ЛЕКЦИЯ № 11.

Пример 1: Оценка фазы немодулированной несущей

Пусть $y_i = A\cdot\cos(\omega i+\varphi)+\eta_i$, где $\eta_i \sim N(0,\sigma_\eta^2)$, $\omega = 2\pi f\cdot\Delta t$, A, f – известные амплитуда и частота несущей, Δt - шаг дискретизации, φ- неизвестная начальная фаза.

Для оценки воспользуемся критерием максимального отношения правдоподобия:

$$\Lambda(\vec{y}_n,\varphi) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_n}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - A\cos(\omega i+\varphi))^2}{2\sigma_\eta^2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_n}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - A\cos(\omega i))^2}{2\sigma_\eta^2}}} = \frac{e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i^2 - 2y_iA\cos(\omega i+\varphi)+A^2\cos^2(\omega i+\varphi))}{2\sigma_\eta^2}}}{e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i^2 - 2y_iA\cos(\omega i)+A^2\cos^2(\omega i))}{2\sigma_\eta^2}}} =$$

$$= e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_iA\cos(\omega i+\varphi)}{\sigma_\eta^2}}\cdot e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}-A^2\cos^2(\omega i+\varphi)+\sum_{i=1}^{n}A^2\cos^2(\omega i)-\sum_{i=1}^{n}2y_iA\cos(\omega i)}{2\sigma_\eta^2}} =$$

$$= e^{\sum_{i=1}^{n}y_iA\cos(\omega i+\varphi)}\left[e^{-\frac{E}{2\sigma_\eta^2}}\cdot e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}A^2\cos^2(\omega i)-\sum_{i=1}^{n}2y_i\cos(\omega i)}{2\sigma_\eta^2}}\right].$$

Множитель в $[\bullet]$ информации о фазе не несёт, поэтому

$$\overset{\wedge}{\varphi}_n = \arg\max_{\varphi}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n}y_iA\cos(\omega i+\varphi)\right)\right).$$

Так как экспонента- функция монотонная от своей степени, то критерий оптимальности можно записать в следующем виде:

$$\overset{\wedge}{\varphi}_n = \arg\max_{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n}y_iA\cos(\omega i+\varphi)\right).$$

Далее возьмем первую производную по фазе от $\lambda(\mathbf{y}_n,\varphi) = \sum_{i=1}^{n}y_iA\cos(\omega i+\varphi)$ и приравняем ее нулю: