Вариант 4

Аналоговые сигналы. Разложение сигналов в ряд по ортогональным функциям. Ряд Фурье.

Аналоговый сигнал представляет собой непрерывный поток, с изменяемыми по времени в пределах максимальных значений частотой и амплитудой.
Для описания аналогового сигнала используются три основные характеристики:
1)амплитуда;
2)длина волны;
3)частота.
Аналоговые сигналы представляют физические величины, такие как звуковые волны, электрические напряжения или температура.
Однако аналоговые сигналы могут подвергаться искажениям и потерям качества при передаче или обработке из-за шумов и интерференции. Поэтому в некоторых случаях аналоговые сигналы могут быть преобразованы в цифровой формат для более эффективной обработки и передачи, с помощью ЦАП (Дискретизация-Квантование-Кодирование)

Аналоговый сигнал

1.2. Разложение сигналов в ряд по ортогональным функциям.

1.2.1. Общие положения

Для исследования различных свойств сообщений, сигналов и помех удобно использовать разложение этих процессов в ряды.

Любой процесс (с некоторыми математическими ограничениями) можно представить в виде ряда:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \varphi_k(t) \qquad \textbf{(1.1)}$$

$\varphi_k(t)$ - ортогональные функции, т.е.:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi_k(t)\varphi_n(t)dt = \begin{cases} E_k, k = n \\ 0, k \neq n \end{cases}$$

C_k - коэффициенты разложения, $\boldsymbol{E_k}$ - энергия ортогональных функций.

$$C_k = \frac{1}{E\kappa}\int_{-T}^{T} x(t)\varphi_k(t)dt$$

1.2.2. Ряд Фурье.

Если выбрать в качестве ортогональных функций:

$$\boxed{\varphi_k(t) = \begin{cases} \cos k\Omega t \\ \sin k\Omega t \\ e^{jk\Omega t} \end{cases}}$$

то ряд (1.1) называется рядом Фурье.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t) \qquad \textbf{(1.2)}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \, e^{jk\Omega t} \quad ; \qquad \overset{*}{C}_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\Omega t} dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \cos k\Omega t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \sin k\Omega t dt$$

$\Omega = 2\pi / T$

Ω - частота первой гармоники, определяемая периодом T (T- период функции $\boldsymbol{x}$(t)).

Разложение сигнала в ряд Фурье называется спектром сигнала.

Спектр периодического сигнала – дискретный.

Спектр непрерывного сигнала – сплошной и определяется интегралом Фурье:

$$\mathbf{S(j\omega)} = \int_{-\infty}^{-\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} \, dt$$

Шириной спектра сигнала **П**э называется полоса частот, в пределах которой заключена основная доля энергии сигнала.

роизводительность, информационная насыщенность и избыточность источника информации.

Производительность источника – количество средней собственной информации, вырабатываемое в единицу времени:

$$I'(X) = \frac{H(X)}{T_H} \text{ (бит/с)}, \qquad (4.9)$$

где T_H - интервал наблюдений.

Информационная насыщенность (или информационная плотность) - это мера количества информации, содержащейся в определенной единице данных или сообщения. Она указывает на количество информации, передаваемой или содержащейся в наборе данных.

Информационная насыщенность определяется как

$$I_H(X) = \frac{H(X)}{H_{max}} = \frac{I'(X)}{I'_{max}} \text{. бит or байт и etc.} \qquad (4.10)$$

Если $H(X) \to 0$, то и $I_H(X) \to 0$. Если $H(X) \to H_{max}$, то $I_H(X) \to 1$.

Избыточность источника - указывает на наличие излишней или лишней информации в источнике, которая может быть сжата или удалена без потери существенных деталей или содержания.

Избыточность источника:

$$r(X) = 1 - I_H(X) = 1 - \frac{H(X)}{H_{max}} \text{ .} \qquad (4.11)$$

Формула (4.11) показывает недоиспользованность предельных возможностей источника. Чем больше избыточность, тем меньше насыщенность и тем менее эффективно используется канал связи, по которому передается сообщение.

адача↓↓↓↓↓

Задача. Построить спектр дискретного сигнала $x_д(t) = x(t)\delta_T(t)$, если $\delta_T(t)$ - периодическая с периодом T=0.5 мс последовательность дельта - функций, а непрерывный сигнал имеет спектр

$$S(f) = 1 - 10^{-3}|f|, \qquad |f| \le 1 \text{ кГц}.$$

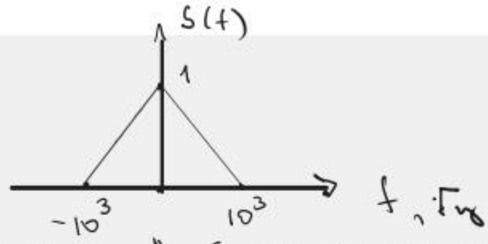
Задача. Построить спектр дискретного сигнала $x_д(t) = x(t)\delta_T(t)$, если $\delta_T(t)$ - периодическая с периодом T=0.5 мс последовательность дельта - функций, а непрерывный сигнал имеет спектр

$$S(f) = 1 - 10^{-3}|f|, \qquad |f| \le 1 \text{ кГц}.$$

Начальный спектр

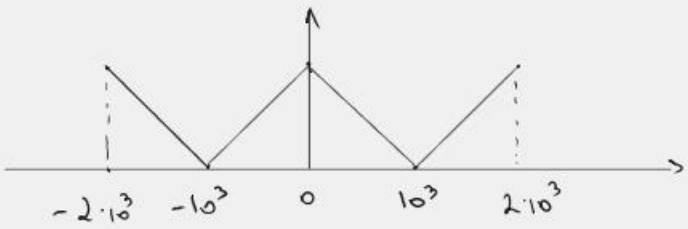
при $f = 0 \rightarrow S(f) = 1$

при $f = 10^3 \rightarrow S(f) = 0$ $\Rightarrow$



$\Delta t = T$

$f_д = \frac{1}{T} = 2 \cdot 10^3$ (следующая „1" будет на такой частоте)



+ Софьино решение

БИЛЕТ 4

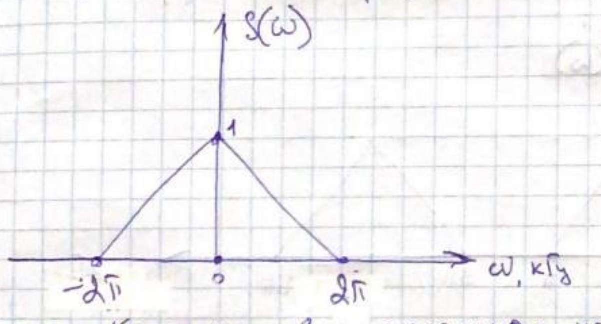
Задача $x_д(t) = x(t)\,б_T(t)$, $б_T$ - периодическая дельта-функция с периодом $T = 0{,}5$ мс

Непрерывный сигнал спектр:

$S(f) = 1 - 10^{-3}|f|$, $|f| \le 1$ кГц

$f = \frac{\omega}{2\pi}$, $\omega = f \cdot 2\pi$

Исходный спектр непрерывного сигнала.



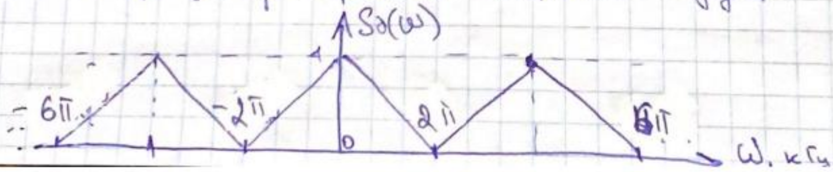
$S(\omega) = 1 - 10^{-3}\left|\frac{\omega}{2\pi}\right| = 1 - \frac{|\omega|}{10^3 \cdot 2\pi}$

$\Delta t = T$

$\omega_в = 2\pi \cdot f_в = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ кГц

$\omega_д = \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$ кГц

по т. Котельникова идеальная частота дискретизатора выбирается исходя из соотношения $\omega_д > \omega_в \cdot 2$, в нашем случае $\omega_д = 2\omega_в$, а значит спектр дискретного сигнала будет:



*ω в рад/с по идее…