Любую порождающую матрицу G (n,k)- кода путем проведения операций над строками и столбцами можно свести к **систематической** форме:

$$G = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{k\times k} & P_{k\times(n-k)} \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

где $\mathrm{I}_{k\times k}$ - единичная матрица размерностью $k\times k$, $P_{k\times(n-k)}$ - матрица дополнение, которая определяет $n-k$ избыточных (проверочных) символов. Тогда по формуле (6.4) получим **систематический код**, у которого первые k бит информационные, остальные $n-k$ проверочные.

Для декодирования используется проверочная матрица $H_{(n-k)\times n}$, причем,

$$\begin{aligned} C_i H^T &= 0_{1\times(n-k)}, \\ GH^T &= 0_{k\times(n-k)}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Если линейный двоичный (n,k) код систематический, то проверочная матрица имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} P^T & \mathrm{I}_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

Коды Хемминга.

Двоичные коды Хемминга: $(n,k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - m)$, где m- целое положительное число. Если $m=3$, то получим (7,4) код. $n = 2^m - 1$ столбцов матрицы H состоят из всех возможных двоичных векторов с $n-k=m$ элементами, исключая нулевой вектор.

Пример. Рассмотрим систематический (7,4) код Хемминга с проверочной матрицей $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 7}$. Здесь $P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$ - транспонированная матрица дополнение. Тогда порождающая матрица имеет вид: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 7}$. Пусть $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})$ информационное кодовое слово, которое поступает на вход кодера. Далее по формуле (6.4) получим помехоустойчивое кодовое слово:

$$C_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}, c_{i5}, c_{i6}, c_{i7}),$$