Билет 8

1.Потенциальная помехоустойчивость когерентного приема. Потенциальная помехоустойчивость ДАМ, ДФМ, ДЧМ и ДОФМ сигналов.

Помехоустойчивость – способность системы противостоять влиянию помех, определяется вероятностью ошибки Рош. Рош-вероятность неправильно принять информационный символ.

При заданной интенсивности помехи Рош тем меньше, чем сильнее различаются между собой сигналы, соответствующие разным сообщениям. Также Рош зависит от способа приема.

Потенциальная(предельная) помехоустойчивость – это помехоустойчивость при заданном методе модуляции, которая ни при каком способе приема не может быть превзойдена.

Оптимальный приемник- приемник, реализующий потенциальную помехоустойчивость.

Пусть m=2 $\Rightarrow$известны два сигнала $S_1(t)$ и $S_2(t)$. Пусть априорные вероятности появления этих сигналов равны, т.е. $P(H_1)=P(H_2)=0.5$. Тогда

$P_{ОШ}=0.5\left[P(\gamma_1|H_2)+P(\gamma_2|H_1)\right]=\min$. Из формулы:

$\sum_{i=1}^{n} y_i S_{ki} - 0,5E_k \ge \sum_{i=1}^{n} y_i S_{li} - 0,5E_l$, при $l=\overline{1:m}$, $l\ne k$ имеем:

если $\sum_{i=1}^{n} y_i (S_{1i} - S_{2i}) - 0,5(E_1 - E_2) > 0 \Rightarrow$ принимаем решение γ_1(на входе приемника присутствует сигнал S_{1i});

или в непрерывном времени: если $\int_0^T y(t)[S_1(t)-S_2(t)]dt - 0,5(E_1-E_2)>0 \Rightarrow$ принимаем решение γ_1 о присутствии сигнала $S_1(t)$.

По гипотезе H[1]: $y(t)=S_1(t)+\eta(t) \Rightarrow \int_0^T (S_1(t)+\eta(t))[S_1(t)-S_2(t)]dt - 0,5(E_1-E_2)=$

$$=\int_0^T S_1(t)[S_1(t)-S_2(t)]dt + \int_0^T \eta(t)[S_1(t)-S_2(t)]dt - 0,5(E_1-E_2) = \zeta + 0,5E_э \Rightarrow$$

$P(\gamma_2|H_1)=P\{\zeta<-0,5E_э|H_1\}$, $\zeta \sim N(0;\sigma_\zeta^2)$, $\sigma_\zeta^2 = M\left(\int_0^T \eta(t)[S_1(t)-S_2(t)]dt\right)^2 = \int_0^T M(\eta(t))^2[S_1(t)-S_2(t)]^2 dt = \sigma_\eta^2 E_э$,

где $E_э=\int_0^T [S_1(t)-S_2(t)]^2 dt$ -энергия разностного сигнала, М – оператор мат. ожидания, $\sigma_\eta^2=\frac{N_0}{2}$.

ФПВ случайной величины ζ - гауссовская: $w_\zeta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\zeta}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\zeta^2}} \Rightarrow$

$P(\gamma_2|H_1)=\int_{-\infty}^{-0,5E_э} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\zeta}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\zeta^2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\frac{0,5E_э}{\sigma_\zeta}} e^{-\frac{V^2}{2}}dV = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{0,5E_э}{\sigma_\zeta}}^{\infty} e^{-\frac{V^2}{2}}dV$, была проведена замена переменной: $V=\frac{-x}{\sigma_\xi} \Rightarrow dV=\frac{-dx}{\sigma_\xi}$,

$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{V^2}{2}}dV$ - функция Крампа, табулирована. Т.к. $\Phi(\infty)=1 \Rightarrow$

$$P(\gamma_2|H_1)=0,5\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{V^2}{2}}dV - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{0,5E_э}{\sigma_\zeta}} e^{-\frac{V^2}{2}}dV\right] = 0,5\left[\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{0,5E_э}{\sigma_\zeta}\right)\right] = 0,5\left[1-\Phi\left(\frac{0,5E_э}{\sigma_\zeta}\right)\right].$$

Аналогично получаем:

$$P(\gamma_1|H_2) = 0,5\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_э}{2N_0}}\right)\right];$$

Т.е. $P(\gamma_1|H_2) = P(\gamma_2|H_1) \Rightarrow P_{ош} = 0,5 \cdot 2P(\gamma_2|H_1) = 0,5\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_э}{2N_0}}\right)\right]$.

$$P_{ош} = 0,5\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_э}{2N_0}}\right)\right]$$

Таким образом, вероятность ошибки $P_{ОШ}$ тем меньше, чем больше энергия $E_э$ разностного сигнала.

$$E_э = \int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = \int_0^T S_1^2(t)dt + \int_0^T S_2^2(t)dt - 2\int_0^T S_1(t)S_2(t)dt = E_1 + E_2 - 2\int_0^T S_1(t)S_2(t)dt.$$

Энергия $E_э$ тем больше, чем больше суммарная энергия двух сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ $E_1 + E_2$ и чем меньше корреляция между ними $\int_0^T S_1(t)S_2(t)dt$.

Если $E_1 = E_2 = E$, $r_s = \frac{1}{E}\int_0^T S_1(t)S_2(t)dt$ - коэффициент взаимной корреляции между $S_1(t)$ и $S_2(t)$,

то $E_Э = 2E - 2r_s E = 2E(1 - r_s)$ и $P_{ош} = 0,5\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E(1 - r_S)}{N_0}}\right)\right]$

Если $r_s = -1$, тогда $S_1(t) = -S_2(t)$- противоположные сигналы, $P_{ОШ}$ минимальна; если $r_s = 1$, тогда $S_1(t) = S_2(t)$, $P_{ОШ} = 0.5$ - сигналы не различимы; если $r_s = 0$, тогда сигналы ортогональны.

Потенциальная помехоустойчивость ДАМ, ДФМ, ДЧМ и ДОФМ сигналов.

1.Двоичная амплитудная модуляция (ДАМ):

«1» передается сигналом $S_1(t) = A\cos(\omega t)$,

«0» передается сигналом $S_2(t) = 0$,

$0 \le t \le T$.

E_2=0; E_1=E, тогда по формуле: $P_{ош} = 0,5\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_э}{2N_0}}\right)\right]$

Получим выражение для потенциальной помехоустойчивости:

$$P_{ош} = 0,5\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)\right]$$

или через интеграл Лапласса $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{V^2}{2}}dV$: $P_{ош} = 1 - F\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$

2.Двоичная частотная модуляция (ДЧМ):

«1» передается сигналом $S_1(t)=A\cos(\omega_1 t)$,

«0» передается сигналом $S_2(t)=A\cos(\omega_2 t)$,

$0\le t\le T$.

$r_s\approx 0$ $\Rightarrow$ по формуле :

$$P_{ош}=0,5\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{E(1-r_S)}{N_0}}\right)\right]$$

получим:

$$P_{ош}=0,5\left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)\right)$$

или

$$P_{ош}=1-F\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

3.Двоичная фазовая модуляция(ДФМ):

«1» передается сигналом $S_1(t)=A\cos(\omega t)$,

«0» передается сигналом $S_2(t)=-A\cos(\omega t)$,

$0\le t\le T$.

$r_s=-1\Rightarrow\Rightarrow$ по формуле :

$$P_{ош}=0,5\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{E(1-r_S)}{N_0}}\right)\right]$$

получим:

$$P_{ош}=0,5\left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)\right)$$

или

$$P_{ош}=1-F\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right).$$

4.Двоичная относительная фазовая манипуляция(ДОФМ):

$$S_1(t)=\begin{cases}A\cos(\omega t), 0<t\le T,\\ A\cos(\omega(t-T)), T<t\le 2T.\end{cases}$$

Сигнал $S_1(t)$ соответствует передаче разности фаз $\Delta\varphi=0$, а сигнал $S_2(t)$- $\Delta\varphi=\pi$

$$S_2(t)=\begin{cases}A\cos(\omega t), 0<t\le T,\\ -A\cos(\omega(t-T)), T<t\le 2T.\end{cases}$$

Исходное сообщение b_k(k=0,1..), состоящее из 0 и 1, преобразуется в $J_k=2b_k-1$ (в последовательность из -1 и 1). При формировании ДОФМ сигнала символы J_k перекодируются следующим образом: $J'_k=J_k*J'_{k-1}$ где $J'_0=1$

Тогда для получения ДОФМ сигнала достаточно умножить несущее колебание $A\cos(\omega t)$ на $J_k{}'$:

$$S(t)=J_k{}'\cdot A\cos(\omega t)=\pm A\cos(\omega t).$$

$$P_{ДОФМ}=2P_{ДФМ}(1-P_{ДФМ}),$$

где $P_{ДФМ}$ - вероятность принять неверно один символ, определяемая по формуле:

$$P_{ош}=0,5\left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)\right)$$

или

$$P_{ош}=1-F\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right).$$

получим:

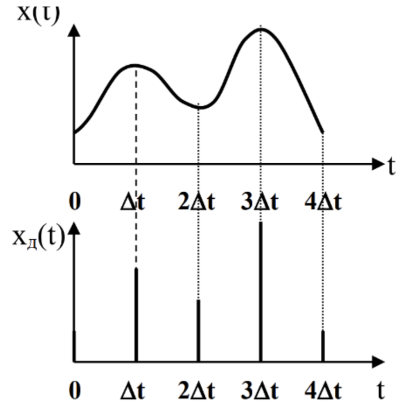
$$P_{ДОФМ}=\left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)\right)\cdot\left(1-0,5\left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)\right)\right)$$

или

$$P_{ДОФМ}=2\left(1-F\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)\right)\cdot F\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right).$$

2.Спектр дискретизированного сигнала. Спектр АИМ сигнала

Рассмотрим временные диаграммы исходного и дискретизированного сигналов:



$x_\partial(t) = x(t)U_\delta(t)$ - дискретизированный сигнал

$x(t)$ - исходный сигнал.

$U_\delta(t)$ -периодическая последовательность δ - импульсов.

Разложим периодическую последовательность δ-импульсов в ряд Фурье.

$$U_\delta(t) = \ldots + \frac{1}{\Delta t}e^{-j\omega_\partial t} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}e^{j\omega_\partial t} + \ldots$$

$$x_\partial(t) = x(t)U_\delta(t) = x(t)[\ldots + \frac{1}{\Delta t}e^{-j\omega_\partial t} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}e^{j\omega_\partial t} + \ldots]$$

Найдём спектр дискретизированного сигнала.

$$\dot{S}_\partial(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\partial(t)e^{-j\omega t}dt = \ldots + \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega+\omega_\partial)t}dt + \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt +$$

$$+\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_\partial)t}dt + \ldots = \ldots + \frac{1}{\Delta t}\dot{S}_x(\omega+\omega_\partial) + \frac{1}{\Delta t}\dot{S}x(\omega) + \frac{1}{\Delta t}\dot{S}x(\omega-\omega_\partial) + \frac{1}{\Delta t}\dot{S}x(\omega-2\omega_\partial) + \ldots$$

Т.о. мы видим, что спектр дискретизированного сигнала содержит спектр исходного сигнала $S_x(\omega)$, спектр исходного сигнала смещенный на величину частоты дискретизации вправо $S_x(\omega - \omega_д)$, тот же спектр смещенный на величину частоты дискретизации влево $S_x(\omega + \omega_д)$, тот же спектр смещенный на величину $2\omega_д$ и т.д.

Спектр исходного непрерывного сигнала.

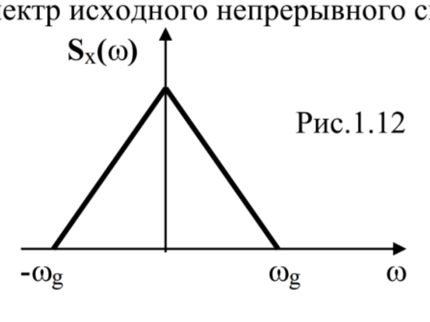


Рис.1.12

Спектр дискретизированного сигнала:

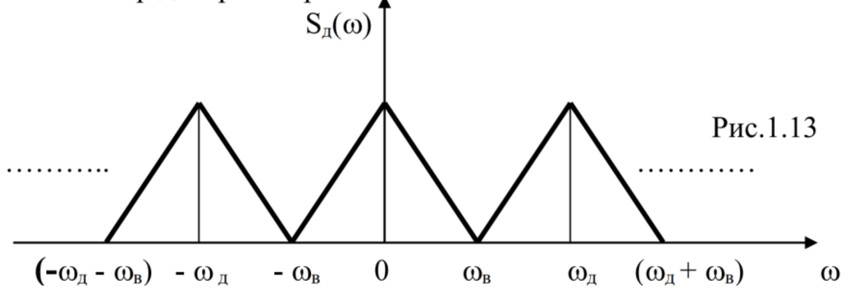


Рис.1.13

Спектр АИМ сигнала

Очевидно, что реально мы располагаем не последовательностью дельта-импульсов, а последовательностью импульсов конечной длительности.

В результате процесса дискретизации мы получим не последовательность дельта-импульсов, амплитуда которых соответствует значению непрерывного сигнала в тактовые моменты времени, а последовательность реальных, например, прямоугольных импульсов, амплитуда которых соответствует значениям непрерывного сингнала в тактовые моменты времени.

Рассмотрим временные диаграммы :

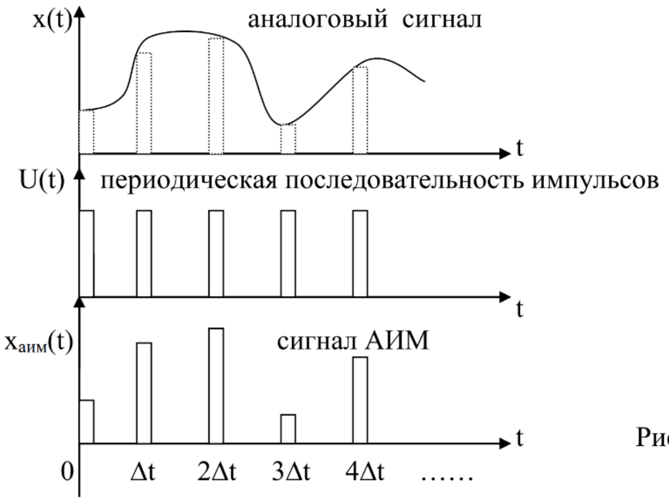


Рис. 1.14.

АИМ сигнал можно записать в виде:

$$x_{\partial_{АИМ}}(t) = x(t)U(t) = x(t)\left[\ldots + \frac{a_{-1}}{2}e^{-j\omega_\partial t} + \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2}e^{-j\omega_\partial t} + \ldots\right]$$

U(t)-периодическая последовательность импульсов.

В квадратных скобках – ряд Фурье для последовательности импульсов конечной длительности.

Спектр АИМ сигнала, следовательно, похож на спектр дискретизированного сигнала при дискретизации дельта -импульсами , но амплитуда составляющих спектра убывает с ростом номера гармоники :

$$\dot{S}_\partial(\omega) = \ldots + \frac{a_{-2}}{2}\dot{S}_x(\omega + 2\omega_\partial) + \frac{a_{-1}}{2}\dot{S}_x(\omega + \omega_\partial) + \frac{a_0}{2}\dot{S}_x(\omega) +$$

$$+ \frac{a_1}{2}\dot{S}_x(\omega - \omega_\partial) + \frac{a_2}{2}\dot{S}_x(\omega - 2\omega_\partial) + \ldots\ldots \qquad \mathbf{(1.8)}$$

Спектр АИМ сигнала в соответствии с формулой (1.8) принимает вид, показанный на рис.1.15.

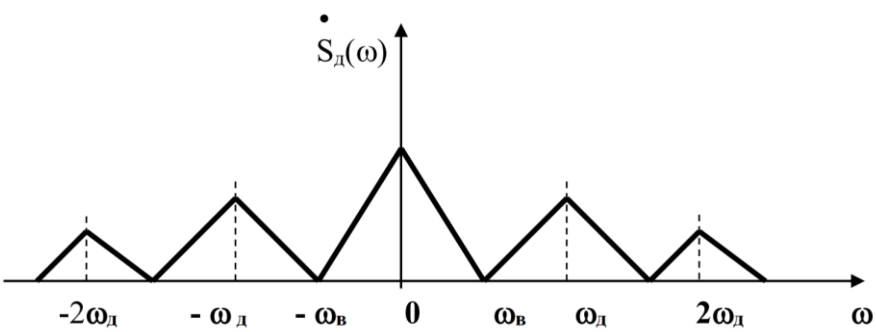


Рис.1.15

Задача. Дан стационарный случайный процесс $\zeta(t)$ с одномерной плотностью распределения вероятности

$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b,\\ 0, иначе\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса.

Билет 8

$$W(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & иначе\end{cases}$$

мат. ожидание –?

дисперсия –?

Решение:

для стационарного случайного процесса:

$$\left.\begin{aligned} m_x(t)&=m_x=const\\ \sigma_x^2(t)&=\sigma_x^2=const\end{aligned}\right\}\text{ не зависят от времени}$$

$$\left.\begin{aligned} m_x&=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot W(x)\,dx\\ \sigma_x^2&=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2\,W(x)\,dx\end{aligned}\right\}\text{ формулы в общем виде}$$

$m_x=\frac{b+a}{2}$ (частный случай)

$$m_x=\int_a^b\left(\frac{1}{b-a}\right)\cdot x\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)2}=\frac{b+a}{2}$$

$\sigma_x^2=\frac{(b-a)^2}{12}$ (частный случай)

$$\sigma_x^2=\int_a^b\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2\left(\frac{1}{b-a}\right)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x^2-x(b+a)+\frac{(b+a)^2}{4}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_a^b-\frac{(b+a)x^2}{2}\Big|_a^b+\frac{(b+a)^2x}{4}\Big|_a^b\right)=$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{(b+a)(b^2-a^2)}{2}+\frac{(b+a)^2(b-a)}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{12(b-a)}\left(4(b^3-a^3)-6(b+a)(b^2-a^2)+3(b+a)^2(b-a)\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\left(4a^2+4ab+4b^2-6(a^2+2ab+b^2)+3(a^2+2ab+b^2)\right)=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$