Запишем отношение правдоподобия: $\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\right)=\dfrac{w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\,|\,H_1)}{w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\,|\,H_0)}$,

где $w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\,|\,H_1)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\right)^n}exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\left(y_i-Acos(\omega i+\varphi)\right)^2}{2\sigma_\eta^{\;2}}\right)$,

$w(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\,|\,H_0)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\right)^n}exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{y_i^{\;2}}{2\sigma_\eta^{\;2}}\right)$.

Т.к. отношение правдоподобия зависит от фазы φ, то оно тоже является случайной величиной. Поэтому $\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\right)$ можно усреднить по фазе $\Rightarrow$

$$\Lambda_1\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\right)w(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n},\varphi\right)d\varphi.$$

Далее, приняв во внимание, что $\sum_{i=1}^{n}A^2cos(\omega_i+\varphi)=E$ - энергия сигнала и введя обозначения $X_{nc}=\sum_{i=1}^{n}y_i\,cos(\omega i)$, $X_{ns}=\sum_{i=1}^{n}y_i\,sin(\omega i)$, получим

$$\Lambda_1\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}exp\left(\frac{A\left(X_{nc}\cos\varphi-X_{nS}\sin\varphi\right)}{\sigma_\eta^{\;2}}-\frac{E}{2\sigma_\eta^{\;2}}\right)d\varphi=$$
$$=exp\left(-\frac{E}{2\sigma_\eta^{\;2}}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}exp\left(\frac{A\left(X_n\cos(\varphi+\chi)\right)}{\sigma_\eta^{\;2}}\right)d\varphi,$$

где $X_n=\sqrt{X_{nc}^2+X_{nS}^2},\chi=arctg\left(\dfrac{X_{ns}}{X_{nc}}\right)$.

Известно, что $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}exp\left(\dfrac{AX_n\cos(\varphi+\chi)}{\sigma_\eta^{\;2}}\right)d\varphi=I_0\left(\dfrac{AX_n}{\sigma_\eta^{\;2}}\right)$ - функция Бесселя нулевого порядка $\Rightarrow\Lambda_1\left(\overrightarrow{\mathbf{y}_n}\right)=exp\left(-\dfrac{E}{2\sigma_\eta^{\;2}}\right)I_0\left(\dfrac{AX_n}{\sigma_\eta^{\;2}}\right)$.

Т.к. функция Бесселя монотонная от X_n при отношении сигнал/шум $h_{вых}>1$ $\Rightarrow$ решение можно принимать но, $\Rightarrow X_n$:

если $X_n\geq C_\alpha\Rightarrow\gamma_1$ (есть сигнал) (2.25)

если $X_n<C_\alpha\Rightarrow\gamma_0$ (нет сигнала)