Билет 6

Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования
Московский технический университет связи и информатики

БИЛЕТ Утверждаю
Зав.кафедрой

№ 6

___

Факультет______________РиТ________________Курс____2____

Дисциплина_______________ОТС_________________

1. Обнаружение детерминированного сигнала на фоне АБГШ. Корреляционный прием.
2. Ошибки в теории дискретизации и восстановлении непрерывных функций.

Задача. Построить спектр дискретного сигнала $x_{\partial}(t) = x(t)\delta_T(t)$, если $\delta_T(t)$ - периодическая с периодом T=0.5 мс последовательность дельта - функций, а непрерывный сигнал имеет спектр

$$S(f) = 1 - 2\cdot 10^{-3}|f|, \qquad |f| \le 0.5 \text{ кГц}.$$

1 ВОПРОС

2.1.3. <u>Обнаружение детерминированных сигналов на фоне аддитивного ГБШ.</u>

Пусть $\eta_i \sim N(0, \sigma_\eta^2)$- ГБШ. Мгновенные значения такой помехи распределены по гаусовскому закону $w_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_\eta^2}}$, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_η^2. Отсчёты такой помехи независимы, спектральная плотность мощности равномерна. Тогда функция правдоподобия факторизуется:

$$w(\vec{\mathbf{y}}_n | \mathrm{H}_k) = \prod_{i=1}^{n} w(y_i | \mathrm{H}_k), \ \mathrm{k}=\overline{0;1}$$

Мгновенные значения входного воздействия при гипотезе H_0 распределены по закону: $w(y_i|\mathrm{H}_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\frac{-y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}$, при гипотезе H_1:

$$w(y_i|\mathrm{H}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\frac{-(y_i - S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}} \Rightarrow$$

$$w(\vec{\mathbf{y}}_n|\mathrm{H}_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{-y_i^2}{2\sigma_\eta^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}$$

$$w(\vec{\mathbf{y}}_n|\mathrm{H}_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{-(y_i - S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}(y_i - S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}} \Rightarrow$$

$$\Lambda(\vec{\mathbf{y}}_n) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}(y_i - S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}} = \frac{e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}(y_i - S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}}}{e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}} = e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - y_i^2 + 2y_i S_i - S_i^2)}{2\sigma_\eta^2}} =$$

$$e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i S_i - \frac{S_i^2}{2}\right)}{\sigma_\eta^2}} \Rightarrow \ln \Lambda(\vec{\mathbf{y}}_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i S_i - \frac{S_i^2}{2}\right)}{\sigma_\eta^2} = \ln C \Rightarrow$$

$\frac{1}{\sigma_\eta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i S_i = \ln C + \frac{1}{\sigma_\eta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i^{\,2}}{2}$ или $\sum_{i=1}^{n} y_i S_i = \sigma_\eta^2 \ln C + \sum_{i=1}^{n}\frac{S_i^{\,2}}{2}$.

Тогда получим алгоритм обнаружения:

$$\text{если } \sum_{i=1}^{n} y_i S_i \geq C' \Rightarrow \gamma_1 \tag{2.13}$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^{n} y_i S_i < C' \Rightarrow \gamma_0$$

$E = \sum_{i=1}^{n} S_i^{\,2}$ - энергия сигнала =>

$$C' = \sigma_\eta^2 \ln C + \frac{E}{2} \tag{2.14}$$

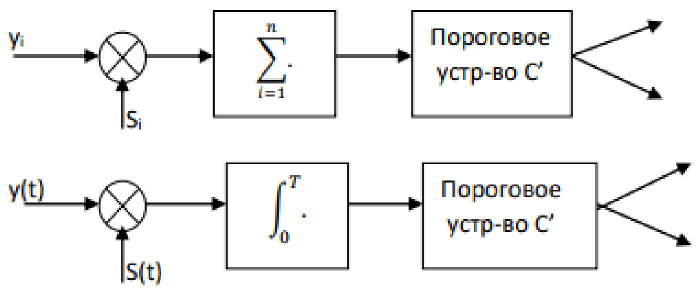
Формулы (2.13) и (2.14)- обработка дискретного детерминированного сигнала на фоне ГБШ.

Если обработке подвергается непрерывный сигнал y(t), то сумма заменяется интегралом: $\lambda\big(y(t)\big) = \int_0^T y(t)\,S(t)dt$ - корреляционный интеграл, T- длительность сигнала C' находится по (2.14), где $E=\int_0^T S(t)^2\,dt$ =>

$$\text{Если } \lambda\big(y(t)\big) \geq C' \Rightarrow \gamma_1\ , \tag{2.15}$$

$$\text{если } \lambda\big(y(t)\big) < C' \Rightarrow \gamma_0$$

Т. о. получили корреляционную обработку сигнала в непрерывном времени.



а)

б)

Рисунок 2.1. Корреляционная обработка детерминированного дискретного сигнала (а), непрерывного сигнала (б) на фоне ГБШ.

$\otimes$ - умножитель

ДОП ИНФА

Для обнаружения детерминированного сигнала на фоне АБГШ (аддитивный белый гауссовский шум) также отлично подойдет согласованный фильтр, т. к. он обеспечивает максимально возможное пиковое отношение сигнал / шум.

Критерий оптимальности согласованного фильтра: qв = qв_max, т. е. на выходе согласованного фильтра должно реализоваться максимальное отношение сигнал/шум.

$$q_в = \frac{|s_в(t_0)|^2}{\sigma^2_{\eta в}} = \frac{\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\eta(\omega)|K(j\omega)|^2 d\omega},$$ где t_0 - некоторый момент времени, $q_в$ — отношение сигнал/шум по мощности на выходе фильтра в момент времени t_0.

Далее надо найти такую $K(j\omega)$, при которой $q_в = q_{вmax}$.

Поставленная задача может быть решена методом вариационного исчисления или используя неравенство Шварца-Буняковского.

Неравенство Шварца-Буняковского:

Если имеются две произвольные комплексные функции f(x) и g(x), то выполняется соотношение:

$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot g(x)dx\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx$, причем знак «=» имеет место, если $g(x) = C_0 f(x)$, где C_0=const, «*» знак сопряжения.

Тогда, полагая:

$$f^*(x) = \frac{S(j\omega)e^{j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_\eta(\omega)}}, \qquad g(x) = K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)},$$

и учитывая

$\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot g(x)dx\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx} \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$, имеем

$$\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(j\omega)e^{j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_\eta(\omega)}}\cdot K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)}d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)}\right|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}G_\eta(\omega)|K(j\omega)|^2\,d\omega}q_в$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(j\omega)|^2}{G_\eta(\omega)}d\omega,$$

$q_{вmax}$ определяется правой частью данного выражения

$$=> \qquad q_в = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(j\omega)|^2}{G_\eta(\omega)}d\omega \qquad (2.19)$$

и $q_в = q_{вmax}$, если $K(j\omega)\cdot\sqrt{G_\eta(\omega)} = C_0\cdot\frac{S^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{2\pi G_\eta(\omega)}}$ =>

$$K(j\omega) = const \cdot \frac{S^*(j\omega)}{G_\eta(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0} \qquad (2.20)$$

Формула (2.20) – оптимальная КЧХ фильтра, (2.19) – максимальное отношение сигнал/шум на выходе фильтра для произвольной стационарной помехи со спектральной плотностью мощности $G_\eta(\omega)$. Такая обработка оказывается не является оптимальной. Однако, она оптимальна , если $\eta(t)$ – гауссовский шум со спектральной плотностью мощности $G_\eta(\omega) = \frac{N_0}{2}$. В этом случае оптимальный фильтр называется согласованным.

Согласованный фильтр – линейный фильтр, на выходе которого получается максимально возможное пиковое отношение сигнал/шум при приёме полностью известного сигнала на фоне БГШ.

=> (2.19) → $q_в = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2|S(j\omega)|^2}{N_0} d\omega = \frac{2E}{N_0}$,

где E=$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega -$ энергия сигнала т. е.

$$q_в = \frac{2E}{N_0} \qquad (2.21)$$

(2.20) преобразуется в

$$K(j\omega) = const \cdot S^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \qquad (2.22)$$

2 ВОПРОС

1.3.5. Погрешности дискретизации и восстановления непрерывных сигналов.

Теорема Котельникова точно справедлива только для сигналов с финитным (конечным) спектром. На рис.1.18 показаны некоторые варианты финитных спектров:

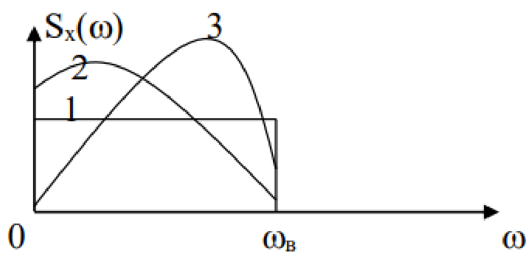


Рис.1.18.

Однако спектры реальных информационных сигналов бесконечны. В этом случае теорема Котельникова справедлива с погрешностью.

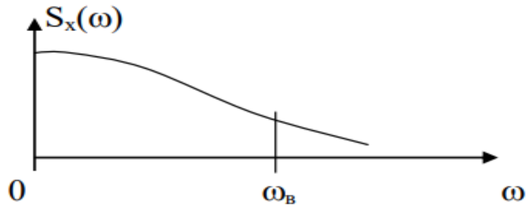


Рис.1.19.

Погрешность дискретизации определяется энергией спектральных составляющих сигнала, лежащих за пределами частоты $\omega_в$.

$$\overline{\Delta E_{\partial}^{2}} = \int_{\omega_в}^{\infty} \left| \dot{S}_x(\omega) \right|^2 d\omega \qquad \textbf{(1.10)}$$

Вторая причина возникновения погрешностей – не идеальность восстанавливающего ФНЧ.

Т.о., погрешность дискретизации и восстановления непрерывного сигнала определяется следующими причинами:

1) Спектры реальных сигналов не финитны.
2) АЧХ реальных ФНЧ неидеальны.

Например, если в качестве ФНЧ использовать RC- фильтр, то восстановленный сигнал на его выходе будет иметь вид:

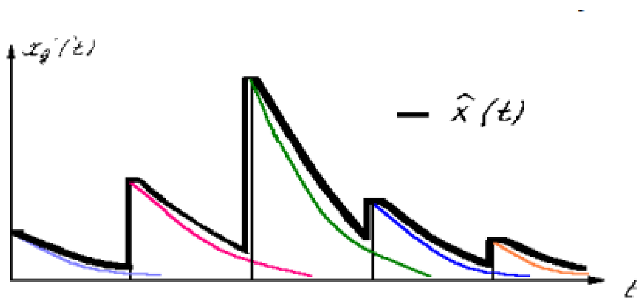


Рис.1.20.

с учетом того, что импульсная реакция RC-фильтра равна:

$$g_{RC}(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

<u>Вывод</u>: чем выше $\omega_в$ и чем ближе характеристики ФНЧ к идеальным, тем ближе восстановленный сигнал к исходному.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КО 2 ВОПРОСУ!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!(НА ВСЯКИЙ СЛУЧАЙ)…………………………………………………………

1.3.4. Восстановление непрерывного сигнала из отсчётов.

В линию связи передаются импульсы-отсчёты, которые поступают на вход приёмника.

Для восстановления исходного непрерывного сигнала из импульсов-отсчётов надо эти импульсы подать на вход идеального фильтра низких частот (ИФНЧ), который имеет следующие характеристики.

Амплитудно-частотная характеристика идеального ФНЧ (АЧХ ИФНЧ) имеет вид:

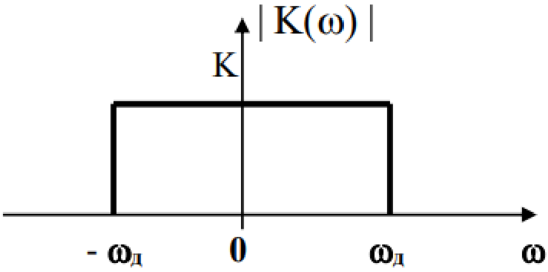


Рис.1.16

Импульсная реакция ИФНЧ, т.е. реакция на дельта-импульс имеет вид:

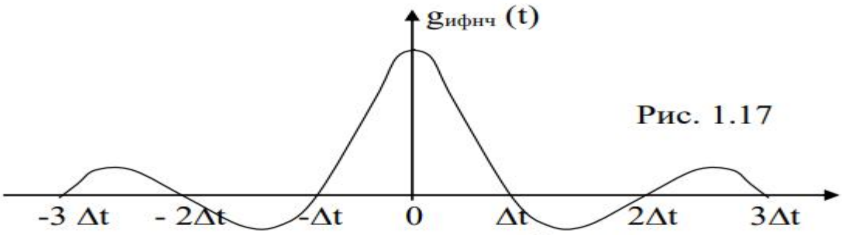


Рис. 1.17

$$g_{ИФНЧ}(t) = K\,\frac{\sin \omega_в t}{\omega_в t}$$

$$\omega_в t = k\pi \qquad\qquad (1.9)$$

$$t = k\,\frac{\pi}{\omega_{верх}} = k\Delta t$$

Первая формула - это выражение для импульсной реакции ИФНЧ, вторая и третья формулы определяют моменты времени, для которых $g_{ИФНЧ}(t)$ обращается в ноль.

Со спектральной точки зрения мы пропускаем дискретизированный сигнал, имеющий спектр в соответствии с рис.1.13 или 1.15, через ИФНЧ с АЧХ рис. 1.16. Очевидно, что на выходе ИФНЧ получим спектр:

$$S(\omega)= K\, S_д(\omega) = K\, S_x(\omega)\ /\Delta t;$$

или для АИМ сигнала получим: $S(\omega)= KS_д(\omega) = K\, a_0 S_x(\omega)\ /2$.

Таким образом, с точностью до постоянного множителя мы получили на выходе ИФНЧ спектр исходного сигнала x(t). С временной точки зрения мы получили исходный непрерывный сигнал x(t).

ЗАДАЧА

$x_д(t) = x(t)\delta_T(t)$ - дискретизированный сигнал

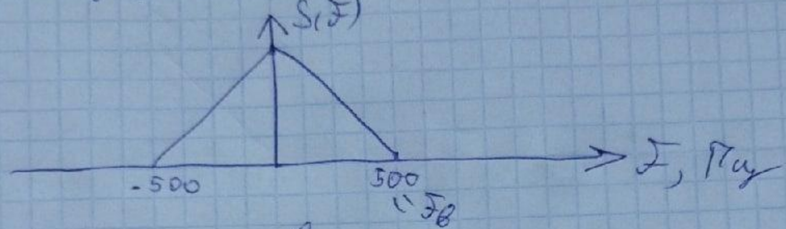
$x(t)$ - исходный сигнал.

$\delta_T(t)$ -периодическая последовательность δ - импульсов.

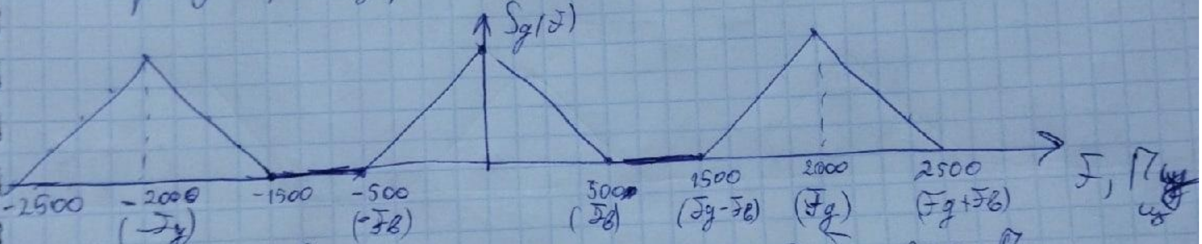
Задача Билет 6

Спектр исходного сигнала: $S(F) = 1 - 2\pi \cdot 10^{-3}|F|$.

$|F| \le 0{,}5$ кГц; $T = 0{,}5$ м.с.



Спектр дискретизированного сигнала:



$\omega_д = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} = 4000\pi\,(рад/с) \Rightarrow F_д = 2000$ Гц.

$F_д > 2F_в$.

БИЛЕТ 6

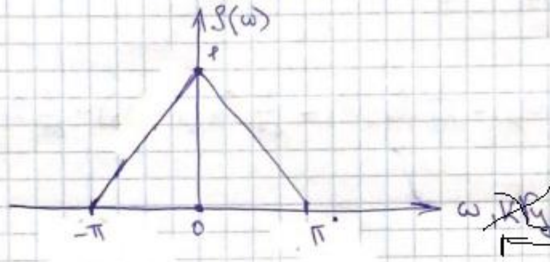
Задача: построить спектр дискретного сигнала $x_д(t) = x(t)\,\sigma_T(t)$, если $\sigma_T(t)$ – периодическая с $T = 0{,}5$ мс дельта-функция

непрерывный сигнал имеет спектр

$S(f) = 1 - 2\cdot 10^{-3}|f| \qquad |f| \le 0{,}5$ кГц

$f = \frac{\omega}{2\pi}$, $\omega = f\cdot 2\pi$

$S(\omega) = 1 - 2\cdot 10^{-3}\left|\frac{\omega}{2\pi}\right| = 1 - \frac{|\omega|}{10^{3}\cdot\pi}$



$\Delta t = T$

$\omega_в = 2\pi f_в = 2\pi\cdot 500 = \pi 1000$ ~~Гц~~ рад/с.

$\omega_д = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{0{,}5\cdot 10^{-3}} = 4000\pi$ ~~Гц~~ рад/с

по т. Котельникова идеальная частота дискретизатора выбирается исходя из соотношения $\omega_д \ge 2\omega_в$, в нашем случае: $4\pi > 2\pi \Rightarrow$ спектр дискретного сигнала будет разрежаться по ширине: