

Politechnika Łódzka
Instytut Systemów Inżynierii Elektrycznej

Instrukcja do ćwiczenia

Obróbka statystyczna i wyznaczanie niepewności
pomiarów wielkości elektrycznych

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie rodzajów i metod wyznaczania niepewności pomiarów wielkości elektrycznych: napięcia, prądu i rezystancji na podstawie statystycznej obróbki wyników pomiarów.

Podstawy teoretyczne

Pomiar [3] jest to zbiór operacji mających na celu wyznaczenie wartości wielkości. Błąd pomiaru to różnica pomiędzy wynikiem pomiaru a wartością prawdziwą (rzeczywista) wielkości mierzonej. Wartość błędu pomiaru jest nieznana, ponieważ wartość prawdziwa wielkości (wartość zgodna z definicją określonej wielkości) jest ze względu na swoją naturę nieznana. Możemy zatem mówić tylko o niepewności pomiaru. **Niepewność pomiaru** jest parametrem związanym z wynikiem pomiaru, charakteryzującym rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej [3]. Podany wynik pomiaru jest kompletny tylko wtedy, gdy zawiera zarówno wartość wielkości mierzonej, jak i **niepewność pomiaru**, związaną z tą wartością [1, 2]. Nieznaną wartość prawdziwą wielkości fizycznej najdokładniej można więc przedstawić, podając nie tylko wynik pomiaru ale przedział, w którym estymata tej wartości występuje z określonym **poziomem ufności**¹ (czyli z określonym **prawdopodobieństwem p**). Poziom ufności jest miarą zaufania do wyznaczonego przedziału. Na wszystkie pomiary oddziałują różne czynniki między innymi:

- niedoskonałości przyrządów, wzorców i stałych fizycznych, wynikające m. in. ze skończonej rozdzielczości odczytu lub niezerowego progu pobudliwości przyrządów
- niedoskonałości metod pomiarowych - wynikające z niedoskonałej definicji wielkości mierzonej, subiektywnych błędów w odczytywaniu wskazań przyrządów analogowych lub upraszczających założeń i przybliżeń stosowanych w metodach i procedurach pomiarowych
- otoczenie i zmienność warunków środowiska, przy czym mamy niepełną znajomość tego wpływu na obiekt pomiaru i aparaturę pomiarową.

Wymieniowe czynniki są źródłami **niepewności** pomiarów.

Do poprawnego oszacowania wielkości mierzonej niezbędne jest wykonanie nie tylko szeregu pomiarów, ale również ich prawidłowa obróbka statystyczna. Odpowiednia procedura postępowania prowadzi do otrzymania dwóch liczb:

- jednej, która według mierzącego najlepiej reprezentuje wartość prawdziwą wielkości mierzonej (tzw. estymatę punktową - najczęściej wartość średnia \bar{X} z n pomiarów)
- oraz przypisanej do niej drugiej, która określa wartości graniczne ($\pm U$) przedziału, w którym z pewnym poziomem ufności (prawdopodobieństwem p) występuje ta wartość prawdziwa.

Należy pamiętać, żeby przed obliczeniem niepewności pomiarów usunąć błędy **nadmierne i systematyczne**.

W celu usunięcia **błędów nadmiernych** najczęściej stosuje się **kryterium 3s**. Polega ono na usunięciu ze zbioru pomiarów wszystkich wyników x_k , których błędy pozorne są większe lub równe trzem standardowym odchyleniom pojedynczego pomiaru:

$$|x_k - \bar{x}| \geq 3s(x) \quad (1)$$

¹ Na podstawie skumulowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa wyznacza się granice najmniejszego przedziału, odpowiadającego wymaganemu poziomowi ufności p . Granice są najczęściej symetryczne, oznaczane $\pm U$. Poziom ufności p w interpretacji geometrycznej jest to pole powierzchni pod funkcją gęstości prawdopodobieństwa, zawarte pomiędzy osią x i granicami oznaczającymi krance przedziału niepewności, czyli od $-U$ do $+U$.

gdzie dla $n \geq 2$ wartość średnia

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \quad (2)$$

zaś odchylenie standardowe zmiennej losowej można określić za pomocą estymatora nieobciążonego ze wzoru:

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \quad (3)$$

Pomiary obarczone błędami nadmiernymi musimy odrzucić przed obliczaniem niepewności pomiarów.

Błędy systematyczne o znanej wartości i znaku usuwamy stosownie uwzględniając błędy wprowadzane przez przyrządy pomiarowe i metodę pomiaru, np.: błędu spowodowanego poborem mocy przez mierniki – metodą obliczeniową, błędu wywołanego siłami termoelektrycznymi – przez dwukrotny pomiar przy przeciwnych biegunowościach napięcia zasilającego itp.

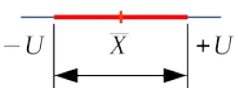
<i>Estymata wartości pomierzonej</i>	<i>Przedział niepewności</i>	<i>Poziom ufności</i>	<i>Przykład ogólny i interpretacja graficzna</i>	<i>Przykład</i>
\bar{X}	U	p	$x = \bar{X} \pm U _p$ 	$998,9 \pm 1,7 _{p=0,95}$
\bar{X}	$U\%$	p	$\bar{X} \pm U\% _p$	$998,9 \pm 0,18\% _{p=0,95}$
\bar{X}	U	p	$x \in \langle \bar{X} - U; \bar{X} + U \rangle _p$	$x \in \langle 998,9 - 1,7; 998,9 + 1,7 \rangle _{p=0,95}$

Tabela 1. Sposoby zapisu wyniku pomiaru wielkości mierzonej X po usunięciu błędów systematycznych i nadmiernych.

Przedziały przedstawione w różny sposób w kolumnie 4 i 5 powyższej tabeli zawierają w sobie wartość prawdziwą wielkości mierzonej (jednej jedynej, stałej, nieznannej). Wartości w odróżnieniu od wielkości oznaczamy małymi literami. Przedział zależy od założonego **poziomu ufności** i **niepewności pomiarów** - jest wartością zmienną. **Najczęściej** stosowanym **poziomem ufności** jest $p=0,95$.

Źródłami niepewności pomiarów są :

- niedoskonałości definicji i realizacji modelu obiektu mierzonego,
- niedokładność przyrządów pomiarowych (dane producenta lub świadectwa kalibracji),
- błędy odczytu wskazań przyrządów, wynikające z niedoskonałości zmysłów obserwatora lub rozdzielczości urządzeń w torze pomiarowym,
- błędy odczytu wskazań przyrządów wynikające z pomyłek przy odczycie (często kwalifikowane jako błędy nadmiarowe – „grube”),
- niedoskonałości metod pomiarowych,

- stosowanie przybliżonych wzorów i stałych fizycznych także obarczonych pewną niedokładnością, upraszczające założenia i przybliżenia stosowane w metodach i procedurach pomiarowych,
- niepełna wiedza o wpływie środowiska na obiekt pomiarowy i na przyrządy pomiarowe.

Wielkość	Liczba cyfr znaczących	Zasady zaokrąglania
Wynik pomiaru (estymata)	ma o jedną cyfrę znaczącą więcej niż pierwsza cyfra niepewna.	<ul style="list-style-type: none"> • taka sama liczba cyfr po przecinku, jak w niepewności pomiarowej • jeżeli ostatnią cyfrą zaokrąglaną jest 0, 1, 2, 3, 4, to zaokrąglamy poprzednią cyfrę w dół, • gdy ostatnią cyfrą zaokrąglaną jest 6, 7, 8, 9, to zaokrąglamy poprzednią cyfrę w górę. • jeżeli ostatnią cyfrą zaokrąglaną jest cyfra 5, to zaokrąglamy poprzednią w górę, jeżeli po niej następuje na dowolnej pozycji jakakolwiek cyfra inna niż zero. • jeżeli ostatnią cyfrą zaokrąglaną jest cyfra 5 i po niej występują same zera, to zaokrąglamy poprzednią w dół, jeśli jest ona parzysta. • jeżeli ostatnią cyfrą zaokrąglaną jest cyfra 5 i po niej występują same zera, to zaokrąglamy poprzednią w górę, jeśli jest ona nieparzysta, do liczby parzystej.
niepewność pomiaru	<ul style="list-style-type: none"> • ma o dwie cyfry znaczące więcej niż pierwsza cyfra niepewna • wyjątkowo jedną cyfrę znaczącą, gdy zaokrąglenie nie spowoduje wzrostu niepewności o więcej niż 10%. 	<ul style="list-style-type: none"> • zawsze w górę, aby nie obniżyć poziomu ufności w stosunku do wyniku niezaokrąglonego

Tabela 2. Zasady zaokrąglania wyników pomiaru i niepewności pomiaru.

Niepewność rozszerzoną U definiujemy według wzoru:

$$U = k_p \cdot u_C \quad (4)$$

gdzie k_p – jest współczynnikiem rozszerzenia zależnym od poziomu ufności p , a u_C – jest **niepewnością łączną**. Niepewność łączna jest sumą geometryczną niepewności A i B:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (5)$$

- gdzie u_A – jest **niepewnością standardową typu A** obliczaną metodą statystyczną na podstawie wyników z serii pomiarów (obserwacji) zwaną metodą typu A. Jest niepewnością odpowiadającą błędom przypadkowym, zmieniającym się w sposób nieprzewidywany. Zalicza się do nich niepewności, powstające w wyniku niestałości parametrów układu pomiarowego, nieokreślonych zmian wielkości wpływających na pomiar oraz przypadkowych zmian wielkości mierzonych.

- u_B – jest **niepewnością standardową typu B**, wynikającą z danych technicznych aparaturowych, doświadczenia nabytego z wcześniej prowadzonych pomiarów oraz danych literaturowych. Niepewności tę oblicza się innymi metodami niż wynikającymi z metody typu A. Niepewności typu B odpowiadają błędom **systematycznym o nieznanej wartości i znaku** i są spowodowane:
 - błędami narzędzi pomiarowych w znamionowych warunkach pracy,
 - błędami narzędzi pomiarowych w warunkach pracy odmiennych od znamionowych,
 - błędami wynikającymi z istnienia sprzężeń indukcyjnych, pojemnościowych i galwanicznych.

Jeśli błąd pomiaru traktujemy jako zmienną losową, to niepewność standardowa jest równa **odchyleniu standardowemu** σ tej zmiennej, a w przypadku serii wykonywanych pomiarów – odchyleniu standardowemu średniej s . Dzięki temu do obliczania niepewności pomiarów można stosować statystykę matematyczną i rachunek prawdopodobieństwa.

Szacowanie niepewności typu A i B

Niepewności typu A i B nie można wyeliminować z wyniku pomiaru. Można jedynie oszacować ich wartości graniczne przy zadanym poziomie ufności p .

W statystyce rozrzut wartości średnich (2) jest nazywany **odchyleniem standardowym wartości średniej** $s(\bar{x}_i)$, a w teorii pomiaru nosi nazwę **niepewności standardowej typu A** $u_A(\bar{x}_i)$, gdzie $i = 1 \dots N$, N - liczba wielkości mierzonych.

Sposób oszacowania rozszerzonej niepewności typu A dla serii n pomiarów jednej wielkości (pomiar bezpośredni) lub dla serii po n_i pomiarów elementarnych dla N wielkości wejściowych (pomiar pośredni) gdy interesuje nas oszacowanie niepewności typu A wielkości wyjściowej oraz oszacowanie efektywnej liczby stopni swobody ν_{eff} wypadkowego rozkładu t-Studenta i stosownych współczynników jest podany w suplemencie B, na końcu tej instrukcji.

Zależności statystyczne przy obliczaniu niepewności standardowej pomiaru wielkości wejściowych

Zmienna losowa przyjmuje dowolne wartości z określonego zbioru i związany jest z nią założony rozkład prawdopodobieństwa. Wielkości mierzone – zarówno **wielkości wejściowe** X_i ($i = 1, 2, \dots, N$) (w pomiarze bezpośrednim występuje tylko jedna wielkość, w pomiarze pośrednim, np. rezystancji metodą techniczną – dwie: prąd i napięcie), jak i **wielkość wyjściowa** (mezurand) Y – są zmiennymi losowymi, złożonymi z dwóch składników: wyniku pomiaru i błędu pomiaru

$$X_i = \bar{X}_i + \Delta X_i \quad (6)$$

$$Y = f(X_i) = \bar{Y} + \Delta Y \quad (7)$$

Pierwszy składnik jest wartością oczekiwaną. Dla wielkości wejściowych przyjmuje się, że **najlepszymi estymatami (oszacowaniami) ich wartości oczekiwanych są średnie arytmetyczne** z serii wyników pomiarów elementarnych (niezależnych statystycznie) x_{ik} ($k = 1, 2, \dots, n_i$) (wartości w odróżnieniu od wielkości oznaczamy małymi literami):

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik} = \frac{1}{n_i} (x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in_i}) \quad (8)$$

Drugi składnik ΔX , ΔY jest zmienną losową centrowaną, tzn. ma wartość średnią równą zero. **Rozkład gęstości prawdopodobieństwa błędu ΔX , ΔY jest symetryczny względem zera.** Rozkład ten jest określany przez podanie kształtu tego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa, np. **normalny, prostokątny, trójkątny**, oraz wartości niepewności standardowej $u(\bar{x}_i)$ lub błędu granicznego Δ_g .

Obliczanie niepewności standardowej metodą typu A

Miarą rozrzutu pojedynczych wartości x_{ik} jest **odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru i** , którego estymata wyrażona jest równaniem:

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i - 1} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n_i - 1} [(x_{i1} - \bar{x}_i)^2 + (x_{i2} - \bar{x}_i)^2 + \dots + (x_{in_i} - \bar{x}_i)^2]} \quad (9)$$

(różnica $\Delta x_{ik} = x_{ik} - \bar{x}_i$ jest zmienną losową centrowaną i nazywana jest **błędem pozornym**).

Gdybyśmy wykonali wiele serii n_i pomiarów i obliczyli wartość średnią \bar{x}_i każdej serii, to okazałoby się, że rozrzut wartości średnich każdej serii (każdej mierzonej wielkości) \bar{x}_i jest $\sqrt{n_i}$ razy mniejszy od rozrzutu pojedynczych wartości x_{ik} . W statystyce taki rozrzut wartości średnich jest nazywany **odchyleniem standardowym wartości średniej $s(\bar{x}_i)$** , a w teorii pomiaru nosi nazwę **niepewności standardowej typu A $u_A(\bar{x}_i)$** . Ich estymata jest określona wzorem:

$$u_A(\bar{x}_i) = s(\bar{x}_i) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n_i}} = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i - 1)} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2} \quad (10)$$

Niekiedy producent narzędzia pomiarowego podaje w dokumentacji wartość odchylenia standardowego $s(x_i)$, wyznaczoną na podstawie dobrze zdefiniowanego pomiaru, przeprowadzonego pod kontrolą statystyczną i złożonego z dużej liczby obserwacji. Wówczas do wzoru (10) wstawiamy tę wartość, zamiast wartości obliczonej ze wzoru (9).

W bardzo dokładnych obliczeniach niepewności pomiaru do wzoru (9) zamiast błędów pozornych podstawia się **błędy pozorne skorygowane**, w których wartość średnią zastępuje się wartościami **linii trendu**, jaki można wykryć w serii pomiarów, gdy na układ pomiarowy oddziałuje wielkość wpływająca o charakterze systematycznym.

Obliczanie niepewności standardowej metodą typu B

Niepewność standardowa typu B jest określana na podstawie informacji zawartych w specyfikacji przyrządu pomiarowego, w świadectwie wzorcowania lub w innych certyfikatach. Na podstawie powyższych danych szacuje się dla błędu Δx_i jego wartość graniczną Δ_g i zakłada się kształt rozkładu gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(\Delta x_i)$ wystąpienia tego błędu. Jako niepewność standardową $u_B(\bar{x}_i)$ przyjmuje się odchylenie standardowe $\sigma(x_i) = \sigma(\Delta x_i)$ (rozrzut wartości x_i wokół wartości średniej \bar{x}_i jest taki sam, jak rozrzut wartości błędu Δx_i wokół zera).

Graniczny (maksymalny) błąd pomiaru Δ_g jest sumą błędów wskazań (składnik multiplikatywny) i błędów odczytu Δ_{od} (np. w przypadku przyrządu wskazówkowego - zależnego od rozdzielczości oka ludzkiego, składnik addytywny). Zazwyczaj znaki tych błędów nie są znane, dlatego przyjmuje się zawsze skrajnie niekorzystny przypadek i sumuje ich wartości bezwzględne. Bezwzględny graniczny błąd pomiaru Δ_g zależy od względnego maksymalnego błędów wskazań δ_{max} pomnożonemu przez zakres pomiarowy Z_p :

$$\Delta_g = \delta_{max} \cdot Z_p + \Delta_{od} \leq \frac{kl \cdot Z_p}{100\%} + \frac{wp \cdot Z_p}{d} \quad (11)$$

gdzie: **kl** – klasa przyrządu pomiarowego, **wp** – współczynnik charakteryzujący wprawę mierzącego miernikiem wskazówkowym, **d** – liczba działek podziałki miernika. Można przyjąć **wp** = 0,1 przy starannym odczytywaniu wskazań, czyli obserwator może się pomylić w oszacowaniu położenia wskazówki maksymalnie o 0,1 wartości, odpowiadającej odległości między sąsiednimi kreskami działowymi podziałki. Znormalizowane klasy przyrządu **kl** wynoszą: 0,05%, 0,1%, 0,2%, 0,5%, 1%, 1,5%, 2,5%, 5%.

Dla mierników cyfrowych brak jest jednolitego sposobu podawania przez wytwórców granicznych błędów charakteryzujących dokładność ich wyrobów (najczęściej podaje się też w postaci dwóch składników- multiplikatywnego i addytywnego). Różni wytwórcy podają w instrukcji miernika różne zależności, na podstawie których określa się błędy. Mogą one być różne dla poszczególnych

funkcji pomiarowych w ramach tego samego przyrządu. Wartości błędu granicznego są gwarantowane tylko w określonym czasie (np. 12 miesięcy), po upływie którego przyrząd powinien być ponownie poddany sprawdzeniu. Najczęściej stosuje się dwie metody wyznaczania błędu granicznego. W zależności od producenta błąd graniczny wyznacza się dwiema metodami. Pierwsza jako suma dwóch składowych: procentu wartości wskazanej x oraz procentu zakresu pomiarowego Z_x :

$$\Delta_{gr} x = (a \% x + b \% Z_x) \quad (12)$$

Wartości współczynników a i b są podane w dokumentacji dostarczonej przez producenta przyrządu. W drugim sposobie wyznaczania wykorzystywana jest wartość rozdzielczości przyrządu cyfrowego:

$$\Delta_{gr} x = (a \% x + n \cdot LSB) \quad (13)$$

Przez **rozdzielczość miernika cyfrowego** LSB (ang. least significant bit) należy rozumieć najmniejszą wartość wyświetlaną na danym zakresie pomiarowym, czyli jest najmniej znaczącą cyfrą na wyświetlaczu miernika. Najczęściej w przedziale pomiędzy wartościami granicznymi $\langle -\Delta_g; +\Delta_g \rangle$ zakłada się **równomierny rozkład** gęstości prawdopodobieństwa, który ma kształt prostokąta o długości $2\Delta_g$ i wysokości $\varphi(\Delta x_i) = \frac{1}{2\Delta_g}$ (pole powierzchni każdego rozkładu musi się równać 1, gdyż prawdopodobieństwo znalezienia się błędu w przedziale $\langle -\Delta_g; +\Delta_g \rangle$ wynosi 100%). Kwadrat odchylenia standardowego i niepewność standardową typu B obliczamy wówczas ze wzorów:

$$\sigma^2(\Delta x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Delta x_i) \cdot \Delta x_i^2 d(\Delta x_i) = \int_{-\Delta_g}^{\Delta_g} \frac{1}{2\Delta_g} \Delta x_i^2 d(\Delta x_i) = \frac{1}{2\Delta_g} \cdot \frac{\Delta x_i^3}{3} \Big|_{-\Delta_g}^{\Delta_g} = \frac{1}{2\Delta_g} \cdot \frac{\Delta_g^3 - (-\Delta_g)^3}{3} = \frac{\Delta_g^2}{3}$$

$$u_B(\bar{x}_i) = \sigma(\Delta x_i) = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

Jeżeli wiadomo, że wartości mierzonej wielkości znajdujące się w pobliżu środka przedziału zmienności są bardziej prawdopodobne niż wartości znajdujące się w pobliżu jej granic, to lepszym modelem będzie **rozkład trójkątny**.

$$u_B(\bar{x}_i) = \frac{\Delta_g}{\sqrt{6}} \quad (15)$$

lub **rozkład normalny**

$$u_B(\bar{x}_i) = \frac{\Delta_g}{\sqrt{9}} \quad (16)$$

Natomiast gdy bardziej prawdopodobne są wartości znajdujące się w pobliżu granic, np. gdy wielkość zakłócająca ma przebieg sinusoidalny, to odpowiedniejszy będzie rozkład o **kształcie litery U**:

$$u_B(\bar{x}_i) = \frac{\Delta_g}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

Typ rozkładu	Równomierny (prostokątny)	Trójkątny	Normalny (Gausa)	W kształcie litery U
$u_B(\bar{x}_i)$	$u_B(\bar{x}_i) = \sigma(\Delta x_i) = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}}$	$\frac{\Delta_g}{\sqrt{6}}$	$\frac{\Delta_g}{\sqrt{9}}$	$\frac{\Delta_g}{\sqrt{2}}$

Tabela 3. Wartości niepewności typu B w zależności od typu rozkładu gęstości prawdopodobieństwa wartości mierzonej wielkości.

Niepewność standardowa pomiaru wielkości wejściowej X_i (niepewność łączna, nazywana dawniej niepewnością złożoną wielkości wejściowej) jest sumą geometryczną wszystkich składowych obliczonych metodą A i metodą B

$$u(\bar{x}_i) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}_i) + u_B^2(\bar{x}_i)} \quad (18)$$

Jeżeli na pomiar wielkości X_i wpływa kilka wielkości zakłócających, np. temperatura otoczenia, ciśnienie atmosferyczne, wilgotność, pole elektromagnetyczne itp., to w powyższym wzorze wystąpi suma kilku - podniesionych do kwadratu - niepewności typu B.

Obliczanie niepewności standardowej pomiaru wielkości wyjściowej

Obliczanie niepewności standardowej pomiaru wielkości wyjściowej przedstawiono w suplemencie C. Podsumowując te rozważania można stwierdzić, że stosując **prawo propagacji niepewności**, otrzymuje się poszczególne udziały niepewności wielkości wejściowych w niepewności wielkości wyjściowej. Suma geometryczna tych udziałów jest nazywana **niepewnością standardową pomiaru wielkości wyjściowej** (dawniej nazywana niepewnością złożoną wielkości wyjściowej)

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(\bar{y})} = \sqrt{c_1^2 [u_A^2(\bar{x}_1) + u_B^2(\bar{x}_1)] + \dots + c_N^2 [u_A^2(\bar{x}_N) + u_B^2(\bar{x}_N)]} \quad (19)$$

gdzie c_i - jest odpowiednim **współczynnikiem wrażliwości**.

Powyższy wzór jest słuszny, jeżeli wielkości wejściowe są od siebie niezależne (nieskorelowane). W przeciwnym wypadku należy stosować wzory zawierające kowariancję lub współczynnik korelacji współzależnych wielkości wejściowych [3].

Metody uproszczonego obliczania niepewności pomiaru wielkości wyjściowej

W pomiarach przemysłowych stosuje się metody uproszczone, polegające na wykorzystaniu **współczynnika rozszerzenia k_p** (wzór (4)). Niepewność pomiaru wielkości wyjściowej $U(\bar{y})$ oblicza się mnożąc niepewność standardową pomiaru wielkości wyjściowej $u(\bar{y})$ przez ten współczynnik

$$U(\bar{y}) = k_p \cdot u(\bar{y}) \quad (20)$$

Wartość współczynnika k_p zależy od poziomu ufności p oraz od kształtu wypadkowej dystrybucyj, którego nie znamy. Przyjmuje się więc przybliżoną wartość tego współczynnika (zazwyczaj przyjmuje się $p = 0,95$). Wartości współczynnika rozszerzenia k_p dla różnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa podano w tabeli 4.

Typ rozkładu	Symbol	Wartość*
w kształcie litery U	k_U	1,410
prostokątny	k_R	1,645
trójkątny	k_T	1,902
normalny	k_N	1,960
t-Studenta o 1 stopniu swobody	$k_{S,1}$	12,71

* - sposób obliczenia wartości k_p podano w suplemencie B na końcu instrukcji.

Tabela 4. Wartości współczynnika rozszerzenia k_p dla poziomu ufności $p = 0,95$ dla różnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa.

p	0,5	0,683	0,95	0,99	0,997	0,999
k_p	0,676	1	1,96	2,58	2,97	3,29

Tabela 5. Współczynniki rozszerzenia k_p dla rozkładu Gaussa dla wybranych poziomów ufności

ν	2	3	5	7	8	9	10	20	30	50	100	∞
$k_{0,95;\nu}$	4,30	3,18	2,57	2,36	2,31	2,26	2,23	2,09	2,04	2,01	1,984	1,960

Tabela 6. Współczynniki rozszerzenia dla $p = 0,95$ $k_{0,95;\nu}$ dla rozkładu t-Studenta, przy ν stopniach swobody (ν pomiarach)

Odchylenie standardowe w pomiarach złożonych

Dla pomiarów pośrednich, czyli takich w których wynik jest rezultatem operacji matematycznych na wynikach pomiarów bezpośrednich, np. $R = \frac{U}{I}$, stosuje się matematyczną zależność obliczania niepewności standardowej jako odchylenia standardowego funkcji złożonej zgodnie z teorią rachunku prawdopodobieństwa:

$$u^2 = \left(\frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_1} \right)^2 \cdot u_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_2} \right)^2 \cdot u_{X_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_n} \right)^2 \cdot u_{X_n}^2 + \left(\frac{\partial^2 f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2 \cdot u_{X_1 X_2}^2 + \dots \quad (21)$$

$$u^2 = (c_{X_1})^2 \cdot u_{X_1}^2 + (c_{X_2})^2 \cdot u_{X_2}^2 + \dots + (c_{X_n})^2 \cdot u_{X_n}^2 + (c_{X_1, X_2})^2 \cdot u_{X_1, X_2}^2 \quad (22)$$

gdzie współczynniki

$$c_{X_i} = \frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_i}, \dots, c_{X_i, X_j} = \frac{\partial^2 f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_i \partial X_j} \quad \text{są współczynnikami wrażliwości.}$$

Uwaga praktyczna: dla uproszczenia, gdy funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest zbliżona do rozkładu Gaussa, to do obliczenia niepewności rozszerzonej U na poziomie ufności $p = 0,95$ można stosować współczynnik rozszerzenia $k_p = 2$ i wówczas $U = 2u_c$.

Obliczenie niepewności standardowej pomiaru rezystancji metodą pośrednią zamieszczono w opisie części wykonawczej ćwiczenia.

Niepewność rozszerzoną oblicza się ze wzoru (22):

$$U_p = k u_c \quad (23)$$

w którym współczynnik rozszerzenia jest zmienną zależną od rozkładu łącznej niepewności obliczanej metodą typu A i typu B, a $u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ jest niepewnością standardową łączną.

Jeżeli w niepewności łącznej u_c dominującym jest rozkład typu A, a ten jest rozkładem zbliżonym do rozkładu Gaussa lub t-Studenta stosuje się współczynniki rozszerzenia, odpowiadające tym rozkładom (Tabele 5 i 6). Jeżeli dominującym jest rozkład jednostajny (prostokątny), wówczas stosuje się zależność:

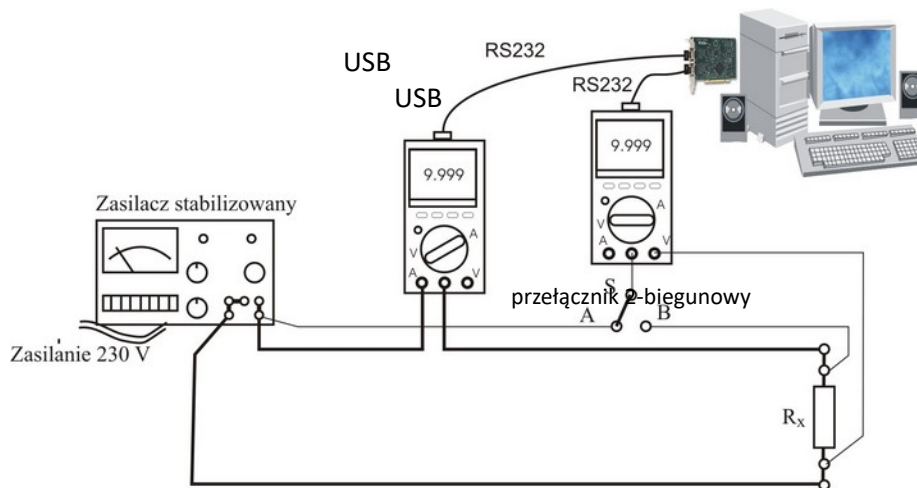
$$k_p = p \sqrt{3} \quad (24)$$

Jeżeli żaden powyższych przypadków nie występuje, wówczas dla poziomu ufności $p = 0,95$ można przyjąć, że $k_{p=0,95} = 2$, ale należy pamiętać, że jest to oszacowanie tylko przybliżone.

Wykonanie ćwiczenia i przykłady obliczeń

A. Szacowanie niepewności metodą typu B

- Połączyć układ pomiarowy zgodnie ze schematem na rys. 1.



Wykonanie ćwiczenia

Wykaz aparatury:

Rezystor wzorcowy 1 k Ω , 2 multimetry cyfrowe (miliamperomierz + woltomierz), zasilacz stabilizowany napięcia stałego.

W ćwiczeniu wykonuje się pomiar rezystancji metodą pośrednią oraz oblicza się niepewność wyniku pomiaru korzystając z metody typu A i metody typu B, zgodnie z międzynarodowym przewodnikiem GUM (Głównego Urzędu Miar) - „Guide to the expression of uncertainty in measurement,, (GUM) JCGM OIML” 2020 i poniższej instrukcji.

Liczba pomiarów	U_V	I	$R = \frac{U}{I}$	$u_{BRrel} = \sqrt{u_{BUrel}^2 + u_{BIrel}^2}$	$u_{BRx} = U_{BRrel} \cdot R$	$U_{BRx} = k \cdot u_{BRx}$
	V	A	Ω	%	Ω	Ω
1						
30						
100						
500						
1000						
Liczba pomiarów	Zapis wyników pomiaru $R_x \pm U_{BRx}$ [Ω]					
1						
30						
100						
500						
1000						

Dane techniczne dotyczące błędów granicznych przyrządów pomiarowych zamieszczono w instrukcji do przyrządów.

Obliczenia dla liczby pomiarów ≥ 30 należy wykonać w arkuszu kalkulacyjnym korzystając z

zaimplementowanych formuł. Obliczenia dla pojedynczego pomiaru należy wykonać samodzielnie zgodnie z poniższym schematem.

Obliczenia niepewności standardowej pomiaru rezystancji metodą pośrednią

Wartość rezystancji mierzonej metodą techniczną oblicza się z zależności:

$$R = \frac{U_V}{I} \quad (25)$$

W celu obliczenia niepewności standardowej pośredniego pomiaru rezystancji stosuje się zależności (21) i (22). Rezystancja jest funkcją napięcia U oraz prądu I , więc:

$$\frac{\partial R}{\partial U_V} = \frac{1}{I}, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial R}{\partial I} = U_V \cdot \left(\frac{-1}{I^2} \right) \quad (26)$$

Na tej podstawie:

$$u_{Bc}^2(R) = \left(\frac{\partial f(R)}{\partial U_V} \right)^2 \cdot u_{BU}^2 + \left(\frac{\partial f(R)}{\partial I} \right)^2 \cdot u_{BI}^2 \quad (27)$$

Zastępując wyrażenia w nawiasach tzw. współczynnikami czułości c_i równanie przyjmuje postać:

$$u_{Bc}^2(R) = (c_U)^2 \cdot u_{BU}^2 + (c_I)^2 \cdot u_{BI}^2 \quad (28)$$

Współczynniki czułości dla napięcia i prądu oblicza się z następujących zależności:

$$c_U = \frac{\partial f(R)}{\partial U_V} = \frac{1}{I} \quad (29)$$

$$c_I = \frac{\partial f(R)}{\partial I} = U_V \cdot \left(\frac{-1}{I^2} \right) = \frac{-U_V}{I^2}$$

Wstawiając współczynniki czułości do równania (27) otrzymuje się końcowy wzór do obliczenia niepewności typu B w pomiarze pośrednim rezystancji:

$$u_{Bc}^2(R) = \left(\frac{1}{I} \right)^2 \cdot u_{BU}^2 + \left(\frac{-U_V}{I^2} \right)^2 \cdot u_{BI}^2 \quad (30)$$

Po podzieleniu zależności (30) stronami przez równanie (25) otrzymuje się równanie w jednostkach względnych postaci:

$$u_{Bc}^2(R) = \frac{u_{Bc}^2(R)}{R^2} = \frac{\left(\frac{1}{I} \right)^2 \cdot u_{BU}^2}{R^2} + \frac{\left(\frac{-U_V}{I^2} \right)^2 \cdot u_{BI}^2}{R^2}, \quad \text{po przekształceniu ostatecznie niepewność w}$$

jednostkach względnych przyjmuje postać:

$$u_{Bc}^2(R) = \frac{u_{Bc}^2(R)}{R^2} = \frac{\left(\frac{1}{I} \right)^2 \cdot u_{BU}^2}{\left(\frac{U_V}{I} \right)^2} + \frac{\left(\frac{-U_V}{I^2} \right)^2 \cdot u_{BI}^2}{\left(\frac{U_V}{I} \right)^2} = \frac{u_{BU}^2}{U_V^2} + \frac{u_{BI}^2}{I^2} = u_{BUrel}^2 + u_{BIrel}^2 \quad (31)$$

Ostatecznie niepewność typu B przedstawiona w jednostkach względnych wynosi:

$$u_{Bc}^2(R) = \sqrt{u_{BUrel}^2 + u_{BIrel}^2} \quad (32)$$

Znając wartość względną niepewności standardowej łącznej w pomiarze pośrednim dla niepewności wyznaczonej metodą typu B:

$$u_{BUrel} = \frac{\Delta_{gr} U_V}{\sqrt{3} \cdot U_V}; \quad u_{BIrel} = \frac{\Delta_{gr} I}{\sqrt{3} \cdot I} \quad (33)$$

Niepewność standardowa typu B wynosi:

$$u_{Bc} = u_{Bc} \cdot R \quad (34)$$

Współczynnik rozszerzenia k_p jest uzależniony od wypadkowego rozkładu niepewności typu A i typu B lub tylko A lub B, jeżeli występuje tylko jeden z nich.

Dla rozkładu **jednostajnego (prostokątnego)** dla p poziomu ufności współczynnik k_p wyraża się

zależnością:

$$k_p = p\sqrt{3} \text{ dla } p \in \langle 0; 1 \rangle \text{ przykładowo: } k_{0,95} = 0,95 \cdot \sqrt{3}$$

W przypadku dwóch rozkładów prostokątnych rozkładem łącznym jest rozkład trapezowy, a jego szczególnym przypadkiem jest rozkład trójkątny.

W przypadku, gdy oprócz niepewności typu B występuje niepewność typu A, wówczas ich łączna niepewność standardowa wyraża się zależnością (5), a niepewność rozszerzona wzorem (4), gdzie k_p jest zmienną zależną od rozkładu, łączącego niepewności obliczane metodą typu A i typu B.

Suplement A

Metody obliczania niepewności pomiarów i przykłady obróbki statystycznej

Przykłady

1) Jeżeli funkcja pomiaru f jest sumą lub różnicą wielkości wejściowych X_i

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^N a_i X_i = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_N X_N \quad (35)$$

to, zgodnie z równaniem (8), estymata wielkości wyjściowej jest odpowiednią sumą lub różnicą estymat wielkości wejściowych

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^N a_i \bar{x}_i = a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_N \bar{x}_N \quad (36)$$

natomiast współczynniki wrażliwości są wtedy równe a_i i równanie (19) na $u(\bar{y})$ przyjmuje postać

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2 u^2(\bar{x}_i)} = \sqrt{a_1^2 u^2(\bar{x}_1) + a_2^2 u^2(\bar{x}_2) + \dots + a_N^2 u^2(\bar{x}_N)} \quad (37)$$

2) Jeżeli funkcja pomiaru f jest iloczynem lub ilorazem wielkości wejściowych X_i

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = a_0 \prod_{i=1}^N X_i^{a_i} = a_0 \cdot X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2} \cdot \dots \cdot X_N^{a_N} \quad (38)$$

to również estymata wielkości wyjściowej jest odpowiednim iloczynem lub ilorazem estymat wielkości wejściowych

$$\bar{y} = a_0 \prod_{i=1}^N \bar{x}_i^{a_i} = a_0 \cdot \bar{x}_1^{a_1} \cdot \bar{x}_2^{a_2} \cdot \dots \cdot \bar{x}_N^{a_N} \quad (39)$$

W tym wypadku współczynniki wrażliwości są równe

$$\left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{X_i=\bar{x}_i} = a_0 \cdot a_i \cdot X_i^{a_i-1} \prod_{j=1; j \neq i}^N X_j^{a_j} \Big|_{X_i=\bar{x}_i} = \frac{a_i}{X_i} a_0 \prod_{j=1}^N X_j^{a_j} \Big|_{X_i=\bar{x}_i} = \frac{a_i}{X_i} Y|_{X_i=\bar{x}_i} = \frac{a_i}{\bar{x}_i} \bar{y} \quad (40)$$

i przy zastosowaniu **względnych niepewności standardowych**:

$$u_{\text{rel}}(\bar{y}) = \frac{u(\bar{y})}{\bar{y}} \quad \text{oraz} \quad u_{\text{rel}}(\bar{x}_i) = \frac{u(\bar{x}_i)}{\bar{x}_i}$$

otrzymuje się analogiczną sumę geometryczną, jak we wzorze (26)

$$u_{\text{rel}}(\bar{y}) = \frac{u(\bar{y})}{\bar{y}} = \frac{1}{\bar{y}} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\frac{a_i}{\bar{x}_i} \bar{y} \cdot u(\bar{x}_i) \right]^2} = \sqrt{\frac{1}{\bar{y}^2} \sum_{i=1}^N \bar{y}^2 \left[a_i \frac{u(\bar{x}_i)}{\bar{x}_i} \right]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2 u_{\text{rel}}^2(\bar{x}_i)} \quad (41)$$

Jeżeli wykładniki potęg a_i we wzorze (38) równają się +1 lub -1, to przy obliczaniu względnej niepewności standardowej można pominąć współczynniki wrażliwości.

Obliczanie niepewności pomiaru wielkości wyjściowej

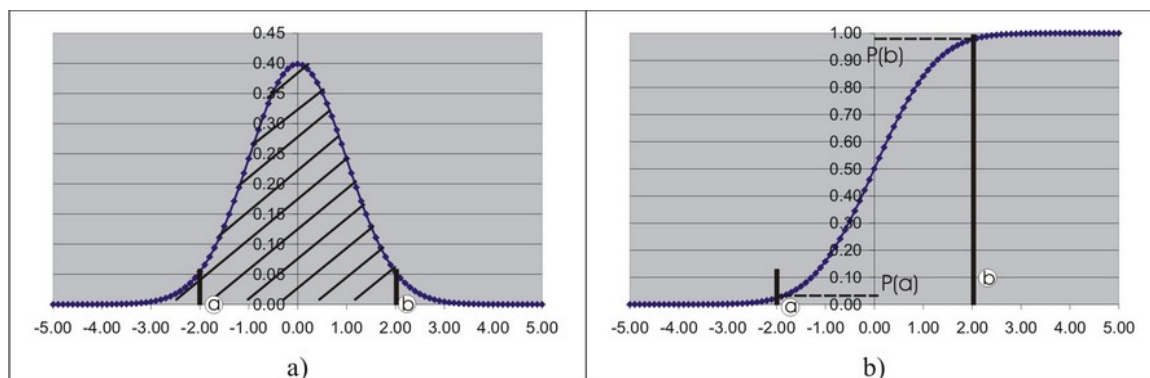
W celu obliczenia **niepewności wielkości wyjściowej** $U(\bar{y})$ czyli niepewności rozszerzonej, należy wyznaczyć rozkład gęstości prawdopodobieństwa błędu wielkości wyjściowej. Rozkład ten jest **splotem rozkładów gęstości prawdopodobieństwa błędu wszystkich udziałów wielkości wejściowych** $u_i(\bar{y})$. Musimy zatem znać parametry tych rozkładów.

W przypadku **niepewności typu A** przyjmuje się, że rozkład gęstości prawdopodobieństwa błędu jest **rozkładem normalnym**, którego odchylenie standardowe równa się estymacie $s(\bar{x}_i)$, obliczonej ze wzoru (9), pomnożonej przez współczynnik wrażliwości c_i . Estymata $s(\bar{x}_i)$ ma wartość zbliżoną do rzeczywistej wartości odchylenia standardowego wtedy, gdy liczba pomiarów elementarnych jest bardzo duża. W miarę zmniejszenia liczby pomiarów oszacowanie wartości $s(\bar{x}_i)$ jest obarczone coraz większym błędem. Oszacowanie wartości tego błędu, który podlega

rozkładowi χ^2 , jest uwzględnione w rozkładzie t-Studenta. Dlatego w wypadku niewielkiej liczby pomiarów elementarnych, $n_i \leq 30$, zamiast rozkładu normalnego należy stosować rozkład t-Studenta, którego kształt zależy nie tylko od wartości $s(\bar{x}_i)$, ale również od liczby stopni swobody $\nu_i = n_i - 1$, czyli od liczby pomiarów.

W przypadku niepewności typu B przyjmuje się, że rozkład gęstości prawdopodobieństwa błędu jest jednym z rozkładów: równomiernym, trójkątnym, trapezowym, w kształcie litery U lub normalnym, o określonej wartości błędu granicznego Δ_g .

Z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że im więcej rozkładów zostanie splecionych, tym bardziej spłot wypadkowy będzie zbliżony do rozkładu normalnego (nawet, jeżeli są to rozkłady U-kształtne). Z wykresu gęstości prawdopodobieństwa wypadkowego spłotu można określić prawdopodobieństwo P wystąpienia błędu w zadanym przedziale – jest ono całką funkcji gęstości w tym przedziale, np. dla rozkładu normalnego (rys. 1a) w przedziale $\langle -\sigma; +\sigma \rangle$ $P = 68,27\%$, w przedziale $\langle -2\sigma; +2\sigma \rangle$ $P = 95,45\%$, w przedziale $\langle -3\sigma; +3\sigma \rangle$ $P = 99,73\%$.



Rys. 1. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa błędu (a) oraz dystrybuanty (b) dla standaryzowanego rozkładu normalnego ($\bar{x}=0$, $\sigma=1$). Błędy na osi odciętych są wyskalowane w wartościach odchylenia standardowego.

W celu wyznaczenia przedziału, w którym prawdopodobieństwo wystąpienia błędu ma określoną wartość P , wygodniej jest korzystać z dystrybuanty, która jest całką gęstości prawdopodobieństwa w granicach od $-\infty$ do bieżącej wartości Δx_i (rys. 1b). Wtedy prawdopodobieństwo wystąpienia błędu w przedziale $\langle a; b \rangle$ równa się różnicy prawdopodobieństw $P(b) - P(a)$. Jeżeli przedział $\langle a; b \rangle$ ma być szukanym przedziałem ufności $\langle -U; +U \rangle$, to różnica $P(b) - P(a)$ powinna się równać poziomowi ufności $p = 0,95$. Z symetrii dystrybuanty względem punktu $(0; 0,5)$ wynika, że $P(b) + P(a) = 1$. Rozwiązując układ dwóch równań otrzymamy $P(a) = \frac{1}{2}(1-p) = 0,025$, $P(b) = \frac{1}{2}(1+p) = 0,975$. Znając wartość $P(b)$, możemy z wykresu dystrybuanty odczytać górną granicę przedziału ufności, czyli wartość niepewności pomiaru wielkości wyjściowej $U(\bar{y})$.

Suplement B

Sposób obliczenia wartości współczynnika rozszerzenia k_p w zależności od typu rozkładu gęstości prawdopodobieństwa

1. W przypadku wyznaczania tylko niepewności typu B i wykonania pomiarów jeden raz rozkład błędów jest prostokątny. Stosujemy wtedy następujące wzory:

1. Gdy mierzymy **jedną wielkość (pomiar bezpośredni)**

$$u(y) = u_B(y) = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}}; \quad k_R = p \sqrt{3} = 0,95 \sqrt{3} = 1,645 \quad (42)$$

$$U(y) = U_B(y) = k_R u_B(y) = 0,95 \Delta_g$$

2. Gdy mierzymy **dwie wielkości wejściowe (pomiar pośredni)**

$$u(y) = \sqrt{[c_1 u_B(x_1)]^2 + [c_2 u_B(x_2)]^2} = \sqrt{\frac{1}{3} [(c_1 \Delta_{g1})^2 + (c_2 \Delta_{g2})^2]}, \quad (43)$$

gdzie c_i są **współczynnikami wrażliwości** wielkości wyjściowej na wielkości wejściowe - obie o rozkładach prostokątnych. Splot tych dwóch rozkładów prostokątnych ma kształt trapezu, dla którego współczynnik rozszerzenia k równa się:

$$k_{2R} = \sqrt{3} \frac{1 + \beta - 2\sqrt{\beta(1-p)}}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad \text{gdzie } \beta = \frac{|c_2 u_B(x_2)|}{|c_1 u_B(x_1)|} \quad (44)$$

Jeśli oba rozkłady prostokątne są jednakowe ($\beta = 1$), to ich splot ma kształt trójkąta i współczynnik rozszerzenia wynosi wówczas:

$$k_T = \sqrt{6} (1 - \sqrt{1-p}) = 1,902 \quad (45)$$

Z wykresu $k_{2R} = f(\beta, 0)$ przedstawionego na rys. 2 wynika, że ten współczynnik k może przyjmować wartości z przedziału $\langle 1,643; 1,902 \rangle$.

3. Gdy mierzymy **trzy lub więcej wielkości wejściowych**

$$u(y) = \sqrt{[c_1 u_B(x_1)]^2 + [c_2 u_B(x_2)]^2 + \dots + [c_N u_B(x_N)]^2} \quad (46)$$

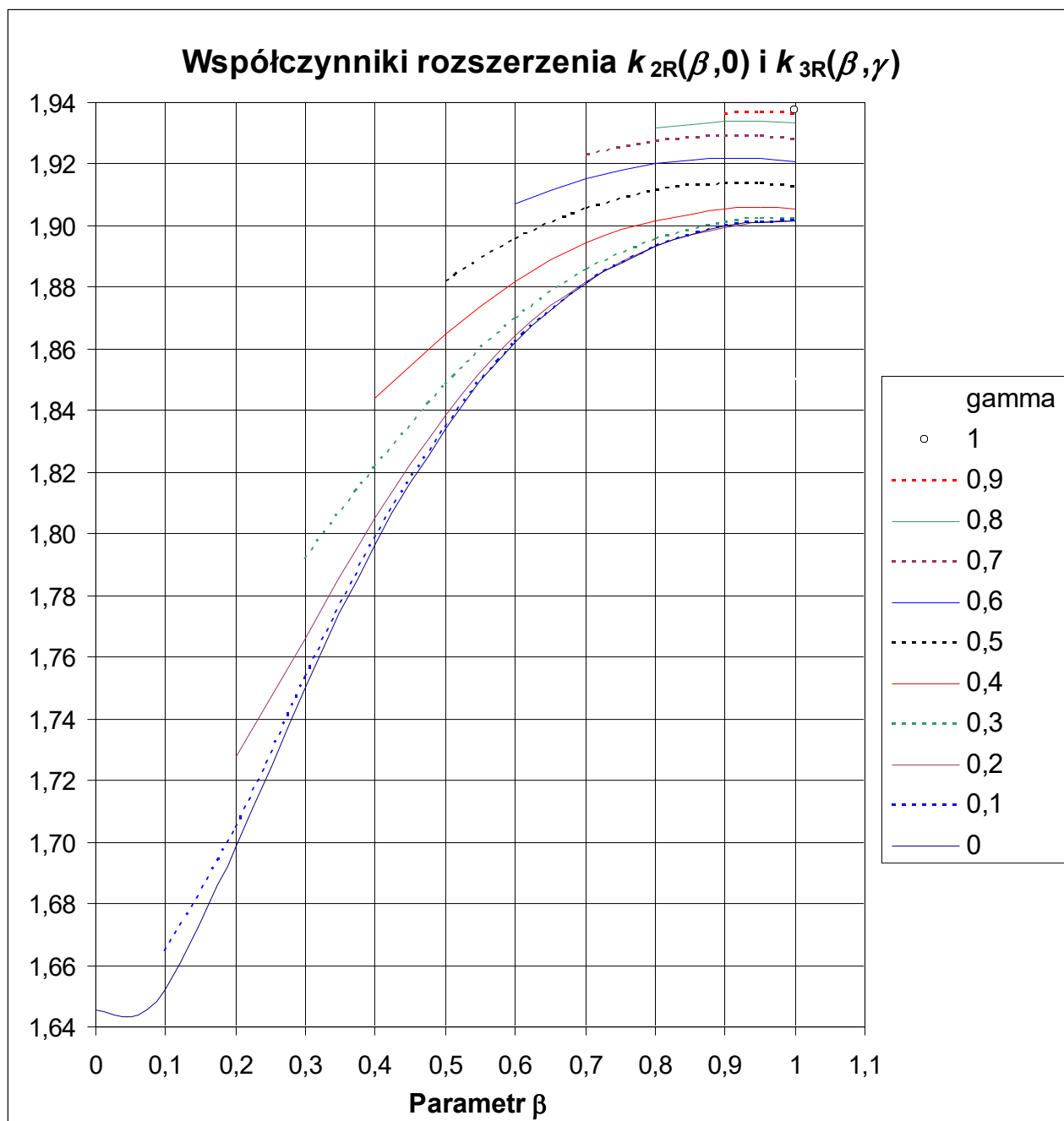
Dla trzech wielkości wejściowych współczynnik k_{3R} możemy odczytać z wykresu na rys. 2, gdzie parametr γ został określony zależnością

$$\gamma = \frac{|c_3 u_B(x_3)|}{|c_1 u_B(x_1)|} \quad \text{przy założeniu, że } |c_1 u_B(x_1)| \geq |c_2 u_B(x_2)| \geq |c_3 u_B(x_3)| \quad (47)$$

Dla trzech lub większej liczby wielkości wejściowych możemy zastosować wzór

$$k_{R_{\text{wyp}}} = 1,95 - 2,44 e^{-2,33w}, \quad \text{gdzie } w = \left(\frac{u(y)}{\max |c_i u_B(x_i)|} \right)^2 \quad (48)$$

zapewniający obliczenie k z dokładnością 1%. Jeżeli zadowala nas mniejsza dokładność obliczenia niepewności, to możemy przyjąć proponowaną przez „Guide” [1] wartość $k = 2$. Wtedy błąd oszacowania niepewności może dojść – przy małej liczbie N – do +15%.



Rys. 2. Współczynniki rozszerzenia dla splotów dwóch i trzech rozkładów prostokątnych [4]

Uwzględnianie tylko niepewności typu A

1. Jeżeli wykonujemy serię n pomiarów jednej wielkości (pomiar bezpośredni) i interesuje nas oszacowanie jej niepewności tylko typu A, to stosujemy wzory

$$u_A(\bar{y}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2} ; \quad k_S = k_S(\nu) = t_{0,95;\nu} ; \quad U(\bar{y}) = U_A(\bar{y}) = k_S u_A(\bar{y}) \quad (49)$$

gdzie współczynnik Studenta $t_{0,95;\nu}$ odczytujemy z poniższej tabeli:

$\nu = n - 1$	1	2	3	4	5	9	14	19	29	49	99	∞
$t_{0,95;\nu}$	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,26	2,14	2,09	2,04	2,01	1,98	$k_N = 1,96$

2. Jeżeli wykonujemy serie po n_i pomiarów elementarnych dla N wielkości wejściowych (pomiar pośredni) i interesuje nas oszacowanie niepewności typu A wielkości wyjściowej y , to stosujemy wzory:

$$u_A(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i-1)} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2} ; \quad u_A(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u_A(\bar{x}_i)]^2} ; \quad k_{\text{Swyp}} = t_{0,95; v_{\text{eff}}} ;$$

$$U_A(\bar{y}) = k_{\text{Swyp}} u_A(\bar{y}) \quad (50)$$

gdzie efektywną liczbę stopni swobody v_{eff} wypadkowego rozkładu t-Studenta obliczamy ze wzoru Welcha-Satterthwaite'a (wynik zaokrąglamy w dół do liczby całkowitej)

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_A^4(\bar{y})}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{v_i} [c_i u_A(\bar{x}_i)]^4} \quad (51)$$

Uwzględnianie niepewności typu A i B

1. Jeżeli wykonujemy serię n pomiarów jednej wielkości (pomiar bezpośredni) i uwzględniamy zarówno niepewności standardowe typu A o rozkładzie t-Studenta, jak i typu B o rozkładzie prostokątnym, to stosujemy wzór:

$$U(\bar{y}) = k_{\text{SR}} \sqrt{u_A^2(\bar{y}) + u_B^2(\bar{y})} \quad (52)$$

gdzie współczynnik rozszerzenia k_{SR} dobieramy w zależności od stosunku u_A/u_B . Z wykresu na rys. 3 [3] wynika, że dla $u_A \leq 0,1 u_B$ $k_{\text{SR}} = k_R = 1,645$, a dla $u_A \geq 10 u_B$ $k_{\text{SR}} = k_S = t_{0,95; v}$. Dla pośrednich wartości u_A dobre przybliżenie daje sumowanie geometryczne niepewności standardowych typu A i B pomnożonych przez współczynniki rozszerzenia k_S i k_R (można je traktować jako (rozszerzone) niepewności typu A i B)

$$U(\bar{y}) \approx \sqrt{[k_S u_A(\bar{y})]^2 + [k_R u_B(\bar{y})]^2} = \sqrt{U_A^2(\bar{y}) + U_B^2(\bar{y})} \quad (53)$$

2. Jeżeli wykonujemy serie po n_i pomiarów elementarnych dla N wielkości wejściowych (pomiar pośredni) i uwzględniamy zarówno niepewności standardowe typu A o rozkładzie t-Studenta, jak i typu B o rozkładzie prostokątnym, to stosujemy wzory

$$U(\bar{y}) = \sqrt{k_{\text{Swyp}}^2 \sum_{i=1}^N [c_i u_A(\bar{x}_i)]^2 + k_{\text{Rwyp}}^2 \sum_{i=1}^N [c_i u_B(\bar{x}_i)]^2} \quad (54)$$

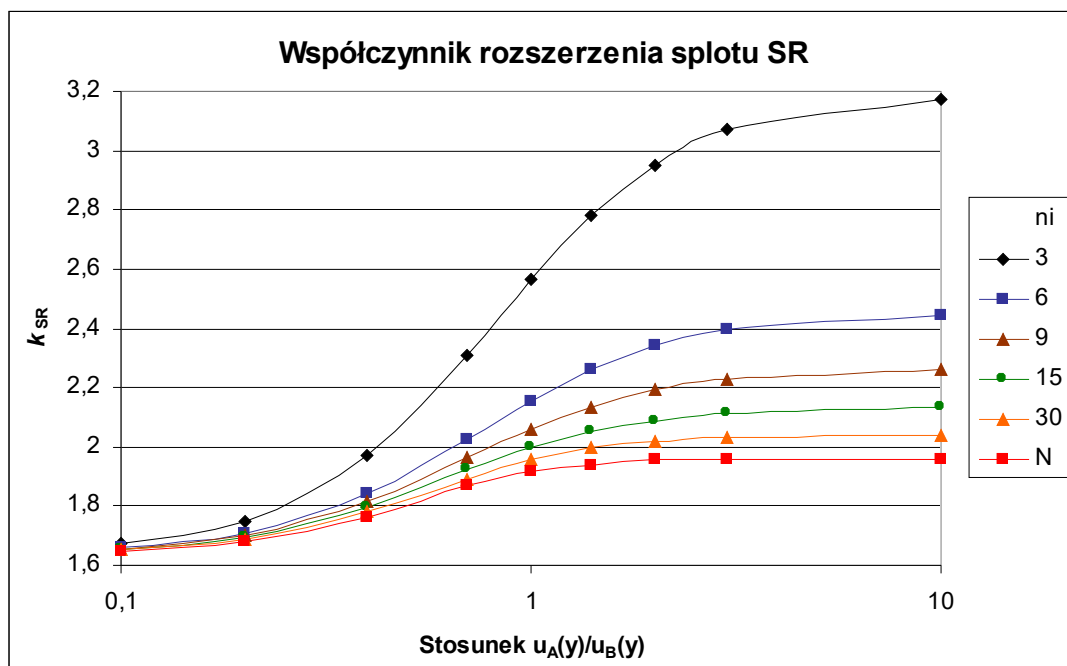
lub mniej dokładny

$$U(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [k_S(v_i) c_i u_A(\bar{x}_i)]^2 + k_R^2 \sum_{i=1}^N [c_i u_B(\bar{x}_i)]^2} \quad (55)$$

lub najmniej dokładny, z proponowanym przez „Guide” współczynnikiem $k = 2$

$$U(\bar{y}) = 2 \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u_A(\bar{x}_i)]^2 + \sum_{i=1}^N [c_i u_B(\bar{x}_i)]^2} = 2 \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 [u_A^2(\bar{x}_i) + u_B^2(\bar{x}_i)]} \quad (56)$$

Jeżeli w ostatnim wzorze udział niepewności typu A jest 10 razy mniejszy od udziału niepewności typu B, to zamiast współczynnika $k = 2$ lepiej zastosować współczynnik rozszerzenia dla rozkładów prostokątnych k_{2R} , k_{3R} lub k_{Rwyp} . W pomiarach przemysłowych z reguły stosuje się ostatni wzór, gdyż zapewnia on wystarczającą dokładność.



Rys. 3. Współczynnik rozszerzenia splotu rozkładu Studenta i rozkładu prostokątnego [4].

Suplement C

Obliczanie niepewności standardowej pomiaru wielkości wyjściowej

Zależność między wielkością wyjściową a wielkościami wejściowymi jest nazywana **funkcją pomiaru**

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (57)$$

Wartość oczekiwaną wielkości wyjściowej wyznacza się z funkcji pomiaru

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) \quad (58)$$

Błąd pomiaru ΔY wyznacza się z funkcji pomiaru przez rozwinięcie jej w szereg Taylora i uwzględnienie wyrazów z pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu. Zakładamy, że w zakresie niewielkich wartości błędów funkcja pomiaru jest liniowa (w wypadku silnej nieliniowości funkcji pomiaru należy uwzględnić również składniki z pochodnymi wyższych rzędów [1]):

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^N \frac{\partial Y}{\partial X_i} \Delta X_i = \sum_{i=1}^N c_i \Delta X_i \quad (59)$$

gdzie c_i nosi nazwę **współczynnika wrażliwości**. Współczynnik ten pozwala przeliczyć niepewność standardową $u(\bar{x}_i)$ danej wielkości wejściowej do wymiaru wielkości wyjściowej $u_i(\bar{y})$:

$$u_i(\bar{y}) = c_i u(\bar{x}_i) \quad (60)$$

W ten sposób, czyli stosując **prawo propagacji niepewności**, otrzymuje się poszczególne udziały niepewności wielkości wejściowych w niepewności wielkości wyjściowej. Suma geometryczna tych udziałów jest nazywana **niepewnością standardową pomiaru wielkości wyjściowej** (dawniej nazywana niepewnością złożoną wielkości wyjściowej)

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(\bar{y})} = \sqrt{c_1^2 [u_A^2(\bar{x}_1) + u_B^2(\bar{x}_1)] + \dots + c_N^2 [u_A^2(\bar{x}_N) + u_B^2(\bar{x}_N)]} \quad (61)$$

Powyższy wzór jest słuszny, jeżeli wielkości wejściowe są od siebie niezależne (nieskorelowane). W przeciwnym wypadku należy stosować wzory zawierające kowariancję lub współczynnik korelacji współzależnych wielkości wejściowych [3].

Literatura:

1. „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement” wyd. 2020 roku przez BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP i OIML
2. "Ewaluacja danych pomiarowych. Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru" JCGM 100:2008 GUM 1995 wersja poprawiona - <https://www.gum.gov.pl/pl/aktualnosci/3285,Polska-wersja-przewodnika-wyrazania-niepewnosci-pomiaru-juz-dostepna.html>
3. Międzynarodowy słownik podstawowych terminów w metrologii – International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology (ISO, 2007)
4. Instrukcja do obróbki statystycznej wyników pomiarów - A. Hetman i J.M. Korczyński 2000 Politechnika Łódzka.