

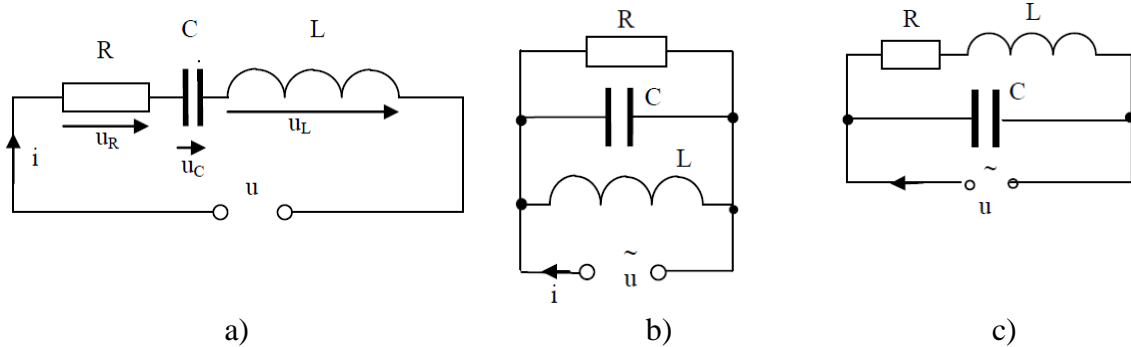
Politechnika Łódzka  
Instytut Systemów Inżynierii Elektrycznej

## **Instrukcja do ćwiczenia**

Rezonans w obwodach elektrycznych

## Rezonans w obwodach elektrycznych

Każdy obwód elektryczny można przedstawić w postaci połączenia rezystancji  $R$ , indukcyjności  $L$  i pojemności  $C$ . W każdym z trzech rodzajów rzeczywistych elementów pasywnych obwodu dominuje jedna z tych wielkości, a mianowicie: w rezystorach (opornikach) -  $R$ , w cewkach -  $L$  i w kondensatorach -  $C$ . Można je łączyć w sposób szeregowy, równoległy bądź szeregowo- równoległy (mieszany) (rys. 1).



Rys. 1 Schematy obwodów elektrycznych a) szeregowego, b) równoległego, c) mieszanego

Rezystor idealny w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego wpływa tylko na wartość przepływającego przezeń prądu zgodnie z prawem Ohma.

Napięcie na cewce  $u_L$  indukowane pod wpływem zmian prądu  $i$  wynika ze zjawiska samoindukcji:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (1)$$

Po podstawieniu wyrażenia na wartość chwilową prądu (sinusoidalnego)  $i_L = I_{mL} \sin \omega t$  otrzymujemy sinusoidalne napięcie o tej samej pulsacji  $\omega = 2\pi f$ , przesunięte w fazie względem prądu.

$$u_L = U_{mL} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2)$$

Kąt przesunięcia fazowego pomiędzy napięciem i prądem wynosi w tym przypadku

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

Amplitudy napięcia i prądu oraz ich wartości skuteczne spełniają prawo Ohma:

$$\frac{U_{mL}}{I_{mL}} = \frac{U_L}{I_L} = X_L \quad (4)$$

gdzie  $X_L = \omega L = 2\pi f L$  jest reaktancją cewki.

Pomiędzy napięciem i prądem w idealnym kondensatorze zachodzi związek:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (5)$$

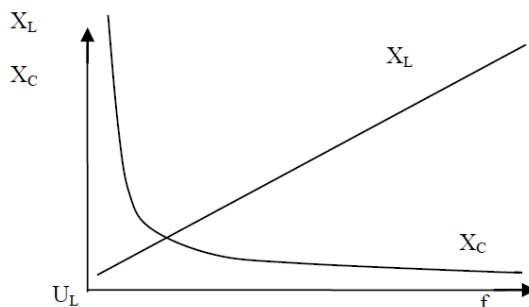
można więc wykazać, że w tym przypadku kąt przesunięcia fazowego  $\varphi = -\pi/2$  a amplitudy i wartości skuteczne spełniają prawo Ohma:

$$\frac{U_{mC}}{I_{mC}} = \frac{U_C}{I_C} = X_C \quad (6)$$

gdzie reaktancja kondensatora:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (7)$$

Obie reaktancje są więc zależne od częstotliwości  $f$  prądu sinusoidalnego, co ilustruje rys.2.



Rys. 2. Zależność reaktancji  $X_L$  i  $X_C$  od częstotliwości.

Przy różnych sposobach łączenia R, L i C kąt przesunięcia fazowego będzie przyjmował wartości od  $-\pi/2$  do  $\pi/2$ , zależne od sposobu połączenia i relacji między reaktancjami i rezystancjami obwodu. Zatem kąt przesunięcia fazowego  $\varphi$ , będący funkcją rezystancji i reaktancji obwodu, również zależy od częstotliwości. Gdy reaktancja wypadkowa obwodu staje się równa zero, to impedancja  $Z = R$  i kąt  $\varphi = 0$ . Obwód ma charakter czysto rezystancyjny. Ten stan obwodu nazywa się **rezonans elektrycznym**.

Przy szeregowym połączeniu elementów RLC może wystąpić rezonans napięć, a przy równoległym - rezonans prądów.

W stanie rezonansu ( $\varphi = 0$ ) moc bierna obwodu wynosi:

$$Q = UI \sin \varphi = 0 \quad (8)$$

a moc czynna

$$P = UI \cos \varphi = UI \quad (9)$$

Oznacza to, że cała energia, pobrana przez obwód ze źródła, zamienia się w ciepło w rezystancji R.

## 1. Rezonans napięć

Rysunek 1a przedstawia obwód, składający się z szeregowo połączonych elementów R, L, C, natomiast rysunek 3 - wykres wskazowy napięć dla tego obwodu. Z wykresu wskazowego (rys.3) wynika, że dla wartości maksymalnych jak i skutecznych napięcia będzie prawdziwa zależność:

$$U = \sqrt{U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \quad (10)$$

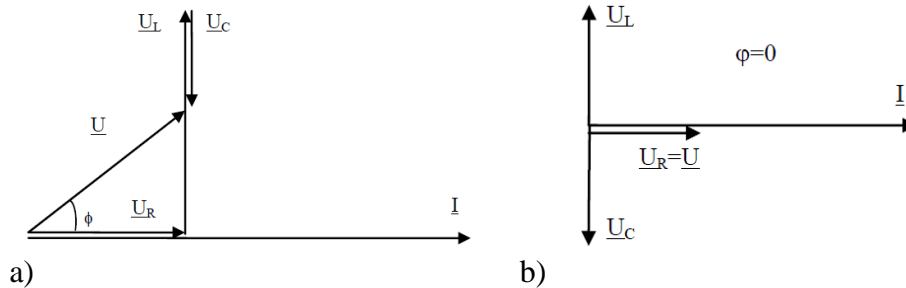
gdzie:  $U=IZ$ ;  $U_R=I_R$ ;  $U_L=IX_L$ ;  $U_C=IX_C$

Impedancja tego obwodu wynosi:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (11)$$

zaś tangens kąta przesunięcia fazowego:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (12)$$



Rys. 3. Wykres wskazowy napięć dla obwodu szeregowego RLC:  
a) gdy  $X_L > X_C$  (kąt  $\varphi > 0$ ), b) gdy  $X_L = X_C$ .

Z podanej poprzednio definicji rezonansu elektrycznego i wzorów (7) i (8) wynika, że w przypadku szeregowego połączenia RLC rezonans wystąpi, gdy reaktancje:  $X_L = X_C$  czyli częstotliwość rezonansowa

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (13)$$

W stanie rezonansu w układzie szeregowym występuje równoważenie się napięć na cewce i na kondensatorze:

$$U_L + U_C = 0 \quad (14)$$

Taki rezonans nazywamy rezonansem napięć. Wartości tych napięć zależą od płynącego prądu i reaktancji. Mogą one wielokrotnie przewyższać wartość napięcia zasilającego  $U$ . Mówimy wówczas, że w obwodzie występują przebiecia. Wartość tych przebieć w stosunku do napięcia zasilającego określa dobroć obwodu rezonansowego szeregowego

$$Q_S = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi f L}{R} \quad (15)$$

W stanie rezonansu napięcie na indukcyjności jest wówczas równe:

$$U_{Lr} = I_r X_{Lr} = \frac{U}{R} X_{Lr} = U Q_{rs} \quad (16)$$

gdzie  $Q_{rs}$  oznacza dobroć obwodu przy częstotliwości rezonansowej.

Ten  $Q_{rs}$  krotny wzrost napięcia na cewce czy na kondensatorze jest zjawiskiem niekorzystnym w obwodach elektroenergetycznych ze względu na możliwość przebicia cewki czy kondensatora.

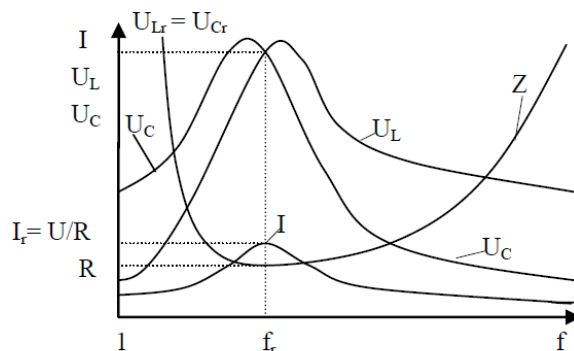
Dla zilustrowania własności obwodu rezonansowego wykreśla się charakterystyki przedstawiające zależność prądu  $I$  i napięć  $U_L$ ,  $U_C$  oraz impedancji  $Z$  od częstotliwości  $f$  napięcia zasilającego obwód. Charakterystyki te, nazywane charakterystykami częstotliwościowymi, otrzymuje się na podstawie poniższych zależności:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (17)$$

$$U_L = IX_L \quad (18)$$

$$U_C = IX_C \quad (19)$$

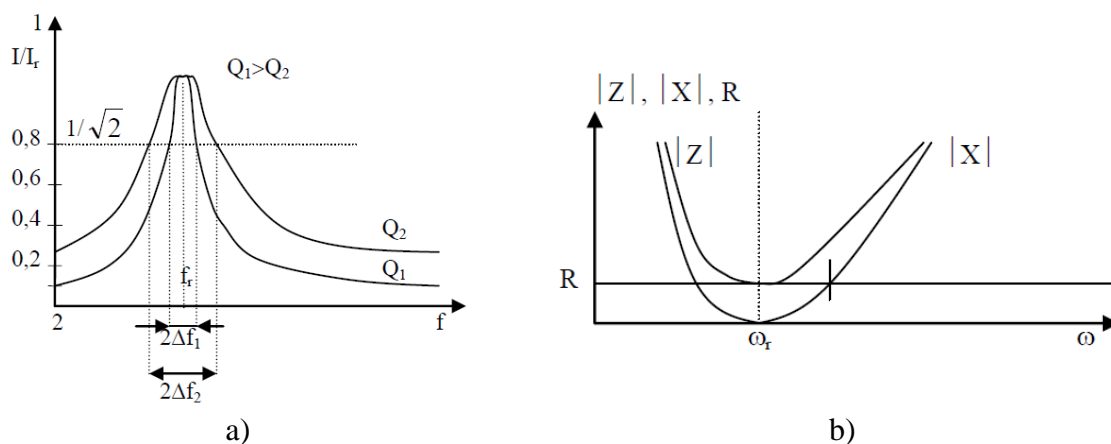
Charakterystyki te przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Charakterystyki częstotliwościowe dla obwodu szeregowego.

Z powyższego rysunku wynika, że obwód ma charakter pojemnościowy dla częstotliwości niższych od częstotliwości rezonansowej  $f < f_r$  - to znaczy: napięcie  $U_C > U_L$  oraz  $X_C > X_L$  w obwodzie płynie wówczas prąd  $I$  o wartości mniejszej niż w rezonansie ( $I < I_r$ ) i wyprzedza napięcie  $U$  o kąt  $\varphi$  ( $\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$ )

Dla częstotliwości wyższych od częstotliwości rezonansowej ( $f > f_r$ ) obwód ma charakter indukcyjny ( $U_L > U_C$ ,  $X_L > X_C$ ,  $\varphi > 0$ ) a prąd  $I < I_r$  opóźnia się w stosunku do napięcia  $U$  o kąt  $\varphi$ . W stanie rezonansu czyli przy częstotliwości  $f = f_r$  reaktancja wypadkowa  $X = X_L - X_C = 0$ , a prąd  $I = I_r$  osiąga największą wartość ograniczoną jedynie rezystancją  $R$ , występującą w obwodzie  $I_r = \frac{U}{R}$ . Obwód można więc doprowadzić do rezonansu zmieniając częstotliwość lub wartość elementów jednego z elementów biernych  $L$  lub  $C$  (w praktyce najczęściej  $C$ ). Wykres zależności prądu  $I/I_r$  od częstotliwości  $f$  w obwodzie nazywany jest krzywą rezonansową obwodu. Kształt tej krzywej zależy od dobroci obwodu. Im większa jest dobroć obwodu rezonansowego, tym bardziej ostra jest krzywa rezonansowa (rysunek 5).



Rys. 5. a) Krzywe rezonansowe obwodów o różnych dobrociach  $Q_1$  i  $Q_2$ .  
b) przebieg impedancji i reaktancji w funkcji pulsacji.

W obwodzie o dużej dobroci (rzędu kilkudziesięciu do kilku tysięcy), nawet przy małych odstrojeniach od częstotliwości rezonansowej, prąd w obwodzie będzie znacznie mniejszy w porównaniu z wartością przy rezonansie. Oznacza to, że tylko źródła o częstotliwościach zbliżonych do częstotliwości rezonansowej mogą spowodować powstanie w nim drgań o dostatecznej intensywności. Obwód przepuszcza drgania w określonym paśmie częstotliwości. Tę jego własność określa się mianem pasma przepuszczania obwodu. Jest to taki zakres (przedział) częstotliwości  $2\Delta f$ , w otoczeniu częstotliwości rezonansowej  $f_r$ , na którego końcach wartość skuteczna prądu  $I$  w obwodzie spada do  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sim 0,707$  wartości prądu przy rezonansie (rys.5). Jak widać z rysunku, im większa jest dobroć obwodu, tym węższe jest jego pasmo przepuszczania. Dobroć obwodu rezonansowego jest w zasadzie określona jakością cewki indukcyjnej, ponieważ w niej koncentrują się prawie wszystkie straty energii w obwodzie (rezystancja drutu cewki jest włączona szeregowo w obwód). Szerokość pasma przepuszczania  $2\Delta f = \frac{f_{rez}}{Q}$  stanowi zwykle 0,3 - 2% częstotliwości rezonansowej obwodu.

Zdolność obwodu do przepuszczania prądów o częstotliwościach zbliżonych do jego częstotliwości rezonansowej i praktycznie nieprzepuszczania prądów o innych częstotliwościach nosi nazwę selektywności obwodu. Selektywność obwodu jest tym większa, im węższe jest jego pasmo przepuszczania, czyli im większa jest jego dobroć.

Selektywność jest szeroko wykorzystywana w radiotechnice. Dzięki niej można np. wydzielić jeden żądany sygnał z ogromnej ich liczby odbieranych przez antenę odbiorczą i doprowadzanych do wejścia odbiornika. Nastrojone na określoną częstotliwość obwody odbiornika łatwo wydzielą i odbiorą sygnał żądanej radiostacji. Sygnały o innych częstotliwościach zostaną wytłumione.

## 2. Rezonans prądów

Rezonans ten występuje w obwodzie równoległym przedstawionym na rysunku 1b). Właściwości równoległego obwodu rezonansowego ilustrują zależności prądów  $I$ ,  $I_C$  i  $I_L$  od częstotliwości  $f$ :

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \quad (20)$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{2\pi f L} \quad (21)$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = U\omega C = U2\pi f C \quad (22)$$

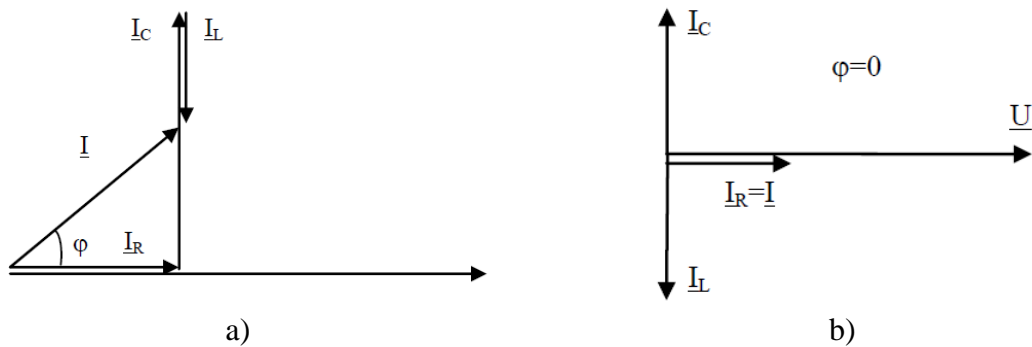
gdzie  $X_L$  i  $X_C$  są przedstawione wzorami (4) i (7).

Na rysunku 6 przedstawiono wykresy wskazowe obwodu równoległego  $RLC$ . Odwrotność impedancji obwodu (tzw. admitancja  $Y$ ) wynosi:

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \quad (23)$$

a tangens kąta przesunięcia fazowego

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} \quad (24)$$



Rys.6. Wykresy wskazowe dla obwodu równoległego: a)  $X_C < X_L$  – obwód o charakterze pojemnościowym  $\varphi < 0$ , b)  $X_C = X_L$  – rezonans prądów  $I_L = I_C$ ,  $\varphi = 0$

Z wykresu wskazowego wynika, że w stanie rezonansu

$$I_L = I_C \quad (25)$$

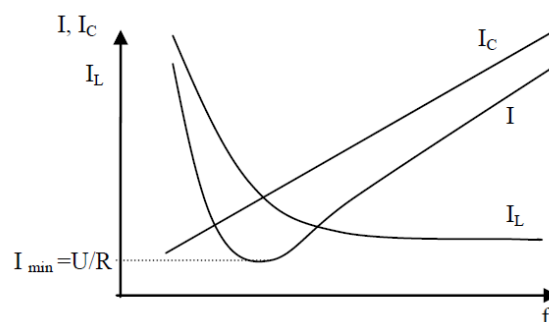
lub uwzględniając wzory (21) i (22)

$$X_L = X_C \quad (26)$$

Impedancja obwodu równoległego w stanie rezonansu  $Z=R$ . Z zależności (24) można określić częstotliwość rezonansową wzorem:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (27)$$

Obwód równoległy można doprowadzić do rezonansu w taki sam sposób jak obwód szeregowy. Na rysunku 7 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe prądów  $I$ ,  $I_C$  i  $I_L$



Rys. 7. Charakterystyki częstotliwościowe obwodu równoległego RLC.

Dobroć obwodu równoległego określa wielkość przetężenia, czyli to, jaką wielokrotność prądu płynącego przez rezystancję stanowi prąd płynący przez kondensator (bądź cewkę):

$$Q_r = \frac{I_L}{I_R} = \frac{I_C}{I_R} = \frac{R}{\omega L} = R\omega C \quad (28)$$

czyli prądy  $I_{Lr} = I_{Cr} = Q_r I$  wielokrotnie przewyższają prąd dopływający do obwodu ze źródła.

## 4 Część wykonawcza

### 4.1 Wprowadzenie do programu QUCS

Dzielnik prądu, dzielnik napięcia.

Uruchom aplikację Qucs

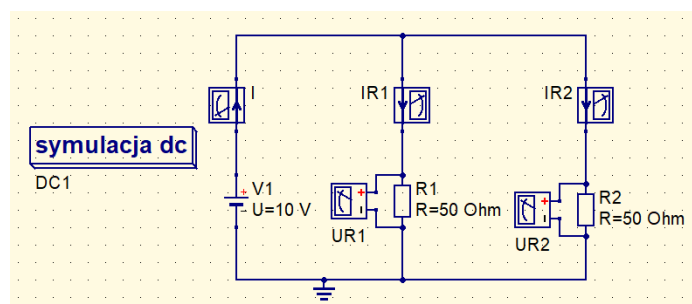
Utwórz nowy projekt przyciskiem **Nowy**, nadaj nazwę i wciśnij **Stwórz**.

Naciśnij przycisk **Zapisz** i podaj nazwę schematu (może być taka jak nazwa projektu).

W oknie edycji schematu umieść następujące elementy:

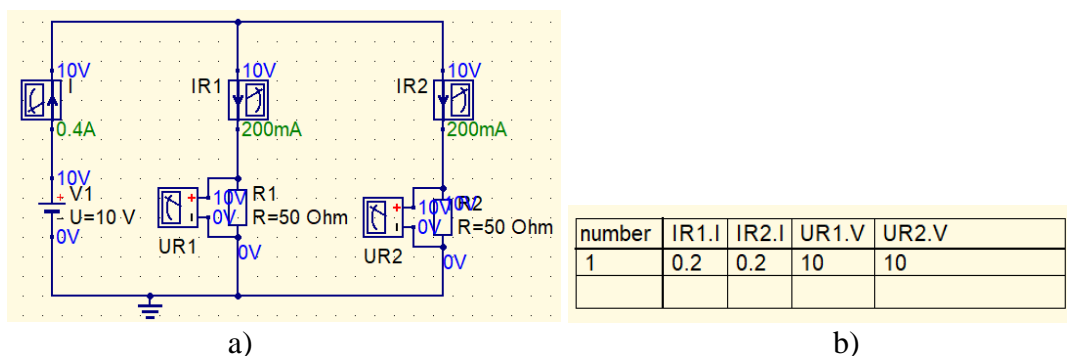
- Opornik 2x
- Źródło napięciowe DC
- Masę
- Miernik prądu 2x
- Miernik napięcia 2x

Połącz układ według schematu na rysunku 1 używając narzędzia **Drut**. Upewnić się, że wszystkie elementy są ze sobą odpowiednio połączone. Miejsca połączeń przewodów z poszczególnymi elementami powinny być oznaczone kropkami tak jak na rysunku 1. Zmiana orientacji elementów oraz mierników prądu i napięcia znajdują się w menu prawego przycisku myszki.



Rys. 1. Schemat układu do badania połączenia równoległego rezystorów (dzielnik prądu).

Ustawić parametry elementów zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1:  $R1=50\Omega$ ,  $R2=50\Omega$ ,  $V1=10V$  (dwukrotnie klikają na element lub zmieniając wartość obok symbolu np.:  $U=10\text{ V}$ ). Umieść na schemacie rodzaj symulacji: **symulacja dc** (tak jak na rys.1). Wykonaj obliczenia: **Symulacja/Oblicz punkt pracy** albo naciśnij **F8**. Wartości prądów i napięć w obwodzie po obliczeniu przedstawia rys. 2. W oknie wyników pomiarów umieść tabelę i wyświetl w niej wartości prądów i napięć na obu rezystorach (rys.2b). Otrzymane wyniki porównać z obliczeniami na podstawie prawa Ohma. Dokonać zmiany parametrów  $R1$ ,  $R2$ ,  $V1$  i zweryfikować ich wpływ na zmianę wartości prądów i napięć.



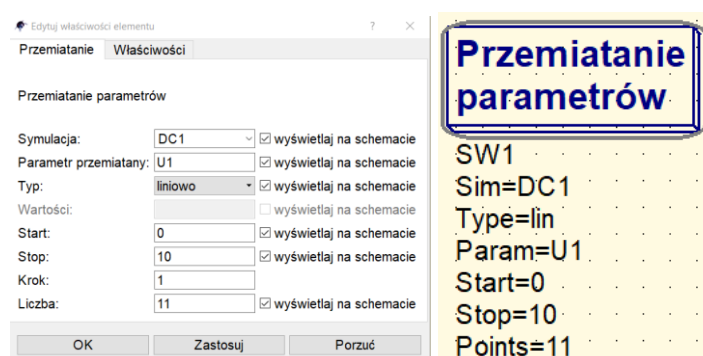
Rys. 2. Wyniki obliczeń: kolorem zielonym oznaczono prąd, kolorem niebieskim potencjał.



Podobną analizę przeprowadzić dla połączenia szeregowego rezystorów. Na podstawie przeprowadzonej analizy zweryfikować istotę działania dzielników prądu i napięcia.

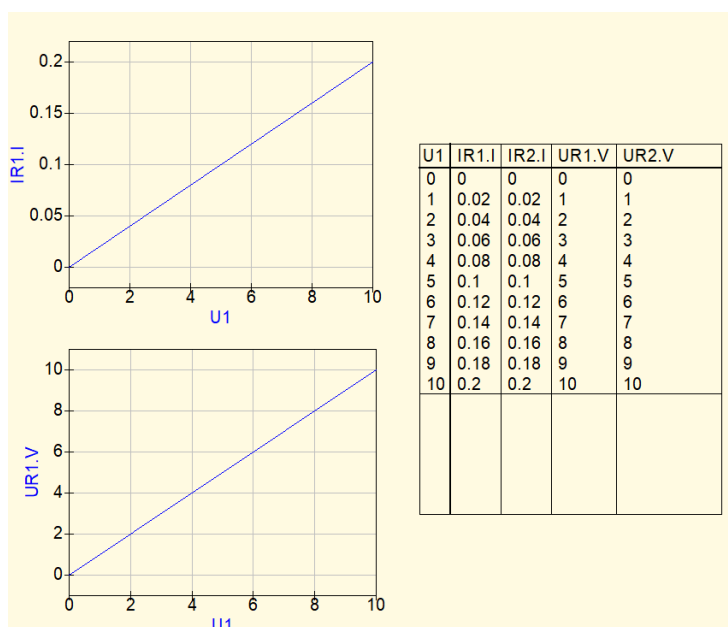
Przemiatanie parametrów.

Uzupełnić schemat z rys 1, umieszczając symulację Swp (przemiatanie parametrów). Uruchomić okno edycji parametrów symulacji. Ustawić parametry symulacji zgodnie z rys. 3.



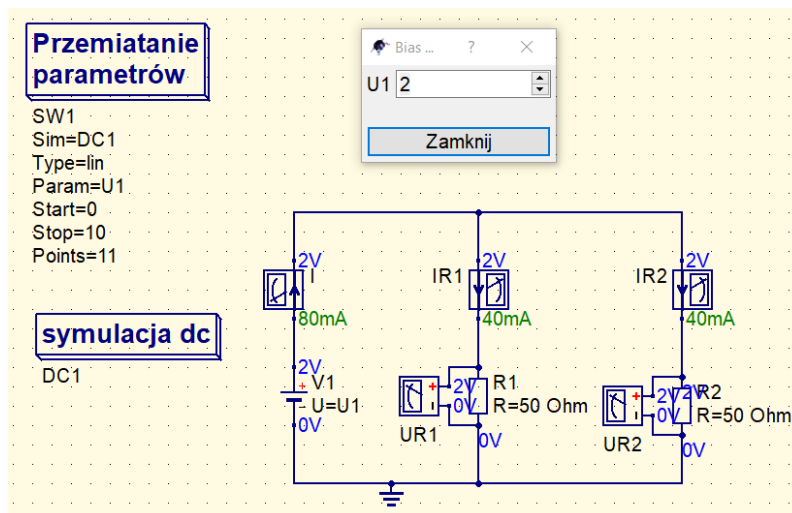
Rys 3. Definicja ustawień symulacji SP

Dokonaj zmiany wartości źródła napięcia V1 (zamiast 10V wpisz nazwę parametru „U1” jaką zdefiniowano w symulacji Swp). Wykonać obliczenia poleceniem **Symuluj (F2)**. W oknie wyników obliczeń umieścić kartezjański układ współrzędnych. W oknie edycji właściwości wykresu dokonać wyboru prądu płynącego przez R1 (IR1.I) oraz w oddzielnym wykresie spadku napięcia na R1 (UR1.V) . Przykładowe wyniki analizy SP przedstawiono na Rys.3. Sprawdzić wpływ ustawień parametrów analizy SP na otrzymane wyniki.



Rys. 4. Wyniki symulacji Swp – zmiana prądu oraz napięcia na R1 w obwodzie pod wpływem zmiany napięcia zasilającego V1.

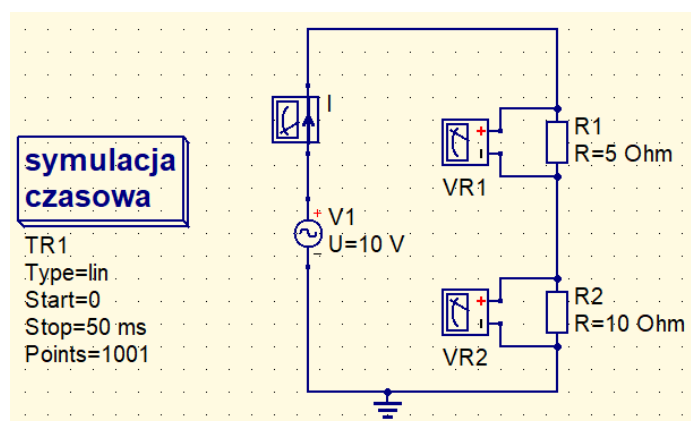
Wykonać polecenie **Oblicz punkt pracy** w celu uzyskania rozkładu prądów w poszczególnych gałęziach dla kolejnych zdefiniowanych punktów obliczeń Swp:



Rys 5. Definicja ustawień symulacji SP

Analiza czasowa przy wymuszeniu sinusoidalnym

Połączyć układ oraz zdefiniować parametry symulacji czasowej Tra według rysunku 6.

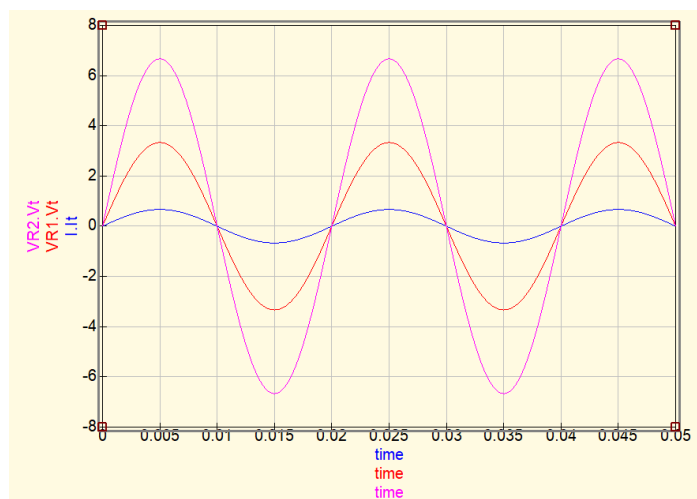


Rys 6. Definicja ustawień symulacji SP

Na schemacie znajdują się następujące elementy:

- źródło napięciowe ac,
- dwa oporniki,
- masa,
- dwa mierniki napięcia ,
- miernik prądu
- parametry symulacji czasowej.

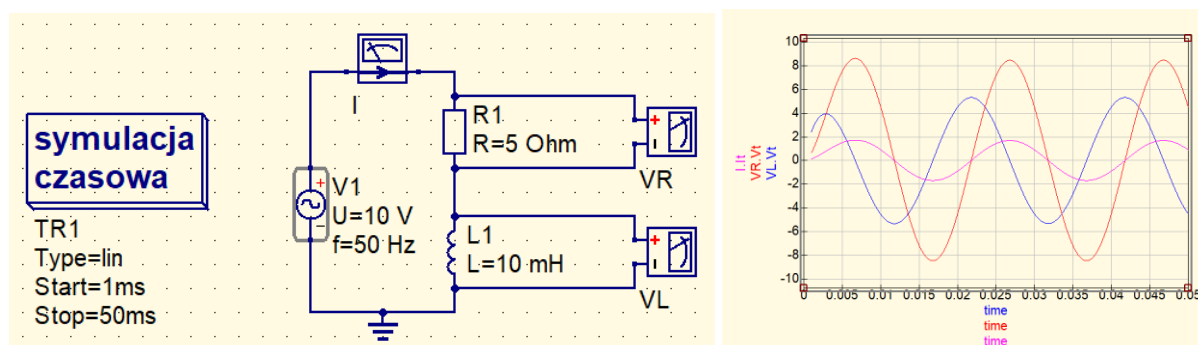
W oknie wyników obliczeń umieścić kartezjański układ współrzędnych. W oknie edycji parametrów wykresu dodać: VR1.Vt (zmiana napięcia na R1 w funkcji czasu); VR2.Vt (zmiana napięcia na R2 w funkcji czasu); I.It (zmiana prądu w gałęzi źródła zasilania w funkcji czasu). Przykładowe wyniki symulacji przedstawiono na rysunku 7.



Rys 7. Zmiana prądu źródła napięcia oraz spadki napięć na R1 i R2 w funkcji czasu.

Zmieniając parametry: V i f źródła napięcia V1 oraz wartość rezystancji rezystorów R1, R2 sprawdzić ich wpływ na uzyskiwane wyniki.

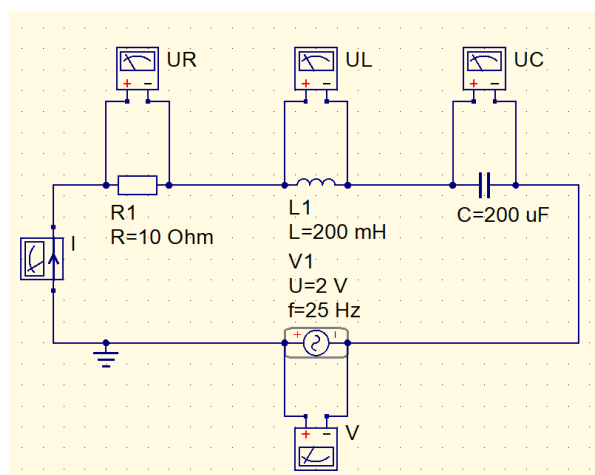
Podobną analizę przeprowadzić dla połączenia szeregowego i równoległego elementów CR i RL. Przykładowe wyniki pokazano na rys. 8.



Rys 8. Wyniki symulacji czasowej połączenia szeregowego elementów RL.

## Rezonans napięć

Połącz obwód według schematu przedstawionego na rysunku 9.



Rys.9 Połączenie szeregowo elementów RLC – rezonans napięć

Przypisz elementom następujące wartości:

$R1=10\Omega$

$L1=200\text{mH}$

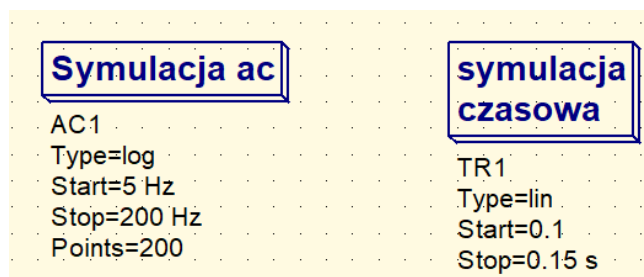
$C1=200\mu\text{F}$

V1 (źródło napięcia ac):  $U=2\text{V}$ ,  $f=50\text{Hz}$


4 x próbnik napięć (zwróć uwagę na orientację zacisków)

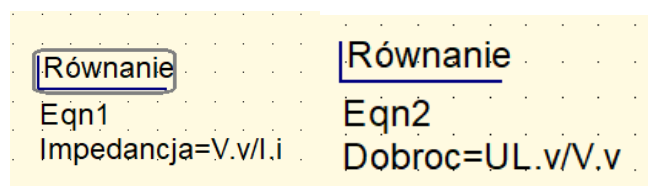
1x próbnik prądu

Umieść w oknie schematu Symulację ac oraz Symulację czasową i ustaw parametry analizy:



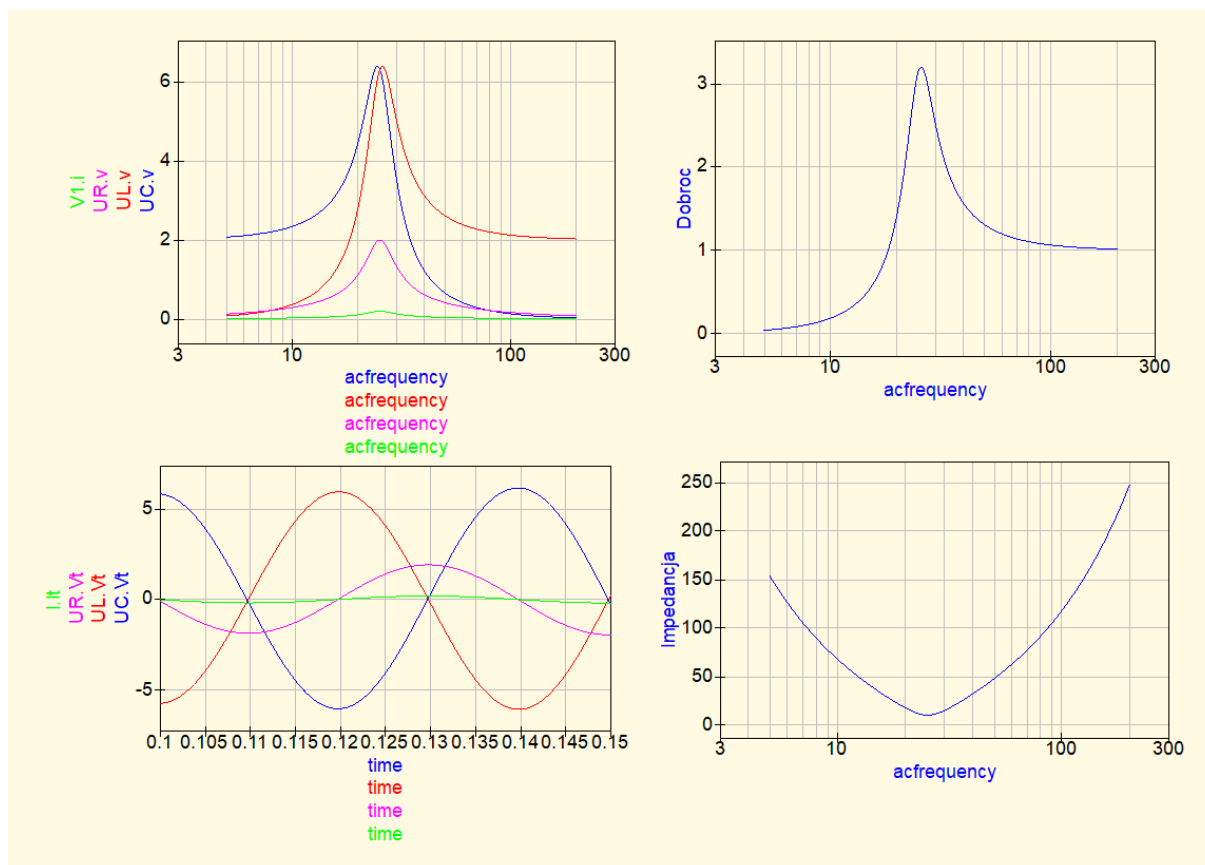
Rys. 10. Parametry symulacji ac i symulacji czasowej

Umieść w oknie schematu dwa równania (symbol ) i wpisz równania obliczające impedancję oraz dobroć układu:



Rys. 11. Definiowanie równań na impedancję oraz dobrość obwodu

Zapisz projekt i wykonaj symulację. W wynikach obliczeń umieść cztery Kartezjańskie układy współrzędnych i przypisz im wyświetlanie wartości zgodnie z rysunkami. W razie konieczności zmień skalę na logarytmiczną.



Rys.13 przykładowe wyniki obliczeń połączenia szeregowego RLC.

Wyznacz krzywe rezonansowe dla wartości zapisanych w tabeli 1. Odczytaj z wykresów częstotliwość rezonansową oraz dobroć układu. Oblicz częstotliwość rezonansową i porównaj z wyznaczoną z wykresów. Wyniki wpisać w tabeli 1. Krzywe rezonansowe poszczególnych przypadków zamieścić w sprawozdaniu. Wykresy napięcia na poszczególnych elementach RLC wykonać dla częstotliwości rezonansowych oraz dowolnych, podanych przez prowadzącego.

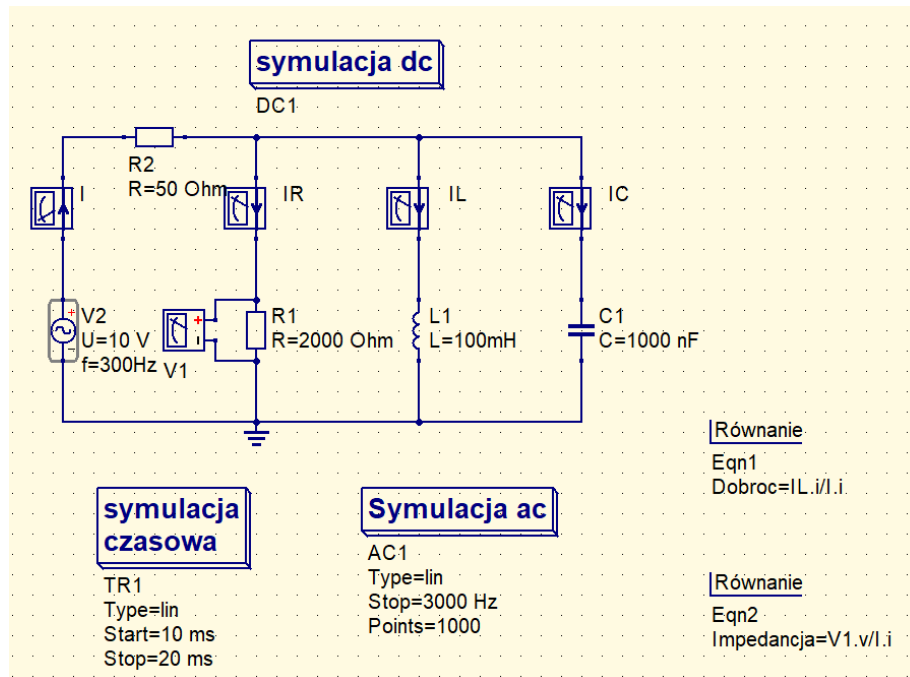
Tabela 1

R $\Omega$	L mH	C $\mu\text{F}$	$f_{r \text{ obl}}$ Hz	$f_{r \text{ pom.}}$ Hz	Q
30	200	200			
20	200	200			
10	200	200			
10	200	100			
10	200	50			
10	200	20			
10	100	200			
10	50	200			
10	20	200			

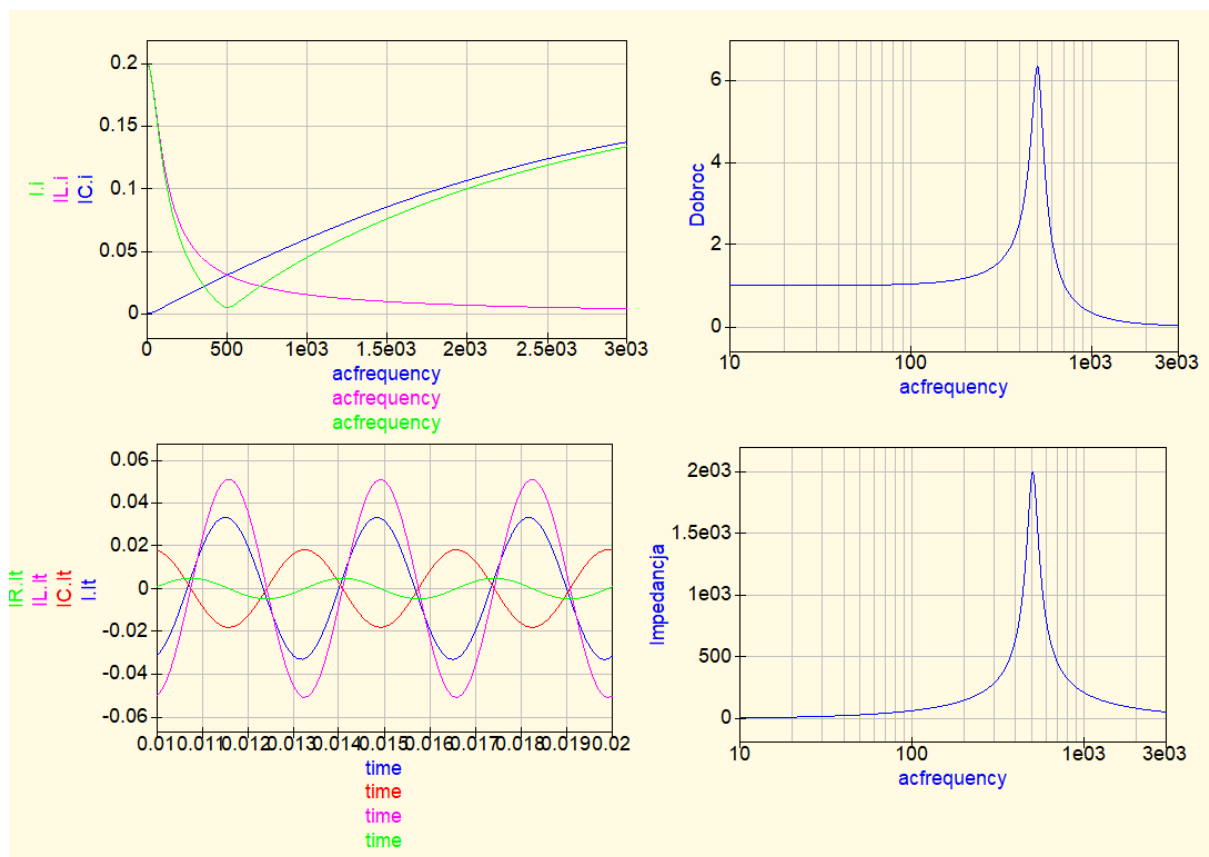
Uzasadnić jaki wpływ na krzywą rezonansową mają parametry R, L, C.

## Rezonans prądów

W analogiczny sposób przeanalizować przypadek rezonansu prądów.



Rys.14 Połączenie równoległe elementów RLC – rezonans prądów (wartości RLC, źródła napięcia i parametry symulacji wstępnie ustawić zgodnie z rysunkiem).



Rys.15 Przykładowe wyniki obliczeń połączenia równoległego RLC.

Wyznacz krzywe rezonansowe dla wartości zapisanych w tabeli 2. Odczytaj z wykresów częstotliwość rezonansową oraz dobroć układu. Oblicz częstotliwość rezonansową i porównaj z wyznaczoną z wykresów. Wyniki wpisać w tabeli 2. Krzywe rezonansowe poszczególnych przypadków zamieścić w sprawozdaniu. Wykresy prądów płynących przez poszczególne elementy RLC wykonać dla częstotliwości rezonansowych oraz dowolnych podanych przez prowadzącego.

**Tabela 1**

R k $\Omega$	L mH	C nF	f <sub>r obl</sub> Hz	f <sub>r pom.</sub> Hz	Q
1	100	1000			
2	100	1000			
4	100	1000			
4	50	1000			
4	200	1000			
4	500	1000			
4	100	2000			
4	100	5000			
4	100	10000			