

1. Частотная модуляция. ЧМ- сигнал. Спектр ЧМ - сигнала.

Из учебника:

Модуляция - преобразование символов в сигналы, пригодные для передачи по каналу.

Общий принцип модуляции состоит в изменении одного или нескольких параметров несущего колебания (переносчика) $f(a, b, \dots, t)$ в соответствии с передаваемым сообщением. Так, например, если в качестве переносчика выбрано гармоническое колебание $f(t) = u_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, то можно образовать три вида модуляции: амплитудную (АМ), частотную (ЧМ) и фазовую (ФМ).

Из лекций:

Временная и спектральная диаграммы сигнала ЧМ

При ЧМ частота ВЧ колебания (несущей) изменяется в соответствии с НЧ модулирующим сигналом.

$\omega_{\text{чм}}(t) = \omega_0 + \Delta\omega U_{\text{нч}}(t)$, где $\omega_{\text{чм}}(t)$ - частота ЧМ сигнала;

ω_0 - среднее значение несущей частоты;

$U_{\text{нч}}(t)$ -модулирующий сигнал;

$\Delta\omega$ -девиация частоты, т.е. максимальное отклонение частоты от среднего значения.

Если модулирующий сигнал гармонический, т.е. $U_{\text{нч}} = \cos\Omega t$, то

$$\omega_{\text{чм}}(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos\Omega t$$

а выражение для ЧМ сигнала имеет вид:

$$U_{\text{чм}}(t) = U_m \cos \underbrace{\varphi_{\text{чм}}(t)}_{\text{фаза}}$$

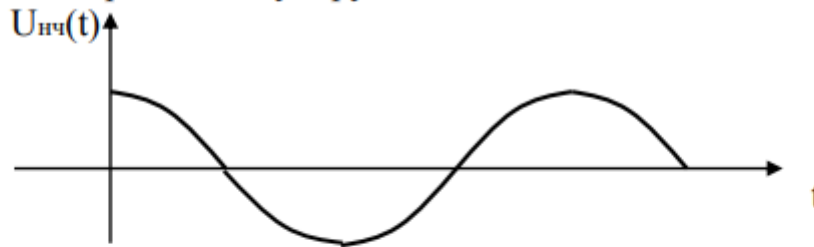
$$\varphi_{\text{чм}}(t) = \int_0^t \omega_{\text{чм}}(t) dt = \int_0^t (\omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t) dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t$$

$$U_{\text{чм}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\Omega} = M_{\text{ч}} - \text{индекс ЧМ.}$$

$$U_{\text{чм}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + M_{\text{ч}} \sin \Omega t)$$

Временная диаграмма модулирующего сигнала имеет вид:



Временная диаграмма соответствующего ЧМ сигнала принимает вид:

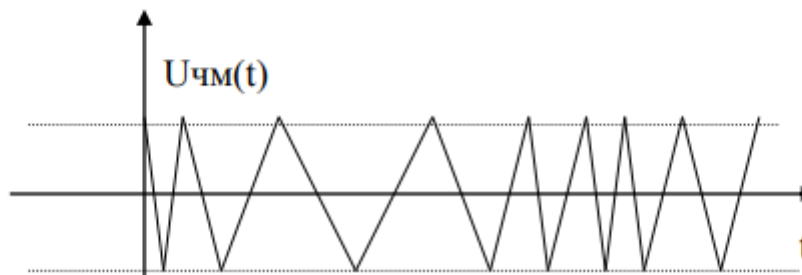


Рис.4.2

Как видно из рис.4.2, там, где модулирующий сигнал больше, там и частота ЧМ сигнала больше, а период колебаний меньше.

$$\omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t$$

$$\omega_{\text{max}} = \omega_0 + \Delta\omega$$

$$\omega_{\text{min}} = \omega_0 - \Delta\omega$$

Амплитуда при ЧМ постоянна, меняется только частота.

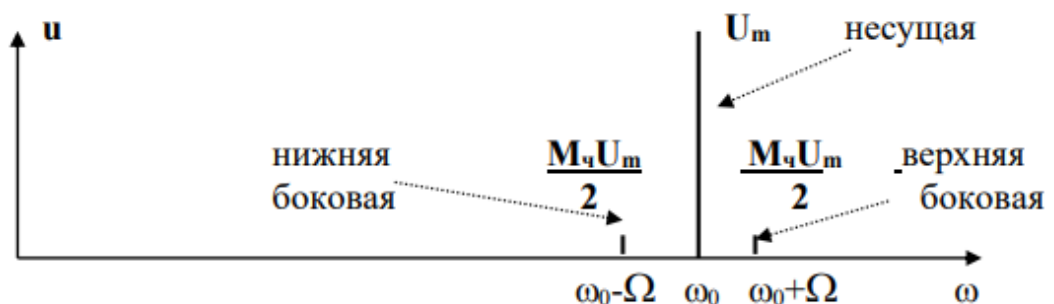
Для получения спектра ЧМ сигнала разложим $U_{\text{ЧМ}}(t)$ в ряд Фурье.

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t\right) = U_m \mathfrak{J}_0(M_q) \cos \omega_0 t + U_m \mathfrak{J}_1(M_q) \cos(\omega_0 + \Omega)t - U_m \mathfrak{J}_1(M_q) \cos(\omega_0 - \Omega)t + U_m \mathfrak{J}_2(M_q) \cos(\omega_0 + 2\Omega)t - U_m \mathfrak{J}_2(M_q) \cos(\omega_0 - 2\Omega)t + U_m \mathfrak{J}_3(M_q) \cos(\omega_0 + 3\Omega)t - U_m \mathfrak{J}_3(M_q) \cos(\omega_0 - 3\Omega)t + \dots$$

$\mathfrak{J}_k(M_q)$ - функция Бесселя k-ого порядка.

Вид спектра зависит от M_q .

Спектр ЧМ сигнала при $M_q \ll 1$ (т.е. порядка 0,1; 0,05;...)



При $M_q \ll 1$ спектр ЧМ сигнала похож на спектр АМ сигнала (несущая, 2 боковых), но для ЧМ этот спектр приближенный. Все остальные боковые тоже есть, но они очень малы.

Спектр ЧМ сигнала при $M_q > 1$ выглядит так ($M_q=5$):

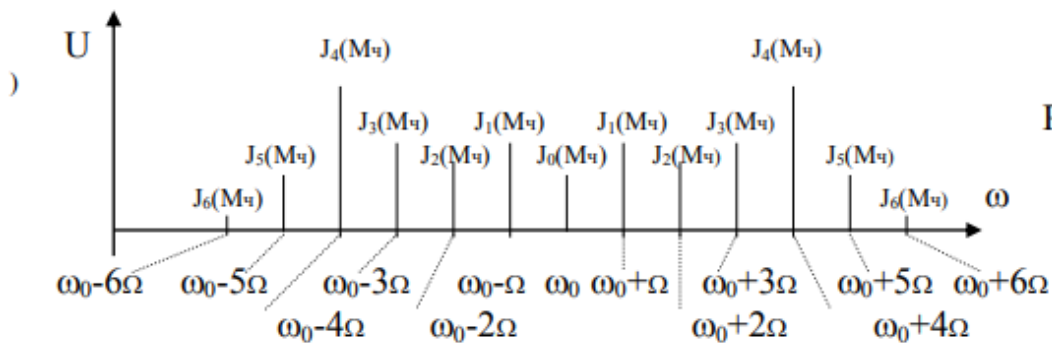


Рис.4.4.

Полоса частот сигнала ЧМ.

$$P_{\text{ЧМ}} \cong 2\Omega(M_q + 1)$$

$M_q \ll 1$ $P_{\text{ЧМ}} \cong 2\Omega$, (как при АМ)

$$M_q \gg 1 \quad P_{\text{ЧМ}} \cong 2\Omega M_q = 2\Omega \frac{\Delta\omega}{\Omega} = 2\Delta\omega$$

Ширина спектра при $M_q \gg 1$ не зависит от модулирующей частоты. Это широкополосный сигнал.

2. Обнаружение детерминированного сигнала на фоне АБГШ (аддитивный белый гауссовский шум). Корреляционный прием.

Обнаружение детерминированных сигналов на фоне аддитивного ГБШ.

Пусть $\eta_i \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ - ГБШ. Мгновенные значения такой помехи распределены по гауссовскому закону $w_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_\eta^2}}$, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_η^2 . Отсчёты такой помехи независимы, спектральная плотность мощности равномерна. Тогда функция правдоподобия факторизуется:

$$w(\vec{y}_n|H_k) = \prod_{i=1}^n w(y_i|H_k), \quad k=\overline{0;1}$$

Мгновенные значения входного воздействия при гипотезе H_0 распределены по закону: $w(y_i|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\frac{-y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}$, при гипотезе H_1 :

$$w(y_i|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\frac{-(y_i-s_i)^2}{2\sigma_\eta^2}} \Rightarrow$$

$$w(\vec{y}_n|H_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n \prod_{i=1}^n e^{\frac{-y_i^2}{2\sigma_\eta^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^n y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}$$

$$w(\vec{y}_n|H_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n \prod_{i=1}^n e^{\frac{-(y_i-s_i)^2}{2\sigma_\eta^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^n (y_i-s_i)^2}{2\sigma_\eta^2}} \Rightarrow$$

$$\Lambda(\vec{y}_n) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^n (y_i - S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\right)^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^n y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}} = \frac{e^{\frac{-\sum_{i=1}^n (y_i - S_i)^2}{2\sigma_\eta^2}}}{e^{\frac{-\sum_{i=1}^n y_i^2}{2\sigma_\eta^2}}} = e^{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i^2 - y_i^2 + 2y_i S_i - S_i^2)}{2\sigma_\eta^2}} =$$

$$e^{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i S_i - \frac{S_i^2}{2})}{\sigma_\eta^2}} \Rightarrow \ln \Lambda(\vec{y}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i S_i - \frac{S_i^2}{2})}{\sigma_\eta^2} = \ln C \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n y_i S_i = \ln C + \frac{1}{\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^n \frac{S_i^2}{2} \text{ или } \sum_{i=1}^n y_i S_i = \sigma_\eta^2 \ln C + \sum_{i=1}^n \frac{S_i^2}{2}.$$

Тогда получим алгоритм обнаружения:

если $\sum_{i=1}^n y_i S_i \geq C' \Rightarrow \gamma_1$ если $\sum_{i=1}^n y_i S_i < C' \Rightarrow \gamma_0$

$E = \sum_{i=1}^n S_i^2$ - энергия сигнала \Rightarrow

$$C' = \sigma_{\eta}^2 \ln C + \frac{E}{2} \quad (2.14)$$

Формулы (2.13) и (2.14)- обработка дискретного детерминированного сигнала на фоне ГБШ.

Если обработке подвергается непрерывный сигнал $y(t)$, то сумма заменяется интегралом: $\lambda(y(t)) = \int_0^T y(t) S(t) dt$ - корреляционный интеграл, T -длительность сигнала C' находится по (2.14), где $E = \int_0^T S(t)^2 dt \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{Если } \lambda(y(t)) \geq C' &\Rightarrow \gamma_1 \\ \text{если } \lambda(y(t)) < C' &\Rightarrow \gamma_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Т. о. получили корреляционную обработку сигнала в непрерывном времени.

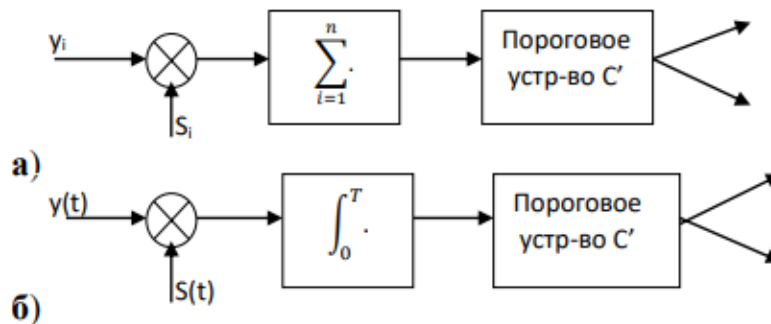


Рисунок 2.1. Корреляционная обработка детерминированного дискретного сигнала (а), непрерывного сигнала (б) на фоне ГБШ.

\otimes - умножитель

Дополнительно (скорее всего не нужно)

Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой на фоне АБГШ.

Пусть по гипотезе H_1 на вход **приемного** устройства поступает аддитивная смесь сигнала и шума: $y_i = S_i + \eta_i$, где $S_i = A \cos(\omega i + \varphi)$. Здесь A – известная амплитуда, $\omega = \frac{2\pi}{T} \Delta t$, T – период сигнала, Δt - шаг (интервал) дискретизации, φ - начальная фаза колебания, которая является случайной величиной с равномерным распределением: $\varphi \sim R[-\pi, \pi]$, т.е. ФПВ фазы имеет

вид: $w(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Запишем отношение правдоподобия: $\Lambda(\bar{y}_n, \varphi) = \frac{w(\bar{y}_n, \varphi | H_1)}{w(\bar{y}_n, \varphi | H_0)}$

где $w(\vec{y}_n, \varphi | H_1) = \frac{I}{(\sqrt{2\pi}\sigma_\eta)^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - A \cos(\omega i + \varphi))^2}{2\sigma_\eta^2}\right),$

$$w(\vec{y}_n, \varphi | H_0) = \frac{I}{(\sqrt{2\pi}\sigma_\eta)^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{2\sigma_\eta^2}\right).$$

Т.к. отношение правдоподобия зависит от фазы φ , то оно тоже является случайной величиной. Поэтому $\Lambda(\vec{y}_n, \varphi)$ можно усреднить по фазе \Rightarrow

$$\Lambda_1(\vec{y}_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\vec{y}_n, \varphi) w(\varphi) d\varphi = \frac{I}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\vec{y}_n, \varphi) d\varphi.$$

Далее, приняв во внимание, что $\sum_{i=1}^n A^2 \cos^2(\omega i + \varphi) = E$ - энергия сигнала и введя

обозначения $X_{nc} = \sum_{i=1}^n y_i \cos(\omega i), \quad X_{ns} = \sum_{i=1}^n y_i \sin(\omega i),$ получим

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\vec{y}_n) &= \frac{I}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{A(X_{nc} \cos \varphi - X_{ns} \sin \varphi)}{\sigma_\eta^2} - \frac{E}{2\sigma_\eta^2}\right) d\varphi = \\ &= \exp\left(-\frac{E}{2\sigma_\eta^2}\right) \cdot \frac{I}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{A(X_n \cos(\varphi + \chi))}{\sigma_\eta^2}\right) d\varphi, \end{aligned}$$

где $X_n = \sqrt{X_{nc}^2 + X_{ns}^2}, \chi = \arctg\left(\frac{X_{ns}}{X_{nc}}\right).$

Известно, что $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{AX_n \cos(\varphi + \chi)}{\sigma_{\eta}^2}\right) d\varphi = I_0\left(\frac{AX_n}{\sigma_{\eta}^2}\right)$ - функция Бесселя нулевого порядка $\Rightarrow L_f(\vec{y}_n) = \exp\left(-\frac{E}{2\sigma_{\eta}^2}\right) I_0\left(\frac{AX_n}{\sigma_{\eta}^2}\right)$.

Т.к. функция Бесселя монотонная от X_n при отношении сигнал/шум $h_{\text{вых}} > 1$ \Rightarrow решение можно принимать но, $\Rightarrow X_n$:

если $X_n \geq C_{\alpha} \Rightarrow \gamma_1$ (есть сигнал)

если $X_n < C_{\alpha} \Rightarrow \gamma_0$ (нет сигнала)

Поиск порога C_{α} .

Порог будем искать по критерию Неймана-Пирсона:

оптимальным решающим правилом является сравнение с некоторым порогом выбирающимся из условия получения заданной вероятности ложной тревоги α . При этом минимизируется вероятность пропуска сигнала β

α - задано $\Rightarrow \beta = \min$

В отсутствии радиосигнала случайная величина X_n характеризуется плотностью распределения Релея: $w(X_n | H_0) = \frac{X_n}{\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{X_n^2}{2\sigma_X^2}\right)$, $\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\eta^2 T_H}{2}$ - дисперсия, составляющих X_{nc}, X_{ns} , $T_H = n \Delta t$ - время наблюдения.

По заданной $\alpha = \int_{c_\alpha}^{\infty} w(X_n | H_0) dX_n$ находим C_α : $C_\alpha = \sqrt{\frac{n\sigma_\eta^2}{f_d} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} =$

$$C_\alpha = \sqrt{\sigma_\eta^2 T_H \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, \text{ где } f_d = \frac{1}{\Delta t} - \text{частота дискретизации сигнала.}$$

Затем можно вычислить вероятность пропускания сигнала β и вероятность обнаружения $D=1-\beta$.

По формуле: $\beta = \int_{-\infty}^{c_\alpha} w(X_n | H_1) dX_n$, где

$$w(X_n | H_1) = \frac{X_n}{\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{X_n^2 + m_c^2 + m_s^2}{2\sigma_X^2}\right) I_0\left(\frac{X_n \sqrt{m_c^2 + m_s^2}}{\sigma_X^2}\right) - \text{плотность}$$

распределения Релея - Райса, где m_c, m_s - условие мат. ожидания, составляющих: X_{nc}, X_{ns} : $m_c = E(X_{nc} / \varphi) = \frac{AT_H}{2} \cos \varphi$,

$$m_s = E(X_{ns} / \varphi) = -\frac{AT_H}{2} \sin \varphi, \text{ E - оператор мат. ожидания.}$$

Задача. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднюю мощность на единичном сопротивлении эргодического процесса с ФПВ $w(x) = 0.1\delta(x+1) + 0.3\delta(x) + A\delta(x-1)$.

~~свойств~~

$$m_x = 0,1(-1) + 0,3 \cdot 0 + A \cdot 1 = -0,1 + A = 0,5$$

$$A = 0,6 \text{ (переход суммируя все вероятности = 1)}$$

$$m_z = 0,1 + A = 0,7$$

$$D_x = m_z - m_x^2 = 0,7 - 0,5^2 = 0,45$$

Эргодические случайные процессы.

Стационарный СП называется **эргодическим**, если при нахождении любых вероятностных характеристик, усреднение по множеству реализаций может быть заменено усреднением по времени:

$$m_x = \lim_{T_H \rightarrow \infty} \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} x^{(k)}(t) dt,$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{T_H} \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} (x^{(k)}(t) - m_x)^2 dt, \quad (5.14)$$

$$m_{2x} = \lim_{T_H} \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} (x^{(k)}(t))^2 dt,$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T_H \rightarrow \infty} \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} x^{(k)}(t) x^{(k)}(t + \tau) dt,$$

где $x^{(k)}(t)$ - k -ая реализация случайного процесса $\zeta(t)$, T_H - ее длительность. Здесь m_x можно рассматривать как постоянную составляющую реализации $x^{(k)}(t)$, а m_{2x} как среднюю мощность сигнала.