Билет 7

1. Задача различения сигналов. Критерии различения. Оптимальные алгоритмы приема при полностью известных сигналах на фоне АБГШ. Когерентный прием.

Задача обнаружения сигнала на фоне шума является частным случаем задачи различения двух сигналов. В общем случай задача различения – задача проверки m статистических гипотез.

Рассматриваются гипотезы: $H_k : \ y(t)=S_k(t)+\eta(t), \ \ k=\overline{1:m}$, по каждой из которых на входе приемного устройства в смеси с шумом присутствует сигнал $S_k(t)$. Обрабатывая выборку наблюдаемого процесса $y(t)$, надо принять решение о том, который из m возможных сигналов пришел на вход приемника.

Для задач различения чаще более обоснованным является применение критерия идеального наблюдателя, максимума апостериорной вероятности и максимума отношения правдоподобия.

2.2.1. <u>Критерий идеального наблюдателя (критерий Зигерта-Котельникова)</u>

Критерий идеального наблюдателя заключается в минимизации средней вероятности ошибки. Для случая m гипотез он выглядит следующим образом:

$$P_{ОШ} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} P(H_k)P(\gamma_j \mid H_k) = P_{ОШ\ min}\,, \qquad (2.27)$$

где $P(H_k)$ - априорные вероятности появления сигналов $S_k(t)$, $P(\gamma_j \mid H_k)$- вероятность принять решение о появлении j – го сигнала при условии, что на самом деле присутствует k – ый сигнал. По критерию идеального наблюдателя решающее правило имеет вид:

приемник регистрирует сигнал $S_k(t)$, если для всех l (l≠k) выполняющиеся

m-1 неравенство:

$$\Lambda_{kl}(\vec{\mathbf{y}}_n) > \frac{p_l}{p_k} \qquad (2.28)$$

$k=\overline{1:m}$, $\quad \Lambda_{kl}(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}) = \dfrac{w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n} \mid H_k)}{w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n} \mid H_l)}$, $\quad \vec{\mathbf{y}}_n = (y_1,\dots,y_n)$, $\quad p_l = P(H_l)$, $p_k = P(H_k)$ – априорные вероятности появления сигналов $S_l(t)$ и $S_k(t)$ соответственно.

Алгоритм (2.28) можно переписать в следующем виде:

$$p_k w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n} \mid H_k) > p_l w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n} \mid H_l), k \neq l\,,$$

$$p_k w\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n} \mid H_k\right) = \max_k \qquad (2.29)$$

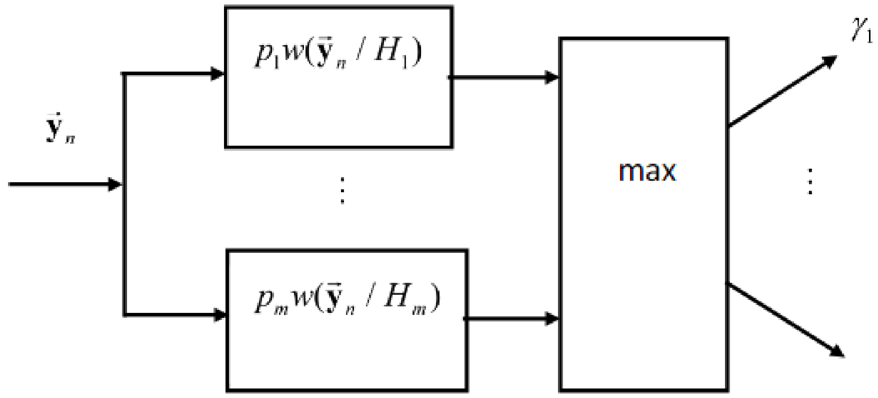


Рисунок 2.7. Структурная схема алгоритма различения сигналов по критерию идеального наблюдателя.

Приемник, работающий по правилу (2.29) назван Котельниковым В.А. *идеальным (оптимальным).*

2.2.2. <u>Критерий максимальной апостериорной вероятности (МАВ)</u>.

Критерий МАВ можно получить, переписав формулу (2.29) следующим образом:

$\dfrac{p_k w\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n} \mid H_k\right)}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i w\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n} \mid H_i\right)} = P\left(H_k \mid \overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)$ - апостериорная вероятность гипотезы H_k $\Rightarrow$ совокупность неравенств, эквивалентная (2.29) принимает вид:

$$P\left(H_k \mid \overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right) = \max_k \qquad (2.30)$$

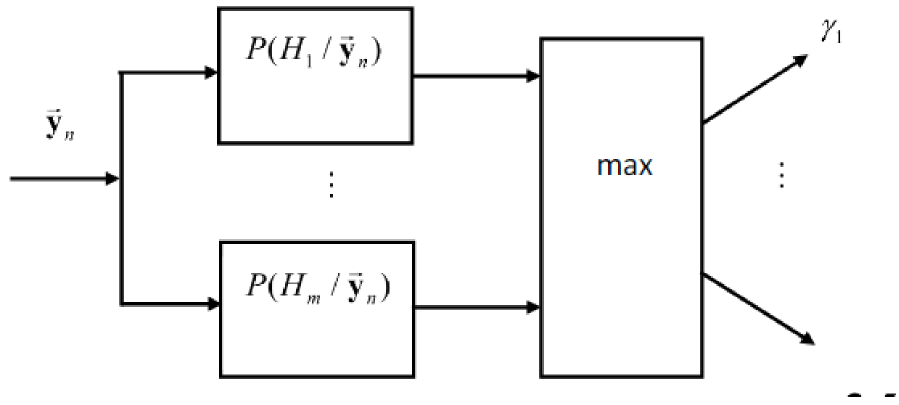


Рисунок 2.8. Структурная схема алгоритма различения сигналов по критерию МАВ.

Недостатком алгоритмов (2.29) и (2.30) является то, что надо знать априорные вероятности гипотез p_k, $k=\overline{1:m}$.

2.2.3. Критерий максимального отношения правдоподобия.

Приемник регистрирует сигнал $S_k(t)$, если

$$\Lambda_{ko}\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=\max_k \tag{2.31}$$

Индекс «0» - нулевая гипотеза H_0 о действии только шума.

Если априорные вероятности гипотез H_k равны, т.е. $P(H_k)=\dfrac{1}{m}$, $k=\overline{1:m} \Rightarrow$ критерий максимального отношения правдоподобия совпадает с критериям идеального наблюдения.

2.2.4. Оптимальные алгоритмы приема при полностью известных сигналах (когерентный прием) на фоне аддитивного ГБШ.

Рассмотрим модель приходящего сигнала: $y_i=S_{ki}+\eta_i$, $i=\overline{1:n}$, - дискретное время, сигналы S_{ki} – известны η_i - шум. Неизвестны реализация помехи η_i и индекс k переданного сигнала, который должна определить решающая схема.

Запишем отношение правдоподобия: $\Lambda_{kl}\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=\dfrac{w\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\mid H_k\right)}{w\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\mid H_l\right)}$, где $w\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\mid H_k\right)$ - многомерная гауссовская ФПВ выборки $\overrightarrow{\mathbf{y}_n}$ при условии действия гипотезы H_k.

Т.к. шум η_i - белый $\Rightarrow$ выборка $\overrightarrow{\mathbf{y}_n}$ независимая, тогда $w\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\mid H_k\right)$ факторизуется: $w\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\mid H_k\right)=\prod_{i=1}^{n} w\left(y_i\mid H_k\right)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\right)^n}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\left(y_i-S_{ki}\right)^2}{2\sigma_\eta^2}\right)$. В этом случае отношение правдоподобия приводится к виду:

$$\Lambda_{kl}\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(y_i-S_{ki}\right)^2}{2\sigma_\eta^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(y_i-S_{li}\right)^2}{2\sigma_\eta^2}\right).$$

Далее возьмем от левой и правой части данного выражения функцию натурального логарифма:

$$ln\Lambda_{kl}(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}) = \lambda_{kl}(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}) = \frac{1}{2\sigma_\eta^2}\sum_{i=1}^{n}(-y_i^2 + 2y_iS_{ki} - S_{ki}^2 + y_i^2 - 2y_lS_{kl} + S_{li}{}^2) \Rightarrow$$

$$\lambda_{kl}(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}) = \frac{2}{2\sigma_\eta^2}\sum_{i=1}^{n}y_iS_{ki} - \frac{1}{2\sigma_\eta^2}\sum_{i=1}^{n}S_{ki}^2 - \left(\frac{2}{2\sigma_\eta^2}\sum_{i=1}^{n}y_iS_{li} - \frac{1}{2\sigma_\eta^2}\sum_{i=1}^{n}S_{li}^2\right).$$

По критерию идеального наблюдателя (см. 2.28) $\Lambda_{kl}(\overrightarrow{\mathbf{y}_n})$ сравнивается с единицей при $p_l = \frac{1}{m}$, $l = \overline{1:m}$, а $\lambda_{kl}(\overrightarrow{\mathbf{y}_n})$ с «0» т.к. ln1=0 $\Rightarrow$

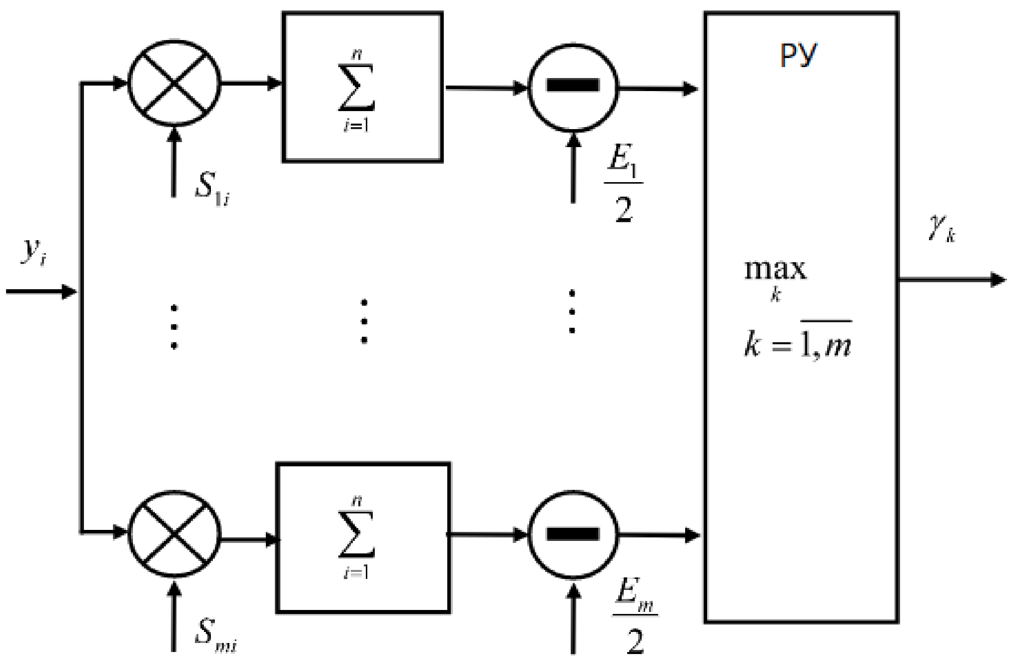
$$\frac{1}{\sigma_\eta{}^2}\sum_{i=1}^{n}y_iS_{ki} - \frac{0,5}{\sigma_\eta{}^2}\sum_{i=1}^{n}S_{ki}^2 - \left(\frac{1}{\sigma_\eta{}^2}\sum_{i=1}^{n}y_iS_{li} - \frac{0,5}{\sigma_\eta{}^2}\sum_{i=1}^{n}S_{li}^2\right) \geq 0.$$

Обозначив $E_k = \sum_{i=1}^{n}S_{ki}^2$ - энергию сигнала S_{ki}, получим алгоритм различения:

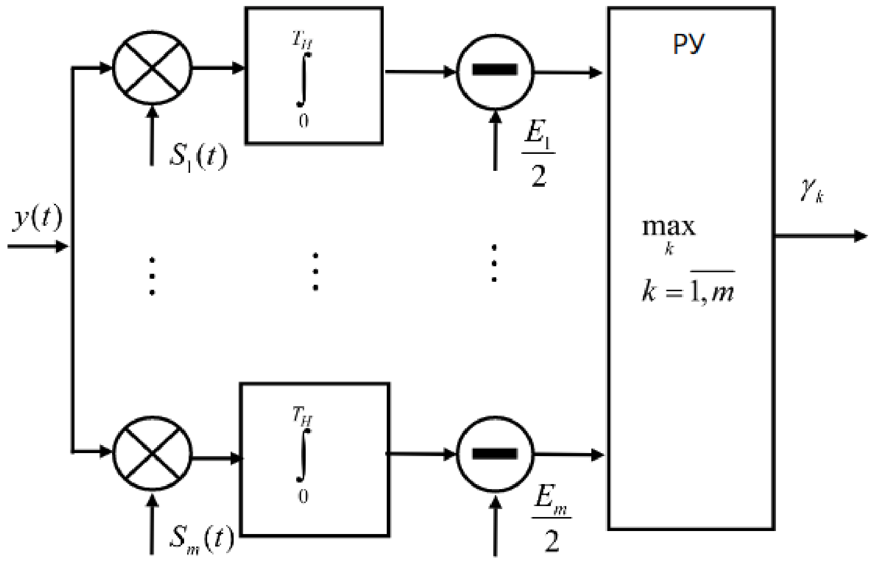
Передается сигнал S_{ki}, если

$$\sum_{i=1}^{n}y_iS_{ki} - 0,5E_k \geq \sum_{i=1}^{n}y_iS_{li} - 0,5E_l, \text{ при } l = \overline{1:m},\ l \neq k \qquad (2.32)$$

На рисунке 2.9. изображена структурная схема алгоритма (2.32) различения детерминированных сигналов в дискретном и непрерывном времени.



а)



б)

Рисунок 2.9. Оптимальный демодулятор детерминированного сигнала, реализованный на корреляторах в дискретном времени – а, в непрерывном времени - **б** $E_k = \int_0^{T_H} S_k^2(t)$, $k=\overline{1,m}$.

Достоинством корреляционной схемы приема сигналов является ее простота, недостатком – чувствительность к задержке сигнала.

2. Амплитудная модуляция. Спектр АМ-сигнала. Амплитудный модулятор.

При АМ амплитуда несущего ВЧ колебания изменяется в соответствии с модулирующим НЧ сигналом.

$$U_{AM}(t) = U_m(1 + M_A U_{нч}(t))\cos\omega_0 t \qquad \textbf{(3.1)}$$

Um - средняя амплитуда АМ сигнала.

M_A - глубина (коэффициент) АМ.

$0 \le M_A \le 1$

Если модулирующий сигнал гармонический:

$U_{Н.Ч.}(t) = \cos\Omega t$

Ω - модулирующая, низкая частота,

ω_0 - несущая, высокая частота, то АМ сигнал принимает вид:

$$U_{AM}(t) = U_m(1 + M_A\cos\Omega t)\cos\omega_0 t \qquad \textbf{(3.2)}$$

Временная диаграмма НЧ сигнала:

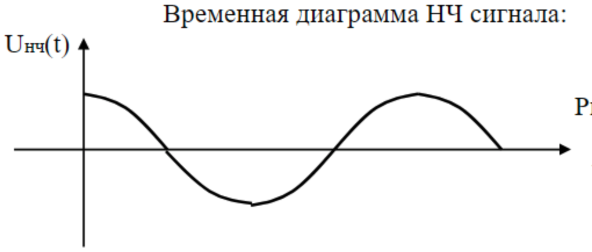


Рис.3.1

Временная диаграмма модулированного сигнала АМ:

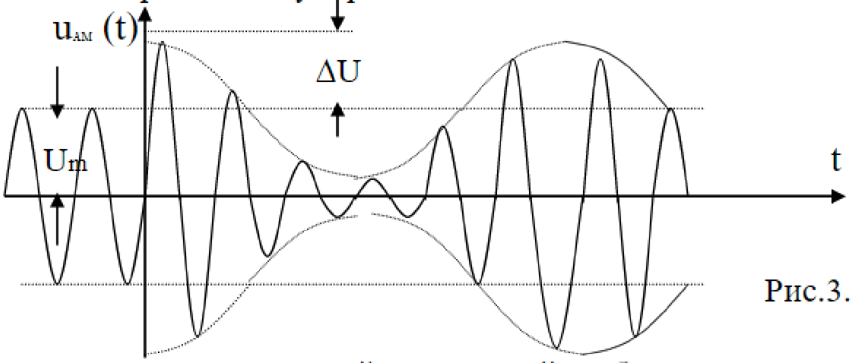


Рис.3.2

В соответствии с временной диаграммой глубина амплитудной модуляции равна:

$$M_A = \Delta U / Um. \qquad \textbf{(3.3)}$$

Определим спектр АМ сигнала, для чего раскроем скобки в выражении для АМ и представим произведение косинусов в виде косинуса суммы и разности углов:

$$U_{AM}(t) = U_{\max}(1 + M_A \cos\Omega t)\cos\omega_0 t = U_{\max}\cos\omega_0 t +$$
$$+ \frac{M_A U_{\max}}{2}\cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{M_A U_{\max}}{2}\cos(\omega_0 - \Omega)t \qquad \textbf{(3.4)}$$

Спектр модулирующего сигнала $U_{НЧ}(t) = \cos\Omega t$ **.**

Рис.3.3

Спектр АМ сигнала.

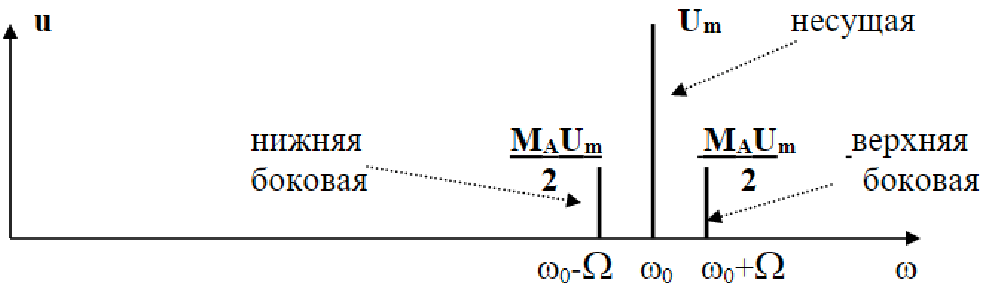


Рис.3.4

$П_{AM}$ - ширина спектра сигнала АМ – полоса частот, в пределах которой заключена основная доля энергии сигнала.

$$П_{AM} = 2\Omega \qquad \textbf{(3.5)}$$

Боковые имеют высоту (амплитуду) не более половины несущей.

Схема базового амплитудного модулятора имеет вид:

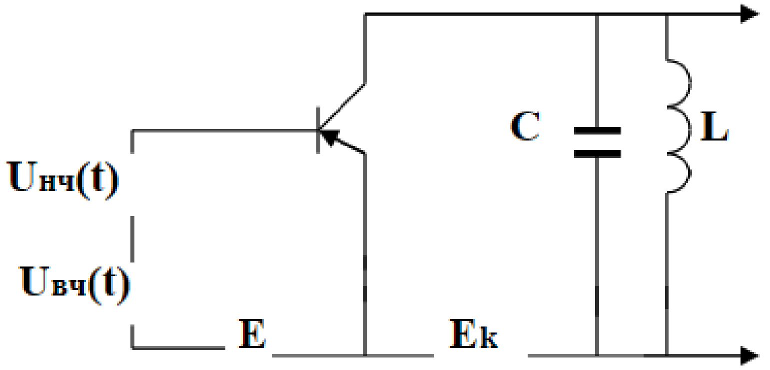


Рис.3.5.

На входе 3 напряжения:

1. $U_{НЧ}$ - модулирующее напряжение.
2. $U_{ВЧ}$ - несущее напряжение.
3. E - напряжение смещения.

Задача. Построить спектр дискретного сигнала $x_\delta(t) = x(t)\delta_T(t)$, если $\delta_T(t)$ - периодическая с периодом T=1 мс последовательность дельта - функций, а непрерывный сигнал имеет спектр

$$S(f) = \cos(\frac{\pi}{2}10^{-3} f), \qquad |f| \le 1 \text{ кГц}.$$