Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования
Московский технический университете связи и информатики

БИЛЕТ Утверждаю
Зав.кафедрой

№ 15

Факультет____________**РиТ**___________________**Курс**_____2___

Дисциплина______________**ОТС**______________________

1. Помехоустойчивое кодирование. Линейные блоковые коды. Минимальное кодовое расстояние. Порождающая и проверочная матрицы. Способность обнаружения и исправления ошибок.
2. Математические модели каналов связи.

Задача. Установить связь между параметрами a, b для случайного процесса с одномерной плотностью распределения вероятности
$w(x) = ae^{-bx}, x \geq 0$.

1 ЗАДАНИЕ

6.Помехоустойчивое кодирование.

Для увеличения помехоустойчивости приема (уменьшения вероятности ошибки) применяют канальное (помехоустойчивое) кодирование. Оно позволяет обнаружить и исправить ошибки в приемнике, тем самым уменьшая вероятность ошибки приема символа.

6.1. Линейные блоковые коды.

Блоковый код состоит из набора векторов фиксированной длины, которые называются **кодовыми словами**. Длина кодового слова – число элементов в векторах, обозначим ее буквой n. Элементы кодового слова выбираются из алфавита с q элементами. Если $q = 2$, тогда код называют двоичным. Если $q > 2$, то код недвоичный. Если же $q = 2^b$, где b - целое положительное число, то каждый элемент имеет эквивалентное двоичное представление, состоящее из b битов. Т.е. недвоичный код длины N можно представить двоичным кодом длиной $n = bN$.

Кодовое слово длины n содержит $k < n$ информационных символов. Код обозначается как (n,k)- код, а отношение

$$R_c = \frac{k}{n} \tag{6.1}$$

называется **скоростью кода**. Величина $1 - R_c$ - **избыточность**.

Блок из k информационных бит отображается в кодовое слово длины n, выбираемое из набора $M = 2^k$ кодовых слов. Каждое кодовое слово состоит из k информационных бит и $n - k$ проверочных.

Вес кода $w_i (i = 1,2,..,M)$ – число ненулевых элементов слова, является одной из важных характеристик кода. Для двоичных кодов вес - это количество единиц в кодовом слове. Каждое кодовое слово имеет свой вес. Набор всех весов кода $\{w_i\}$ образует **распределение весов кода**. Если все M кодовых слов имеют одинаковый вес, тогда код называется кодом с **постоянным весом**.

Минимальное кодовое расстояние

Пусть C_i и C_j - два кодовых слова в (n,k) кодовом блоке. Мера разницы между C_i, C_j - число позиций, в которых они различаются. Эта мера называется **расстоянием Хемминга** и обозначается $d_{i,j}$, причем $0 < d_{i,j} \le n$, $i \ne j$. Минимальное кодовое расстояние определяется следующим образом:

$$d_{\min} = \min_{i,j=1,2,\dots,M} \{d_{i,j}\} \qquad (6.2)$$

Код

Линейный Нелинейный

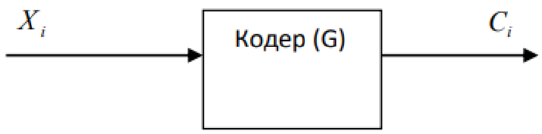
Рассмотрим два кодовых слова C_i, C_j и скалярные величины α_1, α_2. Код называется линейным, если $\alpha_1 C_i + \alpha_2 C_j$ тоже является кодовым словом из (n,k) блока. Значит, линейный код должен содержать кодовое слово, состоящее из одних нулей. Поэтому код с постоянным весом – нелинейный. Пусть C_i - линейный двоичный блоковый код, $i = 1,2,\dots,M$. $C_1 = (0.....0)_{1\times n}$ - кодовое слово из нулей, w_i - вес i - го кодового слова. Тогда w_i - расстояние Хемминга между C_i и C_1. В результате имеем:

$$d_{\min} = \min_{i \ne 1} \{w_i\}, \qquad (6.3)$$

так как $d_{i,j}$ равно весу разности $C_i - C_j$, а разность эквивалентна сумме по модулю 2, но $C_i - C_j$ - тоже кодовое слово с весом, включенным в набор $\{w_i\}$.

6.1.1. *Порождающая и проверочная матрица.*

Пусть $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik})_{1\times k}$ - вектор из k информационных бит, $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{in})_{1\times n}$ - вектор помехоустойчивого кода. Тогда



$$C_i = X_i G \tag{6.4}$$

$G_{k\times n}$ - порождающая матрица кода.

$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vdots \\ \vec{g}_k \end{pmatrix}$. Если выражение (6.4) раскрыть, то

$C_i = \begin{pmatrix} x_{i1} & \cdots & x_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vdots \\ \vec{g}_k \end{pmatrix} = x_{i1}\vec{g}_1 + \cdots + x_{ik}\vec{g}_k$, т.е. произвольное кодовое слово – линейная комбинация векторов $\{\vec{g}_l\}, l = 1,2,...., k$ из порождающей матрицы G. Вектора $\{\vec{g}_l\}$ должны быть **линейно независимыми**.

Система векторов $\{\vec{g}_l\}$ называется линейно зависимой, если хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных векторов и линейно независимой в противоположном случае.

Любую порождающую матрицу G (n,k)- кода путем проведения операций над строками и столбцами можно свести к **систематической** форме:

$$G = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{k\times k} & P_{k\times(n-k)} \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

где $\mathrm{I}_{k\times k}$ - единичная матрица размерностью $k\times k$, $P_{k\times(n-k)}$ - матрица дополнение, которая определяет $n-k$ избыточных (проверочных) символов. Тогда по формуле (6.4) получим **систематический код**, у которого первые k бит информационные, остальные $n-k$ проверочные.

Для декодирования используется проверочная матрица $H_{(n-k)\times n}$, причем,

$$\begin{aligned} C_i H^T &= 0_{1\times(n-k)}, \\ G H^T &= 0_{k\times(n-k)}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Если линейный двоичный (n,k) код систематический, то проверочная матрица имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} P^T & \mathrm{I}_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

Способность обнаружения и исправления ошибок

6.1.2. *Оптимальное декодирование линейных блоковых кодов*.

Блоковый (n,k) код способен обнаружить $d_{\min}-1$ ошибку и исправить $\left\lfloor \frac{1}{2}(d_{\min}-1) \right\rfloor$ ошибок, где $\lfloor \bullet \rfloor$ - наибольшее целое, содержащееся в аргументе. Пусть C_i - переданное кодовое слово, $Y = C_i + e$ - принятое кодовое слово, где e - вектор ошибок. Тогда

$$YH^T = (C_i + e)H^T = C_i H^T + eH^T = eH^T = S \text{, т.к. } C_i H^T = 0_{1\times(n-k)}.$$

Произведение

$$YH^T = eH^T = S \tag{6.8}$$

называется **синдромом**. S - характеристика образцов ошибок. Существует 2^n возможных образцов ошибок, но только 2^{n-k} синдромных. Следовательно, разные образцы ошибок приводят к одинаковым синдромам.

Для декодирования составляется таблица размером , $2^k \times 2^{n-k}$ которая называется стандартным расположением для заданного кода.

2 ЗАДАНИЕ

ЛЕКЦИЯ №7

1. Каналы связи.

1.1. *Математические модели каналов связи.*

Канал связи (К.С.) – физическая среда, которая используется для передачи сигнала от передатчика к приемнику.
Каналы связи: проводные, волоконно-оптические, беспроводные (радио) каналы, подводные акустические каналы, системы хранения информации. Так же в состав канала связи может входить часть устройств передатчика и приемника.

Рассмотрим несколько наиболее часто встречающихся моделей К.С.

I. Канал с аддитивным шумом – самая простая модель канала.

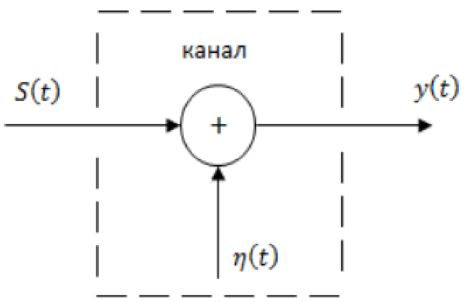


Рисунок 1.1. Структурная схема К.С с аддитивным шумом.

$$y(t) = S(t) + \eta(t) \tag{1.1}$$

Самой распространенной моделью аддитивного шума является гауссовский случайный процесс. Эта модель шума относится к широкому классу физических каналов, является преобладающей моделью при анализе и синтезе систем связи.

Далее перечислим случаи, в которых гауссовский процесс является адекватной моделью реальных шумов.

1) Если шум обусловлен в основном электронными компонентами и усилителями в приемнике, то его можно описать как тепловой шум. Тепловой шум – гауссовский случайный процесс с нулевым средним и энергетическим спектром:

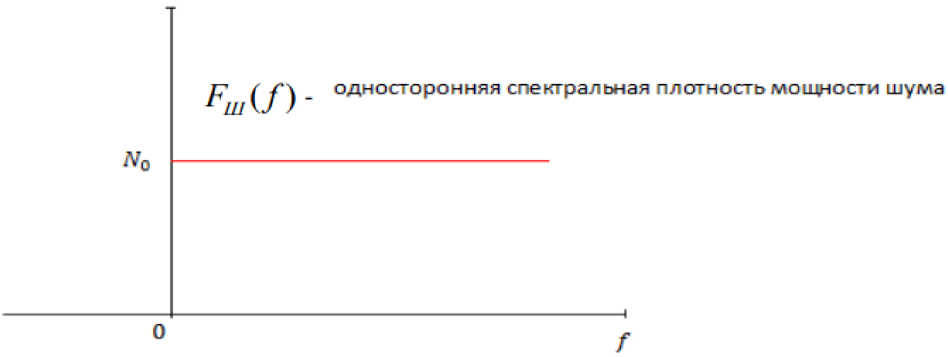
$$G_{ш}(f) = \frac{hf}{2\left[e^{\frac{hf}{kt}} - 1\right]},$$

где $h \cong 6.6 \cdot 10^{-34}$Дж · с – постоянная Планка, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, T – температура источника шума, f – частота. В диапазоне звуковых и радиочастот $hf \ll kt \Longrightarrow$

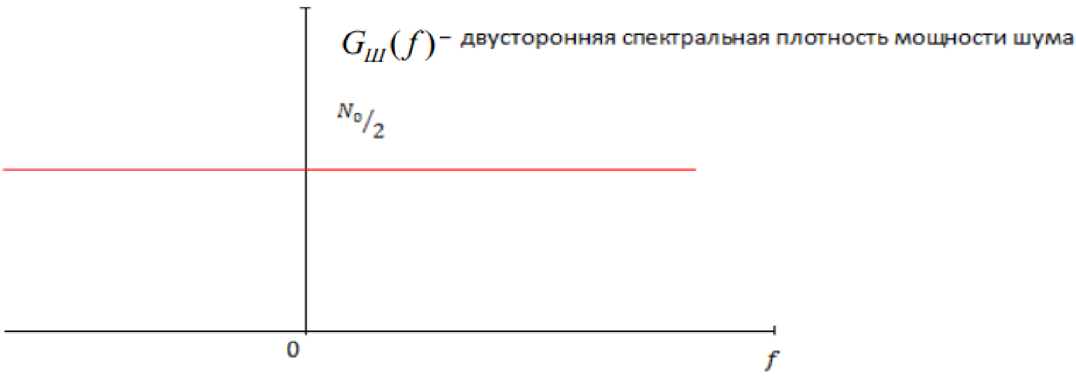
$$\mathrm{G_{ш}(f)} = \frac{\mathrm{kT}}{2} = \frac{\mathrm{N_0}}{2} \tag{1.2}$$

Величину $N_0 = kT$ называют односторонней спектральной плотностью мощности (СПМ) белого шума. Ниже на рисунке 1.2 приведены графики

СПМ: односторонней (физического спектра) и двусторонней (математического спектра).



а)



б)

Рисунок 1.2. Спектральная плотность мощности белого шума.

При ширине полосы пропускания приемника F мощность шума равна

$$P_ш = N_0 F. \qquad (1.3)$$

Усложненной моделью I является модель с затуханием сигнала $\longrightarrow y(t) = \alpha S(t) + \eta(t)$, где α – затухание сигнала в канале.

2) Сумма большого числа любых помех от различных источников имеет гауссовский закон распределения.

3) При прохождении помехи через узкополосную систему происходит ее нормализация.

II. <u>Канал с аддитивным шумом и мультипликативной помехой</u>

$$y(t) = \mu(t) \cdot S(t) + \eta(t), \qquad (1.4)$$

где $\mu(t)$ – мультипликативная помеха.

III. Линейный фильтровой канал

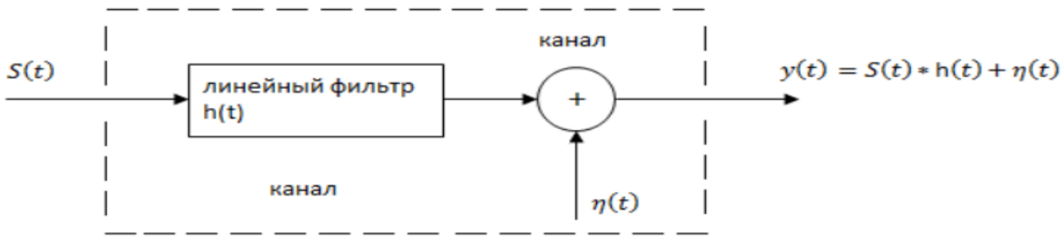


Рисунок 1.3. Структурная схема линейного фильтрового канала с постоянными параметрами.

$*$ — оператор свертки, т.е.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)S(t-\tau)d\tau + \eta(t). \quad (1.5)$$

$h(t)$ — импульсная характеристика фильтра, которая связана с передаточной функцией $k(j\omega)$ преобразованием Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(j\omega)\, e^{j\omega t}d\omega \text{ — обратное преобразование Фурье.}$$

$$k(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}dt \text{ — прямое преобразование Фурье.}$$

Такие каналы (математические модели) используются в физических каналах (например, телефонные каналы), где фильтры ставятся для того, чтобы гарантировать, что передаваемые сигналы не превышают точно установленные ограничения на ширину полосы и, т.о. не интерферируют друг с другом.

IV. Линейный фильтровой канал с переменными параметрами

Рисунок 1.4. Структурная схема линейного фильтрового канала с переменными параметрами.

$$y(t) = S(t) * h(\tau, t) + \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t)\, S(t-\tau)d\tau + \eta(t) \quad (1.6)$$

Такой моделью могут быть описаны подвижные акустические и ионосферные радиоканалы, которые возникают в условиях меняющегося во времени многолучевого распространения передаваемого сигнала.

Хорошей моделью для многолучевого распространения волн через физические каналы типа ионосферы ($f < 30$ МГц) и каналы подвижной сотовой связи является:

$$h(\tau, t) = \sum_{k=1}^{L} a_k(t)\delta(\tau - \tau_k), \quad (1.7)$$

где $a_k(t)$ — меняющиеся во времени коэффициенты затухания для L путей распространения, τ_k — соответствующие им времена задержки $\Longrightarrow$

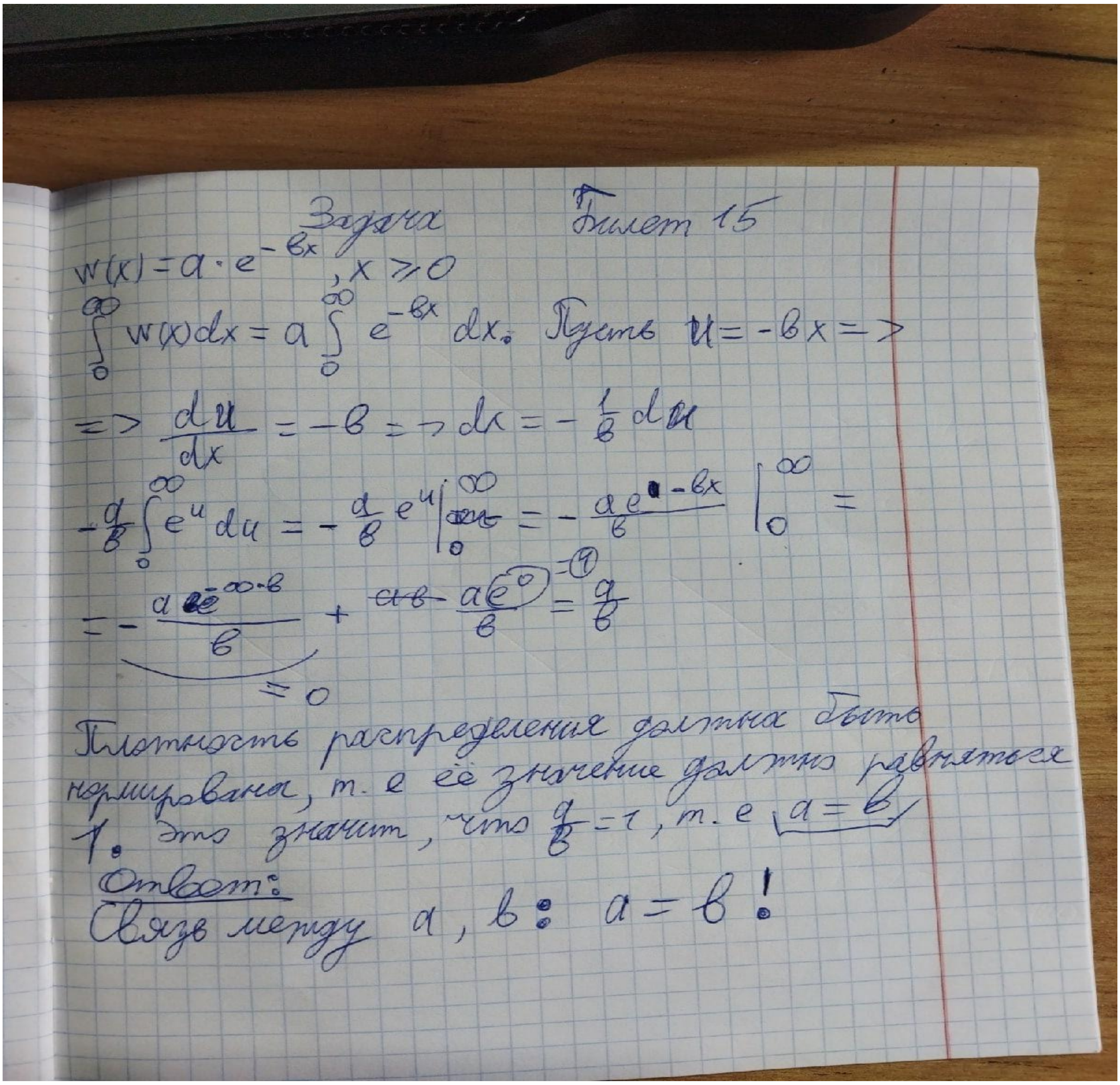
после подстановки (1.7) в (1.6) получим выражение

$$y(t) = \sum_{k=1}^{L} a_k(t)S(t - \tau_k) + \eta(t) \quad (1.8)$$

ЗАДАЧА

Для того чтобы установить связь между параметрами a и b для данного случайного процесса, необходимо воспользоваться условием нормировки плотности распределения вероятности.

Интегрируя плотность распределения вероятности w(x) по всем возможным значениям x, получаем:


Задача Билет 15

$w(x) = a\cdot e^{-bx}, x \geq 0$

$\int_0^\infty w(x)dx = a\int_0^\infty e^{-bx}dx.$ Пусть $u = -bx \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -b \Rightarrow dx = -\frac{1}{b}du$

$-\frac{a}{b}\int_0^\infty e^u du = -\frac{a}{b}e^u\Big|_0^\infty = -\frac{ae^{-bx}}{b}\Big|_0^\infty =$

$= \underbrace{-\frac{ae^{-\infty\cdot b}}{b}}_{=0} + \cancel{ab}\,\frac{a\overset{=1}{e^{0}}}{b} = \frac{a}{b}$

Плотность распределения должна быть нормирована, т.е её значение должно равняться 1. Это значит, что $\frac{a}{b} = 1$, т.е $\boxed{a = b}$

Ответ:

Связь между a, b: a = b!