Билет 10

1) Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой на фоне АБГШ. Некогерентный прием.

Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой на фоне АБГШ. Некогерентный прием.

АБГШ - Аддитивный белый гауссовский шум

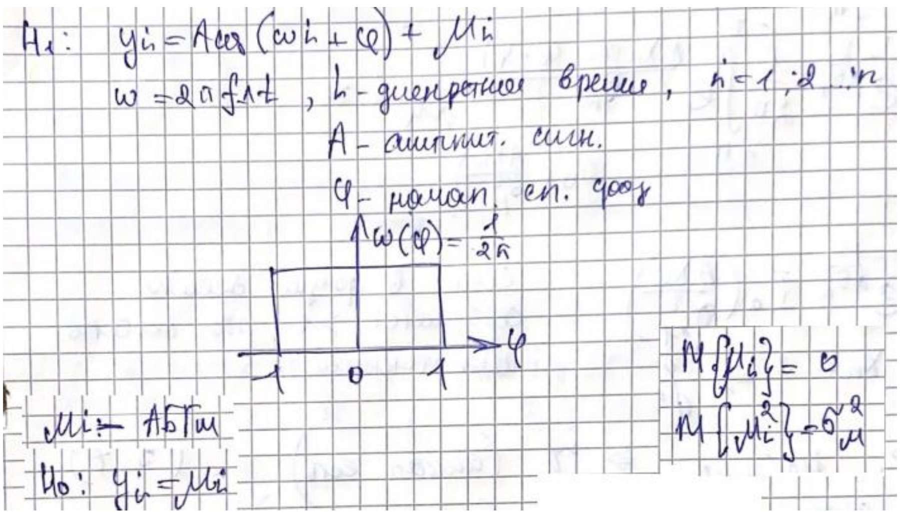
Аддитивный - значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям

Белый – спектр равномерен и бесконечен

Гауссовский – описывается распределением Гаусса
Шум

2.1.5. *Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой на фоне АБГШ.*

Пусть по гипотезе H_1 на вход приемного устройства поступает аддитивная смесь сигнала и шума: $y_i = S_i + \eta_i$, где $S_i = A\cos(\omega i + \varphi)$. Здесь A – известная амплитуда, $\omega = \frac{2\pi}{T}\Delta t$, T – период сигнала, Δt - шаг (интервал) дискретизации, φ - начальная фаза колебания, которая является случайной величиной с равномерным распределением: $\varphi \sim R[-\pi, \pi]$, т.е. ФПВ фазы имеет вид: $w(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \le \varphi \le \pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$



Отношние правдоподобия:

$$\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\right)=\frac{w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\,|\,H_1)}{w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\,|\,H_0)},$$

где $w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\,|\,H_1)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\right)^n}exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\left(y_i-A\cos(\omega i+\varphi)\right)^2}{2\sigma_\eta^{\ 2}}\right),$

$$w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\,|\,H_0)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\right)^n}exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^{\ 2}}{2\sigma_\eta^{\ 2}}\right).$$

ВЫВОД ФОРМУЛЫ

Т.к. отношение правдоподобия зависит от фазы φ, то оно тоже является случайной величиной. Поэтому $\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\right)$ можно усреднить по фазе $\Rightarrow$

$$\Lambda_1\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\right)w(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\right)d\varphi.$$

Далее, приняв во внимание, что $\sum\limits_{i=1}^{n}A^2\cos(\omega_i+\varphi)=E$ - энергия сигнала и введя обозначения $X_{nc}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\cos(\omega i)$, $X_{ns}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\sin(\omega i)$, получим

$$\Lambda_l\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}exp\left(\frac{A\left(X_{nc}\cos\varphi-X_{nS}\sin\varphi\right)}{\sigma_\eta^{\ 2}}-\frac{E}{2\sigma_\eta^{\ 2}}\right)d\varphi=$$

$$=exp\left(-\frac{E}{2\sigma_\eta^{\ 2}}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}exp\left(\frac{A\left(X_n\cos(\varphi+\chi)\right)}{\sigma_\eta^{\ 2}}\right)d\varphi,$$

где $X_n=\sqrt{X_{nc}^2+X_{nS}^2},\ \chi=arctg\left(\dfrac{X_{ns}}{X_{nc}}\right)$.

Известно, что $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}exp\left(\dfrac{AX_n\cos(\varphi+\chi)}{\sigma_\eta^{\ 2}}\right)d\varphi=I_0\left(\dfrac{AX_n}{\sigma_\eta^{\ 2}}\right)$ - функция Бесселя нулевого порядка $\Rightarrow\Lambda_l\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=exp\left(-\dfrac{E}{2\sigma_\eta^{\ 2}}\right)I_0\left(\dfrac{AX_n}{\sigma_\eta^{\ 2}}\right)$.

Конец вывода формулы

Коэффициент правдоподобия:

$$\Lambda_l\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=exp\left(-\frac{E}{2\sigma_\eta^{\ 2}}\right)I_0\left(\frac{AX_n}{\sigma_\eta^{\ 2}}\right)$$

Т.к. функция Бесселя монотонная от X_n при отношении сигнал/шум $h_{вых}>1$ $\Rightarrow$ решение можно принимать но, $\Rightarrow X_n$:

$$\text{если } X_n \geq C_\alpha \Rightarrow \gamma_1 \text{ (есть сигнал)} \tag{2.25}$$

$$\text{если } X_n < C_\alpha \Rightarrow \gamma_0 \text{ (нет сигнала)}$$

(если в функции Бесселя аргумент > 1, то бессель монотонный)

Поиск порога C_α.

Порог будем искать по критерию Неймана-Пирсона:

оптимальным решающем правилом является сравнение с некоторым порогом выбирающимся из условия получения заданной вероятности ложной тревоги α. При этом минимизируется вероятность пропуска сигнала β

$$\alpha \text{ - задано} \Rightarrow \beta = \min \tag{2.26}$$

В отсутствии радиосигнала случайная величина X_n характеризуется

плотностью распределения Релея:

$$w(X_n\,|\,H_0)=\frac{X_n}{\sigma_X^{\ 2}}exp\left(-\frac{X^2_{\ n}}{2\sigma_X^{\ 2}}\right),$$

$\sigma_x^2=\frac{\sigma_\eta^2 T_H}{2}$ - дисперсия, составляющих X_{nc}, X_{ns}, $T_H = n\,\Delta t$ - время

По заданной $\alpha=\int_{C_\alpha}^{\infty} w(X_n\,|\,H_0)dX_n$ находим C_α:

$$\alpha=\int_C^{\infty}\frac{X_n}{\sigma_n^2}e^{-\frac{X_n^2}{2\sigma_x^2}}dX_n \Rightarrow C=?$$

$$C=\sqrt{\sigma_\mu^2 T_H \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

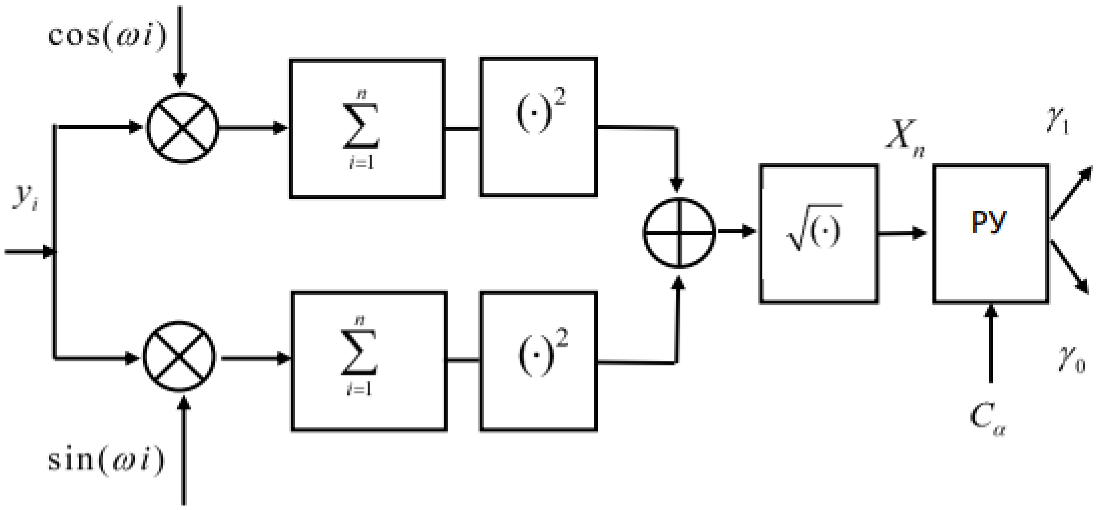
$$C_\alpha = \sqrt{\sigma_\eta^2 T_H \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$, где $f_d = \frac{1}{\Delta t}$ - частота дискретизации сигнала.

Затем можно вычислить вероятность пропускания сигнала β и вероятность обнаружения $D=1-\beta$.

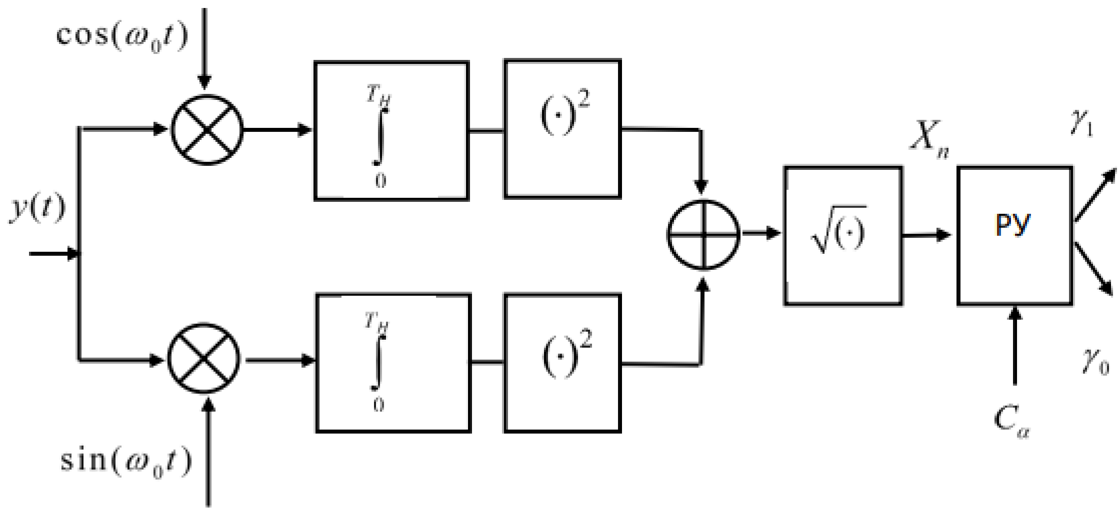
По формуле: $\beta = \int_{-\infty}^{c_\alpha} w(X_n \mid H_1) dX_n$, где

$$w(X_n \mid H_1) = \frac{X_n}{\sigma_X^2} exp\left(-\frac{X_n^2 + m_c^2 + m_S^2}{2\sigma_X^2}\right) I_0\left(\frac{X_n^2\sqrt{m_c^2 + m_S^2}}{\sigma_X^2}\right)$$ - плотность распределения Релея - Райса, где m_c, m_s – условие мат. ожидания, составляющих: X_{nc}, X_{ns}: $m_c = E(X_{nc} / \varphi) = \frac{AT_H}{2} cos\varphi$, $m_s = E(X_{ns} / \varphi) = -\frac{AT_H}{2} sin\varphi$, E – оператор мат. ожидания.

На рисунке 2.6. показана структура обнаружителя радиосигнала со случайной начальной фазой.



а)



б) $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

Рисунок 2.6. Структурная схема алгоритма обнаружения радиосигнала со случайной начальной фазой : а – в дискретном времени, **б** – в непрерывном времени.

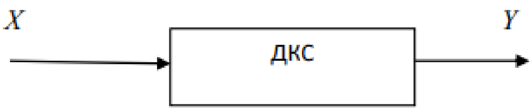
Такая обработка называется **некогерентной**, т.к. начальная фаза φ неизвестна

2) Информационные характеристики каналов связи (КС). Скорость передачи взаимной информации. Пропускная способность КС. Коэффициент использования КС.

ДКС – дискретный канал связи

Дискретный канал связи является каналом, в котором передаваемая информация представлена в дискретной форме, например, в виде последовательности символов или битов.

5.1.1. Информационные характеристики ДКС.



Как было показано ранее, среднее значение взаимной информации определяется по формуле:

$$I(X,Y) = \sum_{k=1}^{L}\sum_{l=1}^{M} p(a_k,b_l) I(a_k,b_l) = \sum_{k=1}^{L}\sum_{l=1}^{M} p(a_k,b_l)\log_2\left(\frac{p(a_k,b_l)}{p(a_k)p(b_l)}\right) = I(Y,X).$$

<u>Свойства средней взаимной информации.</u>

1. $I(X,Y) \geq 0$, т.е. средняя взаимная информация – величина неотрицательная.

$I(X,Y) = 0$, если X и Y не зависят друг от друга. Это наблюдается при больших шумах в канале связи.

2. $I(X,Y) = H(X)$, кода сообщения X и Y равны.

3. Среднюю взаимную информацию можно найти через энтропию и условную энтропию следующим образом:

$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X) \qquad (5.1)$$

Информационные характеристики ДКС

Скорость передачи взаимной информации – количество взаимной информации, переданной по каналу связи в единицу времени

$$R_{KC} = \frac{I(X,Y)}{T_H} \text{(бит/с)}, \qquad (5.2)$$

где T_H - время передачи.

Пропускная способность канала связи – максимально достижимая скорость передачи взаимной информации по каналу

$$C = \max_{\{p\}} R_{KC} \text{ (бит/с)}, \qquad (5.3)$$

где максимум ищется по распределению вероятностей $\{p_k\}$.

Информационная эффективность (коэффициент использования канала связи) определяется как

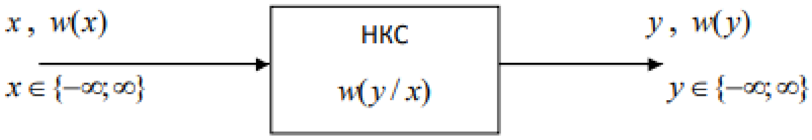
$$\eta = \frac{R_{KC}}{C} \qquad (5.4)$$

$0 \le \eta < 1$, η тем больше, чем ближе R_{RC} к C.

НКС – непрерывный канал связи

Непрерывный канал связи - это канал, в котором информация передается в непрерывной форме, как аналоговый сигнал.

5.2.1. Информационные характеристики НКС.



Наиболее важный случай - канал с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ), для которого

$$y = x + \mu, \qquad (5.8)$$

где μ - стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_μ^2.

Среднее значение взаимной информации определяется по формуле

$$I(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)\log_2\left(\frac{w(x,y)}{w(x)w(y)}\right)dxdy \qquad (5.9)$$

Скорость передачи взаимной информации R_{KC} определяется по (5.2).

$$R_{KC} = \frac{I(X,Y)}{T_H} \text{(бит/с)}, \qquad (5.2)$$

где T_H - время передачи.

Пропускная способность НКС (см.ф-лу (5.3)) :

$$C = \max_{\{p\}} R_{KC} \text{ (бит/с)}, \qquad (5.3)$$

где максимум ищется по распределению вероятностей $\{p_k\}$.

Информационная эффективность (коэффициент использования канала связи) определяется как

$$\eta = \frac{R_{KC}}{C} \qquad (5.4)$$

$0 \le \eta < 1$, η тем больше, чем ближе R_{RC} к C.

ГКС – Гауссовский канал связи

Гауссовский канал связи - это канал связи, в котором шум имеет гауссовское распределение.

имеет те же Информационные характеристики как в НКС

ГКС

$y = x + \mu$ (10.1) $\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2)$: $w_\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_x^2}}$

Пропускная способность гауссовского канала связи (ГКС).

Пусть ширина полосы рабочих частот канала F_e: $0 \le f \le F_e$. Пропускная способность ищется следующим образом:

$$C = \frac{1}{T_H}(H_d(y) - H(y/x))_{\max},$$

где T_H - длительность реализации случайных процессов $x(t), y(t)$.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ

Вместо одного отсчета рассмотрим выборку $\vec{y}_n = (y_1,..., y_n), \vec{x}_n = (x_1,..., x_n)$, объем выборки $n = 2F_в T_H$, т.к. $n = \frac{T_H}{\Delta t}, \Delta t = \frac{1}{2F_в} \Rightarrow n = 2F_в T_H$.

Тогда:

$$H_d(\vec{y}_n) = \sum_{k=1}^{n} H_d(y_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma_y^2) = \frac{n}{2}\log_2(2\pi e\sigma_y^2) = \frac{2F_в T_H}{2}\log_2(2\pi e\sigma_y^2) = F_в T_H \log_2(2\pi e\sigma_y^2) = H_{d\max}(\vec{y}_n)$$

Причем, $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_\mu^2$.

В результате имеем $H_{\max}(\vec{y}_n) = F_в T_H \log_2(2\pi e(\sigma_x^2 + \sigma_\mu^2))$.

Далее с учетом формулы (5.8) запишем:

$$H(\vec{y}_n / \vec{x}_n) = H_d(\vec{y}_n - \vec{x}_n) = H_d(\vec{\mu}_n) = \sum_{k=1}^{n} H_d(\mu_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma_\mu^2) = \frac{n}{2}\log_2(2\pi e\sigma_\mu^2) = F_в T_H \log_2(2\pi e\sigma_\mu^2)$$

Вывод формулы закончился

$$\begin{cases} C = F_в \log_2(1+q) \\ q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\mu^2} \text{ – осш} \end{cases} \quad (10.2) \qquad \begin{cases} C = F_в \log\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{N_0 F_в}\right) \end{cases} \quad (10.3)$$

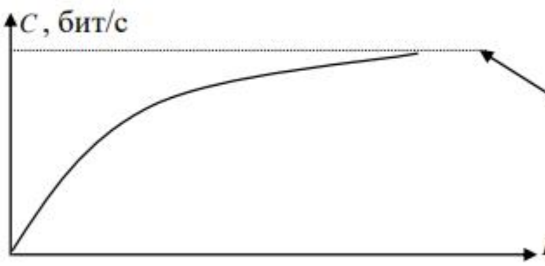
$\sigma_\mu^2 = N_0 F_в \Rightarrow$

Тогда пропускная способность гауссовского канала связи равна

$$C = \frac{F_в T_H}{T_H}(\log_2(2\pi e(\sigma_x^2 + \sigma_\mu^2)) - \log_2(2\pi e\sigma_\mu^2)) = F_в \log_2\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2}\right) = F_в \log_2(1+q),$$

где $q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\mu^2} = \frac{\sigma_x^2}{F_в N_0}$ - отношение сигнал/шум, N_0 - односторонняя СПМ белого гауссовского шума.

$$C = F_в \log_2\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{F_в N_0}\right) \quad (5.10)$$



$\frac{\sigma_x^2}{N_0}\log_2 e$ - предельная пропускная способность.

Таким образом, пропускная способность ГКС растет с увеличением ширины полосы канала и стремится к предельному значению $\frac{\sigma_x^2}{N_0}\log_2 e$.

ДКБП – дискретный канал без памяти

Имеет те же Информационные характеристики, что и предыдущие

это тип канала связи, в котором текущий передаваемый символ (или бит) не зависит от предыдущих переданных символов (битов). Другими словами, в ДКБП отсутствует память или история, и каждый символ (бит) передается независимо от предыдущих символов (битов).

5.1.2. Модель дискретного канала без памяти (ДКБП).

Пусть $X \in A = \{a_1, ..., a_n\}, Y \in B = \{b_1, ..., b_m\}$ с вероятностями появления $p(a_k), p(b_j)$. Вход-выход канала описывается условными вероятностями $p(b_j / a_k) = P\{Y = b_j / X = a_k\}$, $j = 1,2,..., m, k = 1,2,.., n$. Граф такого канала связи имеет вид, изображенный на рисунке 5.1.

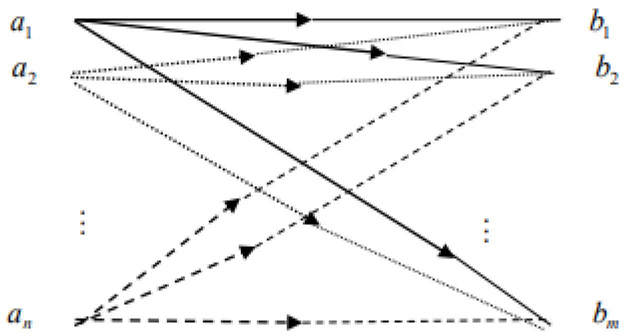


Рисунок 5.1. Граф ДКС без памяти.

Например, переход от a_1 к b_2 описывается вероятностью $p(b_2 / a_1)$ и т.д.

ДСКС - Двоичный симметричный канал

Имеет те же Информационные характеристики, что и предыдущие

Двоичный симметричный канал - это тип канала связи, в котором передаются двоичные символы (биты), и возможны ошибки при их передаче. В ДСКС каждый передаваемый бит может быть искажен с определенной вероятностью, независимо от других передаваемых битов.

Двоичный симметричный канал (ДСКС) является частным случаем ДКБП. У ДСКС $X \in \{0,1\}, Y \in \{0,1\}$, где X - набор возможных значений входа, Y - набор возможных значений выхода. Если канальный шум и другие нарушения вызывают статистически независимые ошибки при передаче двоичной последовательности со средней вероятностью $p_{ош}$, то

$$P\{Y=0/X=1\} = P\{Y=1/X=0\} = p_{ош},\ P\{Y=1/X=1\} = P\{Y=0/X=0\} = 1-p_{ош}.$$

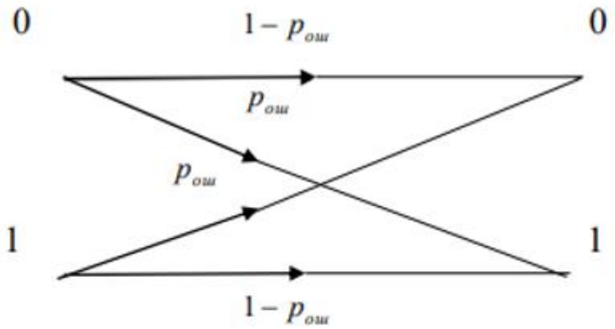


Рисунок 5.2. Граф ДСКС.

Пропускная способность ДСКС.

$I(X,Y) = I_{max}(X,Y)$, если $p(0) = p(1) = 0.5$. Тогда по формулам (5.1), (5.2), (5.3) запишем:

$$C = \frac{1}{T_H}(H_{max}(Y) - H_{max}(Y/X)). \qquad (5.5)$$

Далее, используя формулу полной вероятности ТВ, получим:

$$P\{Y=0\} = p(0)P\{Y=0/X=0\} + p(1)P(Y=0/X=1\} = 0.5(1-p_{ош}) + 0.5p_{ош} = 0.5\,.$$

Аналогично определяем, что $P\{Y=1\}=0.5$. Т.е. выход канала равновероятен, тогда $H(Y) = H_{\max}(Y) = \log_2 n = \log_2 2 = 1$бит/символ.

Затем по формуле условной энтропии найдем энтропию $H_{\max}(Y/X)$.

$$H_{\max}(Y/X) = -\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} p(b_j, a_k)\log_2(p(b_j/a_k)) = -\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} p(a_k)p(b_j/a_k)\log_2(p(b_j/a_k)) =$$

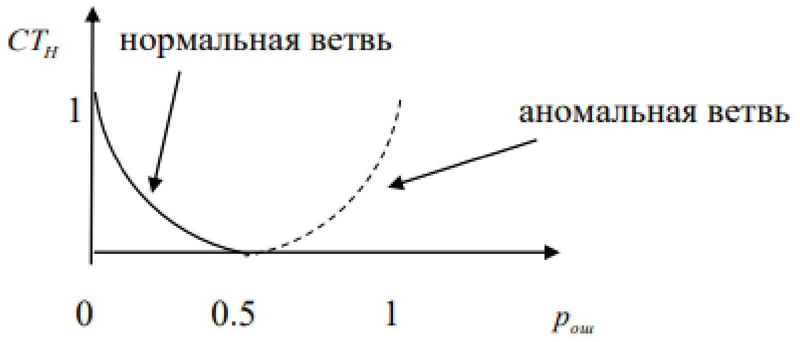
$$-(p(0)p(1/0)\log_2 p(1/0) + p(1)p(1/1)\log_2 p(1/1) + p(0)p(0/0)\log_2 p(0/0) + p(1)p(0/1)\log_2 p(0/1)) =$$

$$-0.5(2p_{ош}\log_2 p_{ош} + 2(1-p_{ош})\log_2(1-p_{ош})) = -(p_{ош}\log_2 p_{ош} + (1-p_{ош})\log_2(1-p_{ош}))\,.$$

Подставляя выражения для $H_{\max}(Y)$ и $H_{\max}(Y/X)$ в формулу (5.5), окончательно получим пропускную способность ДСКС:

$$C = \frac{1}{T_H}(1 + p_{ош}\log_2 p_{ош} + (1-p_{ош})\log_2(1-p_{ош})) \tag{5.6}$$

Выводы. **Пропускная способность ДСКС зависит только от вероятности ошибки $p_{ош}$, она увеличивается, если $p_{ош}$ уменьшается.**



При увеличении отношения сигнал/шум вероятность ошибки $p_{ош}$ уменьшается, а пропускная способность увеличивается.

Теорема Шеннона для кодирования канала с шумами. Существуют кодеры и декодеры, которые позволяют создавать надежную связь со столь малой, насколько угодно вероятностью ошибки, если скорость передачи информации меньше пропускной способности канала связи:

$$R_{KC} < C \tag{5.7}$$

Задача

Задача. Сигнал имеет спектр $S(f)=\cos(\pi\cdot 2\cdot 10^{-3} f)$, $|f|\le 0.25$ кГц.
Найдите возможную частоту и интервал дискретизации данного сигнала и представьте его рядом Котельникова.

БИЛЕТ 10

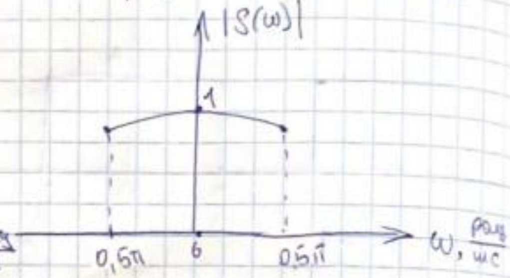
Задача: Сигнал имеет $S(f)=\cos(\pi 2\cdot 10^{-3} f)$. $|f|\le 0{,}25$ кГц
Найти возможную частоту и интервал дискретизации данного сигнала и представить его рядом Котельникова.

$f=\frac{\omega}{2\pi}$, $\omega=f\cdot 2\pi$

$S(\omega)=\cos(\omega 10^{-3})$

$\Delta t = T$

$\omega_в = 2\pi f_в = 2\pi\cdot 250 = 500\pi\ \frac{рад}{с}$



По теореме Котельникова, возможная частота дискрет. должна быть не меньше удвоенной максимальной частоты:

$\omega_д \ge 2\omega_в$

$\Downarrow$

Найдем идеальный случай, когда:

$\omega_д = 2\omega_в$

$\omega_д = 2\cdot 500\pi = 1000\pi\ \frac{рад}{с} = \pi\ \frac{рад}{мс}$

Интервал дискретизации (T) определяется как обратная величина частоты дискретизации

$T_д = \frac{1}{\omega_д}$

$T_д = \frac{1}{1000\pi} = 1$ мс

Ряд Котельникова:

$$S(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k\Delta t)\,\frac{\sin(2\pi F_в(t-k\Delta t))}{2\pi F_в(t-k\Delta t)}$$

* любую ф-цию $S(t)$, состоящую из частот $[0, F_в]$, можно представить рядом Котельникова.

$\langle \Delta t = T \rangle$

k - целое число, $S(k\Delta t)$ - постоянная, зависящая от $S(t)$

$F_в$ - верх. частота спектра

$$S(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} S(kT_д)\,\frac{\sin(\omega_в(t-kT))}{\omega_в(t-kT)}$$

$$S(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k)\,\frac{\sin(1000\pi(t-k))}{1000\pi(t-k)}$$