ЛЕКЦИЯ №7

1. *Каналы связи.*

1.1. *Математические модели каналов связи.*

Канал связи (К.С.) – физическая среда, которая используется для передачи сигнала от передатчика к приемнику.
Каналы связи: проводные, волоконно-оптические, беспроводные (радио) каналы, подводные акустические каналы, системы хранения информации. Так же в состав канала связи может входить часть устройств передатчика и приемника.

Рассмотрим несколько наиболее часто встречающихся моделей К.С.

I. Канал с аддитивным шумом – самая простая модель канала.

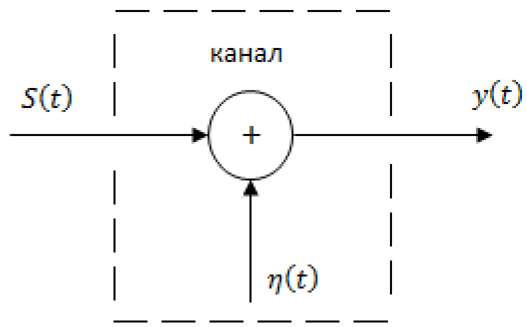


Рисунок 1.1. Структурная схема К.С с аддитивным шумом.

$$y(t) = S(t) + \eta(t) \tag{1.1}$$

Самой распространенной моделью аддитивного шума является гауссовский случайный процесс. Эта модель шума относится к широкому классу физических каналов, является преобладающей моделью при анализе и синтезе систем связи.
Далее перечислим случаи, в которых гауссовский процесс является адекватной моделью реальных шумов.

1) Если шум обусловлен в основном электронными компонентами и усилителями в приемнике, то его можно описать как тепловой шум. Тепловой шум – гауссовский случайный процесс с нулевым средним и энергетическим спектром:

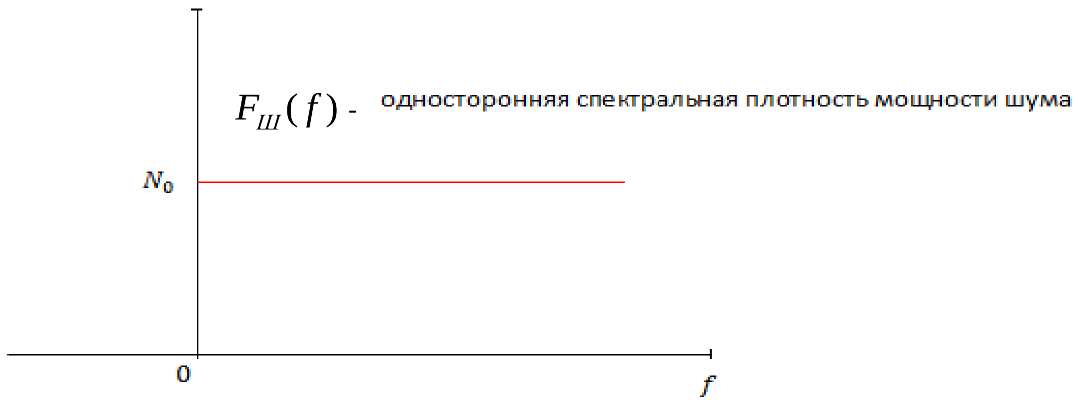
$$G_{ш}(f) = \frac{hf}{2\left[e^{\frac{hf}{kt}} - 1\right]},$$

где $h \cong 6.6 \cdot 10^{-34}$Дж · с – постоянная Планка, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $T -$ температура источника шума, $f -$ частота. В диапазоне звуковых и радиочастот $hf \ll kt \Longrightarrow$

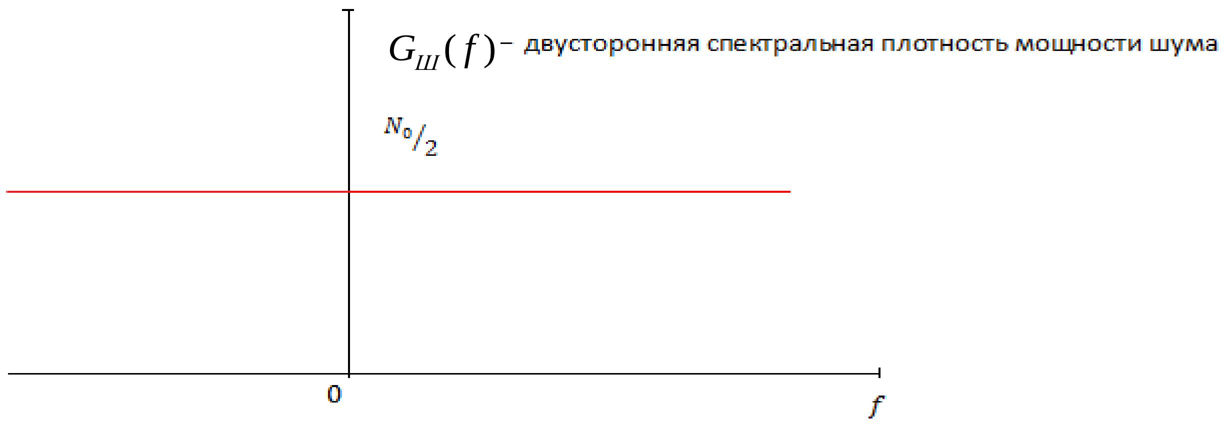
$$\mathrm{G_{ш}(f)} = \frac{\mathrm{kT}}{2} = \frac{\mathrm{N_0}}{2} \tag{1.2}$$

Величину $N_0 = kT$ называют односторонней спектральной плотностью мощности (СПМ) белого шума. Ниже на рисунке 1.2 приведены графики

СПМ: односторонней (физического спектра) и двусторонней (математического спектра).



а)



б)

Рисунок 1.2. Спектральная плотность мощности белого шума.

При ширине полосы пропускания приемника F мощность шума равна

$$P_ш = N_0 F. \tag{1.3}$$

Усложненной моделью I является модель с затуханием сигнала $\longrightarrow y(t) = \alpha S(t) + \eta(t)$, где $\alpha -$ затухание сигнала в канале.

2) Сумма большого числа любых помех от различных источников имеет гауссовский закон распределения.

3) При прохождении помехи через узкополосную систему происходит ее нормализация.

К аддитивным мешающим воздействиям также относятся импульсные помехи и помехи, сосредоточенные по спектру. Импульсные помехи (сосредоточенные по времени) – атмосферные и индустриальные помехи. Они представляют собой случайный процесс, состоящий из отдельных, редких, случайно распределенных во времени и по амплитуде импульсов. Статистические свойства таких помех описываются распределением вероятностей амплитуд импульсов и распределением временных промежутков между этими импульсами.

Сосредоточенные по спектру помехи – сигналы посторонних радиостанций, излучения генераторов высокой частоты. В общем случае это модулированное колебание, т.е. квазигармоническое колебание с изменяющимися параметрами. Ширина спектра такой помехи как правило не превышает полосы пропускания приемника.

II. Канал с аддитивным шумом и мультипликативной помехой

$$y(t) = \mu(t) \cdot S(t) + \eta(t), \tag{1.4}$$

где $\mu(t)$ – мультипликативная помеха.

III. Линейный фильтровой канал

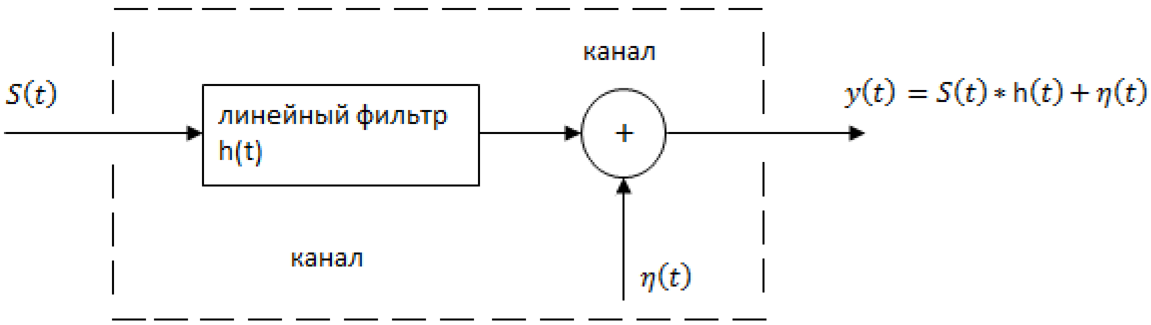


Рисунок 1.3. Структурная схема линейного фильтрового канала с постоянными параметрами.

$*$ – оператор свертки, т.е.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) S(t-\tau) d\tau + \eta(t). \tag{1.5}$$

$h(t)$ – импульсная характеристика фильтра, которая связана с передаточной функцией $k(j\omega)$ преобразованием Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$ – обратное преобразование Фурье.

$$k(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t} dt$$ – прямое преобразование Фурье.

Такие каналы (математические модели) используются в физических каналах (например, телефонные каналы), где фильтры ставятся для того, чтобы гарантировать, что передаваемые сигналы не превышают точно установленные ограничения на ширину полосы и, т.о. не интерферируют друг с другом.

IV. Линейный фильтровой канал с переменными параметрами

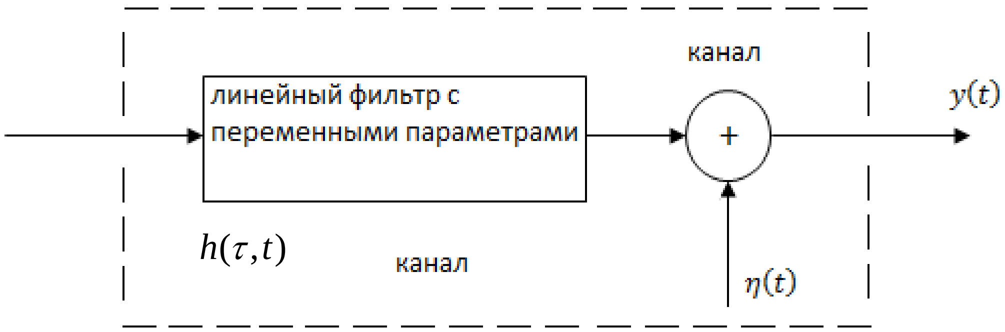


Рисунок 1.4. Структурная схема линейного фильтрового канала с переменными параметрами.

$$y(t) = S(t) * h(\tau,t) + \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau,t)\, S(t-\tau)d\tau + \eta(t) \qquad (1.6)$$

Такой моделью могут быть описаны подвижные акустические и ионосферные радиоканалы, которые возникают в условиях меняющегося во времени многолучевого распространения передаваемого сигнала.
Хорошей моделью для многолучевого распространения волн через физические каналы типа ионосферы ($f < 30$ МГц) и каналы подвижной сотовой связи является:

$$h(\tau,t) = \sum_{k=1}^{L} a_k(t)\delta(\tau - \tau_k), \qquad (1.7)$$

где $a_k(t)$ – меняющиеся во времени коэффициенты затухания для L путей распространения, τ_k – соответствующие им времена задержки $\Longrightarrow$
после подстановки (1.7) в (1.6) получим выражение

$$y(t) = \sum_{k=1}^{L} a_k(t)S(t - \tau_k) + \eta(t) \qquad (1.8)$$

1.2. *Характеристики каналов связи.*

Канал связи может быть:

1. Непрерывным,
2. Дискретно – непрерывным,
3. Непрерывно – дискретным,
4. Дискретным.

Обобщенной характеристикой непрерывного канала является его емкость (объем):

$$V_k = T_k \cdot F_k \cdot H_k\ , \qquad (1.9)$$

где T_k – время, в течение которого по каналу ведется передача, F_k – полоса пропускания канала, H_k – динамический диапазон,

$$H_k = 10lg\left(\frac{P_{\text{доп.сигн}}}{P_{\text{помехи}}}\right), \qquad (1.10)$$

$P_{\text{доп.сигн}} -$ допустимая мощность передаваемого сигнала, $P_{помехи} = \sigma_\eta^2$ мощность помехи.

Необходимое условие неискаженной передачи сигнала с объемом V_c по каналу:

$$V_c \le V_k, \qquad (1.11)$$

где $V_c -$ объем сигнала,

$$V_c = T_c \cdot F_c \cdot H_c\ , \qquad (1.12)$$

$T_c -$ длительность сигнала, $F_c -$ ширина спектра сигнала, $H_c -$ динамический диапазон сигнала.

$$H_c = 10lg\left(\frac{P_{\text{мгн.}max\ \text{сигн}}}{P_0}\right), \qquad (1.13)$$

$P_{\text{мгн.}max\ \text{сигн}} -$ наибольшая мгновенная мощность сигнала, $P_0 -$ наименьшая мощность, которую необходимо отличить от “0” при заданном качестве передачи.

2. Оптимальный прием сигналов.

2.1. *Задача обнаружения сигналов.*

2.1.1. *<u>Постановка задачи обнаружения.</u>*

Пусть на вход устройства обнаружения поступает аддитивная смесь: сигнал + шум:

$$y_i = S_i + \eta_i \qquad (2.1)$$

i –дискретное время $y_i = y(t_i)$, $S_i = S(t_i)$, $\eta_i = \eta(t_i)$, $t_i = \Delta t i$, Δt - шаг дискретизации, $\eta_i -$ аддитивный шум , $S_i -$ полезный сигнал, причем, $\mathrm{E}\eta_i = 0$, $\mathrm{E}{\eta_i}^2 = {\sigma_\eta}^2$, E – оператор математического ожидания.

Задача обнаружения – это задача проверки двух статистических гипотез:

H_1 : на входе приёмника присутствует сигнал в смеси с шумом $y_i = S_i + \eta_i$,

H_0 : на входе приёмника есть только шум $y_i = \eta_i$;

$i=\overline{1;n}$ n-объём выборки. y_1 , y_2 ,…,y_n . Обозначим $\vec{y}_n$ =(y_1 , y_2 ,…,y_n).

Требуется синтезировать оптимальный (по какому-нибудь критерию) алгоритм обработки выборки $\vec{y}_n$ с целью принять решение γ_1- о верности гипотезы H_1 или решение γ_0- о верности гипотезы H_0.

Т. к. полезный сигнал наблюдается в шумах, то при принятии решения неизбежны ошибки. Возможны ошибки двух родов:

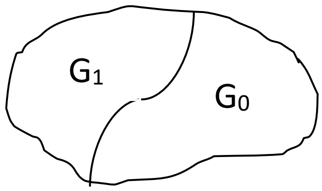
1. α- вероятность ложной тревоги. Принимается решение γ_1, в то время как имеет место гипотеза H_0.

2. β –вероятность пропуска сигнала. Принимается решение γ_0, а на самом деле имеет место гипотеза H_1.

Поставим задачу обнаружения в более абстрактном виде.

Пусть Y – n-мерное пространство, возможных значений вектора $\vec{y}_n$.

Разобьём его на 2 не пересекающиеся области: G_1, G_0.



Будем принимать решение γ_0, если $\vec{y}_n \in G_0$, а решение γ_1, если $\vec{y}_n \in G_1$ =>

$$\alpha = P\{\gamma_1|H_0\} = P\{\vec{y}_n \in G_1|H_0\};$$

$$\beta = P\{\gamma_0|H_1\} = P\{\vec{y}_n \in G_0|H_1\};$$

где $\in$ - оператор принадлежности.

Далее запишем выражение для ошибок α и β через многомерные функции плотности вероятности (ФПВ):

$$\alpha = \underset{G_1}{\int\dots\int} \omega(\vec{y}_n|H_0)\, d\vec{y}_n$$
$$\beta = \underset{G_0}{\int\dots\int} \omega(\vec{y}_n|H_1)\, d\vec{y}_n \qquad (2.2)$$

где $\omega(\vec{y}_n|H_j)$ – многомерная ФПВ выборки $\vec{y}_n$ при условии H_j $j=\overline{0,1}$.

Обычно её называют <u>функцией правдоподобия.</u>

Пусть $q=P(H_0)$ – априорная вероятность действия гипотезы H_0 => $P = P(H_1) = 1 - q$ - априорная вероятность действия гипотезы H_1. Запишем совместные вероятности действия гипотезы H_k и принятия решения γ_j , $k, j = 0,1$:

$$P(\gamma_0 H_0) = P(H_0) \cdot P(\gamma_0|H_0) = q(1-\alpha)$$
$$P(\gamma_0 H_1) = P(H_1) \cdot P(\gamma_0|H_1) = p\beta$$
$$P(\gamma_1 H_0) = P(H_0) \cdot P(\gamma_1|H_0) = q\alpha$$
$$P(\gamma_1 H_1) = P(H_1) \cdot P(\gamma_1|H_1) = p(1-\beta)$$

Далее будем рассматривать алгоритмы обнаружения, использующие различные критерии качества (оптимальности).

2.1.2. *Байесовский обнаружитель.*

Определим матрицу потерь, задающую плату за решение γ_j, в то время, как имеет место гипотеза H_k, j=$\overline{0,1}$, k=$\overline{0,1}$: $\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{01} \\ \Pi_{10} & \Pi_{11} \end{pmatrix}$, причём $\Pi_{01} > \Pi_{00}$, $\Pi_{10} > \Pi_{11}$. Номера строк в платёжной матрице соответствуют номерам гипотез, а номера столбцов – номерам принимаемых решений.
С помощью матрицы потерь определим понятие среднего риска R:

$$R = \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\Pi_{kj}P(\gamma_j, H_k) \qquad (2.3)$$

В качестве критерия оптимальности возьмём критерий минимума среднего риска:

$$R = R_{min} \qquad (2.4)$$

Перепишем (2.3) в развернутом виде с учетом приведенных в лекции №1 формул для $P(\gamma_j H_k)$:

$$R = \Pi_{00}q(1-\alpha) + \Pi_{11}p(1-\beta) + \Pi_{01}q\alpha + \Pi_{10}p\beta$$

Учитывая, что α=1-(1-α), получим

$$\begin{aligned} R &= \Pi_{00}q(1-\alpha) + \Pi_{11}p - \Pi_{11}p\beta + \Pi_{01}q - \Pi_{01}q(1-\alpha) + \Pi_{10}p\beta \\ &= q(1-\alpha)(\Pi_{00} - \Pi_{01}) - p\beta(\Pi_{11} - \Pi_{10}) + \Pi_{01}q + \Pi_{11}p \end{aligned}$$

Вместо β подставим (2.2), а (1-α)=$\int\limits_{G_0} \dots \int \omega(\vec{\mathrm{y}}_n|\mathrm{H}_0)\, d\vec{\mathrm{y}}_n$ Тогда получим

$$R = \Pi_{11}p + \Pi_{01}q + \int\limits_{G_0}\cdots\int [q(\Pi_{00} - \Pi_{01})w(\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}} / H_0) - p(\Pi_{11} - \Pi_{10})w(\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}} / H_1)]\mathbf{d}\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}} .$$

$\frac{dR}{d\mathbf{y}_n} = 0$ => $q(\Pi_{00} - \Pi_{01})w(\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}} / H_0) - (\Pi_{11} - \Pi_{10})w(\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}} / H_1) = 0$. Откуда получим

$$\frac{w(\vec{\mathrm{y}}_n|\mathrm{H}_1)}{w(\vec{\mathrm{y}}_n|\mathrm{H}_0)} = \frac{q(\Pi_{00}-\Pi_{01})}{p(\Pi_{11}-\Pi_{10})} = C \qquad (2.5)$$

Левая часть формулы (2.5) – <u>отношение правдоподобия</u>, правая часть (2.5) – порог C.

$$\Lambda(\vec{\mathrm{y}}_n) = \frac{\omega(\vec{\mathrm{y}}_n|\mathrm{H}_1)}{\omega(\vec{\mathrm{y}}_n|\mathrm{H}_0)},\ C = \frac{q(\Pi_{00}-\Pi_{01})}{p(\Pi_{11}-\Pi_{10})}. \qquad (2.6)$$

Алгоритм принятия решения состоит в вычислении значения отношения правдоподобия и сравнении его с порогом:

$$\text{Если } \Lambda(\vec{y}_n) \geq \mathrm{C} => \text{ принимается решение } \gamma_1 \tag{2.7}$$

$$\text{Если } \Lambda(\vec{y}_n) < \mathrm{C} => \text{ принимается решение } \gamma_0$$

Вычисление порога С по формуле (2.6) встречает затруднения, т.к. сложно задать платежную матрицу. Поэтому используют следующие допущения:

а) платы за принятие верных решений полагают равными 0 =>

$$C = \frac{q(\Pi_{01})}{p(\Pi_{10})}$$

б) $\Pi_{01} = \Pi_{10} \quad =>$

$$C = \frac{q}{p}, \tag{2.8}$$

критерий минимума среднего риска (2.4) становится критерием идеального наблюдателя (или критерием Зигерта -Котельникова); средний риск сводится к средней вероятности ошибки

$$P_{\text{ош}} = P(H_0)P(\gamma_1|H_0) + P(H_1)P(\gamma_0|H_1) = q\alpha + p, \tag{2.9}$$

т.е. $R = R_{min}$ превращается в

$$P_{\text{ош}} = P_{\text{ош}_{min}} \tag{2.10}$$

в) если априорные вероятности q и p равны, тогда систему называют системой с симметричным каналом и

$$\mathrm{C}=1 \tag{2.11}$$

<u>Замечание</u>: Полученный алгоритм (2.7) является оптимальным алгоритмом обработки выборки для всех критериев. Различие состоит только в способе нахождения порога С. Как было показано выше оптимальный способ обработки входного воздействия это подстановка $\vec{y}_n$ в $\Lambda(\vec{y}_n)$ и сравнения его с порогом С. Однако, прямое вычисление отношения правдоподобия, как правило, очень неудобно. Для упрощения вычислений применяют теорему Лемана, которая гласит:

если $\Lambda(\vec{y}_n) = \Lambda(\lambda(\vec{y}_n))$, где $\Lambda(\lambda)$ - монотонная функция от λ, то решение можно принимать по $\lambda(\vec{y}_n)$ т.е.

$$\text{если} \quad \lambda(\vec{y}_n) \geq C', \text{ то принимается решение } \gamma_1 , \tag{2.12}$$

если $\lambda(\vec{y}_n) < C'$, то принимается решение γ_0 ,

где C' - пересчитанный порог.

При этом $\Lambda(\vec{\mathrm{y}}_n)$ называют достаточной статистикой, а $\lambda(\vec{\mathrm{y}}_n)$ минимально достаточной статистикой.

2.1.3. Обнаружение детерминированных сигналов на фоне аддитивного ГБШ.

Пусть $\eta_i \sim N(0, \sigma_\eta^2)$- ГБШ. Мгновенные значения такой помехи распределены по гаусовскому закону $w_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_\eta^2}}$, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_η^2. Отсчёты такой помехи независимы, спектральная плотность мощности равномерна. Тогда функция правдоподобия факторизуется:

$$w(\vec{\mathbf{y}}_n|\mathrm{H}_k) = \prod_{i=1}^{n} w(y_i|\mathrm{H}_k),\ \mathrm{k}=\overline{0;1}$$

Мгновенные значения входного воздействия при гипотезе H_0 распределены по закону: $w(y_i|\mathrm{H}_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\frac{-y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}$, при гипотезе H_1:

$$w(y_i|\mathrm{H}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\frac{-(y_i-S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}} \quad =>$$

$$w(\vec{\mathbf{y}}_n|\mathrm{H}_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{-y_i^2}{2\sigma_\eta^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}$$

$$w(\vec{\mathbf{y}}_n|\mathrm{H}_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{-(y_i-S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} (y_i-S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}} \quad =>$$

$$\Lambda(\vec{\mathbf{y}}_n) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}(y_i-S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}} = \frac{e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}(y_i-S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}}}{e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}} = e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - y_i^2 + 2y_iS_i - S_i^2)}{2\sigma_\eta^2}} =$$

$$e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_iS_i - \frac{S_i^2}{2}\right)}{\sigma_\eta^2}} \quad => \ln \Lambda(\vec{\mathbf{y}}_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_iS_i - \frac{S_i^2}{2}\right)}{\sigma_\eta^2} = \ln C \quad =>$$

$\frac{1}{\sigma_\eta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i S_i = \ln C + \frac{1}{\sigma_\eta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{{S_i}^2}{2}$ или $\sum_{i=1}^{n} y_i S_i = \sigma_\eta^2 \ln C + \sum_{i=1}^{n}\frac{{S_i}^2}{2}$.

Тогда получим алгоритм обнаружения:

$$\text{если } \sum_{i=1}^{n} y_i S_i \geq \mathrm{C}' \Rightarrow \gamma_1 \qquad (2.13)$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^{n} y_i S_i < \mathrm{C}' \Rightarrow \gamma_0$$

$\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{n} {S_i}^2$ - энергия сигнала =>

$$C' = \sigma_\eta^2 \ln C + \frac{E}{2} \qquad (2.14)$$

Формулы (2.13) и (2.14)- обработка дискретного детерминированного сигнала на фоне ГБШ.

Если обработке подвергается непрерывный сигнал y(t), то сумма заменяется интегралом: $\lambda\big(y(t)\big) = \int_0^T y(t)\, S(t) dt$ - корреляционный интеграл, T-длительность сигнала C' находится по (2.14), где E=$\int_0^T S(t)^2\, dt$ =>

$$\text{Если } \lambda\big(y(t)\big) \geq \mathrm{C}' \Rightarrow \gamma_1\,, \qquad (2.15)$$

$$\text{если } \lambda\big(y(t)\big) < \mathrm{C}' \Rightarrow \gamma_0$$

Т. о. получили корреляционную обработку сигнала в непрерывном времени.

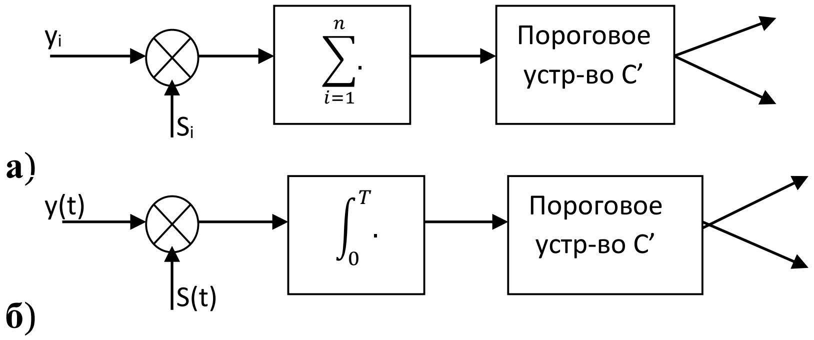
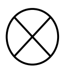


Рисунок 2.1. Корреляционная обработка детерминированного дискретного сигнала (а), непрерывного сигнала (б) на фоне ГБШ.

 - умножитель