))\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x(t_i))(y-m_y(t_j))w_2(x,y,t_i,t_j)dxdy = B_{xy}(t_i,t_j) \quad (5.10)$$

причем, $R_{xy}(t_i,t_j) = R_{xy}(t_j,t_i), B_{xy}(t_i,t_j) = B_{xy}(t_j,t_i)$.

Два случайных процесса называются **некоррелированными**, если

$$B_{xy}(t_i,t_j) = R_{xy}(t_i,t_j) - m_x(t_i)m_y(t_j) = 0 \ . \quad (5.11)$$

Из независимости СП следует их некоррелированность. Обратное в общем случае неверно.

Стационарные случайные процессы.

Случайные процесс $\zeta(t)$ называется **стационарным в узком смысле**, если для произвольной последовательности $t_1,.....t_n$, для любого момента t_0 и целого числа $n \geq 1$ функция распределения вероятности (5.1) инвариантна относительно сдвига переменной t:

$$F_n(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n) = F_n(x_1,...,x_n,t_1+t_0,...,t_n+t_0). \quad (5.12)$$

Необходимые условия стационарности в узком смысле.

1) Необходимо, чтобы одномерная функция распределения не зависела от времени, т.е. $F_1(x,t) = F_1(x)$. Тогда не зависят от времени также $w_1(x,t) = w(x)$,

$m_x(t) = m_x, \sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$

2) Необходимо, чтобы двумерная функция распределения зависела не от двух моментов времени, а только от разности между ними $\tau = t_i - t_j$, т.е.

$F_2(x_i,x_j,t_i,t_j) = F_2(x_i,x_j,\tau)$. Тогда зависят только от этой разности и

$$w_2(x_i,x_j,t_i,t_j) = w_2(x_i,x_j,\tau),$$

$$R_x(t_i,t_j) = R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j w_2(x_i,x_j,\tau)dx_i dx_j \ , \quad (5.13)$$

$$B_x(t_i,t_j) = B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-m_x)(x_j-m_x)w_2(x_i,x_j,\tau)dx_i dx_j \ .$$

Случайный процесс называется **стационарным в широком смысле**, если его среднее значение и дисперсия не зависит от времени $m_x(t) = m_x, \sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$, а его корреляционная и ковариационная функция зависят только от разности τ между двумя моментами времени $R_x(t_i, t_j) = R_x(\tau), B_x(t_i, t_j) = B_x(\tau)$.

Необходимые условия стационарности в узком смысле являются достаточными условиями стационарности в широком смысле.

Эргодические случайные процессы.

Стационарный СП называется **эргодическим**, если при нахождении любых вероятностных характеристик, усреднение по множеству реализаций может быть заменено усреднением по времени:

$$m_x = \lim_{T_H \to \infty} \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} x^{(k)}(t) dt,$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{T_H} \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} (x^{(k)}(t) - m_x)^2 dt, \qquad (5.14)$$

$$m_{2x} = \lim_{T_H} \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} (x^{(k)}(t))^2 dt,$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T_H \to \infty} \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} x^{(k)}(t) x^{(k)}(t+\tau) dt,$$

где $x^{(k)}(t)$ - k- ая реализация случайного процесса $\zeta(t)$, T_H - ее длительность. Здесь m_x можно рассматривать как постоянную составляющую реализации $x^{(k)}(t)$, а m_{2x} как среднюю мощность сигнала.