Если имеются две произвольные комплексные функции f(x) и g(x), то выполняется соотношение:

$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot g(x)dx\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx$, причем знак «=» имеет место, если $g(x) = C_0 f(x)$, где C_0=const, «*» знак сопряжения.

Тогда, полагая:

$$f^*(x) = \frac{S(j\omega)e^{j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_\eta(\omega)}}\ , \qquad g(x) = K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)},$$

и учитывая

$\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot g(x)dx\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx} \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$, имеем

$$\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(j\omega)e^{j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_\eta(\omega)}}\cdot K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)d\omega}\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)}\right|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}G_\eta(\omega)|K(j\omega)|^2\,d\omega}q_{\text{в}}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(j\omega)|^2}{G_\eta(\omega)}d\omega\ ,$$

$q_{\text{в}max}$ определяется правой частью данного выражения

$$=> \qquad q_{\text{в}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(j\omega)|^2}{G_\eta(\omega)}d\omega \tag{2.19}$$

и $q_{\text{в}} = q_{\text{в}max}$, если $K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)} = C_0\cdot\frac{S^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_\eta(\omega)}}$ =>

$$K(j\omega) = const\cdot\frac{S^*(j\omega)}{G_\eta(\omega)}\cdot e^{-j\omega t_0} \tag{2.20}$$

2.20 – оптимальная КЧХ фильтра, 2.19 – макс. отношение сигнал/шум на выходе фильтра для произвольной стационарной помехи со спектральной плотностью мощности $G_\eta(\omega)$. Такая обработка оказывается не является оптимальной. Однако, она оптимальна , если $\eta(t)$ – гауссовский шум со спектральной плотностью мощности $G_\eta(\omega) = \frac{N_0}{2}$. В этом случае оптимальный фильтр называется согласованным.

Согласованный фильтр – линейный фильтр, на выходе которого получается максимально возможное пиковое отношение сигнал/шум при приёме полностью известного сигнала на фоне БГШ.