ЛЕКЦИЯ № 11.

Пример 1: Оценка фазы немодулированной несущей

Пусть $y_i = A\cdot\cos(\omega i+\varphi)+\eta_i$, где $\eta_i \sim N(0,\sigma_\eta^2),\ \omega = 2\pi f\cdot\Delta t,\ A,\ f$ – известные амплитуда и частота несущей, Δt - шаг дискретизации, φ- неизвестная начальная фаза.

Для оценки воспользуемся критерием максимального отношения правдоподобия:

$$\Lambda(\vec{y}_n,\varphi)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_n}\right)^n e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(y_i-A\cos(\omega i+\varphi))^2}{2\sigma_\eta^2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_n}\right)^n e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(y_i-A\cos(\omega i))^2}{2\sigma_\eta^2}}}=\frac{e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(y_i^2-2y_iA\cos(\omega i+\varphi)+A^2\cos^2(\omega i+\varphi))}{2\sigma_\eta^2}}}{e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(y_i^2-2y_iA\cos(\omega i)+A^2\cos^2(\omega i))}{2\sigma_\eta^2}}}=$$

$$=e^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{y_iA\cos(\omega i+\varphi)}{\sigma_\eta^2}}\cdot e^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}-A^2\cos^2(\omega i+\varphi)+\sum\limits_{i=1}^{n}A^2\cos^2(\omega i)-\sum\limits_{i=1}^{n}2y_iA\cos(\omega i)}{2\sigma_\eta^2}}=$$

$$=e^{\sum\limits_{i=1}^{n}y_iA\cos(\omega i+\varphi)}\left[e^{-\frac{E}{2\sigma_\eta^2}}\cdot e^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}A^2\cos^2(\omega i)-\sum\limits_{i=1}^{n}2y_i\cos(\omega i)}{2\sigma_\eta^2}}\right].$$

Множитель в $[\bullet]$ информации о фазе не несёт, поэтому

$$\overset{\wedge}{\varphi}_n=\arg\max_{\varphi}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n}y_iA\cos(\omega i+\varphi)\right)\right).$$

Так как экспонента- функция монотонная от своей степени, то критерий оптимальности можно записать в следующем виде:

$$\overset{\wedge}{\varphi}_n=\arg\max_{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n}y_iA\cos(\omega i+\varphi)\right).$$

Далее возьмем первую производную по фазе от $\lambda(\mathbf{y}_n,\varphi)=\sum\limits_{i=1}^{n}y_iA\cos(\omega i+\varphi)$ и приравняем ее нулю:

$$\left.\frac{d\sum_{i=1}^{n} y_i A\cos(\omega i+\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=\hat{\varphi}_n}=0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i A\sin(\omega i+\hat{\varphi}_n)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i A\sin(\omega i)\cos\hat{\varphi}_n+y_i A\cos(\omega i)\sin\hat{\varphi}_n\right]=0 \Rightarrow$$

$$\cos\hat{\varphi}_n\sum_{i=1}^{n} y_i A\sin(\omega i)=-\sin\hat{\varphi}_n\sum_{i=1}^{n} y_i A\cos(\omega i) \Rightarrow$$

$$-\tan\hat{\varphi}_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A\sin(\omega i)}{\sum_{i=1}^{n} y_i A\cos(\omega i)} \quad \Rightarrow \quad \hat{\varphi}_n=-arctg\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sin(\omega i)}{\sum_{i=1}^{n} y_i \cos(\omega i)}\right].$$

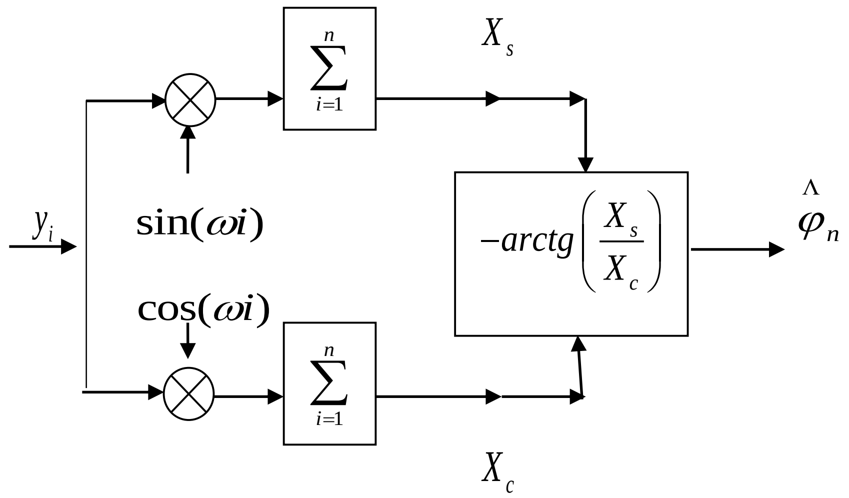


Рисунок 2.17. Структурная схема алгоритма оценивания неизвестной начальной фазы по критерию максимального отношения правдоподобия.

В непрерывном времени вместо $\sum_{i=1}^{n}(\cdot)$ берётся $\int_0^{T_H}(\cdot)$, T_H - время наблюдения.

3. Некоторые виды цифровой модуляции.

При передаче цифровой информации по каналам связи модулятор отображает информацию в форму аналоговых сигналов, которые согласованы с характеристиками канала. Отображение происходит по средством выбора блоков из $k=\log_2 M$ двоичных символов из символов информационной последовательности $\{a_n\}$ а выбора одного из $M=2^k$ детерминированных сигналов с ограниченной энергией $\{S_m(t), m=\overline{1:M}\}$.

Если отображение цифровой информации $\{a_n\}$ в сигнал так, что сигнал, передаваемый на данном интервале времени, зависит от одного или более сигналов, переданных ранее, то говорят, что модулятор имеет память.

Если отображении $\{a_n\}$ в сигналы $\{S_m(t)\}$ происходит так, что передаваемые не зависят от ранее переданных, то говорят, что модулятор не имеет памяти.

Так же модуляторы бывают линейными и нелинейными. Линейность требует выполнения принципа суперпозиций (наложении) при отображении $\{a_n\}$ в $\{S_m(t)\}$.

3.1 Методы модуляции без памяти.

3.1.1. Амплитудно – импульсная модуляция (АИМ) или (ДАМ).

АИМ – линейная цифровая модуляция.

$$S_m(t) = A_m(t)g(t)\cos(2\pi f_c t)\text{, m=}\overline{1:M}\text{, } 0\leq t \leq T \text{ ,} \qquad (3.1)$$

где A_m – амплитуда сигнала, соответствующая возможным k – битовым блокам или символам. A_m принимает дискретные значения. A_m=(2m-1-M)d , где 2d – расстояние между соседними амплитудами сигналов, g(t) – вещественный сигнальный импульс, форму которого определяет спектр передаваемого сигнала. Скорость передачи канальных символов при АМ равна $\frac{R}{k}$ - скорость с которой происходит изменения амплитуды гармонического сигнала. Временной интервал $T_в=\frac{1}{R}$ – называют информационным (битовым) интервалом, а временной интервал $T=kT_в=\frac{k}{R}$ - называют символьным интервалом или интервалом информационного символа. (R бит – скорость появления двоичной информационной последовательности $\{a_n\}$). Сигналы АМ имеют энергию:

$$E_m = \int_0^T S_m^2(t)dt = \frac{1}{2}A_m^2 \int_0^T g^2(t)dt = \frac{1}{2}A_m^2 E_g$$

E_g - энергия импульса g(t).

Пространственная диаграмма сигналов цифровой АМ показана на рисунке 3.1.

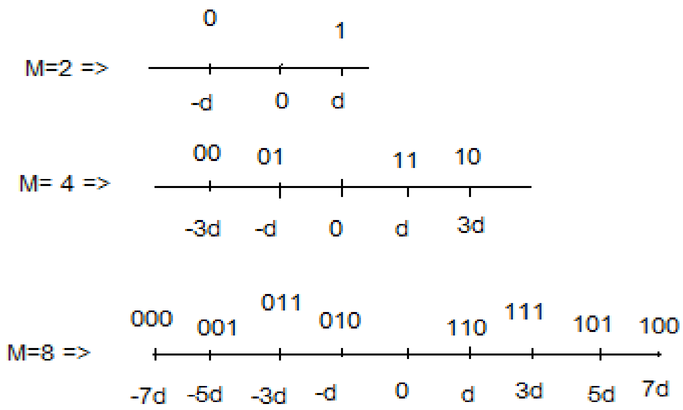


Рисунок 3.1. Пространственная диаграмма сигналов цифровой АМ.

Цифровая АМ называется также <u>модуляцией с амплитудным сдвигом</u> (МАС, ASK).

3.1.2. Сигналы фазовой модуляции (ФМ).

ФМ – нелинейная модуляция.

$$S_m(t) = g(t)\cos(2\pi f_c t + \frac{2\pi(m-1)}{M}),$$
$$m = \overline{1:M},\ 0 < t < T \qquad (3.2)$$

$g(t)$ – определяет огибающую сигнала, $\Theta_m = \dfrac{2\pi(m-1)}{M}$ – определяет M возможных значений фазы, которая переносит передаваемую информацию. Цифровую ФМ также называют модуляцией с фазовым сдвигом (МФС, PSK)

Сигналы $Sm(t)$ имеют одинаковую энергию:

$$E = \int_0^T S^2{}_m(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T g^2(t)dt = \frac{1}{2}Eg.$$

Пространственная диаграмма сигналов цифровой ФМ показана на рисунке 3.2.

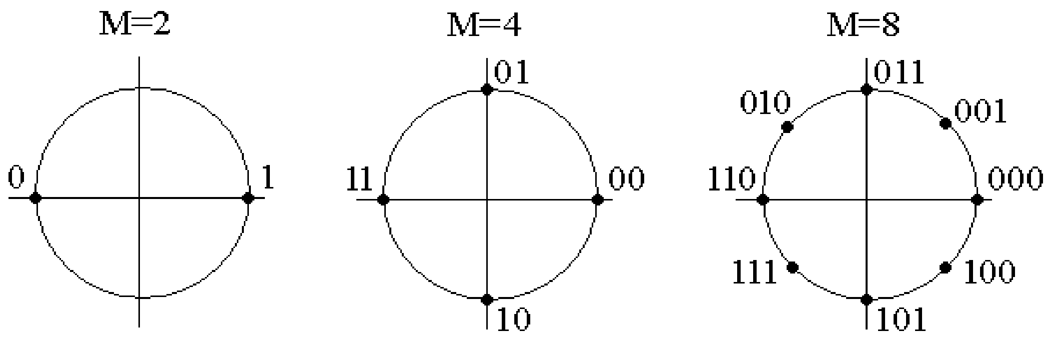


Рисунок 3.2. Пространственная диаграмма сигналов цифровой ФМ.

3.1.3. Квадратурная амплитудная модуляция(КАМ, QAM)

$$S_m(t) = A_{mc} \cdot g(t)\cos(2\pi f_c t) - A_{ms} \cdot g(t)\sin(2\pi f_c t),$$
$$m = \overline{j:M},\ 0 \le t \le T \qquad (3.3.)$$

где *Amc, Ams* – информационные амплитуды сигнала для квадратурных несущих, $g(t)$ – вещественный сигнальный импульс.

Альтернативно сигнал КАМ можно выразить так:

$$S_m(t) = V_m g(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta_m)$$
$$V_m = \sqrt{A_{ms}{}^2 + A_{mc}{}^2}, \quad \Theta_m = arctg(\frac{A_{ms}}{A_{mc}}) \qquad (3.4.)$$

КАМ можно рассматривать как комбинацию амплитудной и фазовой модуляции. Можно образовать определенную комбинацию M_1 уровней АМ и M_2 уровней позиционной ФМ, чтобы сконструировать комбинированное АМ-ФМ сигнальное созвездие, содержащее $M= M_1 \cdot M_2$ точек пространства сигналов. Если $M_1=2^n$, $M_2=2^m$, то сигнальное созвездие сводится к мгновенной передаче $m+n=\log_2 M_1 \cdot M_2$ двоичных символов, возникающих со скоростью $\frac{R}{m+n}$. Пространственная диаграмма комбинированной АМ-ФМ показана на рисунке 3.3.

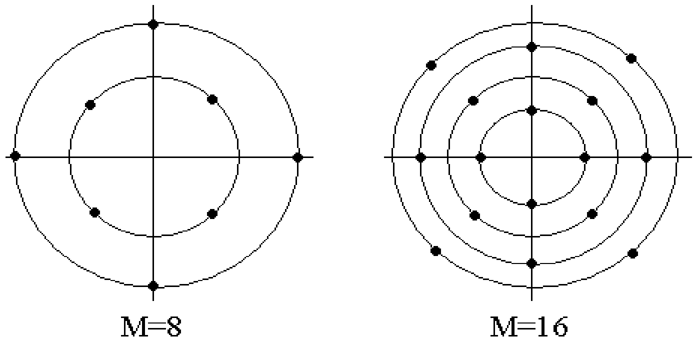


Рисунок 3.3. Пространственная диаграмма комбинированной АМ-ФМ.

Для частного случая, когда амплитуда сигналов принимает ряд дискретных значений $\left\{(2m-1-M)d, \quad m=\overline{1:M}\right\}$, пространственная диаграмма сигналов является прямоугольной, изображена она на рисунке 3.4.

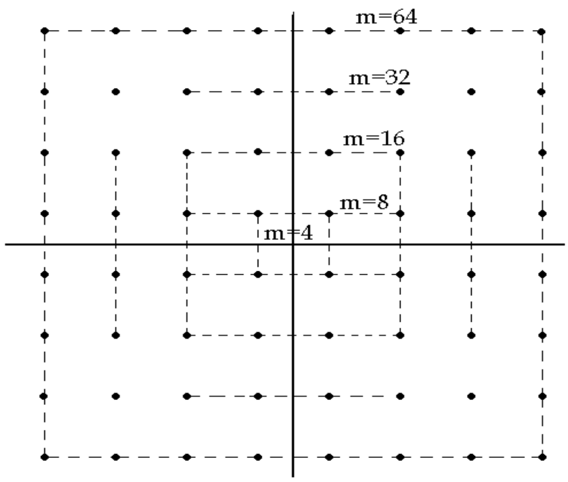


Рисунок 3.4. Пространственная диаграмма сигналов КАМ.

3.1.4. Ортогональные сигналы

Нелинейная модуляция без памяти.

$$S_m(t) = A\cos(2\pi f_c t + 2\pi m \triangle f t),\\ m = \overline{1:M} \quad 0 \le t \le T \tag{3.5}$$

Этот вид частотной модуляции (ЧМ) называется модуляцией с частотным сдвигом (МЧС, FSK), $\rho_{km} = 0;\ \triangle f = \dfrac{1}{2T}$

3.1.5. Расстояние Евклида между сигналами.

Расстояние Евклида – мера сходства (или несходства) совокупности сигналов.

$$d_{km}^{(e)} = \left|S_m - S_k\right|^2 = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_m(t) - S_k(t)\right]^2 dt\right\}^{1/2} = \left\{E_m + E_k - 2\sqrt{E_m E_k}\cdot \mathrm{Re}(\rho_{km})\right\}^{1/2} \tag{3.6}$$

где E_m, E_k – энергии сигналов $S_m(t)$и $S_k(t)$ соответственно, ρ_{km} – коэффициент взаимной корреляции между сигналами $S_m(t)$и $S_k(t)$.

$$\mathrm{Re}(\rho_{km}) = \frac{1}{\sqrt{E_k E_m}}\int_{-\infty}^{\infty} S_m(t) S_k(t) dt \tag{3.7}$$

Если E_m=E_k=E для всех k и m, то (3.6) преобразовывается в

$$d_{km}^{(e)} = \left\{2E[1 - \mathrm{Re}(\rho_{km})]\right\}^{1/2} \tag{3.8}$$

Тогда евклидово расстояние для разных сигналов имеет вид:

<u>АМ:</u>
$$d_{km}^{(e)} = \sqrt{(S_m - S_k)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}Eg}\left|A_m - A_k\right| = d\sqrt{2Eg}\left|m-k\right|$$
$$d_{km\min}^{(e)} = d\sqrt{2Eg},\quad при\ \left|m-k\right| = 1$$

<u>ФМ:</u>
$$d_{km}^{(e)} = \left|S_m - S_k\right| = \sqrt{Eg\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}(m-k)\right)\right]},$$
$$d_{km\min}^{(e)} = \sqrt{Eg\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right)\right]},\quad при\ \left|m-k\right| = 1$$

<u>КАМ:</u> $$d_{km}^{(e)} = \sqrt{\frac{1}{2}Eg\left[\left(A_{mc} - A_{kc}\right)^2 + \left(A_{ms} - A_{ks}\right)^2\right]}$$

Если амплитуда сигналов принимает ряд дискретных значений $\left\{(2m-1-M)d,\ \ m=\overline{1:M}\right\}$, то $d^{(e)}_{km\min}=d\sqrt{2Eg}$ и совпадает с тем же параметром для АМ.

Чем сильнее различаемые сигналы, т.е. чем больше $d^{(e)}_{km}$, тем легче принимать их с нужным качеством.

3.2. Методы модуляции с памятью.

3.2.1. Линейная модуляция с памятью.

Ограничим рассмотрение базовыми сигналами (низкочастотными). Рассмотрим два базовых сигнала, которые представлены на рисунке 3.5.:

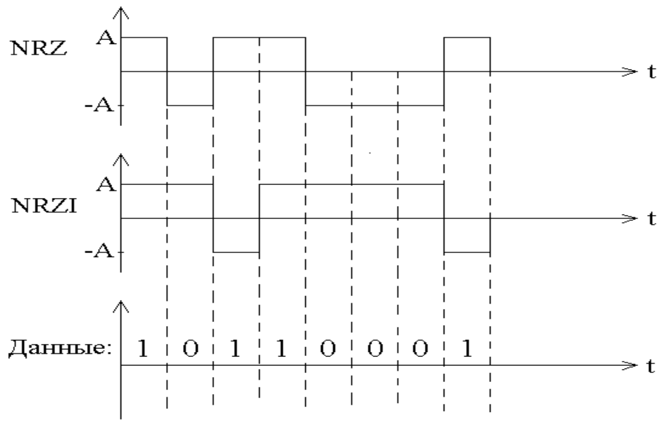


Рисунок 3.5. Временная диаграмма базовых низкочастотных сигналов.

Первый сигнал NRZ (двоичный сигнал без возвращения к нулевому уровню – ДБН) – простейший. NRZ отображает модуляцию без памяти. Он эквивалентен двоичной АМ или двоичной ЧМ ($\Theta_{1,2}=0;\ \pi$) в системе с модулированной несущей. Второй – NRZI отличается от NRZ тем, что переход от одного уровня амплитуды к другому имеет место только при передаче «1». Уровень амплитуды не меняется, когда передается «0». Этот тип преобразования называется дифференциальным кодированием. Операция кодирования математически записывается в следующем виде:

$$b_k = a_k \oplus b_{k-1}\ , \qquad (3.9)$$

где $\{a_k\}$– двоичная информационная последовательность на входе кодера, $\{b_k\}$– последовательность на выходе кодера, $\oplus$ – суммирование по модулю 2. Далее, если b_k=1, то передаваемый сигнал – прямоугольный импульс с амплитудой А, если b_k =0, то передаваемый сигнал – прямоугольный импульс с амплитудой –А. Операция дифференциального кодирования вводит память в сигнал.

3.2.2. *Нелинейные методы модуляции с памятью*

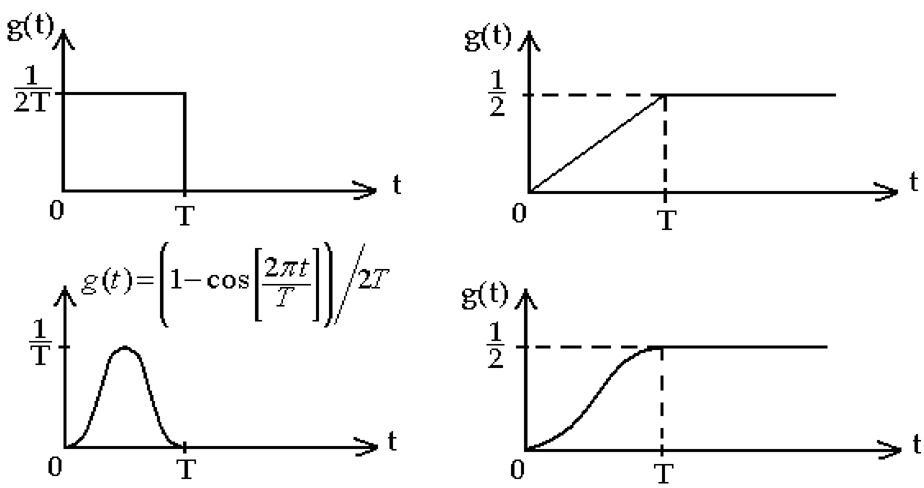
Модуляция с непрерывной фазой (МНФ).

$$S(t) = A\cos\left[2\pi f_c t + \Psi(t, I)\right]$$
$$\Psi(t, I) = 2\pi \sum_{l=1}^{n} I_l h_l q(t-(l-1)T) \qquad (3.10)$$
$$(n-1)T \le t \le nT$$

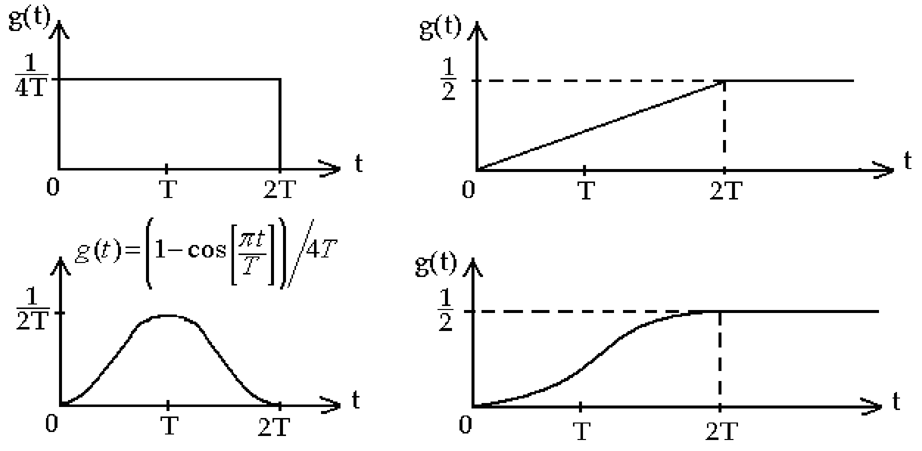
где $n = 1, 2, ...$ $,\{I_l\}$ – последовательность информационных символов, выбранных из алфавита $\pm1, \pm3, \ldots, \pm(M-1)$, $\{h_l\}$ – последовательность индексов модуляции для всех символов, $q(t)$ – нормированная огибающая сигнала. Когда h_l меняется от одного символа к другому => сигнал МНФ называется <u>многоиндексным</u> (*multi-h*).

$$q(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau,$$

где $g(\tau)$ – форма импульса. Если $g(\tau) = 0$ для $t > T$ => сигнал МНФ называют МНФ <u>с полным откликом</u>. Если $g(\tau) \neq 0$ для $t < T$ => сигнал называют МНФ <u>с парциальным откликом</u>. Функции *g(t), q(t)* для полного и парциального отклика показаны на рисунке 3.6.



а)



б)

Рисунок 3.6. Функции *g(t), q(t)* сигнала МНФ: полный отклик – а, парциальный отклик - б.

Можно нарисовать ряд фазовых траекторий $\Psi(t,I)$, генерируемых возможными значениями информационных последовательностей $\{I_n\}$.

Например, в случае ЧМНФ (ЧМ с непрерывной фазой – частный случай МНФ сигнала, $h = 2 f_{dev}T$ = *const,* f_{dev} – максимальная девиация частоты) с двоичными символами $I_n = \pm 1$ и прямоугольным импульсом $g(t)$ ряд фазовых траекторий, начинающихся при $t = 0$ показан на рисунке .3.7.

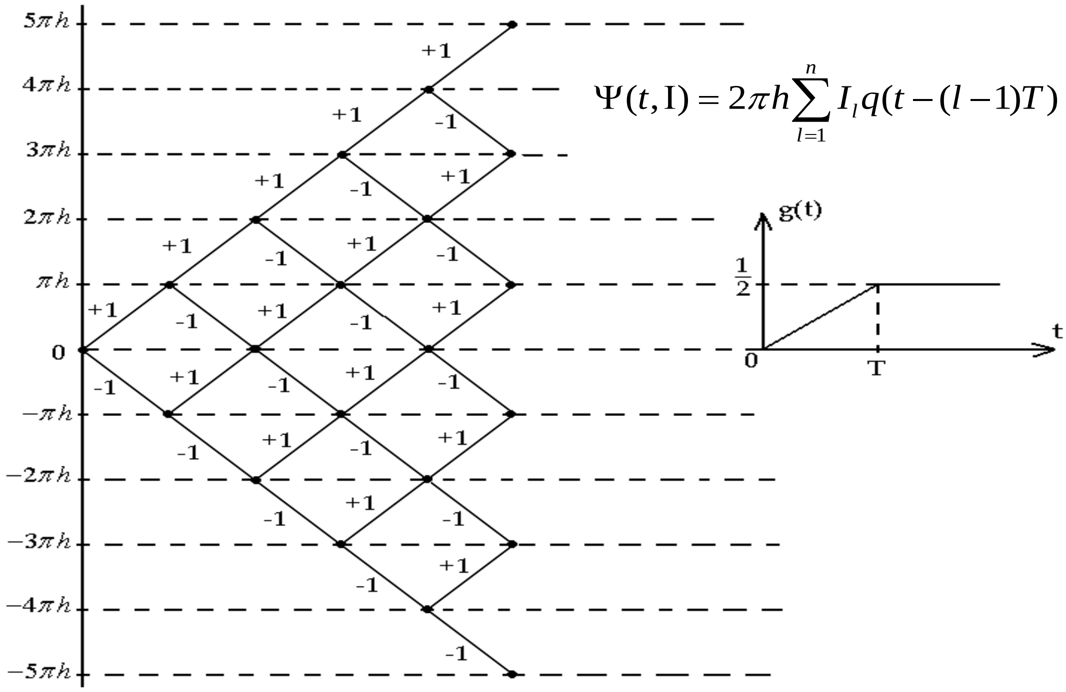


Рисунок 3.7. Фазовые траектории сигнала МНФ с полным откликом и прямоугольным импульсом.

Такие фазовые траектории называются <u>фазовым деревом.</u>

Модуляция с минимальным сдвигом (ММС, MSK)

ММС – специальная форма ЧМНФ (и, следовательно, МНФ), в которой индекс модуляции $h = 1/2$. Фаза несущей на интервале $nT \le t \le (n+1)T$ равна:

$$\Psi(t,I) = \frac{1}{2}\pi\sum_{l=1}^{n-1} I_l + \pi I_n q(t-(n-1)T) \tag{3.11}$$

Вывод: В большинстве систем ЦС, имеющаяся в распоряжении полоса частот, ограничена. Поэтому актуальны сигналы, занимающие меньшую полосу частот. Нужная полоса частот достигается подбором $g(t)$ и вида модуляции. Также важно чтобы боковые доли спектральной плотности мощности были как можно меньше. С этой точки зрения сигнал МНФ – эффективный.

3.3. Сравнение цифровых методов модуляции

ФМ: Для многофазных сигналов требуемая полоса частот – полоса сигнального импульса $g(t)$. Пусть $g(t)$ – импульс длительностью T => W – его полоса частот, $W \approx \frac{1}{T}$, т.к. $T = \frac{K}{R} = \frac{\log_2 M}{R}$ => $W \approx \frac{R}{\log_2 M}$ => при увеличении M уменьшается W при $R = const$.

$\frac{R}{W}$ – частотная эффективность – отношение скорости (бытовой) к полосе. Тогда для сигналов цифровой ФМ

$$\frac{R}{W} = \log_2 M \tag{3.12}$$

АМ: Частотно-эффективный метод передачи АМ сигналов – однополосная передача. => $W \approx \frac{1}{2T}$ => $W \approx \frac{R}{2\log_2 M}$ => для цифровой ФМ частотная эффективность определяется, как

$$\frac{R}{W} = 2\log_2 M\ . \tag{3.13}$$

Таким образом, частотная эффективность АМ в 2 раза больше, чем ФМ.

КАМ: Т.к. в КАМ –сигнале есть две ортогональные несущие и на каждой несущей передается АМ сигнал, то $R_{KAM} = 2R_{AM}$. Но КАМ – сигнал передается двумя полосами, тогда КАМ и АМ имеют одинаковую частотную эффективность.

Ортогональные сигналы: Для ортогональных сигналов существуют другие требования к полосе. Пусть $M = 2^K$ ортогональных сигналов синтезированы посредством ортогональных несущих с минимальным разносом частот $\frac{1}{2T}$ для ортогональности, то полоса частот, требуемая для передачи $K = \log_2 M$ информационных бит равна $W = \frac{M}{2T} = \frac{M}{2(K/R)} = \frac{M}{2\log_2 M} \cdot R$. В этом случае при увеличении M растет W при $R = const$. Частотная эффективность ортогональных сигналов определяется следующим выражением:

$$\frac{R}{W} = \frac{2\log_2 M}{M} \tag{3.14}$$

Компактное и осмысленное сравнение методов цифровой модуляции основывается на зависимости $\frac{R}{W}$ от $\frac{E_б}{N_0} = q_б$, где $q_б$ – отношение сигнал/шум на бит, требуемое для достижения заданной вероятности ошибки.

$E_б = P_{ср} T_б$ – энергия на бит,

$$P_{ср} = \frac{\int_0^T S^2(t)dt}{T} = \frac{\int_0^T S^2(t)dt}{KT_б} \Rightarrow E_б = \frac{\int_0^T S^2(t)dt}{K} = \frac{E}{K}.$$

В случае АМ, КАМ, ФМ увеличение М ведет к росту частотной эффективности $\frac{R}{W}$. Но плата за это увеличивается по мере роста $q_б$. Следовательно, эти методы модуляции предпочтительны для частотно ограниченных каналов связи, когда желательно иметь $\frac{R}{W} > 1$, и где обеспечивается достаточно большое $q_б$, чтобы поддержать рост *M*, например, телефонные каналы, цифровые микроволновые радиоканалы.

Напротив, М-позиционные ортогональные сигналы дают $\frac{R}{W} \le 1$. При увеличении M падает частотная эффективность $\frac{R}{W}$, т.к. увеличивается полоса W (при $R = const$). Но $q_б$ требуемое для достижения заданной вероятности ошибки уменьшается *с* ростом *M*. Следовательно, М-позиционные ортогональные сигналы предпочтительны для каналов с ограничением мощности, которые имеют достаточно широкую полосу для размещения большого количества сигналов.