2.1.2. *Байесовский обнаружитель.*

Определим матрицу потерь, задающую плату за решение γ_j, в то время, как имеет место гипотеза H_k, $j=\overline{0,1}$, $k=\overline{0,1}$: $\mathbf{\Pi}=\begin{pmatrix}\Pi_{00} & \Pi_{01}\\ \Pi_{10} & \Pi_{11}\end{pmatrix}$, причём $\Pi_{01} > \Pi_{00}$, $\Pi_{10} > \Pi_{11}$. Номера строк в платёжной матрице соответствуют номерам гипотез, а номера столбцов – номерам принимаемых решений.
С помощью матрицы потерь определим понятие среднего риска R:

$$R=\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\Pi_{kj}P(\gamma_j,H_k) \qquad (2.3)$$

В качестве критерия оптимальности возьмём критерий минимума среднего риска:

$$R = R_{min} \qquad (2.4)$$

Перепишем (2.3) в развернутом виде с учетом приведенных в лекции №1 формул для $P(\gamma_j H_k)$:

$$R = \Pi_{00}q(1-\alpha) + \Pi_{11}p(1-\beta) + \Pi_{01}q\alpha + \Pi_{10}p\beta$$

Учитывая, что α=1-(1-α), получим

$$\begin{aligned}R &= \Pi_{00}q(1-\alpha) + \Pi_{11}p - \Pi_{11}p\beta + \Pi_{01}q - \Pi_{01}q(1-\alpha) + \Pi_{10}p\beta\\ &= q(1-\alpha)(\Pi_{00}-\Pi_{01}) - p\beta(\Pi_{11}-\Pi_{10}) + \Pi_{01}q + \Pi_{11}p\end{aligned}$$

Вместо β подставим (2.2), а (1-α)=$\int\limits_{G_0}\dots\int \omega(\vec{y}_n|H_0)\,d\vec{y}_n$ Тогда получим

$$R=\Pi_{11}p+\Pi_{01}q+\int\limits_{G_0}\cdots\int[q(\Pi_{00}-\Pi_{01})w(\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}}/H_0)-p(\Pi_{11}-\Pi_{10})w(\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}}/H_1)]\mathbf{d}\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}}\ .$$

$\frac{dR}{d\mathbf{y}_n}=0$ => $q(\Pi_{00}-\Pi_{01})w(\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}}/H_0)-(\Pi_{11}-\Pi_{10})w(\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}}/H_1)=0$. Откуда получим

$$\frac{w\left(\vec{y}_n\middle|H_1\right)}{w\left(\vec{y}_n\middle|H_0\right)}=\frac{q(\Pi_{00}-\Pi_{01})}{p(\Pi_{11}-\Pi_{10})}=C \qquad (2.5)$$

Левая часть формулы (2.5) – <u>отношение правдоподобия</u>, правая часть (2.5) – порог C.

$$\Lambda(\vec{y}_n)=\frac{\omega\left(\vec{y}_n\middle|H_1\right)}{\omega\left(\vec{y}_n\middle|H_0\right)},\ C=\frac{q(\Pi_{00}-\Pi_{01})}{p(\Pi_{11}-\Pi_{10})}. \qquad (2.6)$$