Билет №20

Вопрос 1

1. Основы теории информации. Дискретный источник (ДИ) информации. Понятие взаимной и собственной информации. Средняя взаимная информация и энтропия ДИ. Условная энтропия ДИ.

4. Основы теории информации.

Теория информации - математическая дисциплина. Предмет изучения – характеристики и передача информации. В теории информации (ТИ) рассматриваются понятия: объем данных, скорость передачи, пропускная способность канала, источник информации, энтропия источника, эффективное и помехоустойчивое кодирование.

ТИ, созданная математиком Клодом Элвудом Шенноном в 1948 г, первоначально применялась в области связи. Сейчас она применяется и в других областях, например, в вычислительной технике. На рисунке 4.1 показана упрощенная структурная схема системы передачи и приема информации.

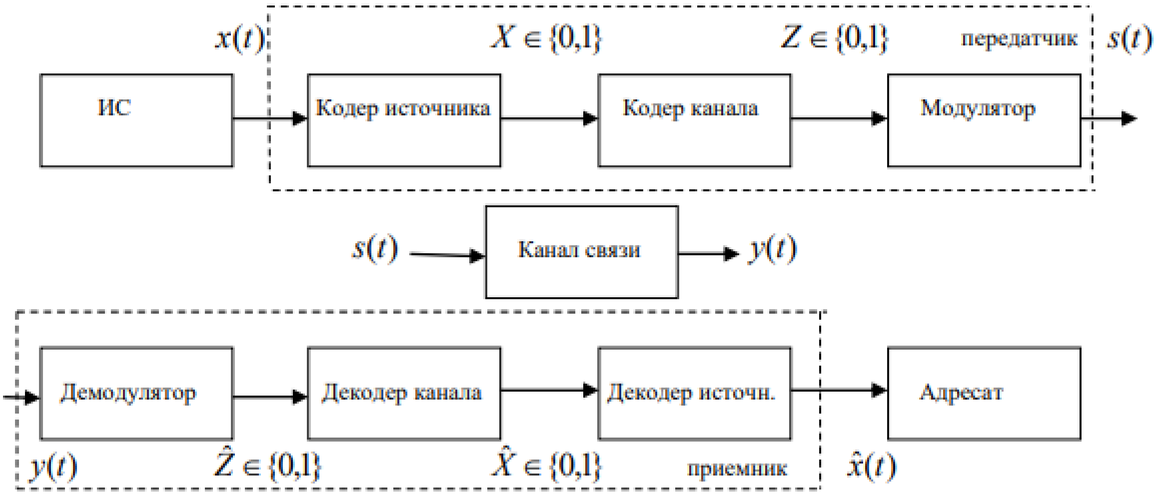


Рисунок 4.1. Обобщенная структурная схема системы передачи и приема сообщений.

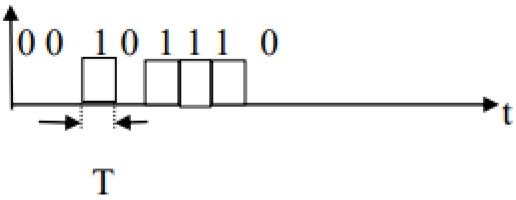
1) ИС – источник сообщений. На его выходе – аналоговый $x(t)$ или цифровой сигнал $x_i, i = 1,2,3,\ldots$.

ИС

Дискретный источник (ДИ)   Непрерывный источник (НИ)

На выходе ДИ информации – дискретные случайные последовательности сообщений (символов), на выходе НИ – непрерывный случайный процесс.

2) Кодер источника – устройство, преобразующее передаваемое сообщение в последовательность двоичных символов $X \in \{0,1\}$. Например, 00101110….. – кодовое слово длины **к** (**к** – количество символов «0» и «1» в кодовом слове).



Символы «0» и «1» называются **битом**. T – длительность одного бита. Тогда говорят, что двоичные символы следуют со скоростью

$$R = \frac{1}{T} \quad \text{(бит/с)}$$

Кодер источника осуществляет сжатие данных с помощью **эффективного кодирования**. Цель – избавиться от избыточности, которой обладают реальные источники информации, для эффективного использования канала связи при передаче сообщений.

3) Кодер канала – устройство, преобразующее кодовые слова с выхода кодера источника в **помехоустойчивые (корректирующие) коды** Z, которые позволяют обнаруживать и исправлять ошибки в приемнике.

4) Модулятор преобразует последовательность $Z \in \{0,1\}$ в передаваемый по каналу сигнал, соответствующий передаваемому сообщению. Некоторые виды цифровой модуляции рассмотрены в главе 3.

5) Канал связи – техническое устройство или физическая среда распространения сигналов. Например, провода, коаксиальный кабель, волоконно - оптический кабель (ВОК), радиоканал. В канале происходит искажение сигнала из-за помех и шумов. Модели каналов рассмотрены в главе 1.

6) Демодулятор преобразует искаженный каналом сигнал в последовательность двоичных символов, т.е. оценивает помехоустойчивый код $\hat{Z}$. Алгоритмы демодуляции (алгоритмы различения сигналов) рассмотрены в главе 2.

7) Декодер канала восстанавливает первоначальную последовательность по полученному помехоустойчивому коду, т.е. оценивает эффективный код $\hat{X}$.

8) Декодер источника – устройство, преобразующее последовательность двоичных символов $\hat{X} \in \{0,1\}$ в сообщение $\hat{x}(t)$ ($\hat{x}_i, i = 1,2,3,\dots$).

9) Адресат – лицо или устройство, которому предназначено переданное сообщение.

4.1. Дискретный источник информации (ДИ).

ДИ

ДИ без памяти (ДИБП) — Стационарный источник

Дискретный источник X с алфавитом A из L символов $\{a_1,....,a_L\}$ выдает последовательность букв (символов) $x_i \in \mathrm{A}\,(i=1,2,....)$ выбираемых из этого алфавита. Здесь i - дискретное время. Например, двоичный источник выдает двоичную последовательность 01100010100011110…… . Причем алфавит состоит из $L=2$ символов $A \in \{a_1, a_2\} = \{0,1\}$. Пусть каждый символ алфавита имеет заданную вероятность выбора $p_k = p(a_k) = P\{X = a_k\}, k = 1,2,...L$, где $\sum_{k=1}^{L} p_k = 1$. Рассмотрим две математические модели для ДИ.

1) Если символы выходной последовательности источника статистически независимы, то такой источник называется **источником без памяти (ДИБП)**.

2) Если символы источника взаимозависимы, то можно создать модель на основе статистической стационарности. ДИ называется **стационарным**, если совместные вероятности двух последовательностей длины n $x_1,...,x_n$ и $x_{1+m},...,x_{n+m}$ одинаковы для всех $n \ge 1$ и при всех сдвигах m:

$$p(x_1,....x_n) = p(x_{1+m},...,x_{n+m}).$$

Т.е. совместные вероятности двух последовательностей инвариантны по отношению к произвольному сдвигу.

Взаимная информация определяется как

$$I(a_k, b_l) = \log_2\left(\frac{p(a_k / b_l)}{p(a_k)}\right) \text{ (бит)}, \qquad (4.1)$$

где $p(a_k / b_l) = P\{X = a_k / Y = b_l\}$ - вероятность наступления события $X = a_k$ при условии, что $Y = b_l$.

1) Если X, Y независимы, тогда $p(a_k, b_l) = p(a_k)p(b_l)$, а $p(a_k / b_l) = \frac{p(a_k, b_l)}{p(b_l)} = p(a_k)$

Тогда по формуле (4.1) $I(a_k, b_l) = \log_2(1) = 0$.

2) Если X, Y полностью зависимы, тогда $p(a_k / b_l) = 1 \Rightarrow$

$$I(a_k, b_l) = \log_2\left(\frac{1}{p(a_k)}\right) = -\log_2(p(a_k)) = I(a_k) \text{ (бит)} \qquad (4.2.)$$

Выражение (4.2.) определяет информацию о X и называется **собственной информацией**. Она является информационной мерой Шеннона.

Свойства собственной информации.

1. Пусть $p(a_k)=1$, тогда $I(a_k)=0$, т.е. достоверное событие информации не несет. Собственная информация является меройнеопределенности.

2. Пусть a_k, a_q независимы, тогда $I(a_k,a_q)=-\log_2(p(a_k,a_q))=-\log_2(p(a_k)p(a_q))=$

$=-\log_2(p(a_k))-\log_2(p(a_q))=I(a_k)+I(a_q),\ k=1,2,...,L, q=1,2,....,L.$

3. Если источник выдает за τ_s секунд цифру «0» или «1» ($L=2$) с равными вероятностями $p(a_k)=0.5$, то $I(a_k)=-\log_2(0.5)=1$ бит.

4. Пусть имеется блок a_k' символов источника из n двоичных цифр $a_k'=(10110100\ ...1)_{1\times n}$. Тогда существует 2^n возможных n- битовых блоков, появляющихся с одинаковыми вероятностями $p(a_k')=2^{-n}$. Средняя собственная информация такого блока равна $I(a_k')=-\log_2(p(a_k'))=-\log_2(2^{-n})=n$ бит.

Зная взаимную информацию (4.1), связанную с парой событий (a_k,b_l), которые являются возможной реализацией двух случайных величин X,Y, можно получить **среднее значение взаимной информации** следующим образом:

$$I(X,Y)=\sum_{k=1}^{L}\sum_{l=1}^{M}p(a_k,b_l)I(a_k,b_l)=\sum_{k=1}^{L}\sum_{l=1}^{M}p(a_k,b_l)\log_2(\frac{p(a_k,b_l)}{p(a_k)p(b_l)})=I(Y,X) \qquad (4.3)$$

Аналогично определяем **среднюю собственную информацию** источника:

$$H(X)=\sum_{k=1}^{L}p(a_k)I(a_k)=-\sum_{k=1}^{L}p(a_k)\log_2(p(a_k)) \qquad (4.4)$$

Выражение (4.4) называют **энтропией** ДИ.

Свойства энтропии ДИ.

1. $H(X)\geq 0$, т.е. энтропия – величина неотрицательная.

2. $H(X)=H_{\max}$, если $p(a_k)=p=\frac{1}{L}, k=1,2,..., L$. Энтропия ДИ максимальна, когда символы на его выходе равновероятны.

$$H_{\max}=-\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{L}\log_2(\frac{1}{L})=\log_2(L) \qquad (4.5)$$

Энтропия является мерой неопределенности источника. Чем больше энтропия, тем больше неопределенность.

3. Энтропия наступления независимых событий $X_1, X_2,..., X_m$:

$$H(X_1,..., X_m) = \sum_{i=1}^{m} H(X_i) \tag{4.6}$$

4. Если сообщения $X_i, i = 1,2,..., m$ зависимы, то вводят понятие условной энтропии:

$$H(X_i / X_{i-1}) = -\sum_{k=1}^{L}\sum_{q=1}^{L} p(a_k, a_q) \log_2 (p(a_k / a_q), \tag{4.7}$$

где $X_i \in \{a_k\}, X_{i-1} \in \{a_q\}$. Формула (4.7) – информационная мера неопределенности, содержащаяся в X_i после наблюдения X_{i-1}. Тогда энтропия совместного наступления событий X_i, X_{i-1} определяется следующим образом:

$$H(X_i, X_{i-1}) = H(X_{i-1}) + H(X_i / X_{i-1}) \tag{4.8}$$

Формулы (4.7) и (4.8) описывают дискретный марковский источник. Оставшаяся или условная неопределенность всегда меньше исходной (безусловной): $H(X_i / X_{i-1}) \le X(X_i)$.

Вывод: Энтропия ДИ тем больше, чем меньше взаимосвязи между символами, чем более равномерно распределены вероятности появления этих символов и чем больше алфавит источника L.

Вопрос 2

2. Фазовая модуляция. Сравнение ФМ и ЧМ.

Фазовая модуляция (ФМ). Сравнение ФМ и ЧМ

При ФМ фаза ВЧ несущего колебания изменяется в соответствии с НЧ модулирующим сигналом.

$$\varphi_{ФМ}(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi U_{нч}(t) = \varphi_0 + M_ф U_{нч}(t), \qquad \textbf{(4.4)}$$

где $\varphi_{ФМ}(t)$- фаза ФМ сигнала, φ_0 - начальная фаза, $M_ф$ - индекс фазовой модуляции.

$\Delta\varphi = \varphi_{макс} - \varphi_0 = \varphi_0 - \varphi_{мин}$ - максимальное отклонение фазы сигнала от начального значения (девиация фазы).Для ФМ :

$$\Delta\varphi = M_ф. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Фазомодулированный сигнал можно представить в виде:

$U_{фм}(t) = U_m \cos[\omega_0 t+\varphi_0+ M_ф U_{нч}(t)] = / U_{нч}(t) = \cos\Omega t/ =$

$U_m \cos[\omega_0 t+\varphi_0+ M_ф \cos\Omega t]$, где $\omega_0 t$ - текущая фаза.

Временные и частотные параметры ФМ сигнала похожи, в первом приближении, на временные и частотные параметры ЧМ сигнала, однако имеется много различий. Наиболее ярко эти различия проявляются, если модулирующий сигнал - двоичный (1,0).

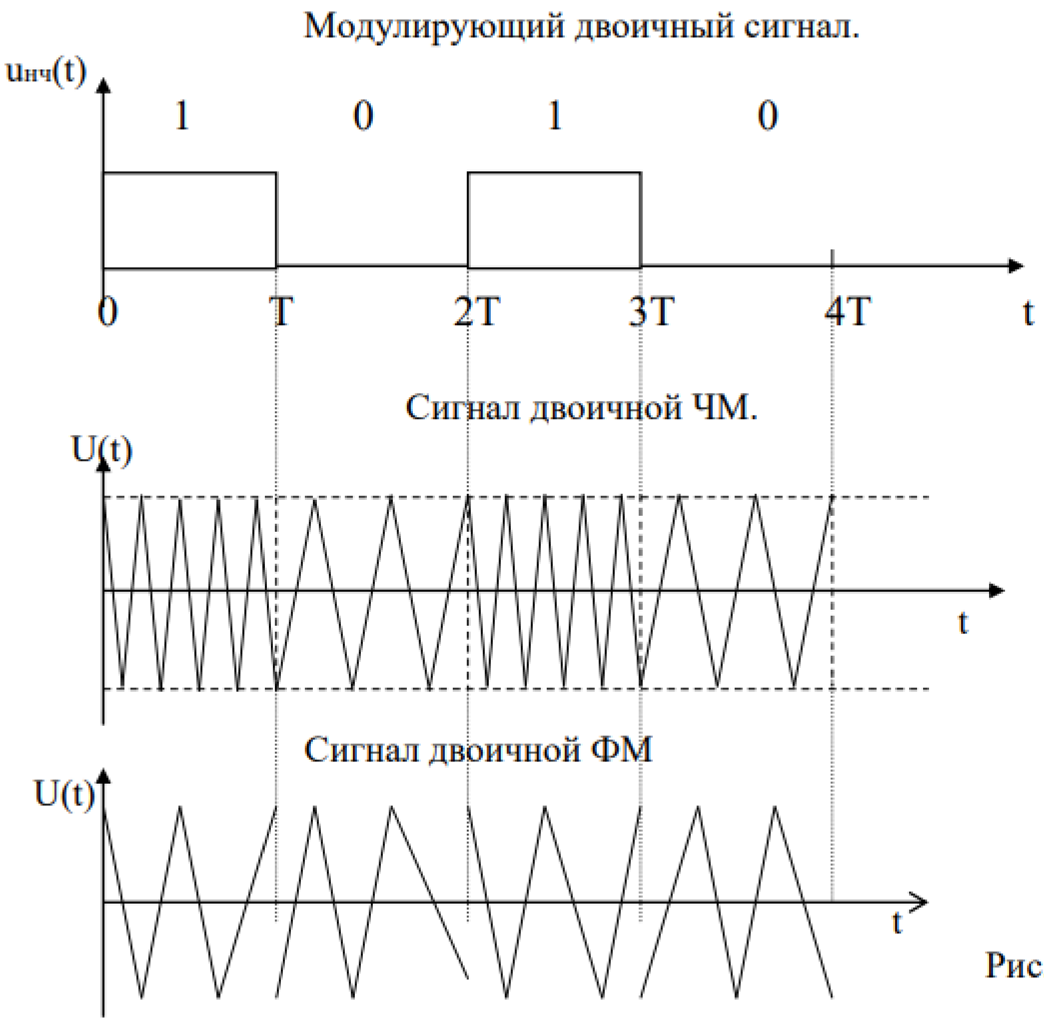


Рис.4.10.

Ширина спектра сигнала ФМ равна:

$$П_{ФМ} \cong 2\Omega(M_Ф +1) \qquad \textbf{(4.6)}$$

При $M_Ф$ <<1 спектр ФМ сигнала напоминает спектр сигнала ЧМ и АМ.

Сигнал ФМ можно сформировать с помощью частотного модулятора. Но на входе частотного модулятора включают дифференцирующее устройство (при аналоговой модуляции). Детектирование сигнала ФМ осуществляется с помощью частотного детектора, но на его выходе включают интегратор.

Структурная схема фазового модема имеет вид:

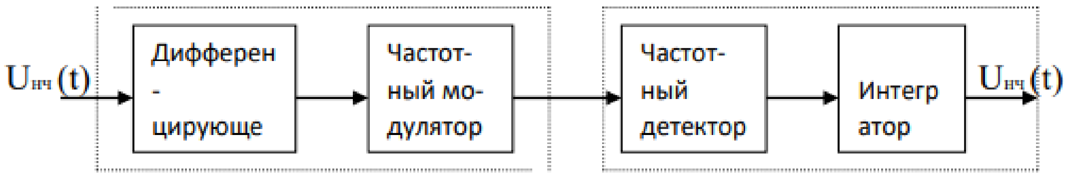


Рис.4.11

На выходе дифференцирующего устройства имеем:

$$U_{диф}(t) = \frac{dU_{нч}(t)}{dt} \qquad \textbf{(4.7)}$$

Частотный модулятор изменяет частоту в соответствии с $U_{диф}(t)$:

$\omega_{чм}(t) = \omega_0 + \Delta\omega U_{диф}(t)$

Фаза выходного сигнала

$$\varphi_{вых}(t) = \int_0^t (\omega_0 + \Delta\omega U_{диф}(t))dt = \omega_0 t + \Delta\omega U_{нч}(t) = \varphi_{фм}(t)$$

Фаза выходного сигнала меняется в соответствии с $U_{нч}(t)$.

Частотный детектор реагирует на частоту, т.е. на выходе ЧД:

$$U_{вых.чд} = A\frac{d\varphi_{фм}(t)}{dt} = \omega_0 + \Delta\omega\frac{dU_{нч}}{dt}$$

На выходе интегратора : $U_{вых\ инт} = \int_0^t U_{вых.чд}\,dt = \omega_0 t + \Delta\omega U_{нч}(t) \Rightarrow U_{нч}(t)$

Фазовый (синхронный) детектор (ФД).

Синхронный детектор (фазовый детектор) позволяет осуществить высококачественное детектирование сигналов АМ, ЧМ и ФМ ; он обеспечивает наилучшее выделение сигнала на фоне помех. Структурная схема ФД имеет вид:

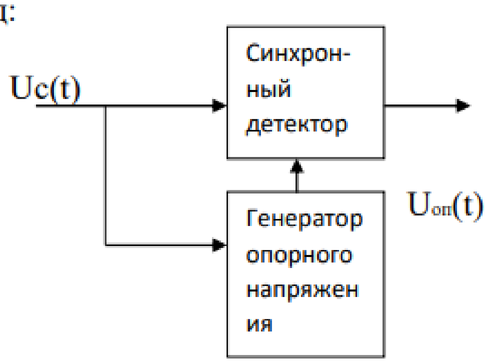


Рис.4.12.

Сигнал (АМ, ЧМ, ФМ): $U_c(t) = U_m(t)\cos[\omega_0 t+\varphi_{чм}(t)+\varphi_{фм}(t)+\varphi_0]$
Опорное напряжение: $U_{оп}(t) = U_m\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$.
У синхронного детектора два входа. На первый вход подается модулированный сигнал, а на второй вход опорное напряжение. Частота опорного напряжения равна центральной частоте сигнала ω_0 - (синхронность), а фаза равна начальной фазе сигнала φ_0 - (синфазность).

Простейшая принципиальная схема ФД имеет вид:

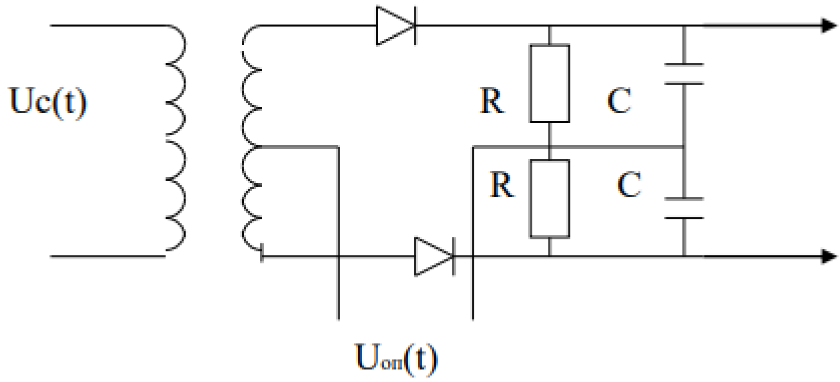


Рис.4.13.

Напряжение на выходе СД равно интегралу от произведения сигнала на опорное напряжение:

$$U_{вых}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T U_c(t)U_{ОП}(t)dt$$

Пусть на входе АМ сигнал:
$U_c(t) = U_{ам}(t) = U(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$

$$U_{вых}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_0)U_m\cos(\omega_0 t+\varphi_0)dt =$$

$$= \frac{U_m U(t)}{T}\int_0^T \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t+2\varphi_0)dt = \frac{U_m U(t)}{2}$$ - получили модулирующий сигнал без искажений (U(t) - практически постоянно на интервале T).

Частотная модуляция (ЧМ) и фазовая модуляция (ФМ) являются двумя основными методами модуляции, используемыми в области связи. Вот краткое сравнение между ними:

1. Основное преобразование:
   a. Частотная модуляция (ЧМ): Частота несущего сигнала изменяется пропорционально изменению информационного сигнала.
   b. Фазовая модуляция (ФМ): Фаза несущего сигнала изменяется пропорционально изменению информационного сигнала.
2. Спектральная ширина:
   a. ЧМ имеет широкий спектральный размах, так как изменение частоты при модуляции происходит непрерывно. Это делает ЧМ более устойчивым к помехам и шумам, поскольку энергия сигнала распределена по большему спектральному диапазону.

   b. ФМ имеет более узкий спектральный размах по сравнению с ЧМ. Изменение фазы сигнала происходит дискретно и не так часто, как изменение частоты. Это означает, что ФМ более устойчива к выбросам и шумам, но менее устойчива к помехам с большой шириной спектра.
3. Использование пространства частот:
   a. ЧМ: Использует пространство частот для передачи информации. Изменение частоты сигнала отображает информацию.
   b. ФМ: Использует пространство фаз для передачи информации. Изменение фазы сигнала отображает информацию.
4. Приложения:
   a. ЧМ: Широко применяется в радио- и телевещании, сотовой связи и спутниковой связи.
   b. ФМ: Часто используется в FM-радиовещании и аудио-сигнализации.

ЗАДАЧА

Задача. Задана корреляционная функция стационарного случайного процесса

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{5}|\tau|, |\tau| \le 5, \\ 0, \textit{иначе} \end{cases}$$

Найти спектральную плотность мощности $G(\omega)$ случайного процесса.

Билет №20

Задача

$$R(\tau)=\begin{cases}1-\frac{1}{5}|\tau|, & |\tau|\le 5\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Найти: $G(\omega)$ - ?

Решение

$$G(\omega)=2\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$$

$$G(\omega)=4\int_0^5\left(1-\frac{1}{5}\tau\right)\cos(\omega\tau)d\tau=-\frac{4}{5}\int_0^5(\tau-5)\cos(\omega\tau)d\tau=$$

$$=-\frac{4}{5}\left(\frac{(\tau-5)\sin(\omega\tau)}{\omega}\Big|_0^5-\int_0^5\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}d\tau\right)=-\frac{4}{5}\left(\frac{(\tau-5)\sin(\omega\tau)}{5\omega}+\frac{\cos(\omega\tau)}{5\omega^2}\Big|_0^5\right)=$$

$$=-\frac{4\cos(5\omega)-4}{5\omega^2}$$