

1. Оптимальный прием сигналов. Согласованный фильтр

В отличие от линейных фильтров, предназначенных для оптимальной фильтрации случайных сигналов, согласованный фильтр применяется при обнаружении и различении детерминированных сигналов.

Критерий оптимальности согласованного фильтра:

$$q_{\text{в}} = q_{\text{вmax}}$$

т. е. на выходе согласованного фильтра должно реализоваться максимальное отношение сигнал/шум.

Вывод КЧХ и импульсной характеристики $h(t)$ согласованного фильтра:

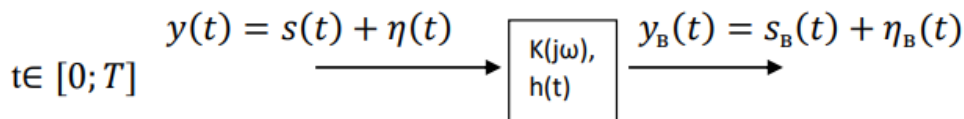


Рисунок 2.2. К выводу характеристик С.Ф.

$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$ - спектр входного сигнала $S(t)$

$S_{\text{в}}(j\omega) = S(j\omega)K(j\omega)$ - спектр сигнала на выходе фильтра

$$s_{\text{в}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{в}}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$G_{\eta_{\text{в}}}(\omega) = G_{\eta}(\omega)|K(j\omega)|^2$ – спектральная плотность мощности шума на выходе фильтра, $G_{\eta}(\omega)$ - спектральная плотность мощности шума на входе фильтра.

Тогда мощность шума на выходе фильтра равна

$$\sigma_{\eta_{\text{в}}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\eta}(\omega)|K(j\omega)|^2 d\omega$$

$$q_{\text{с}} = \frac{|s_{\text{с}}(t_0)|^2}{\sigma_{\eta_{\text{с}}}^2} = \frac{\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} G_{\eta}(\omega)|K(j\omega)|^2 d\omega}, \text{ где } t_0 - \text{некоторый момент}$$

времени, $q_{\text{в}}$ – отношение сигнал/шум по мощности на выходе фильтра в момент времени t_0 .

Неравенство Шварца-Буняковского:

Если имеются две произвольные комплексные функции $f(x)$ и $g(x)$, то выполняется соотношение:

$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \cdot g(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx$, причем знак « \Rightarrow » имеет место, если $g(x) = C_0 f(x)$, где $C_0 = \text{const}$, « $*$ » знак сопряжения.

Тогда, полагая:

$$f^*(x) = \frac{S(j\omega)e^{j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_{\eta}(\omega)}}, \quad g(x) = K(j\omega) \cdot \sqrt{G_{\eta}(\omega)},$$

и учитывая

$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \cdot g(x) dx \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \text{ имеем}$$

$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(j\omega)e^{j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_{\eta}(\omega)}} \cdot K(j\omega) \cdot \sqrt{G_{\eta}(\omega)} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \left| K(j\omega) \cdot \sqrt{G_{\eta}(\omega)} \right|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} G_{\eta}(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega} q_{\text{в}}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{G_{\eta}(\omega)} d\omega,$$

$q_{\text{вmax}}$ определяется правой частью данного выражения

$$\Rightarrow q_{\text{в}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{G_{\eta}(\omega)} d\omega \quad (2.19)$$

$$\text{и } q_{\text{в}} = q_{\text{вmax}}, \text{ если } K(j\omega) \cdot \sqrt{G_{\eta}(\omega)} = C_0 \cdot \frac{S^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_{\eta}(\omega)}} \Rightarrow$$

$$K(j\omega) = \text{const} \cdot \frac{S^*(j\omega)}{G_{\eta}(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0} \quad (2.20)$$

2.20 – оптимальная КЧХ фильтра, 2.19 – макс. отношение сигнал/шум на выходе фильтра для произвольной стационарной помехи со спектральной плотностью мощности $G_{\eta}(\omega)$. Такая обработка оказывается не является оптимальной. Однако, она оптимальна, если $\eta(t)$ – гауссовский шум со спектральной плотностью мощности $G_{\eta}(\omega) = \frac{N_0}{2}$. В этом случае оптимальный фильтр называется согласованным.

Согласованный фильтр – линейный фильтр, на выходе которого получается максимально возможное пиковое отношение сигнал/шум при приёме полностью известного сигнала на фоне БГШ.

$$q_B = \frac{2E}{N_0}$$

(2.20) преобразуется в

$$K(j\omega) = \text{const} \cdot S^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

Т.о. АЧХ согласованного фильтра ~ амплитудному спектру сигнала, а ФЧХ равна сумме фазового спектра сигнала, взятого с обратным знаком, и фазового спектра задержки:

$$\varphi(\omega) = -\varphi_c(\omega) - \omega t_0$$

Вывод импульсной характеристики С.Ф.

Импульсная характеристика согласованного фильтра определяется, как обратное преобразование Фурье от КЧХ (2.22):

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\text{const}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{\text{const}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(-j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega, \text{ так как } S^*(j\omega) = S(-j\omega)$$

Пусть $\omega_1 = -\omega \Rightarrow d\omega = -d\omega_1 \Rightarrow$

$$h(t) = -\frac{\text{const}}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} S(j\omega_1) e^{j\omega_1(t_0-t)} d\omega_1 = \frac{\text{const}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega_1) e^{j\omega_1(t_0-t)} d\omega_1 = \text{const} \cdot S(t_0 - t).$$

Т.о. импульсная характеристика согласованного фильтра целиком определяется формой сигнала (согласована с сигналом):

$$h(t) = \text{const} \cdot S(t_0 - t) \quad (2.24)$$

Пример 1. Фильтр, согласованный с видео импульсом.

$$S(t) = \begin{cases} U, \text{ если } t \in [0; T] \\ 0, \text{ если } t < 0; t > T \end{cases}$$

T – длительность импульса

$$h(t) = S(T - t) \Rightarrow$$

$$y_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$h(t - \tau) = \text{const} S(T - t + \tau) \Rightarrow$$

$$y_B(t) = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) S(T - t + \tau) d\tau = B_{SS}(T - t)$$

где $B_{SS}(T - t)$ – функция автокорреляции входного сигнала.



$$\text{Спектр видеоимпульса: } S(j\omega) = U \int_0^T e^{-j\omega t} dt = \frac{U e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_0^T = \frac{U}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}).$$

По формуле (2.22) при $t_0 = T$ получим:

$$K(j\omega) = \text{const} \frac{U}{-j\omega} (1 - e^{j\omega T}) e^{-j\omega t} = \text{const} \frac{U}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}).$$

Тогда функциональная схема, согласованного с видео импульсом, фильтра имеет вид, показанный на рисунке 2.2. На рисунке 2.3. изображены этапы формирования сигнала на выходе С.Ф.

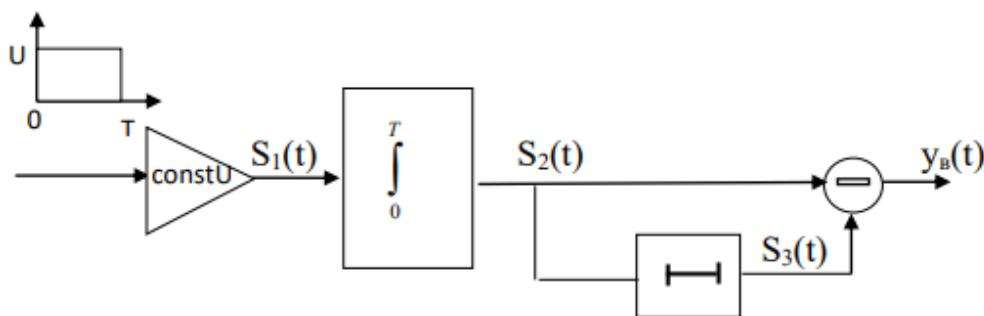


Рисунок 2.2. Структурная схема СФ с видеоимпульсом.

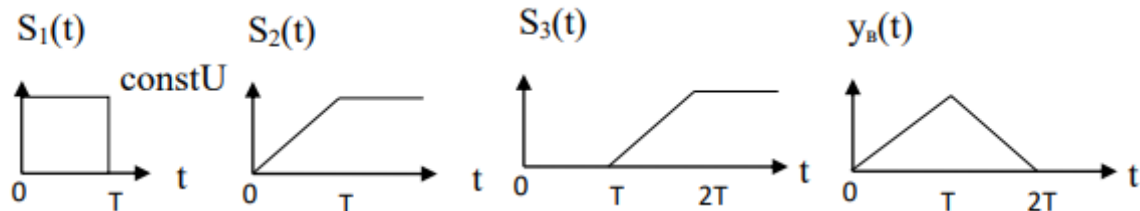
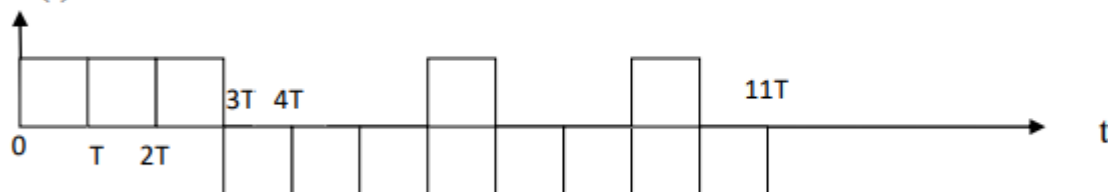


Рисунок 2.3. Формирование сигнала на выходе фильтра, согласованного с видеоимпульсом.

Пример 2. Фильтр, согласованный с кодом Баркера.

Код Баркера: 1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1

$S(t)$



Формирование сигнала на выходе фильтра:

$$y_B(t) = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) S(T_c - t + \tau) d\tau \quad \xrightarrow{\text{Дискр время}}$$

$$\rightarrow \text{const} \sum_{k=1}^n S_k \cdot S_{k-i+n} = y_i; n=11$$

Пусть $\text{const}=1 \Rightarrow$

$$i = 0 \Rightarrow y_0 = S_1 S_{12} = 0$$

$$i = 1 \Rightarrow y_1 = S_1 S_{11} + S_2 S_{12} = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i = 2 \Rightarrow y_2 = S_1 S_{10} + S_2 S_{11} + S_3 S_{12} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$$

и т. д.

В результате получим:

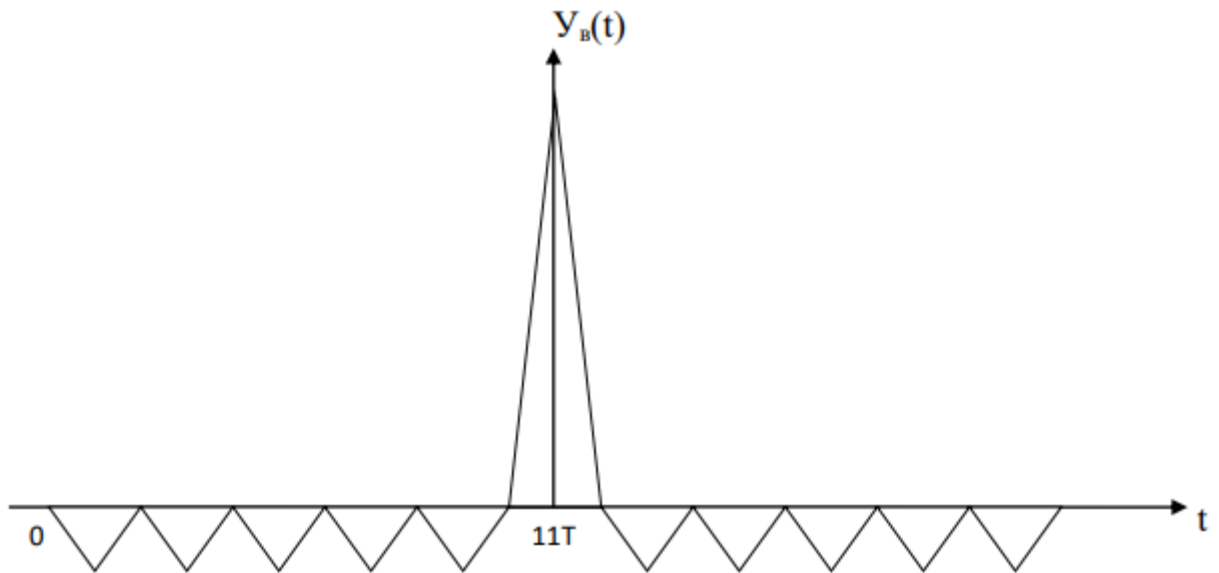


Рисунок 2.4. Сигнал на выходе фильтра, согласованного с кодом Баркера.

Импульсная характеристика – зеркальное отображение кода Баркера:

-1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 1

На рисунке 2.5 показана структура фильтра, согласованного с кодом Баркера.

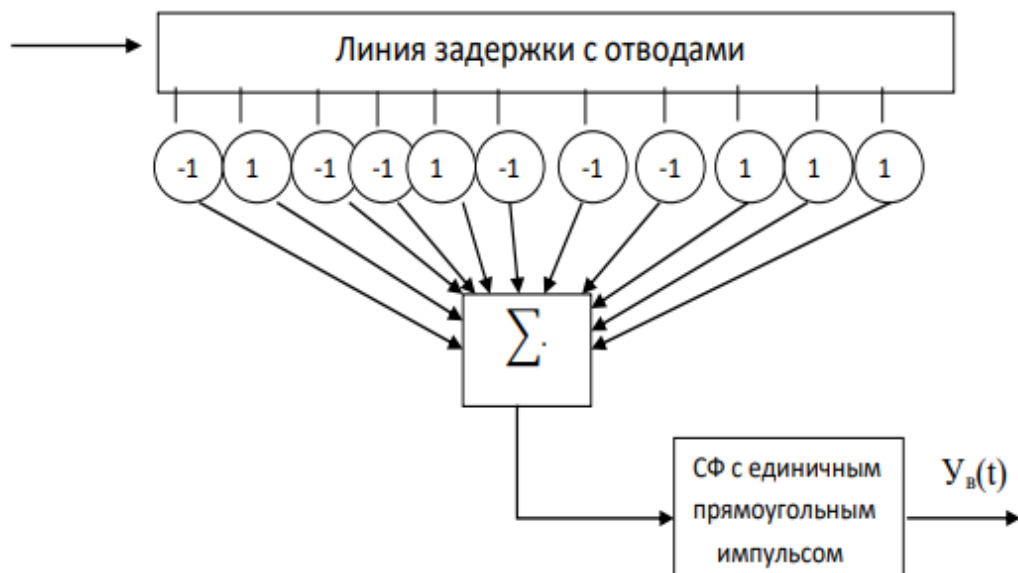


Рисунок 2.5. Структурная схема фильтра, согласованного с кодом Баркера.

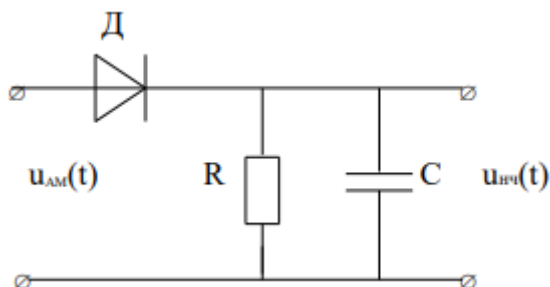
Если $y_{\text{вход}}(t) = S(t) + \eta(t) \Rightarrow y_{\text{в}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{\text{вход}}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau =$
 $A \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot S(t_0 - t + \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) \cdot S(t_0 - t + \tau) d\tau = AB_{ss}(t_0 - t) +$
 $AB_{\eta s}(t_0 - t), \text{ где } A = \text{const}.$

$B_{ss}()$ – автокорреляционная функция входного сигнала, $B_{\eta s}()$ – взаимная корреляционная функция сигнала и шума.

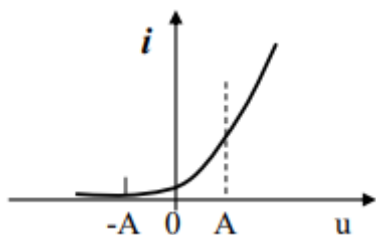
2. Детектирование сигналов АМ. Диодный детектор. Квадратичный детектор.

Диодный детектор сигналов АМ

Детектор сигналов АМ предназначен для того, чтобы из ВЧ АМ сигнала получить НЧ модулирующий сигнал. Схема простейшего амплитудного диодного детектора показана на рис.



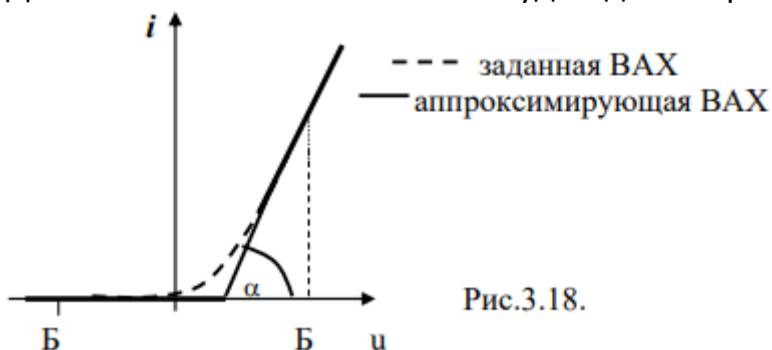
Назначение нелинейного элемента, диода – преобразование ВЧ АМ сигнала, его нелинейное преобразование с целью создания нужных нам низких, модулирующих частот. Назначение линейной цепи, т.е. RC фильтра нижних частот (ФНЧ), выделение низкой частоты, т.е. выделение спектра модулирующего сигнала. Вольтамперная характеристика ВАХ диода показана на рис.



1) Для маленьких напряжений ВАХ диода хорошо аппроксимируется полиномом 2-ой степени ($i=aU^2$), поэтому детектор для маленьких напряжений называется квадратичным. Рабочий участок ВАХ для квадратичного детектора А-А

2) Для больших напряжений ВАХ диода аппроксимируется отрезками прямых (линейно-ломанная аппроксимация).

Для сигналов с большой амплитудой детектор называется "линейным".



Рабочий участок Б-Б не линейный, а линейно-ломанный.

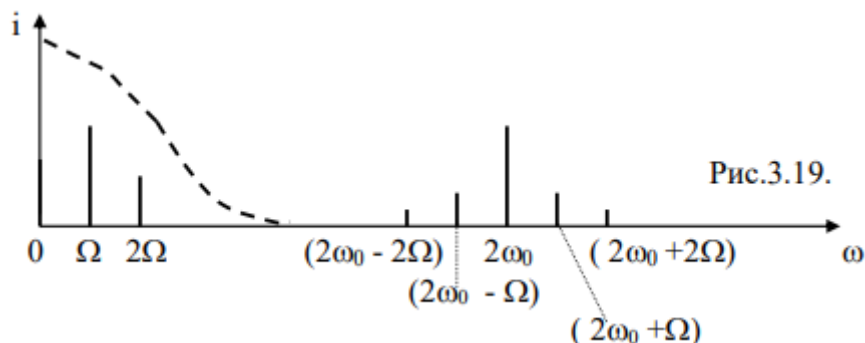
Рис.3.18.

Квадратичный детектор.

Как мы уже говорили, в этом случае ВАХ диода аппроксимируется полиномом второй степени и, следовательно, для определения спектра тока через диод используется метод "кратных дуг". На вход детектора подаем амплитудно-модулированный сигнал, т.е. выражение для АМ сигнала надо подставить в полином:

$$\begin{aligned}
 i &= aU^2 = U_{\text{вх}}(t) = U_{\text{ам}}(t) = U_m(1 + M_a \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t)) / = \\
 &= aU_m^2 (1 + M_a \cos(\Omega t))^2 \cos^2(\omega_0 t) = aU_m^2 (1 + 2M_a \cos(\Omega t) + \\
 &\quad \frac{M_a^2}{2} + \frac{M_a^2}{2} \cos(2\Omega t)) (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t)) = \\
 &= \frac{aU_m^2}{2} (1 + \frac{M_a^2}{2}) + aU_m^2 M_a \cos(\Omega t) + \frac{aU_m^2 M_a^2 \cos(2\Omega t)}{4} + \\
 &\quad + \frac{aU_m^2}{2} (1 + \frac{M_a^2}{2}) \cos(2\omega_0 t) + \frac{aU_m^2 M_a}{2} (\cos((2\omega_0 - \Omega)t) + \cos((2\omega_0 + \Omega)t)) + \\
 &\quad \frac{aU_m^2 M_a^2}{8} (\cos((2\omega_0 - 2\Omega)t) + \cos((2\omega_0 + 2\Omega)t))
 \end{aligned}$$

В соответствии с полученным выражением построим спектр тока через диод



ФНЧ выделяет низкочастотные составляющие тока, т.к. его АЧХ, показанная пунктиром на рисунке 3.19 имеет вид:

$$K(\omega) = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Следовательно, ФНЧ выделяет:

- постоянную составляющую с частотой равной 0,
- полезную составляющую с частотой модулирующего колебания Ω , то есть:
 $I_{\Omega} = aU_m^2 M_a$,
- вторую гармонику полезного сигнала с частотой 2Ω , $I_{2*\Omega} = \frac{aU_m^2 M_a^2}{4}$, которая

определяет степень нелинейных искажений полезного сигнала. Постоянная составляющая легко отделяется разделительной емкостью, которая включается между выходом детектора и входом следующего каскада (обычно, это УНЧ). При квадратичном детектировании кроме полезной составляющей с частотой Ω возникают нелинейные искажения полезного сигнала с частотой 2Ω . Коэффициент нелинейных искажений равен:

$$K_{н.ч.} = \frac{I_{2\Omega}}{I_{\Omega}} = \frac{M_A}{4}$$

Чем глубже, т.е. лучше модуляция, тем больше нелинейные искажения.

Задача. Сигнал имеет спектр $S(f) = 1 - 2 \cdot 10^{-3} |f|$, $|f| \leq 0.5$ кГц.

Найдите возможную частоту и интервал дискретизации данного сигнала и представьте его рядом Котельникова.

Задача

$$S(f) = 1 - 2 \cdot 10^{-3} |f| \quad |f| \leq 0.5 \text{ кГц}$$

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad - \text{интервал дискретизации}$$

$$W_g = \frac{2\pi}{\Delta t} \quad - \text{частота дискретизации}$$

$$W_B = 2\pi f_B = 2\pi \cdot 500 = 1000\pi$$

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000} = \frac{1}{2000\pi}$$

$$W_g = \frac{2\pi}{\Delta t} = 2000\pi \Rightarrow f_g = \frac{2000\pi}{2\pi} = 1000$$

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(k\Delta t) \frac{\sin W_B(t - k\Delta t)}{W_B(t - k\Delta t)}$$

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(\frac{k}{1000}\right) \frac{\sin(1000\pi)\left(t - \frac{k}{1000}\right)}{1000\pi\left(t - \frac{k}{1000}\right)} \quad - \text{ряд Котельникова}$$