

Stanisław Hałas

Podstawy elektrotechniki i elektroniki
przykładowe zadania z rozwiązaniami

Łódź 2023
©Stanisław Hałas

Spis treści

Spis rysunków	5
Wstęp	9
Rozdział 1. Metody analizy układów prądu stałego	10
1.1. Elementarne wiadomości o obwodach elektrycznych	10
1.2. Prawa Kirchhoffa	10
1.2.1. Napięciowe prawo Kirchhoffa	11
1.2.2. Prądowe prawo Kirchhoffa	11
1.2.3. Maksymalna liczba niezależnych praw Kirchhoffa	11
1.3. Twierdzenie Tellegena	12
1.4. Prawo Ohma	12
1.5. Połączenia rezystorów – dzielnik napięcia i prądu	13
1.5.1. Połączenie szeregowe dwóch oporników – dzielnik napięcia	13
1.5.2. Połączenie równoległe dwóch oporników – dzielnik prądu	13
1.6. Metoda (zasada) superpozycji	14
1.7. Układy równoważne	15
1.7.1. Równoważność rzeczywistego źródła napięcia i prądu	15
1.7.2. Równoważność połączeń trójkąt – gwiazda	15
1.8. Twierdzenie Thevenina-Nortona	16
1.8.1. Twierdzenie Nortona	16
1.8.2. Twierdzenie Thevenina	17
1.9. Analiza obwodów metodą napięć węzłowych	17
1.9.1. Procedura formułowania równań węzłowych	17
Rozdział 2. Analiza układów liniowych prądu stałego – przykłady	18
2.1. Prawa Kirchhoffa	18
2.1.1. Przykład 1	18
2.1.2. Przykład 2	21
2.1.3. Przykład 3	23
2.2. Metoda napięć węzłowych	25
2.2.1. Przykład 1	25
2.2.2. Przykład 2	30
2.2.3. Przykład 3	32
2.3. Połączenia rezystorów – dzielnik prądu i napięcia	36
2.3.1. Przykład 1	36
2.3.2. Przykład 2	40
2.3.3. Przykład 3	42

2.3.4.	Przykład 4	43
2.3.5.	Przykład 5	44
2.4.	Metoda superpozycji	46
2.4.1.	Przykład 1	46
2.4.2.	Przykład 2	47
2.4.3.	Przykład 3	51
2.5.	Układy równoważne	57
2.5.1.	Przykład 1	57
2.5.2.	Przykład 2	59
2.6.	Twierdzenie Thevenina-Nortona	59
2.6.1.	Przykład 1	59
2.6.2.	Przykład 2	62
Rozdział 3.	Stany nieustalone w liniowych obwodach elektrycznych	65
3.1.	Wprowadzenie	65
3.2.	Podstawowe pojęcia	65
3.3.	Stan nieustalony w układzie RC pierwszego rzędu, przy wymuszeniach stałych	66
3.4.	Stan nieustalony w układzie RL pierwszego rzędu, przy wymuszeniach stałych	68
Rozdział 4.	Analiza układów liniowych I rzędu metodą klasyczną – przykłady	70
Rozdział 5.	Obwody liniowe prądu sinusoidalnego w stanie ustalonym	90
5.1.	Wprowadzenie	90
5.2.	Podstawowe informacje o przebiegach sinusoidalnych	90
5.2.1.	Parametry sygnału sinusoidalnego	90
5.2.2.	Przesunięcie fazowe między dwoma sygnałami sinusoidalnymi	92
5.2.3.	Wartość średnia	92
5.2.4.	Wartość skuteczna	92
5.3.	Obwody liniowe prądu sinusoidalnego w stanie ustalonym – metoda symboliczna	93
5.3.1.	Wstęp	93
5.3.2.	Pojęcie wskazu	93
5.3.3.	Rezystor liniowy	94
5.3.4.	Cewka liniowa	95
5.3.5.	Kondensator liniowy	96
5.3.6.	Impedancja i admitancja	97
5.3.7.	Procedura obliczania obwodów metodą symboliczną	99
5.3.8.	Moc w obwodach prądu sinusoidalnie zmiennego	100
Rozdział 6.	Analiza układów liniowych prądu sinusoidalnie zmiennego – przykłady	102
Literatura		113

Spis rysunków

1.1. Gałąź obwodu z zaznaczonymi stowarzyszonymi kierunkami odniesienia prądu i napięcia	10
1.2. Symbol graficzny opornika liniowego	12
1.3. Połączenie szeregowe dwóch oporników	13
1.4. Połączenie równoległe dwóch oporników	14
1.5. Rzeczywiste źródło napięcia i prądu	15
1.6. Połączenie elementów w gwiazdę i trójkąt	16
2.1. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 1	19
2.2. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 1 z zaznaczonymi pętlami	19
2.3. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 2	22
2.4. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 2 z zaznaczonymi pętlami	22
2.5. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 3	24
2.6. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 3 z zaznaczonymi pętlami	24
2.7. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 1 z zaznaczonymi węzłami	26
2.8. Fragment układu do wyznaczenia prądu i_4	26
2.9. Fragment układu do wyznaczenia prądu i_3	27
2.10. Reguła do wyznaczenia prądu opornika	27
2.11. Reguła do wyznaczenia prądu rzeczywistego źródła napięcia	28
2.12. Reguła do wyznaczenia prądu rzeczywistego źródła napięcia przy innym ostrzałkowaniu	28
2.13. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 2 z zaznaczonymi węzłami	30
2.14. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 3 z zaznaczonymi węzłami	32
2.15. Fragment układu z idealnym źródłem napięcia	33
2.16. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 3 dla innego wyboru węzła odniesienia	34
2.17. Połączenie rezystorów rozpatrywane w przykładzie 1	36
2.18. Przykładowe połączenie rezystorów po usunięciu zacisku C	36
2.19. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_a po I przekształceniu	37
2.20. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_a po II przekształceniu	37
2.21. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_a po III przekształceniu	38
2.22. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_a po IV przekształceniu	38
2.23. Przykładowe połączenie rezystorów po usunięciu zacisku B	39
2.24. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_b po I przekształceniu	39
2.25. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_b po II przekształceniu	39
2.26. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_b po III przekształceniu	40
2.27. Przykładowe połączenie rezystorów po zwarcu zacisków AC	41
2.28. Przykładowe połączenie rezystorów usunięciu zwartych rezystorów	41

2.29. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_b po I przekształceniu	41
2.30. Przykładowy dzielnik napięcia	42
2.31. Przykładowy dzielnik prądu	43
2.32. Przykładowy układ liniowy	44
2.33. Przykładowy układ liniowy	44
2.34. Obwód liniowy analizowany w przykładzie 1 metodą superpozycji	46
2.35. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$	46
2.36. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$	47
2.37. Obwód liniowy analizowany w przykładzie 2 metodą superpozycji	48
2.38. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$	48
2.39. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$	48
2.40. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$	49
2.41. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$	49
2.42. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$	50
2.43. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 3	51
2.44. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$	51
2.45. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$	52
2.46. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$	52
2.47. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(4)}$	52
2.48. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$	53
2.49. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$ po przekształceniu	53
2.50. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$ po przekształceniu	54
2.51. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$ po przekształceniu	54
2.52. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$ po przekształceniu	55
2.53. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$	55
2.54. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$ po przekształceniu	55
2.55. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$ po przekształceniu	56
2.56. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(4)}$	56
2.57. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(4)}$ po przekształceniu	56
2.58. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(4)}$ po przekształceniu	57
2.59. Przykładowy układ liniowy	58
2.60. Przykładowy układ liniowy po zamianie źródeł	58
2.61. Obwód liniowy analizowany w przykładzie 2	59
2.62. Przykładowy układ liniowy po zamianie źródeł	60
2.63. Przykładowy układ liniowy	60
2.64. Obwód do wyznaczenia napięcia u_{AB}	61
2.65. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_{AB}	61
2.66. Obwód do wyznaczenia napięcia u_{AB} metodą węzłową	61
2.67. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_{AB} po przekształceniu	63
2.68. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_{AB} po przekształceniu	63
2.69. Obwód do wyznaczenia prądu j_{AB}	63
2.70. Obwód do wyznaczenia prądu j_{AB} po uproszczeniu	64

3.1.	Układ RC pierwszego rzędu	66
3.2.	Wykorzystanie twierdzenia Thevenina/Nortona w analizie układów pierwszego rzędu	67
3.3.	Układ klasy RL i układy równoważne wynikające z zastosowania twierdzenia Thevenina/Nortona	69
4.1.	Układ rozpatrywany w przykładzie 1	70
4.2.	Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 1	71
4.3.	Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 1	72
4.4.	Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 1	72
4.5.	Układ zastępczy w przykładzie 1	73
4.6.	Wykres napięcia na kondensatorze w przykładzie 1	73
4.7.	Układ rozpatrywany w przykładzie 2	74
4.8.	Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 2	75
4.9.	Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 2	75
4.10.	Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 2	76
4.11.	Układ zastępczy w przykładzie 2	76
4.12.	Wykres prądu płynącego przez cewkę w przykładzie 2	77
4.13.	Układ rozpatrywany w przykładzie 3	77
4.14.	Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 3	78
4.15.	Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 3	78
4.16.	Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 3	79
4.17.	Układ zastępczy w przykładzie 3	80
4.18.	Wykres prądu płynącego przez cewkę w przykładzie 3	80
4.19.	Układ rozpatrywany w przykładzie 4	80
4.20.	Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 4	81
4.21.	Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 4	81
4.22.	Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 4	82
4.23.	Układ zastępczy w przykładzie 4	83
4.24.	Wykres napięcia na kondensatorze w przykładzie 4	83
4.25.	Układ rozpatrywany w przykładzie 5	83
4.26.	Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 5	84
4.27.	Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 5	84
4.28.	Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 5	85
4.29.	Układ zastępczy w przykładzie 5	86
4.30.	Wykres napięcia na kondensatorze w przykładzie 5	86
4.31.	Układ rozpatrywany w przykładzie 6	86
4.32.	Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 6	87
4.33.	Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 6	88
4.34.	Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 6	88
4.35.	Układ zastępczy w przykładzie 6	89
4.36.	Wykres prądu płynącego przez cewkę w przykładzie 6	89

5.1.	Sygnał sinusoidalny o zerowej fazie początkowej (a) oraz niezerowej fazie początkowej (b)	91
5.2.	Rezystor liniowy, przebiegi czasowe i wykres wektorowy	95
5.3.	Wykres wskazowy dla opornika liniowego	95
5.4.	Cewka liniowa, przebiegi czasowe i wykres wektorowy	96
5.5.	Wykres wskazowy dla cewki liniowej	96
5.6.	Kondensator liniowy, przebiegi czasowe i wykres wektorowy	97
5.7.	Wykres wskazowy dla kondensatora liniowego	97
5.8.	Dwójnik liniowy	98
5.9.	Połączenie szeregowe dwóch impedancji	99
5.10.	Połączenie równoległe dwóch admitancji	100
5.11.	Dwójnik jako element lub fragment obwodu liniowego	100
6.1.	Przykładowy przebieg sinusoidalny rozpatrywany w przykładzie 1	103
6.2.	Przykładowy przebieg sinusoidalny rozpatrywany w przykładzie 2	103
6.3.	Układ rozpatrywany w przykładzie 3	104
6.4.	Schemat układu rozpatrywanego w przykładzie 3 dla metody symbolicznej	104
6.5.	Układ rozpatrywany w przykładzie 4	105
6.6.	Schemat układu rozpatrywanego w przykładzie 4 dla metody symbolicznej	106
6.7.	Układ rozpatrywany w przykładzie 5	106
6.8.	Schemat układu rozpatrywanego w przykładzie 5 dla metody symbolicznej	107
6.9.	Układ rozpatrywany w przykładzie 6	108
6.10.	Schemat układu rozpatrywanego w przykładzie 6 dla metody symbolicznej	108
6.11.	Układ rozpatrywany w przykładzie 8	111

Wstęp

W niniejszym opracowaniu zawarto przykłady zadań z zakresu Podstaw elektrotechniki i Elektroniki pod kątem zaliczenia wykładowego. Należy zaznaczyć, że przedstawiony sposób dojścia do rozwiązania jest jednym z wielu możliwych, niekoniecznie optymalnym. Skrypt zawiera też najważniejsze zagadnienia z zakresu podstaw teoretycznych niezbędnych do rozwiązania zadań. Jest to skrypt przeznaczony dla studentów pierwszego semestru na kierunku Informatyka. Skrypt ten nie może być modyfikowany, rozpowszechniany, w całości oraz częściach, w internecie, bez zgody autora.

Autor będzie wdzięczny za wszelkie uwagi odnośnie popełnionych błędów edycyjnych oraz komentarze na temat zawartości i ewentualnych rozszerzeń. Uwagi proszę kierować na adres: `stanislaw.halgas@p.lodz.pl`.

Rozdział 1

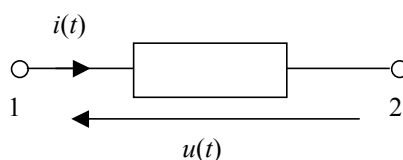
Metody analizy układów prądu stałego

1.1. Elementarne wiadomości o obwodach elektrycznych

W obwodach elektrycznych rozpatruje się *napięcia pomiędzy węzłami* oraz *prądy płynące w gałęziach*. W celu sformułowania opisu matematycznego układu konieczne jest przyjęcie pewnych **kierunków odniesienia**, określanych dalej w skrócie kierunkiem prądu (napięcia). Dla każdego prądu przyjmuje się *kierunek odniesienia* zaznaczony za pomocą strzałki umieszczonej w danej gałęzi (wyjątek stanowią gałęzie zawierające źródła prądowe, niezależne i sterowane, w których strzałka umieszczona wewnątrz symbolu danego typu źródła oznacza kierunek prądu). Podobnie, nad, pod lub obok elementu (w zależności od umieszczenia elementu na schemacie) umieszczamy strzałkę określającą kierunek odniesienia napięcia (wyjątek stanowią elementy będące źródłami napięciowymi, niezależnymi i sterowanymi, w których strzałka umieszczona wewnątrz symbolu danego typu źródła oznacza kierunek napięcia). Przy zaznaczonych kierunkach odniesienia obliczamy obwód korzystając z metod podanych w dalszej części tego opracowania. **Znajomość znaku i wartości prądu w danej chwili oraz kierunku odniesienia umożliwia jednoznaczne określenie rzeczywistego kierunku przepływu prądu w tej chwili.** Jeżeli strzałki prądu i napięcia mają przeciwne zwroty, to mówimy, że prąd i napięcie mają **stowarzyszone kierunki odniesienia** (rys. 1.1).

1.2. Prawa Kirchhoffa

Prawa Kirchhoffa to **najbardziej ogólne i fundamentalne zasady** obowiązujące w obwodach elektrycznych. **Prawa Kirchhoffa dotyczą struktury geometrycznej obwodu,**



Rys. 1.1. Gałąź obwodu z zaznaczonymi stowarzyszonymi kierunkami odniesienia prądu i napięcia

czyli jego topologii i nie zależą od rodzaju elementów umieszczonych w poszczególnych gałęziach.

1.2.1. Napięciowe prawo Kirchhoffa

Napięciowe prawo Kirchhoffa formułujemy w danej pętli, przyjmując dowolnie kierunek obiegu w tej pętli. Kierunek obiegu może być zgodny lub przeciwny do ruchu wskazówek zegara. **W każdej chwili t algebraiczna suma napięć gałęziowych w rozpatrywanej pętli równa się zeru. Składniki sumy algebraicznej piszemy ze znakiem plus, jeżeli kierunki napięć gałęziowych są zgodne z kierunkiem obiegu i ze znakiem minus w przypadku przeciwnym.**

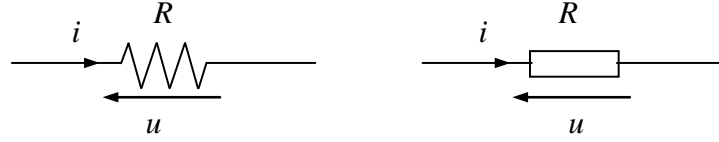
Bardziej ogólną wersję napięciowego prawa Kirchhoffa otrzymujemy rozpatrując tzw. **zamknięty ciąg węzłów**, czyli zbiór węzłów zaczynający się i kończący w tym samym węźle. **W dowolnym obwodzie, dla każdego zamkniętego ciągu węzłów w dowolnej chwili, algebraiczna suma napięć występujących pomiędzy węzłami tworzącymi ciąg zamknięty, jest równa zeru.**

1.2.2. Prądowe prawo Kirchhoffa

Dla każdego obwodu i dowolnego jego węzła, w każdej chwili, algebraiczna suma prądów w gałęziach zbiegających się w tym węźle jest równa zeru. W wyznaczonej wyżej sumie algebraicznej przypisujemy prądowi **znak plus, jeżeli jego kierunek jest od węzła** i znak minus w przypadku, gdy strzałka prądu jest skierowana do węzła. Dopuszczalne jest również przyjęcie przeciwnej reguły.

1.2.3. Maksymalna liczba niezależnych praw Kirchhoffa

Dla obwodu, w którym jest α węzłów można ułożyć $\alpha - 1$ niezależnych PPK. Dla obwodu, w którym jest α węzłów i β gałęzi można ułożyć $\beta - \alpha + 1$ niezależnych NPK. Dla obwodu, w którym jest α węzłów i β gałęzi można ułożyć β niezależnych praw Kirchhoffa.



Rys. 1.2. Symbol graficzny opornika liniowego

1.3. Twierdzenie Tellegena

Twierdzenie Tellegena wynika bezpośrednio z praw Kirchhoffa i topologii, może być stosowane do dowolnego obwodu o elementach skupionych, utworzonego z dwójników liniowych i nieliniowych, pasywnych i aktywnych, stacjonarnych i niestacjonarnych.

Twierdzenie Tellegena

Jeżeli prądy gałęziowe i_k spełniają PPK w każdym węźle grafu oraz napięcia gałęziowe u_k spełniają NPK w każdej pętli grafu, to

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0, \quad (1.1)$$

gdzie b – liczba gałęzi grafu. *Uwaga: Prądy i napięcia muszą dotyczyć tego samego grafu, ale nie muszą odnosić się do tego samego obwodu. W szczególnym przypadku, gdy dotyczą tego samego obwodu, wzór powyższy ma interpretację fizyczną i oznacza, że suma mocy chwilowych wszystkich gałęzi obwodu jest równa zero.*

1.4. Prawo Ohma

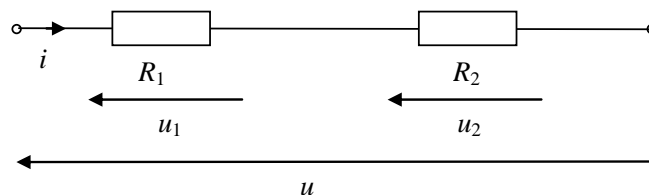
Opornik (rezystor) liniowy to element, który na schematach oznaczany jest symbolem graficznym pokazanym na rys. 1.2. Opornik liniowy spełnia prawo Ohma

$$u = Ri \quad \longleftrightarrow \quad i = Gu, \quad (1.2)$$

z którego wynika, że napięcie na zaciskach opornika liniowego jest wprost proporcjonalne do płynącego przez opornik prądu, a współczynnik proporcjonalności nazywany jest rezystancją (oporem) opornika i wyrażany w omach $1\Omega = 1\frac{\text{V}}{\text{A}}$. $G = R^{-1}$ nazywamy konduktancją (przewodnością) i wyrażamy w simensach $1\text{S} = 1\frac{\text{A}}{\text{V}}$. Korzystając z prawa Ohma możemy wyznaczyć moc chwilową dla opornika liniowego

$$p(t) = u(t)i(t) = R(i(t))^2 = \frac{1}{R}(u(t))^2. \quad (1.3)$$

Z powyższej zależności wynika, że moc opornika liniowego jest w każdej chwili t nieujemna.



Rys. 1.3. Połączenie szeregowe dwóch oporników

1.5. Połączenia rezystorów – dzielnik napięcia i prądu

1.5.1. Połączenie szeregowe dwóch oporników – dzielnik napięcia

Na rys. 1.3 pokazane zostało połączenie szeregowe dwóch oporników. Rezystancja zastępcza połączenia określona jest wzorem

$$R = R_1 + R_2. \quad (1.4)$$

Zależność ta podlega uogólnieniu i dla n szeregowo połączonych oporników przyjmuje postać

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (1.5)$$

Układ pokazany na rys. 1.3 jest najprostszym dzielnikiem napięcia, dla którego spełnione są poniższe zależności:

$$u_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u, \quad (1.6)$$

$$u_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u, \quad (1.7)$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (1.8)$$

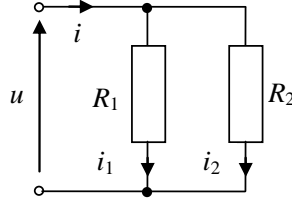
1.5.2. Połączenie równoległe dwóch oporników – dzielnik prądu

Na rys. 1.4 pokazane zostało połączenie równoległe dwóch oporników. Rezystancja zastępcza połączenia określona jest wzorem

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (1.9)$$

Po przekształceniach otrzymujemy równoważną postać

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.10)$$



Rys. 1.4. Połączenie równoległe dwóch oporników

Dla n równoległe połączonych oporników wzór określający wartość rezystancji zastępczej przyjmuje postać

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (1.11)$$

Układ pokazany na rys. 1.4 jest najprostszym dzielnikiem prądu, dla którego spełnione są poniższe zależności:

$$i_1 = \frac{u}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \quad (1.12)$$

$$i_2 = \frac{u}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i, \quad (1.13)$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (1.14)$$

1.6. Metoda (zasada) superpozycji

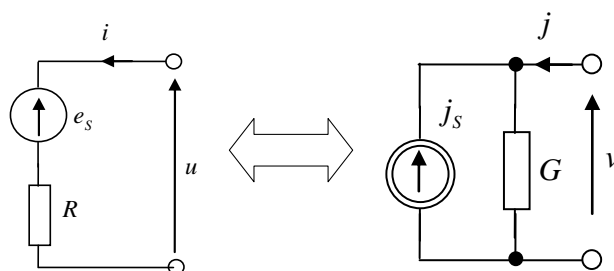
Rozpatrujemy liniowy obwód rezystancyjny zawierający n niezależnych źródeł napięcia $u_{s1}, u_{s2}, \dots, u_{sn}$ oraz m niezależnych źródeł prądu $i_{s1}, i_{s2}, \dots, i_{sm}$.

Metoda (zasada) superpozycji

Dowolny prąd gałęziowy i_j oraz dowolne napięcie gałęziowe u_j jest wyrażeniem o postaci

$$h_1 u_{s1} + h_2 u_{s2} + \dots + h_n u_{sn} + k_1 i_{s1} + k_2 i_{s2} + \dots + k_m i_{sm}, \quad (1.15)$$

gdzie współczynniki h_p ($p = 1, \dots, n$) oraz k_p ($p = 1, \dots, m$) są stałymi, które zależą tylko od parametrów obwodu i nie zależą od wielkości źródłowych. Każdy składnik $h_p u_{sp}$ jest odpowiedzią obwodu, w którym wszystkie źródła oprócz u_{sp} zostały przyrównane do zera. Każdy składnik $k_p i_{sp}$ jest odpowiedzią obwodu, w którym wszystkie źródła za wyjątkiem i_{sp} przyrównano do zera.



Rys. 1.5. Rzeczywiste źródło napięcia i prądu

Ogólna reguła usuwania źródeł

Przyrównanie do zera prądów źródłowych jest równoważne usunięciu źródeł prądowych z obwodu (lub ustawieniu ich wartości na zero), czyli **rozwarciu źródeł prądowych**. Przyrównanie do zera napięć źródłowych jest równoważne usunięciu źródeł napięcia (lub ustawieniu ich wartości na zero) i **zwarceniu zacisków**, do których były dołączone.

Metoda (zasada) superpozycji – inne sformułowanie

Odpowiedź obwodu liniowego pobudzanego jednocześnie kilkoma wymuszeniami równa się sumie odpowiedzi obwodu na poszczególne wymuszenia działające oddzielnie.

1.7. Układy równoważne

Dwa układy nazywamy równoważnymi, jeżeli opis matematyczny obydwu obwodów jest taki sam.

1.7.1. Równoważność rzeczywistego źródła napięcia i prądu

Można wykazać, że rzeczywiste źródło napięcia jest obwodem równoważnym do rzeczywistego źródła prądu i na odwrót (rys. 1.5). Rezystory w obu źródłach mają tę samą wartość oraz prąd źródłowy

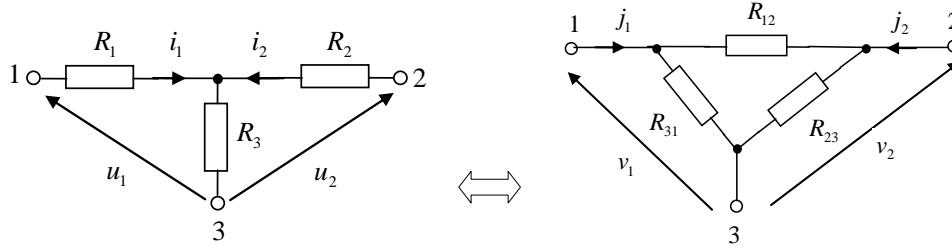
$$j_s = \frac{e_s}{R}, \quad (1.16)$$

a napięcie źródłowe

$$e_s = Rj_s = \frac{j_s}{G}. \quad (1.17)$$

1.7.2. Równoważność połączeń trójkąt – gwiazda

Innym przykładem układów równoważnych są dwa połączenia trzech rezystancji w sposób pokazany na rys. 1.6, noszące nazwy połączenia w gwiazdę i w trójkąt. Układy te są



Rys. 1.6. Połączenie elementów w gwiazdę i trójkąt

układami równoważnymi jeżeli zachodzą następujące zależności:

— Transformacja trójkąt – gwiazda

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_3 &= \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

— Transformacja gwiazda – trójkąt

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}, \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Jeżeli $R_1 = R_2 = R_3 = R$ to $R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_{\Delta} = 3R$.

1.8. Twierdzenie Thevenina-Nortona

1.8.1. Twierdzenie Nortona

Twierdzenie Nortona – treść

Obwód liniowy rozpatrywany od strony wybranej pary zacisków A, B można zastąpić równoległym połączeniem utworzonym ze źródła prądowego i_z oraz opornika o konduktancji G_z . Prąd źródłowy i_z jest równy prądowi płynącemu w zwartej gałęzi AB, G_z jest konduktancją widzianą z zacisków AB po przyrównaniu do zera wszystkich napięć i prądów **źródeł niezależnych**.

1.8.2. Twierdzenie Thevenina

Z równoważności rzeczywistych źródeł prądu i napięcia wynika, że dwójnik występujący w twierdzeniu Nortona (rzeczywiste źródło prądu) można przedstawić w równoważnej postaci rzeczywistego źródła napięcia, zwanego dwójnikiem Thevenina, jeżeli $R_z = G_z^{-1}$ oraz $e_z = R_z i_z$.

Twierdzenie Thevenina – treść

Obwód liniowy rozpatrywany od strony wybranej pary zacisków A, B można zastąpić szeregowym połączeniem źródła napięcia e_z i opornika o rezystancji R_z . Wartość Napięcia źródłowego e_z równa się wartości napięcia występującego na rozwartych zaciskach A, B. Rezystancja R_z jest rezystancją widzianą z zacisków A, B po przyrównaniu do zera wszystkich napięć i prądów **źródeł niezależnych** i wyznaczana jest analogicznie jak w dwójniku Nortona.

1.9. Analiza obwodów metodą napięć węzłowych

Metoda napięć węzłowych (zwana też metodą potencjałów węzłowych lub skrótowo metodą węzłową) jest powszechnie używana w analizie układów liniowych i nieliniowych przeprowadzanej ręcznie lub z wykorzystaniem komputera [1], [2], [3]. Jest też standardową metodą opisu wykorzystywaną w programie SPICE. Istnieje wiele sposobów formułowania tych równań, z których w implementacji komputerowej zastosowanie znalazła tzw. metoda wstemplowywania wzorców. Podana poniżej procedura tworzenia opisu węzłowego jest prosta pojęciowo i wykorzystuje wiadomości podane w tym rozdziale.

1.9.1. Procedura formułowania równań węzłowych

1. Przyjmujemy jeden węzeł układu za węzeł odniesienia oraz wprowadzamy napięcia węzłowe pozostałych węzłów (względem odniesienia).
2. Napięcia węzłowe wraz z prądami idealnych źródeł napięciowych (niezależnych i sterowanych) traktujemy jako niewiadome w tworzonej układzie równań.
3. Formułujemy równania, na podstawie PPK, w poszczególnych węzłach z wykluczeniem węzła odniesienia.
4. Prądy w gałęziach zawierających opornik lub rzeczywiste źródło napięciowe (niezależne lub sterowane) oraz prądy i napięcia sterujące uzależniamy od napięć węzłowych i podstawiamy do równań wyznaczonych w p.3.
5. Formułujemy równania dodatkowe w przypadku, gdy w układzie występują idealne źródła napięcia niezależne lub sterowane umieszczone między dwoma węzłami. Każde równanie dodatkowe to napięciowe prawo Kirchhoffa wiążące napięcie danego źródła oraz napięcia węzłowe dla węzłów, do których źródło to jest dołączone.

Rozdział 2

Analiza układów liniowych prądu stałego – przykłady

2.1. Prawa Kirchhoffa

2.1.1. Przykład 1

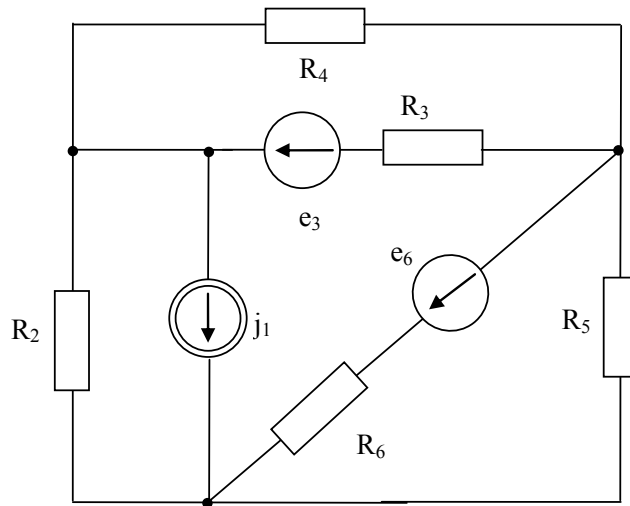
Ułóż niezależne prawa Kirchhoffa opisujące układ pokazanego na rys. 2.1. Następnie przyjmując dane: $e_3 = 12\text{ V}$, $e_6 = 8\text{ V}$, $j_1 = 10\text{ mA}$, $R_2 = 1\text{ k}\Omega$, $R_3 = 1\text{ k}\Omega$, $R_4 = 1\text{ k}\Omega$, $R_5 = 1\text{ k}\Omega$, $R_6 = 1\text{ k}\Omega$, wyznacz niewiadome wielkości, dokonaj bilansu mocy oraz oblicz energię dostarczaną przez źródła w czasie 20 s.

W układzie mamy 6 gałęzi (o numerach 1,...,6) i trzy węzły. W związku z tym liczba niezależnych PPK wynosi $3 - 1 = 2$, a liczba niezależnych NPK $- 6 - 3 + 1 = 4$ (tyle ile oczek). Aby sformułować prawa Kirchhoffa wprowadzamy kierunki (odniesienia) prądów i rysujemy strzałki napięć na elementach (szczególnie pamiętamy o ostrzałkowaniu napięcia na źródle prądu). Numerujemy też węzły oraz oznaczamy pętle i ich kierunki obiegu. Istnieje wiele różnych kombinacji pętli i węzłów, które można wybrać do ułożenia opisu obwodu i rozwiązania zadania. Tutaj opisana zostanie jedna, przykładowa, zaznaczona na rys. 2.2. Formułujemy PPK w węzłach 1, 2:

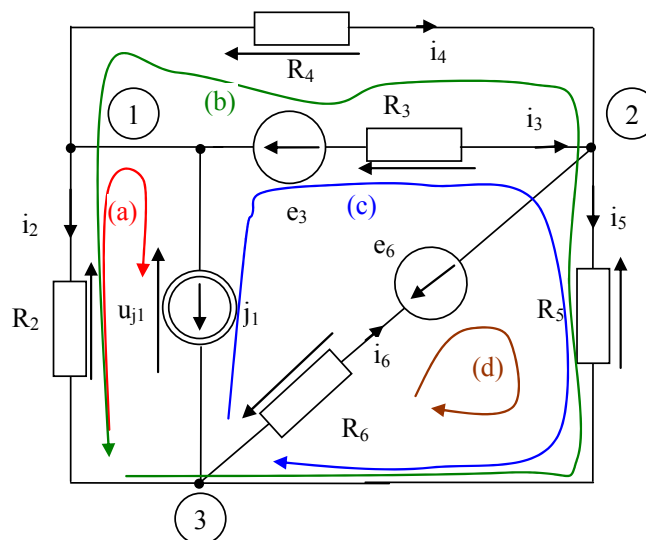
$$\begin{aligned} 1 : \quad & i_2 + j_1 + i_3 + i_4 = 0, \\ 2 : \quad & -i_3 - i_4 + i_5 - i_6 = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Z NPK w pętlach (a), (b), (c) oraz (d) (oraz uwzględniając, że napięcie na oporniku spełnia prawo Ohma) mamy:

$$\begin{aligned} (a) : \quad & i_2 R_2 - u_{j1} = 0, \\ (b) : \quad & i_2 R_2 - i_4 R_4 - i_5 R_5 = 0, \\ (c) : \quad & u_{j1} - e_3 - i_3 R_3 - i_5 R_5 = 0, \\ (d) : \quad & -i_6 R_6 - e_6 - i_5 R_5 = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$



Rys. 2.1. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 1



Rys. 2.2. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 1 z zaznaczonymi pętłami

Podstawiając dane liczbowe (prądy w mA, a rezystancje w $k\Omega$) dochodzimy do układu równań liniowych o postaci

$$\begin{aligned}
 (1) : \quad & i_2 + 10 + i_3 + i_4 = 0 \\
 (2) : \quad & -i_3 - i_4 + i_5 - i_6 = 0 \\
 (3) : \quad & i_2 - u_{j1} = 0 \\
 (4) : \quad & i_2 - i_4 - i_5 = 0 \\
 (5) : \quad & u_{j1} - 12 - i_3 - i_5 = 0 \\
 (6) : \quad & -i_6 - 8 - i_5 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Układ ten można rozwiązać ręcznie, np. metodą podstawiania lub wykorzystując narzędzia programistyczne typu: MAXIMA, MATLAB, a nawet zaawansowany kalkulator lub aplikację na smartfona.

Przykładowy sposób rozwiązania podano poniżej. Z równania (3) mamy $u_{j1} = i_2$. Podstawiając do pozostałych równań, po uporządkowaniu, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (1) : \quad & i_2 + i_3 + i_4 = -10 \\
 (2) : \quad & -i_3 - i_4 + i_5 - i_6 = 0 \\
 (4) : \quad & i_2 - i_4 - i_5 = 0 \\
 (5) : \quad & i_2 - i_3 - i_5 = 12 \\
 (6) : \quad & -i_6 - i_5 = 8.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Następnie z równania (4) wyznaczamy $i_2 = i_4 + i_5$ i podstawiamy do pozostałych równań otrzymując

$$\begin{aligned}
 (1) : \quad & i_3 + 2i_4 + i_5 = -10 \\
 (2) : \quad & -i_3 - i_4 + i_5 - i_6 = 0 \\
 (5) : \quad & -i_3 + i_4 = 12 \\
 (6) : \quad & -i_6 - i_5 = 8.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Wyznaczamy z równania (5), $i_4 = 12 + i_3$ i podstawiamy do pozostałych równań dochodząc do układu

$$\begin{aligned}
 (1) : \quad & 3i_3 + i_5 = -34 \\
 (2) : \quad & -2i_3 + i_5 - i_6 = 12 \\
 (6) : \quad & -i_6 - i_5 = 8.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Postępując analogicznie z równania (6) wyznaczamy $i_5 = -8 - i_6$ i dochodzimy do układu dwóch równań liniowych

$$\begin{aligned}
 (1) : \quad & 3i_3 - i_6 = -26 \\
 (2) : \quad & -2i_3 - 2i_6 = 20.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dzieląc równanie (2) stronami przez (-2) i dodając do równania (1) otrzymujemy

$$4i_3 = -36, \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

a stąd wyznaczamy prąd $i_3 = -9$. Prąd ten wyrażony jest w mA. Następnie podstawiając wstecz wyznaczamy pozostałe prądy otrzymując $i_6 = -1$ mA, $i_4 = 3$ mA, $i_5 = -7$ mA, $i_2 = -4$ mA (do wyników dopisano jednostki). Napięcie $u_{j1} = R_2 i_2 = -4$ V.

Obecnie wyznaczone zostaną moce poszczególnych elementów:

$$\begin{aligned} (1) : \quad P_1 &= P_{R_2} = R_2 \cdot (i_2)^2 = 1000 \cdot (-4 \cdot 10^{-3})^2 = 0,016 \text{ W} = 16 \text{ mW} \\ (2) : \quad P_2 &= P_{R_3} = R_3 \cdot (i_3)^2 = 1000 \cdot (-9 \cdot 10^{-3})^2 = 0,081 \text{ W} = 81 \text{ mW} \\ (3) : \quad P_3 &= P_{R_4} = R_4 \cdot (i_4)^2 = 1000 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 = 0,009 \text{ W} = 9 \text{ mW} \\ (4) : \quad P_4 &= P_{R_5} = R_5 \cdot (i_5)^2 = 1000 \cdot (-7 \cdot 10^{-3})^2 = 0,049 \text{ W} = 49 \text{ mW} \\ (5) : \quad P_5 &= P_{R_6} = R_6 \cdot (i_6)^2 = 1000 \cdot (-1 \cdot 10^{-3})^2 = 0,001 \text{ W} = 1 \text{ mW}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wszystkie oporniki pobierają moc, natomiast w przypadku źródeł może okazać się, że w przykładach akademickich źródło też będzie odbiornikiem. Ma to miejsce w przypadku, gdy przy standardowym ostrzałowaniu moc, jako iloczyn napięcia i prądu, będzie dodatnia. Obliczymy teraz moce dla źródeł, otrzymując

$$\begin{aligned} (1) : \quad P_6 &= P_{j_2} = u_{j1} \cdot j_1 = -4 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = -0,040 \text{ W} = -40 \text{ mW} \\ (2) : \quad P_7 &= P_{e_3} = e_3 \cdot i_3 = 12 \cdot (-9 \cdot 10^{-3}) = -0,108 \text{ W} = -108 \text{ mW} \\ (3) : \quad P_8 &= P_{e_6} = e_6 \cdot i_6 = 8 \cdot (-1 \cdot 10^{-3}) = -0,008 \text{ W} = -8 \text{ mW}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

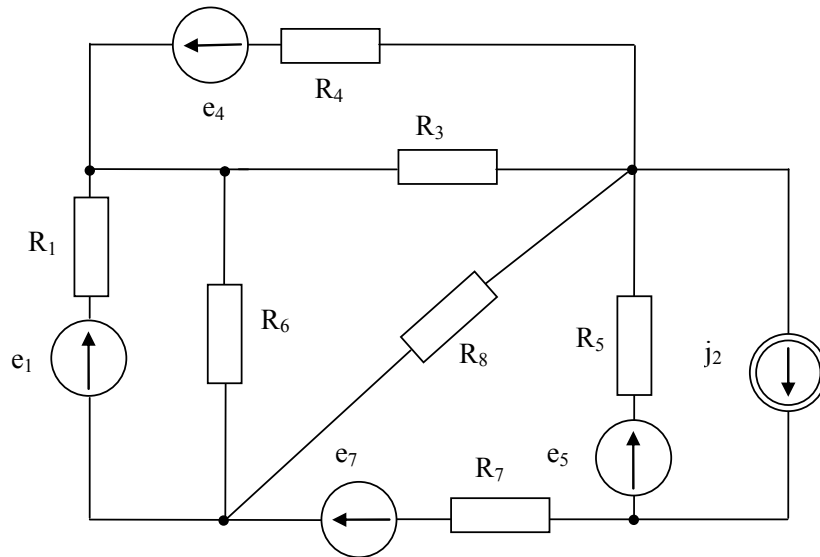
Sumując wszystkie moce, od P_1 do P_8 , otrzymujemy 0. Ponieważ moce dla wszystkich źródeł, przy przyjętym ostrzałowaniu, są ujemne, wszystkie źródła dostarczają moc do obwodu. Energia dostarczona do układu w czasie 20 s wynosi

$$w = |P_{j_2}| + |P_{e_3}| + |P_{e_6}| \cdot 20 = 156 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 3,12 \text{ Ws} = 3,12 \text{ J}. \quad (2.12)$$

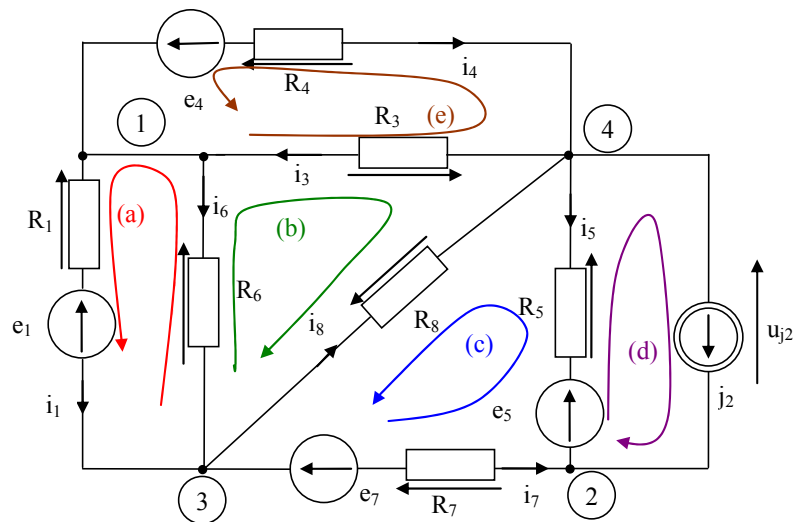
2.1.2. Przykład 2

Ułóż niezależne prawa Kirchhoffa opisujące układ pokazanego na rys. 2.3. Następnie przyjmując dane: $e_1 = 2$ V, $e_4 = 6$ V, $e_5 = 12$ V, $e_7 = 8$ V, $j_2 = 10$ mA, $R_1 = 1$ k Ω , $R_3 = 1$ k Ω , $R_4 = 1$ k Ω , $R_5 = 1$ k Ω , $R_6 = 1$ k Ω , $R_7 = 1$ k Ω , wyznacz niewiadome wielkości.

W układzie mamy 8 gałęzi (o numerach 1,...,8) i cztery węzły. W związku z tym liczba niezależnych PPK wynosi 3, a liczba niezależnych NPK – 5 (tyle ile oczek). Aby sformułować prawa Kirchhoffa wprowadzamy kierunki prądów i rysujemy strzałki napięć na elementach. Numerujemy też węzły oraz oznaczamy pętle i ich kierunki obiegu. Istnieje wiele różnych kombinacji pętli i węzłów, które można wybrać do ułożenia opisu



Rys. 2.3. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 2



Rys. 2.4. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 2 z zaznaczonymi pętlami

obwodu i rozwiązania zadania. Tutaj opisana zostanie jedna, zaznaczona na rys. 2.4. Formułujemy PPK w węzłach 1, 2 oraz 3:

$$\begin{aligned} 1 : \quad & i_1 - i_3 + i_4 + i_6 = 0, \\ 2 : \quad & -i_5 - j_2 - i_7 = 0, \\ 3 : \quad & -i_1 - i_6 + i_7 + i_8 = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Z NPK w pętłach (a), (b), (c), (d) oraz (e) mamy:

$$\begin{aligned} (a) : \quad & -e_1 - i_1 R_1 + i_6 R_6 = 0, \\ (b) : \quad & i_6 R_6 + i_3 R_3 + i_8 R_8 = 0, \\ (c) : \quad & i_8 R_8 + i_5 R_5 + e_5 - i_7 R_7 - e_7 = 0, \\ (d) : \quad & e_5 + i_5 R_5 - u_{j2} = 0, \\ (e) : \quad & i_3 R_3 + i_4 R_4 + e_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

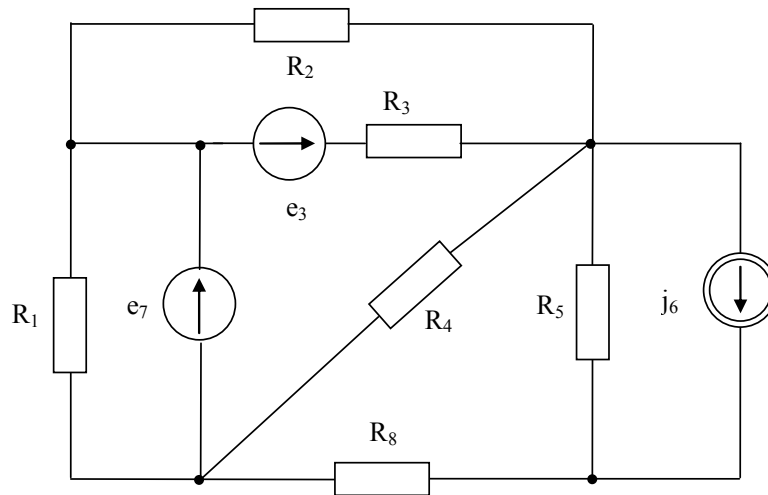
Powyższy układ równań liniowych z 8 niewiadomymi można rozwiązać ręcznie, np. metodą podstawiania, tak jak omówiono w przykładzie 1, lub wykorzystując narzędzia programistyczne typu: MAXIMA, MATLAB, a nawet zaawansowany kalkulator lub aplikację na smartfona. Tym razem, ze względu na dużą liczbę równań wykorzystamy odpowiedni program otrzymując: $i_1 = -1$ mA, $i_3 = -3$ mA, $i_4 = -3$ mA, $i_5 = -8$ mA, $i_6 = 1$ mA, $i_7 = -2$ mA, $i_8 = 2$ mA. Napięcie $u_{j2} = 4$ V.

2.1.3. Przykład 3

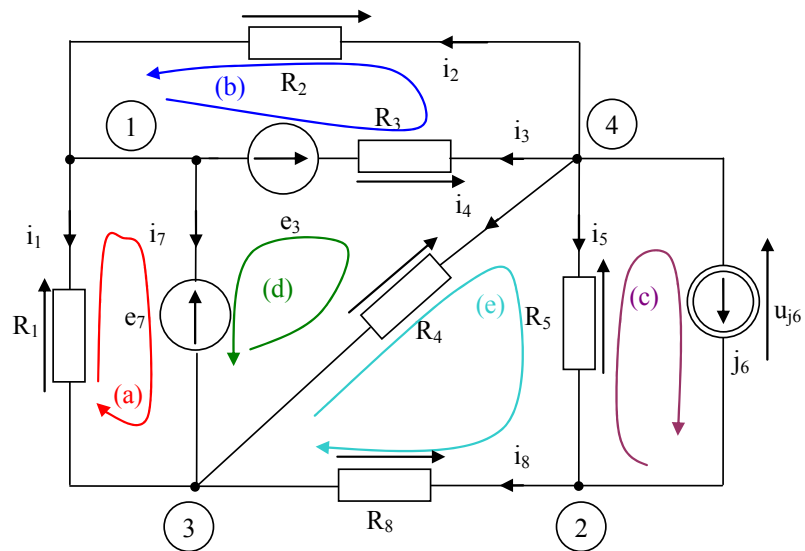
Ułóż niezależne prawa Kirchhoffa opisujące układ pokazanego na rys. 2.5. Następnie przyjmując dane: $e_3 = 5$ V, $e_7 = 4$ V, $j_6 = 5$ mA, $R_1 = 1$ k Ω , $R_2 = 1$ k Ω , $R_3 = 1$ k Ω , $R_4 = 1$ k Ω , $R_5 = 1$ k Ω , $R_8 = 1$ k Ω , wyznacz niewiadome występujące w układzie równań.

W układzie mamy 8 gałęzi (o numerach 1,...,8) i cztery węzły. W związku z tym liczba niezależnych PPK wynosi 3, a liczba niezależnych NPK – 5 (tyle ile oczek). Aby sformułować prawa Kirchhoffa wprowadzamy kierunki prądów i rysujemy strzałki napięć na elementach. Numerujemy też węzły oraz oznaczamy pętle i ich kierunki obiegu. Do ułożenia opisu obwodu i rozwiązania zadania przyjęto oznaczenia jak na rys. 2.6. Formułujemy PPK w węzłach 1, 2 oraz 3:

$$\begin{aligned} 1 : \quad & i_1 - i_2 - i_3 + i_7 = 0, \\ 2 : \quad & i_8 - j_6 - i_5 = 0, \\ 3 : \quad & -i_1 - i_7 - i_4 - i_8 = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$



Rys. 2.5. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 3



Rys. 2.6. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 3 z zaznaczonymi pętlami

Z NPK w pętłach (a), (b), (c), (d) oraz (e) mamy:

$$\begin{aligned}
 (a) : \quad & i_1 R_1 - e_7 = 0, \\
 (b) : \quad & e_3 + i_3 R_3 - i_2 R_2 = 0, \\
 (c) : \quad & i_5 R_5 - u_{j6} = 0, \\
 (d) : \quad & -e_7 - e_3 - i_3 R_3 + i_4 R_4 = 0, \\
 (e) : \quad & i_4 R_4 - i_5 R_5 - i_8 R_8 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Rozwiązując powyższy układ równań liniowych z 8 niewiadomymi przy wykorzystaniu odpowiedniego programu otrzymujemy: $i_1 = 4 \text{ mA}$, $i_2 = -1 \text{ mA}$, $i_3 = -6 \text{ mA}$, $i_4 = 3 \text{ mA}$, $i_5 = -1 \text{ mA}$, $i_7 = -11 \text{ mA}$, $i_8 = 4 \text{ mA}$. Napięcie $u_{j6} = -1 \text{ V}$.

2.2. Metoda napięć węzłowych

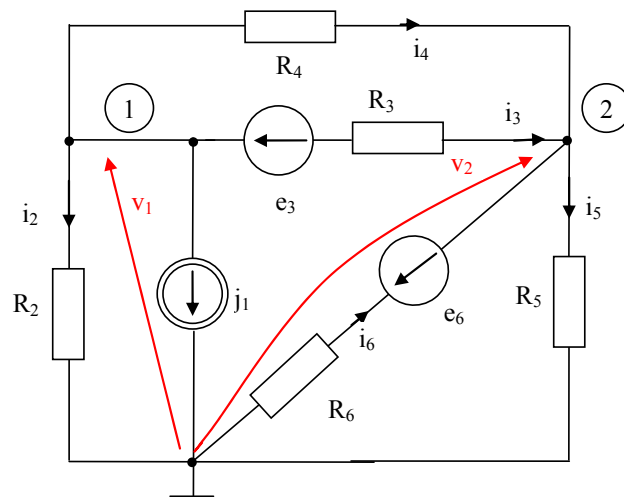
2.2.1. Przykład 1

Ułóż opis węzłowy układu pokazanego na rys. 2.1. Następnie przyjmując dane: $e_3 = 12 \text{ V}$, $e_6 = 8 \text{ V}$, $j_1 = 10 \text{ mA}$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 1 \text{ k}\Omega$, wyznacz prądy w poszczególnych gałęziach obwodu.

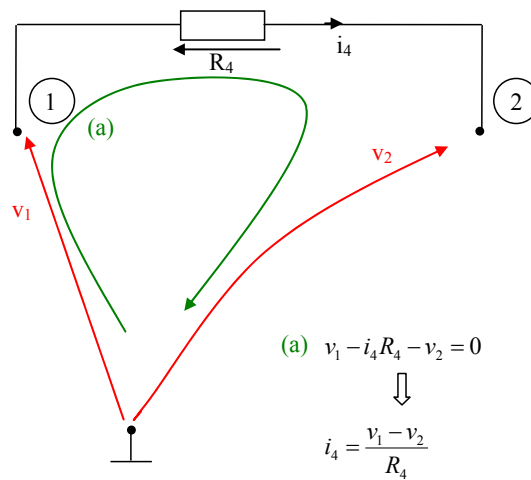
W celu utworzenia opisu węzłowego wybieramy i oznaczamy na schemacie węzeł odniesienia (masy) oraz nadajemy mu potencjał o wartości 0. Następnie wprowadzamy kierunki (odniesienia) prądów i formułujemy prądowe prawa Kirchhoffa w pozostałych węzłach. Zaznaczamy też strzałki napięć węzłowych (na czerwono na rysunku). Istnieją różne kombinacje wyboru węzła odniesienia oraz numeracji węzłów, które można wybrać do ułożenia opisu obwodu i rozwiązywania zadania. Tutaj opisana zostanie jedna, przykładowa, zaznaczona na rys. 2.7. Formułujemy PPK w węzłach 1, 2:

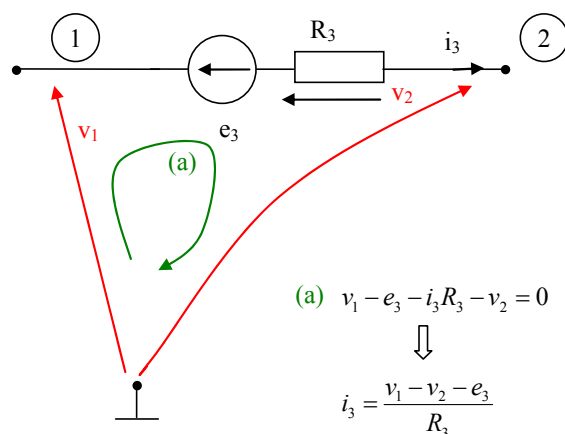
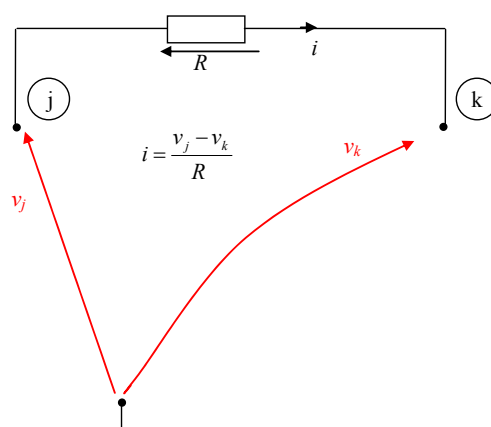
$$\begin{aligned}
 1 : \quad & i_2 + j_1 + i_3 + i_4 = 0, \\
 2 : \quad & -i_3 - i_4 + i_5 - i_6 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Następnie każdy prąd (poza znanym prądem źródłowym j_1) wyrażamy w funkcji wprowadzonych napięć węzłowych. Na przykład w celu wyznaczenia prądu i_4 rozpatrujemy fragment obwodu pokazany na rys. 2.8, a w celu wyznaczenia prądu i_3 fragment obwodu pokazany na rys. 2.9. Można wyprowadzić (i zapamiętać) prostą regułę wyznaczania prądów w gałęziach zawierających rezystory i rzeczywiste źródła napięciowe, czyli źródła złożone z szeregowego połączenia idealnego źródła napięcia i opornika. I tak, dla gałęzi z opornikiem (rys. 2.10), prąd opornika jest równy różnicy napięć węzłów, do których opornik jest dołączony (w kolejności: pierwszy węzeł to ten z którego prąd wypływa, drugi – ten, do którego prąd wpływa) podzielonej przez wartość rezystancji. Natomiast dla gałęzi z rzeczywistym źródłem napięcia (rys. 2.11), prąd jest równy różnicy napięć węzłów, do których źródło jest dołączone (w kolejności: pierwszy węzeł



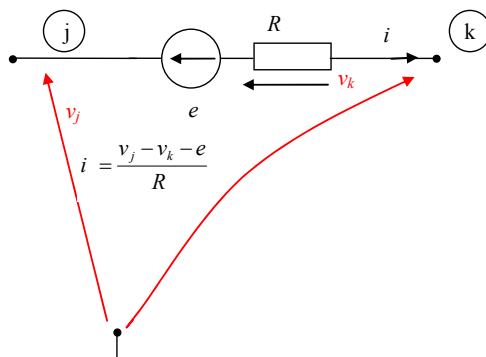
Rys. 2.7. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 1 z zaznaczonymi węzłami

Rys. 2.8. Fragment układu do wyznaczenia prądu i_4

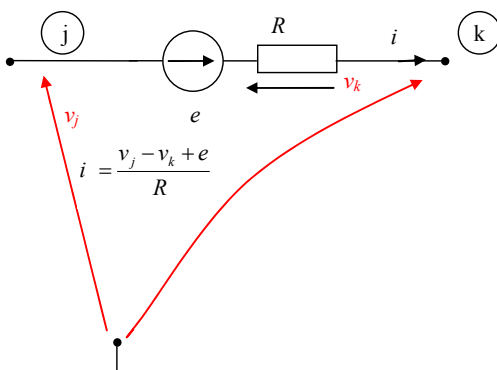
Rys. 2.9. Fragment układu do wyznaczenia prądu i_3 

Rys. 2.10. Reguła do wyznaczenia prądu opornika

to ten z którego prąd wypływa, drugi – ten, do którego prąd wpływa) pomniejszonej o wartość źródła, a całość dzielimy przez wartość rezystancji wewnętrznej źródła. Jeżeli jeden z węzłów wyżej wymienionych elementów jest węzłem odniesienia to wstawiamy w miejsce odpowiedniego napięcia węzłowego wartość zero (które oczywiście można pominąć w zapisie). Jeżeli w gałęzi z rzeczywistym źródłem napięcia (rys. 2.12), prąd ostrzałkujemy zgodnie ze strzałką napięcia wewnątrz symbolu źródła to prąd jest równy różnicy napięć węzłów, do których źródło jest dołączone (w kolejności: pierwszy węzeł to ten z którego prąd wypływa, drugi – ten, do którego prąd wpływa) **powiększonej** o wartość źródła, a całość dzielimy przez wartość rezystancji wewnętrznej źródła. Jeżeli jeden z węzłów wyżej wymienionych elementów jest węzłem odniesienia to wstawiamy w miejsce odpowiedniego napięcia węzłowego wartość zero. Stosując te reguły otrzy-



Rys. 2.11. Reguła do wyznaczenia prądu rzeczywistego źródła napięcia



Rys. 2.12. Reguła do wyznaczenia prądu rzeczywistego źródła napięcia przy innym ostrzażkowaniu

musimy opis węzłowy układu:

$$\begin{aligned}
 1 : \quad & \frac{v_1}{R_2} + j_1 + \frac{v_1 - v_2 - e_3}{R_3} + \frac{v_1 - v_2}{R_4} = 0, \\
 2 : \quad & -\frac{v_1 - v_2 - e_3}{R_3} - \frac{v_1 - v_2}{R_4} + \frac{v_2}{R_5} - \frac{-v_2 - e_6}{R_6} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

który można poddać dalszym przekształceniom matematycznym (np. w celu rozwiązania zadania lub zwięzłego zapisu). Łatwo możemy zauważyć mniejszą liczbę równań (tylko dwa) w porównaniu z opisem korzystającym bezpośrednio z praw Kirchhoffa (sześć równań w poprzednim podrozdziale).

Podstawiając dane liczbowe (prądy w mA, a rezystancje w kΩ) dochodzimy do układu równań liniowych o postaci

$$\begin{aligned} (1) : \quad & \frac{v_1}{1} + 10 + \frac{v_1 - v_2 - 12}{1} + \frac{v_1 - v_2}{1} = 0, \\ (2) : \quad & -\frac{v_1 - v_2 - 12}{1} - \frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_2}{1} - \frac{-v_2 - 8}{1} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Przykładowy sposób rozwiązania tego układu podano poniżej. Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} (1) : \quad & 3v_1 - 2v_2 = 2, \\ (2) : \quad & -2v_1 + 4v_2 = -20. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dzieląc równanie (2) przez dwa i dodając do równania (1) otrzymujemy

$$v_1 = -4 \text{ V}. \quad (2.21)$$

Następnie podstawiając do jednego z równań wyznaczamy

$$v_2 = -7 \text{ V}. \quad (2.22)$$

Na tej podstawie możemy wyznaczyć wszystkie prądy w układzie

$$i_2 = \frac{v_1}{R_2} = -4 \text{ mA}, \quad (2.23)$$

$$i_3 = \frac{v_1 - v_2 - e_3}{R_3} = -9 \text{ mA}, \quad (2.24)$$

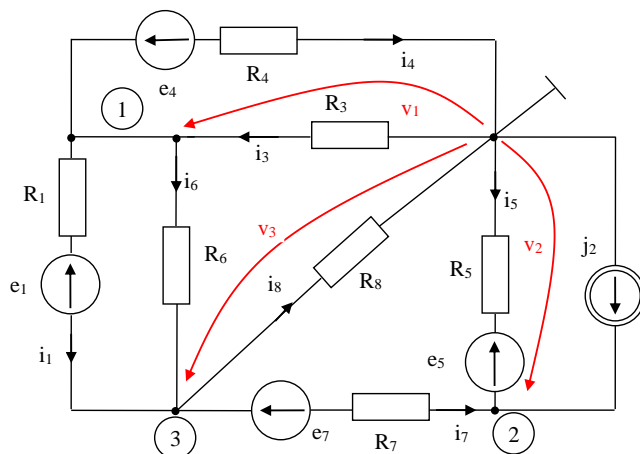
$$i_4 = \frac{v_1 - v_2}{R_4} = 3 \text{ mA}, \quad (2.25)$$

$$i_5 = \frac{v_2}{R_5} = -7 \text{ mA}, \quad (2.26)$$

$$i_6 = \frac{-v_2 - e_6}{R_6} = -1 \text{ mA} \quad (2.27)$$

oraz, oznaczone jak na rys. 2.2, napięcie

$$u_{j1} = v_1 = -4 \text{ V}. \quad (2.28)$$



Rys. 2.13. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 2 z zaznaczonymi węzłami

2.2.2. Przykład 2

Ułóż opis węzłowy układu pokazanego na rys. 2.3. Następnie przyjmując dane: $e_1 = 2\text{ V}$, $e_4 = 6\text{ V}$, $e_5 = 12\text{ V}$, $e_7 = 8\text{ V}$, $j_2 = 10\text{ mA}$, $R_1 = 1\text{ k}\Omega$, $R_3 = 1\text{ k}\Omega$, $R_4 = 1\text{ k}\Omega$, $R_5 = 1\text{ k}\Omega$, $R_6 = 1\text{ k}\Omega$, $R_7 = 1\text{ k}\Omega$, wyznacz prądy we wszystkich gałęziach obwodu.

Wybieramy i oznaczamy na schemacie węzeł odniesienia (masy) oraz nadajemy mu potencjał o wartości 0. Następnie wprowadzamy kierunki prądów i formułujemy prądowe prawa Kirchhoffa w pozostałych węzłach. Zaznaczamy też strzałki napięć węzłowych. Do ułożenia opisu obwodu przyjmujemy oznaczenia pokazane na rys. 2.13. Formułujemy PPK w węzłach 1, 2 oraz 3:

$$\begin{aligned} 1 : \quad & i_1 - i_3 + i_4 + i_6 = 0, \\ 2 : \quad & -i_5 - j_2 - i_7 = 0, \\ 3 : \quad & -i_1 - i_6 + i_7 + i_8 = 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Stosując podane wcześniej reguły otrzymujemy opis węzłowy układu:

$$\begin{aligned} 1 : \quad & \frac{v_1 - v_3 - e_1}{R_1} - \frac{-v_1}{R_3} + \frac{v_1 - e_4}{R_4} + \frac{v_1 - v_3}{R_6} = 0, \\ 2 : \quad & -\frac{-v_2 - e_5}{R_5} - j_2 - \frac{v_3 - v_2 - e_7}{R_7} = 0, \\ 3 : \quad & -\frac{v_1 - v_3 - e_1}{R_1} - \frac{v_1 - v_3}{R_6} + \frac{v_3 - v_2 - e_7}{R_7} + \frac{v_3}{R_8} = 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Zauważamy mniejszą liczbę równań (tylko trzy) w porównaniu z opisem korzystającym bezpośrednio z praw Kirchhoffa (osiem równań w poprzednim podrozdziale).

Podstawiając dane liczbowe (prądy w mA, a rezystancje w kΩ) dochodzimy do układu trzech równań liniowych o postaci

$$\begin{aligned} (1) : \quad & \frac{v_1 - v_3 - 2}{1} - \frac{-v_1}{1} + \frac{v_1 - 6}{1} + \frac{v_1 - v_3}{1} = 0, \\ (2) : \quad & -\frac{-v_2 - 12}{1} - 10 - \frac{v_3 - v_2 - 8}{1} = 0, \\ (3) : \quad & -\frac{v_1 - v_3 - 2}{1} - \frac{v_1 - v_3}{1} + \frac{v_3 - v_2 - 8}{1} + \frac{v_3}{1} = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Przykładowy sposób rozwiązania tego układu podano poniżej. Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} (1) : \quad & 4v_1 - 2v_3 = 8, \\ (2) : \quad & 2v_2 - v_3 = -10, \\ (3) : \quad & -2v_1 - v_2 + 4v_3 = 6. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dzielimy równanie (1) przez dwa i wyznaczamy z niego $v_3 = 2v_1 - 4$ oraz postawiamy do pozostałych równań otrzymując

$$\begin{aligned} (2) : \quad & -2v_1 + 2v_2 = -14, \\ (3) : \quad & 6v_1 - v_2 = 22. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dzielimy równanie (2) przez dwa i dodajemy do równania (3) otrzymując

$$5v_1 = 15 \text{ V}. \quad (2.34)$$

Stąd

$$v_1 = 3 \text{ V}. \quad (2.35)$$

Następnie podstawiając wstecz wyznaczamy

$$v_2 = -4 \text{ V} \quad (2.36)$$

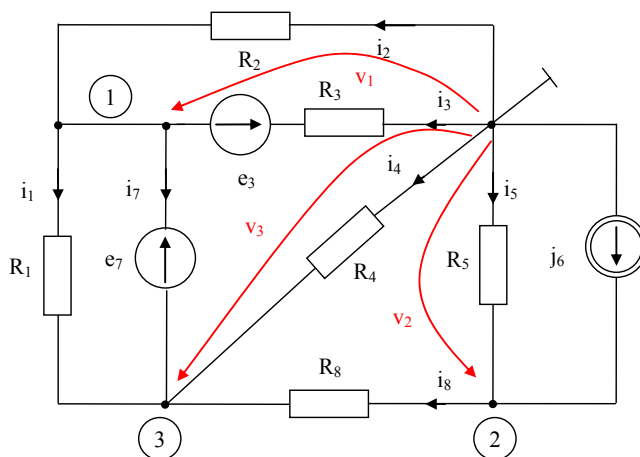
oraz

$$v_3 = 2 \text{ V}. \quad (2.37)$$

Na tej podstawie możemy wyznaczyć wszystkie prądy w układzie

$$i_1 = \frac{v_1 - v_3 - e_1}{R_1} = -1 \text{ mA}, \quad (2.38)$$

$$i_3 = \frac{-v_1}{R_3} = -3 \text{ mA}, \quad (2.39)$$



Rys. 2.14. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 3 z zaznaczonymi węzłami

$$i_4 = \frac{v_1 - e_4}{R_4} = -3 \text{ mA}, \quad (2.40)$$

$$i_5 = \frac{-v_2 - e_5}{R_5} = -8 \text{ mA}, \quad (2.41)$$

$$i_6 = \frac{v_1 - v_3}{R_6} = 1 \text{ mA} \quad (2.42)$$

$$i_7 = \frac{v_3 - v_2 - e_7}{R_7} = -2 \text{ mA} \quad (2.43)$$

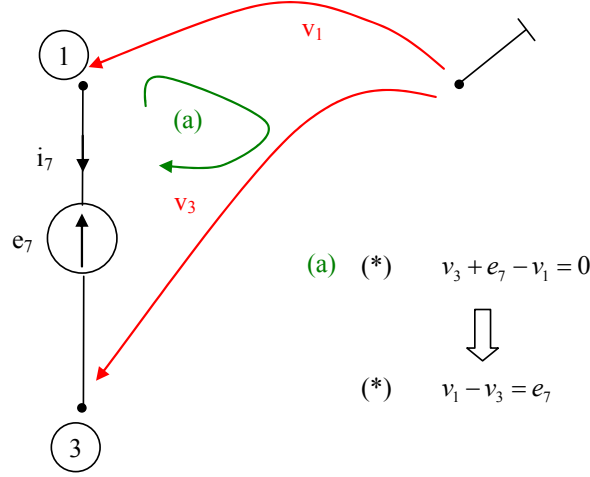
oraz, ostrzałkowane jak na rys. 2.4, napięcie

$$u_{j2} = -v_2 = 4 \text{ V.} \quad (2.44)$$

2.2.3. Przykład 3

Ułóż opis węzłowy układu pokazanego na rys. 2.5. Następnie przyjmując dane: $e_3 = 5 \text{ V}$, $e_7 = 4 \text{ V}$, $j_6 = 5 \text{ mA}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_8 = 1 \text{ k}\Omega$, wyznacz prądy we wszystkich gałęziach obwodu.

Wybieramy i oznaczamy na schemacie węzeł odniesienia (masy) oraz nadajemy mu potencjał o wartości 0. Wprowadzamy kierunki prądów, formułujemy prądowe prawa Kirchhoffa w pozostałych węzłach oraz zaznaczamy strzałki napięć węzłowych. Do ułożenia opisu obwodu wybrano najpierw oznaczenia jak na rys. 2.14. Formułujemy PPK



Rys. 2.15. Fragment układu z idealnym źródłem napięcia

w węzłach 1, 2 oraz 3:

$$\begin{aligned}
 1 : \quad & i_1 - i_2 - i_3 + i_7 = 0, \\
 2 : \quad & i_8 - j_6 - i_5 = 0, \\
 3 : \quad & -i_1 - i_7 - i_4 - i_8 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

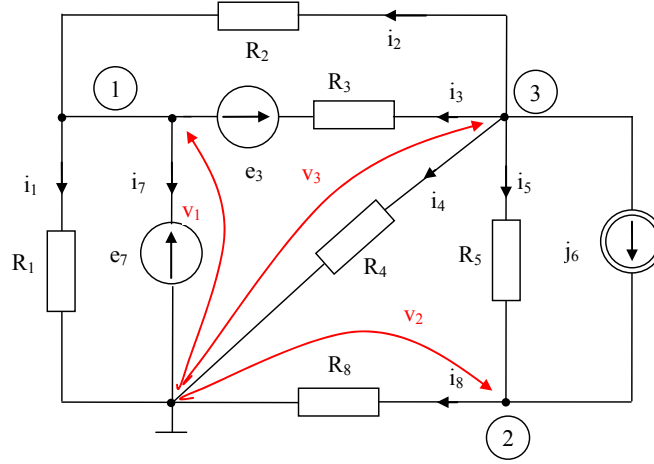
W układzie tym między węzłami 1 oraz 3 znajduje się idealne źródło napięcia e_7 , którego prąd (oznaczony jako i_7) jest dodatkową niewiadomą. Aby liczba równań była równa liczbie niewiadomych (v_1, v_2, v_3, i_7) musimy dopisać jedno równanie dodatkowe. Równanie to jest napięciowym prawem Kirchhoffa zapisanym w pętli pokazanej na rys. 2.15. Jeżeli w układzie występowałoby więcej idealnych źródeł napięcia (niezależnych lub sterowanych) to prąd każdego z nich jest dodatkową niewiadomą i każde źródło wymaga dopisania równania dodatkowego. Jest to tak zwana **zmodyfikowana metoda węzłowa**. Stosując odpowiednie reguły do pozostałych prądów otrzymujemy opis:

$$\begin{aligned}
 1 : \quad & \frac{v_1 - v_3}{R_1} - \frac{-v_1}{R_2} - \frac{-v_1 - e_3}{R_3} + i_7 = 0, \\
 2 : \quad & \frac{v_2 - v_3}{R_8} - j_6 - \frac{-v_2}{R_5} = 0, \\
 3 : \quad & -\frac{v_1 - v_3}{R_1} - i_7 - \frac{-v_3}{R_4} - \frac{v_2 - v_3}{R_8} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

który uzupełniamy równaniem dodatkowym

$$v_3 + e_7 - v_1 = 0. \tag{2.47}$$

Powyższe równania tworzą zmodyfikowany opis węzłowy rozpatrywanego układu.



Rys. 2.16. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 3 dla innego wyboru węzła odniesienia

Do ułożenia opisu obwodu wybierzemy obecnie oznaczenia jak na rys. 2.16. Formułujemy PPK w węzłach 1, 2 oraz 3:

$$\begin{aligned}
 1 : \quad & i_1 - i_2 - i_3 + i_7 = 0, \\
 2 : \quad & i_8 - j_6 - i_5 = 0, \\
 3 : \quad & i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + j_6 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

W układzie tym między węzłami 1 oraz odniesienia znajduje się idealne źródło napięcia e_7 , którego prąd (oznaczony jako i_7) jest dodatkową niewiadomą. Dopisujemy jedno równanie dodatkowe, które w tym przypadku ma postać: $v_1 = e_7$. Stosując odpowiednie reguły do pozostałych prądów otrzymujemy opis:

$$\begin{aligned}
 1 : \quad & \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_3 - v_1}{R_2} - \frac{v_3 - v_1 - e_3}{R_3} + i_7 = 0, \\
 2 : \quad & \frac{v_2}{R_8} - j_6 - \frac{v_3 - v_2}{R_5} = 0, \\
 3 : \quad & \frac{v_3 - v_1}{R_2} + \frac{v_3 - v_1 - e_3}{R_3} + \frac{v_3}{R_4} + \frac{v_3 - v_2}{R_5} + j_6 = 0,
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

który uzupełniamy równaniem dodatkowym

$$v_1 = e_7. \tag{2.50}$$

Powyższe równania tworzą zmodyfikowany opis węzłowy rozpatrywanego układu.

Podstawiając dane liczbowe (prądy w mA, a rezystancje w kΩ) dochodzimy do układu trzech równań liniowych o postaci

$$\begin{aligned}
 (1) : \quad & \frac{v_1}{1} - \frac{v_3 - v_1}{1} - \frac{v_3 - v_1 - 5}{1} + i_7 = 0, \\
 (2) : \quad & \frac{v_2}{1} - 5 - \frac{v_3 - v_2}{1} = 0, \\
 (3) : \quad & \frac{v_3 - v_1}{1} + \frac{v_3 - v_1 - 5}{1} + \frac{v_3}{1} + \frac{v_3 - v_2}{1} + 5 = 0, \\
 (4) : \quad & v_1 = 4.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Przykładowy sposób rozwiązania tego układu podano poniżej. Po podstawieniu równania (4) i uporządkowaniu otrzymujemy trzy równania z trzema niewiadomymi v_2 , v_3 oraz i_7

$$\begin{aligned}
 (1) : \quad & -2v_3 + i_7 = -17, \\
 (2) : \quad & 2v_2 - v_3 = 5, \\
 (3) : \quad & -2v_2 + 8v_3 = 16.
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Dodajemy równanie (2) do równania (3) otrzymując

$$7v_3 = 21 \text{ V.} \tag{2.53}$$

Stąd

$$v_3 = 3 \text{ V.} \tag{2.54}$$

Następnie podstawiając wstecz wyznaczamy

$$v_2 = 4 \text{ V} \tag{2.55}$$

oraz

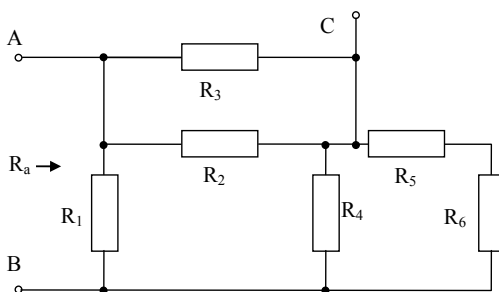
$$i_7 = 11 \text{ mA.} \tag{2.56}$$

Na tej podstawie możemy wyznaczyć pozostałe prądy w układzie

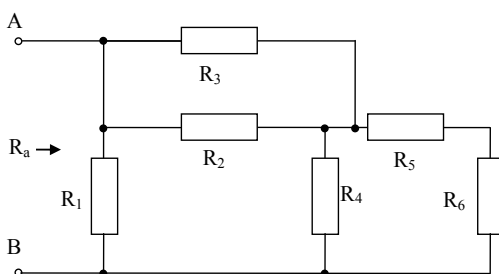
$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = 4 \text{ mA}, \tag{2.57}$$

$$i_2 = \frac{v_3 - v_1}{R_2} = -1 \text{ mA}, \tag{2.58}$$

$$i_3 = \frac{v_3 - v_1 - e_3}{R_3} = -6 \text{ mA}, \tag{2.59}$$



Rys. 2.17. Połączenie rezystorów rozpatrywane w przykładzie 1



Rys. 2.18. Przykładowe połączenie rezystorów po usunięciu zacisku C

$$i_4 = \frac{v_4}{R_4} = 3 \text{ mA}, \quad (2.60)$$

$$i_5 = \frac{v_3 - v_2}{R_5} = -1 \text{ mA} \quad (2.61)$$

$$i_8 = \frac{v_2}{R_8} = 4 \text{ mA}. \quad (2.62)$$

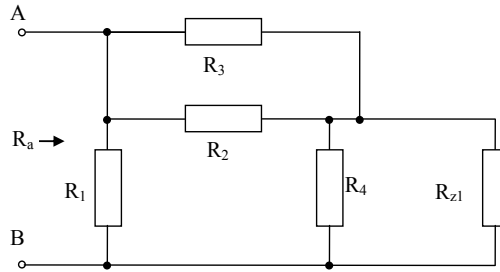
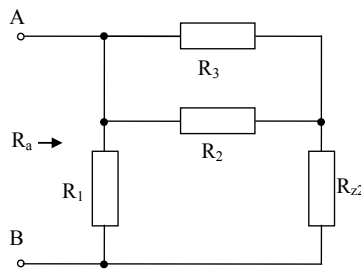
2.3. Połączenia rezystorów – dzielnik prądu i napięcia

2.3.1. Przykład 1

Wyznacz rezystancję zastępczą układu pokazanego na rys. 2.17 widzianą z zacisków AB (R_a) oraz AC (R_b). Dane: $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_3 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_5 = R_6 = 1 \text{ k}\Omega$.

Rezystancja zastępcza widziana z zacisków AB

Usuamy zacisk C nieistotny z punktu widzenia rozpatrywanego problemu otrzymując układ pokazany na rys. 2.18.

Rys. 2.19. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_a po I przekształceniuRys. 2.20. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_a po II przekształceniu

Wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_5 i R_6 , którą oznaczamy przez R_{z1} korzystając ze wzoru (1.4)

$$R_{z1} = R_5 + R_6 = 2 \text{ k}\Omega. \quad (2.63)$$

W rezultacie otrzymujemy układ pokazany na rys. 2.19. Następnie wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia równoległego elementów R_4 i R_{z1} , którą oznaczmy przez R_{z2} korzystając ze wzoru (1.10)

$$R_{z2} = \frac{R_{z1}R_4}{R_{z1} + R_4} = 1 \text{ k}\Omega. \quad (2.64)$$

Przekształcony obwód pokazano na rys. 2.20.

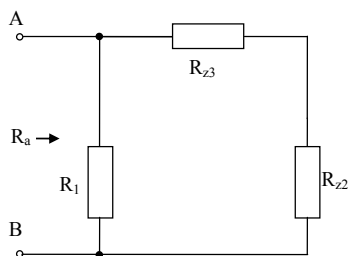
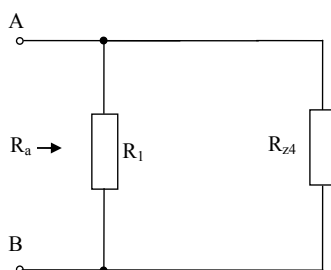
W kolejnym kroku wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia równoległego elementów R_2 i R_3 , którą oznaczmy przez R_{z3}

$$R_{z3} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = 2 \text{ k}\Omega, \quad (2.65)$$

otrzymując układ z rys. 2.21.

Wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_{z2} i R_{z3} , którą oznaczamy przez R_{z4}

$$R_{z4} = R_{z2} + R_{z3} = 3 \text{ k}\Omega, \quad (2.66)$$

Rys. 2.21. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_a po III przekształceniuRys. 2.22. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_a po IV przekształceniu

a następnie korzystając z obwodu pokazanego na rys. 2.22 wyznaczamy rezystancję zastępczą R_a , która jest połączeniem równoległym rezystorów R_1 i R_{z4} , a jej wartość wynosi

$$R_a = \frac{R_{z4}R_1}{R_{z4} + R_1} = 1.5 \text{ k}\Omega, \quad (2.67)$$

Rezystancja zastępcza widziana z zacisków AC

Usuujemy zacisk B nieistotny z punktu widzenia rozpatrywanego problemu otrzymując układ pokazany na rys. 2.23.

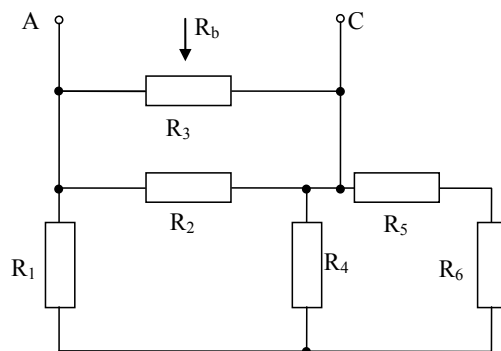
Podobnie jak w poprzednim punkcie wyznaczamy najpierw rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_5 i R_6 , którą oznaczamy przez R_{z1}

$$R_{z1} = R_5 + R_6 = 2 \text{ k}\Omega. \quad (2.68)$$

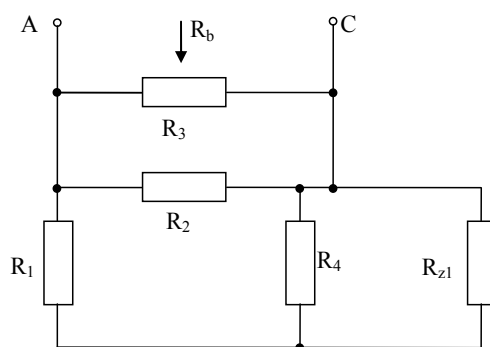
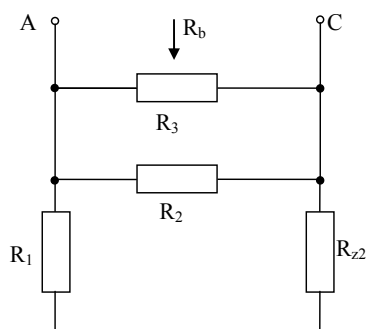
W rezultacie otrzymujemy układ pokazany na rys. 2.24. Następnie wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia równoległego elementów R_4 i R_{z1}

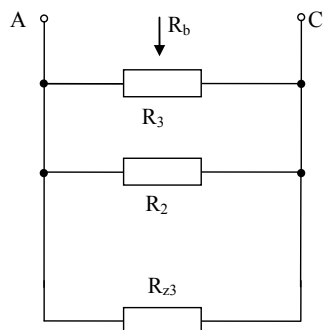
$$R_{z2} = \frac{R_{z1}R_4}{R_{z1} + R_4} = 1 \text{ k}\Omega. \quad (2.69)$$

Przekształcony obwód pokazano na rys. 2.25.



Rys. 2.23. Przykładowe połączenie rezystorów po usunięciu zacisku B

Rys. 2.24. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_b po I przekształceniuRys. 2.25. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_b po II przekształceniu

Rys. 2.26. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_b po III przekształceniu

Wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_{z2} i R_1 , którą oznaczamy przez R_{z3}

$$R_{z3} = R_{z2} + R_1 = 4 \text{ k}\Omega, \quad (2.70)$$

a następnie korzystając z obwodu pokazanego na rys. 2.26 wyznaczamy rezystancję zastępczą R_b , która jest połączeniem równoległym trzech rezystorów: R_2 , R_3 i R_{z3}

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{z3}} = 0,75 \text{ mS}, \quad (2.71)$$

stąd $R_b = \frac{4}{3} \text{ k}\Omega$.

2.3.2. Przykład 2

Wyznacz rezystancję zastępczą układu pokazanego na rys. 2.17 widzianą z zacisków AB (R_a) w przypadku zwarcia zacisków AC.

Rezystancja zastępcza widziana z zacisków AB

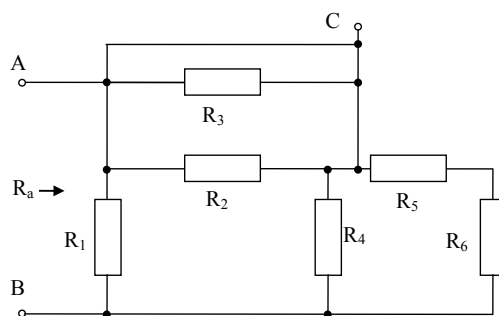
Zwierając zaciski AC otrzymujemy układ pokazany na rys. 2.27. Ponieważ równolegle do zwory AC włączone są rezystory R_2 oraz R_3 (są więc zwarte) usuwamy je z układu co prowadzi do obwodu z rys. 2.28. Następnie, podobnie jak w poprzednim przykładzie wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_5 i R_6

$$R_{z1} = R_5 + R_6 = 2 \text{ k}\Omega. \quad (2.72)$$

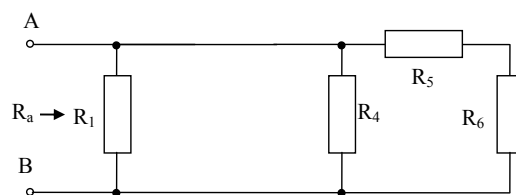
W rezultacie otrzymujemy układ pokazany na rys. 2.29, a następnie wyznaczamy rezystancję zastępczą R_a , która jest połączeniem równoległym trzech rezystorów: R_1 , R_4 i R_{z1}

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{z1}} = \frac{4}{3} \text{ mS}, \quad (2.73)$$

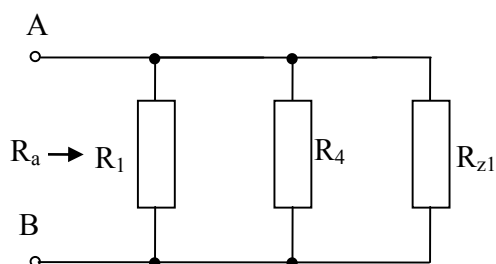
stąd $R_a = 0,75 \text{ k}\Omega$.

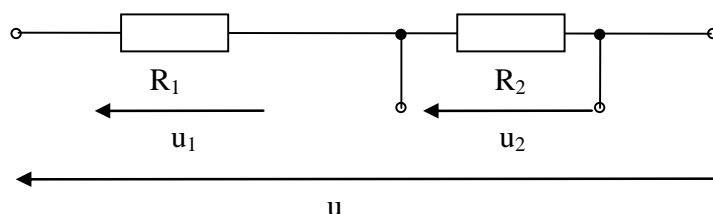


Rys. 2.27. Przykładowe połączenie rezystorów po zwarcie zacisków AC



Rys. 2.28. Przykładowe połączenie rezystorów usunięciu zwartych rezystorów

Rys. 2.29. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_b po I przekształceniu



Rys. 2.30. Przykładowy dzielnik napięcia

2.3.3. Przykład 3

Wyznacz rezystancję rezystorów R_1 i R_2 w układzie dzielnika napięcia z rys. 2.30, tak, aby napięcie $u_2 = 20 \text{ V}$. Oblicz moc wydzielaną na każdym rezystorze. Dane: $u = 100 \text{ V}$, $i = 10 \text{ mA}$.

Metoda I

Z napięciowego prawa Kirchhoffa mamy

$$u_1 = u - u_2 = 80 \text{ V}. \quad (2.74)$$

Znając napięcia na rezystorach oraz prądy przez nie płynące wartości rezystancji wyznaczamy z prawa Ohma (1.2):

$$R_1 = \frac{u_1}{i} = 8 \text{ k}\Omega, \quad (2.75)$$

$$R_2 = \frac{u_2}{i} = 2 \text{ k}\Omega. \quad (2.76)$$

Następnie ze wzoru na moc (1.3) otrzymujemy

$$P_{R_1} = u_1 i = R_1 i^2 = 0,8 \text{ W}, \quad (2.77)$$

$$P_{R_2} = u_2 i = R_2 i^2 = 0,2 \text{ W}. \quad (2.78)$$

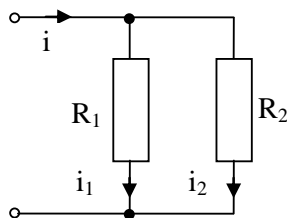
Metoda II

Rezystory R_1 oraz R_2 są połączone szeregowo, a ich rezystancja zastępcza R_z wynosi

$$R_z = R_1 + R_2 = \frac{u}{i} = 10 \text{ k}\Omega. \quad (2.79)$$

Jak wiemy dla dzielnika napięcia obowiązuje zależność

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad (2.80)$$



Rys. 2.31. Przykładowy dzielnik prądu

gdzie

$$u_1 = u - u_2 = 80 \text{ V}. \quad (2.81)$$

A zatem

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{80 \text{ V}}{20 \text{ V}} = 4. \quad (2.82)$$

Rozwiązując układ równań (2.79), (2.82) otrzymujemy: $R_1 = 8 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$. Następnie podobnie jak w **metodzie I** obliczamy moce.

2.3.4. Przykład 4

Wyznacz rezystancję rezystorów R_1 i R_2 w układzie dzielnika prądu pokazanego na rys. 2.31, tak, aby prąd $i_2 = 2 \text{ mA}$. Dane: $u = 10 \text{ V}$, $i = 10 \text{ mA}$.

Metoda I

Z prądowego prawa Kirchhoffa mamy

$$i_1 = i - i_2 = 8 \text{ mA}. \quad (2.83)$$

Znając napięcie na rezystorach (jednakowe i równe 10 V oraz prądy przez nie płynące wartości rezystancji wyznaczamy z prawa Ohma (1.2):

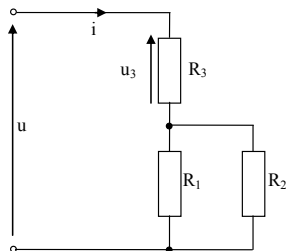
$$R_1 = \frac{u}{i_1} = 1,25 \text{ k}\Omega, \quad (2.84)$$

$$R_2 = \frac{u}{i_2} = 5 \text{ k}\Omega. \quad (2.85)$$

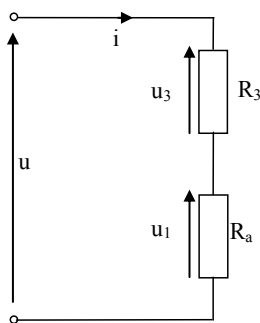
Metoda II

Rezystory R_1 oraz R_2 są połączone równolegle, a ich rezystancja zastępcza R_z wynosi:

$$R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{u}{i} = 1 \text{ k}\Omega. \quad (2.86)$$



Rys. 2.32. Przykładowy układ liniowy



Rys. 2.33. Przykładowy układ liniowy

Jak wiemy dla dzielnika prądu obowiązuje zależność

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (2.87)$$

gdzie

$$i_1 = i - i_2 = 8 \text{ mA}. \quad (2.88)$$

A zatem

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{8 \text{ mA}}{2 \text{ mA}} = 4. \quad (2.89)$$

Rozwiązując układ równań (2.86), (2.89) otrzymujemy: $R_1 = 1,25 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$.

2.3.5. Przykład 5

Wyznacz rezystancję rezystorów R_1 i R_3 w układzie z rys. 2.32, tak, aby napięcie $u = 60 \text{ V}$, $u_3 = 45 \text{ V}$, $i = 1 \text{ mA}$. Wartość rezystora $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$. Oblicz moc wydzielaną na każdym rezystorze, moc pobieraną z zasilania oraz energię pobieraną z zasilania w czasie 10 minut.

Wyznamy najpierw rezystancję zastępczą połączenia równoległego oporników R_1 i R_2 (rys. 2.33). Oznaczmy ją jako R_a i otrzymujemy

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{50000 R_1}{R_1 + 50000}. \quad (2.90)$$

Z napięciowego prawa Kirchhoffa mamy

$$u_1 = u - u_3 = 15 \text{ V}. \quad (2.91)$$

Znając napięcie na rezystorze R_3 oraz prąd przez niego płynący wartość rezystancji wyznaczamy z prawa Ohma

$$R_3 = \frac{u_3}{i} = 45 \text{ k}\Omega. \quad (2.92)$$

Znając napięcie u_1 na rezystorze R_2 oraz wartość R_2 prąd przez niego płynący (ostrzałkowany przeciwnie do napięcia) wyznaczamy z prawa Ohma

$$i_2 = \frac{u_1}{R_2} = 0,3 \text{ mA}. \quad (2.93)$$

Następnie z prądowego prawa Kirchhoffa wyznaczamy prąd i_1 , płynący przez R_1 , ostrzałkowany do dołu

$$i_1 = i - i_2 = 0,7 \text{ mA}. \quad (2.94)$$

Finalnie z prawa Ohma wyznaczamy rezystancję R_1 jako

$$R_1 = \frac{u_1}{i_1} = 21,429 \text{ k}\Omega. \quad (2.95)$$

Następnie ze wzoru na moc (1.3) otrzymujemy

$$P_{R_1} = u_1 i_1 = R_1 i_1^2 = 10,5 \text{ mW}, \quad (2.96)$$

$$P_{R_2} = u_1 i_2 = R_2 i_2^2 = 4,5 \text{ mW}, \quad (2.97)$$

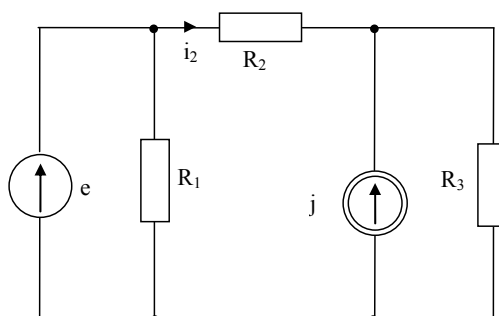
$$P_{R_3} = u_3 i = R_i i^2 = 45 \text{ mW}. \quad (2.98)$$

Moc pobierana ze źródła wynosi

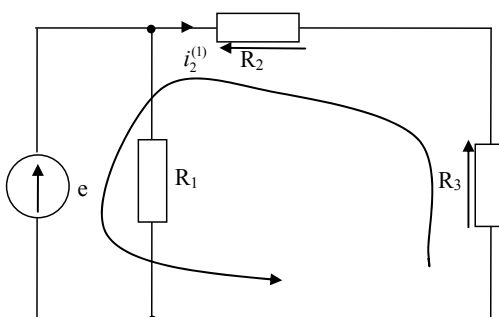
$$P = ui = 60 \text{ mW}, \quad (2.99)$$

a energia pobierana w czasie 10 minut (600 s) przybiera wartość

$$w = Pt = 60 \cdot 10^{-3} \cdot 600 = 36 \text{ J}. \quad (2.100)$$



Rys. 2.34. Obwód liniowy analizowany w przykładzie 1 metodą superpozycji

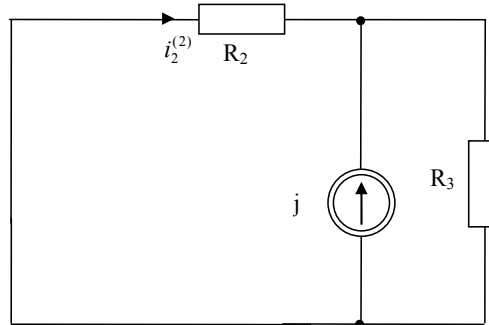
Rys. 2.35. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$

2.4. Metoda superpozycji

2.4.1. Przykład 1

Narysuj układy, z których należy skorzystać w obwodzie przedstawionym na rys. 2.34 w celu obliczenia prądu gałęziowego i_2 metodą superpozycji. Wyznacz ten prąd przyjmując następujące dane: $e = 100 \text{ V}$, $j = 10 \text{ mA}$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$.

Ponieważ układ zawiera dwa niezależne źródła energii (jedno napięciowe i jedno prądowe), zgodnie z klasyczną wersją metody superpozycji, poszukiwany prąd i_2 jest sumą dwóch prądów $i_2^{(1)}$ oraz $i_2^{(2)}$, płynących w układach pokazanych odpowiednio na rysunkach rys. 2.35, rys. 2.36. Schematy przedstawione na tych rysunkach powstały wskutek usunięcia źródeł energii, zgodnie z regułą: zaciski idealnych źródeł napięciowych zwieramy, a prądowych rozwieramy. Należy zauważyć, że zwierając zaciski źródła e sprawiamy, że zaciski opornika R_1 są zwarte, a zatem rezystor ten usuwamy ze schematu i nie występuje on na rys. 2.36.

Rys. 2.36. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$

Z napięciowego prawa Kirchhoffa zapisanego dla zaznaczonej na rys. 2.35 pętli, po przekształceniu, otrzymujemy

$$i_2^{(1)} = \frac{e}{R_2 + R_3} = \frac{100}{20000} = 5 \text{ mA}. \quad (2.101)$$

Z dzielnika prądu pokazanego na rys. 2.36 (uwzględniając orientację prądu $i_2^{(2)}$ względem j) mamy

$$i_2^{(2)} = -j \frac{R_3}{R_2 + R_3} = -10 \frac{10000}{20000} = -5 \text{ mA}. \quad (2.102)$$

A zatem prąd i_2 w układzie oryginalnym wynosi

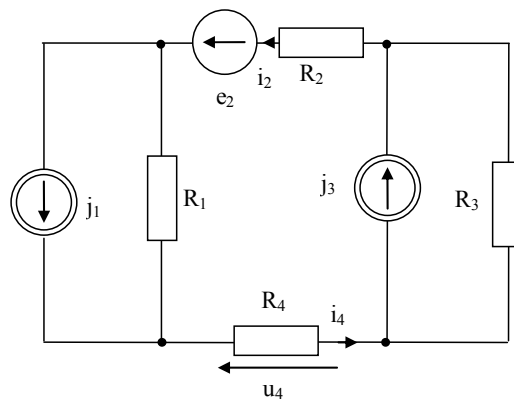
$$i_2 = i_2^{(1)} + i_2^{(2)} = 5 \text{ mA} - 5 \text{ mA} = 0. \quad (2.103)$$

2.4.2. Przykład 2

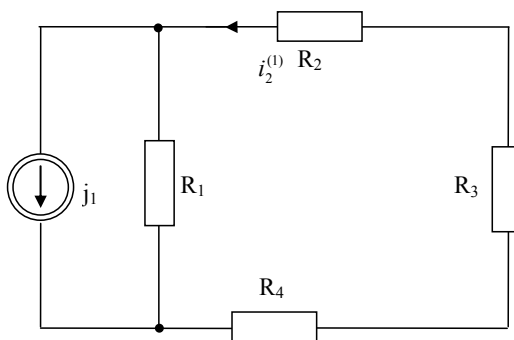
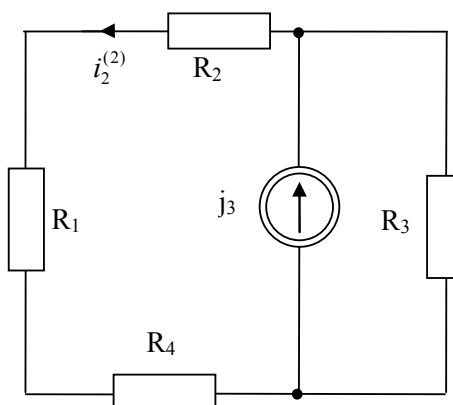
Narysuj układy, z których należy skorzystać w obwodzie przedstawionym na rys. 2.37 w celu obliczenia prądu gałęziowego i_2 metodą superpozycji. Wyznacz ten prąd przyjmując następujące dane: $e_2 = 10 \text{ V}$, $j_1 = 10 \text{ mA}$, $j_3 = 8 \text{ mA}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$. Na podstawie i_2 wyznacz u_4 .

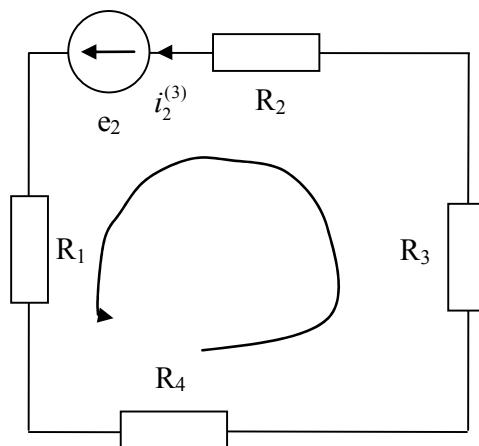
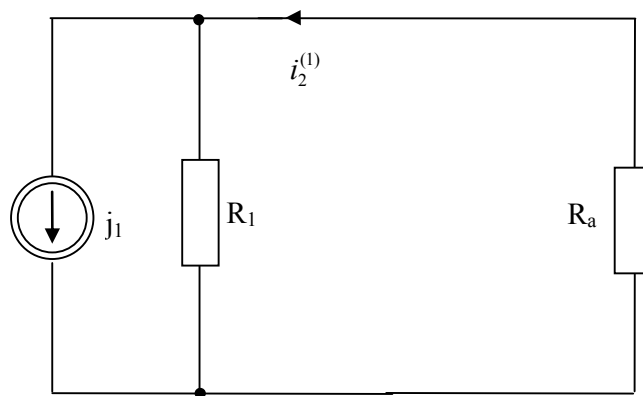
Ponieważ układ zawiera trzy niezależne źródła energii (jedno napięciowe i dwa prądowe), zgodnie z klasyczną wersją metody superpozycji, poszukiwany prąd i_2 jest sumą dwóch prądów $i_2^{(1)}$, $i_2^{(2)}$ oraz $i_2^{(3)}$, płynących w układach pokazanych odpowiednio na rysunkach rys. 2.38, rys. 2.39 oraz rys. 2.40. Schematy przedstawione na tych rysunkach powstały wskutek usunięcia źródeł energii, zgodnie z regułą: zaciski idealnych źródeł napięciowych zwieramy, a prądowych rozwieramy.

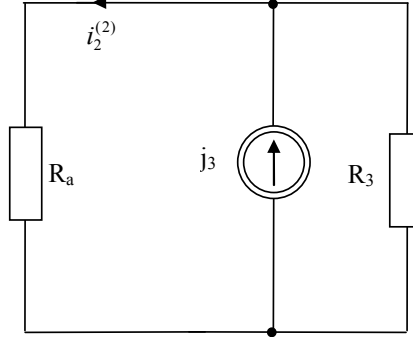
Układ z rys. 2.38 przedstawimy w równoważnej postaci pokazanej na rys. 2.41, gdzie R_a reprezentuje zastępczą rezystancję szeregowo połączonych rezystorów R_2 , R_3 oraz R_4 i wynosi $R_a = R_2 + R_3 + R_4 = 3 \text{ k}\Omega$. Z dzielnika prądu pokazanego na rys. 2.41



Rys. 2.37. Obwód liniowy analizowany w przykładzie 2 metodą superpozycji

Rys. 2.38. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$ Rys. 2.39. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$

Rys. 2.40. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$ Rys. 2.41. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$

Rys. 2.42. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$

(uwzględniając orientację prądu $i_2^{(1)}$ względem j_1) mamy

$$i_2^{(1)} = j_1 \frac{R_1}{R_1 + R_a} = 10 \frac{1000}{4000} = 2,5 \text{ mA}. \quad (2.104)$$

Postępując podobnie dla przekształconego układu z rys. 2.39 przedstawionego na rys. 2.42 wyznaczamy najpierw rezystancję R_a reprezentującą zastępczą rezystancję szeregowo połączonych rezystorów R_1 , R_2 oraz R_4 , jako $R_a = R_1 + R_2 + R_4 = 3 \text{ k}\Omega$. Z dzielnika prądu pokazanego na rys. 2.42 (uwzględniając orientację prądu $i_2^{(2)}$ względem j_3) mamy

$$i_2^{(2)} = j_3 \frac{R_3}{R_3 + R_a} = 8 \frac{1000}{4000} = 2 \text{ mA}. \quad (2.105)$$

Z napięciowego prawa Kirchhoffa zapisanego dla zaznaczonej na rys. 2.40 pętli, po przekształceniu, otrzymujemy

$$i_2^{(3)} = \frac{e_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{10}{4000} = 2,5 \text{ mA}. \quad (2.106)$$

A zatem prąd i_2 w układzie oryginalnym wynosi

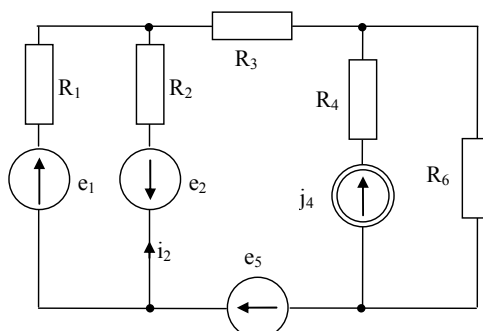
$$i_2 = i_2^{(1)} + i_2^{(2)} + i_2^{(3)} = 2,5 \text{ mA} + 2 \text{ mA} + 2,5 \text{ mA} = 7 \text{ mA}. \quad (2.107)$$

Na podstawie prądowych praw Kirchhoffa, zapisanych dla górnego i dolnego węzła z prawej strony w układzie oryginalnym (przyjmując ostrzałkowanie prądu i_3 , płynącego przez R_3 do dołu) mamy:

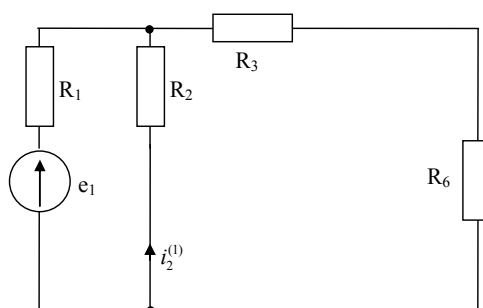
$$i_2 = j_3 - i_3, \quad (2.108)$$

$$i_4 = j_3 - i_3, \quad (2.109)$$

a zatem $i_4 = i_2 = 7 \text{ mA}$. Z prawa Ohma mamy $u_4 = R_4 i_4 = 7 \text{ V}$.



Rys. 2.43. Obwód liniowy rozpatrywany w przykładzie 3

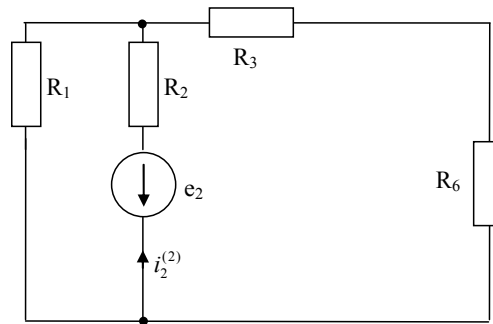
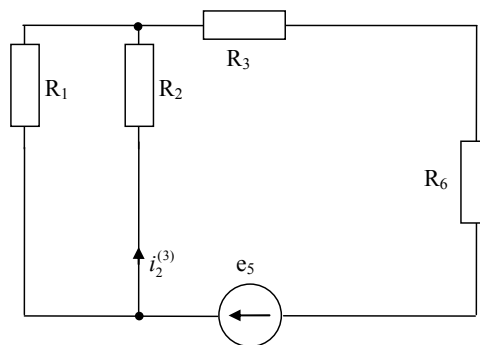
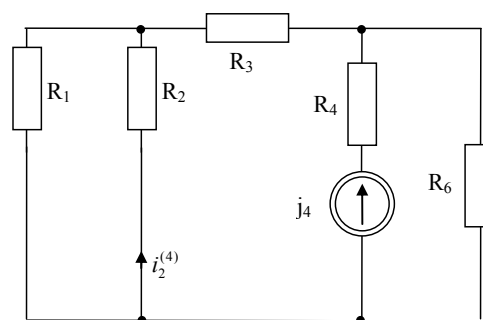
Rys. 2.44. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$

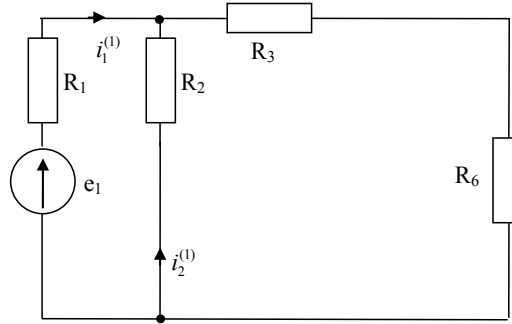
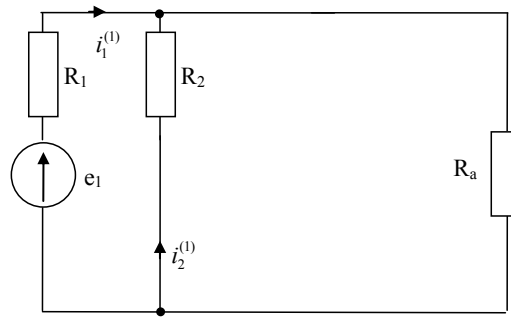
2.4.3. Przykład 3

Narysuj układy, z których należy skorzystać w obwodzie przedstawionym na rys. 2.43 w celu obliczenia prądu gałęziowego i_2 metodą superpozycji. Wyznacz ten prąd przyjmując następujące dane: $e_1 = 10 \text{ V}$, $e_2 = 10 \text{ V}$, $e_5 = 40 \text{ V}$, $j_4 = 10 \text{ mA}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 1 \text{ k}\Omega$.

Ponieważ układ zawiera cztery niezależne źródła energii (trzy napięciowe i jedno prądowe), zgodnie z klasyczną wersją metody superpozycji, poszukiwany prąd i_2 jest sumą czterech prądów $i_2^{(1)}$, $i_2^{(2)}$, $i_2^{(3)}$ oraz $i_2^{(4)}$ płynących w układach pokazanych odpowiednio na rysunkach rys. 2.44, rys. 2.45, rys. 2.46 oraz rys. 2.47. Schematy przedstawione na tych rysunkach powstały wskutek usunięcia wszystkich (poza jednym) źródeł energii, zgodnie z regułą: zaciski idealnych źródeł napięciowych zwieramy, a prądowych rozwieramy.

Przeprowadzimy obecnie analizę poszczególnych obwodów uwzględniając dane liczbowe. W celu wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$ obliczymy najpierw prąd $i_1^{(1)}$ zaznaczony na rys. 2.48. W układzie tym wyznaczmy najpierw rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_3 oraz R_6 . Oznaczmy ją jako R_a , a jej wartość wynosi $R_a = R_3 + R_6 = 2 \text{ k}\Omega$. Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 2.49. Wyznamy rezy-

Rys. 2.45. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$ Rys. 2.46. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$ Rys. 2.47. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(4)}$

Rys. 2.48. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$ Rys. 2.49. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$ po przekształceniu

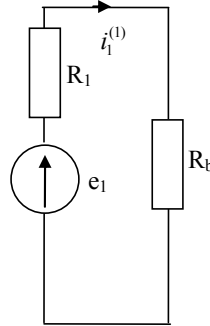
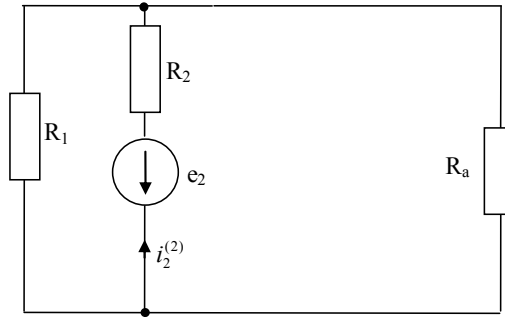
stancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_a oraz R_2 . Oznaczmy ją jako R_b , a jej wartość wynosi $R_b = \frac{R_a R_2}{R_a + R_2} = \frac{2}{3} \text{ k}\Omega$. Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 2.50. W tym układzie z NPK wyznaczamy prąd

$$i_1^{(1)} = \frac{e_1}{R_1 + R_b} = 6 \text{ mA}. \quad (2.110)$$

Z dzielnika prądu pokazanego na rys. 2.49 (uwzględniając orientację prądu $i_2^{(1)}$ względem $i_1^{(1)}$) mamy

$$i_2^{(1)} = -i_1^{(1)} \frac{R_a}{R_2 + R_a} = -4 \text{ mA}. \quad (2.111)$$

Obecnie wyznaczmy prąd $i_2^{(2)}$. Obliczamy najpierw rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_3 oraz R_6 . Oznaczmy ją jako R_a , a jej wartość wynosi $R_a = R_3 + R_6 = 2 \text{ k}\Omega$. Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 2.51. Następnie wyznaczmy rezystancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_a oraz R_1 .

Rys. 2.50. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$ po przekształceniuRys. 2.51. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$ po przekształceniu

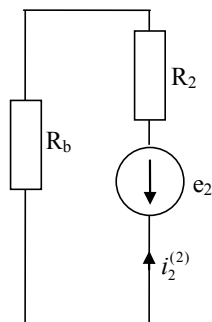
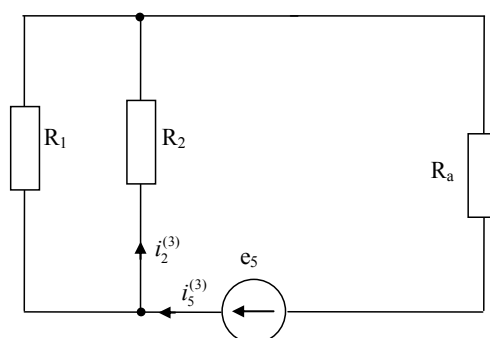
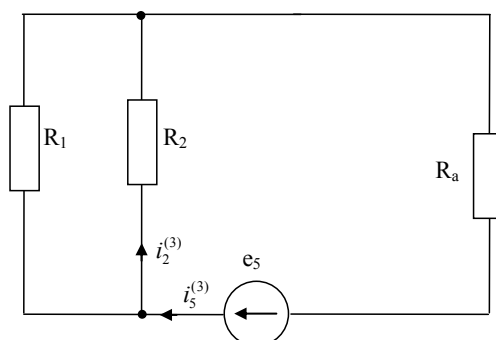
Oznaczmy ją jako R_b , a jej wartość wynosi $R_b = \frac{R_a R_1}{R_a + R_1} = \frac{2}{3} \text{ k}\Omega$. Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 2.52. W tym układzie z NPK wyznaczamy prąd

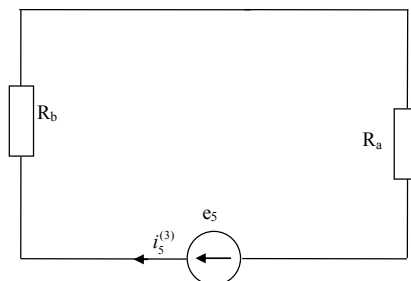
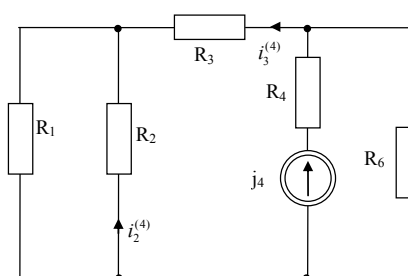
$$i_2^{(2)} = -\frac{e_2}{R_2 + R_b} = -3 \text{ mA}. \quad (2.112)$$

W celu wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$ postąpimy podobnie jak w przypadku wyznaczenia prądu $i_2^{(1)}$. Obliczymy najpierw prąd $i_5^{(3)}$ zaznaczony na rys. 2.53. W układzie tym wyznaczymy rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_3 oraz R_6 . Oznaczmy ją jako R_a , a jej wartość wynosi $R_a = R_3 + R_6 = 2 \text{ k}\Omega$. Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 2.49. Wyznaczymy rezystancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_1 oraz R_2 . Oznaczmy ją jako R_b , a jej wartość wynosi $R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ k}\Omega$. Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 2.50. W tym układzie z NPK wyznaczamy prąd

$$i_5^{(3)} = \frac{e_5}{R_a + R_b} = 16 \text{ mA}. \quad (2.113)$$

Z dzielnika prądu pokazanego na rys. 2.54 (uwzględniając orientację prądu $i_2^{(3)}$ wzglę-

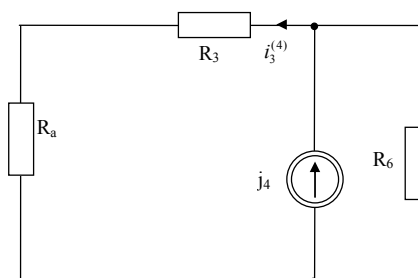
Rys. 2.52. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(2)}$ po przekształceniuRys. 2.53. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$ Rys. 2.54. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$ po przekształceniu

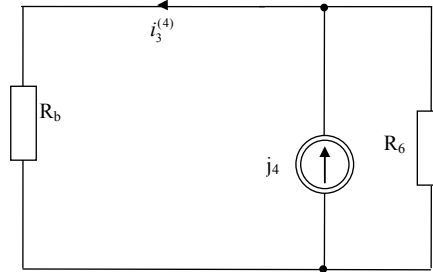
Rys. 2.55. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(3)}$ po przekształceniuRys. 2.56. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(4)}$

dem $i_5^{(3)}$) mamy

$$i_2^{(3)} = i_5^{(3)} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 8 \text{ mA}. \quad (2.114)$$

Wyznamy ostatni z prądów, prąd $i_2^{(4)}$. Obliczymy najpierw prąd $i_3^{(4)}$ zaznaczony na rys. 2.56. Wyznamy rezystancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_1 oraz R_2 . Oznaczmy ją jako R_a , a jej wartość wynosi $R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ k}\Omega$. Pro-wadzi to do schematu pokazanego na rys. 2.57. Obliczamy rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_3 oraz R_a . Oznaczmy ją jako R_b , a jej wartość wynosi

Rys. 2.57. Układ do wyznaczenia prądu $i_2^{(4)}$ po przekształceniu

Rys. 2.58. Układ do wyznaczenia prądu $i_3^{(4)}$ po przekształceniu

$R_b = R_3 + R_a = 1,5 \text{ k}\Omega$. Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 2.58. Z dzielnika prądu pokazanego na rys. 2.58 (uwzględniając orientację prądu $i_3^{(4)}$ względem j_4) mamy

$$i_3^{(4)} = j_4 \frac{R_6}{R_6 + R_b} = 4 \text{ mA}. \quad (2.115)$$

Wykorzystując ponownie wzór na dzielnik prądu pokazany na rys. 2.56, utworzony z rezystorów R_1 oraz R_2 (uwzględniając orientację prądu $i_2^{(4)}$ względem $i_3^{(4)}$) mamy

$$i_2^{(4)} = i_3^{(4)} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = -2 \text{ mA}. \quad (2.116)$$

A zatem prąd i_2 w układzie oryginalnym wynosi

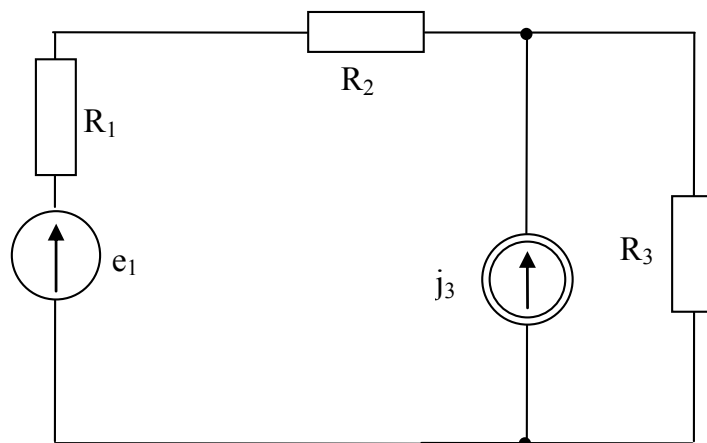
$$i_2 = i_2^{(1)} + i_2^{(2)} + i_2^{(3)} + i_2^{(4)} = -1 \text{ mA}. \quad (2.117)$$

2.5. Układy równoważne

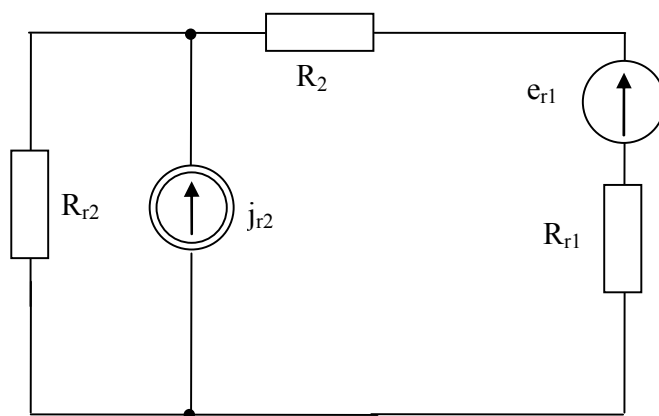
2.5.1. Przykład 1

Narysuj układ równoważny do obwodu przedstawionego na rys. 2.59 powstały po zamianie rzeczywistych źródeł prądu i napięcia na źródła równoważne. Podaj wartości elementów po zamianie. Dane: $e_1 = 10 \text{ V}$, $j_3 = 1 \text{ A}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$.

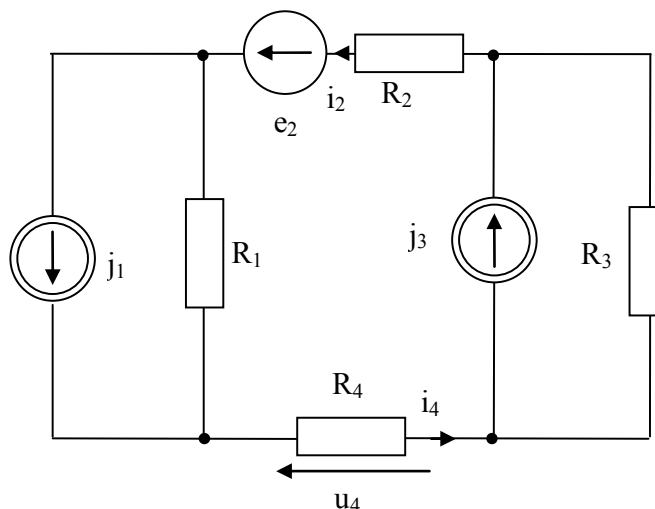
Ponieważ układ zawiera dwa rzeczywiste źródła energii (jedno napięciowe złożone z elementów: e_1 , R_1 i jedno prądowe – elementy j_3 , R_3) dokonujemy ich zamiany na źródła równoważne otrzymując schemat z rys. 2.60 i przeliczając wartości źródeł zgodnie z wzorami (1.17) oraz (1.16). Rezystancje wewnętrzne obu równowężnych źródeł pozostają takie same jak w źródłach oryginalnych, czyli $R_{r1} = R_3 = 2 \Omega$ oraz $R_{r2} = R_1 = 1 \Omega$, natomiast $e_{r1} = j_3 R_3 = 2 \text{ V}$, $j_{r2} = \frac{e_1}{R_1} = 10 \text{ A}$.



Rys. 2.59. Przykładowy układ liniowy



Rys. 2.60. Przykładowy układ liniowy po zamianie źródeł



Rys. 2.61. Obwód liniowy analizowany w przykładzie 2

2.5.2. Przykład 2

Narysuj układ równoważny do obwodu przedstawionego na rys. 2.61, w celu obliczenia prądu gałęziowego i_2 w możliwie najprostszy sposób. Wyznacz ten prąd przyjmując następujące dane: $e_2 = 10 \text{ V}$, $j_1 = 10 \text{ mA}$, $j_3 = 8 \text{ mA}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$. Na podstawie i_2 wyznacz u_4 .

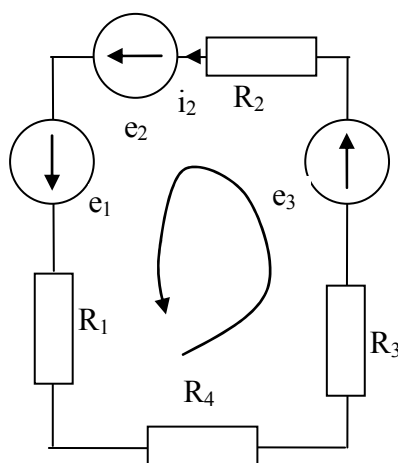
Ponieważ układ zawiera trzy rzeczywiste źródła energii (jedno napięciowe złożone z elementów: e_2 , R_2 i dwa prądowe – elementy j_1 , R_1 oraz j_3 , R_3) możliwa jest zamiana wszystkich źródeł na źródła równoważne. Ponieważ jednak celem jest wyznaczenie prądu i_2 , zamiana źródła napięcia na prądu jest niepożądana, gdyż prowadzi do powstania dodatkowego oczka, a zatem komplikuje obliczenia. Dokonujemy zatem zamiany tylko źródeł prądowych na źródła równoważne otrzymując schemat z rys. 2.62. Rezystancje wewnętrzne obu równoważnych źródeł pozostają takie same jak w źródłach oryginalnych, natomiast $e_1 = j_1 R_1 = 10 \text{ V}$, a $e_3 = j_3 R_3 = 8 \text{ V}$. Z napięciowego prawa Kirchhoffa dla zaznaczonej na rysunku pętli wyznaczmy szukany prąd

$$i_2 = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{28}{4000} = 7 \text{ mA}. \quad (2.118)$$

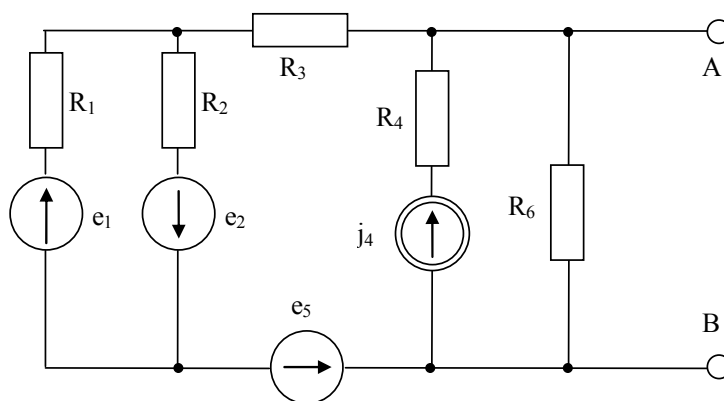
2.6. Twierdzenie Thevenina-Nortona

2.6.1. Przykład 1

Narysuj obwody, z których należy obliczyć parametry zastępczego źródła Thevenina widzianego z zacisków AB dla obwodu przedstawionego na rys. 2.63. Następnie przyjmuj-



Rys. 2.62. Przykładowy układ liniowy po zamianie źródeł

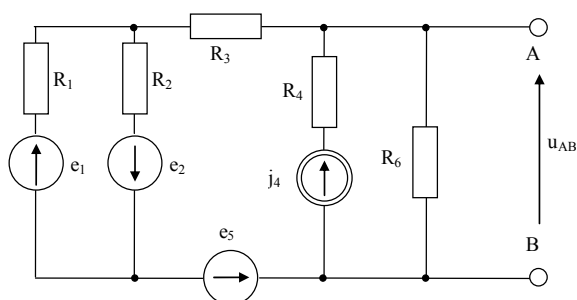
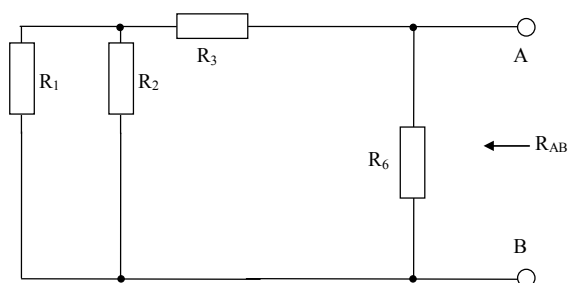


Rys. 2.63. Przykładowy układ liniowy

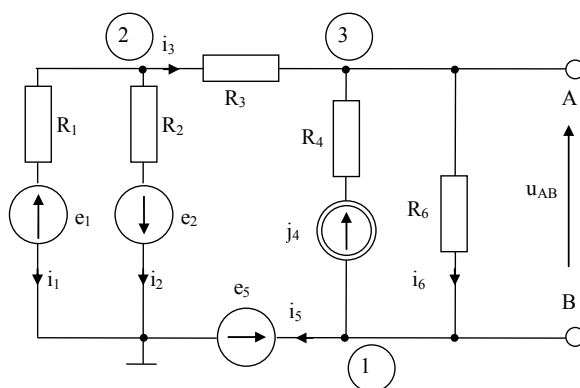
jąc dane: $e_1 = 10 \text{ V}$, $e_2 = 5 \text{ V}$, $e_5 = 10 \text{ V}$, $j_4 = 10 \text{ mA}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 1 \text{ k}\Omega$, wyznacz te parametry.

Zgodnie z treścią twierdzenia Thevenina w celu wyznaczenia parametrów e_z oraz R_z zastępczego dwójnika należy przeanalizować dwa obwody. W pierwszym z nich, pokazanym na rys. 2.64 wyznacza się (pomiarowo lub obliczeniowo) napięcie u_{AB} na rozwartych zaciskach AB, w drugim (rys. 2.65) wyznacza się rezystancję zastępczą R_{AB} widzianą z zacisków AB w układzie z wyzerowanymi (usuniętymi) niezależnymi źródłami energii. Wyznaczone wartości określają odpowiednio wartości e_z oraz R_z dwójnika Thevenina.

Przejdziemy obecnie do ich wyznaczenia tych parametrów przez podanych wartościach parametrów. Napięcie u_{AB} wyznaczmy, omawianą na początku tego rozdziału, metodą napięć węzłowych. Wprowadzimy oznaczenia w sposób podany na rys. 2.66.

Rys. 2.64. Obwód do wyznaczenia napięcia u_{AB} Rys. 2.65. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_{AB}

Układamy równania węzłowe w sposób analogiczny do przykładu 3 w rozdziale poświęconym temu opisowi. Zwróćmy uwagę, że w związku z występowaniem idealnego źródła napięciowego e_5 , musimy zastosować zmodyfikowaną metodę węzłową. W jej efekcie otrzymujemy równania w następującej postaci (zlecane jest ich samodzielne wy-

Rys. 2.66. Obwód do wyznaczenia napięcia u_{AB} metodą węzłową

przewodzenie):

$$\begin{aligned} 1 : \quad & -\frac{v_3 - v_1}{R_6} + j_4 + i_5 = 0, \\ 2 : \quad & \frac{v_2 - e_1}{R_1} + \frac{v_2 + e_2}{R_2} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = 0, \\ 3 : \quad & -\frac{v_2 - v_3}{R_3} - j_4 + \frac{v_3 - v_1}{R_6} = 0, \end{aligned} \quad (2.119)$$

który uzupełniamy równaniem dodatkowym

$$v_1 = e_5. \quad (2.120)$$

Poszukiwane napięcie $u_{AB} = v_3 - v_1$. Ponieważ wartość prądu i_5 nie jest potrzebna do wyznaczenia u_{AB} , równanie (1) możemy usunąć z dalszych rozważań. Podstawiając dane liczbowe (prądy w mA, a rezystancje w kΩ) otrzymujemy następujący układ równań liniowych

$$\begin{aligned} 2 : \quad & \frac{v_2 - 10}{1} + \frac{v_2 + 5}{1} + \frac{v_2 - v_3}{1} = 0, \\ 3 : \quad & -\frac{v_2 - v_3}{1} - 10 + \frac{v_3 - v_1}{1} = 0, v_1 = 10. \end{aligned} \quad (2.121)$$

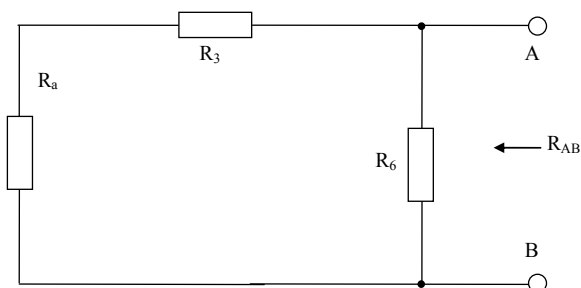
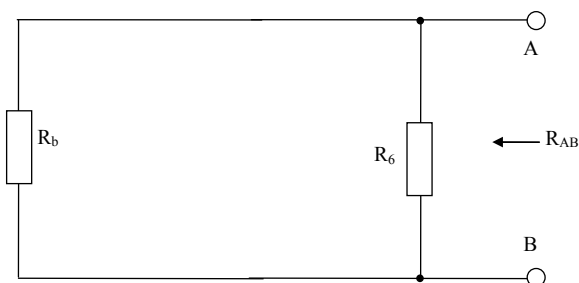
Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $v_3 = 13$ V. A zatem $u_{AB} = 13 - 10 = 3$ V. Napięcie to jest równe poszukiwanemu parametrowi e_z dwójnika Thevenina.

W celu wyznaczenia drugiego parametru, $R_z = R_{AB}$ rozpatrujemy układ z rys. 2.65. Wyznamy rezystancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_1 oraz R_2 . Oznaczmy ją jako R_a , a jej wartość wynosi $R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0,5$ kΩ. Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 2.67. Obliczamy rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_3 oraz R_a . Oznaczmy ją jako R_b , a jej wartość wynosi $R_b = R_3 + R_a = 1,5$ kΩ. Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 2.68. Finalnie, poszukiwaną wartość rezystancji $R_z = R_{AB}$ obliczymy korzystając ze wzoru na połączenie równoległe rezystancji R_6 oraz R_b , czyli $R_z = \frac{R_6 R_b}{R_6 + R_b} = 0,6$ kΩ = 600Ω.

2.6.2. Przykład 2

Narysuj obwody, z których należy obliczyć parametry zastępczego źródła Nortona widzianego z zacisków AB dla obwodu przedstawionego na rys. 2.63. Następnie przyjmując dane: $e_1 = 10$ V, $e_2 = 5$ V, $e_5 = 10$ V, $j_4 = 10$ mA, $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 1$ kΩ, $R_3 = 1$ kΩ, $R_4 = 1$ kΩ, $R_6 = 1$ kΩ, wyznacz te parametry.

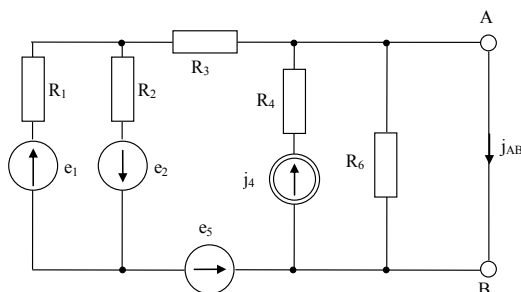
Zgodnie z treścią twierdzenia Nortona celu wyznaczenia parametrów j_z oraz R_z (lub $G_z = \frac{1}{R_z}$) zastępczego dwójnika należy przeanalizować dwa obwody. W pierwszym z nich, pokazanym na rys. 2.69 wyznacza się (pomiarowo lub obliczeniowo) prąd j_{AB}

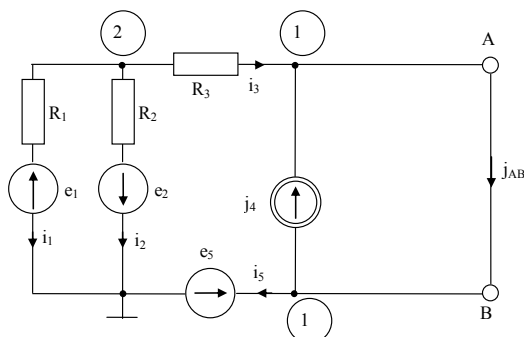
Rys. 2.67. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_{AB} po przekształceniuRys. 2.68. Obwód do wyznaczenia rezystancji R_{AB} po przekształceniu

płynący w zwartych zaciskach AB, w drugim (rys. 2.65) wyznacza się rezystancję zastępczą R_{AB} widzianą z zacisków AB w układzie z wyzerowanymi (usuniętymi) niezależnymi źródłami energii. Wyznaczone wartości określają odpowiednio wartości j_z oraz R_z dwójnika Nortona.

W celu wyznaczenia parametru, $R_z = R_{AB}$ postępujemy jak w poprzednim przykładzie otrzymując $R_z = 600\Omega$.

Aby wyznaczyć prąd płynący w zwartych zaciskach AB, uprościmy układ do postaci pokazanej na rys. 2.70. Zauważmy, że ze schematu usunięto, nie mające wpływu na wynik końcowy, rezystory R_4 (połączony szeregowo z idealnym źródłem prądowym j_4

Rys. 2.69. Obwód do wyznaczenia prądu j_{AB}

Rys. 2.70. Obwód do wyznaczenia prądu j_{AB} po uproszczeniu

nie wpływa na prąd tego źródła) oraz R_6 (zwarty przez zworę). Ponadto prąd źródłowy j_4 , płynąc "po linii najmniejszego oporu" nie wpływa na lewą część układu, a w całości płynie przez zwarte zaciski AB. A zatem, z PPK, prąd j_z jest sumą prądów j_4 i i_3 . Prąd i_3 można wyznaczyć dowolną metodą, np. superpozycji lub napięć węzłowych. W przypadku drugiej metody mamy dwa węzły (a po pewnych obserwacjach nawet jeden!), gdyż zwora z prawej strony jest idealna, a zatem potencjały punktów A oraz B są identyczne (ten sam węzeł oznaczony jako 1). Wykorzystując zmodyfikowaną metodę węzłową dochodzimy do równań:

$$\begin{aligned} 1 : \quad & v_1 = e_5, \\ 2 : \quad & \frac{v_2 - e_1}{R_1} + \frac{v_2 + e_2}{R_2} + \frac{v_2 - v_1}{R_3} = 0. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Podstawiając dane liczbowe mamy

$$\begin{aligned} 1 : \quad & v_1 = 10, \\ 2 : \quad & \frac{v_2 - 10}{1} + \frac{v_2 + 5}{1} + \frac{v_2 - v_1}{1} = 0. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Stąd $v_2 = 5 \text{ V}$, $i_3 = \frac{v_2 - v_1}{R_3} = -5 \text{ mA}$ oraz $j_z = i_3 + j_4 = 5 \text{ mA}$.

Rozdział 3

Stany nieustalone w liniowych obwodach elektrycznych

3.1. Wprowadzenie

Jeżeli układ zawiera choćby jeden kondensator (lub cewkę) metody opisu, takie jak metoda węzłowa, praw Kirchhoffa itd. prowadzą do równań różniczkowych, a nie algebraicznych. W rozdziale tym ograniczymy się do układów liniowych zawierających jeden element o właściwości pamięci, mianowicie jeden kondensator lub jedną cewkę. Obwody te, zwane układami I rzędu, można opisać równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu, zwykle niejednorodnym. W celu rozwiązania tego równania można wykorzystać metodę bazującą na podstawowym twierdzeniu z zakresu równań różniczkowych. Rozwiązanie niejednorodnego równania różniczkowego można uzyskać przez zsumowanie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

3.2. Podstawowe pojęcia

Rozpatrujemy układy liniowe, skupione i stacjonarne (SLS) w stanie dynamicznym, powstałym w wyniku tzw. komutacji. Elementy inercyjne (cewka i kondensator) zdolne są do gromadzenia energii, a energia zgromadzona w tych elementach może być w chwili t_0 niezerowa. Równania obwodowe dla układu SLS zawierającego te elementy można przedstawić w postaci równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych o współczynnikach stałych i/lub równań algebraicznych. Jednoznaczne wyznaczenie ich rozwiązań dla czasów $t \geq t_0$ wymaga znajomości warunków początkowych, tj. wartości odpowiednich prądów i napięć w chwili t_0 , gdyż

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau + i_L(t_0), \quad (3.1)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau + u_C(t_0). \quad (3.2)$$

Dla ustalenia wzajemnie jednoznacznej zależności między prądem a napięciem w cewce i kondensatorze dla czasów $t \geq t_0$ potrzebna jest znajomość w chwili t_0 wartości i_L oraz u_C . Są to warunki początkowe. W obu przypadkach dochodzimy do następującej konkluzji – **warunki początkowe są określone przez wartości $i_L(t_0)$ oraz $u_C(t_0)$ odpowiednio dla cewek i kondensatorów układu**. Jeżeli w chwili $t = t_0$ wszystkie wartości $i_L(t_0)$ oraz $u_C(t_0)$ są zerowe, a zatem energia zmagazynowana w układzie dla t_0 jest równa zeru, to mówimy o zerowych warunkach początkowych. W przeciwnym przypadku mówimy o niezerowych warunkach początkowych.

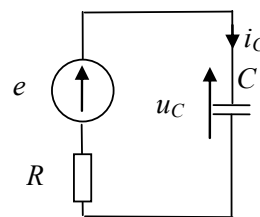
3.3. Stan nieustalony w układzie RC pierwszego rzędu, przy wymuszeniach stałych

Na wstępie rozpatrzmy prosty układ, zawierający jeden kondensator, jeden opornik i źródło napięcia stałego o wartości e , pokazany na rys. 3.1. Należy podkreślić, że każdy obwód liniowy zawierający jeden kondensator liniowy, można przedstawić w postaci układu z rys. 3.1, korzystając ze znanego twierdzenia Thevenina. Jeżeli rozpatrzmy obwód w stanie ustalonym, to napięcie na kondensatorze wynosi (dla napięcia stałego idealny kondensator jest przerwą)

$$u_C = e. \quad (3.3)$$

Analizując ten sam układ w stanie nieustalonym możemy wykorzystać zależności chwilowe i prawa Kirchhoffa. Z napięciowego prawa Kirchhoffa otrzymujemy

$$e = Ri + u_C. \quad (3.4)$$



Rys. 3.1. Układ RC pierwszego rzędu

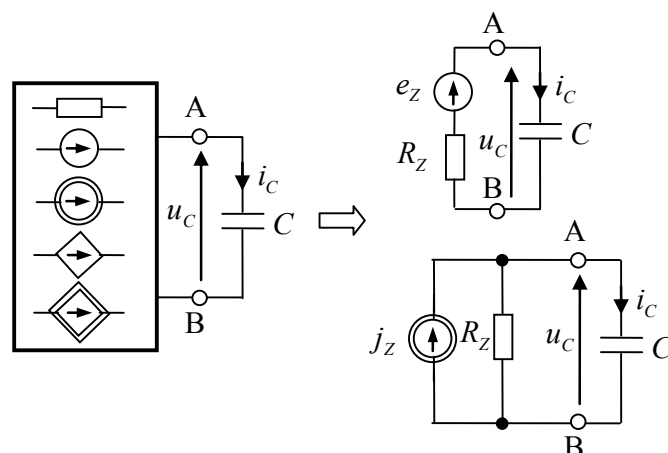
Podstawiając $i = C \frac{du_C}{dt}$ dochodzimy do równania różniczkowego niejednorodnego o postaci

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e. \quad (3.5)$$

Rozwiązanie ogólne tego równania jest sumą dwóch składowych: rozwiązania ogólnego równania jednorodnego oraz rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego, oznaczane w analizie obwodów przez u_{C_w} (składowa wymuszona), wyznaczamy, obliczając napięcie na kondensatorze w stanie ustalonym po komutacji, stosując znane metody analizy prądu stałego, traktując kondensator jako przerwę (gdyż rozpatrujemy układ przy wymuszeniach stałych).

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, oznaczane w analizie obwodów przez u_{C_s} (składowa swobodna), wyznaczamy rozwiązując równanie jednorodne

$$RC \frac{du_{C_s}}{dt} + u_{C_s} = 0 \quad (3.6)$$



Rys. 3.2. Wykorzystanie twierdzenia Thevenina/Nortona w analizie układów pierwszego rzędu

Rozwiązanie RORJ ma postać wzoru Helmholtza

$$u_{C_s} = Ae^{-\frac{t}{RC}}, \quad (3.7)$$

gdzie stała A zależy od warunku początkowego.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest więc wyrażone wzorem:

$$u_C = u_{C_w} + u_{C_s} = u_{C_w} + Ae^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3.8)$$

Jeżeli $t \rightarrow \infty$, to $u_C \rightarrow u_{C_w}$ i $u_{C_s} \rightarrow 0$. Sposób wyznaczenia stałej A zostanie podany w dalszej części tego rozdziału.

W praktyce stosowane są dwa podejścia do analizy układów pierwszego rzędu z jednym kondensatorem. Pierwsze z nich polega na sformułowaniu, na podstawie praw Kirchhoffa dla oryginalnego układu po komutacji, równania różniczkowego pierwszego rzędu oraz rozwiązaniu go. Druga metoda, szczególnie polecana w rozbudowanych układach zawierających kilka źródeł i oporników, polega na zastąpieniu układu widzianego z zacisków kondensatora dwójnikiem Thevenina (rys. 3.2) i skorzystaniu z pewnego szablonu. Poniżej podany zostanie opis stosowania tej drugiej procedury. Każdy układ pierwszego rzędu RC po skorzystaniu z twierdzenia Thevenina/Nortona można opisać równaniem różniczkowym

$$R_z C \frac{du_C}{dt} + u_C = e_Z. \quad (3.9)$$

Wprowadzając oznaczenie $R_z C = \tau$ i dzieląc stronami przez τ otrzymujemy równanie

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{1}{\tau} e_Z, \quad (3.10)$$

którego rozwiązanie ma postać:

$$u_C = u_{C_w} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.11)$$

Wielkość τ nazywana stałą czasową jest ona bardzo ważnym parametrem charakteryzującym układy dynamiczne pierwszego rzędu. Składową wymuszoną u_{C_w} wyznaczamy znanymi metodami analizy obwodów liniowych w stanie ustalonym. Zapisując równanie (3.11) dla $t = 0$ wyznaczamy stałą A

$$A = u_C(0) - u_{C_w}(0). \quad (3.12)$$

A zatem, wzór końcowy określający pełne rozwiązanie układu RC pierwszego rzędu w stanie nieustalonym ma postać

$$u_C = u_{C_w} + (u_C(0) - u_{C_w}(0))e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.13)$$

Przy wyznaczaniu wartości początkowej korzystamy z zasady zachowania ładunku kondensatora. W myśl tej zasady ładunek kondensatora $q(t)$ nie może zmienić się momentalnie, z której wynika

$$u_C(t_0^+) = u_C(t_0^-). \quad (3.14)$$

3.4. Stan nieustalony w układzie RL pierwszego rzędu, przy wymuszeniach stałych

Metodę klasyczną, opisaną w szczegółach dla układów RC pierwszego rzędu, możemy, w analogiczny sposób, zastosować do klasy RL, tj. układów zawierających (pomijając pewne szczególne przypadki będące poza kursem tego przedmiotu) jedną cewkę liniową. Układ widziany z zacisków cewki zastępujemy korzystając z twierdzenia Thevenina (Nortona) w sposób pokazany na rys. 3.3.

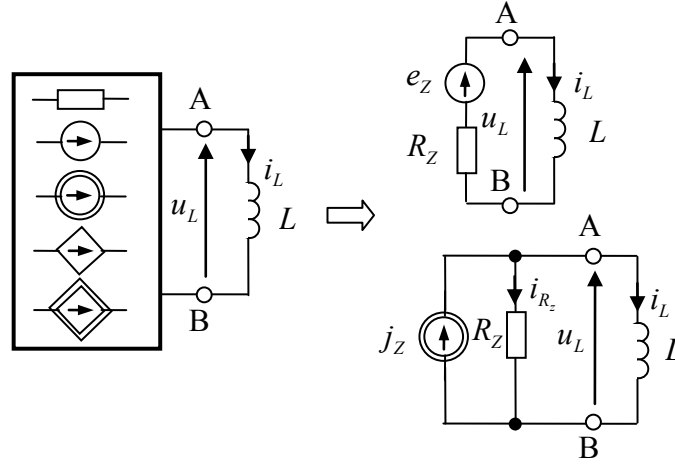
Rozpatrując układ powstały w wyniku zastosowania dwójnika Nortona otrzymujemy następujące zależności:

$$i_{R_z} + i_L = j_z, \quad (3.15)$$

$$i_{R_z} = \frac{u_L}{R_z}, \quad (3.16)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad (3.17)$$

$$\frac{u_L}{R_z} + i_L = j_z, \quad (3.18)$$



Rys. 3.3. Układ klasy RL i układy równoważne wynikające z zastosowania twierdzenia Thevenina/Nortona

$$\frac{L}{R_z} \frac{di_L}{dt} + i_L = j_z, \quad (3.19)$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L = \frac{1}{\tau} j_z, \quad (3.20)$$

$$\tau = \frac{L}{R_z}, \quad (3.21)$$

gdzie τ jest stałą czasową. Rozwiązanie równania różniczkowego opisującego rozważany układ ma postać

$$i_L(t) = i_{L_w}(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.22)$$

gdzie $A = i_L(0) - i_{L_w}(0)$. Stąd, po przekształceniach, otrzymujemy wzór końcowy

$$i_L(t) = i_{L_w}(t) + (i_L(0) - i_{L_w}(0)) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.23)$$

Wyznaczając warunek początkowy $i_L(0)$ korzystamy z zasady zachowania strumienia magnetycznego skojarzonego z cewką. W myśl tej zasady strumień magnetyczny skojarzony nie może zmienić się momentalnie, stąd prąd cewki również, a zatem

$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+). \quad (3.24)$$

Rozdział 4

Analiza układów liniowych I rzędu metodą klasyczną – przykłady

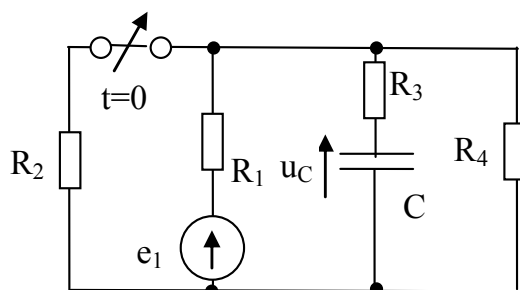
Uwaga: wszystkie analizowane układy zasilane są ze źródeł napięcia i prądu stałego. Ma to istotny wpływ na proces rozwiązywania zadań, gdyż przy liczeniu warunku początkowego oraz napięcia zastępczego dwójnika Thevenina i składowej wymuszonej kondensator w stanie ustalonym zastępujemy przerwą, a cewkę zworą. W przypadku, gdyby zasilanie było ze źródeł napięcia i prądu zmiennego (wszystkie źródła o tej samej częstotliwości) do wyznaczenia powyższych wielkości należy zastosować metodę symboliczną. W pozostałych przypadkach, nawet tak proste układy wymagają zwykle podejścia numerycznego.

Przykład 1

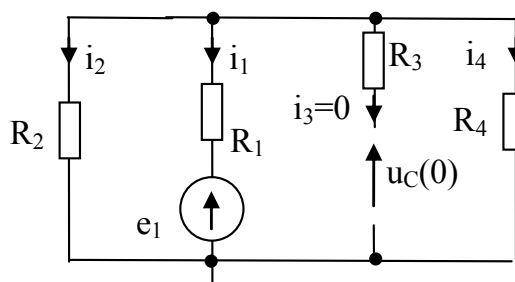
W układzie pokazanym na rys. 4.1 w chwili $t = 0$ nastąpiło otwarcie wyłącznika. Przed komutacją w układzie był stan ustalony. Obliczyć stałą czasową, warunek początkowy oraz napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym. Narysować przebieg napięcia na kondensatorze. Dane: $R_1 = 1\text{ k}\Omega$, $R_2 = 1\text{ k}\Omega$, $R_3 = 1\text{ k}\Omega$, $R_4 = 1\text{ k}\Omega$, $C = 1\text{ }\mu\text{F}$, $e_1 = 90\text{ V}$.

Wyznaczenie warunku początkowego dla $t < 0$

W celu wyznaczenia warunku początkowego, którym dla układu z kondensatorem jest napięcie na tym elemencie, w chwili t_0^- , czyli tuż przed komutacją (w analizowanym przykładzie $t_0 = 0$) usuwamy kondensator (zastępujemy go przerwą) i otrzymujemy układ prądu stałego pokazany na rys. 4.2. Ponieważ prąd $i_3 = 0$ na oporniku R_3 napięcie ma wartość 0 (z prawa Ohma). Napięcie $u_C(0^-) = u_C(0) = u_C(0^+)$ można wyznaczyć



Rys. 4.1. Układ rozpatrywany w przykładzie 1



Rys. 4.2. Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 1

dowolną metodą analizy układu stałoprądowego, np. wykorzystując prawa Kirchhoffa, dzielniki napięcia i prądu, metodę napięć węzłowych. Ponieważ w rozpatrywanym układzie mamy dwa węzły, to metoda węzłowa doprowadzi do jednego równania, czyli będzie efektywnym narzędziem opisu. Oznaczając górny węzeł jako węzeł o numerze 1, formułujemy opis, tak jak to omówiono w rozdziałach 1 oraz 2, w postaci

$$1 : \quad \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - e_1}{R_1} + \frac{v_1}{R_4} = 0. \quad (4.1)$$

Podstawiając dane liczbowe mamy równanie

$$1 : \quad \frac{v_1}{1000} + \frac{v_1 - 90}{1000} + \frac{v_1}{1000} = 0, \quad (4.2)$$

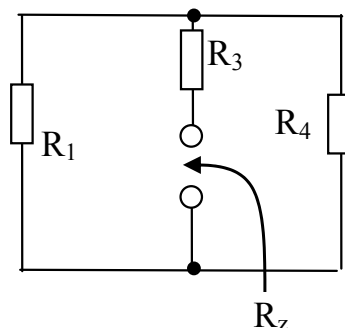
którego rozwiązaniem jest napięcie $v_1 = 30 \text{ V}$. Ponieważ na oporniku R_3 napięcie jest zerowe, więc poszukiwany warunek początkowy $u_C(0^-) = u_C(0) = v_1 = 30 \text{ V}$.

Wyznaczenie dwójnika Thevenina dla $t > 0$

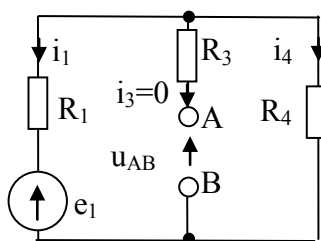
W celu obliczenia przebiegów w stanie nieustalonym wykorzystamy opisaną w poprzednim rozdziale metodę polegającą na zastąpieniu układu widzianego z zacisków kondensatora dwójnikiem Thevenina w układzie po komutacji, a następnie na skorzystaniu z pewnego szablonu.

Wyznamy najpierw rezystancję zastępczą układu widzianą z zacisków usuniętego kondensatora. W tym celu usuwamy wszystkie niezależne źródła energii, zwierając zaciski idealnych źródeł napięciowych i rozwierając zaciski idealnych źródeł prądowych. W przypadku rozpatrywanego układu prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 4.3. Najpierw należy wyznaczyć rezystancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_1 oraz R_4 , oznaczmy ją przez R_a co prowadzi do $R_a = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = 0,5 \text{ k}\Omega$. Rezystancja zastępcza R_z ma więc wartość wynikającą z połączenia szeregowego R_a oraz R_3 i wynosi $R_z = R_a + R_3 = 1,5 \text{ k}\Omega$.

Wyznamy teraz wartość napięcia zastępczego $e_z = u_{AB}$ źródła napięciowego występującego w dwójniku Thevenina w układzie rozpatrywanym w stanie ustalonym (rys. 4.4). Ponieważ prąd $i_3 = 0$ na oporniku R_3 napięcie ma wartość 0 (z prawa Ohma). Napięcie u_{AB} można wyznaczyć dowolną metodą analizy układu stałoprądowego, np.



Rys. 4.3. Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 1



Rys. 4.4. Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 1

korzystając z dzielnika napięcia utworzonego przez rezystory R_1 oraz R_4 , zasilanego ze źródła e_1 . Na podstawie odpowiedniego wzoru wyznaczamy

$$u_{AB} = \frac{e_1}{R_1 + R_4} R_4 = 45 \text{ V}. \quad (4.3)$$

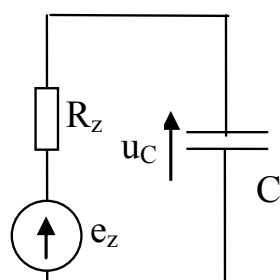
Wyznaczenie rozwiązania w stanie nieustalonym dla $t > 0$ Na podstawie wzorów podanych w poprzednim rozdziale obliczamy stałą czasową, składową wymuszoną (w przypadku, gdy e_z jest napięciem stałym $u_{C_w} = e_z$) oraz wyznaczamy zależność określającą poszukiwane napięcie w stanie nieustalonym:

$$\tau = R_z C = 1500 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 1,5 \text{ ms}, \quad (4.4)$$

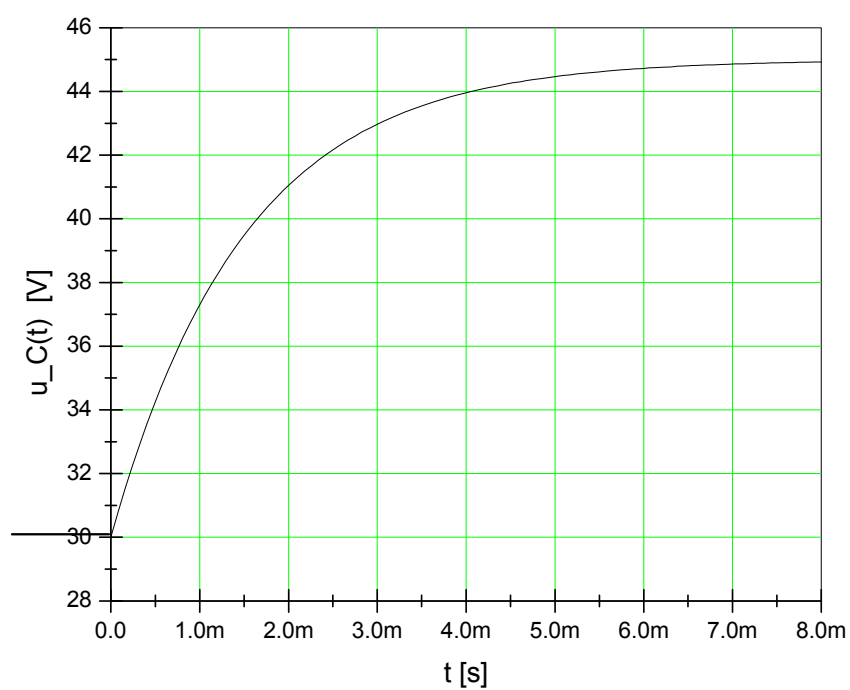
$$u_{C_w} = e_z = 45 \text{ V}, \quad (4.5)$$

$$u_C(t) = u_{C_w} + (u_C(0) - u_{C_w}(0))e^{-\frac{t}{\tau}} = 45 - 15e^{-666,7t}. \quad (4.6)$$

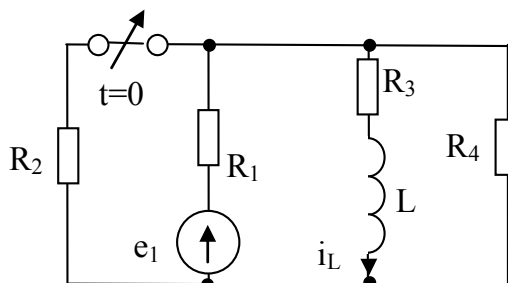
Przebieg czasowy napięcia $u_C(t)$ w stanie nieustalonym pokazano na rys. 4.6.



Rys. 4.5. Układ zastępczy w przykładzie 1



Rys. 4.6. Wykres napięcia na kondensatorze w przykładzie 1



Rys. 4.7. Układ rozpatrywany w przykładzie 2

Przykład 2

W układzie pokazanym na rys. 4.7 w chwili $t = 0$ nastąpiło otwarcie wyłącznika. Przed komutacją w układzie był stan ustalony. Obliczyć stałą czasową, warunek początkowy oraz prąd płynący przez cewkę w stanie nieustalonym. Narysować przebieg prądu płynącego przez cewkę. Dane: $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 100 \text{ mH}$, $e_1 = 100 \text{ V}$.

Wyznaczenie warunku początkowego dla $t < 0$

W celu wyznaczenia warunku początkowego, którym dla układu z cewką jest prąd płynący przez ten element, w chwili 0^- , usuwamy cewkę i zastępujemy zworą. Otrzymujemy układ prądu stałego pokazany na rys. 4.8. Ponieważ prąd $i_3 = i_L(0)$, prąd ten można wyznaczyć dowolną metodą analizy układu prądu stałego np. wykorzystując prawa Kirchhoffa, dzielniki napięcia i prądu, metodę napięć węzłowych. Ponieważ w rozpatrywanym układzie mamy dwa węzły, to metoda węzłowa doprowadzi do jednego równania. Oznaczając górny węzeł jako węzeł o numerze 1, formułujemy opis w postaci

$$1 : \quad \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - e_1}{R_1} + \frac{v_1}{R_3} + \frac{v_1}{R_4} = 0. \quad (4.7)$$

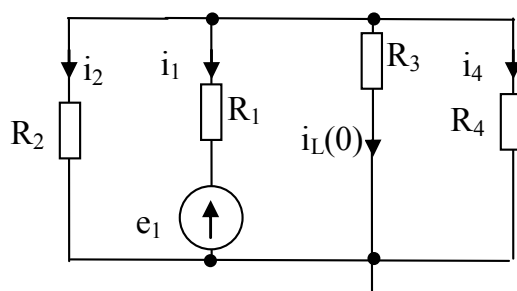
Podstawiając dane liczbowe mamy równanie

$$1 : \quad \frac{v_1}{1000} + \frac{v_1 - 100}{1000} + \frac{v_1}{1000} + \frac{v_1}{1000} = 0, \quad (4.8)$$

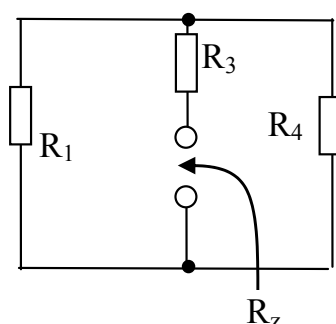
którego rozwiązaniem jest napięcie $v_1 = 25 \text{ V}$. Stąd warunek początkowy $i_L(0) = i_3 = \frac{v_1}{R_3} = \frac{25}{1000} = 25 \text{ mA}$.

Wyznaczenie dwójnika Thevenina dla $t > 0$

Wyznamy rezystancję zastępczą układu widzianą z zacisków usuniętej cewki. W tym celu usuwamy wszystkie niezależne źródła energii, zwierając zaciski idealnych źródeł napięciowych i rozwierając zaciski idealnych źródeł prądowych (w rozpatrywanym przypadku jest to tylko źródło e_1). Prowadzi to do schematu pokazanego na



Rys. 4.8. Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 2



Rys. 4.9. Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 2

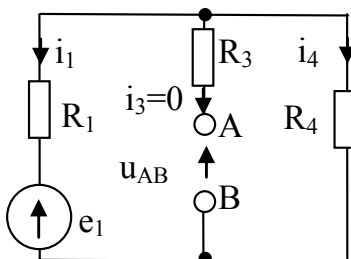
rys. 4.9. Najpierw wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_1 oraz R_4 , oznaczmy ją przez R_a co prowadzi do $R_a = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = 0,5 \text{ k}\Omega$. Rezystancja zastępcza R_z wynika z połączenia szeregowego R_a oraz R_3 i wynosi $R_z = R_a + R_3 = 1,5 \text{ k}\Omega$.

Wyznamy teraz wartość napięcia zastępczego $e_z = u_{AB}$ źródła napięciowego występującego w dwójniku Thevenina w układzie rozpatrywanym w stanie ustalonym (rys. 4.10). Ponieważ prąd $i_3 = 0$ na oporniku R_3 napięcie ma wartość 0 (z prawa Ohma). Napięcie u_{AB} wyznaczmy korzystając z dzielnika napięcia utworzonego przez rezystory R_1 oraz R_4 , zasilanego ze źródła e_1 otrzymując

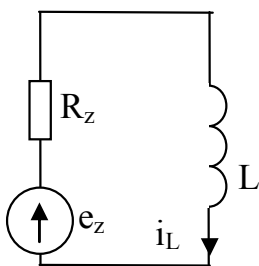
$$u_{AB} = \frac{e_1}{R_1 + R_4} R_4 = 50 \text{ V}. \quad (4.9)$$

Wyznaczenie rozwiązania w stanie nieustalonym dla $t > 0$ Obliczamy stałą czasową, składową wymuszoną (w przypadku, gdy e_z jest napięciem stałym $i_{Lw} = \frac{e_z}{R_z}$) oraz wyznaczamy zależność określającą poszukiwany prąd w stanie nieustalonym:

$$\tau = \frac{L}{R_z} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{1500} = 66,7 \mu\text{s}, \quad (4.10)$$



Rys. 4.10. Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 2



Rys. 4.11. Układ zastępczy w przykładzie 2

$$i_{Lw} = \frac{e_z}{R_z} = 33,33 \text{ mA}, \quad (4.11)$$

$$i_L(t) = i_{Lw} + (i_L(0) - i_{Lw}(0))e^{-\frac{t}{\tau}} = (33,33 - 8,33e^{-15000t}) \text{ mA}. \quad (4.12)$$

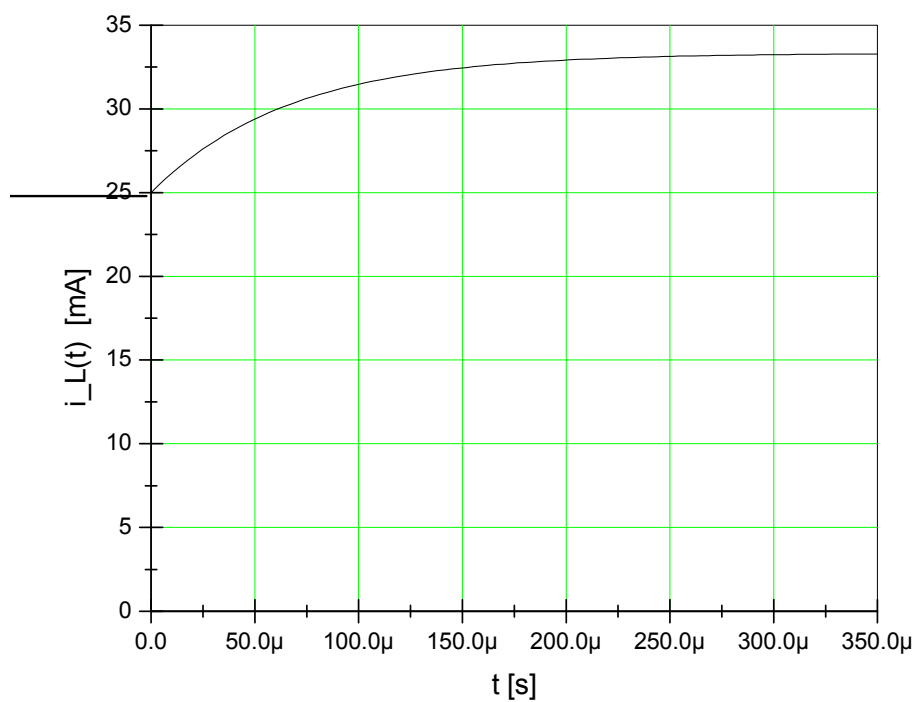
Przebieg czasowy napięcia $i_L(t)$ w stanie nieustalonym pokazano na rys. 4.12.

Przykład 3

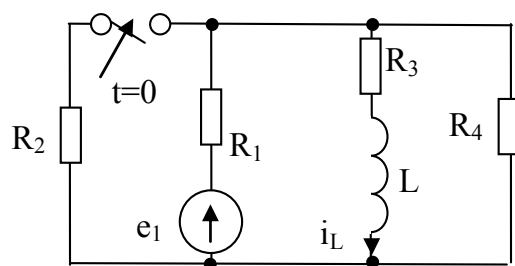
W układzie pokazanym na rys. 4.13 w chwili $t = 0$ nastąpiło zamknięcie wyłącznika. Przed komutacją w układzie był stan ustalony. Obliczyć stałą czasową, warunek początkowy oraz prąd płynący przez cewkę w stanie nieustalonym. Narysować przebieg prądu płynącego przez cewkę. Dane: $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 500 \text{ mH}$, $e_1 = 90 \text{ V}$.

Wyznaczenie warunku początkowego dla $t < 0$

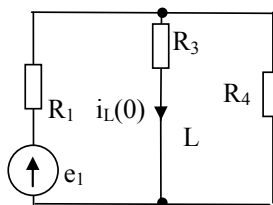
W celu wyznaczenia warunku początkowego, którym dla układu z cewką jest prąd płynący przez ten element, w chwili 0^- , usuwamy cewkę i zastępujemy zworą. Otrzymujemy układ prądu stałego pokazany na rys. 4.14. Prąd $i_3 = i_L(0)$ wyznaczymy metodą



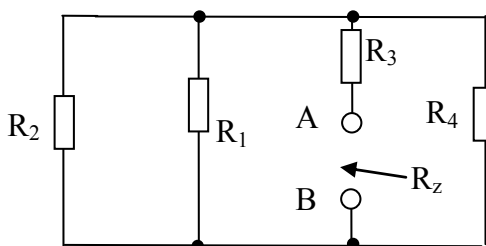
Rys. 4.12. Wykres prądu płynącego przez cewkę w przykładzie 2



Rys. 4.13. Układ rozpatrywany w przykładzie 3



Rys. 4.14. Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 3



Rys. 4.15. Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 3

napięć węzłowych. Oznaczając górny węzeł jako węzeł o numerze 1, formułujemy opis w postaci

$$1 : \quad \frac{v_1 - e_1}{R_1} + \frac{v_1}{R_3} + \frac{v_1}{R_4} = 0. \quad (4.13)$$

Podstawiając dane liczbowe mamy równanie

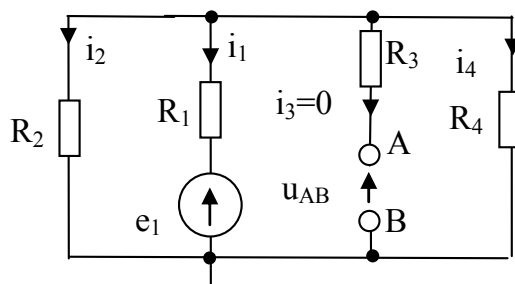
$$1 : \quad \frac{v_1 - 90}{1000} + \frac{v_1}{1000} + \frac{v_1}{1000} = 0, \quad (4.14)$$

którego rozwiązaniem jest napięcie $v_1 = 30 \text{ V}$. Stąd warunek początkowy $i_L(0) = i_3 = \frac{v_1}{R_3} = \frac{30}{1000} = 30 \text{ mA}$.

Wyznaczenie dwójnika Thevenina dla $t > 0$

Wyznamy rezystancję zastępczą układu widzianą z zacisków usuniętej cewki. W tym celu usuwamy wszystkie niezależne źródła energii, zwierając zaciski źródła e_1 . Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 4.15. Najpierw wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_1 , R_2 , oraz R_4 , oznaczmy ją przez R_a co prowadzi do $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} = \frac{3}{1000} \text{ S}$. Stąd $R_a \approx 333 \Omega$. Rezystancja zastępcza R_z wynika z połączenia szeregowego R_a oraz R_3 i wynosi $R_z = R_a + R_3 = 1333 \Omega$.

Wyznamy wartość napięcia zastępczego $e_z = u_{AB}$ źródła napięciowego występującego w dwójniku Thevenina w układzie rozpatrywanym w stanie ustalonym (rys. 4.16). Napięcie u_{AB} wyznaczmy metodą węzłową, która prowadzi do jednego równania.



Rys. 4.16. Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 3

Oznaczając górny węzeł jako węzeł o numerze 1, formułujemy opis, tak jak to omówiono w rozdziałach 1 oraz 2, w postaci

$$1 : \quad \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - e_1}{R_1} + \frac{v_1}{R_4} = 0. \quad (4.15)$$

Podstawiając dane liczbowe mamy równanie

$$1 : \quad \frac{v_1}{1000} + \frac{v_1 - 90}{1000} + \frac{v_1}{1000} = 0, \quad (4.16)$$

którego rozwiązaniem jest napięcie $v_1 = 30$ V. Ponieważ na oporniku R_3 napięcie jest zerowe, więc poszukiwane napięcie $u_{AB} = e_z = v_1 = 30$ V.

Wyznaczenie rozwiązania w stanie nieustalonym dla $t > 0$ Obliczamy stałą czasową, składową wymuszoną (w przypadku, gdy e_z jest napięciem stałym $i_{L_w} = \frac{e_z}{R_z}$) oraz wyznaczamy zależność określającą poszukiwany prąd w stanie nieustalonym:

$$\tau = \frac{L}{R_z} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{1333} = 375 \mu\text{s}, \quad (4.17)$$

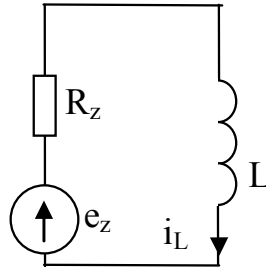
$$i_{L_w} = \frac{e_z}{R_z} = 22,5 \text{ mA}, \quad (4.18)$$

$$i_L(t) = i_{L_w} + (i_L(0) - i_{L_w}(0))e^{-\frac{t}{\tau}} = (22,5 + 7,5e^{-2667t}) \text{ mA}. \quad (4.19)$$

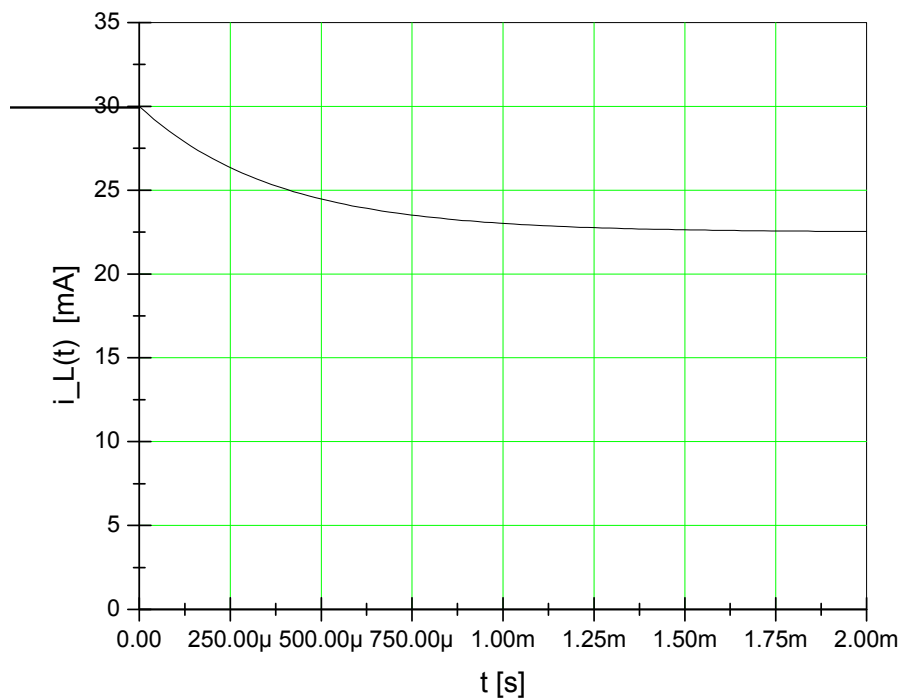
Przebieg czasowy napięcia $i_L(t)$ w stanie nieustalonym pokazano na rys. 4.18.

Przykład 4

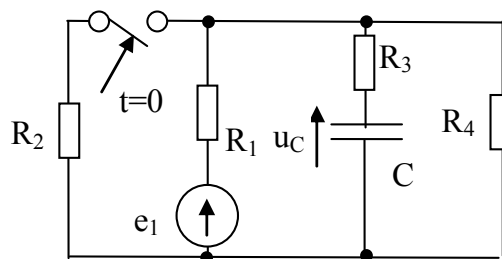
W układzie pokazanym na rys. 4.19 w chwili $t = 0$ nastąpiło zamknięcie wyłącznika. Przed komutacją w układzie był stan ustalony. Obliczyć stałą czasową, warunek początkowy oraz napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym. Narysować przebieg



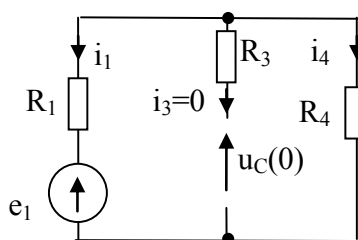
Rys. 4.17. Układ zastępczy w przykładzie 3



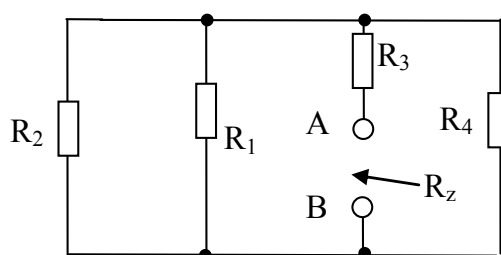
Rys. 4.18. Wykres prądu płynącego przez cewkę w przykładzie 3



Rys. 4.19. Układ rozpatrywany w przykładzie 4



Rys. 4.20. Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 4



Rys. 4.21. Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 4

napięcia na kondensatorze. Dane: $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 33 \mu\text{F}$, $e_1 = 40 \text{ V}$.

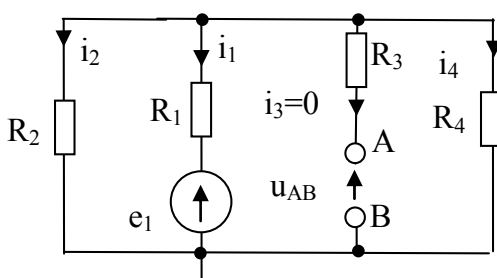
Wyznaczenie warunku początkowego dla $t < 0$

W celu wyznaczenia warunku początkowego, którym dla układu z kondensatorem jest napięcie na tym elemencie, w chwili 0^- , czyli tuż przed komutacją usuwamy kondensator (zastępujemy go przerwą) i otrzymujemy układ prądu stałego pokazany na rys. 4.20. Ponieważ prąd $i_3 = 0$ na oporniku R_3 napięcie ma wartość 0 (z prawa Ohma). Napięcie $u_C(0^-) = u_C(0) = u_C(0^+)$ można wyznaczyć dowolną metodą analizy układu stałoprądowego, np. korzystając z dzielnika napięcia utworzonego przez rezystory R_1 oraz R_4 , zasilanego ze źródła e_1 . Otrzymujemy

$$u_C(0) = \frac{e_1}{R_1 + R_4} R_4 = 20 \text{ V}. \quad (4.20)$$

Wyznaczenie dwójnika Thevenina dla $t > 0$

Wyznamy rezystancję zastępczą układu widzianą z zacisków usuniętego kondensatora. W tym celu zwieramy zaciski źródła e_1 . Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 4.21. Najpierw wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_1 , R_2 , oraz R_4 , oznaczmy ją przez R_a co prowadzi do $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} = \frac{3}{1000} \text{ S}$. Stąd $R_a \approx 333 \Omega$. Rezystancja zastępcza R_z wynika z połączenia szeregowego R_a oraz R_3 i wynosi $R_z = R_a + R_3 = 1333 \Omega$.



Rys. 4.22. Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 4

Wyznamy wartość napięcia zastępczego $e_z = u_{AB}$ źródła napięciowego występującego w dwójniku Thevenina w układzie rozpatrywanym w stanie ustalonym (rys. 4.22). Napięcie u_{AB} wyznaczmy metodą węzłową, która prowadzi do jednego równania. Oznaczając górny węzeł jako węzeł o numerze 1, formułujemy opis o postaci

$$1 : \quad \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - e_1}{R_1} + \frac{v_1}{R_4} = 0. \quad (4.21)$$

Podstawiając dane liczbowe mamy równanie

$$1 : \quad \frac{v_1}{1000} + \frac{v_1 - 40}{1000} + \frac{v_1}{1000} = 0, \quad (4.22)$$

którego rozwiązaniem jest napięcie $v_1 = 13,33 \text{ V}$, stąd $u_{AB} = e_z = v_1 = 30 \text{ V}$.

Wyznaczenie rozwiązania w stanie nieustalonym dla $t > 0$ Na podstawie wzorów podanych w poprzednim rozdziale obliczamy stałą czasową, składową wymuszoną (w przypadku, gdy e_z jest napięciem stałym $u_{C_w} = e_z$) oraz wyznaczamy zależność określającą poszukiwane napięcie w stanie nieustalonym:

$$\tau = R_z C = 1333 \cdot 33 \cdot 10^{-6} = 0,044 \text{ s}, \quad (4.23)$$

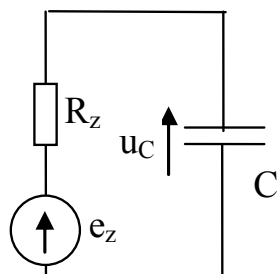
$$u_{C_w} = e_z = 13,33 \text{ V}, \quad (4.24)$$

$$u_C(t) = u_{C_w} + (u_C(0) - u_{C_w}(0))e^{-\frac{t}{\tau}} = 13,33 + 6,67e^{-22,73t}. \quad (4.25)$$

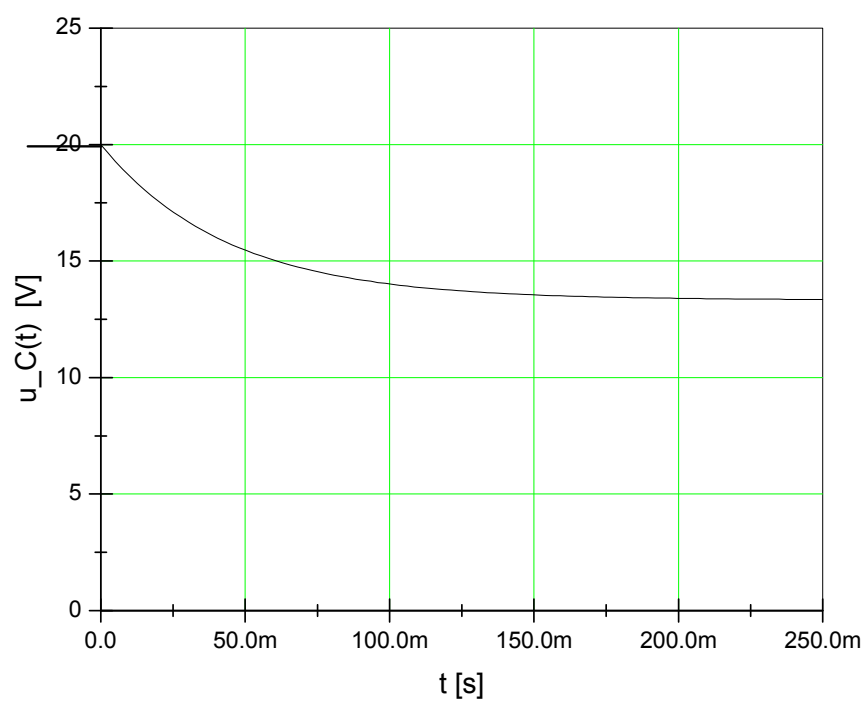
Przebieg czasowy napięcia $u_C(t)$ w stanie nieustalonym pokazano na rys. 4.24.

Przykład 5

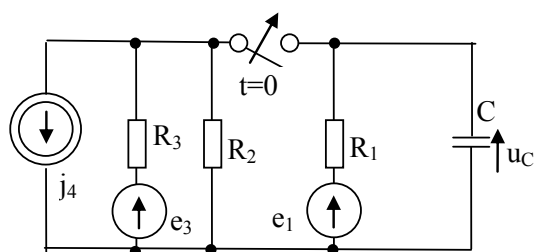
W układzie pokazanym na rys. 4.25 w chwili $t = 0$ nastąpiło zamknięcie wyłącznika. Przed komutacją w układzie był stan ustalony. Obliczyć stałą czasową, warunek początkowy oraz napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym. Narysować przebieg



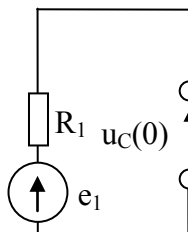
Rys. 4.23. Układ zastępczy w przykładzie 4



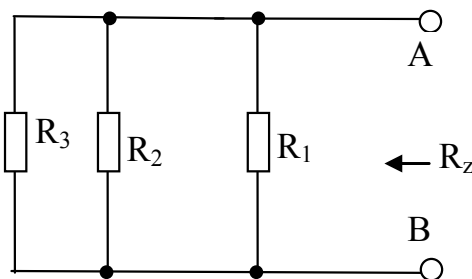
Rys. 4.24. Wykres napięcia na kondensatorze w przykładzie 4



Rys. 4.25. Układ rozpatrywany w przykładzie 5



Rys. 4.26. Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 5



Rys. 4.27. Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 5

napięcia na kondensatorze. Dane: $R_1 = 1\text{ k}\Omega$, $R_2 = 1\text{ k}\Omega$, $R_3 = 1\text{ k}\Omega$, $R_4 = 1\text{ k}\Omega$, $C = 100\text{ }\mu\text{F}$, $e_1 = 20\text{ V}$, $e_3 = 20\text{ V}$, $j_4 = 10\text{ mA}$.

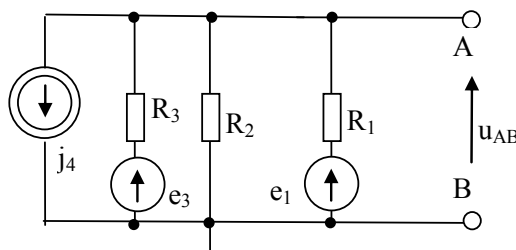
Wyznaczenie warunku początkowego dla $t < 0$

W celu wyznaczenia warunku początkowego, którym dla układu z kondensatorem jest napięcie na tym elemencie, w chwili 0^- , czyli tuż przed komutacją usuwamy kondensator (zastępujemy go przerwą) i otrzymujemy układ prądu stałego pokazany na rys. 4.26. Ponieważ prąd w układzie nie płynie, napięcie na oporniku R_1 ma wartość 0 (z prawa Ohma). Napięcie $u_C(0^-) = u_C(0) = u_C(0^+)$ można wyznaczyć z napięciowego prawa Kirchhoffa i jest równe napięciu źródłowemu, czyli, $u_C(0) = e_1 = 20\text{ V}$.

Wyznaczenie dwójnika Thevenina dla $t > 0$

Wyznamy rezystancję zastępczą układu widzianą z zacisków usuniętego kondensatora. W tym celu zwieramy zaciski źródeł e_1 i e_3 oraz rozwieramy zaciski źródła j_4 . Prowadzi to do schematu pokazanego na rys. 4.27. Rezystancja zastępcza R_z wynika ze wzoru na połączenie równoległe rezystorów R_1 , R_2 , oraz R_3 , co prowadzi do zależności $\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{1000}\text{ S}$. Stąd $R_z \approx 333\text{ }\Omega$.

Wyznamy wartość napięcia zastępczego $e_z = u_{AB}$ źródła napięciowego występującego w dwójniku Thevenina w układzie rozpatrywanym w stanie ustalonym (rys. 4.28). Napięcie u_{AB} wyznaczymy metodą węzłową, oznaczając górny węzeł jako węzeł o nu-



Rys. 4.28. Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 5

merze 1, formułujemy opis o postaci

$$1 : \quad \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - e_1}{R_1} + \frac{v_1 - e_3}{R_1} + j_4 = 0. \quad (4.26)$$

Podstawiając dane liczbowe mamy równanie

$$1 : \quad \frac{v_1}{1000} + \frac{v_1 - 20}{1000} + \frac{v_1 - 20}{1000} + 0,01 = 0, \quad (4.27)$$

którego rozwiązaniem jest napięcie $v_1 = 10 \text{ V}$, stąd $u_{AB} = e_z = v_1 = 10 \text{ V}$.

Wyznaczenie rozwiązania w stanie nieustalonym dla $t > 0$ Na podstawie wzorów podanych w poprzednim rozdziale obliczamy stałą czasową, składową wymuszoną (w przypadku, gdy e_z jest napięciem stałym $u_{C_w} = e_z$) oraz wyznaczamy zależność określającą poszukiwane napięcie w stanie nieustalonym:

$$\tau = R_z C = 333 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 33,33 \text{ ms}, \quad (4.28)$$

$$u_{C_w} = e_z = 10 \text{ V}, \quad (4.29)$$

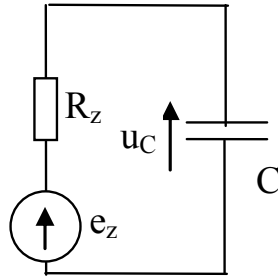
$$u_C(t) = u_{C_w} + (u_C(0) - u_{C_w}(0))e^{-\frac{t}{\tau}} = 10 + 10e^{-30t}. \quad (4.30)$$

Przebieg czasowy napięcia $u_C(t)$ w stanie nieustalonym pokazano na rys. 4.30.

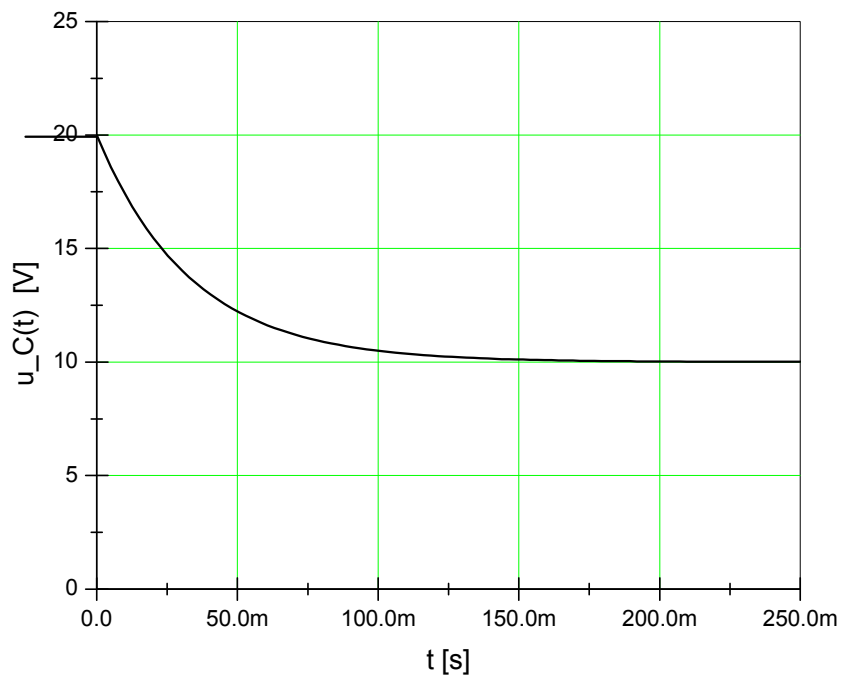
Przykład 6

W układzie pokazanym na rys. 4.31 w chwili $t = 0$ nastąpiło otwarcie wyłącznika. Przed komutacją w układzie był stan ustalony. Obliczyć stałą czasową, warunek początkowy oraz prąd płynący przez cewkę w stanie nieustalonym. Narysować przebieg prądu płynącego przez cewkę. Dane: $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 100 \text{ mH}$, $e_1 = 200 \text{ V}$.

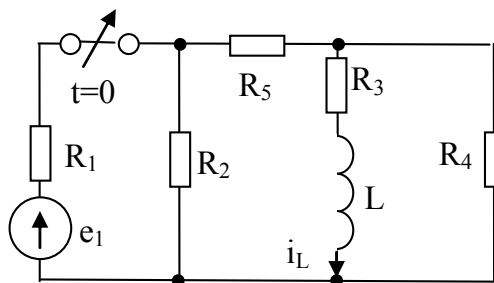
Wyznaczenie warunku początkowego dla $t < 0$



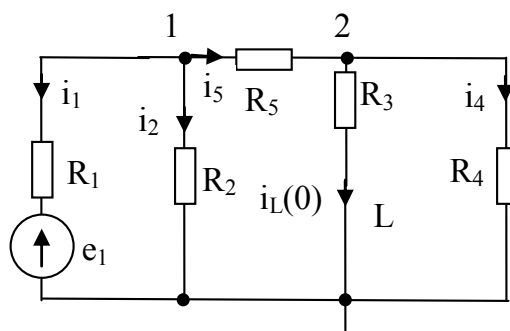
Rys. 4.29. Układ zastępczy w przykładzie 5



Rys. 4.30. Wykres napięcia na kondensatorze w przykładzie 5



Rys. 4.31. Układ rozpatrywany w przykładzie 6



Rys. 4.32. Układ do wyznaczania warunku początkowego w przykładzie 6

W celu wyznaczenia warunku początkowego, którym dla układu z cewką jest prąd płynący przez ten element, w chwili 0^- , usuwamy cewkę i zastępujemy zworą. Otrzymujemy układ prądu stałego pokazany na rys. 4.32. Prąd $i_3 = i_L(0)$ wyznaczymy metodą napięć węzłowych. Oznaczając węzły jak na rysunku, formułujemy opis w postaci

$$\begin{aligned} 1 : \quad & \frac{v_1 - e_1}{R_1} + \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - v_2}{R_5} = 0, \\ 2 : \quad & -\frac{v_1 - v_2}{R_5} + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2}{R_4} = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Podstawiając dane liczbowe mamy równania

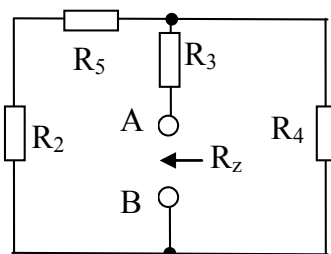
$$\begin{aligned} 1 : \quad & \frac{v_1 - 200}{1000} + \frac{v_1}{1000} + \frac{v_1 - v_2}{1000} = 0, \\ 2 : \quad & -\frac{v_1 - v_2}{1000} + \frac{v_2}{1000} + \frac{v_2}{1000} = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

którego rozwiązaniem są napięcia $v_1 = 75 \text{ V}$, $v_2 = 25 \text{ V}$. Stąd warunek początkowy $i_L(0) = i_3 = \frac{v_2}{R_3} = \frac{25}{1000} = 25 \text{ mA}$.

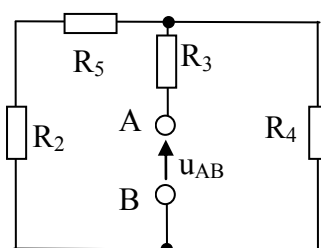
Wyznaczenie dwójnika Thevenina dla $t > 0$

Wyznamy rezystancję zastępczą układu widzianą z zacisków usuniętej cewki. W układzie po komutacji nie ma źródeł więc możemy od razu przejść do schematu pokazanego na rys. 4.33. Najpierw wyznaczamy rezystancję zastępczą połączenia szeregowego rezystorów R_2 , R_5 , oznaczmy ją przez R_a , otrzymując $R_a = R_2 + R_5 = 2000 \Omega$. Następnie należy wyznaczyć rezystancję zastępczą połączenia równoległego R_a oraz R_4 , oznaczmy ją przez R_b , $\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_4} = \frac{3}{1000} \text{ S}$. Stąd $R_b \approx 667 \Omega$. Rezystancja zastępcza R_z wynika z połączenia szeregowego R_b oraz R_3 i wynosi $R_z = R_b + R_3 = 1667 \Omega$.

Wyznamy wartość napięcia zastępczego $e_z = u_{AB}$ źródła napięciowego występującego w dwójniku Thevenina w układzie rozpatrywanym w stanie ustalonym (rys. 4.34). Ponieważ w układzie nie ma żadnych źródeł, wszystkie prądy są zerowe, a zatem $u_{AB} = e_z = 0 \text{ V}$.



Rys. 4.33. Układ do wyznaczania rezystancji zastępczej w przykładzie 6



Rys. 4.34. Układ do wyznaczania wartości zastępczego źródła występującego w twierdzeniu Thevenina w przykładzie 6

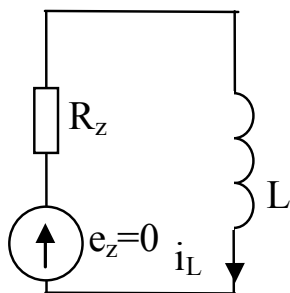
Wyznaczenie rozwiązania w stanie nieustalonym dla $t > 0$ Obliczamy stałą czasową, składową wymuszoną oraz wyznaczamy zależność określającą poszukiwany prąd w stanie nieustalonym:

$$\tau = \frac{L}{R_z} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{1667} = 60 \mu\text{s}, \quad (4.33)$$

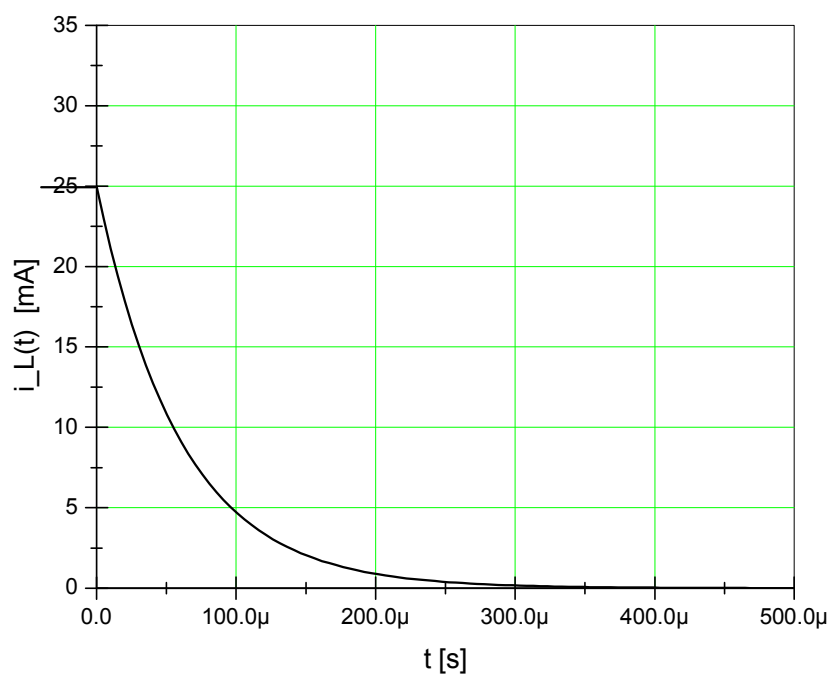
$$i_{Lw} = \frac{e_z}{R_z} = 0 \text{ mA}, \quad (4.34)$$

$$i_L(t) = i_{Lw} + (i_L(0) - i_{Lw}(0))e^{-\frac{t}{\tau}} = (0 + 25e^{-16667t}) \text{ mA}. \quad (4.35)$$

Przebieg czasowy napięcia $i_L(t)$ w stanie nieustalonym pokazano na rys. 4.36.



Rys. 4.35. Układ zastępczy w przykładzie 6



Rys. 4.36. Wykres prądu płynącego przez cewkę w przykładzie 6

Rozdział 5

Obwody liniowe prądu sinusoidalnego w stanie ustalonym

5.1. Wprowadzenie

Obwody liniowe prądu sinusoidalnego to układy utworzone z oporników, cewek, kondensatorów liniowych pobudzane prądami i napięciami źródłowymi, będącymi sinusoidalnymi funkcjami czasu o tej samej pulsacji ω . Rozpatrujemy taki stan obwodu, w którym odpowiedzi (prądy i napięcia) są również sinusoidalnymi funkcjami czasu o pulsacji ω , czyli *stan ustalony*.

5.2. Podstawowe informacje o przebiegach sinusoidalnych

5.2.1. Parametry sygnału sinusoidalnego

Weźmy pod uwagę funkcję sinusoidalną o postaci

$$f(x) = A \sin x. \quad (5.1)$$

Występującą w powyższym równaniu wielkość A nazywamy amplitudą, a wielkość x (kąt mierzony w radianach) fazą. Wprowadzając oznaczenie $x = \omega t$ dochodzimy do wykorzystywanej w układach elektrycznych funkcji czasu, gdzie ω jest pulsacją mierzoną w radianach na sekundę. Sygnał sinusoidalny ma więc postać

$$f(t) = A \sin \omega t \quad (5.2)$$

i jest to okresowa funkcja czasu o okresie T . Kąt x , odpowiadający okresowi, wynosi 2π radianów ($2\pi = \omega T$), stąd

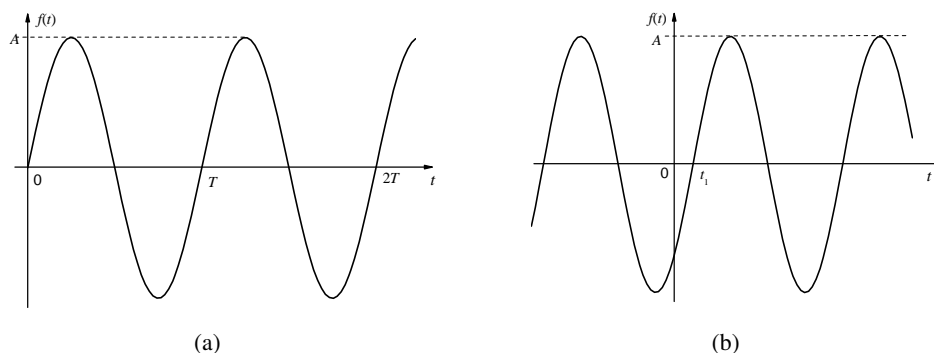
$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.3)$$

Liczba okresów w ciągu jednej sekundy wynosi

$$f = \frac{1}{T} \quad (5.4)$$

i jest to częstotliwość sygnału mierzona w hercach [Hz]. Zachodzi więc zależność

$$\omega = 2\pi f. \quad (5.5)$$



Rys. 5.1. Sygnał sinusoidalny o zerowej fazie początkowej (a) oraz niezerowej fazie początkowej (b)

Sygnał sinusoidalny o zerowej fazie początkowej (rys. 5.1(a)) opisany jest więc zależnością

$$f(t) = A \sin \omega t. \quad (5.6)$$

W ogólnym przypadku (rys. 5.1(b)) faza początkowa jest niezerowa, a sygnał sinusoidalny spełnia równanie

$$f(t) = A \sin \omega (t - t_1). \quad (5.7)$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$A \sin (\omega t - \omega t_1) = A \sin (\omega t + \alpha), \quad (5.8)$$

gdzie

$$\alpha = -\omega t_1. \quad (5.9)$$

Parametr α nazywamy fazą początkową funkcji sinusoidalnej, czyli fazą dla $t = 0$. Uwzględniając zależność $\omega = 2\pi \frac{1}{T}$ otrzymujemy wzór

$$\alpha = -2\pi \frac{t_1}{T}. \quad (5.10)$$

Ponieważ

$$A \sin (\omega t + \alpha) = A \sin (\omega t + \alpha + 2\pi n) \quad (5.11)$$

faza początkowa może przyjmować dowolną wartość określoną zależnością

$$\alpha + 2\pi n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.12)$$

Zakłada się, że fazę początkową α określa ten punkt przejścia funkcji sinusoidalnej przez zero, który jest najbliższy początkowi układu współrzędnych i odpowiada rosnącemu fragmentowi sinusoidy.

5.2.2. Przesunięcie fazowe między dwoma sygnałami sinusoidalnymi

Weźmy pod uwagę dwa sygnały sinusoidalne określone zależnościami:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (5.13)$$

$$g(t) = B \sin(\omega t + \beta). \quad (5.14)$$

Wartość $\alpha - \beta$ nazywamy różnicą faz (przesunięciem fazowym) sygnałów $f(t)$ i $g(t)$. Jeżeli $\alpha > \beta$, to mówimy, że sygnał $f(t)$ wyprzedza sygnał $g(t)$ o kąt $(\alpha - \beta)$. Jeżeli $\alpha < \beta$, to mówimy, że sygnał $f(t)$ opóźnia się względem sygnału $g(t)$ o kąt $(\beta - \alpha)$. Jeżeli $\alpha = \beta$, to mówimy, że sygnały $f(t)$ i $g(t)$ są w fazie, a dwa sygnały przesunięte o $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 180^\circ$ są w tzw. przeciwfazie.

5.2.3. Wartość średnia

Wartością średnią sygnału okresowego $y(t)$ (niekoniecznie sinusoidalnego) o okresie T nazywamy liczbę określoną następująco

$$Y_{sr} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) dt. \quad (5.15)$$

Dla przebiegów sinusoidalnych wartość średnia równa się zero.

5.2.4. Wartość skuteczna

Wartością skuteczną sygnału okresowego $y(t)$ (niekoniecznie sinusoidalnego) o okresie T nazywamy liczbę określoną następująco

$$Y_{sk} = |Y| \stackrel{def}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (y(t))^2 dt}. \quad (5.16)$$

Wartość skuteczna dla przebiegu sinusoidalnego

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (5.17)$$

wynosi

$$|U| = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (5.18)$$

5.3. Obwody liniowe prądu sinusoidalnego w stanie ustalonym – metoda symboliczna

5.3.1. Wstęp

Operowanie na sygnałach sinusoidalnych jest bardzo niewygodne. Wynikające z praw Kirchhoffa sumowanie sygnałów o różnych fazach początkowych wymaga korzystania ze złożonych zależności trygonometrycznych. Dlatego powszechnie stosowaną metodą analizy tej klasy układów w stanie ustalonym jest tzw. metoda symboliczna, wykorzystująca operacje na liczbach zespolonych. Liczbę zespoloną można na płaszczyźnie zespolonej przedstawić jako wektor o długości równej modułowi liczby zespolonej i nachyleniu względem osi odciętych odpowiadającym argumentowi tej liczby. W metodzie symbolicznej każdemu sygnałowi sinusoidalnemu przyporządkowuje się wektor o długości równej wartości skutecznej sygnału i położeniu początkowemu określone przez fazę początkową sygnału.

Metoda symboliczna pozwala przenieść analizę układów liniowych w stanie ustalonym na grunt liczb zespolonych i równań algebraicznych oraz umożliwia prostą geometryczną ilustrację zależności pomiędzy napięciami i prądami na **wykresach wskazowych**.

5.3.2. Pojęcie wskazu

Wartość symboliczną (zespoloną) wielkości sinusoidalnej

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x) \quad (5.19)$$

definiujemy jako

$$X = |X| e^{j\varphi_x}, \quad (5.20)$$

gdzie

$$|X| = \frac{X_m}{\sqrt{2}}. \quad (5.21)$$

i nazywamy wskazem nieruchomym (w skrócie **wskazem**). Moduł wartości symbolicznej jest równy wartości skutecznej, a argument fazy początkowej wielkości sinusoidalnej.

Prawa Kirchhoffa dla wartości symbolicznych

Dla wartości chwilowych spełnione jest prądowe prawo Kirchhoffa

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0, \quad (5.22)$$

gdzie m jest liczbą gałęzi dołączonych do rozpatrywanego węzła (lub przekroju). Można udowodnić, że prądowe prawo Kirchhoffa zachodzi również dla wartości symbolicznych, czyli

$$\sum_{k=1}^m I_k = 0. \quad (5.23)$$

A zatem, w dowolnym węźle lub przekroju algebraiczna suma wartości symbolicznych prądów równa się zeru.

Dla wartości chwilowych zachodzi napięciowe prawo Kirchhoffa

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0, \quad (5.24)$$

gdzie n jest liczbą elementów w rozpatrywanej pętli. Można udowodnić, że napięciowe prawo Kirchhoffa zachodzi również dla wartości symbolicznych, czyli

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0. \quad (5.25)$$

W dowolnej pętli (zamkniętym ciągu węzłów) algebraiczna suma wartości symbolicznych napięć równa się zeru.

5.3.3. Rezystor liniowy

Dla rezystora (opornika) liniowego, zakładając, że płynie przez niego prąd $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ zachodzą następujące zależności:

$$u(t) = Ri(t), \quad (5.26)$$

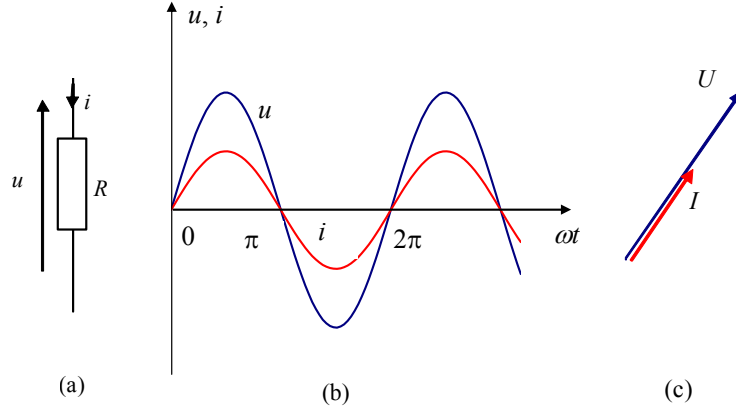
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = RI_m \sin(\omega t + \varphi_i), \quad (5.27)$$

$$U_m = RI_m, \quad \varphi_u = \varphi_i, \quad (5.28)$$

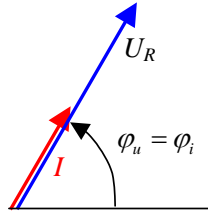
$$|U| = R|I|, \quad (5.29)$$

z których wynika następujący wniosek: *napięcie i prąd na oporniku liniowym są zawsze w fazie, tzn. nie ma przesunięcia fazowego między tymi wielkościami, $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$* . Na rys. 5.2a pokazano symbol opornika liniowego, na rys. 5.2b przebiegi czasowe, a na rys. 5.2c odpowiedni wykres wektorowy. Dla wartości symbolicznych prawo Ohma określa zależność

$$U = RI. \quad (5.30)$$



Rys. 5.2. Rezystor liniowy, przebiegi czasowe i wykres wektorowy



Rys. 5.3. Wykres wskazowy dla opornika liniowego

Uwzględniając wzory na wartości symboliczne otrzymujemy

$$|U| e^{j\varphi_u} = R |I| e^{j\varphi_i}. \quad (5.31)$$

Ze wzoru (5.31) wynikają zależności:

$$|U| = R |I|, \quad \varphi_u = \varphi_i, \quad (5.32)$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0. \quad (5.33)$$

Wykres wskazowy dla opornika, czyli wykres, w którym wektory odpowiadają zdefiniowanym wartościom symbolicznym, ma postać pokazaną na rys. 5.3.

5.3.4. Cewka liniowa

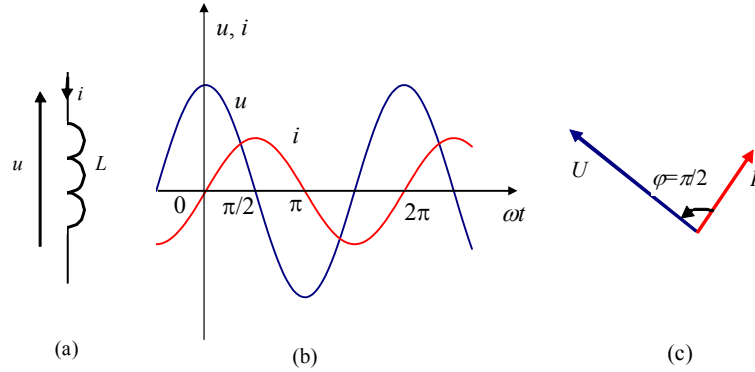
Dla cewki liniowej, przez którą płynie prąd $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ zachodzą następujące zależności:

$$u = L \frac{di}{dt}, \quad (5.34)$$

$$u(t) = L\omega I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = U_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}), \quad (5.35)$$

$$U_m = \omega L I_m, \quad |U| = \omega L |I|, \quad (5.36)$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_u - \varphi_i = \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad (5.37)$$



Rys. 5.4. Cewka liniowa, przebiegi czasowe i wykres wektorowy

z których wynika wniosek: *napięcie i prąd na cewce liniowej są przesunięte w fazie o 90° , tzn. $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$. Napięcie wyprzedza prąd o 90°* . Na rys. 5.4a pokazano symbol cewki liniowej, na rys. 5.4b przebiegi czasowe, a na rys. 5.4c odpowiedni wykres wektorowy. Można wykazać, że dla wartości symbolicznych zachodzi

$$U = j\omega LI. \quad (5.38)$$

Uwzględniając wzory na wartości symboliczne otrzymujemy

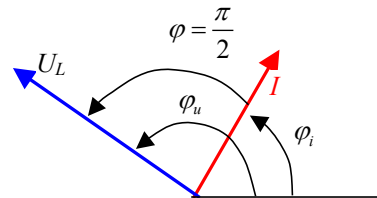
$$|U| e^{j\varphi_u} = \omega L |I| e^{j(\varphi_i + \frac{\pi}{2})}. \quad (5.39)$$

Ze wzoru (5.39) wynikają następujące zależności:

$$|U| = \omega L |I|, \quad \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}, \quad (5.40)$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}. \quad (5.41)$$

Wykres wskazowy dla cewki liniowej ma postać pokazaną na rys. 5.5.



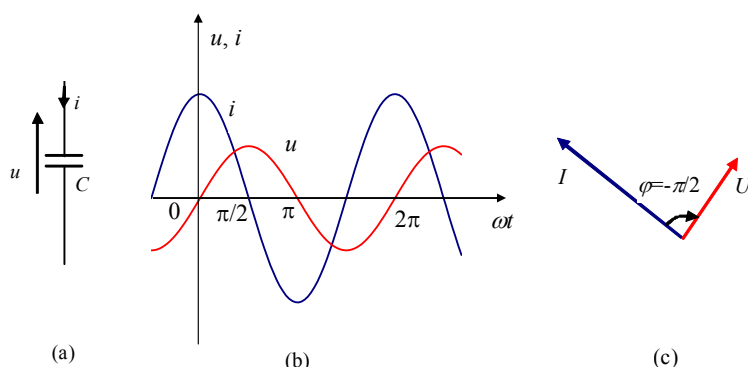
Rys. 5.5. Wykres wskazowy dla cewki liniowej

5.3.5. Kondensator liniowy

Dla kondensatora liniowego, trzeciego podstawowego elementu układów prądu sinusoidalnie zmiennego, na którym występuje napięcie $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, zachodzą następujące zależności:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad (5.42)$$

$$i_C(t) = C\omega U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = C\omega U_m \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}), \quad (5.43)$$



Rys. 5.6. Kondensator liniowy, przebiegi czasowe i wykres wektorowy

$$I_m = \omega C U_m, \quad |I| = \omega C |U|, \quad \varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad (5.44)$$

z których wynika wniosek: *napięcie i prąd na kondensatorze liniowym są przesunięte w fazie o -90° , tzn. $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$. Prąd wyprzedza napięcie o 90°* . Na rys. 5.6a pokazano symbol kondensatora liniowego, na rys. 5.6b przebiegi czasowe, a na rys. 5.6c odpowiedni wykres wektorowy.

Można wykazać, że dla wartości symbolicznych zachodzi

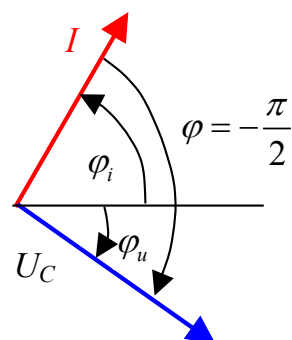
$$I = j\omega C U. \quad (5.45)$$

Uwzględniając zależności na wartości symboliczne otrzymujemy

$$|I| = \omega C |U|, \quad \varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}, \quad (5.46)$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}. \quad (5.47)$$

Wykres wskazowy dla kondensatora liniowego ma postać pokazaną na rys. 5.7.

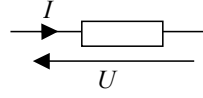


Rys. 5.7. Wykres wskazowy dla kondensatora liniowego

5.3.6. Impedancja i admitancja

Impedancją Z dwójnika, pokazanego na rys. 5.8, nazywamy iloraz wartości symbolicznych napięcia i prądu

$$Z = \frac{U}{I}. \quad (5.48)$$



Rys. 5.8. Dwójnik liniowy

Uwzględniając wzory na wartości symboliczne:

$$U = |U| e^{j\varphi_u}, \quad I = |I| e^{j\varphi_i}, \quad (5.49)$$

otrzymujemy

$$Z = \left| \frac{U}{I} \right| e^{j\varphi} = |Z| e^{j\varphi}, \quad (5.50)$$

gdzie

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i. \quad (5.51)$$

Moduł impedancji $|Z|$ jest ilorazem wartości skutecznych napięcia i prądu, natomiast argument impedancji, $\varphi = \arg Z$, jest kątem przesunięcia fazowego pomiędzy napięciem i prądem.

Uwzględniając w zależności

$$Z = |Z| e^{j\varphi} \quad (5.52)$$

wzór Eulera możemy zapisać impedancję w postaci

$$Z = |Z| \cos \varphi + j |Z| \sin \varphi = R + jX, \quad (5.53)$$

gdzie $R = \operatorname{Re}(Z) = |Z| \cos \varphi$ – rezystancja, $X = \operatorname{Im}(Z) = |Z| \sin \varphi$ – reaktancja, $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$, $\arg Z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}$.

Wartość kąta φ niesie informację o charakterze dwójnika, zgodnie z poniższym zestawieniem:

- $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ($R > 0$, $X > 0$) – dwójnik ma charakter indukcyjny,
- $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ ($R > 0$, $X < 0$) – dwójnik ma charakter pojemnościowy,
- $\varphi = 0$ – dwójnik ma charakter rezystancyjny,
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – dwójnik ma charakter czysto indukcyjny,
- $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ – dwójnik ma charakter czysto pojemnościowy.

Admitancją Y dwójnika nazywamy iloraz wartości symbolicznych prądu i napięcia

$$Y = \frac{I}{U}, \quad (5.54)$$

czyli

$$Y = Z^{-1}. \quad (5.55)$$

Wynika stąd, że

$$Y = \frac{1}{|Z|} e^{-j\varphi} = |Y| e^{-j\varphi}. \quad (5.56)$$

Uwzględniając wzór Eulera otrzymujemy

$$Y = |Y| \cos\varphi - j |Y| \sin\varphi = G + jB, \quad (5.57)$$

gdzie: $G = \operatorname{Re}(Y) = |Y| \cos\varphi$ – konduktancja dwójnika, $B = \operatorname{Im}(Y) = -|Y| \sin\varphi$ – susceptancja dwójnika, $|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$ – moduł admitancji, $\arg Y = (-\varphi) = \operatorname{arctg} \frac{B}{G}$ – argument admitancji.

5.3.7. Procedura obliczania obwodów metodą symboliczną

Podsumowując dotychczasowe rozważania możemy stwierdzić, że metoda symboliczna pozwala w prosty sposób określić odpowiedź układu liniowego w stanie ustalonym przy pobudzeniu sinusoidalnym. Metoda składa się z następujących ogólnych kroków:

1. Zastępujemy źródła (sinusoidalne) ich modelami symbolicznymi. Na przykład napięcie wejściowe $u_s(t) = 100\sqrt{2}\sin(100t + 30)$ jest zastępowane przez źródło o wartości symbolicznej $U_s = 100e^{j30}$.
2. Zastępujemy elementy obwodu przez ich impedancje, a więc rezystory zastępujemy impedancją R , cewki impedancją $j\omega L$, a kondensator impedancją $-j\frac{1}{\omega C}$.
3. Wyznaczamy symboliczne wartości napięć i prądów w obwodzie za pomocą dowolnej standardowej techniki analizy liniowej, np. metody napięć węzłowych, metody przekształceń obwodu itp.
4. Chociaż ten krok zazwyczaj nie jest konieczny (gdyż wartości symboliczne zawierają wszystkie istotne informacje o zachowaniu obwodu) możemy wyznaczyć wartości chwilowe prądów i napięć.

Połączenie szeregowe dwóch impedancji

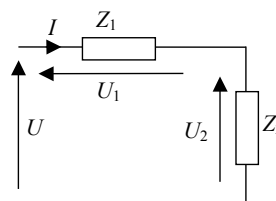
W przypadku połączenia szeregowego dwóch impedancji, pokazanego na rys. 5.9, z napięciowego prawa Kirchhoffa wynika, że

$$U = U_1 + U_2. \quad (5.58)$$

Impedancja zastępcza połączenia wynosi

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2}{I} = Z_1 + Z_2. \quad (5.59)$$

Połączenie równoległe dwóch admitancji



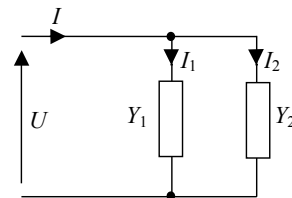
Rys. 5.9. Połączenie szeregowe dwóch impedancji

W przypadku połączenia równoległego dwóch admitancji, pokazanego na rys. 5.10, zachodzi prądowe prawo Kirchhoffa

$$I = I_1 + I_2. \quad (5.60)$$

Admitancja zastępcza połączenia wynosi

$$Y = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2}{U} = Y_1 + Y_2. \quad (5.61)$$



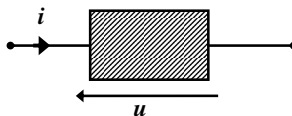
Rys. 5.10. Połączenie równoległe dwóch admitancji

5.3.8. Moc w obwodach prądu sinusoidalnie zmiennego

Moc chwilowa

Weźmy po uwagę dwójnik (pojedynczy element lub połączenie dowolnej liczby elementów R , L , C z wyprowadzonymi dwoma zaciskami) przedstawiony na rys. 5.11, przez który płynie prąd $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ i na którym występuje napięcie $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_i + \varphi)$. Mocą chwilową dwójnika nazywamy iloczyn wartości chwilowych napięcia $u(t)$ i prądu $i(t)$, czyli

$$p = u(t)i(t) = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \sin(\omega t + \varphi_i + \varphi). \quad (5.62)$$



Rys. 5.11. Dwójnik jako element lub fragment obwodu liniowego

Moc chwilowa jest funkcją czasu, o częstotliwości dwa razy większej niż częstotliwość prądu czy napięcia.

Moc czynna

Mocą czynną P dwójnika (u, i są wielkościami okresowymi) nazywamy wartość średnią za okres T z mocy chwilowej

$$P = \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt. \quad (5.63)$$

Jednostką mocy czynnej jest wat [W].

Dla przebiegów sinusoidalnie zmiennych zachodzi:

$$P = |U| |I| \cos \varphi. \quad (5.64)$$

Moc bierna

Moc bierna dla przebiegów sinusoidalnie zmiennych określona jest zależnością

$$Q = |U| |I| \sin \varphi. \quad (5.65)$$

Jednostką mocy biernej jest Var (var). Moc ta jest miarą energii wymienianej między źródłem energii a odbiornikami o charakterze reaktancyjnym (polem elektrycznym kondensatora i polem magnetycznym cewki). Amplituda składowej przemiennej (p_2) mocy chwilowej jest wartością bezwzględną mocy biernej.

Moc symboliczna

Moc symboliczna dwójnika jest liczbą zespoloną o części rzeczywistej równej mocy czynnej oraz części urojonej równej mocy biernej

$$S = P + jQ. \quad (5.66)$$

Podstawiając wzory określające moc czynną i bierną otrzymujemy:

$$S = |U| |I| \cos \varphi + j |U| |I| \sin \varphi = |U| |I| e^{j\varphi}, \quad (5.67)$$

gdzie $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Dalsze przekształcenia prowadzą do zależności

$$S = |U| |I| e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = |U| e^{j\varphi_u} |I| e^{-j\varphi_i} = UI^*, \quad (5.68)$$

gdzie: I^* – wartość zespolona sprzężona z I . Moduł mocy symbolicznej nazywamy mocą pozorną (jednostka VA), a zatem

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = |U| |I|. \quad (5.69)$$

Rozdział 6

Analiza układów liniowych prądu sinusoidalnie zmiennego – przykłady

Przykład 1

Na podstawie przebiegu wartości chwilowej napięcia pokazanego na rys. 6.1 określ jego parametry (częstotliwość, okres, pulsację, wartość maksymalną, skuteczną i średnią, fazę początkową). Zapisz postać chwilową i wartość symboliczną napięcia (uwaga m-oznacza milisekundę).

Analizując wykres wyznaczamy: amplitudę (wartość maksymalną) $U_m = 100$, okres $T = 2 \text{ ms}$, częstotliwość $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ Hz}$, pulsację $\omega = 2\pi f = 1000\pi \frac{\text{r}}{\text{s}}$ oraz fazę początkową $\varphi_u = -2\pi \frac{(-0,25)}{2} = \frac{\pi}{4}$ (co odpowiada 45°). A zatem napięcie opisane jest zależnością chwilową

$$u(t) = 100\sin(1000\pi t + 45^\circ). \quad (6.1)$$

Wartość skuteczna wynosi

$$|U| = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 70,71 \text{ V}, \quad (6.2)$$

wartość średnia $U_{sr} = 0$, a wartość symboliczna

$$U = |U| e^{j\varphi_u} = 70,71 e^{j45^\circ}. \quad (6.3)$$

Przykład 2

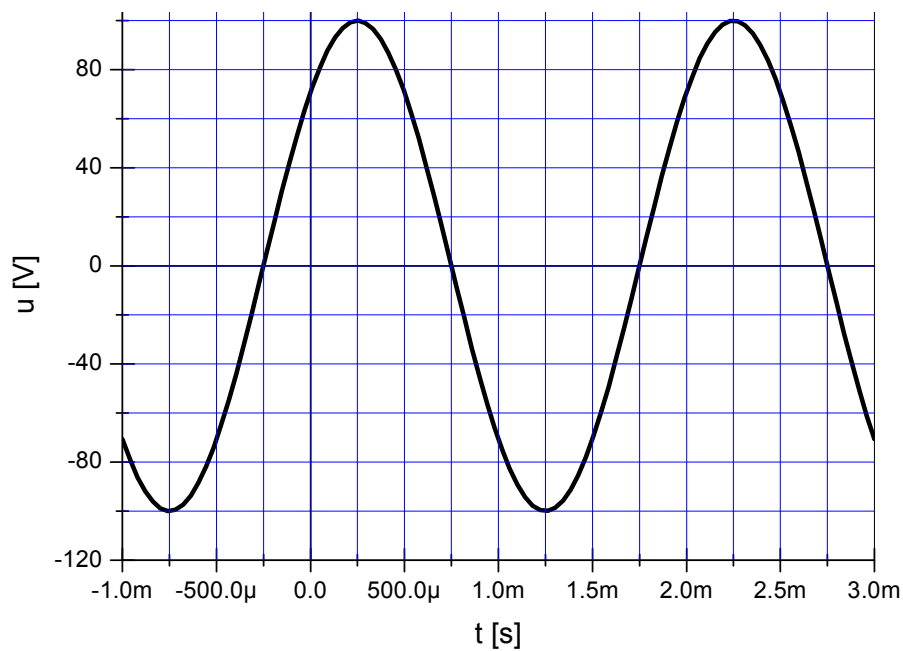
Na podstawie przebiegu wartości chwilowej napięcia pokazanego na rys. 6.2 określ jego parametry (częstotliwość, okres, pulsację, wartość maksymalną, skuteczną i średnią, fazę początkową). Zapisz postać chwilową i wartość symboliczną napięcia (uwaga m-oznacza milisekundę).

Analizując wykres wyznaczamy: amplitudę (wartość maksymalną) $U_m = 200$, okres $T = 10 \text{ ms}$, częstotliwość $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ Hz}$, pulsację $\omega = 2\pi f = 200\pi \frac{\text{r}}{\text{s}}$ oraz fazę początkową $\varphi_u \approx -2\pi \frac{(1,8)}{10} = -65^\circ$. A zatem napięcie opisane jest zależnością chwilową

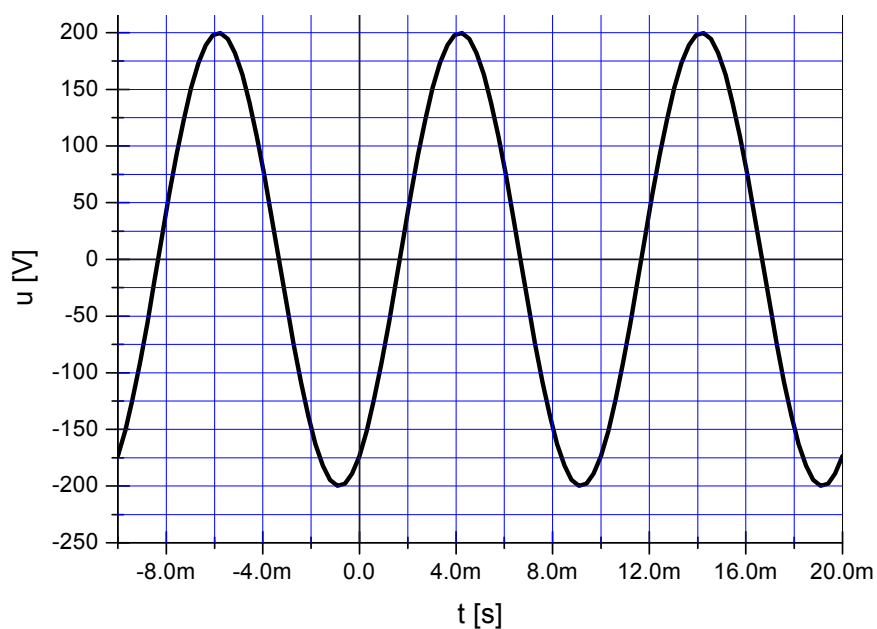
$$u(t) = 200\sin(200\pi t - 65^\circ). \quad (6.4)$$

Wartość skuteczna wynosi

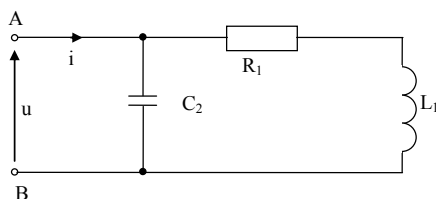
$$|U| = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 141,42 \text{ V}, \quad (6.5)$$



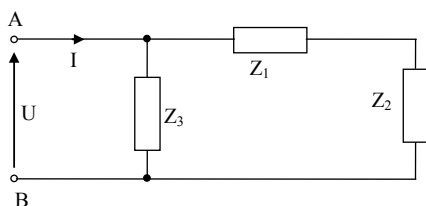
Rys. 6.1. Przykładowy przebieg sinusoidalny rozpatrywany w przykładzie 1



Rys. 6.2. Przykładowy przebieg sinusoidalny rozpatrywany w przykładzie 2



Rys. 6.3. Układ rozpatrywany w przykładzie 3



Rys. 6.4. Schemat układu rozpatrywanego w przykładzie 3 dla metody symbolicznej

wartość średnia $U_{sr} = 0$, a wartość symboliczna

$$U = |U| e^{j\varphi_u} = 141,42 e^{-j65^\circ}. \quad (6.6)$$

Przykład 3

Wyznacz impedancję układu pokazanego na rys. 6.3 widzianą z zacisków AB. Jaki charakter ma ten układ? Wyznacz rezystancję i reaktancję dwójnika. Dane: $R_1 = 200 \Omega$, $L_1 = 10 \text{ mH}$, $C_2 = 33 \text{ nF}$, $f = 5000 \text{ Hz}$.

W celu rozwiązania zadania wyznaczmy impedancje poszczególnych elementów, a następnie wykorzystamy wzory na połączenia szeregowe i równoległe. Oznaczając przez Z_1 impedancję opornika linowego, przez Z_2 impedancję cewki oraz przez Z_3 impedancję kondensatora (wszystkie elementy są oczywiście liniowe) otrzymujemy schemat układu dla metody symbolicznej pokazany na rys. 6.4, gdzie

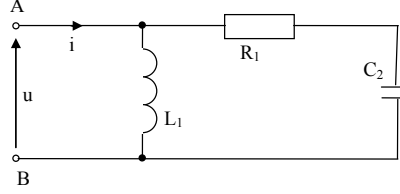
$$Z_1 = R_1 = 200 \Omega, \quad (6.7)$$

$$Z_2 = j\omega L_1 = j2 \cdot \pi \cdot 5000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \approx j314 \Omega, \quad (6.8)$$

$$Z_3 = -j \frac{1}{\omega C_2} = -j \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 5000 \cdot 33 \cdot 10^{-9}} \approx -j965 \Omega. \quad (6.9)$$

Impedancje Z_1 oraz Z_2 połączone są szeregowo, a zatem ich zastępcza impedancja, oznaczona jako Z_a wynosi

$$Z_a = Z_1 + Z_2 = (200 + j314) \Omega. \quad (6.10)$$



Rys. 6.5. Układ rozpatrywany w przykładzie 4

Impedancje Z_a oraz Z_3 są połączone równolegle, a zatem zastępcza impedancja całego układu, oznaczona jako Z_u wynosi

$$Z_u = \frac{Z_a Z_3}{Z_a + Z_3} = \frac{(200 + j314)(-j965)}{200 + j314 - j965} \approx (402 + j342) \Omega \approx 528e^{j40,4^\circ}. \quad (6.11)$$

A zatem układ ma charakter indukcyjny (część urojona impedancji dodatnia, argument impedancji dodatni. Rezystancja dwójnika jest równa części rzeczywistej impedancji i wynosi $R_u = 402 \Omega$, reaktancja dwójnika, równa części urojonej impedancji, jest równa $X_u = 342 \Omega$. Moduł impedancji wynosi $|Z_u| = 528 \Omega$, a argument impedancji, równy kątowi przesunięcia między napięciem (u) i prądem (i) na tym dwójniku $\phi = 40,4^\circ$.

Przykład 4

Wyznacz impedancję układu pokazanego na rys. 6.5 widzianą z zacisków AB. Jaki charakter ma ten układ? Wyznacz rezystancję i reaktancję dwójnika. Dane: $R_1 = 100 \Omega$, $\omega L_1 = 100 \Omega$, $\frac{1}{\omega C_2} = 500 \Omega$, $f = 500 \text{ Hz}$. Jakie są wartości indukcyjności i pojemności w tym układzie?

W celu rozwiązania zadania wyznaczmy impedancje poszczególnych elementów, a następnie wykorzystamy wzory na połączenia szeregowe i równoległe. Oznaczając przez Z_1 impedancję opornika linowego, przez Z_2 impedancję kondensatora oraz przez Z_3 impedancję cewki liniowej) otrzymujemy schemat układu dla metody symbolicznej pokazany na rys. 6.6, gdzie

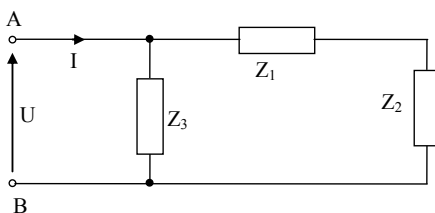
$$Z_1 = R_1 = 100 \Omega, \quad (6.12)$$

$$Z_2 = -j \frac{1}{\omega C_2} = -j500 \Omega. \quad (6.13)$$

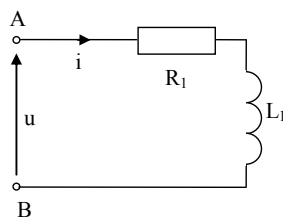
$$Z_3 = j\omega L_1 = j100 \Omega, \quad (6.14)$$

Impedancje Z_1 oraz Z_2 połączone są szeregowo, a zatem ich zastępcza impedancja, oznaczona jako Z_a wynosi

$$Z_a = Z_1 + Z_2 = (100 - j500) \Omega. \quad (6.15)$$



Rys. 6.6. Schemat układu rozpatrywanego w przykładzie 4 dla metody symbolicznej



Rys. 6.7. Układ rozpatrywany w przykładzie 5

Impedancje Z_a oraz Z_3 są połączone równolegle, a zatem zastępcza impedancja całego układu, oznaczona jako Z_u wynosi

$$Z_u = \frac{Z_a Z_3}{Z_a + Z_3} = \frac{(100 - j500)(j100)}{100 + j100 - j500} \approx (6 + j124) \Omega \approx 124e^{j87,3^\circ}. \quad (6.16)$$

A zatem układ ma charakter indukcyjny (część urojona impedancji dodatnia, argument impedancji dodatni). Rezystancja dwójnika jest równa części rzeczywistej impedancji i wynosi $R_u = 6 \Omega$, reaktancja dwójnika, równa części urojonej impedancji, jest równa $X_u = 124 \Omega$. Moduł impedancji wynosi $|Z_u| = 124 \Omega$, a argument impedancji $\phi = 87,3^\circ$. Na podstawie danych liczbowych wyznaczmy wartości indukcyjności i pojemności, $L_1 = \frac{100}{\omega} = \frac{100}{2 \cdot \pi \cdot 500} = 31,8 \text{ mH}$, $C_1 = \frac{1}{500\omega} = \frac{1}{500 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 500} = 636,6 \text{ nF}$.

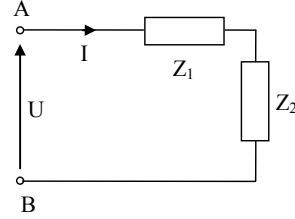
Przykład 5

Przez dwójnik pokazany na rys. 6.7 płynie prąd $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(314t + 45^\circ) \text{ mA}$. Oblicz chwilową wartość napięcia na tym dwójniku, napięcia na poszczególnych elementach oraz moc czynną i bierną dwójnika. Dane: $R_1 = 1000 \Omega$, $\omega L_1 = 2000 \Omega$.

W celu rozwiązania zadania wyznaczmy najpierw impedancje poszczególnych elementów. Oznaczając przez Z_1 impedancję opornika linowego, przez Z_2 impedancję cewki otrzymujemy schemat układu dla metody symbolicznej pokazany na rys. 6.8, gdzie

$$Z_1 = R_1 = 1000 \Omega, \quad (6.17)$$

$$Z_2 = j\omega L_1 = j2000 \Omega. \quad (6.18)$$



Rys. 6.8. Schemat układu rozpatrywanego w przykładzie 5 dla metody symbolicznej

Impedancje Z_1 oraz Z_2 połączone są szeregowo, a zatem ich zastępcza impedancja, oznaczona jako Z wynosi

$$Z = Z_1 + Z_2 = 1000 + j2000 \Omega. \quad (6.19)$$

Wartość symboliczna prądu płynącego przez impedancję Z , a zatem i poszczególne elementy wynosi

$$I = 0,005e^{j45^\circ}. \quad (6.20)$$

Ze wzoru definicyjnego impedancji, po przekształceniu, mamy

$$U = ZI = (1000 + j2000) \cdot 0,005e^{j45^\circ} = 11,18e^{j108,4^\circ}. \quad (6.21)$$

Stąd wartość chwilowa napięcia na dwójniku wynosi

$$u(t) = 11,18\sqrt{2} \sin(314t + 108,4^\circ) \text{ V}. \quad (6.22)$$

Napięcia na poszczególnych elementach wyznaczmy analogicznie, i tak

$$U_{R_1} = Z_1 I = 1000 \cdot 0,005e^{j45^\circ} = 5e^{j45^\circ}, \quad (6.23)$$

$$u_{R_1}(t) = 5\sqrt{2} \sin(314t + 45^\circ) \text{ V}, \quad (6.24)$$

$$U_{L_1} = Z_2 I = j2000 \cdot 0,005e^{j45^\circ} = 10e^{j125^\circ}, \quad (6.25)$$

$$u_{L_1}(t) = 10\sqrt{2} \sin(314t + 135^\circ) \text{ V}. \quad (6.26)$$

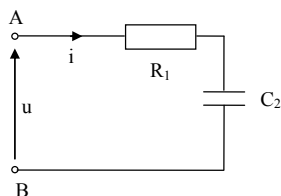
Oczywiście z NPK dla wartości symbolicznych

$$U = U_{R_1} + U_{L_1} = 5e^{j45^\circ} + 10e^{j135^\circ} = 11,18e^{j108,4^\circ}. \quad (6.27)$$

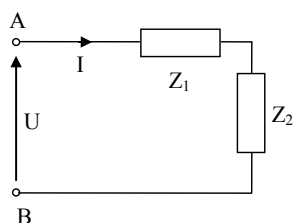
Obecnie obliczmy moc czynną i bierną dwójnika

$$P = |U| |I| \cos \varphi = |U| |I| \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 11,18 \cdot 0,005 \cdot \cos(108,4^\circ - 45^\circ) = 25 \text{ mW}, \quad (6.28)$$

$$Q = |U| |I| \sin \varphi = |U| |I| \sin(\varphi_u - \varphi_i) = 11,18 \cdot 0,005 \cdot \sin(108,4^\circ - 45^\circ) = 0,05 \text{ var}. \quad (6.29)$$



Rys. 6.9. Układ rozpatrywany w przykładzie 6



Rys. 6.10. Schemat układu rozpatrywanego w przykładzie 6 dla metody symbolicznej

Przykład 6

Przez dwójnik pokazany na rys. 6.9 płynie prąd $i(t) = 100\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ)$ mA. Oblicz chwilową wartość napięcia na tym dwójniku, napięcia na poszczególnych elementach oraz moc czynną i bierną dwójnika. Dane: $R_1 = 1000 \Omega$, $\frac{1}{\omega C_2} = 500 \Omega$.

Wyznamy najpierw impedancje poszczególnych elementów, Z_1 – impedancję opornika linowego i Z_2 impedancję kondensatora oraz narysujemy schemat układu dla metody symbolicznej pokazany na rys. 6.10, gdzie

$$Z_1 = R_1 = 1000 \Omega, \quad (6.30)$$

$$Z_2 = -j \frac{1}{\omega C_2} = -j500 \Omega. \quad (6.31)$$

Impedancje Z_1 oraz Z_2 połączone są szeregowo, a zatem ich zastępcza impedancja, oznaczona jako Z wynosi

$$Z = Z_1 + Z_2 = 1000 - j500 \Omega. \quad (6.32)$$

Wartość symboliczna prądu płynącego przez impedancję Z , a zatem i przez poszczególne elementy wynosi

$$I = 0,1e^{j30^\circ}. \quad (6.33)$$

Po przekształceniu wzoru definicyjnego impedancji mamy

$$U = ZI = (1000 - j500) \cdot 0,1e^{j30^\circ} = 111,8e^{j3,4^\circ}. \quad (6.34)$$

Stąd wartość chwilowa napięcia na dwójniku wynosi

$$u(t) = 111,8\sqrt{2} \sin(314t + 3,4^\circ) \text{ V.} \quad (6.35)$$

Napięcia na poszczególnych elementach wynoszą

$$U_{R_1} = Z_1 I = 1000 \cdot 0,1e^{j30^\circ} = 100e^{j30^\circ}, \quad (6.36)$$

$$u_{R_1}(t) = 100\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ) \text{ V,} \quad (6.37)$$

$$U_{C_2} = Z_2 I = -j500 \cdot 0,1e^{j30^\circ} = 50e^{-j60^\circ}, \quad (6.38)$$

$$u_{C_2}(t) = 50\sqrt{2} \sin(314t - 60^\circ) \text{ V.} \quad (6.39)$$

Oczywiście z NPK dla wartości symbolicznych

$$U = U_{R_1} + U_{C_2} = 100e^{j30^\circ} + 50e^{-j60^\circ} = 111,8e^{j3,4^\circ}. \quad (6.40)$$

Obecnie obliczymy moc czynną i bierną dwójnika

$$P = |U| |I| \cos \varphi = |U| |I| \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 111,8 \cdot 0,1 \cdot \cos(3,4^\circ - 30^\circ) = 10 \text{ W,} \quad (6.41)$$

$$Q = |U| |I| \sin \varphi = |U| |I| \sin(\varphi_u - \varphi_i) = 111,8 \cdot 0,1 \cdot \sin(3,4^\circ - 30^\circ) = -5 \text{ var.} \quad (6.42)$$

Przykład 7

Jeżeli napięcie na dwójniku określone jest wzorem: $u(t) = 230\sqrt{2} \sin(314t - 30^\circ)$ V, a prąd $i(t) = 2\sqrt{2} \sin(314t + 45^\circ)$ A, wyznaczyć: moc czynną, bierną, pozorną oraz symboliczną układu. Jaki jest charakter dwójnika?

Poszukiwane moce obliczymy ze wzorów

$$P = |U| |I| \cos \varphi = |U| |I| \cos(\varphi_u - \varphi_i), \quad (6.43)$$

$$Q = |U| |I| \sin \varphi = |U| |I| \sin(\varphi_u - \varphi_i), \quad (6.44)$$

$$S = P + jQ, \quad (6.45)$$

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = |U| |I|. \quad (6.46)$$

Podstawiając dane liczbowe znajdujemy:

$$P = 230 \cdot 2 \cdot \cos(-30^\circ - 45^\circ) = 119 \text{ W}, \quad (6.47)$$

$$Q = 230 \cdot 2 \cdot \sin(-30^\circ - 45^\circ) \approx -444,3 \text{ var}, \quad (6.48)$$

$$S = 119 - j444,3, \quad (6.49)$$

$$|S| = 230 \cdot 2 \text{ VA}. \quad (6.50)$$

Ponieważ moc bierna jest ujemna dwójnik ma charakter pojemnościowy. Świadczy o tym również kąt $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -75^\circ$.

Przykład 8

Jeżeli napięcie na dwójniku określone jest wzorem: $u(t) = 230\sqrt{2} \sin(314t - 30^\circ)$ V, a prąd $i(t) = 2\sqrt{2} \sin(314t + 45^\circ)$ A, wyznaczyć: impedancję, admitancję, rezystancję i reaktancję dwójnika. Jaki jest charakter tego dwójnika? Narysuj najprostszą realizację tego dwójnika, przyjmując wartości z szeregu E96 (link do szeregu).

Korzystamy z metody symbolicznej, definicji impedancji i admitancji. Zapiszemy napięcie i prąd w postaci symbolicznej otrzymując:

$$U = 230e^{-j30^\circ}, \quad (6.51)$$

$$I = 2e^{j45^\circ}. \quad (6.52)$$

Następnie z definicji obliczymy impedancję i zapiszemy ją w postaci trygonometrycznej

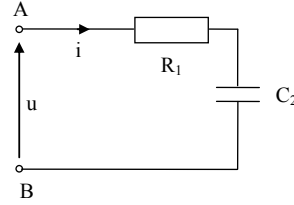
$$Z = \frac{U}{I} = \frac{230e^{-j30^\circ}}{2e^{j45^\circ}} = 115e^{-j75^\circ} = (29,76 - j111,1) \Omega. \quad (6.53)$$

Rezystancja dwójnika jest równa części rzeczywistej impedancji i wynosi $R = 29,76 \Omega$, reaktancja dwójnika, równa części urojonej impedancji, jest równa $X = -111,1 \Omega$. Zatem dwójnik ma charakter pojemnościowy. Admitancja, jako odwrotność impedancji wynosi

$$Y = \frac{1}{Z} = 8,7e^{j75^\circ} = (2,25 \cdot 10^{-3} + j8,40 \cdot 10^{-3}) \text{ S}. \quad (6.54)$$

Najprostszą realizacją dwójnika jest więc połączenie szeregowo (lub równoległe, oczywiście elementów o innych wartościach) rezystora liniowego i kondensatora liniowego, pokazane na rys. 6.11. Rezystor ma wartość równą części rzeczywistej impedancji, czyli $R_1 = 29,76 \Omega$, natomiast kondensator ma reaktancję równą $X = -111,1 \Omega$. Ponieważ reaktancja kondensatora $X = -\frac{1}{\omega C_2}$, więc $C_2 = \frac{1}{\omega \cdot 111,1} = \frac{1}{314 \cdot 111,1} = 28,6 \mu\text{F}$. Najbliższe wartości występujące w szeregu E96 to $R_1 = 30,1 \Omega$ oraz $C_2 = 28,7 \mu\text{F}$. Podstawiając te wartości otrzymujemy

$$Z = (30,1 - j110,96) \Omega. \quad (6.55)$$



Rys. 6.11. Układ rozpatrywany w przykładzie 8

Przykład 9

Jeżeli napięcie na dwójniku o impedancji $Z = (100 - j150) \Omega$ określone jest wzorem: $u(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t + 50^\circ)$ V oblicz chwilową wartość prądu $i(t)$ oraz moc czynną. Jaki charakter ma ten dwójnik? Narysuj najprostszą realizację tego dwójnika, przyjmując wartości z szeregu E24 (link do szeregu).

Korzystamy z metody symbolicznej, definicji impedancji. Zapiszemy napięcie w postaci symbolicznej otrzymując:

$$U = 100e^{j50^\circ}, \quad (6.56)$$

Następnie z definicji obliczymy prąd

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100e^{j50^\circ}}{100 - j150} = 0,555e^{j106,6^\circ}. \quad (6.57)$$

Stąd wartość chwilowa prądu przez dwójnik wynosi

$$i(t) = 0,555\sqrt{2} \sin(1000t + 106,6^\circ) \text{ A}. \quad (6.58)$$

Moc czynna dwójnika wynosi

$$P = |U| |I| \cos \varphi = |U| |I| \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 100 \cdot 0,555 \cdot \cos(50^\circ - 106,6^\circ) = 30,55 \text{ W}. \quad (6.59)$$

Dwójnik ma charakter pojemnościowy, gdyż $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -56,6^\circ$ (można to też stwierdzić bezpośrednio z impedancji, gdyż posiada ona ujemną część urojoną). Najprostszą realizacją dwójnika będzie połączenie szeregowo rezystora liniowego i kondensatora liniowego. Rezystor ma wartość równą części rzeczywistej impedancji, czyli $R = 100 \Omega$, natomiast kondensator ma reaktancję równą $X = -150 \Omega$. Ponieważ reaktancja kondensatora $X = -\frac{1}{\omega C}$, więc $C = \frac{1}{\omega \cdot 150} = \frac{1}{1000 \cdot 150} = 6,67 \mu\text{F}$. Najbliższe wartości występujące w szeregu E24 to $R = 100 \Omega$ oraz $C = 6,8 \mu\text{F}$. Podstawiając te wartości otrzymujemy

$$Z = (100 - j147,06) \Omega. \quad (6.60)$$

Przykład 10

Jeżeli przez dwójnik o impedancji $Z = (100 + j300) \Omega$ płynie prąd $i(t) = 1\sqrt{2} \sin(1000t + 20^\circ)$ A oblicz chwilową wartość napięcia na tym dwójniku oraz moc czynną. Jaki charakter ma ten dwójnik? Narysuj najprostszą realizację tego dwójnika.

Korzystamy z metody symbolicznej oraz definicji impedancji. Zapiszemy prąd w postaci symbolicznej otrzymując:

$$I = 1e^{j20^\circ}, \quad (6.61)$$

Po przekształceniu wzoru definicyjnego na impedancję mamy

$$U = ZI = (100 + j300) \cdot 1e^{j20^\circ} = 316,23e^{j91,56^\circ}. \quad (6.62)$$

Stąd wartość chwilowa napięcia na dwójniku wynosi

$$u(t) = 316,23\sqrt{2} \sin(1000t + 91,56^\circ) \text{ V}. \quad (6.63)$$

Moc czynna dwójnika wynosi

$$P = |U| |I| \cos \varphi = |U| |I| \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 316,23 \cdot 1 \cdot \cos(91,56^\circ - 20^\circ) = 100 \text{ W}. \quad (6.64)$$

Dwójnik ma charakter indukcyjny, gdyż impedancja ma dodatnią część urojoną. Najprostszą realizacją dwójnika będzie połączenie szeregowo rezystora liniowego i cewki liniowej. Rezystor ma wartość równą części rzeczywistej impedancji, czyli $R = 100 \Omega$, natomiast cewka ma reaktancję równą $X = 300 \Omega$. Ponieważ reaktancja cewki $X = \omega L$, więc $L = \frac{X}{\omega} = \frac{300}{1000} = 300 \text{ mH}$.

Przykład 11

Na podstawie wartości chwilowej napięcia $u(t) = 300\sqrt{2} \sin(20000t + 30^\circ)$ V określ amplitudę, wartość skuteczną, częstotliwość, okres oraz fazę początkową. Zapisz wartość symboliczną tego napięcia.

Analizując zapis wyznaczamy: amplitudę (wartość maksymalną) $U_m = 300 \text{ V}$, pulsację $\omega = 20000 \frac{\text{r}}{\text{s}}$, okres $T = \frac{2\pi}{\omega} = 314 \mu\text{s}$, częstotliwość $f = \frac{1}{T} = 3183 \text{ Hz}$ oraz fazę początkową $\varphi_u = 30^\circ$.

Wartość skuteczna wynosi

$$|U| = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 212,13 \text{ V}, \quad (6.65)$$

a wartość symboliczna

$$U = |U| e^{j\varphi_u} = 212,13e^{j30^\circ}. \quad (6.66)$$

Literatura

- [1] **Osiowski J., Szabatin J.**, Podstawy Teorii Obwodów, t.I, WNT, Warszawa 1992.
- [2] **Osowski S., Siwek K., Śmiałek M.**, Teoria Obwodów – podręcznik multimedialny, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2006.
- [3] **Tadeusiewicz M.**, Teoria obwodów. Część I., Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2000.