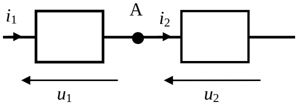
Podstawy Elektrotechniki i Elektroniki
część 3

dr hab. inż. Stanisław Hałgas, prof. PŁ

Połączenie szeregowe elementów

Połączenie szeregowe elementów

Rozpatrzmy połączenie dwóch elementów zaznaczonych symbolicznie prostokątami (np. rezystorów, diody i źródła napięcia, źródła napięcia i rezystora, itp.) pokazane na rys. 1. Ten typ połączenia nazywamy połączeniem szeregowym.



Rys. 1: Połączenie szeregowe dwóch elementów

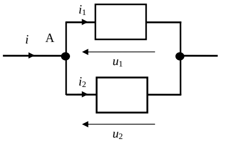
Połączenie szeregowe elementów

- PPK w węźle A $i_2 - i_1 = 0$,
- stąd $i_2 = i_1$.
- **Przez każdy element w połączeniu szeregowym płynie prąd o tej samej wartości.**

Połączenie równoległe elementów

Połączenie równoległe elementów

Ten typ połączenia nazywamy połączeniem równoległym.



Rys. 2: Połączenie równoległe dwóch elementów

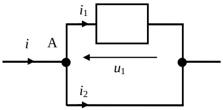
Połączenie równoległe elementów

- NPK $u_2 - u_1 = 0$,
- stąd $u_2 = u_1$.
- **Na każdym elemencie w połączeniu równoległym występuje napięcie o tej samej wartości.**

Zwarcie miedzy węzłami obwodu

Zwarcie miedzy węzłami obwodu

Szczególny typ połączenia równoległego, w którym zakładamy, że dolna gałąź jest przewodem o zerowej rezystancji (zwarciem).



Rys. 3: Zwarcie między węzłami obwodu

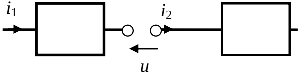
Zwarcie miedzy węzłami obwodu

- Z NPK wynika $u_1 = 0$, a zatem skoro nie ma napięcia na elemencie pasywnym to prąd $i_1 = 0$ (np. gdy element jest rezystorem, to zerowa wartość prądu wynika bezpośrednio, ze znanego ze szkoły średniej, prawa Ohma).
- z PPK wówczas wynika $i_2 = i$.
- **Jeżeli w obwodzie wystąpi zwarcie miedzy dwoma węzłami to cały prąd płynie przez to zwarcie.**

Przerwa w gałęzi obwodu

Przerwa w gałęzi obwodu

Szczególny typ połączenia szeregowego pokazany na rys. 4. Pomiędzy dwoma elementami występuje przerwa, czyli rezystancja o nieskończonej wartości (fizycznie może to np. oznaczać urwany przewód łączący elementy lub urwaną końcówkę elementu).



Rys. 4: Przerwa w gałęzi obwodu

Przerwa w gałęzi obwodu

- Ponieważ przez wyróżnione zaciski nie płynie prąd, więc z PPK wynika, że $i_2 = i_1 = 0$.
- **napięcie u w ogólnym przypadku nie jest równe zeru.**
- **Jeżeli w obwodzie, w połączeniu szeregowym elementów wystąpi przerwa to prąd we wszystkich elementach występujących w tym połączeniu ma zerową wartość (nie płynie).**

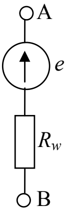
Rzeczywiste źródło napięcia

Rzeczywiste źródło napięcia

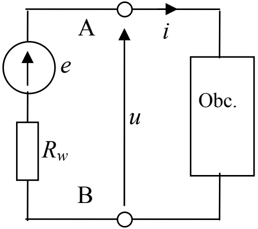
Rzeczywiste źródło napięcia szeregowe połączeniee idealnego niezależnego źródła napięcia i niezerowej rezystancji wewnętrznej R_w (rys. 5).

Rzeczywiste źródło napięcia

Po dołączeniu do zacisków źródła pewnego obciążenia (rys. 6) przez układ płynie prąd i, zależny od parametrów samego źródła i dołączonego obciążenia.



Rys. 5: Rzeczywiste źródło napięcia

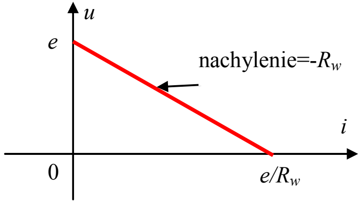


Rys. 6: Rzeczywiste źródło napięcia z dołączonym obciążeniem

Rzeczywiste źródło napięcia

Rzeczywiste źródło napięcia

Charakterystyka napięciowo-prądowa u–i rzeczywistego źródła (rys. 7) przechodzi przez dwa charakterystyczne punkty, tzw. stan jałowy i stan zwarcia. Stan jałowy – zaciski źródła pozostają nieobciążone (prąd $i = 0$). Stan zwarcia – zaciski pozostają zwarte przewodem bezoporowym (napięcie $u = 0$).



Rys. 7: Charakterystyka rzeczywistego źródło napięcia z dołączonym obciążeniem

Rzeczywiste źródło napięcia

Równanie prostej $u = E - R_w i$.

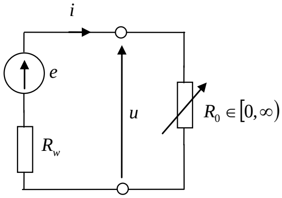
Dopasowanie odbiornika do źródła

Dopasowanie odbiornika do źródła

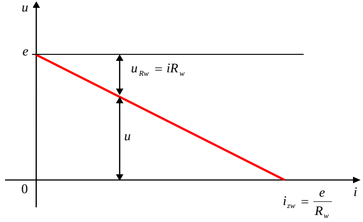
Dobór R_0 tak, aby wydzieliła się na niej maksymalna moc

Dopasowanie odbiornika do źródła

Dla ustalonej R_0 napięcie źródłowe e dzieli się na dwie części: napięcie u, czyli napięcie na R_0 oraz na napięcie u_{Rw} tak, jak to przedstawiono na rys. 9.



Rys. 8: Rzeczywiste źródło napięcia z dołączonym obciążeniem R_0



Rys. 9: Charakterystyka rzeczywistego źródło napięcia z dołączonym obciążeniem

Dopasowanie odbiornika do źródła

Dopasowanie odbiornika do źródła

- Sprawność – iloraz mocy użytecznej (P_0) i mocy wytworzonej w idealnym źródle napięciowym (P_e)

$$\eta = \frac{P_0}{P_e}. \tag{1}$$

- W rozpatrywanym układzie $\eta = \frac{R_0 i^2}{e \cdot i} = \frac{R_0 i}{e}$.
- Z NPK $u = e - iR_w$ (1),
- Z prawa Ohma $u = R_0 i$ (2).
- Podstawiając (2) do (1) $e = iR_0 + iR_w$.
- Stąd i

$$i(R_0) = \frac{e}{R_0 + R_w}. \tag{2}$$

Dopasowanie odbiornika do źródła

Dopasowanie odbiornika do źródła

- Sprawność

$$\eta(R_0) = \frac{R_0 i^2}{e \cdot i} = \frac{R_0 \frac{e}{R_0+R_w}}{e} = \frac{R_0}{R_0 + R_w} \tag{3}$$

- Moc użyteczna P_0

$$P_0 = p(R_0) = u \cdot i = \frac{e^2 R_0}{(R_0 + R_w)^2}. \tag{4}$$

- Poszukiwane jest ekstremum funkcji (4). Warunkiem koniecznym jest zerowanie się pierwszej pochodnej, czyli

$$\frac{dp}{dR_0} = 0. \tag{5}$$

Dopasowanie odbiornika do źródła

Dopasowanie odbiornika do źródła

- Uwzględniając (4) w (5)

$$\frac{dp}{dR_0} = e^2 \left(\frac{R_0}{(R_0 + R_w)^2} \right)' = e^2 \frac{\left[(R_0 + R_w)^2 - 2\,(R_0 + R_w)\,R_0 \right]}{(R_0 + R_w)^4} = 0, \tag{6}$$

- Stąd

$$R_0 = R_w. \tag{7}$$

- Sprawdzając znak drugiej pochodnej potwierdzamy fakt znalezienia maksimum. Podsumowując: **przy ustalonych parametrach źródła moc maksymalna na R_0 wydziela się w przypadku, gdy $R_0 = R_w$. Jest to warunek dopasowania**.

Dopasowanie odbiornika do źródła

Dopasowanie odbiornika do źródła

Maksymalne wartości odpowiednich wielkości wynoszą:

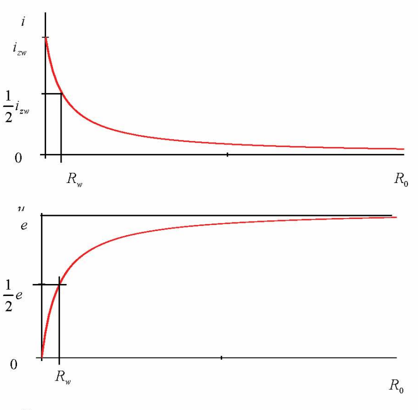
$$p_{\max} = p\left(R_0 = R_w\right) = e^2 \frac{R_w}{\left(R_w + R_w\right)^2} = \frac{e^2}{4R_w}, \tag{8}$$

$$i(R_0 = R_w) = \frac{e}{2R_w} = \frac{1}{2} i_{zw}, \tag{9}$$

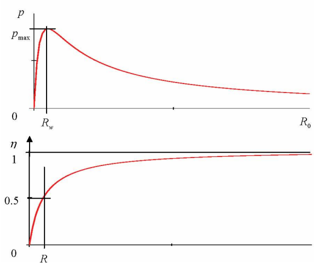
$$u(R_0 = R_w) = \frac{e}{2R_w} \cdot R_w = \frac{1}{2} e, \tag{10}$$

$$\eta(R_0 = R_w) = \frac{P_0}{P_e} = \frac{R_w}{R_w + R_w} = \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Dopasowanie odbiornika do źródła



Rys. 10: Charakterystyki $i(R_0)$, $u(R_0)$

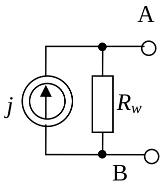


Rys. 11: Charakterystyki $p(R_0)$, $\eta(R_0)$

Rzeczywiste źródło prądu

Rzeczywiste źródło prądu

Rzeczywiste źródło prądu, zawiera równoległe połączenie idealnego źródła prądu j oraz rezystancji wewnętrznej R_w.
Charakterystyka i warunek dopasowania są analogiczne do rozpatrywanego wcześniej przypadku rzeczywistego źródła napięcia.

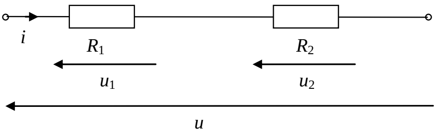


Rys. 12: Rzeczywiste źródło prądu

Dzielnik napięcia

Dzielnik napięcia

Cel – wyprowadzenie wzoru na wartość rezystancji zastępczej oraz napięcia u_1 oraz u_2 w funkcji napięcia u oraz rezystancji R_1 i R_2.



Rys. 13: Połączenie szeregowe dwóch oporników

Dzielnik napięcia

- Przez oporniki płynie ten sam prąd i.
- Z NPK oraz prawa Ohma wynika zależność $u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)\ \ i$,
- Stąd $\frac{u}{i} = R_1 + R_2$ (*).
- Rrezystancja zastępcza $R = R_1 + R_2$.

Dzielnik napięcia

Dzielnik napięcia

- **Rezystancja zastępcza szeregowego połączenia jest zawsze większa od rezystancji każdego z oporników tworzących to połączenie.**
- Dla n szeregowo połączonych oporników $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$.
- Wyznaczając ze wzoru (*) prąd i oraz korzystając z prawa Ohma

$$u_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u, \tag{12}$$

$$u_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u. \tag{13}$$

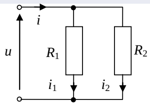
- Połączenie szeregowe oporników R_1 i R_2 można więc uważać za *dzielnik napięcia*. Napięcie u ulega podziałowi na napięcia u_1 oraz u_2 zgodnie ze wzorem

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{14}$$

Dzielnik prądu

Dzielnik prądu

Cel – wyprowadzenie wzoru na wartość rezystancji zastępczej oraz prądów i_1 oraz i_2 w funkcji prądu i oraz rezystancji R_1 i R_2.



Rys. 14: Połączenie równoległe dwóch oporników

Dzielnik prądu

- Napięcie na obu opornikach jest jednakowe i wynosi u.
- PPK w górnym węźle układu $i = i_1 + i_2$
- Korzystając z prawa Ohma

$$i_1 = \frac{u}{R_1}, \qquad i_2 = \frac{u}{R_2}. \tag{15}$$

Dzielnik prądu

Dzielnik prądu

- Podstawiając (15) do PPK $i = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) u.$
- Dzieląc stronami przez u mamy $\frac{i}{u} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$,
- Ponieważ $\frac{i}{u} = \frac{1}{R}$, stąd rezystancja zastępcza

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{16}$$

- Po przekształceniach

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{17}$$

- **Rezystancja zastępcza równoległego połączenia jest zawsze mniejsza od rezystancji każdego z oporników tworzących to połączenie.**
- Dla n równolegle połączonych oporników

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \tag{18}$$

Dzielnik prądu

Dzielnik prądu

- Układ jest najprostszym dzielnikiem prądu.
- W celu określenia podziału prądu i na i_1 oraz i_2 obliczymy najpierw napięcie u

$$u = Ri = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i, \tag{19}$$

a następnie podstawimy do zależności (15) otrzymując:

$$i_1 = \frac{u}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \tag{20}$$

$$i_2 = \frac{u}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i. \tag{21}$$

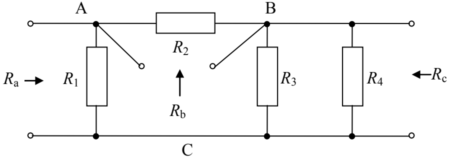
- Dzieląc stronami (20) oraz (21) dochodzimy do końcowej zależności

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}. \tag{22}$$

Przykład 1

Przykład 1

Wyznacz rezystancję zastępczą układu pokazanego na rys. 15 widzianą z zacisków AC (R_a).
Dane: $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 20\,\Omega$ i $R_4 = 20\,\Omega$.



Rys. 15: Przykładowy obwód liniowy

Rozwiązanie - Rezystancja zastępcza widziana z zacisków AC

Rezystancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_3 i R_4,

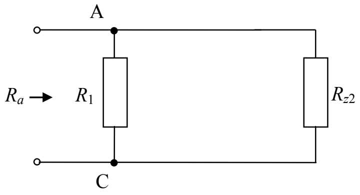
$$R_{z1} = R_3 \| R_4 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 10\,\Omega. \tag{23}$$

Przykład 1

Rozwiązanie - Rezystancja zastępcza widziana z zacisków AC

Rezystancja zastępcza połączenia szeregowego R_2 i R_{z1}

$$R_{z2} = R_{z1} + R_2 = 30\,\Omega. \tag{24}$$



Rys. 16: Obwód do wyznaczenia rezystancji R_a po II przekształceniu

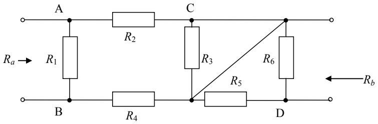
Ponieważ jest to typowe połączenie równoległe więc rezystancja zastępcza R_a

$$R_a = R_1 \| R_{z2} = \frac{R_1 R_{z2}}{R_1 + R_{z2}} = 7.5\,\Omega. \tag{25}$$

Przykład 2

Przykład 2

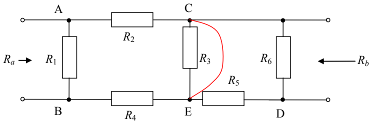
Wyznacz rezystancję zastępczą układu pokazanego na rys. 17 widzianą z zacisków AB. Dane: $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$, $R_4 = 20\,\Omega$, $R_5 = 5\,\Omega$, $R_6 = 5\,\Omega$.



Rys. 17: Przykładowy obwód liniowy

Rozwiązanie

Punkty C i E są połączone przewodem bezoporowym (kolor czerwony)



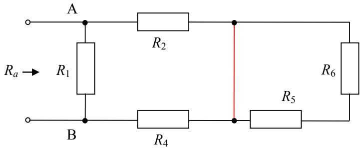
Przykład 2

Rozwiązanie

Rezystor R_3 jest połączony równolegle z rezystorem $R = 0$ (mówimy, że jest zwarty), a zatem, ze wzoru na połączenie równoległe

$$R_{z1} = R_3 \| R = \frac{10 \cdot 0}{10 + 0} = 0\,\Omega. \qquad (26)$$

Rezystor R_3 może więc być usunięty ze schematu.

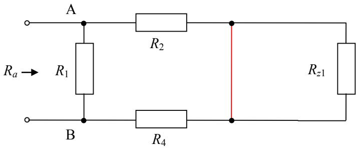


Przykład 2

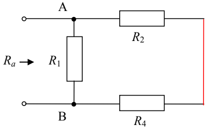
Rozwiązanie

Rezystancja zastępcza połączenia szeregowego rezystorów $R_5 = 5\,\Omega$ i $R_6 = 5\,\Omega$

$$R_{z1} = R_5 + R_6 = 10\,\Omega. \tag{27}$$



Rezystor R_{z1} jest zwarty i usuwamy go ze schematu.



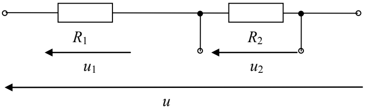
Stąd rezystancja zastępcza wynosi

$$R_a = (R_2 + R_4) \| R_1 = \frac{(R_2 + R_4)\, R_1}{R_1 + R_2 + R_4} = 8\,\Omega \tag{28}$$

Przykład 3

Przykład 3

Wyznacz rezystancję rezystora R_2 w układzie dzielnika napięcia z rys. 18, tak, aby napięcie $u_2 = 30\,\mathrm{V}$. Dane: $u = 120\,\mathrm{V}$, $R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$.



Rys. 18: Przykładowy dzielnik napięcia

Rozwiązanie

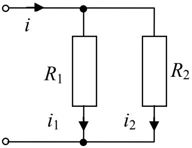
- Dla dzielnika napięcia, obowiązuje zależność $\frac{u_1}{u_2} = \frac{R_1}{R_2}$,
- z NPK $u_1 = u - u_2 = 90\,\mathrm{V}$
- A zatem

$$R_2 = \frac{u_2 R_1}{u_1} \cong 3{,}33\,\mathrm{k\Omega}. \tag{29}$$

Przykład 4

Przykład 4

Wyznacz rezystancję rezystora R_1 w układzie dzielnika prądu z rys. 19 tak, aby prąd $i_1 = 2\,\mathrm{A}$. Dane: $i = 10\,\mathrm{A}$, $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$



Rys. 19: Przykładowy dzielnik prądu

Rozwiązanie

- Ze wzoru na dzielnik prądu

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}, \tag{30}$$

- z PPK

$$i_2 = i - i_1 = 8\,\mathrm{A}. \tag{31}$$

- Po przekształceniu

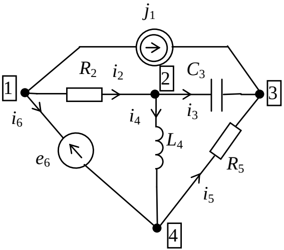
$$R_1 = \frac{i_2 R_2}{i_1} = 40\,\mathrm{k\Omega}. \tag{32}$$

Podstawy topologii obwodów

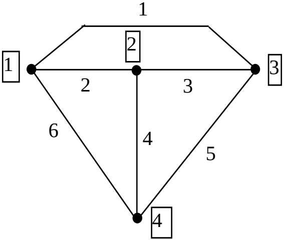
Wstęp

- Topologia obwodów zajmuje się ustaleniem związków dotyczących połączeń elementów. Rozpatruje się obwody zawierające tylko elementy dwójnikowe.
- Badając strukturę geometryczną obwodu zastępujemy elementy występujące w schemacie *gałęziami* (reprezentowanymi przez linie), na końcu każdej gałęzi umieszczamy kropkę, zwaną *węzłem*. W rezultacie otrzymujemy ***graf obwodu***.
- ***Graf*** jest zbiorem węzłów i gałęzi, przy czym każda gałąź łączy się każdym końcem z odpowiednim węzłem.
- Jeżeli każdej gałęzi grafu przyporządkujemy zwrot, to otrzymamy ***graf zorientowany***. Przyjmuje się, że ***orientacja gałęzi grafu jest zgodna ze strzałką prądu*** w odpowiedniej gałęzi.
- *Na grafie nie zaznaczamy strzałek napięć, których groty są skierowane przeciwnie do grotów strzałek prądów.*

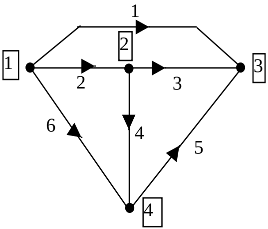
Przykład



Rys. 20: Przykładowy obwód



Rys. 21: Graf dla obwodu pokazanego na rys. 20



Rys. 22: Graf zorientowany dla obwodu pokazanego na rys. 20

Twierdzenie Tellegena

Twierdzenie Tellegena

- Twierdzenie Tellegena wynika bezpośrednio z praw Kirchhoffa i topologii, może być stosowane do dowolnego obwodu o elementach skupionych, utworzonego z dwójników liniowych i nieliniowych, pasywnych i aktywnych, stacjonarnych i niestacjonarnych.

Twierdzenie Tellegena – treść Jeżeli prądy gałęziowe i_k spełniają PPK w każdym węźle grafu oraz napięcia gałęziowe u_k spełniają NPK w każdej pętli grafu, to

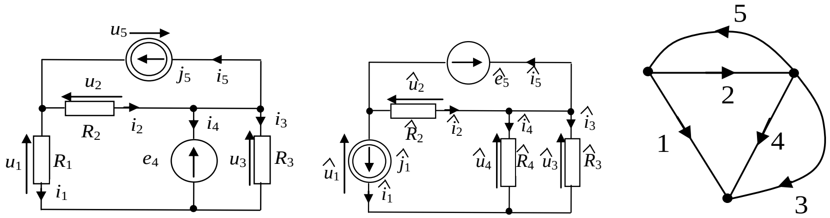
$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0, \tag{33}$$

gdzie b – liczba gałęzi grafu. *Uwaga: Prądy i napięcia muszą dotyczyć tego samego grafu, ale nie muszą odnosić się do tego samego obwodu.* **W szczególnym przypadku, gdy dotyczą tego samego obwodu, wzór powyższy ma interpretację fizyczną i oznacza, że suma mocy chwilowych dla wszystkich gałęzi obwodu jest równa zeru.**

Twierdzenie Tellegena

Przykład 1

Potwierdzić słuszność twierdzenia Tellegena na przykładzie układów pokazanych na rys. 23. Rozpatrzyć wszystkie możliwe przypadki zastosowania tego twierdzenia. Dane: $e_4 = 6\,\mathrm{V}$, $R_i = 1\,\Omega\ (i = 1,2,3), j_5 = 2\,\mathrm{A}, \hat{e}_5 = 12\,\mathrm{V}, \hat{R}_i = 2\,\Omega\ (i = 2,3,4), \hat{j}_1 = 2\,\mathrm{A}$.



Rys. 23: Przykładowe obwody o takiej samej topologii

Twierdzenie Tellegena

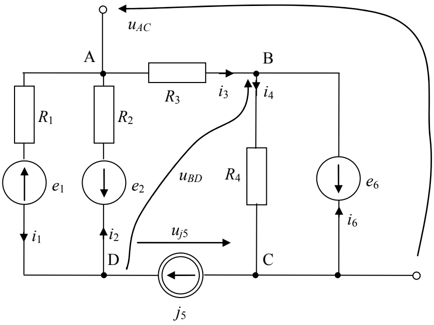
Przykład 1

- Obliczenia ręczne lub `PSpice`dla obwodu pierwszego:
  $i_1 = 4\,\mathrm{A}$, $u_1 = 4\,\mathrm{V}$, $i_2 = -2\,\mathrm{A}$, $u_2 = -2\,\mathrm{V}$, $i_3 = 6\,\mathrm{A}$, $u_3 = 6\,\mathrm{V}$, $i_4 = -10\,\mathrm{A}$, $u_4 = e_4 = 6\,\mathrm{V}$, $i_5 = j_5 = 2\,\mathrm{A}$, $u_5 = 2\,\mathrm{V}$,
  a dla obwodu drugiego:
  $\hat{i}_1 = \hat{j}_1 = 2\,\mathrm{A}$, $\hat{u}_1 = -14\,\mathrm{V}$, $\hat{i}_2 = -6\,\mathrm{A}$, $\hat{u}_2 = -12\,\mathrm{V}$, $\hat{i}_3 = -1\,\mathrm{A}$, $\hat{u}_3 = -2\,\mathrm{V}$, $\hat{i}_4 = -1\,\mathrm{A}$, $\hat{u}_4 = -2\,\mathrm{V}$, $\hat{i}_5 = 2\,\mathrm{A}$, $\hat{u}_5 = \hat{e}_5 = 12\,\mathrm{V}$.
- tw. Tellegena dla I obwodu (bilans mocy):
  $u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5 = 16 + 4 + 36 - 60 + 4 = 0,$
- tw. Tellegena dla II obwodu (bilans mocy):
  $\hat{u}_1 \hat{i}_1 + \hat{u}_2 \hat{i}_2 + \hat{u}_3 \hat{i}_3 + \hat{u}_4 \hat{i}_4 + \hat{u}_5 \hat{i}_5 = -28 + 72 + 2 + 2 - 48 = 0,$
- tw. Tellegena – prądy z pierwszego obwodu, napięcia z drugiego:
  $\hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \hat{u}_3 i_3 + \hat{u}_4 i_4 + \hat{u}_5 i_5 = -56 + 24 - 12 + 20 + 24 = 0,$
- tw. Tellegena – napięcia z pierwszego obwodu, prądy z drugiego:
  $u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + u_3 \hat{i}_3 + u_4 \hat{i}_4 + u_5 \hat{i}_5 = 8 + 12 - 6 - 6 - 8 = 0.$

Twierdzenie Tellegena

Przykład 2

Korzystając z praw Kirchhoffa wyznacz, w obwodzie przedstawionym na rys. 24, prądy gałęziowe oraz napięcia u_{AC} i u_{BD}. Następnie dokonaj bilansu mocy. Dane: $e_1 = 10\,\mathrm{V}$, $e_2 = 2\,\mathrm{V}$, $e_6 = 5\,\mathrm{V}$, $j_5 = 1\,\mathrm{A}$, $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 1\,\Omega$.



Rys. 24: Przykładowy układ liniowy

Metoda (zasada) superpozycji

Metoda (zasada) superpozycji

- Rozpatrujemy liniowy obwód rezystancyjny zawierający n niezależnych źródeł napięcia $e_{s1},\ e_{s2},\ \ldots,\ e_{sn}$ oraz m niezależnych źródeł prądu $j_{s1}, j_{s2}, \ldots, j_{sm}$.

Metoda (zasada) superpozycji
Dowolny prąd gałęziowy i_j oraz dowolne napięcie gałęziowe u_j jest wyrażeniem o postaci

$$h_1 e_{s1} + h_2 e_{s2} + \ldots + h_n e_{sn} + k_1 j_{s1} + k_2 j_{s2} + \ldots + k_m j_{sm}, \tag{34}$$

gdzie współczynniki $h_p \ (p = 1, \ldots, n)$ oraz $k_p \ (p = 1, \ldots, m)$ są stałymi, które zależą tylko od parametrów obwodu i nie zależą od wielkości źródłowych. Każdy składnik $h_p e_{sp}$ jest odpowiedzią obwodu, w którym wszystkie źródła oprócz e_{sp} zostały przyrównane do zera. Każdy składnik $k_p j_{sp}$ jest odpowiedzią obwodu, w którym wszystkie źródła za wyjątkiem j_{sp} przyrównano do zera.

Metoda (zasada) superpozycji

Ogólna reguła usuwania źródeł

- Przyrównanie do zera prądów źródłowych jest równoważne usunięciu źródeł prądowych z obwodu (lub ustawieniu ich wartości na zero) czyli **rozwarciu źródeł prądowych**.
- Przyrównanie do zera napięć źródłowych jest równoważne usunięciu źródeł napięcia (lub ustawieniu ich wartości na zero) i zwarciu zacisków, do których były dołączone czyli **zwarciu źródeł napięciowych**.
- Tak więc każdy prąd gałęziowy i każde napięcie gałęziowe jest *kombinacją liniową* napięć i prądów źródłowych.

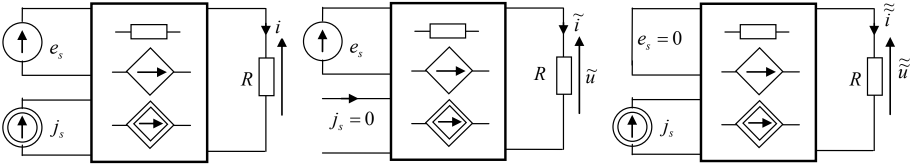
Metoda (zasada) superpozycji – inne sformułowanie

W myśl zasady superpozycji odpowiedź obwodu liniowego pobudzanego jednocześnie kilkoma wymuszeniami równa się sumie odpowiedzi obwodu na poszczególne wymuszenia działające oddzielnie.

Metoda (zasada) superpozycji

Metoda (zasada) superpozycji

Układ liniowy, zawierający jedno niezależne źródło napięciowe e_s i jedno niezależne źródło prądowe i_s.



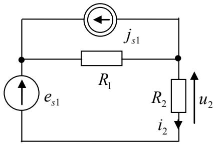
Metoda (zasada) superpozycji

prąd i w układzie oryginalnym jest równy $i = he_s + kj_s = \tilde{i} + \tilde{\tilde{i}}$.

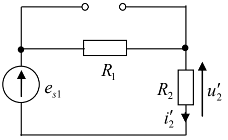
Przykład 1

Przykład 1

Wyznacz napięcie u_2 w układzie pokazanym na rys. 25.

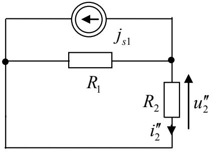


Rys. 25: Przykładowy układ liniowy



Rys. 26: Obwód z usuniętym źródłem prądu

$$i_2' = \frac{e_{s1}}{R_1+R_2}$$
$$u_2' = R_2 i_2' = \frac{R_2}{R_1+R_2} e_{s1}$$



Rys. 27: Obwód z usuniętym źródłem napięcia

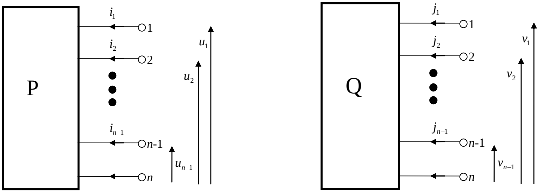
ze wzoru na dzielnik prądu oraz prawa Ohma
$$u_2'' = -\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} j_{s1}.$$

$$u_2 = u_2' + u_2'' = \frac{R_2}{R_1+R_2} e_{s1} - \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} j_{s1}.$$

Układy równoważne

Układy równoważne

Układy P i Q (rys. 28) nazywamy równoważnymi, jeżeli opis matematyczny obydwu układów jest taki sam.



Rys. 28: Przykładowe układy P i Q

Układy równoważne

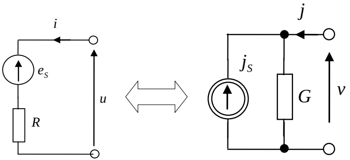
Oznacza to, że opis obwodu Q można otrzymać z opisu obwodu P w wyniku zastąpienia napięć $u_1, \ldots, u_{n-1}$ przez $v_1, \ldots, v_{n-1}$ oraz prądów $i_1, \ldots, i_{n-1}$ przez $j_1, \ldots, j_{n-1}$.

Układy równoważne

Równoważność rzeczywistego źródła napięcia i prądu

Rzeczywiste źródło napięcia jest obwodem równoważnym do rzeczywistego źródła prądu i na odwrót jeżeli ich opis jest taki sam.

$$u = Ri + e_s \quad \Longleftrightarrow \quad v = \frac{1}{G}j + \frac{1}{G}j_s \tag{35}$$



Równoważność rzeczywistego źródła napięcia i prądu

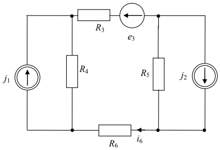
$$G = \frac{1}{R} \quad \Longleftrightarrow \quad j_s = \frac{e_s}{R} \tag{36}$$

Wynika stąd wniosek, że rezystory w obu źródłach muszą mieć tę samą wartość oraz prąd źródłowy $j_s = \frac{e_s}{R}$, a napięcie źródłowe $e_s = Rj_s = \frac{j_s}{G}$.

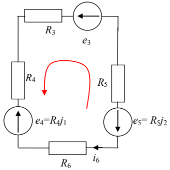
Przykład

Przykład

Korzystając z równoważności rzeczywistych źródeł napięcia i prądu wyznacz prąd i_6 w układzie pokazanym na rys. 29. Dane: $R_i = 2\,\Omega$ $(i = 3, .., 6)$, $e_3 = 2$V, $j_2 = 1$ A, $j_1 = 2$ A.



Rys. 29: Przykładowy obwód



Rys. 30: Przekształcony obwód z rys. 29

Przykład

z NPK

$$i_6R_3 + i_6R_4 + i_6R_5 + i_6R_6 + e_3 - e_4 - e_5 = 0. \tag{37}$$

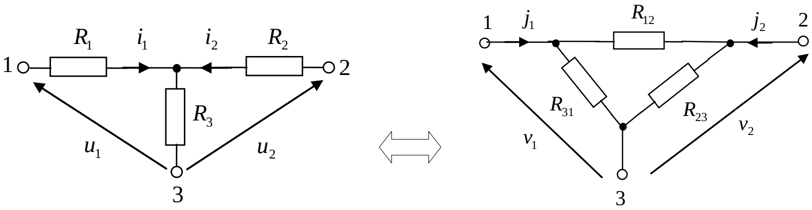
Stąd

$$i_6 = \frac{-e_3 + e_4 + e_5}{R_3 + R_4 + R_5 + R_6} = 0{,}5\text{ A}. \tag{38}$$

Układy równoważne

Równoważność połączeń trójkąt – gwiazda

Kolejnym przykładem układów równoważnych są dwa połączenia trzech rezystancji (w ogólnym przypadku impedancji – pojęcie to poznamy w dalszej części kursu) w sposób pokazany na rys. 31.



Rys. 31: Połączenie elementów w gwiazdę i trójkąt

Układy równoważne

Równoważność połączeń trójkąt – gwiazda

Aby układy te były równoważne muszą spełniać następujące zależności:

- transformacja trójkąt – gwiazda

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}, \tag{39}$$

- transformacja gwiazda – trójkąt

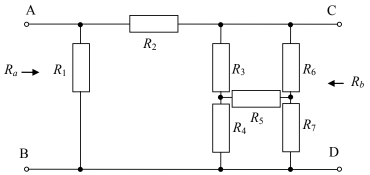
$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3},\quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1},\quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}. \tag{40}$$

Jeżeli $R_1 = R_2 = R_3 = R$ to $R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_\Delta = 3R$.

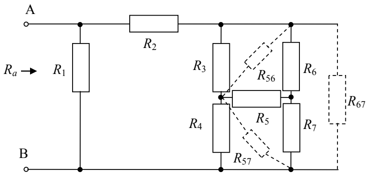
Przykład 1

Przykład 1

Wyznaczyć rezystancję zastępczą układu pokazanego na rys. 32 widzianą z zacisków AB.
Dane: $R_i = 2\,\Omega$ ($i = 1, .., 7$).



Rys. 32: Przykładowe połączenie rezystorów



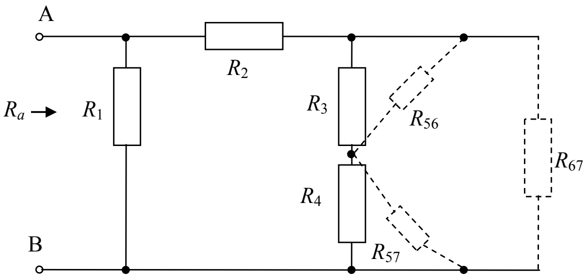
Rys. 33: Przykładowe połączenie rezystorów z zaznaczonym przekształceniem gwiazdy w trójkąt

Przykład 1

Przykład 1

W przekształconym układzie (rys. 34) wyznaczamy, korzystając ze wzorów na połączenia szeregowe i równoległe oporników, rezystancję zastępczą

$$R_a = [\{[(R_3 \| R_{56}) + (R_4 \| R_{57})] \| R_{67}\} + R_2] \| R_1 = 1{,}33\,\Omega. \tag{41}$$



Rys. 34: Przekształcony układ do wyznaczenia rezystancji zastępczej R_a

Twierdzenie Thevenina-Nortona

Wstęp

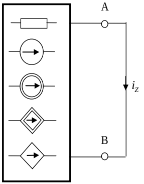
- Jeżeli układ jest liniowy można wykazać, że dowolny obwód zawierający źródła napięcia, źródła prądu (niezależne i sterowane) oraz rezystory może być reprezentowany z punktu widzenia dowolnej pary zacisków jako jedno źródło napięcia i jeden rezystor połączone szeregowo (czyli rzeczywiste źródło napięciowe – twierdzenie Thevenina) lub przez jedno źródło prądu i jeden rezystor połączone równolegle (czyli rzeczywiste źródło prądowe – twierdzenie Nortona).
- Korzystając z zasady superpozycji można łatwo udowodnić obydwa twierdzenia. Twierdzenia te są szczególnie użyteczne, gdy poszukiwana jest wartość napięcia lub prądu na jednym elemencie dla kilku jego wartości oraz w przypadku analizy układu zawierającego jeden element nieliniowy.

Twierdzenie Nortona

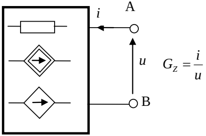
Treść

Obwód liniowy rozpatrywany od strony pary zacisków A, B można zastąpić równoległym połączeniem utworzonym ze źródła prądowego j_z oraz opornika o konduktancji G_z.

Prąd źródłowy j_z jest równy prądowi płynącemu w zwartej gałęzi AB, G_z jest konduktancją widzianą z zacisków AB po przyrównaniu do zera wszystkich napięć i prądów **źródeł niezależnych**. Obwód służący do wyznaczenia j_z pokazano na rys. 35, natomiast obwód do wyznaczania konduktancji G_z (lub jej odwrotności, czyli rezystancji R_z) na rys. 36.



Rys. 35: Obwód służący do wyznaczenia j_z w twierdzeniu Nortona

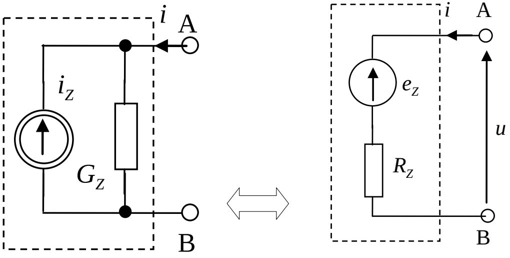


Rys. 36: Obwód służący do wyznaczenia G_z (R_z) w twierdzeniu Nortona

Twierdzenie Thevenina/Nortona

Wstęp

Z równoważności rzeczywistych źródeł prądu i napięcia wynika, że dwójnik występujący w twierdzeniu Nortona można przedstawić w równoważnej postaci rzeczywistego źródła napięcia, zwanego dwójnikiem Thevenina (rys. 37), jeżeli $R_z = G_z^{-1}$ oraz $e_z = R_z j_z$.



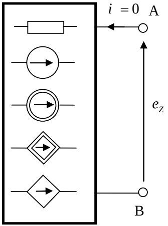
Rys. 37: Dwójnik Nortona i dwójnik Thevenina

Twierdzenie Thevenina

Treść

Obwód liniowy rozpatrywany od strony zacisków A, B można zastąpić szeregowym połączeniem źródła napięcia e_z i opornika o rezystancji R_z.

Wartość napięcia źródłowego e_z równa się wartości napięcia występującego na rozwartych zaciskach A, B. Rezystancja R_z jest rezystancją widzianą z zacisków A, B po przyrównaniu do zera wszystkich napięć i prądów **źródeł niezależnych** i wyznaczana jest analogicznie jak w dwójniku Nortona.

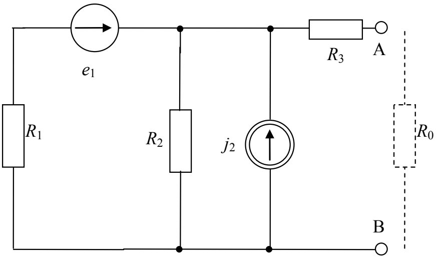


Twierdzenie Thevenina-Nortona – uwaga: Pomiarowe wyznaczenie prądu j_z, występującego w twierdzeniu Nortona, wymaga zwarcia zacisków A, B co nie zawsze jest dopuszczalne. Można wtedy zmierzyć napięcie e_z i obliczyć j_z ze wzoru $j_z = \frac{e_z}{R_z}$.

Przykład 1

Przykład 1

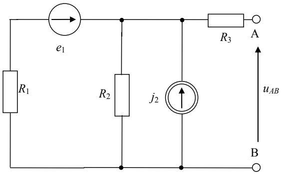
Korzystając z twierdzenia Thevenina i Nortona wyznacz prąd jaki popłynie w układzie z rys. 38 przez rezystor R_0 (dla dwóch jego wartości: $1\,\Omega$ i $2\,\Omega$) po dołączeniu go do zacisków AB. Dane: $R_i = 2\,\Omega$ $(i = 1, .., 3)$, $e_1 = 10\,\mathrm{V}$, $j_2 = 2\,\mathrm{A}$.



Rys. 38: Przykładowy obwód liniowy

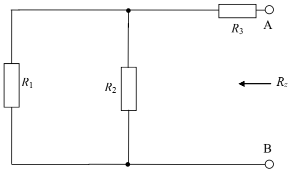
Przykład 1

e_z – napięcie na rozwartych zaciskach AB (pomijamy element R_0)



Rys. 39: Obwód służący do wyznaczenia e_z w twierdzeniu Thevenina

R_z – rezystancja zastępcza (pomijamy element R_0)

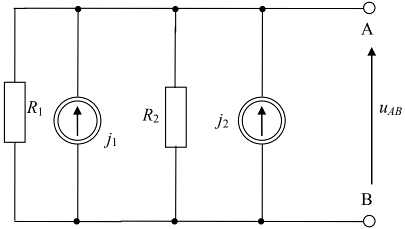


Rys. 40: Obwód służący do wyznaczenia R_z w twierdzeniu Thevenina

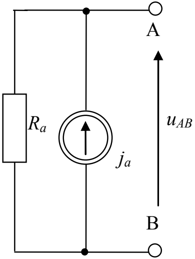
$$R_z = (R_1 \| R_2) + R_3$$

Przykład 1

W celu wyznaczenia u_{AB} zamienimy rzeczywiste źródło napięciowe (złożone z elementów e_1, R_1) na równoważne rzeczywiste źródło prądowe o parametrach: $j_1 = \frac{e_1}{R_1} = 5\,\mathrm{A}$ i $R_1 = 2\,\Omega$, po zamianie źródła prądowe są połączone równolegle więc zastępujemy je jednym źródłem o wartości $j_a = j_1 + j_2 = 7\,\mathrm{A}$, a rezystory R_1 i R_2 jednym rezystorem o wartości rezystancji $R_a = R_1 \| R_2 = 1\,\Omega$.



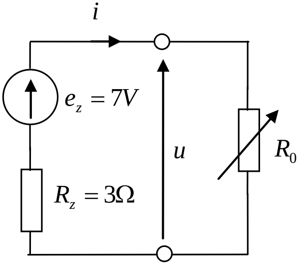
Rys. 41: Przekształcony obwód służący do wyznaczenia e_z w twierdzeniu Thevenina



Rys. 42: Przekształcony obwód służący do wyznaczenia e_z w twierdzeniu Thevenina

Przykład 1

Obwód widziany z zacisków AB zastępujemy dwójnikiem Thevenina i dołączamy rezystor R_0 do tych zacisków (rys. 43).



Rys. 43: Dwójnik Thevenina z dołączonym rezystorem R_0

Z NPK

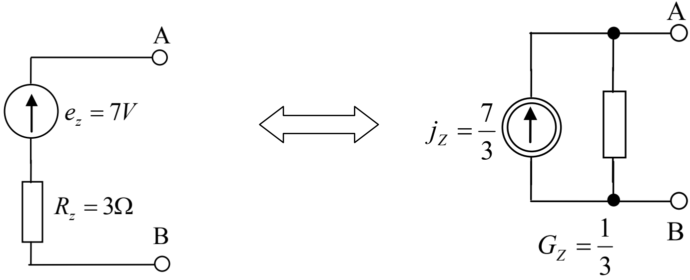
$$i = \frac{e_z}{R_z + R_0} = \frac{7}{3 + R_0}. \tag{42}$$

$R_0 = 1\,\Omega$ – $i = 1{,}75$ A,
$R_0 = 2\,\Omega$ – $i = 1{,}4$ A.

Przykład 1

Przykład 1

Dwójnik Nortona –> równoważność rzeczywistych źródeł napięcia (źródło Thevenina) i prądu (źródło Nortona). W efekcie otrzymujemy schemat pokazany na rys. 44.

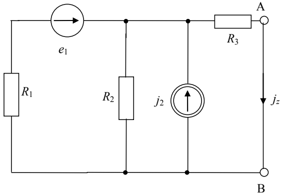


Rys. 44: Dwójnik Thevenina równoważny dla dwójnika Nortona

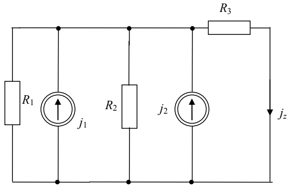
Przykład 1

Przykład 1

Bezpośrednie obliczenie prądu zwarcia płynącego w zaciskach AB w sposób niezależny od poprzednich obliczeń.



Rys. 45: Obwód służący do wyznaczenia i_z w twierdzeniu Nortona w przykładowym obwodzie



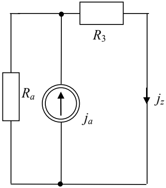
Rys. 46: Przekształcony obwód służący do wyznaczenia j_z w twierdzeniu Nortona

$$j_1 = \frac{e_1}{R_1} = 5\,\mathrm{A}$$
$$R_1 = 2\,\Omega$$

Przykład 1

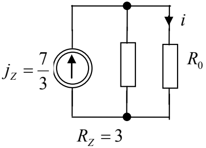
Przykład 1

Źródła prądowe zastępujemy jednym źródłem o wartości $j_a = j_1 + j_2 = 7$ A, a rezystory R_1 i R_2 jednym rezystorem o wartości rezystancji $R_a = R_1 \| R_2 = 1\,\Omega$ (rys. 47).



Rys. 47: Obwód służący do wyznaczenia j_z w twierdzeniu Nortona po kolejnym przekształceniu

$$j_z = j_a \frac{R_a}{R_a + R_3} = 7 \frac{1}{1+2} = \frac{7}{3}\ \mathrm{A}$$



Rys. 48: Dwójnik Nortona z dołączonym rezystorem R_0

$$R_0 = 1\,\Omega \;{->}\; i = j_z \frac{R_z}{R_z + R_0} = \frac{7}{3} \frac{3}{3+1} = 1{,}75\ \mathrm{A}$$
$$R_0 = 2\,\Omega \;{->}\; i = j_z \frac{R_z}{R_z + R_0} = \frac{7}{3} \frac{3}{3+2} = 1{,}4\ \mathrm{A}.$$

Metoda węzłowa

Wstęp

- Metoda analizy układów oparta o formułowanie i rozwiązywanie praw Kirchhoffa prowadzi do wielu równań i jest czasochłonna
- **Metoda napięć węzłowych** (metoda potencjałów węzłowych lub skrótowo metoda węzłowa) jest powszechnie używana w analizie układów liniowych i nieliniowych przeprowadzanej ręcznie lub z wykorzystaniem komputera, np.`SPICE`.
- Zmiennymi w tej metodzie są tzw. napięcia węzłowe.
- **Napięcie gałęziowe** – różnica potencjałów między zaciskami elementu w gałęzi.
- **Napięcie węzłowe** – różnica potencjałów między danym węzłem a innym węzłem, który został wybrany jako węzeł odniesienia. Węzeł odniesienia jest nazywany węzłem masy (uziemienia).
- Napięcie w dowolnym węźle układu może być dodatnie, gdy jego potencjał jest wyższy niż węzła odniesienia lub ujemny (w przeciwnym przypadku). W szczególnym przypadku może też być równy 0.
- Metoda węzłowa pozwala określić napięcia wszystkich węzłów w obwodzie. Jeżeli znane są wartości napięć węzłowych, możemy łatwo określić wszystkie napięcia i prądy gałęziowe.

Metoda węzłowa

Wstęp

- Analiza węzłowa oparta jest na połączeniu zależności wynikających z równań elementowych, NPK i PPK.
- Jak już wspominano, ponieważ napięcia węzłowe są określone w odniesieniu do wspólnego punktu odniesienia, najpierw wybierany jest **węzeł odniesienia**.
- Przyporządkowanie potencjału zerowego do węzła odniesienia jest dopuszczalne, ponieważ charakterystyka elementów zależy tylko od napięcia gałęziowego, a nie od napięcia na jednym zacisku.
- Choć dowolny węzeł może być wybrany jako węzeł odniesienia, niektóre węzły są bardziej użyteczne jako węzły odniesienia niż inne. Stosowane są dwie reguły wyboru, jedna, dotyczy selekcji tego węzła, do którego dołączonych jest najwięcej elementów.

Metoda węzłowa

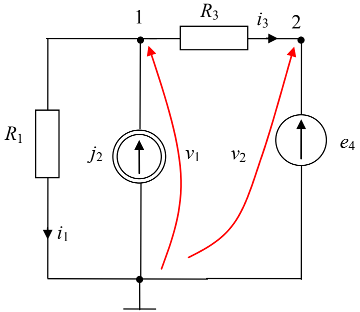
Wstęp

- Inne kryterium wyboru dotyczy selekcji tego węzła, który łączy się z maksymalną liczbą idealnych źródeł napięcia. Ponieważ niezależne źródło napięciowe ma znane napięcie (np. $e = 10\,\mathrm{V}$), w przypadku wspomnianego wyboru możemy bezpośrednio wyznaczyć napięcie nieuziemionego węzła (np. o numerze 5) jako $v_5 = 10\,\mathrm{V}$ lub $v_5 = -10\,\mathrm{V}$ (w zależności od tego, który z zacisków źródła dołączony jest do masy – odpowiednio zacisk „-" i zacisk „+").
- Po ustaleniu węzła odniesienia formułujemy PPK dla wszystkich węzłów, poza węzłem masy i węzłami, do których dołączone jest idealne źródło napięcia, a następnie każdy składnik w PPK wyrażany jest w funkcji napięć węzłowych i wartości elementów.

Przykład

Przykład

Korzystając z metody napięć węzłowych wyznacz prądy i_1 oraz i_3 w układzie z rys. 49. Dane: $e_4 = 10\,\mathrm{V}$, $j_2 = 2\,\mathrm{A}$, $R_i = 1\,\Omega$, $j = 1, ..., 6$.



Rys. 49: Przykładowy układ liniowy

- $v_2 = e_4 = 10\,\mathrm{V}$
- $u_{R1} = V(1) - v(0)$, z prawa Ohma wynosi $i_1 = \frac{v_1}{R_1}$
- $u_{R2} = V(1) - v(3)$, z prawa Ohma wynosi $i_3 = \frac{v_1 - v_2}{R_3}$, czyli $i_3 = \frac{v_1 - e_4}{R_3}$
- PPK $i_1 - j_2 + i_3 = 0$
- $\frac{v_1}{R_1} - j_2 + \frac{v_1 - e_4}{R_3} = 0$ - równanie węzłowe
- $\frac{v_1}{1} - 2 + \frac{v_1 - 10}{1} = 0$
- $v_1 = 6\,\mathrm{V}$ –> $i_1 = \frac{v_1}{R_1} = 6\,\mathrm{A}$
- $i_3 = \frac{v_1 - e_4}{R_3} = -4\,\mathrm{A}$

Metoda węzłowa

Wstęp

Istnieje wiele metod formułowania tych równań, z których w implementacji komputerowej zastosowanie znalazła tzw. metoda wstemplowywania wzorców.

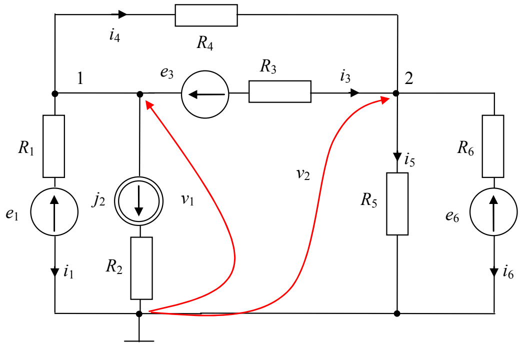
Procedura tworzenia opisu

1. Przyjmujemy jeden węzeł układu za węzeł odniesienia (zwany też węzłem masy). Nadajemy węzłowi odniesienia potencjał równy 0 V.
2. Oznaczamy (etykietujemy) napięcia węzłowe pozostałych węzłów. Jeżeli istnieją niezależne lub sterowane idealne źródła napięciowe dołączone jednym z zacisków do węzła masy to potencjały węzłowe przypisane do drugich zacisków tych źródeł są jednoznacznie określone. Napięcia pozostałych węzłów są niewiadomymi.
3. Formułujemy PPK dla każdego z węzłów i wyznaczamy prądy w PPK bezpośrednio w funkcji napięć węzłowych i parametrów elementów.
4. Rozwiązujemy otrzymane w punkcie 3 równania.
5. Wyznaczamy napięcia i/lub prądy gałęziowe dla interesujących nas elementów.

Przykład 1

Przykład 1

Korzystając z metody napięć węzłowych wyznacz prądy i_4 oraz i_5 w układzie z rys. 50. Dane: $e_1 = 10\,\mathrm{V}$, $e_3 = 2\,\mathrm{V}$, $e_6 = 6\,\mathrm{V}$, $j_2 = 2\,\mathrm{A}$, $R_i = 1\,\Omega$, $j = 1, ..., 6$.



Rys. 50: Układ liniowy

Przykład 1

Przykład 1

- Napięcia na rezystancji wewnętrznej źródła jako $u_k = v_i - v_j - e_k$, gdzie i-ty węzeł to węzeł, do którego dołączony jest zacisk „+" źródła.
- z prawa Ohma, $i_k = \frac{v_i - v_j - e_k}{R_k}$ (W przypadku oznaczenia prądu zgodnie z orientacją źródła $i_k = -\frac{v_i - v_j - e_k}{R_k}$).

$$\begin{aligned} 1:&\quad i_4 + i_1 + i_3 + j_2 = 0,\\ 2:&\quad -i_4 + i_5 - i_3 + i_6 = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1 - e_1}{R_1},\\ i_3 &= \frac{v_1 - v_2 - e_3}{R_3},\\ i_4 &= \frac{v_1 - v_2}{R_4},\\ i_5 &= \frac{v_2}{R_5},\\ i_6 &= \frac{v_2 - e_6}{R_6}. \end{aligned} \tag{44}$$

Przykład 1

Przykład 1

$$\begin{aligned}
\frac{v_1 - v_2}{R_4} + \frac{v_1 - e_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2 - e_3}{R_3} + j_2 = 0, \\
-\frac{v_1 - v_2}{R_4} + \frac{v_2}{R_5} - \frac{v_1 - v_2 - e_3}{R_3} + \frac{v_2 - e_6}{R_6} = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1 - 10}{1} + \frac{v_1 - v_2 - 2}{1} + 2 = 0, \\
-\frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_2}{1} - \frac{v_1 - v_2 - 2}{1} + \frac{v_2 - 6}{1} = 0,
\end{aligned} \tag{46}$$

$$3v_1 - 2v_2 = 10, \tag{47}$$

$$-2v_1 + 4v_2 = 4. \tag{48}$$

Przykład 1

Przykład 1

- Mnożąc pierwsze równanie przez 2 i dodając do drugiego otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} 6v_1 - 4v_2 &= 20 \\ -2v_1 + 4v_2 &= 4 \end{aligned}\right| + \quad \Rightarrow \quad 4v_1 = 24 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 6\,\mathrm{V}. \tag{49}$$

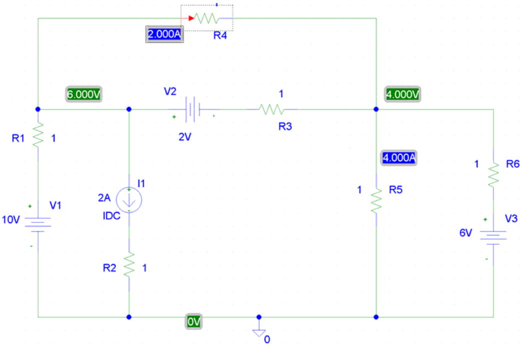
- Następnie, na przykład, z równania (48) wyznaczamy $v_2 = 4\,\mathrm{V}$. W ostatnim etapie wyznaczamy szukane prądy:

$$\begin{aligned} i_4 &= \frac{v_1 - v_2}{R_4} = 2\mathrm{A}, \\ i_5 &= \frac{v_2}{R_5} = 4\mathrm{A}. \end{aligned} \tag{50}$$

Przykład 1

Przykład 1

Otrzymany wynik potwierdzają symulacje w `PSpice` (rys. 51).

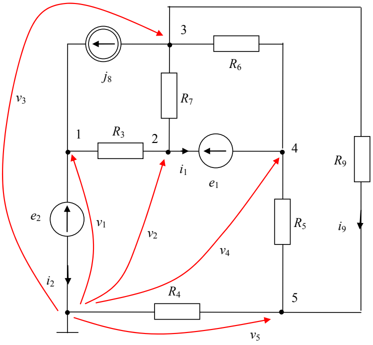


Rys. 51: Wynik analizy stałoprądowej układu w `PSpice`

Zmodyfikowana metoda węzłowa

Zmodyfikowana metoda węzłowa

Metoda węzłowa opisana powyżej nie może być bezpośrednio zastosowana w układach zawierających co najmniej jedno idealne źródło napięcia, którego żaden zacisk jest nie jest połączony z węzłem odniesienia (źródło e_1 na rys. 52).



Rys. 52: Przykładowy układ liniowy

Zmodyfikowana metoda węzłowa

Zmodyfikowana metoda węzłowa

- Problem: równanie elementowe idealnego źródła napięciowego nie uzależnia prądu gałęzi źródłowej od napięcia na zaciskach źródła.
- Nie jest możliwe zrealizowanie kroku 3 powyższego algorytmu i konieczne jest zmodyfikowanie opisanej metody.
- Istnieją dwa podejścia.

  1: wprowadza się **prąd każdego źródła idealnego jako dodatkową niewiadomą**, uzupełniając układ równań o napięciowe zależności wiążące napięcie źródłowe z potencjałami węzłów, do których rozpatrywane źródło jest dołączone.

  2: wprowadza się pojęcie **superwęzła**
- 1: zaleta – w wyniku rozwiązania uzyskanego układu równań wyznaczamy prądy idealnych źródeł napięciowych co umożliwia np. wyznaczenie mocy tych źródeł.

  wada – liczba rozwiązywanych równań jest większa.