ЛЕКЦИЯ № 6.

Энергетические характеристики случайных процессов.

1) Корреляционная функция стационарного СП.

Пусть $\zeta(t)$ - стационарный СП с математическим ожиданием (средним значением) $M\{\zeta(t)\} = m_x$ и дисперсией $M\{\zeta(t) - m_x\}^2 = \sigma_x^2$. Тогда корреляционная и ковариационная функция определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &R_x(\tau) = M\{\zeta(t)\zeta(t+\tau), \\ &B_x(\tau) = M\{(\zeta(t) - m_x)(\zeta(t+\tau) - m_x)\} = R_x(\tau) - m_x^2. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Значение ковариационной функции при $\tau = 0$ равно дисперсии сигнала:

$$\sigma_x^2 = B_x(0) = R_x(0) - m_x^2, \tag{6.2}$$

где $R_x(0) = M\{\zeta(t)\}^2 = m_{2x}$. Выражение (6.2) выполняется для стационарных в широком смысле случайных процессов.

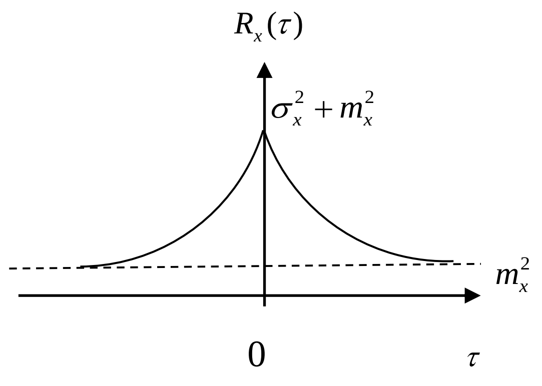
Свойства корреляционной и ковариационной функции.

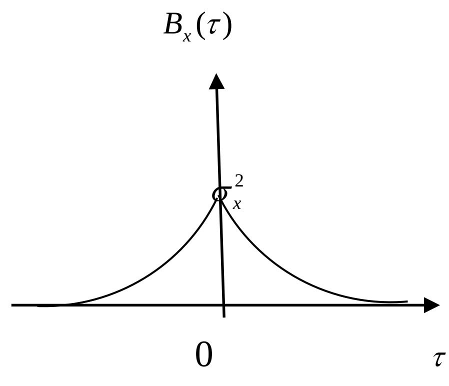
а) $R_x(\tau) = R_x(-\tau), B_x(\tau) = B_x(-\tau)$, т.е. функции являются четными.

б) $|R_x(\tau)| \le R_x(0), |B_x(\tau)| \le B_x(0)$, т.е. функции принимают максимальное значение при $\tau = 0$.

в) Отношение $\rho_x(\tau) = \dfrac{B_x(\tau)}{B_x(0)}$ называют **нормированной** корреляционной функцией. Она обладает следующими свойствами:

$$\rho_x(0) = 1, \rho_x(\infty) = 0, \rho_x(\tau) = \rho_x(-\tau), |\rho_x(\tau)| \le 1$$





Для стационарного СП всегда можно указать такое $\tau_0 = \tau$, при котором величины $\zeta(t)$ и $\zeta(t+\tau)$ для любого t будут практически некоррелированными, т.е. при $\tau > \tau_0$ $\rho_x(\tau) < 0.05$. Величина τ_0 называется **интервалом корреляции** и определяется следующим образом:

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau . \qquad (6.3)$$

2) Взаимная корреляционная и ковариационная функция стационарно связанных случайных процессов.

Два стационарных случайных процесса $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ **стационарно связаны в широком смысле**, если взаимная корреляционная и ковариационная функция зависит только от временного сдвига τ:

$$\begin{aligned} &M\{\zeta(t)\eta(t+\tau)\} = R_{xy}(\tau), \\ &M\{(\zeta(t)-m_x)(\eta(t+\tau)-m_y)\} = B_{xy}(\tau) \end{aligned} \qquad (6.4)$$

Свойства функций $R_{xy}(\tau), B_{xy}(\tau)$.

а) $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau), R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau), B_{xy}(\tau) = B_{yx}(-\tau), B_{xy}(\tau) \neq B_{xy}(-\tau)$, т.е. функции не являются четными.

б) $|R_{xy}(\tau)| \le R_x(0)R_y(0), |B_{xy}(\tau)| \le B_x(0)B_y(0)$.

в) **Нормированная** взаимная корреляционная функция задается выражением

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{B_{xy}(\tau)}{\sqrt{B_x(0)B_y(0)}} .$$

3) Спектральный анализ случайных процессов.

Для детерминированных сигналов успешно применяется гармонический анализ: ряды Фурье для периодических функций, интеграл Фурье для апериодических сигналов. Пусть $x(t)$ - детерминированный непериодический сигнал. Тогда он связан со своим комплексным спектром $S(j\omega)$ парой преобразований Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega,$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица. Условие существования спектра: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$. Непосредственное применение гармонического анализа для СП невозможно, т.к. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^{(k)}(t)| dt = \infty$ и, следовательно, амплитудный спектр такой реализации не существует (не ограничен) при любых частотах. Поэтому, для случайных процессов введена **спектральная плотность мощности (СПМ)** $G_x(\omega)$.

Рассмотрим усеченную реализацию $x_T^{(k)}(t)$ СП $\zeta(t)$:

$$x_T^{(k)}(t) = \begin{cases} x^{(k)}(t), |t| \le \dfrac{T}{2}, \\ 0, |t| > \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

Тогда преобразование Фурье финитной (конечной) функции имеет вид:

$$S_T^{(k)}(j\omega) = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T^{(k)}(t) e^{-j\omega t} dt .$$

Энергию рассматриваемого отрезка реализации можно вычислить с помощью равенства Парсеваля:

$$E_T^{(k)} = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x_T^{(k)}(t))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| S_T^{(k)}(j\omega) \right|^2 d\omega .$$

Разделив эту энергию на длительность реализации T, получим среднюю мощность k- ой реализации на отрезке $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$:

$$P_T^{(k)} = \frac{E_T^{(k)}}{T} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| S_T^{(k)}(j\omega) \right|^2}{T} d\omega .$$

При увеличении T энергия реализации $E_T^{(k)}$ тоже увеличивается, но величина $P_T^{(k)}$ стремится к некоторому пределу. Тогда

$$P_T^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \to \infty} \frac{\left| S_T^{(k)}(j\omega) \right|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega, \text{ где}$$

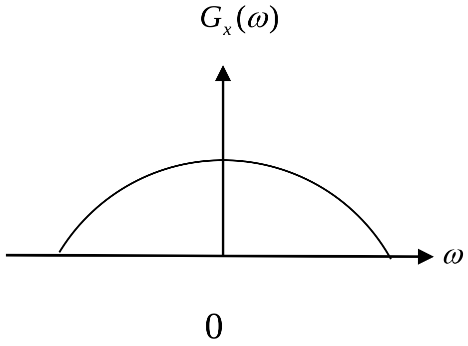
$$G_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{\left| S_T^{(k)}(j\omega) \right|^2}{T} . \qquad (6.5)$$

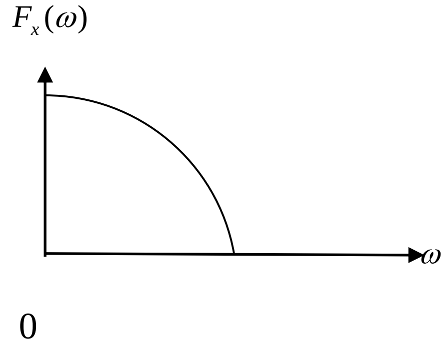
Формула (6.5) – **спектральная плотность мощности** СП, показывает, как распределена мощность процесса по частоте. Это так называемый **двусторонний** (математический) спектр, он содержит как положительные, так и отрицательные частоты. СПМ – функция действительная, четная:

$$G_x(\omega) = G_x(-\omega).$$

Односторонний (физический) спектр определяется следующим образом:

$$F_x(\omega) = 2G_x(\omega).$$





Размерность СПМ: Вт/Гц.

4) Теорема Винера - Хинчина.

Данная теорема утверждает, что **ковариационная функция** $B_x(\tau)$ **и спектральная плотность мощности СП** $G_x(\omega)$ **связаны парой преобразований Фурье**:

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$
$$B_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \qquad (6.6)$$

Из теоремы следует, что **чем шире СПМ случайного процесса, тем меньше интервал корреляции** τ_0 **и соответственно, чем больше интервал корреляции, тем уже спектр.**

Классификация случайных процессов по ширине спектра.

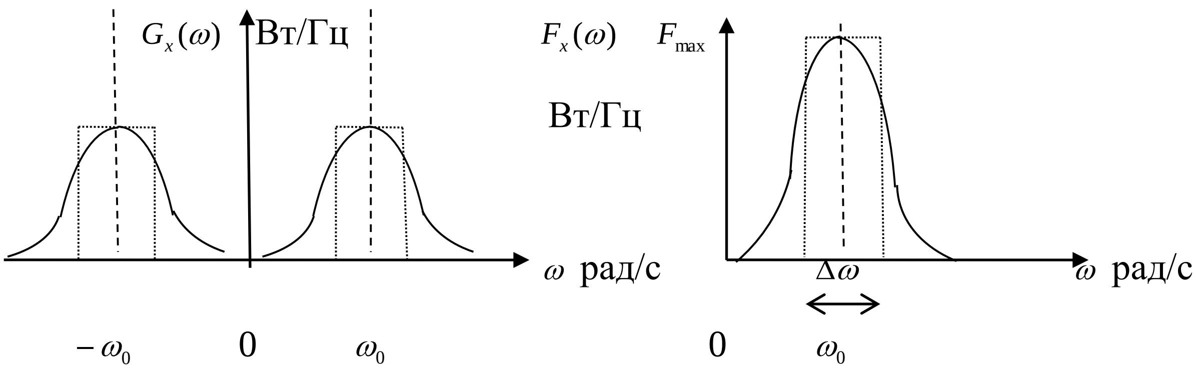
1. **Узкополосные** случайные процессы.

Стационарный в широком смысле СП $\zeta(t)$ называется **узкополосным**, если его спектральная плотность мощности $G_x(\omega)$ или $F_x(\omega)$ сосредоточена в относительно узкой полосе частот около некоторой фиксированной частоты ω_0. Или СП узкополосный, если $\omega_0 >> \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ - **ширина спектра**.

Пусть имеется односторонний спектр $F_x(\omega)$, $F_{\max}$ - его максимальное значение. Тогда случайный процесс $\zeta(t)$ можно заменить другим СП, у которого СПМ постоянна и равна $F_{\max}$ в пределах полосы $\Delta\omega$, выбираемых из условия равенства средних мощностей обоих процессов: $F_{\max}\Delta\omega = \int\limits_0^\infty F_x(\omega)d\omega$. В результате получим:

$$\Delta\omega = \frac{1}{F_{\max}} \int\limits_0^\infty F_x(\omega)d\omega. \qquad (6.7)$$

Формула (6.7) - **эффективная ширина спектра** случайного процесса.



Ковариационная (корреляционная) функция узкополосного СП представляет собой осциллирующую функция с медленно меняющейся огибающей. Например,

$B_x(\tau) = B_0 e^{-\alpha\tau^2} \cos(\omega_0\tau)$.

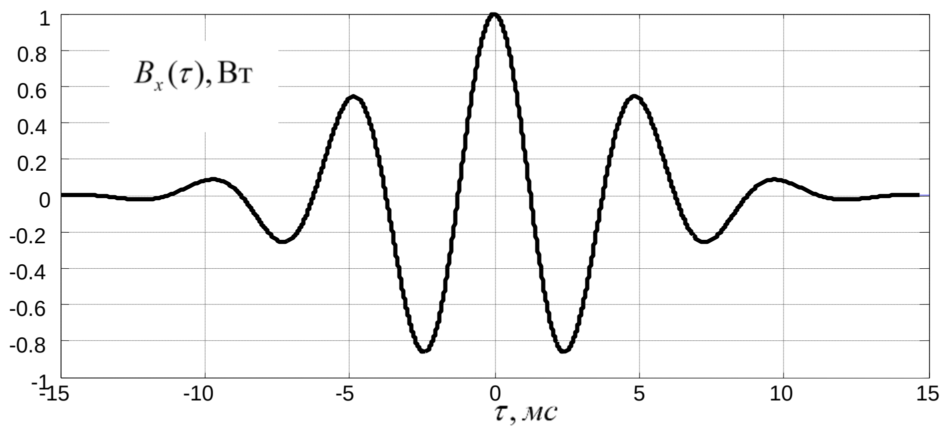
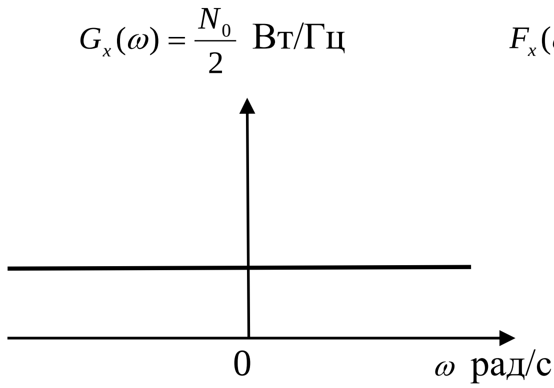
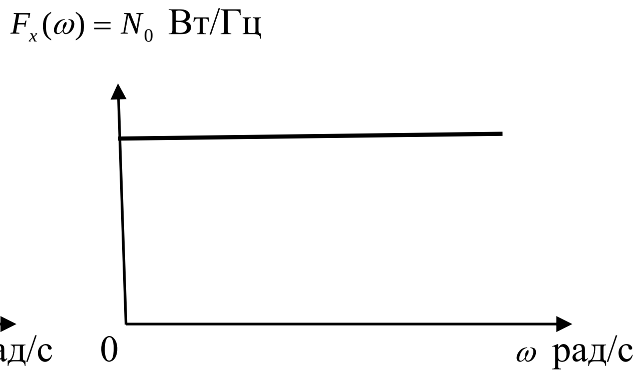


График построен при следующих данных: $\omega_0 = 0.4\pi \cdot 10^3 (рад/с), \alpha = 2.5 \cdot 10^4 (1/\text{с}^2), B_0 = 1(\text{Вт})$.

2. **Белый шум**.

Белый шум (Б.Ш.) – предельно широкополосный случайный процесс. СПМ его сохраняет постоянное значение на всех частотах.

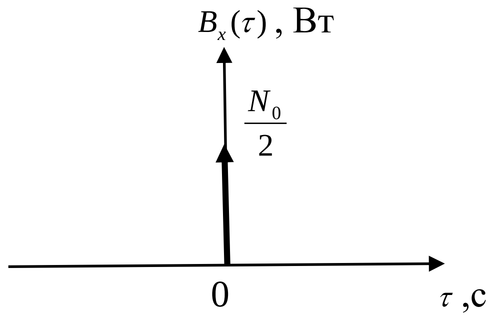




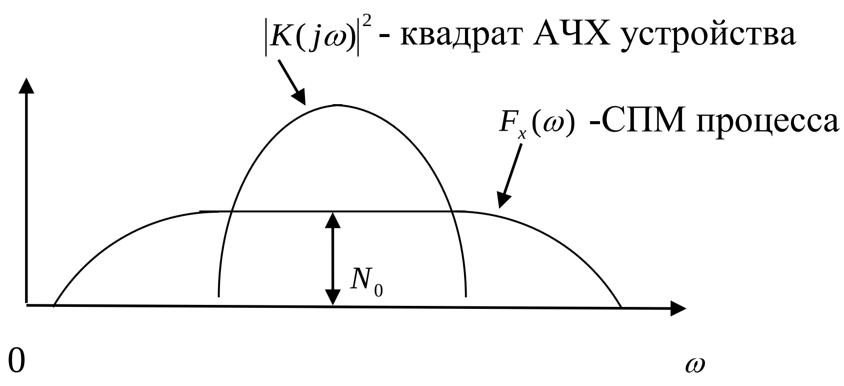
Ковариационная функция белого шума представляет собой дельта функцию. Это значит, что **значения Б.Ш., отстоящие друг от друга на сколь угодно малый интервал времени, некоррелированы**.

По теореме Винера-Хинчина (1.20) имеем : $B_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$, где

$\delta(\tau) = \begin{cases} \infty, \tau = 0, \\ 0, \tau \neq 0. \end{cases}$ -дельта функция. Тогда $\sigma_x^2 = B_x(0) = \infty$.



Белый шум – удобная математическая модель. Многие широкополосные реально существующие случайные процессы можно заменить Б.Ш., если в рассматриваемой задаче существенным является ограниченная полоса частот:



Основные модели случайных процессов.

1) **Детерминированный** процесс $\zeta(t)$ – процесс, множество реализаций которого состоит из одной, появляющейся с вероятностью 1. Полное описание детерминированного процесса – функция $s(t)$. Его можно рассматривать как вырожденный СП с функцией распределения $F_1(x,t) = U(x - s(t))$, где $U(\bullet)$ - единичный скачок при $x = s(t)$. Среднее значение и дисперсия равны соответственно $m_x(t) = s(t), \sigma_x^2 = 0$.

2) **Квазидетерминированный** случайный процесс представляется совокупностью функций времени $s(t,\Theta)$, зависящих от случайного параметра Θ, в общем случае векторного. Пример: $s(t,a,\varphi) = a\sin(\omega t + \varphi)$, где ω - известная круговая частота, a,φ - случайная амплитуда и фаза колебания. Если начальная случайная фаза распределена равномерно в интервале $[-\pi;\ \ \pi]$, то процесс является стационарным в узком смысле. При $a = const$ он эргодический.

3) **Марковские** СП – процессы без последействия, т.е

$$P\{\zeta(t_n) \le x_n / x_1,...., x_{n-1}, t_1,..., t_{n-1}\} = P\{\zeta(t_n) \le x_n / x_{n-1}, t_{n-1}\},$$

где $P\{\bullet/\bullet\}$ - условная вероятность. Это значит, что будущее состояние x_n и прошлые состояния $x_1,...., x_{n-2}$ при фиксированном x_{n-1} независимы. Многомерная плотность распределения вероятности в этом случае факторизуется следующим образом:

$$w_n(x_1,..., x_n, t_1,...t_n) = w(x_1,t_1)\cdot w(x_2,t_2 / x_1,t_1) \times .... \times w(x_n,t_n / x_{n-1},t_{n-1}), \tag{6.8}$$

$w(\bullet/\bullet)$ - условная плотность распределения вероятности. Формула (1.22) описывает односвязный марковский процесс. Аналогично определяется двух, трех и т.д. связный СП.

4) **Гауссовские** случайные процессы. СП $\zeta(t)$ называется **гауссовским** (**нормальным**), если совместная плотность распределения вероятности любой конечной совокупности величин $\zeta(t_i), i=1,2,....$ **нормальная**, т.е.

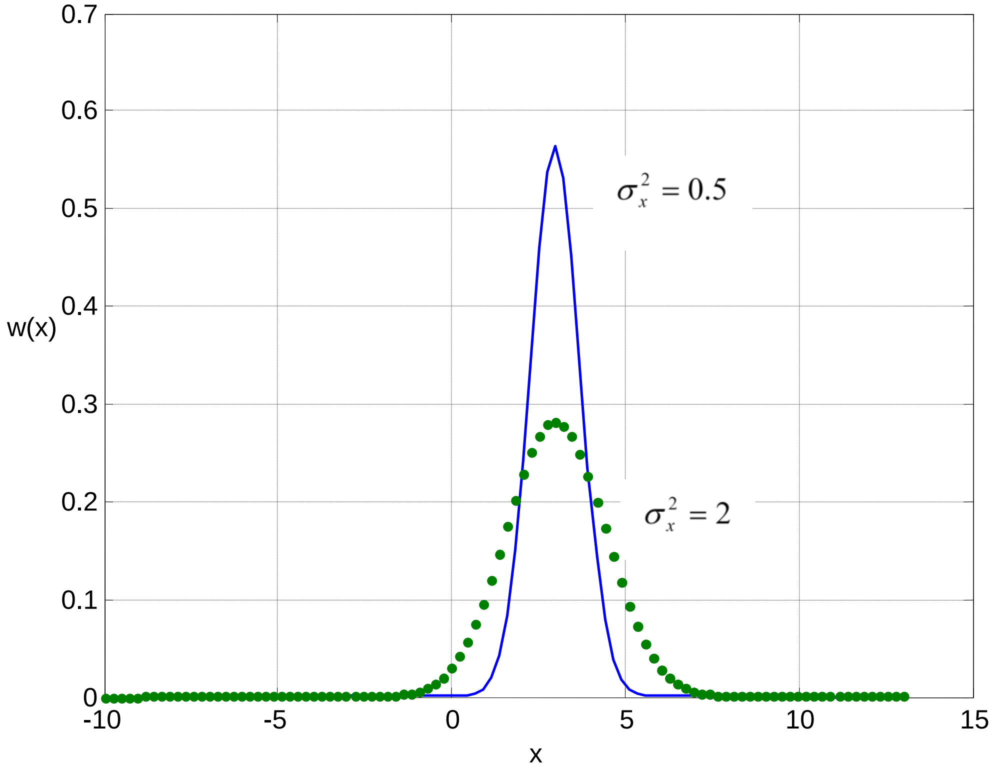
$$w_n(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B_x}}e^{-\frac{1}{2}(X-\overline{m}_x)^T B_x^{-1}(X-\overline{m}_x)}, \qquad (6.9)$$

где $X=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^T, \overline{m}_x=\begin{pmatrix}m_x(t_1) & \cdots & m_x(t_n)\end{pmatrix}^T$ - вектор средних значений, «Т» - операция транспонирования, B_x - ковариационная матрица с элементами $B_x(t_i,t_j), i=1,2,...n, j=1,2,,,,n$, $\det B_x$ - определитель матрицы B_x, B_x^{-1} - матрица обратная матрице B_x. Для стационарного СП в выражении (6.9) $\overline{m}_x=\begin{pmatrix}m_x & \cdots & m_x\end{pmatrix}^T{}_{n\times 1}$, элементы ковариационной матрицы определяются значениями $B_x(t_i-t_j), i=1,2,,,n, j=1,2,...n$.

Для гауссовского СП из стационарности в широком смысле следует стационарность в узком смысле.

Одномерная плотность распределения стационарного гауссовского процесса имеет вид:

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad . \qquad (6.10)$$



Далее отметим несколько важных свойств гауссовского процесса.

1. Достаточным условием эргодичности стационарного гауссовского СП является непрерывность его СПМ, т.е. ограниченность интеграла $\int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau < \infty$

2. Линейное преобразование гауссовского процесса дает гауссовский процесс.

3. Для гауссовского СП из независимости следует некоррелированность и обратно: из некоррелированности следует независимость.

4. Если на вход узкополосной линейной системы подать СП с произвольным законом распределения вероятности, то на ее выходе будет гауссовский случайный процесс. Это явление называется эффектом **нормализации.**

В радиотехнике и связи гауссовский СП является адекватной математической моделью активных и пассивных помех, атмосферных и космических шумов, шумов в каналах с замиранием и многолучевым распространением сигналов. Флуктуационные шумы приемных устройств, обусловленные, например, тепловым движением электронов, также распределены по нормальному закону. Адекватность этой модели реальным помехам и сигналам объясняется во многих случаях действием центральной предельной теоремы теории вероятности (ЦПТ ТВ).