ЛЕКЦИЯ №13.

Кодирование стационарных источников.

Энтропия последовательности символов от стационарного источника определяется следующим образом:

$$H(X_1,...,X_J)=\sum_{i=1}^{J}H(X_i/X_1,...,X_{i-1}), \qquad (4.16)$$

где $X_1,...,X_J$ - блок случайных переменных, $H(X_i/X_1,...,X_{i-1})$ - энтропия i- го символа при условии, что источник выдал предыдущие $i-1$ символов. Энтропия на символ для такого J символьного блока:

$$H_J(X)=\frac{1}{J}H(X_1,...,X_J) \qquad (4.17)$$

Количество информации стационарного источника – энтропия на символ (4.17) при $J\to\infty$.

Пусть источник выдает J символьный блок с энтропией $H_J(X)$. Тогда можно кодировать этот блок кодом Хаффмена, который удовлетворяет префиксному условию. Полученный код имеет среднее число бит на J символов, удовлетворяющее условию:

$$H(X_1,...,X_J)\le\overline{K}_J<H(X_1,...,X_J)+1.$$

Разделим это неравенство на J, получим:

$$H_J(X)\le\overline{K}<H_J(X)+\frac{1}{J}, \qquad (4.18)$$

где $\overline{K}=\dfrac{\overline{K}_J}{J}$ - среднее число бит на один символ источника. Увеличивая длину блока J можно приблизить $\overline{K}$ к $H_J(X)$, т.е. $\overline{K}\to H_J(X)$ при $J\to\infty$.

Вывод. **Эффективное кодирование стационарных источников может быть реализовано путем кодирования длинных блоков источника алгоритмом Хаффмена**.

Недостаток: **надо знать совместные функции плотности распределения вероятности для J символьных блоков**.

4.2. Непрерывный источник (НИ).

Непрерывный (аналоговый) источник выдает непрерывный сигнал $x(t)$, который является некоторой реализацией случайного процесса $\zeta(t)$.

4.2.1. Теорема отсчетов для детерминированных функций.

Если спектр функции $x(t)$ заключен в интервале частот $-F_в < f < F_в$, то она может быть представлена в виде:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{2F_в}\right) \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)} \qquad (4.19)$$

Здесь $x\left(\frac{k}{2F_в}\right) = x_k$ - отсчеты функции $x(t)$, взятые через интервал времени $\Delta t = \frac{1}{2F_в}$, $F_в$ - верхняя частота спектра.

Обобщение теоремы отсчетов.

Теорема отсчетов применима

1) если отсчеты взяты через интервал времени $\Delta t \le \frac{1}{2F_в}$**,** т.е. частота дискретизации $f_d \ge 2F_в$,

2) к непрерывным случайным стационарным процессам с ограниченной по частоте спектральной плотностью мощности (СПМ) $G_x(\omega)$.

4.2.2. Ошибки в теории дискретизации и восстановлении непрерывных функций.

1. Ошибка за счет округления.

При цифровой записи сигнала вместо отсчетов x_k запоминаются их приближенные значения $\tilde{x}_k$. Тогда появляется ошибка, которая называется ошибкой квантования $\xi_k = \tilde{x}_k - x_k$. В этом случае восстановленный сигнал имеет вид (см. (4.19)):

$$\hat{x}_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_k \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)},$$

а ошибка восстановления определяется как

$$e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)}.$$

Найдем энергию ошибки $e_1(t)$.

$$W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e_1^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)}\right)^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(2F_в t - k))}{(\pi(2F_в t - k))^2} dt,$$

т.к. случайные величины ξ_k независимые. Введем замену переменной $\pi(2F_в t - k) = z$, тогда $dz = 2\pi F_в dt$. Далее $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(2F_в t - k))}{(\pi(2F_в t - k))^2} dt = \frac{1}{2\pi F_в} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(z)}{z^2} dz = \frac{1}{2F_в}$.

Подставляя значение вычисленного интеграла в выражения для энергии ошибки, получим

$$W_1 = \frac{1}{2F_в} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k^2 \,.$$

Мощность (дисперсия) ошибки восстановления равна $\sigma_1^2 = 2F_в W_1$.

Тогда приближенную оценку ошибки восстановления можно записать следующим образом:

$$|e_1| \le \sqrt{\sigma_1^2} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k^2} \qquad (4.20)$$

2. Ошибка за счет отбрасывания членов ряда.

При вычислении значений $x(t)$ реально используется усеченный ряд Котельникова:

$$\hat{x}_2(t) = \sum_{k=-N}^{N} x_k \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)} \,.$$

При этом возникает ошибка $e_2(t) = \hat{x}_2(t) - x(t) = -\sum_{k<-N}^{k>N} x_k \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)}$.

Справедлива оценка

$$|e_2(t)| \le \left|\frac{\sin(2\pi F_в t)}{2\pi F_в}\right| \sum_{|k|>N} \left|\frac{x_k}{t - \dfrac{k}{2F_в}}\right| \qquad (4.21)$$

3. Ошибка, вызванная усечением спектра сигнала.

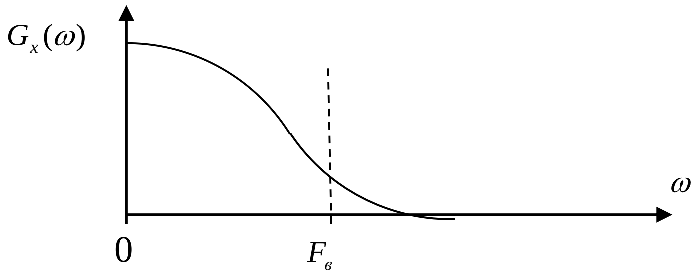
Если спектр $S(j\omega)$ или $G_x(\omega)$ сигнала занимает полосу частот $[-F_0; F_0]$, шаг дискретизации $\Delta t = \frac{1}{2F_в}$, где $F_в < F_0$, то возникает ошибка усечения спектр $e_3(t)$

В этом случае справедлива оценка:

$$|e_3(t)| \le \frac{2}{\pi}(F_0 - F_в) \max_{2\pi F_в \le \omega \le 2\pi F_0} |S(j\omega)| \qquad (4.22)$$

или при $F_0 \to \infty$ дисперсия ошибки определяется как

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi F_в}^{\infty} G_x(\omega) d\omega \qquad (4.23)$$



4. Ошибка стробирования.

На практике выборки значений $x(t)$ берутся не точно в моменты времени $t_k = \frac{k}{2F_в}$, в моменты $t_k = \frac{k}{2F_в} + \mu_k$, где μ_k - ошибка стробирования. Тогда восстановленный сигнал имеет вид:

$$\hat{x}_4(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\frac{k}{2F_в} + \mu_k) \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)}.$$

Так как ошибка μ_k мала, то функцию $x(\bullet)$ можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться первым приближением:

$$x(\frac{k}{2F_в} + \mu_k) = x(\frac{k}{2F_в}) + x'(\frac{k}{2F_в})\mu_k,$$

где $x'(\frac{k}{2F_в})$ - первая производная функции $x(\bullet)$ в точке $\frac{k}{2F_в}$. Обозначим $\delta_k = x'(\frac{k}{2F_в})\mu_k$. Тогда ошибка восстановления определяется следующим образом:

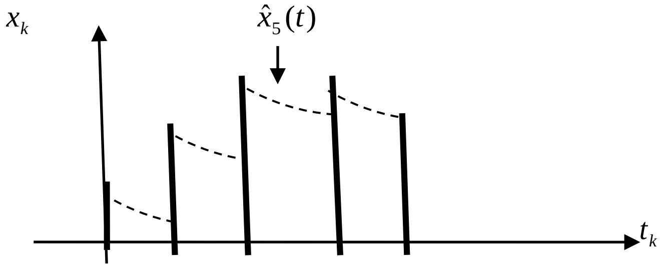
$$e_4(t) = \hat{x}_4(t) - x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k \frac{\sin(\pi(2F_в t - k))}{\pi(2F_в t - k)}$$

и справедлива оценка

$$|e_4| \le \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k^2} \qquad (4.24)$$

5. Ошибка, вызвана не идеальностью характеристик восстанавливающего фильтра нижних частот.

Если вместо ИФНЧ взять RC фильтр, у которого импульсная характеристика имеет вид $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$, то получим следующую картину:



Чем выше частота дискретизации и чем ближе характеристики фильтра к характеристикам ИФНЧ, тем меньше ошибка восстановления.

4.2.3. *Кодирование непрерывного источника*.

Формирование ИКМ сигнала.

ИКМ сигнал – сигнал импульсно-кодовой модуляции.

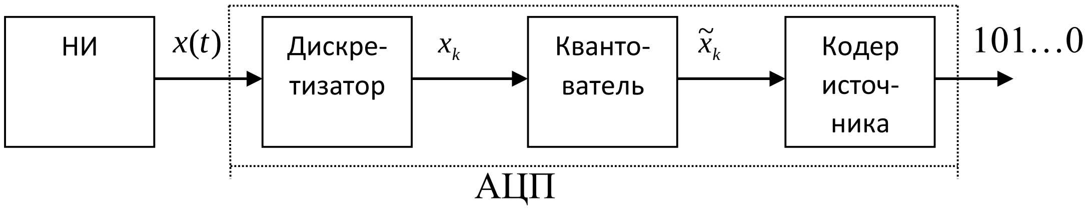


Рисунок 4.7. Структурная схема устройства формирования ИКМ - сигнала. $k = 0,1,2,.....$ - дискретное время.

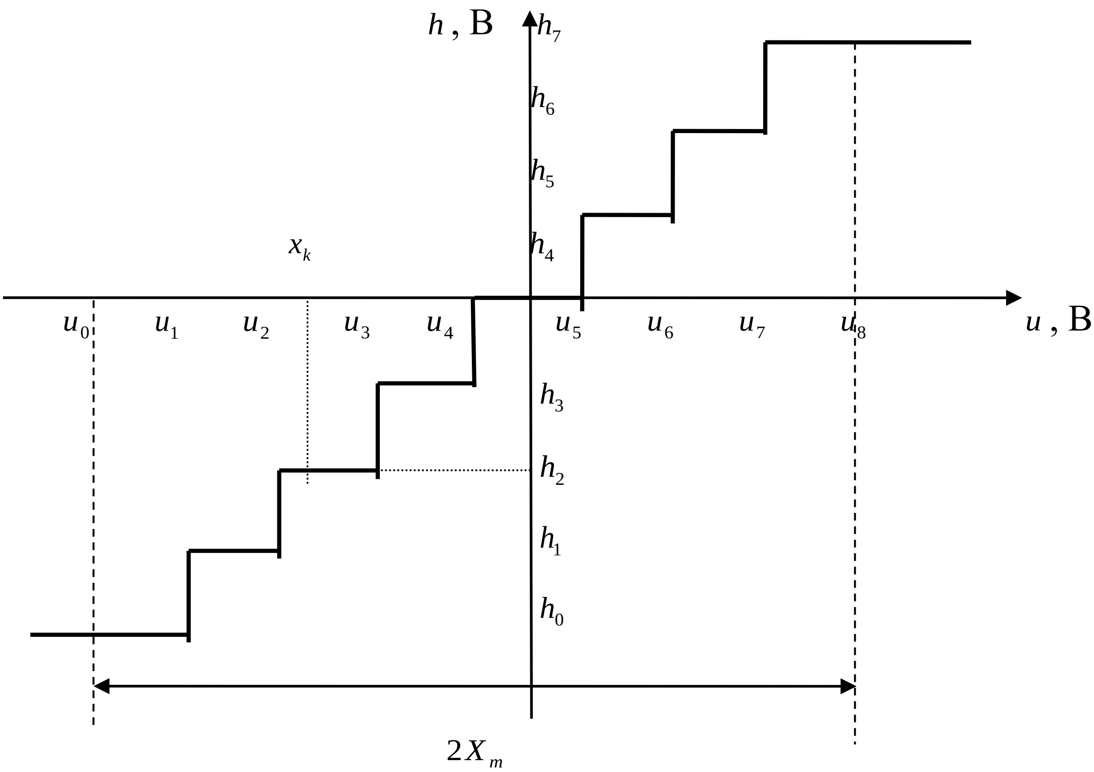


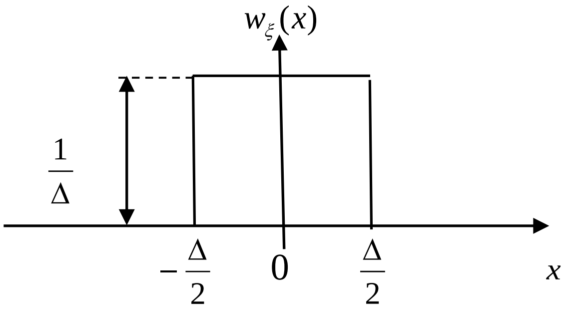
Рисунок 4.8. Характеристика типового равномерного квантователя.

h_l - уровни квантования $l = 0,1,...7$, u_l- пороги. Разность между соседними уровнями называется шагом квантования $\Delta = h_l - h_{l-1}$. Для равномерного квантователя $\Delta = const$. Здесь рассмотрен квантователь с 8 уровнями.

X_m - полномасштабный уровень АЦП, его значение, как правило, колеблется от 1 до 10 В. Значение квантованного отсчета (сигнала на выходе квантователя) равно ближайшему уровню квантования, т.е., если $u_l < x_k \le u_{l+1}$, то $\tilde{x}_k = h_l$. Пример: пусть $u_2 < x_k \le u_3$, тогда $\tilde{x}_k = h_2$. (См. характеристику квантователя). Шаг квантователя зависит от полномасштабного уровня АЦП и количества уровней квантования:

$$\Delta = \frac{2X_m}{N} \tag{4.25}$$

Ошибка (шум) квантования ξ_k при малых Δ является стационарным случайным процессом с равномерной плотностью распределения вероятности на интервале $[-\frac{\Delta}{2}; \frac{\Delta}{2}]$.



Дисперсия шума квантования равна

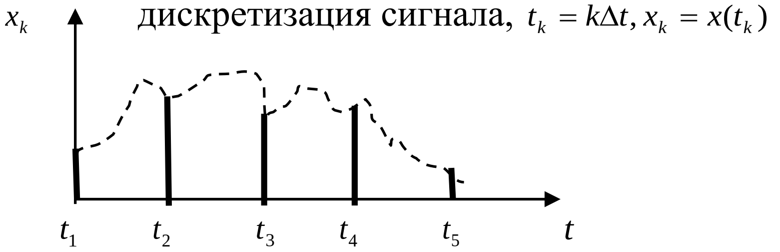
$$\sigma_\xi^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 w_\xi(x)dx = \frac{\Delta^2}{12} \tag{4.26}$$

Если имеется N уровней квантования, то каждый квантованный отсчет кодируется

$$K = \log_2 N \text{ (бит/отсчет), если } N = 2^b, \tag{4.27 а}$$

$$K = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1 \text{(бит/отсчет), если } N \ne 2^b. \tag{4.27 б}$$

Здесь $\lfloor \bullet \rfloor$ - выделение целой части из значения $\log_2 N$. Замечание: кодируется либо само значение квантованного отсчета, либо номер уровня квантования, которому равен квантованный отсчет.



квантование сигнала с шагом Δ, $N=4$.

ИКМ

$K=2$, $\tilde{x}_1 = h_1 \to 01$, $\tilde{x}_2 = h_3 \to 11$,

$\tilde{x}_3 = h_2 \to 10$, $\tilde{x}_4 = h_2 \to 10$, $\tilde{x}_5 = h_1 \to 01$.

(кодируется номер уровня квантователя.)

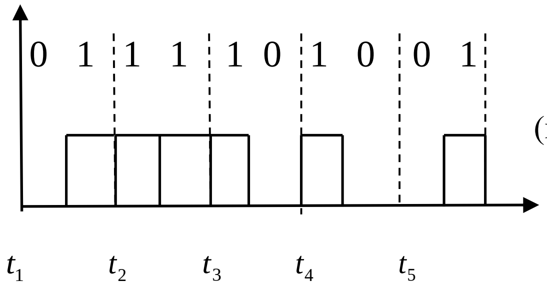


Рисунок 4.9. Этапы формирования ИКМ – сигнала.

Недостатки ИКМ.

1) Ширина спектра ИКМ сигнала $F_{ИКМ}$ больше ширины спектра $F_в$ исходного аналогового сигнала. За время $\Delta t = \dfrac{1}{2F_в}$ нужно передать комбинацию из K бит. Тогда длительность одного бита $T_б = \dfrac{\Delta t}{K} = \dfrac{1}{K2F_в}$. Ширина спектра ИКМ $F_{ИКМ} \approx \dfrac{1}{T_б} = 2KF_в$. Обычно $K = 6 \cdots 9$, тогда $F_{ИКМ}$ в 12-18 раз больше ширины спектра исходного сигнала.

2) При процедуре квантования в представление сигнала вносится ошибка:

$$x_k = \tilde{x}_k + \xi_k .$$

Дифференциальная ИКМ (ДИКМ).

В ИКМ каждый отсчет кодируется независимо от других. Но у многих источников сигнала при дискретизации через $\Delta t = \dfrac{1}{2F_в}$ или чаще проявляется значительная корреляция между отсчетами. В ДИКМ кодируется разность между отсчетами сигнала, а не сами отсчеты. Т.к. разность между отсчетами сигнала меньше, чем значения отсчетов, то нужно меньшее число бит для представления разностного сигнала. Суть подхода состоит в следующем.

Предсказывается текущее значение отсчет на основе предыдущих p отсчетов:

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^{p} a_k x_{k-i} \qquad (4.28)$$

Здесь $\hat{x}_k$ - предсказанное значение для текущего отсчета x_k, $k = 1,2,....$ - дискретное время, a_i - коэффициенты предсказания, которые находятся по критерию минимума средней квадратической ошибки (СКО):

$$\{a_i, i = 1,2,...p\} = \arg\min(M\{e_k^2\}), \qquad (4.29)$$

где $M\{e_k^2\} = M\{x_k - \sum_{i=1}^{p} a_i x_{k-1}\}^2 = M\{x_k\}^2 - 2\sum_{i=1}^{p} a_i M\{x_k x_{k-i}\} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j M\{x_{k-i} x_{k-j}\}$, $M\{\bullet\}$ - оператор математического ожидания, e_k - ошибка предсказания, $M\{e_k\}^2$ - дисперсия ошибки предсказания.

Пусть выход источника - стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $R_x(\Delta)$, где $\Delta = k - n$ - разность между двумя дискретными моментами времени. Тогда

$$M\{e_k\}^2 = R_x(0) - 2\sum_{i=1}^{p} a_i R_x(i) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j R_x(i-j).$$

Если корреляционная функция $R_x(\Delta)$ неизвестна, то ее можно оценить по отсчетам сигнала:

$$\hat{R}_x(\Delta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-\Delta} x_k x_{k-\Delta} \quad . \qquad (4.30)$$

Далее минимизируя дисперсию ошибки предсказания (см. критерий (4.29)), по коэффициентам a_i, $i = 1,2,...p$, получим систему линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i R_x(i-j) = R_x(j),\ j = 1,2,...p \qquad (4.31)$$

Уравнения (4.31) для коэффициентов предсказания называют **нормальными уравнениями** или **уравнениями Юли-Волкера**. Алгоритм их эффективного решения разработан Левинсоном (1974 г.) и Дурбиным (1959 г.).

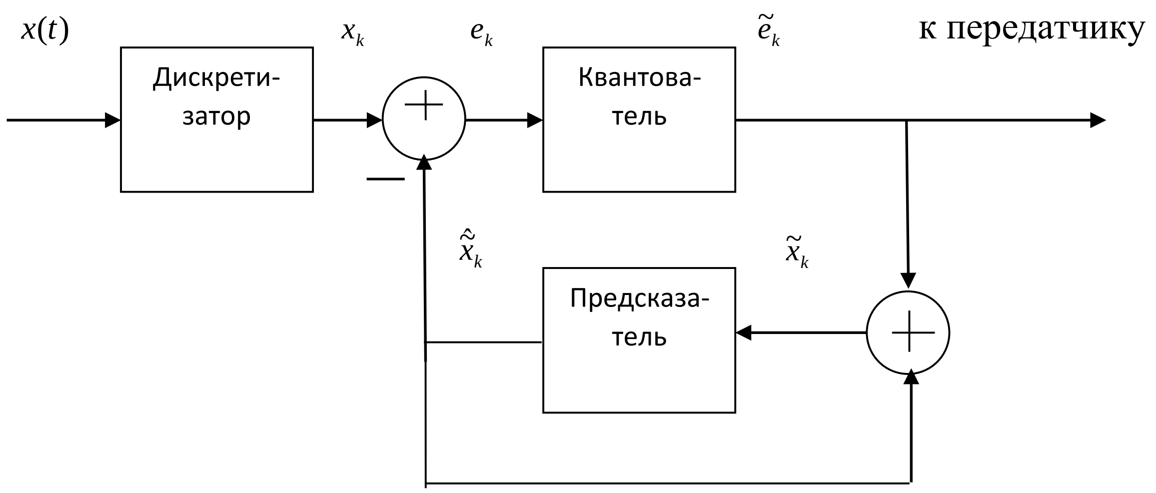


Рисунок 4.10. Блок-схема кодера ДИКМ.

$$e_k = x_k - \hat{\tilde{x}}_k = x_k - \sum_{i=1}^{p} a_i \tilde{x}_{k-i}\,, \qquad \tilde{e}_k - e_k = \tilde{e}_k - (x_k - \hat{\tilde{x}}_k) = \tilde{e}_k + \hat{\tilde{x}}_k - x_k = \tilde{x}_k - x_k = \xi_k\,,$$

где $\tilde{x}_k = \hat{\tilde{x}}_k + \tilde{e}_k$, ξ_k - ошибка квантования.

Описание схемы. Квантованный отсчет $\tilde{x}_k$ является входом предсказателя, выход предсказателя – предсказанный на следуюший шаг квантованный отсчет $\hat{\tilde{x}}_k = \sum_{i=1}^{p} a_i \tilde{x}_{k-i}$. Разность $e_k = x_k - \hat{\tilde{x}}_k$ - вход квантователя, $\tilde{e}_k$- выход квантователя. Величина квантованной ошибки $\tilde{e}_k$ кодируется последовательностью двоичных символов и передается через канал связи.

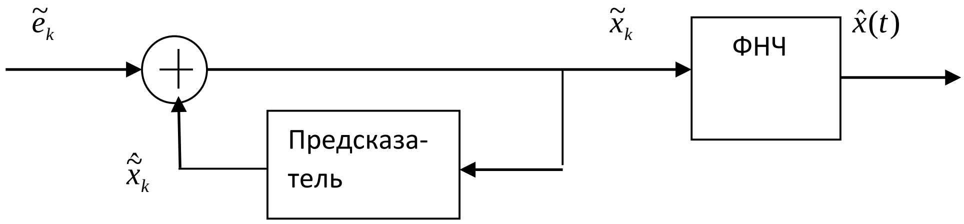


Рисунок 4.11. Блок-схема декодера ДИКМ.

Квантованный отсчет представляет собой сумму квантованной ошибки и предсказанного квантованного отсчета: $\tilde{x}_k = \hat{\tilde{x}}_k + \tilde{e}_k$. Далее по полученным $\tilde{x}_k$ восстанавливается сигнал $x(t) \approx \hat{x}(t)$.

Дельта-модуляция (ДМ).

ДМ можно рассматривать как простейшую форму ДИКМ, в котором используется двухуровневый (1-битовый) квантователь и фиксированный предсказатель первого порядка ($p = 1, a_1 = 1$):

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{x}}_k &= \tilde{x}_{k-1}, \\ \tilde{x}_{k-1} &= \hat{\tilde{x}}_{k-1} + \tilde{e}_{k-1} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Так как $\xi_{k-1} = \tilde{e}_{k-1} - e_{k-1} = \tilde{e}_{k-1} - (x_{k-1} - \hat{\tilde{x}}_{k-1}) = \tilde{e}_{k-1} + \hat{\tilde{x}}_{k-1} - x_{k-1} = \tilde{x}_{k-1} - x_{k-1} = \hat{\tilde{x}}_k - x_{k-1}$, то $\hat{\tilde{x}}_k = x_{k-1} + \xi_{k-1}$. Т.о. предсказанное значение $\hat{\tilde{x}}_k$ является суммой предыдущего отсчета и шума квантования.

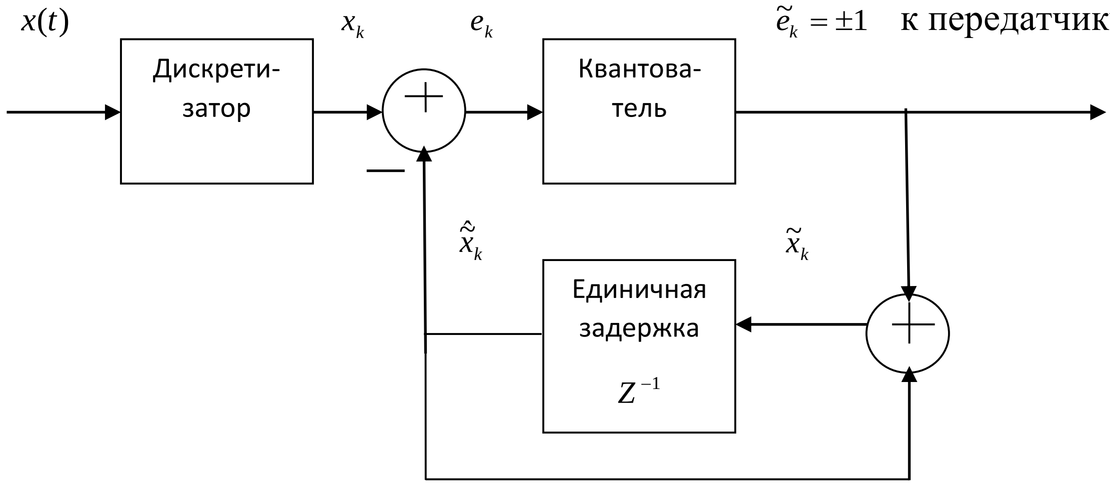


Рисунок 4.12. Блок-схема кодера ДМ.

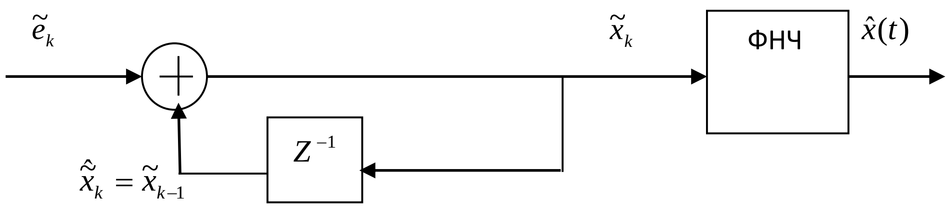


Рисунок 4.13. Блок-схема декодера ДМ.

Адаптивные ИКМ и ДИКМ.

Многие реальные источники квазистационарны, т.е. $\sigma_x^2 = f(t), R_x(t_i, t_j)$ - медленно меняющиеся функции времени. Поэтому необходимо адаптировать характеристики кодеров к меняющейся со временем статистике источника. Можно использовать равномерный квантователь, который меняет величину шага квантования в соответствии с дисперсией последних отсчетов. Т.е. ихмеряется дисперсия процесса $\hat{\sigma}_x^2$ по x_{k-1}, а далее устанавливается размер шага. Самый простой алгоритм для установки шага использует только предыдущий отсчет сигнала. Предложен Джайантом в 1974 году при кодировании речи: $\Delta_{k+1} = \Delta_k \mathrm{M}(k)$, $\mathrm{M}(k)$ - множитель, зависящий от уровня квантованного отсчета $\tilde{x}_k$, Δ_{k+1} - шаг квантования в $k+1$-й момент времени.

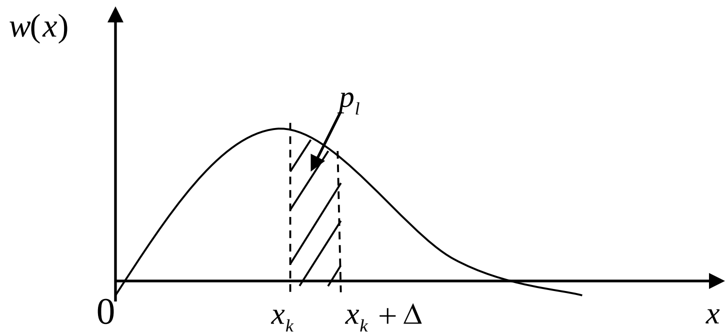
Предсказатель в ДИКМ тоже можно сделать адаптивным. В этом случае уравнения (4.31) справедливы для краткосрочной оценки $\hat{R}_x(i)$, подставленной вместо $R_x(i)$. Далее вычисленные коэффициенты $a_i, i = 1,2,..., p$ вместе с ошибкой $\tilde{e}_k$ передаются приемнику, который использует такой же предсказатель. Передача коэффициентов $a_i, i = 1,2,..., p$ приводит к увеличению необходимой битовой скорости, что частично компенсирует снижение скорости, достигнутое с помощью квантователя с малым количеством уровней для уменьшения динамического диапазона ошибки e_k. Чтобы этого избежать, приемник может вычислить собственные коэффициенты предсказания через

$\tilde{e}_k, \tilde{x}_k$: $\tilde{x}_k = \tilde{e}_k + \sum_{i=1}^{p} a_i \tilde{x}_{k-i}$. Если пренебречь шумом квантования ξ_k, то $\tilde{x}_k \cong x_k$ и их можно использовать для оценки корреляционной функции $\hat{R}_x(i)$ в приемнике и далее по (4.31) найти коэффициенты предсказания.

4.2.4. <u>Мера информации непрерывного источника</u>.

Н.И в последовательные моменты времени $t_k, k = 1,2,....,n$ вырабатывает сообщения x_k. Случайный вектор $(x_1.....x_n)$ характеризуется многомерной функцией плотности распределения вероятности $w_n(x_1,...., x_n, t_1,...., t_n)$. Если величины x_k независимы и процесс на выходе Н.И стационарный, то источник описывается одномерной ФПВ $w(x)$. Марковский Н.И характеризуется следующей ФПВ : $w(x_k, x_{k-1}) = w(x_{k-1})w(x_k / x_{k-1})$. Формулы для энтропии непрерывного источника получаются путем обобщения формул для энтропии Д.И.

Пусть Н.И вырабатывает сообщение $x(t)$. Переходя от непрерывно процесса к дискретному путем процедур дискретизации и квантования, получим: $\tilde{x}_k = l\Delta$, где $l = 0,\pm1,\pm2,...$, Δ - шаг квантования, $\tilde{x}_k$ - квантованный отсчет, появляющийся с вероятностью $p_l = P\{\tilde{x}_k = l\Delta\}$. Предположим, что источник описывается одномерной ФПВ. Тогда $p_l \cong w(\tilde{x}_k)\Delta$.



Тогда на основе формулы для энтропии ДИ получим:

$H(x,\Delta) = -\sum_l p_l \log_2(p_l) = -\sum_l p_l \log_2(w(\tilde{x}_k)\Delta) = -\sum_l p_l \log_2(w(\tilde{x}_k)) - \sum_l p_l \log_2(\Delta) =$
$-\sum_l w(\tilde{x}_k)\log_2(w(\tilde{x}_k))\Delta - \log_2(\Delta)$, т.к. $\sum_l p_l = 1$. Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\log_2(x)dx - \lim_{\Delta\to 0}\log_2(\Delta).$$

Первое слагаемое – **дифференциальная энтропия**, второе – величина бесконечно большая (конечна она только при конечном интервале квантования Δ), она часто исключается из рассмотрения, т.к. при передаче сообщения по каналу связи важна дифференциальная энтропия

$$H_d(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\log_2(x)dx \qquad (4.33)$$

Пределы интегрирования определяются диапазоном изменения сообщения $x(t)$.

Свойства дифференциальной энтропии.

1) $-\infty < H_d(x) < \infty$.

2) $H_d(x) = H_{d\max}$, если ФПВ источника гауссовская: $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$, т.е. если $x(t)$ - гауссовский стационарный случайный процесс.

$$H_{d\max} = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma_x^2) \qquad (4.34)$$

3) Дифференциальная энтропия совместного наступления событий $x_1,..., x_n$ определяется по формуле

$$H_d(x_1,...., x_n) = \sum_{k=1}^{n} H_d(x_k)$$

4) Если сообщения x_k, x_{k-1} зависимы, то вводится условная энтропия

$$H(x_k / x_{k-1}) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x_k, x_{k-1})\log_2(w(x_k / x_{k-1})dx_k dx_{k-1} . \qquad (4.35)$$

Тогда совместная дифференциальная энтропия определяется по формуле

$$H_d(x_k, x_{k-1}) = H_d(x_{k-1}) + H(x_k / x_{k-1}) \qquad (4.36)$$

Функция скорость-искажение или эпсилон энтропия НИ.

Под искажением понимается некоторая мера разности между отсчетами x_k источника и квантованными отсчетами $\tilde{x}_k$, $k = 1,2,...$ - дискретное время. За меру возьмем

$$\xi_k^2 = (x_k - \tilde{x}_k)^2 \qquad (4.37)$$

Пусть $\vec{x} = (x_1,...., x_n), \vec{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1,......, \tilde{x}_n)$. Тогда искажение между данными векторами – среднее искажение по n отсчетам:

$$\xi_{n,cp}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \qquad (4.38)$$

(4.38) является случайной величиной с математическим ожиданием $D = M\{\xi_{n,cp}^2\} = M\{\xi_k^2\} = \sigma_\xi^2$, т.к. процесс на выходе источника стационарный.

Рассмотрим непрерывный источник без памяти, который имеет ФПМ отсчета $w(x)$ и меру искажения на отсчет (4.37), где $x \in \vec{x}, \tilde{x} \in \vec{\tilde{x}}$.

Минимальная скорость в битах на отсчет, требуемая для представления выхода источника без памяти с искажением $\le D$, называется **функцией скорость-искажение** и определяется как

$$R(D) = \min_{w(x/\tilde{x}):\sigma_{\xi}^2 \le D} I(x, \tilde{x}), \tag{4.39}$$

где $I(x,\tilde{x})$ - средняя взаимная информация между x и $\tilde{x}$, которая определяется по формуле

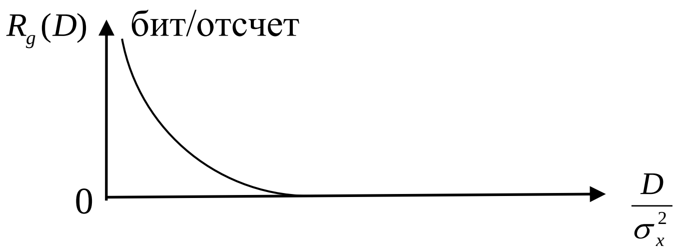
$$I(x,\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,\tilde{x}) \log_2\left(\frac{w(x,\tilde{x})}{w(x)w(\tilde{x})}\right) dx d\tilde{x} \tag{4.40}$$

Так же (4.39) еще называют **эпсилон - энтропией** источника. При увеличении искажения D $R(D)$ уменьшается.

Для гауссовского Н.И. без памяти Шеннон в 1959 году доказал теорему:

Минимальная скорость кодирования, необходимая для представления выхода дискретного во времени и непрерывного по амплитуде гауссовского источника без памяти равна

$$R_g(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_x^2}{D}\right), & 0 \le D \le \sigma_x^2, \\ 0, & D > \sigma_x^2 \end{cases} \tag{4.41}$$



Теорема Шеннона кодирования источника с заданной мерой искажения.

Существует схема кодирования, которая отображает выход источника в кодовые слова так, что для любого данного искажения D минимальная скорость $R(D)$ (бит/отсчет) источника является достаточной для восстановления исходного сигнала со средним искажением, которое является произвольно близким к D.

Функция $R(D)$ для любого Н.И. – нижняя граница скорости источника, которая является возможной для данного уровня искажения.

Верхняя граница для $R(D)$. Функция скорость – искажение Н.И. без памяти с нулевым средним и конечной дисперсией σ_x^2 при использовании средней квадратичной меры искажений (4.38) ограничена сверху:

$$R(D) \le R_g(D) \tag{4.42}$$

Доказательство этой теоремы дано Бергером в 1971 году. Таким образом, гауссовский источник требует максимальной скорости кодирования среди всех других источников при заданном уровне среднеквадратической ошибки.

Нижняя граница для $R(D)$**:**

$$R^*(D) = H_d(x) - \frac{1}{2}\log_2(2\pi e D) \tag{4.43}$$

Таким образом функция скорость – искажения лежит в пределах

$$R^*(D) \le R(D) \le R_g(D) \ .$$

Эпсилон- избыточность НИ находится по формуле

$$r_\varepsilon = 1 - \frac{R^*(D)}{R_g(D)}$$