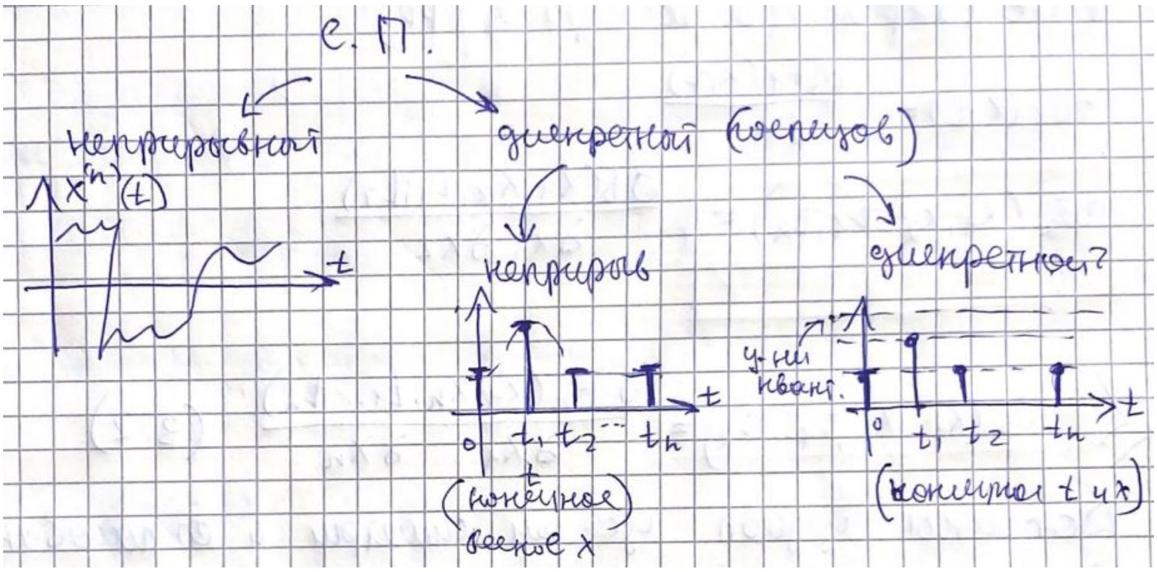
Билет 30

1) Классификация СП на основе свойств спектральной плотности мощности. Белый шум. Основные модели СП. Гауссовский СП.

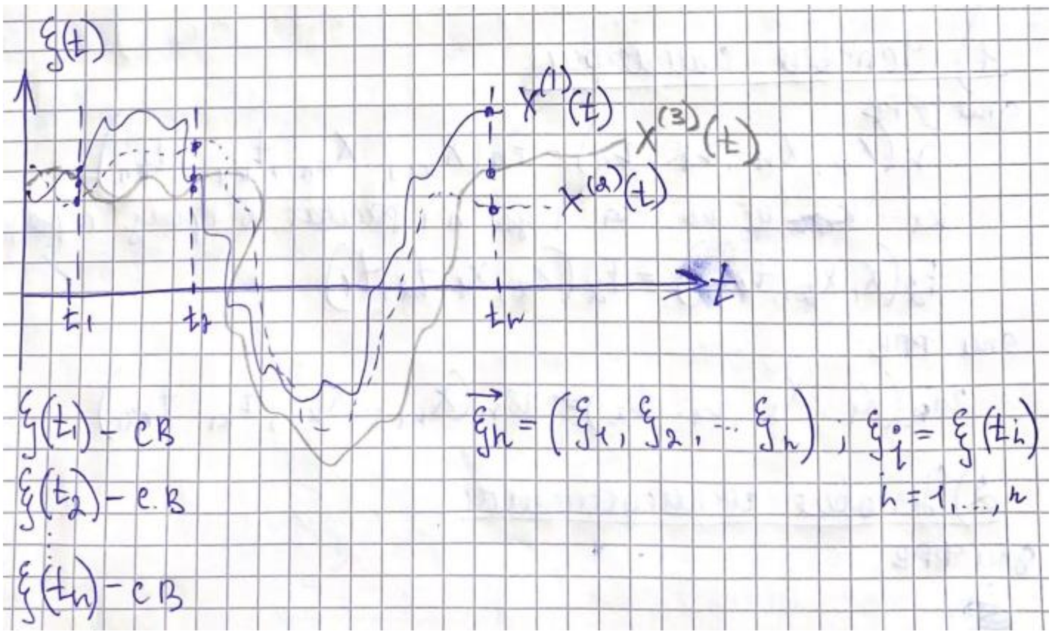
Случайная функция – семейство случайных величин $\zeta(t)$, зависящих от действительного параметра t. Если t - текущее время, то $\zeta(t)$ - случайный процесс (СП). СП характеризуется множеством функций времени:

$$\zeta(t) = \{x^{(k)}(t), t \in T_0\}$$

и вероятностной мерой, заданной на этом множестве, где k - номер реализации, T_0 - область определения СП. Множество χ, которому принадлежат возможные значения $\zeta(t)$ - пространство значений процесса.



Совокупность значений случайного процесса в моменты времени t_i образуют векторную случайную величину $\zeta = (\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \cdots \quad \zeta_n), \zeta_i = \zeta(t_i)$.



Для детерминированных сигналов успешно применяется гармонический анализ: ряды Фурье для периодических функций, интеграл Фурье для апериодических сигналов. Пусть $x(t)$ - детерминированный непериодический сигнал. Тогда он связан со своим комплексным спектром $S(j\omega)$ парой преобразований Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица. Условие существования спектра: $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$. Непосредственное применение гармонического анализа для СП невозможно, т.к. $\int_{-\infty}^{\infty}|x^{(k)}(t)|dt = \infty$ и, следовательно, амплитудный спектр такой реализации не существует (не ограничен) при любых частотах. Поэтому, для случайных процессов введена **спектральная плотность мощности (СПМ)** $G_x(\omega)$.

Рассмотрим усеченную реализацию $x_T^{(k)}(t)$ СП $\zeta(t)$:

$$x_T^{(k)}(t) = \begin{cases} x^{(k)}(t), |t| \le \dfrac{T}{2}, \\ 0, |t| > \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

Тогда преобразование Фурье финитной (конечной) функции имеет вид:

$$S_T^{(k)}(j\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T^{(k)}(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Энергию рассматриваемого отрезка реализации можно вычислить с помощью равенства Парсеваля:

$$E_T^{(k)} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x_T^{(k)}(t))^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S_T^{(k)}(j\omega)\right|^2 d\omega.$$

Разделив эту энергию на длительность реализации T, получим среднюю мощность k - ой реализации на отрезке $[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}]$:

$$P_T^{(k)} = \frac{E_T^{(k)}}{T} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|S_T^{(k)}(j\omega)\right|^2}{T}d\omega.$$

При увеличении T энергия реализации $E_T^{(k)}$ тоже увеличивается, но величина $P_T^{(k)}$ стремится к некоторому пределу. Тогда

$$P_T^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{\left|S_T^{(k)}(j\omega)\right|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega, \text{ где}$$

$$G_x(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|S_T^{(k)}(j\omega)\right|^2}{T}. \qquad (6.5)$$

СПМ спектр. плотность мощности СП

дан в лекции в ЭИОС

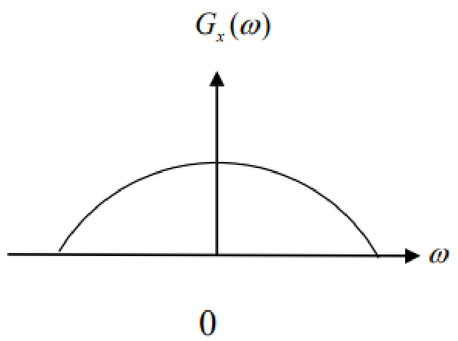
$$G(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|Z_T(j\omega)|^2}{T}, \qquad (3.9) \quad \left[\frac{Вт}{Гц}\right]$$

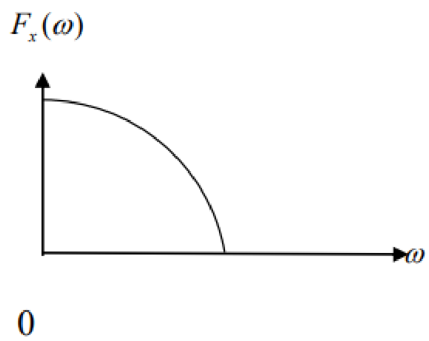
Формула (6.5) – **спектральная плотность мощности** СП, показывает, как распределена мощность процесса по частоте. Это так называемый **двусторонний** (математический) спектр, он содержит как положительные, так и отрицательные частоты. СПМ – функция действительная, четная:

$$G_x(\omega) = G_x(-\omega).$$

Односторонний (физический) спектр определяется следующим образом:

$$F_x(\omega) = 2G_x(\omega).$$





Размерность СПМ: Вт/Гц.

Классифкация случайных процессов по ширине спектра

1. Узкополосные случайные процессы.

Стационарный **в** широком смысле СП $\zeta(t)$ называется **узкополосным**, если его спектральная плотность мощности $G_x(\omega)$ или $F_x(\omega)$ сосредоточена в относительно узкой полосе частот около некоторой фиксированной частоты ω_0. Или СП узкополосный, если $\omega_0 >> \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ - **ширина спектра**.

Пусть имеется односторонний спектр $F_x(\omega)$, $F_{\max}$ - его максимальное значение. Тогда случайный процесс $\zeta(t)$ можно заменить другим СП, у которого СПМ постоянна и равна $F_{\max}$ в пределах полосы $\Delta\omega$, выбираемых из условия равенства средних мощностей обоих процессов: $F_{\max}\Delta\omega = \int\limits_0^\infty F_x(\omega)d\omega$. В результате получим:

$$\Delta\omega = \frac{1}{F_{\max}}\int\limits_0^\infty F_x(\omega)d\omega. \qquad (6.7)$$

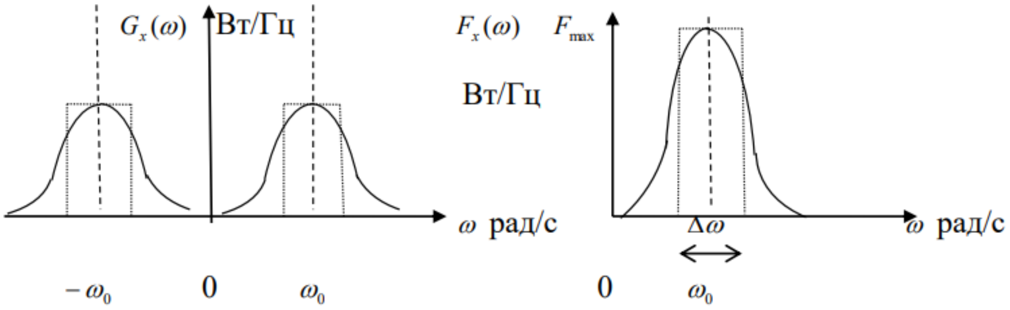
$\Delta\omega$ - эффективной ширины СПМ

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} << 1$

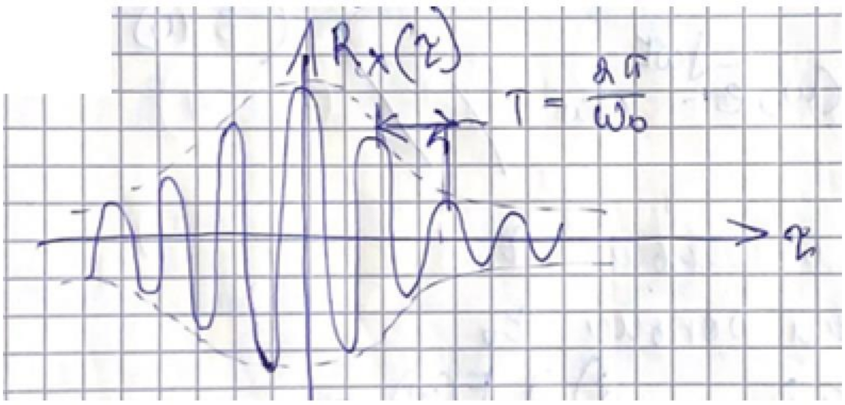
$F_{max}\Delta\omega = \int\limits_0^\infty F(\omega)\,d\omega$

$$\Delta\omega = \frac{1}{F_{max}}\int\limits_0^\infty F(\omega)d\omega \qquad (3.11)$$

Формула (6.7) - **эффективная ширина спектра** случайного процесса.

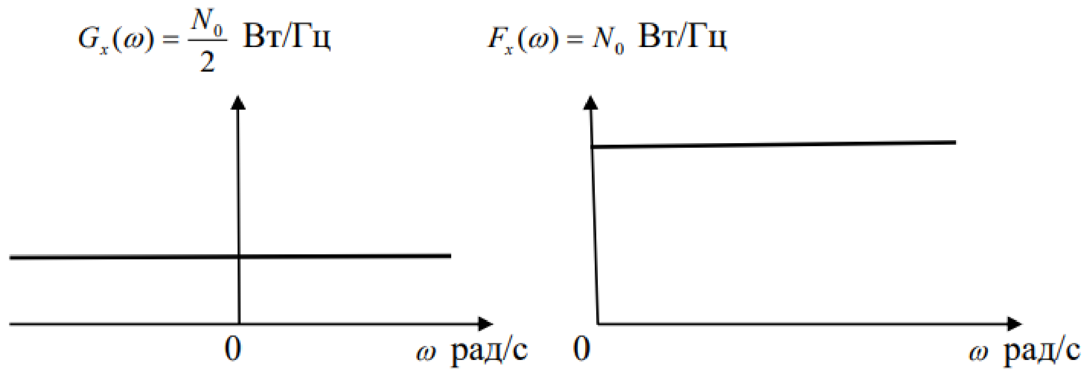


Ковариационная (корреляционная) функция узкополосного СП представляет собой осциллирующую функция с медленно меняющейся огибающей.



2. Белый шум.

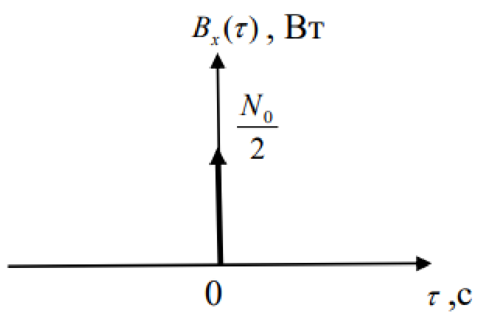
Белый шум (Б.Ш.) – предельно широкополосный случайный процесс. СПМ его сохраняет постоянное значение на всех частотах.



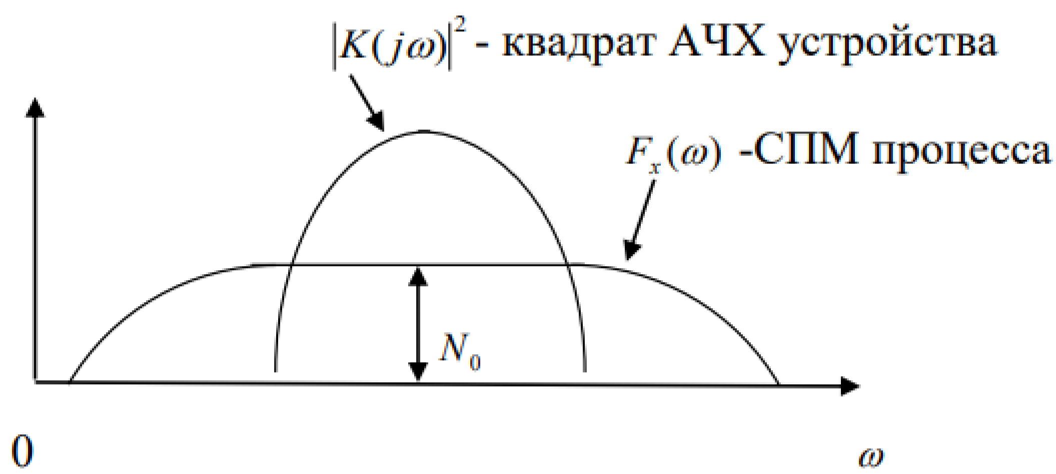
Ковариационная функция белого шума представляет собой дельта функцию. Это значит, что **значения Б.Ш., отстоящие друг от друга на сколь угодно малый интервал времени, некоррелированы**.

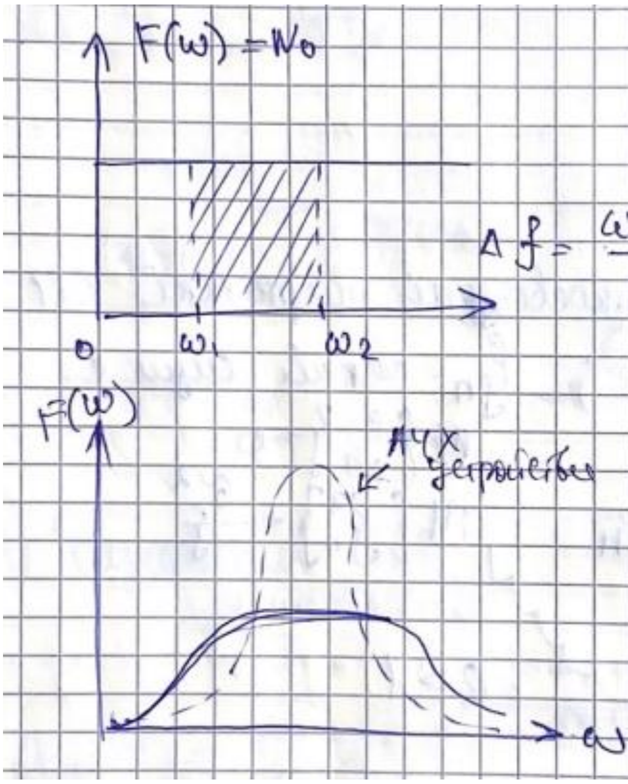
По теореме Винера-Хинчина (1.20) имеем : $B_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$, где

$\delta(\tau) = \begin{cases}\infty, \tau = 0,\\ 0, \tau \neq 0.\end{cases}$ -дельта функция. Тогда $\sigma_x^2 = B_x(0) = \infty$.



Белый шум – удобная математическая модель. Многие широкополосные реально существующие случайные процессы можно заменить Б.Ш., если в рассматриваемой задаче существенным является ограниченная полоса частот:





$$\sigma_\omega^2 = N_0 \Delta f \quad (3.12)$$

$$\Delta f = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

Основные модели СП

1) **Детерминированный** процесс $\zeta(t)$ – процесс, множество реализаций которого состоит из одной, появляющейся с вероятностью 1. Полное описание детерминированного процесса – функция $s(t)$. Его можно рассматривать как вырожденный СП с функцией распределения $F_1(x,t) = U(x - s(t))$, где $U(\bullet)$ - единичный скачок при $x = s(t)$. Среднее значение и дисперсия равны соответственно $m_x(t) = s(t), \sigma_x^2 = 0$.

$$\xi(t) = s(t), \quad M\{\xi(t)\} = s(t); \quad \sigma_\xi^2 = 0$$

2) **Квазидетерминированный** случайный процесс представляется совокупностью функций времени $s(t,\Theta)$, зависящих от случайного параметра Θ, в общем случае векторного. Пример: $s(t,a,\varphi) = a\sin(\omega t + \varphi)$, где ω - известная круговая частота, a, φ - случайная амплитуда и фаза колебания. Если начальная случайная фаза распределена равномерно в интервале $[-\pi; \ \pi]$, то процесс является стационарным в узком смысле. При $a = const$ он эргодический.

$\xi(t) = S(t, \theta)$, θ – сл параметр

пример 1: $\xi(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$

Если $a, \omega = const$, φ – насл сл. вел $\Rightarrow \theta = \varphi$

Если $\omega = const$, a, φ – нез сл

3) **Марковские** СП – процессы без последействия, т.е

$$P\{\zeta(t_n) \le x_n / x_1, ..., x_{n-1}, t_1, ..., t_{n-1}\} = P\{\zeta(t_n) \le x_n / x_{n-1}, t_{n-1}\},$$

где $P\{\bullet/\bullet\}$ - условная вероятность. Это значит, что будущее состояние x_n и прошлые состояния $x_1, ..., x_{n-2}$ при фиксированном x_{n-1} независимы. Многомерная плотность распределения вероятности в этом случае факторизуется следующим образом:

$$w_n(x_1, ..., x_n, t_1, ...t_n) = w(x_1, t_1) \cdot w(x_2, t_2 / x_1, t_1) \times .... \times w(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}), \qquad (6.8)$$

$w(\bullet/\bullet)$ - условная плотность распределения вероятности. Формула (1.22) описывает односвязный марковский процесс. Аналогично определяется двух, трех и т.д. связный СП.

При заданном x_{n-1}, будущее значение x_n не зависит от $x_{n-2}, \dots, x_0$

$w(x_1 \dots x_n) = w(x_0) \cdot \prod_{i=1}^{n} w(x_i / x_{i-1})$

односвязный марк. СП

двухсвязный марк СП

При заданных x_{n-1}, x_{n-2} будущее значение x_n не зависит от x_{n-2}

Процесс Маркова — модель авторегрессии первого порядка AR(1): $X_t = c + \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$.

Пример:

(1) Процессы АР

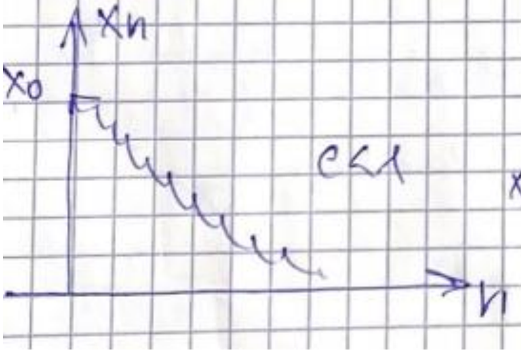
АР 1-го порядка — односвязный марковский СП

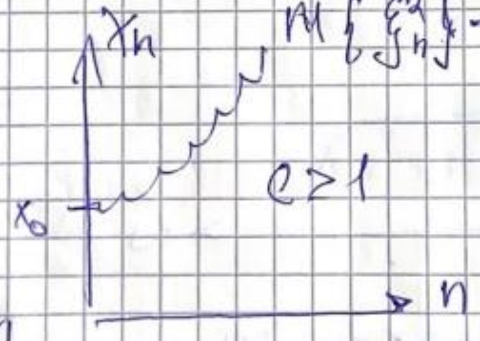
$x_n = C \cdot x_{n-1} + \xi_n$; ξ_n - белый шум с

$M\{\xi_n\} = 0$

$M\{\xi_n^2\} = \sigma_\xi^2$

С - к-т АР

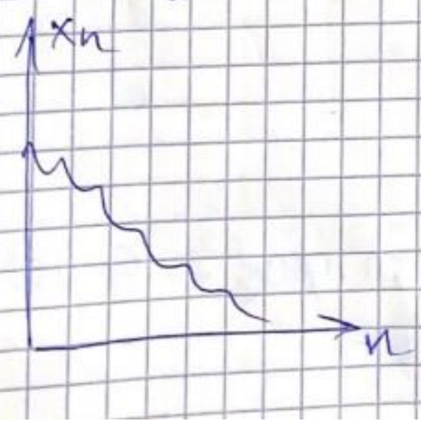


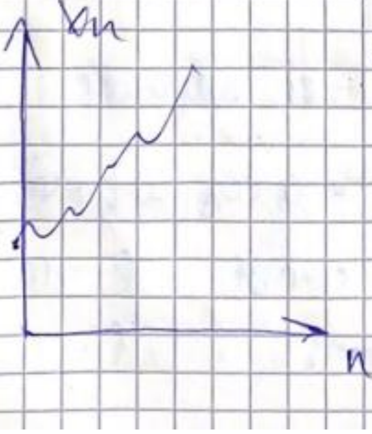


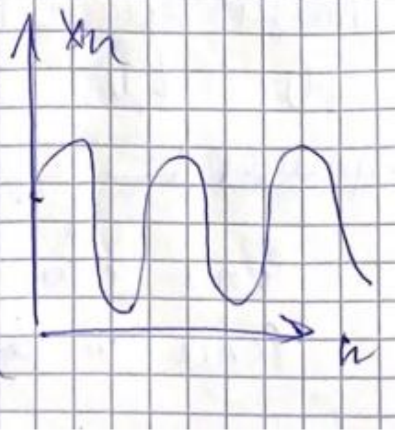
АР 2-го порядка — 2х связный марк СП

$x_n = C_1 x_{n-1} + C_2 x_{n-2} + \xi_n$

C_1 и C_2 - к-ты АР







АР m-го порядка

$$x_n = C_1 x_n + \dots + C_m x_{n-m} + \xi_n \qquad (3.13)$$

$m = 16 \div 32$ => аппрокс. речь

② процесс С.С р-го порядка

$$\xi_n = b_0 \alpha_n + b_1 \alpha_{n-1} + \ldots + b_p \alpha_{n-p} \qquad (3.14)$$

α_n - б.ш. $M\{\alpha_n\} = 0$, $M\{\alpha_n^2\} = \sigma_\alpha^2$

4) **Гауссовские** случайные процессы. СП $\zeta(t)$ называется **гауссовским** (**нормальным**), если совместная плотность распределения вероятности любой конечной совокупности величин $\zeta(t_i), i = 1,2,....$ **нормальная**, т.е.

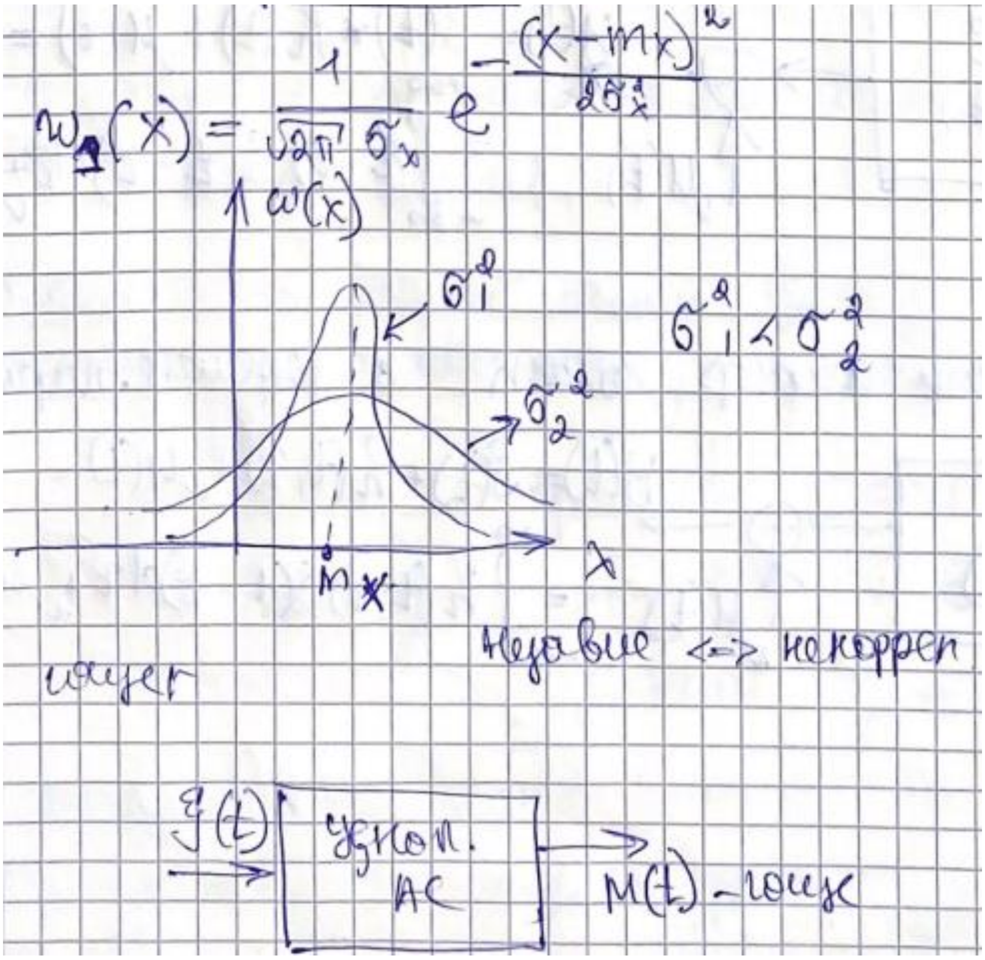
$$w_n(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B_x}} e^{-\frac{1}{2}(X-\overline{m}_x)^T B_x^{-1}(X-\overline{m}_x)}, \qquad (6.9)$$

где $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^T, \overline{m}_x = (m_x(t_1) \ \cdots \ m_x(t_n))^T$ - вектор средних значений, «Т» - операция транспонирования, B_x - ковариационная матрица с элементами $B_x(t_i,t_j), i = 1,2,...n, j = 1,2,,,,n$, $\det B_x$ - определитель матрицы B_x, B_x^{-1} - матрица обратная матрице B_x. Для стационарного СП в выражении (6.9) $\overline{m}_x = (m_x \ \cdots \ m_x)^T{}_{n\times 1}$, элементы ковариационной матрицы определяются значениями $B_x(t_i - t_j), i = 1,2,,,n, j = 1,2,...n$.

Для гауссовского СП из стационарности в широком смысле следует стационарность в узком смысле.

Одномерная плотность распределения стационарного гауссовского процесса имеет вид:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$



$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)\,\xi(t-\tau)\,d\tau$$

$h(\tau)$ - ИХ

Далее отметим несколько важных свойств гауссовского процесса.

1. Достаточным условием эргодичности стационарного гауссовского СП является непрерывность его СПМ, т.е. ограниченность интеграла $\int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau < \infty$

2. Линейное преобразование гауссовского процесса дает гауссовский процесс.

3. Для гауссовского СП из независимости следует некоррелированность и обратно: из некоррелированности следует независимость.

4. Если на вход узкополосной линейной системы подать СП с произвольным законом распределения вероятности, то на ее выходе будет гауссовский случайный процесс. Это явление называется эффектом **нормализации.**

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ (ФПВ / ФРВ)

ФРВ и ФПВ СП

ФРВ

$$n = 1 \Rightarrow F_1(x,t) = P\{\xi(t) \leq x\}$$

$$n = 1,2 \Rightarrow \vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \Rightarrow F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) \leq x_1; \ \xi(t_2) \leq x_2\}$$

$$\vdots$$

$$n = 1, \ldots n \Rightarrow$$

$$F_n(x_1, \ldots x_n; t_1 \ldots t_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1 \ldots, \xi(t_n) \leq x_n\} \quad (3.1)$$

ФПВ (берем производную от ФРВ)

$$w_1(x,t) = \frac{dF_1(x,t)}{dx}$$

$$w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\vdots$$

$$w_n(x_1 \ldots x_n, t_1 \ldots t_2) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, t_1 \ldots t_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \quad (3.2)$$

Должны удовлетворять условиям симметрии и согласования:

1. Условия симметрии:

для ФРВ

$$F_n(x_1, \ldots, x_n, t_1 \ldots t_n) = F_n(x_{k1}, \ldots x_{kn}, t_{k1} \ldots t_{kn})$$

$k_1 \ldots k_n$ – числа от 1 до n, расст. в произв. порядке

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = F_2(x_2, x_1, t_2, t_1)$$

для ФПВ

$$w_n(x_1 \ldots x_n, t_1 \ldots t_n) = w_n(x_{k1} \ldots x_{kn}, t_{k1} \ldots t_{kn})$$

2. Условия согласиванности:

для ФРВ

$$\lim_{\substack{x_j\to\infty\\ j=k+1,\dots n}} F_n(x_1\dots x_k, x_{k+1}\dots x_n, t_1\dots t_n) = F_k(x_1\dots x_k, t_1\dots t_k)$$

$$F_2(x_1,x_2,t_1,t_2);\ x_2\to\infty \Rightarrow \lim_{x_2\to\infty} F_2(x_1,x_2,t_1,t_2) = F_1(x_1,t_1)$$

для ФПВ

$$w_k(x_1\dots x_k, t_1\dots t_k) = \int\dots\int w_k(x_1\dots x_k, x_{k+1}\dots x_n)\,dx_{k+1}\dots dx_n$$

$$w_3(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_2(x_1,x_2,t_1,t_2) = \int w_3(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3)\,dx_3;$$

$$w_1(x_1,t_1) = \iint w_3(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\,dx_2\,dx_3$$

СП называется процессом с независимыми значениями, если его многомерное ФРВ и ФПВ характеризуются специаьным образом:

$$\begin{cases} F_n(x_1\dots x_n, t_1\dots t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_1(x_i, t_i) \\ w_n(x_1\dots x_n, t_1\dots t_n) = \prod_{i=1}^{n} w_1(x_i, t_i) \end{cases} \qquad (3,3)$$

---

2) Эффективное кодирование. Кодирование для ДИБП. Кодовые слова переменной

Эффективное кодирования – через кодер источника избавляет от избыточности, которой обладают реальные источники информации, для эффективного использования каналасвязи при передаче сообщений.

Возможность эффективного кодирования основана на теореме Шеннона, согласно которой:

Минимальное среднее количество элементов на выходе кодирующего устройства, соответствующее одному символу дискретного сообщения, можно сделать сколь угодно близким к максимальной энтропии источника.

<u>**ДИБП**</u> – Дискретный источник без памяти

4.1.3. Эффективное кодирование.

Кодирование ДИБП.

Пусть ДИБП выдает буквы или символы каждые τ_s секунд. Каждый символ выбирается из конечного алфавита $A \in \{a_k\}, k = 1,2,...,L$ с вероятностью $p(a_k)$. Энтропия такого источника определяется по формуле (2.4) и ограничивается сверху значением, вычисляемым по (4.5), т.е. $H(X) \le \log_2(L)$. Как говорилось выше, знак «=» выполняется, если вероятности символов на выходе источника одинаковы и равны $p = \frac{1}{L}$.

1. Кодовые слова фиксированной длины.

Рассмотрим блоковое кодирование, которое состоит в сопоставлении уникального ряда из K двоичных символов, каждому символу источника. Так как существует L возможных символов ДИБП, то число двоичных символов кодера на один символ источника при уникальном кодировании определяется как $K = \begin{cases} \log_2(L), L = 2^Q \\ \lfloor \log_2(L) \rfloor + 1, L \ne 2^Q \end{cases}$, где Q - целое положительное число, $\lfloor \bullet \rfloor$ - наибольшее целое, меньшее, чем $\log_2(L)$. K - **скорость кодирования**. Поскольку $H(X) \le \log_2(L)$, то $K \ge H(X)$. **Эффективность кодирования** определяется отношением $\frac{H(x)}{K}$.

А) Если $L = 2^Q$ и символы источника равновероятны, то $K = H(X)$ и эффективность кодирования равна 1 (100%).

Б) Если $L \ne 2^Q$, но символы источника равновероятны, то K отличается от $H(X)$ самое большее на 1 бит на символ.

В) Если $\log_2(L) >> 1$, то эффективность кодирования высокая.

Г) Если L мало, тогда эффективность кода можно повысить путем кодирования блока из J символов источника за время $J\tau_s$. Для этого надо выбрать L^J уникальных кодовых слов. Используя кодовую последовательность из K_J двоичных символов, можно образовать 2^{K_J} возможных кодовых слов, причем $K_J \ge J \log_2(L)$. Следовательно, требуется минимальное целое значение для K_J:

$$K_J = \lfloor J \log_2(L) \rfloor + 1 .$$

Теперь среднее число символов кода на один символ источника $K = \frac{K_J}{J}$. При эффективность кодирования увеличивается в J раз: $\frac{H(X)}{K} = \frac{H(X)J}{K_J}$. Взяв J достаточно большим, можно эффективность приблизить к 1.

Такие методы кодирования не приводят к искажениям, т.к. кодирование символов источника или блоков символов в кодовые слова выполняется однозначно (уникально). Эти коды называются **бесшумными**.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда только часть L^J блоков символов источника кодируется однозначно. Например, $2^{K_J} - 1$ наиболее вероятных J символьных блоков кодируется однозначно. Остальные $L^J - (2^{K_J} - 1)$ блоков длины J представляются одним оставшимся кодовым словом. Такая процедура кодирования вызывает ошибку декодирования каждый раз, когда источник выдает маловероятный блок. Обозначим через p_e вероятность ошибки декодирования. Шеннон в 1948 г. доказал теорему кодирования источника.

Теорема Шеннона кодирования ДИБП. Пусть X - ансамбль символов ДИБП с конечной энтропией $H(X)$. Блоки из J символов источника кодируются в двоичные кодовые слова длины K_J. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ p_e можно сделать сколь угодно малой, если выполняется неравенство

$$K = \frac{K_J}{J} \geq H(X) + \varepsilon \qquad (4.12)$$

и J достаточно велико.

2. Кодовые слова переменой длины.

Если символы источника не равновероятны, то более эффективно использовать кодовые слова переменной длины. Пример: код Морзе (19 век). Символам, возникающим более часто, ставятся в соответствие более короткие кодовые слова, а символам, возникающим менее часто, сопоставляются более длинные кодовые слова. Такой метод кодирования, который требует знания вероятностей появления символов источника, называется **энтропийным**.

Рассмотрим пример. Пусть ДИБП имеет алфавит объемом $L = 4$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Символы появляются с вероятностями $p(a_1) = \frac{1}{2}, p(a_2) = \frac{1}{4}$, $p(a_3) = p(a_4) = \frac{1}{8}$. Предположим, что они кодируются следующим образом:

код 1: $a_1 \to 0,\ a_2 \to 01,\ a_3 \to 011,\ a_4 \to 111$, код 2: $a_1 \to 0,\ a_2 \to 10,\ a_3 \to 110,\ a_4 \to 111$

Пусть принимается последовательность 0010010111… . Тогда декодирование кода 1 дает результат: $a_1, a_2, a_1, a_2, a_1, a_4$ или a_1, a_2, a_1, a_2, a_3. Т.е. имеем не однозначное декодирование. По коду 2: $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_4$. Здесь существует только один вариант декодирования. Ни одно кодовое слово кода 2 не является началом (**префиксом**) другого кодового слова.

В общем, **префиксное условие** кода требует, чтобы для кодового слова длины K $(b_1 \dots b_M b_{M+1} \dots . b_K)$ не существовало других кодовых слов длины $M < K$ с элементами $(b_1 \dots b_M)$. Это свойство делает кодовые слова однозначно декодируемыми.

Критерий оптимальности однозначно декодируемых кодов переменной длины имеет вид:

$$\overline{K} = \sum_{k=1}^{L} n_k p(a_k) = \min , \qquad (4.13)$$

где $\overline{K}$ - среднее число бит, приходящихся на один символ источника, n_k - длина k - го кодового слова.

Теорема Шеннона кодирования ДИБП. Пусть X - ансамбль символов ДИБП с конечной энтропией $H(X)$ и выходными символами из алфавита $A = \{a_1, \dots, a_L\}$ с вероятностями выхода $p(a_k), k = 1,2,.., L$. Тогда существует возможность создать код, который удовлетворяет префиксному условию и имеет среднюю длину $\overline{K}$, удовлетворяющую неравенству

$$H(X) \le \overline{K} < H(X) + 1 \qquad (4.14)$$

Алгоритм кодирования Хаффена.

Критерий оптимальности кодов Хаффмена – минимум средней длины кодового слова (4.13).

Рассмотрим пример. ДИБП выдает символы из алфавита объемом $L = 7$ с вероятностями:
$p(a_1) = 0.2, p(a_2) = 0.35, p(a_3) = 0.1, p(a_4) = 0.3, p(a_5) = 0.005, p(a_6) = 0.04, p(a_7) = 0.005$.

1) Расположить символы источника в порядке убывания (не возрастания) вероятностей.

2) Процесс кодирования начинается с двух наименее вероятных символов a_5, a_7. Эти символы объединяются, причем верхней ветви присваивается «0», нижней «1» или наоборот.

3) Вероятности этих двух ветвей складываются, суммарному узлу присваивается вероятность 0.01.

4) Далее пункты 2), 3) повторяются, пока не исчерпаются символы источника. Вероятность последнего узла равна 1.

Построим кодовое дерево.

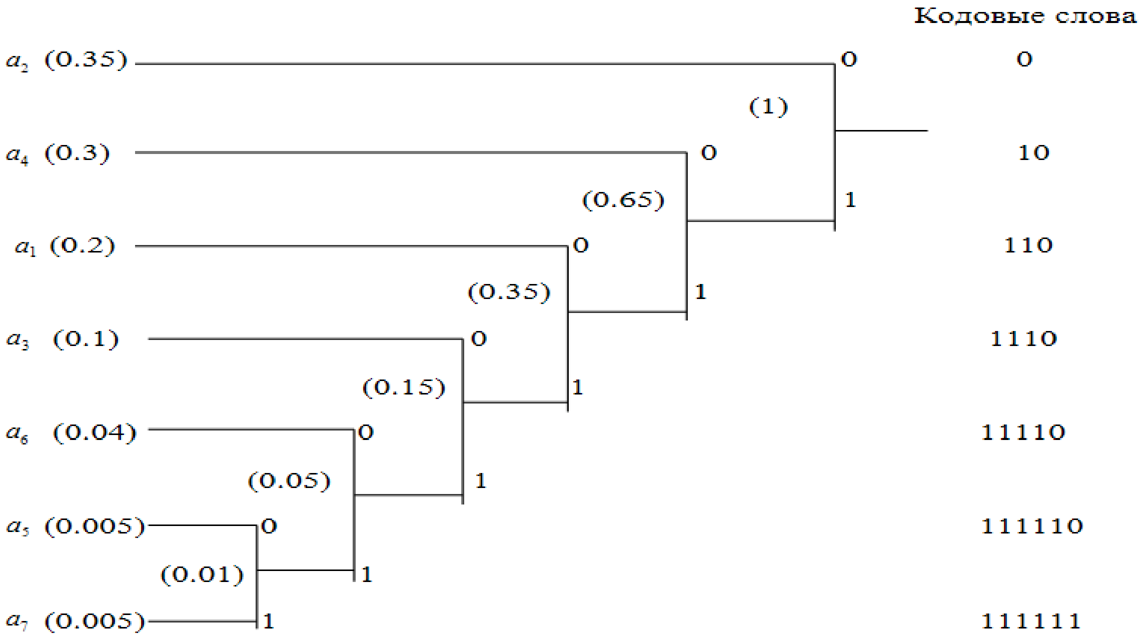


Рисунок 4.3. Кодовое дерево кода Хаффмена.

Дополнительная информация из лекции(использовать при ответе не обязательно)

Производительность источника – количество средней собственной информации, вырабатываемое в единицу времени:

$$I'(X) = \frac{H(X)}{T_H} \text{ (бит/с)}, \qquad (4.9)$$

где T_H - интервал наблюдений.

Информационная насыщенность определяется как

$$I_H(X) = \frac{H(X)}{H_{\max}} = \frac{I'(X)}{I'_{\max}}. \qquad (4.10)$$

Если $H(X) \to 0$, то и $I_H(X) \to 0$. Если $H(X) \to H_{\max}$, то $I_H(X) \to 1$.

Избыточность источника:

$$r(X) = 1 - I_H(X) = 1 - \frac{H(X)}{H_{\max}}. \qquad (4.11)$$

Алгоритм кодирования Фано.

Пример. Рассмотрим ДИБП с объемом алфавита $L = 8$. Символы источника имеют вероятности выхода

$$p(a_1) = p(a_2) = \frac{1}{4}, p(a_3) = p(a_4) = \frac{1}{8}, p(a_5) = p(a_6) = p(a_7) = p(a_8) = \frac{1}{16}.$$

1) Располагаем сообщения источника в порядке не возрастания их вероятностей.

2) Множество символов разбивается (сверху вниз) на два подмножества так, чтобы суммы вероятностей, входящих в них сообщений, оказались бы равными или минимально отличающимися друг от друга. Сообщениям первого подмножества приписываем «0», а сообщениям второго подмножества – «1» или наоборот.

3) С каждым, из образовавшихся подмножеств, повторяем пункт 2).

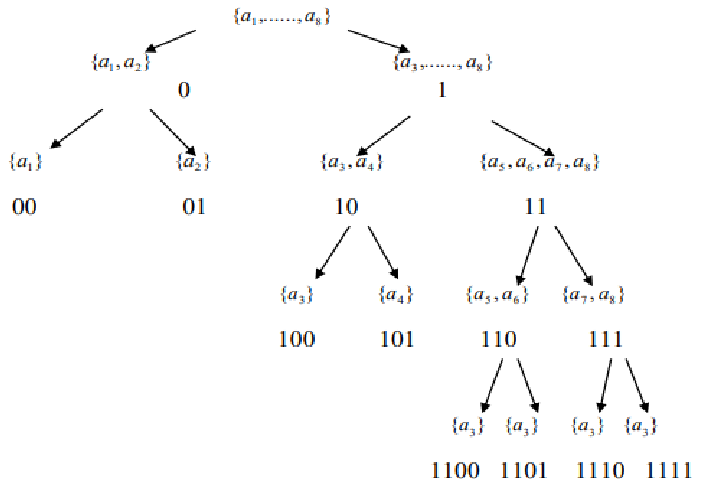


Рисунок 4.2. Кодовое дерево кода Фано.

Символ	Вероятность	Код
a_1	1/4	00
a_2	1/4	01
a_3	1/8	100
a_4	1/8	101
a_5	1/16	1100
a_6	1/16	1101
a_7	1/16	1110
a_8	1/16	1111

Вывод. Метод кодирования Фано позволяет строить оптимальные префиксные коды в том случае, если вероятности символов источника раны $p(a_k) = 2^{-c}$ (для двоичных кодов), где с – положительное целое число.

Задача

Задача. Рассчитайте амплитуды гармоник тока через НЭ, ВАХ которого аппроксимирована полиномом $i = 2u^2; u(t) = U_m \cos(\omega_1 t) + V_m \cos(\omega_2 t)$.

Вр. 30

$i = 2u^2$

$u(t) = U_m \cos(\omega_1 t) + V_m \cos(\omega_2 t)$

$i = 2\left(U_m \cos(\omega_1 t) + V_m \cos(\omega_2 t)\right)^2 =$

$= 2\left((U_m \cos(\omega_1 t))^2 + 2U_m V_m \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) + (V_m \cos(\omega_2 t))^2\right)$

$=$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}; \quad \cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}}$$

$= U_m^2(\cos(2\omega_1 t) + 1) + 2U_m V_m\left(\cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)\right) +$

$+ V_m^2(\cos(2\omega_2 t) + 1)$

Пусть $\omega_1 < \omega_2$