ЛЕКЦИЯ № 8.

2.1.4. Согласованный фильтр. (С.Ф).

В отличие от линейных фильтров, предназначенных для оптимальной фильтрации случайных сигналов, согласованный фильтр применяется при обнаружении и различении детерминированных сигналов.

Критерий оптимальности согласованного фильтра:

$$q_в = q_{вmax}\ , \tag{2.16}$$

т. е. на выходе согласованного фильтра должно реализоваться максимальное отношение сигнал/шум.

Вывод КЧХ и импульсной характеристики h(t) согласованного фильтра:

$$t \in [0;T] \qquad y(t) = s(t) + \eta(t) \longrightarrow \boxed{K(j\omega),\ h(t)} \longrightarrow y_в(t) = s_в(t) + \eta_в(t)$$

Рисунок 2.2. К выводу характеристик С.Ф.

$S(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}\,dt$ - спектр входного сигнала S(t)

$S_в(j\omega) = S(j\omega)K(j\omega)$ - спектр сигнала на выходе фильтра

$$=> \qquad s_в(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_в(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{2.17}$$

$G_{\eta в}(\omega) = G_\eta(\omega)|K(j\omega)|^2$ – спектральная плотность мощности шума на выходе фильтра, $G_\eta(\omega)$ - спектральная плотность мощности шума на входе фильтра.

Тогда мощность шума на выходе фильтра равна

$$\sigma_{\eta в}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_\eta(\omega)\left|K(j\omega)\right|^2 d\omega \tag{2.18}$$

На основании формул (2.17) и (2.18) имеем:

$$q_в = \frac{\left|s_в(t_0)\right|^2}{\sigma_{\eta в}^2} = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\eta(\omega)\left|K(j\omega)\right|^2 d\omega},$$ где t_0 - некоторый момент времени, $q_в -$ отношение сигнал/шум по мощности на выходе фильтра в момент времени t_0.

Далее надо найти такую $K(j\omega)$, при которой $q_в = q_{вmax}$.

Поставленная задача может быть решена методом вариационного исчисления или используя неравенство Шварца-Буняковского.

Неравенство Шварца-Буняковского:

Если имеются две произвольные комплексные функции f(x) и g(x), то выполняется соотношение:

$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot g(x)dx\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx$, причем знак «=» имеет место, если $g(x) = C_0 f(x)$, где C_0=const, «*» знак сопряжения.

Тогда, полагая:

$f^*(x) = \frac{S(j\omega)e^{j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_\eta(\omega)}}$, $g(x) = K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)}$,

и учитывая

$\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot g(x)dx\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx} \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$, имеем

$$\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(j\omega)e^{j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_\eta(\omega)}}\cdot K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)}d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)}\right|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)K(\mathrm{j}\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}G_\eta(\omega)|K(j\omega)|^2\,d\omega}\,q_{\text{в}}$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(j\omega)|^2}{G_\eta(\omega)}d\omega\ ,$$

$q_{\text{в}max}$ определяется правой частью данного выражения

$$=> \qquad q_{\text{в}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(j\omega)|^2}{G_\eta(\omega)}d\omega \tag{2.19}$$

и $q_{\text{в}} = q_{\text{в}max}$, если $K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)} = C_0\cdot\frac{S^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_\eta(\omega)}}$ =>

$$K(j\omega) = const\cdot\frac{S^*(j\omega)}{G_\eta(\omega)}\cdot e^{-j\omega t_0} \tag{2.20}$$

Формула (2.20) – оптимальная КЧХ фильтра, (2.19) – максимальное отношение сигнал/шум на выходе фильтра для произвольной стационарной помехи со спектральной плотностью мощности $G_\eta(\omega)$. Такая обработка оказывается не является оптимальной. Однако, она оптимальна , если $\eta(t)$ – гауссовский шум со спектральной плотностью мощности $G_\eta(\omega) = \frac{N_0}{2}$. В этом случае оптимальный фильтр называется согласованным.

Согласованный фильтр – линейный фильтр, на выходе которого получается максимально возможное пиковое отношение сигнал/шум при приёме полностью известного сигнала на фоне БГШ.

=> (2.19) → $q_{\text{в}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2|S(j\omega)|^2}{N_0}d\omega = \frac{2\mathrm{E}}{N_0}$,

где Е=$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|S(j\omega)|^2d\omega -$ энергия сигнала т. е.

$$q_{\text{в}} = \frac{2\text{E}}{N_0} \qquad (2.21)$$

(2.20) преобразуется в

$$K(j\omega) = const \cdot S^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \qquad (2.22)$$

Т.о. АЧХ согласованного фильтра ~ амплитудному спектру сигнала, а ФЧХ равна сумме фазового спектра сигнала, взятого с обратным знаком , и фазового спектра задержки:

$$\varphi(\omega) = -\varphi_c(\omega) - \omega t_0 \qquad (2.23)$$

Вывод импульсной характеристики С.Ф.

Импульсная характеристика согласованного фильтра определяется, как обратное преобразование Фурье от КЧХ (2.22):

$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\text{j}\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{const}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^*(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega =$
$\frac{const}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(-j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$, так как $S^*(j\omega) = S(-j\omega)$

Пусть $\omega_1 = -\omega \Rightarrow d\omega = -d\omega_1 \Rightarrow$

$$h(t) = -\frac{const}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} S(j\omega_1)e^{j\omega_1(t_0-t)}d\omega_1 = \frac{const}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega_1)e^{j\omega_1(t_0-t)}d\omega_1 =$$
$$= const \cdot S(t_0 - t).$$

Т.о. импульсная характеристика согласованного фильтра целиком определяется формой сигнала (согласована с сигналом):

$$\boldsymbol{h(t)} = const \cdot \boldsymbol{S(t_0 - t)} \qquad (2.24)$$

<u>Пример 1.</u> Фильтр, согласованный с видео импульсом.

$$S(t) = \begin{cases} U, \text{если } t \in [0;T] \\ 0, \text{если } t < 0; t > T \end{cases}$$

T – длительность импульса

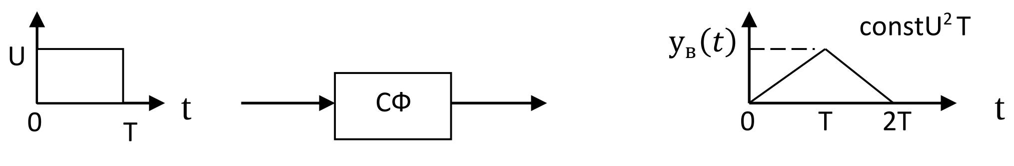
h(t)=S$(T - t) \Rightarrow$

$$\text{у}_{\text{в}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$h(t-\tau) = constS(T - t + \tau) \Rightarrow$$

$$\text{у}_{\text{в}}(t) = const\int_{-\infty}^{\infty} S(\tau)S(T - t + \tau)d\tau = B_{ss}(T - t)$$

где $B_{ss}(T - t)$ – функция автокорреляции входного сигнала.



Спектр видеоимпульса: $S(j\omega) = U\int_0^T e^{-j\omega t}dt = \frac{Ue^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_0^T = \frac{U}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\text{T}}).$

По формуле (2.22) при $t_0 = \text{Т}$ получим:

$$K(j\omega) = const\,\frac{U}{-j\omega}\left(1 - e^{j\omega\text{Т}}\right)e^{-j\omega t} = const\,\frac{U}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega\text{Т}}\right).$$

Тогда функциональная схема, согласованного с видео импульсом, фильтра имеет вид, показанный на рисунке 2.2. На рисунке 2.3. изображены этапы формирования сигнала на выходе С.Ф.

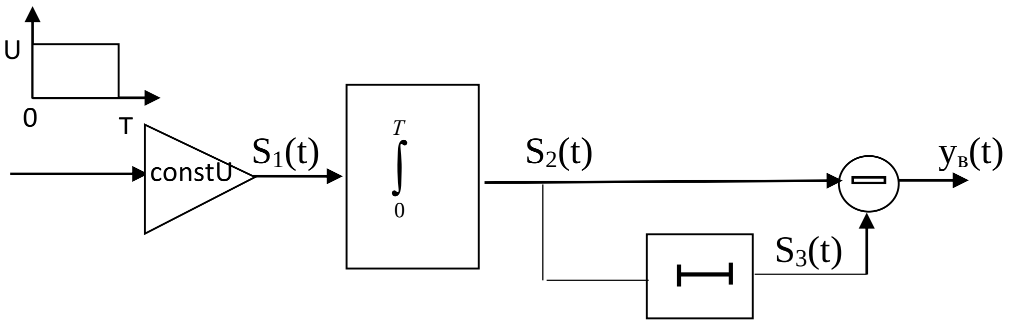


Рисунок 2.2. Структурная схема СФ с видеоимпульсом.

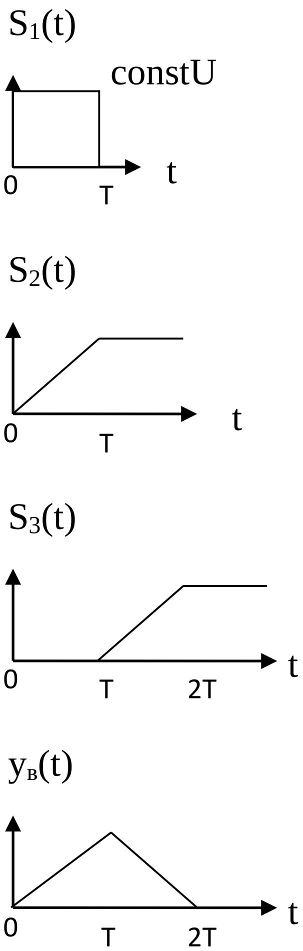
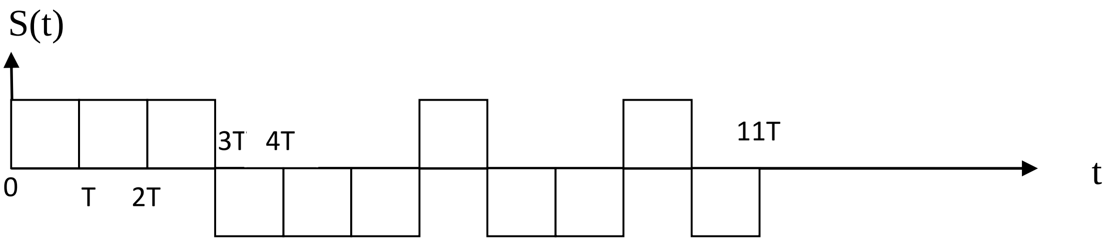


Рисунок 2.3. Формирование сигнала на выходе фильтра, согласованного с видеоимпульсом.

Пример 2. Фильтр, согласованный с кодом Баркера.

Код Баркера: 1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1



Формирование сигнала на выходе фильтра:

$y_{в}(t) = const \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) S(T_c - t + \tau) d\tau \xrightarrow{\text{Дискр время}}$

$\rightarrow const \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot S_{k-i+n} = y_i$; n=11

Пусть const=1 =>

$i = 0 \;\; => \;\; y_0 = S_1 S_{12} = 0$

$i = 1 \;\; => \;\; y_1 = S_1 S_{11} + S_2 S_{12} = 1 \cdot (-1) = -1$

$i = 2 \;\; => \;\; y_2 = S_1 S_{10} + S_2 S_{11} + S_3 S_{12} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$

и т. д.

$$i = 11 \;\; => \;\; y_{11} = \sum_{k=1}^{11} {S_k}^2 = 11$$

В результате получим:

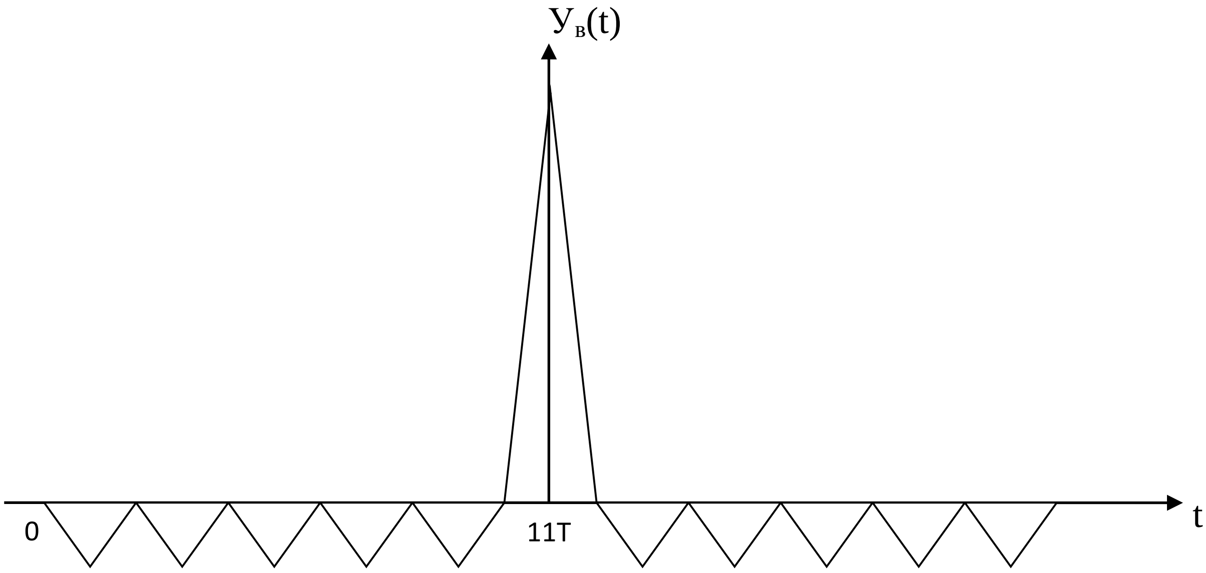


Рисунок 2.4. Сигнал на выходе фильтра, согласованного с кодом Баркера.

Импульсная характеристика – зеркальное отображение кода Баркера:

-1 1 -1 -1 1 -1-1 -1 1 1

На рисунке 2.5 показана структура фильтра, согласованного с кодом Баркера.

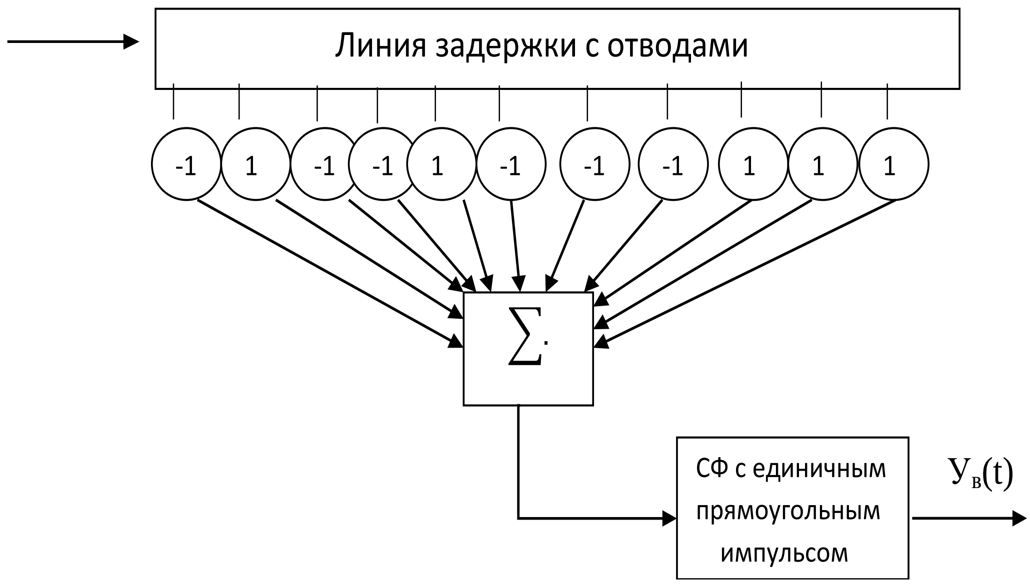


Рисунок 2.5. Структурная схема фильтра, согласованного с кодом Баркера.

Если $y_{вход}(t) = S(t) + \eta(t) => y_{в}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{вход}(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau =$
$A\int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot S(t_0 - t + \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) \cdot S(t_0 - t + \tau) = AB_{ss}(t_0 - t) +$
$AB_{\eta s}(t_0 - t),$ где $\mathrm{A} = const$.

$B_{ss}()$ – автокорреляционная функция входного сигнала, $B_{\eta s}()$ – взаимная корреляционная функция сигнала и шума.

2.1.5. *Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой на фоне АБГШ.*

Пусть по гипотезе H_1 на вход приемного устройства поступает аддитивная смесь сигнала и шума: $y_i = S_i + \eta_i$, где $S_i = A\cos(\omega i + \varphi)$. Здесь A – известная амплитуда, $\omega = \frac{2\pi}{T}\Delta t$, T – период сигнала, Δt - шаг (интервал) дискретизации, φ - начальная фаза колебания, которая является случайной величиной с равномерным распределением: $\varphi \sim R[-\pi, \pi]$, т.е. ФПВ фазы имеет вид: $w(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \le \varphi \le \pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Запишем отношение правдоподобия: $\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_{\mathrm{n}}},\varphi\right)=\dfrac{\mathrm{w}(\overrightarrow{\mathbf{y}_{\mathrm{n}}},\varphi\,|\,\mathrm{H}_1)}{\mathrm{w}(\overrightarrow{\mathbf{y}_{\mathrm{n}}},\varphi\,|\,\mathrm{H}_0)}$,

где $w(\overrightarrow{\mathbf{y}_{\mathrm{n}}},\varphi\,|\,\mathrm{H}_1)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\right)^n}exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\left(y_i-Acos(\omega i+\varphi)\right)^2}{2\sigma_\eta{}^2}\right)$,

$$w(\overrightarrow{\mathbf{y}_{\mathrm{n}}},\varphi\,|\,\mathrm{H}_0)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\right)^n}exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i{}^2}{2\sigma_\eta{}^2}\right).$$

Т.к. отношение правдоподобия зависит от фазы φ, то оно тоже является случайной величиной. Поэтому $\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_{\mathrm{n}}},\varphi\right)$ можно усреднить по фазе $\Rightarrow$

$$\Lambda_1\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_{\mathrm{n}}}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\right)w(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\right)d\varphi.$$

Далее, приняв во внимание, что $\sum\limits_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{A}^2\cos(\omega_{\mathrm{i}}+\varphi)=\mathrm{E}$ - энергия сигнала и введя обозначения $X_{nc}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\,cos(\omega i)$, $X_{ns}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\,sin(\omega i)$, получим

$$\Lambda_1\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}exp\left(\frac{A\left(X_{nc}\cos\varphi-X_{nS}\sin\varphi\right)}{\sigma_\eta{}^2}-\frac{E}{2\sigma_\eta{}^2}\right)d\varphi=$$

$$=exp\left(-\frac{E}{2\sigma_\eta{}^2}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}exp\left(\frac{A\left(X_n\cos(\varphi+\chi)\right)}{\sigma_\eta{}^2}\right)d\varphi,$$

где $X_n=\sqrt{X_{nc}^2+X_{nS}^2},\chi=arctg\left(\dfrac{X_{ns}}{X_{nc}}\right)$.

Известно, что $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}exp\left(\dfrac{AX_n\cos(\varphi+\chi)}{\sigma_\eta{}^2}\right)d\varphi=I_0\left(\dfrac{AX_n}{\sigma_\eta{}^2}\right)$ - функция Бесселя нулевого порядка $\Rightarrow\Lambda_1\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=exp\left(-\dfrac{E}{2\sigma_\eta{}^2}\right)I_0\left(\dfrac{AX_n}{\sigma_\eta{}^2}\right)$.

Т.к. функция Бесселя монотонная от X_n при отношении сигнал/шум $h_{вых}>1$ $\Rightarrow$ решение можно принимать но, $\Rightarrow X_n$:

$$\text{если } X_n\geq \mathrm{C}_\alpha\Rightarrow\gamma_1 \text{ (есть сигнал)} \qquad (2.25)$$

$$\text{если } \mathrm{X}_n<\mathrm{C}_\alpha\Rightarrow\gamma_0 \text{ (нет сигнала)}$$

Поиск порога C_α.

Порог будем искать по критерию Неймана-Пирсона:

оптимальным решающем правилом является сравнение с некоторым порогом выбирающимся из условия получения заданной вероятности ложной тревоги α. При этом минимизируется вероятность пропуска сигнала β

$$\alpha \text{ - задано} \Rightarrow \beta = \min \qquad (2.26)$$

В отсутствии радиосигнала случайная величина X_n характеризуется плотностью распределения Релея: $w(X_n \mid H_0) = \frac{X_n}{\sigma_X{}^2} exp\left(-\frac{X^2{}_n}{2\sigma_X{}^2}\right)$, $\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\eta^2 T_H}{2}$ - дисперсия, составляющих X_{nc}, X_{ns}, $T_H = n\Delta t$ - время наблюдения.

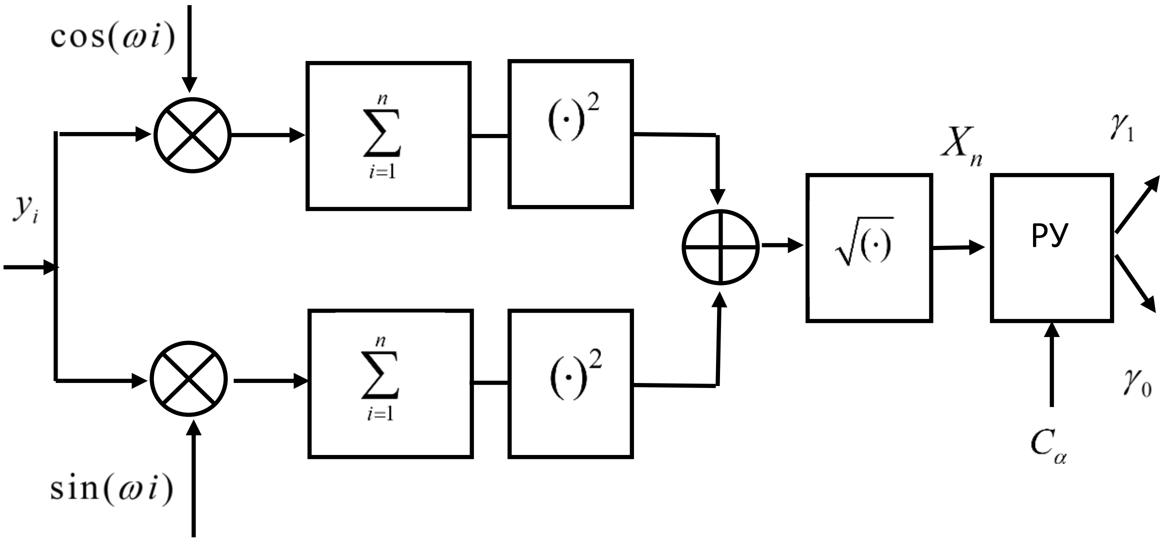
По заданной $\alpha = \int_{c_\alpha}^{\infty} w(X_n \mid H_0) dX_n$ находим C_α: $C_\alpha = \sqrt{\frac{n\sigma_\eta^2}{f_d} ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} =$ $C_\alpha = \sqrt{\sigma_\eta^2 T_H \, ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$, где $f_d = \frac{1}{\Delta t}$ - частота дискретизации сигнала.

Затем можно вычислить вероятность пропускания сигнала β и вероятность обнаружения $D = 1 - \beta$.

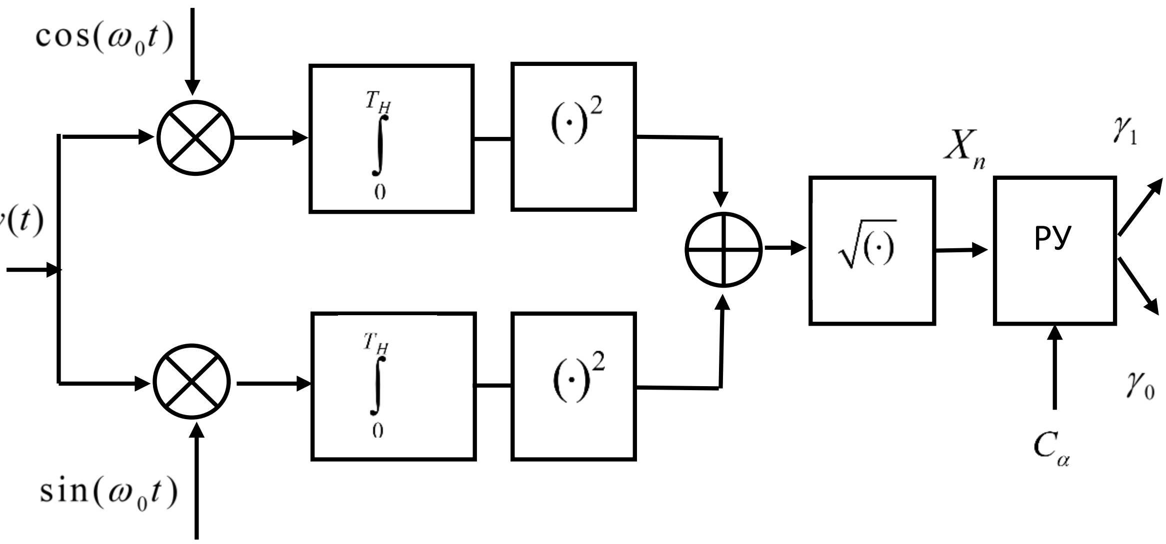
По формуле: $\beta = \int_{-\infty}^{c_\alpha} w(X_n \mid H_1) dX_n$, где

$w(X_n \mid H_1) = \frac{X_n}{\sigma_X^2} exp\left(-\frac{X_n^2 + m_c^2 + m_S^2}{2\sigma_X^2}\right) I_0\left(\frac{X_n^2\sqrt{m_c^2 + m_S^2}}{\sigma_X^2}\right)$ - плотность распределения Релея - Райса, где m_c, m_s – условие мат. ожидания, составляющих: $\boldsymbol{X}_{nc}, \boldsymbol{X}_{ns}$: $m_c = E(X_{nc} / \varphi) = \frac{AT_H}{2} cos\varphi$, $m_s = E(X_{ns} / \varphi) = -\frac{AT_H}{2} sin\varphi$, E – оператор мат. ожидания.

На рисунке 2.6. показана структура обнаружителя радиосигнала со случайной начальной фазой.



а)



б) $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

Рисунок 2.6. Структурная схема алгоритма обнаружения радиосигнала со случайной начальной фазой : а – в дискретном времени, **б** – в непрерывном времени.

Такая обработка называется **некогерентной**, т.к. начальная фаза φ неизвестна