Вариант 22

адача обнаружения сигналов. Байесовский обнаружитель

2.1.1. Постановка задачи обнаружения.

Пусть на вход устройства обнаружения поступает аддитивная смесь: сигнал + шум:

$$y_i = S_i + \eta_i \tag{2.1}$$

i –дискретное время $y_i = y(t_i)$, $S_i = S(t_i)$, $\eta_i = \eta(t_i)$, $t_i = \Delta t i$, Δt - шаг дискретизации, η_i – аддитивный шум , S_i – полезный сигнал, причем, $E\eta_i = 0$, $E{\eta_i}^2 = {\sigma_\eta}^2$, E – оператор математического ожидания.

Задача обнаружения – это задача проверки двух статистических гипотез:

H_1 : на входе приёмника присутствует сигнал в смеси с шумом $y_i = S_i + \eta_i$,

H_0 : на входе приёмника есть только шум $y_i = \eta_i$;

$i=\overline{1;n}$ n-объём выборки. y_1 , y_2 ,…,y_n . Обозначим $\vec{y}_n$ =(y_1 , y_2 ,…,y_n).

Требуется синтезировать оптимальный (по какому-нибудь критерию) алгоритм обработки выборки $\vec{y}_n$ с целью принять решение γ_1- о верности гипотезы H_1 или решение γ_0- о верности гипотезы H_0.

Т. к. полезный сигнал наблюдается в шумах, то при принятии решения неизбежны ошибки. Возможны ошибки двух родов:

1. α- вероятность ложной тревоги. Принимается решение γ_1, в то время как имеет место гипотеза H_0.

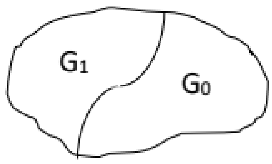
[redacted]

2. β –вероятность пропуска сигнала. Принимается решение γ_0, а на самом деле имеет место гипотеза H_1.

Поставим задачу обнаружения в более абстрактном виде.

Пусть Y – n-мерное пространство, возможных значений вектора $\vec{y}_n$.

Разобьём его на 2 не пересекающиеся области: G_1, G_0.



Будем принимать решение γ_0, если $\vec{y}_n \in G_0$, а решение γ_1, если $\vec{y}_n \in G_1$ =>

$$\alpha = P\{\gamma_1|H_0\} = P\{\vec{y}_n \in G_1|H_0\};$$

$$\beta = P\{\gamma_0|H_1\} = P\{\vec{y}_n \in G_0|H_1\};$$

где $\in$ - оператор принадлежности.

Далее запишем выражение для ошибок α и β через многомерные функции плотности вероятности (ФПВ):

$$\alpha = \int\limits_{G_1} \dots \int \omega(\vec{y}_n|H_0)\, d\vec{y}_n$$
$$\beta = \int\limits_{G_0} \dots \int \omega(\vec{y}_n|H_1)\, d\vec{y}_n \qquad (2.2)$$

где $\omega(\vec{y}_n|H_j)$ – многомерная ФПВ выборки $\vec{y}_n$ при условии H_j $j=\overline{0,1}$.

Обычно её называют <u>функцией правдоподобия.</u>

Пусть $q=P(H_0)$ – априорная вероятность действия гипотезы H_0 => $P = P(H_1) = 1 - q$ - априорная вероятность действия гипотезы H_1. Запишем совместные вероятности действия гипотезы H_k и принятия решения γ_j , $k, j = 0,1$:

$$P(\gamma_0 H_0) = P(H_0)\cdot P(\gamma_0|H_0) = q(1-\alpha)$$
$$P(\gamma_0 H_1) = P(H_1)\cdot P(\gamma_0|H_1) = p\beta$$
$$P(\gamma_1 H_0) = P(H_0)\cdot P(\gamma_1|H_0) = q\alpha$$
$$P(\gamma_1 H_1) = P(H_1)\cdot P(\gamma_1|H_1) = p(1-\beta)$$

Далее будем рассматривать алгоритмы обнаружения, использующие различные критерии качества (оптимальности).

[redacted]

2.1.2. *Байесовский обнаружитель.*

Определим матрицу потерь, задающую плату за решение γ_j, в то время, как имеет место гипотеза H_k, $j=\overline{0,1}$, $k=\overline{0,1}$: $\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{01} \\ \Pi_{10} & \Pi_{11} \end{pmatrix}$, причём $\Pi_{01} > \Pi_{00}$, $\Pi_{10} > \Pi_{11}$. Номера строк в платёжной матрице соответствуют номерам гипотез, а номера столбцов – номерам принимаемых решений.

С помощью матрицы потерь определим понятие среднего риска R:

$$R = \sum_{k=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \Pi_{kj} P(\gamma_j, H_k) \qquad (2.3)$$

В качестве критерия оптимальности возьмём критерий минимума среднего риска:

$$R = R_{min} \qquad (2.4)$$

Перепишем (2.3) в развернутом виде с учетом приведенных в лекции №1 формул для $P(\gamma_j H_k)$:

$$R = \Pi_{00} q(1-\alpha) + \Pi_{11} p(1-\beta) + \Pi_{01} q\alpha + \Pi_{10} p\beta$$

Учитывая, что α=1-(1-α), получим

$$\begin{aligned} R &= \Pi_{00} q(1-\alpha) + \Pi_{11} p - \Pi_{11} p\beta + \Pi_{01} q - \Pi_{01} q(1-\alpha) + \Pi_{10} p\beta \\ &= q(1-\alpha)(\Pi_{00} - \Pi_{01}) - p\beta(\Pi_{11} - \Pi_{10}) + \Pi_{01} q + \Pi_{11} p \end{aligned}$$

Вместо β подставим (2.2), а (1-α)=$\int\limits_{G_0} \ldots \int \omega(\vec{y}_n|\mathrm{H}_0)\, d\vec{y}_n$ Тогда получим

$$R = \Pi_{11}p + \Pi_{01}q + \int\limits_{G_0}\cdots\int [q(\Pi_{00}-\Pi_{01})w(\vec{\mathbf{y}}_\mathbf{n}/H_0) - p(\Pi_{11}-\Pi_{10})w(\vec{\mathbf{y}}_\mathbf{n}/H_1)]\mathbf{d}\vec{\mathbf{y}}_\mathbf{n} \,.$$

$\dfrac{dR}{d\vec{\mathbf{y}}_n} = 0$ => $q(\Pi_{00}-\Pi_{01})w(\vec{\mathbf{y}}_\mathbf{n}/H_0) - (\Pi_{11}-\Pi_{10})w(\vec{\mathbf{y}}_\mathbf{n}/H_1) = 0$. Откуда получим

$$\frac{w(\vec{y}_n|\mathrm{H}_1)}{w(\vec{y}_n|\mathrm{H}_0)} = \frac{q(\Pi_{00}-\Pi_{01})}{p(\Pi_{11}-\Pi_{10})} = C \qquad (2.5)$$

Левая часть формулы (2.5) – отношение правдоподобия, правая часть (2.5) – порог С.

$$\Lambda(\vec{y}_n) = \frac{\omega(\vec{y}_n|\mathrm{H}_1)}{\omega(\vec{y}_n|\mathrm{H}_0)},\ C = \frac{q(\Pi_{00}-\Pi_{01})}{p(\Pi_{11}-\Pi_{10})}. \qquad (2.6)$$

Алгоритм принятия решения состоит в вычислении значения отношения правдоподобия и сравнении его с порогом:

$$\text{Если } \Lambda(\vec{y}_n) \geq \mathrm{C} \Rightarrow \text{ принимается решение } \gamma_1 \qquad (2.7)$$

$$\text{Если } \Lambda(\vec{y}_n) < \mathrm{C} \Rightarrow \text{ принимается решение } \gamma_0$$

Вычисление порога С по формуле (2.6) встречает затруднения, т.к. сложно задать платежную матрицу. Поэтому используют следующие допущения:

Вычисление порога C по формуле (2.6) встречает затруднения, т.к. сложно задать платежную матрицу. Поэтому используют следующие допущения:

а) платы за принятие верных решений полагают равными 0 =>

$$C = \frac{q(\Pi_{01})}{p(\Pi_{10})}$$

б) $\Pi_{01} = \Pi_{10}$ =>

$$C = \frac{q}{p}, \tag{2.8}$$

критерий минимума среднего риска (2.4) становится критерием идеального наблюдателя (или критерием Зигерта -Котельникова); средний риск сводится к средней вероятности ошибки

$$P_{\text{ош}} = P(H_0)P(\gamma_1|H_0) + P(H_1)P(\gamma_0|H_1) = q\alpha + p, \tag{2.9}$$

т.е. $R = R_{min}$ превращается в

$$P_{\text{ош}} = P_{\text{ош}_{min}} \tag{2.10}$$

в) если априорные вероятности q и p равны, тогда систему называют системой с симметричным каналом и

$$C=1 \tag{2.11}$$

<u>Замечание</u>: Полученный алгоритм (2.7) является оптимальным алгоритмом обработки выборки для всех критериев. Различие состоит только в способе нахождения порога C. Как было показано выше оптимальный способ обработки входного воздействия это подстановка $\vec{y}_n$ в $\Lambda(\vec{y}_n)$ и сравнения его с порогом C. Однако, прямое вычисление отношения правдоподобия, как правило, очень неудобно. Для упрощения вычислений применяют теорему Лемана, которая гласит:

если $\Lambda(\vec{y}_n) = \Lambda(\lambda(\vec{y}_n))$, где $\Lambda(\lambda)$ - монотонная функция от λ, то решение можно принимать по $\lambda(\vec{y}_n)$ т.е.

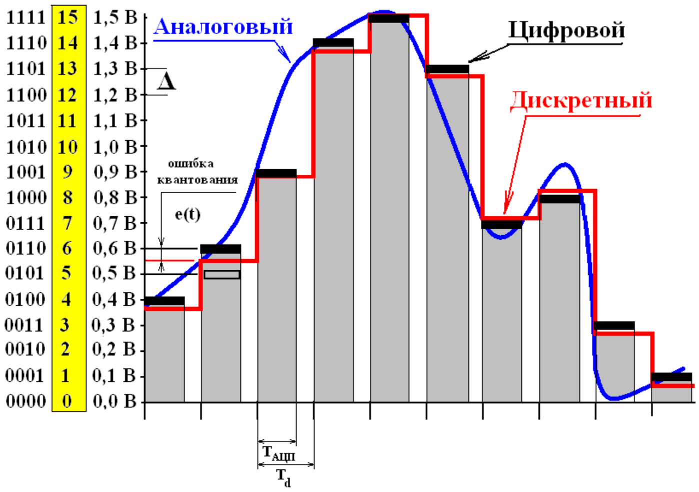
$$\text{если} \quad \lambda(\vec{y}_n) \geq C', \text{ то принимается решение } \gamma_1, \tag{2.12}$$

$$\text{если} \quad \lambda(\vec{y}_n) < C', \text{ то принимается решение } \gamma_0,$$

где C' - пересчитанный порог.

При этом $\Lambda(\vec{y}_n)$ называют <u>достаточной статистикой</u>, а $\lambda(\vec{y}_n)$ <u>минимально достаточной статистикой.</u>

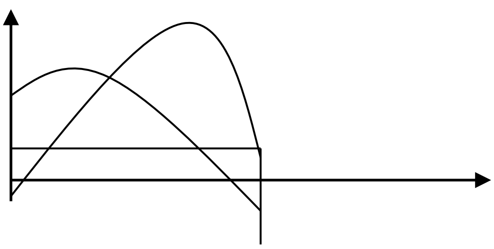
искретизация и восстановление непрерывных сигналов. Теорема Котельникова.



Дискретизация сигнала — замена непрерывного сигнала последовательностью чисел, являющихся представлением этого сигнала по какому-либо базису.

Теорема Котельникова точно справедлива только для сигналов с финитным (конечным) спектром. На рис.3.14 показаны некоторые варианты финитных спектров:

ω) З



$\omega_в$ ω

Однако спектры реальных информационных сигналов бесконечны. В этом случае теорема Котельникова справедлива с погрешностью.

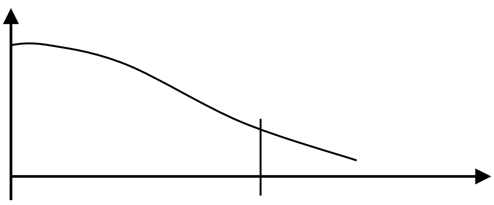
S

x

ω)

$\omega_в$ ω

Рис.3.15.



Погрешность дискретизации определяется энергией спектральных составляющих сигнала, лежащих за пределами частоты $\omega_в$.

$$\overline{\Delta E_\partial^2} = \int_{\omega_в}^{\infty} \left|\dot{S}_x(\omega)\right|^2 d\omega$$

Вторая причина возникновения погрешностей - неидеальность восстанавливающего ФНЧ.

Т.о. погрешность дискретизации и восстановления непрерывного сигнала определяется следующими причинами:

пектры реальных сигналов не финитны.

2) АЧХ реальных ФНЧ неидеальны.

Например, если в качестве ФНЧ использовать RC- фильтр, то восстановленный сигнал на его выходе будет иметь вид:

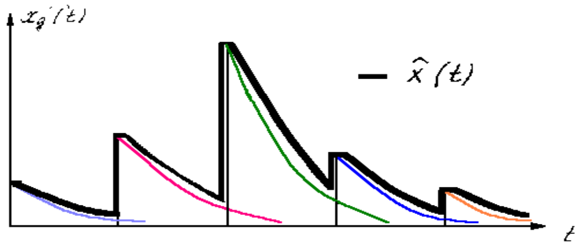


Рис.3.16.

с учетом того, что импульсная реакция RC-фильтра равна: $g_{RC}(t) = \dfrac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$

<u>Вывод</u>: чем выше $\omega_в$ и чем ближе характеристики ФНЧ к идеальным, тем ближе восстановленный сигнал к исходному.

Теорема Котельникова:

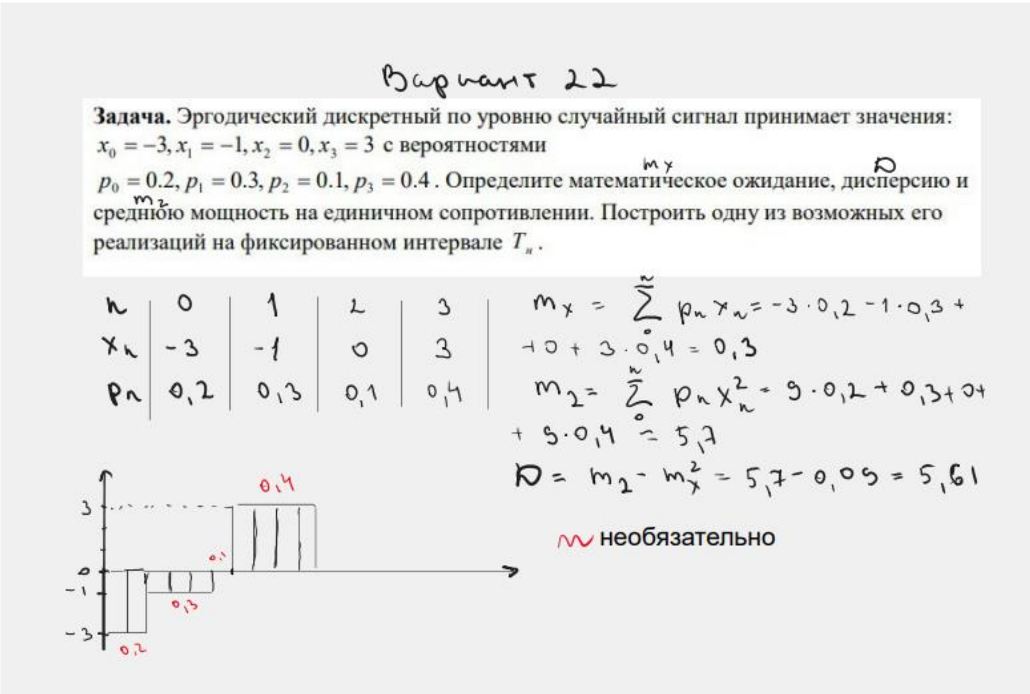
Телекоммуникационные сигналы делятся на непрерывные и дискретные.

Непрерывные сигналы (функции) могут принимать любые, сколь угодно близкие друг к другу значения, в любые моменты времени. Примером непрерывного сигнала является гармоническое колебание.

Дискретные (цифровые) сигналы могут принимать только заранее известные значения, отличающиеся одно от другого на конечную величину, причем изменяться эти значения могут только в определенные моменты времени. Примером дискретного сигнала является (см. рис.2.1) периодическая последовательность прямоугольных импульсов, которая в моменты времени **τ/2** +кТ) принимает значения или 0, или А

Любая непрерывная функция, спектр которой не содержит частот выше $\omega_в$, полностью определяется своими отсчетами, взятыми через интервал времени $\Delta t = \pi / \omega_в$. (Теорема Котельникова)

адача↓↓↓↓↓↓↓



Вариант 22

Задача. Эргодический дискретный по уровню случайный сигнал принимает значения: $x_0 = -3, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 3$ с вероятностями $p_0 = 0.2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.1, p_3 = 0.4$. Определите математическое ожидание, дисперсию и среднюю мощность на единичном сопротивлении. Построить одну из возможных его реализаций на фиксированном интервале $T_н$.

n	0	1	2	3
x_n	-3	-1	0	3
p_n	0,2	0,3	0,1	0,4

$m_x = \sum_0^n p_n x_n = -3 \cdot 0{,}2 - 1 \cdot 0{,}3 + 0 + 3 \cdot 0{,}4 = 0{,}3$

$m_2 = \sum_0^n p_n x_n^2 = 9 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 + 0 + 9 \cdot 0{,}4 = 5{,}7$

$D = m_2 - m_x^2 = 5{,}7 - 0{,}09 = 5{,}61$

необязательно