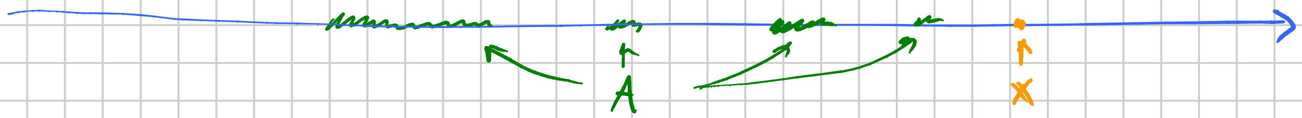
Lezione 3 - Analisi Matematica

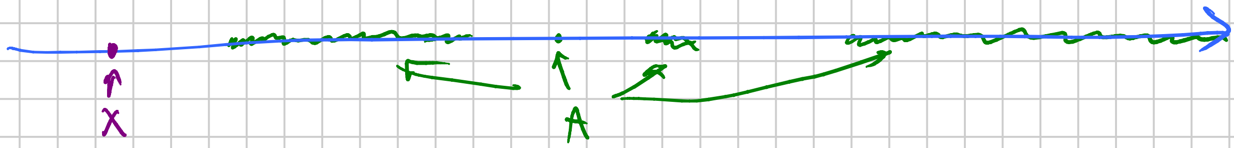
Titolo nota 27/09/2022

Definizione: Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice

- limitato SUPERIORMENTE (o dall'alto) se $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq x \quad \forall a \in A$.



- limitato INFERIORMENTE (o dal basso) se $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tale che $a \geq x \quad \forall a \in A$.

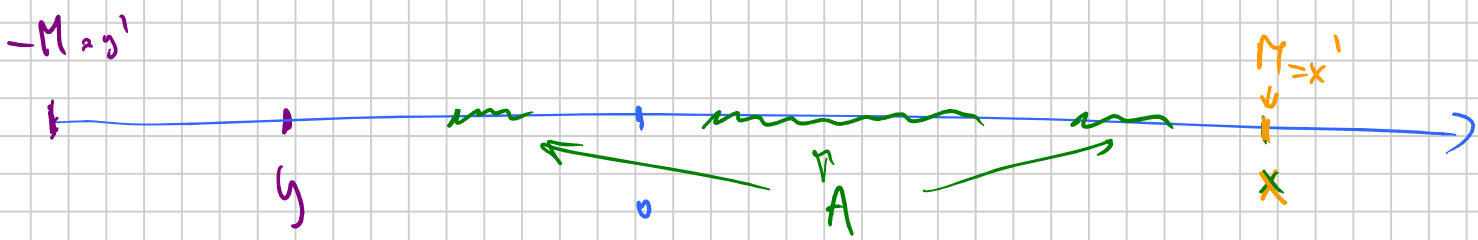


- si dice limitato se è sia limitato inferiormente che superiormente, cioè se $\exists\, y, x \in \mathbb{R}$ tali che

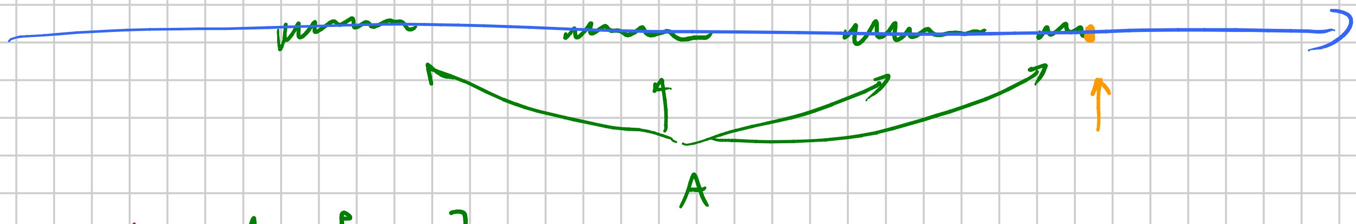
$$y \leq a \leq x \quad \forall a \in A \iff A \subseteq [y, x]$$

Se A non è limitato si dice ILLIMITATO.

N.B.: Se A è limitato possiamo scegliere $x = M > 0$, $y = -M$. A limitato $\iff A \subseteq [-M, M]$.



Inoltre se A è limitato superiormente e $\exists\, x \in A$ tale che $a \leq x$ per ogni $a \in A$, x è detto il MASSIMO di A. (similmente si definisce il MINIMO di un insieme)



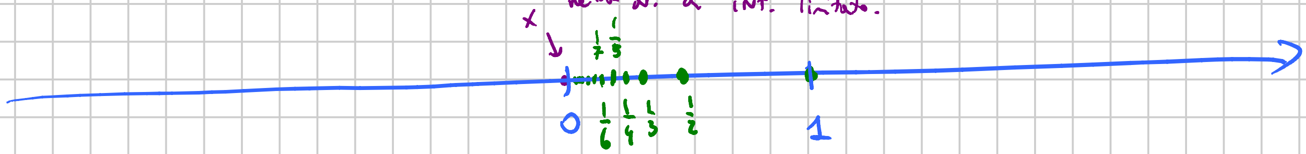
Esempio: $A = [0,5]$ A è limitato dunque superiormente limitato. Il massimo di A è 5.

Infatti: $\forall a \in A$ $a \leq 5$ e $5 \in A$.

$A = (0,5)$ A è limitato dunque superiormente limitato, ma NON ha massimo.

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

nella def. di inf. limitato.



1 è il massimo di A, poiché $1 \in A$ (prendendo $n=1$), inoltre $\forall a \in A$ $a = \frac{1}{n}$ per qualche $n \geq 1$, ma allora

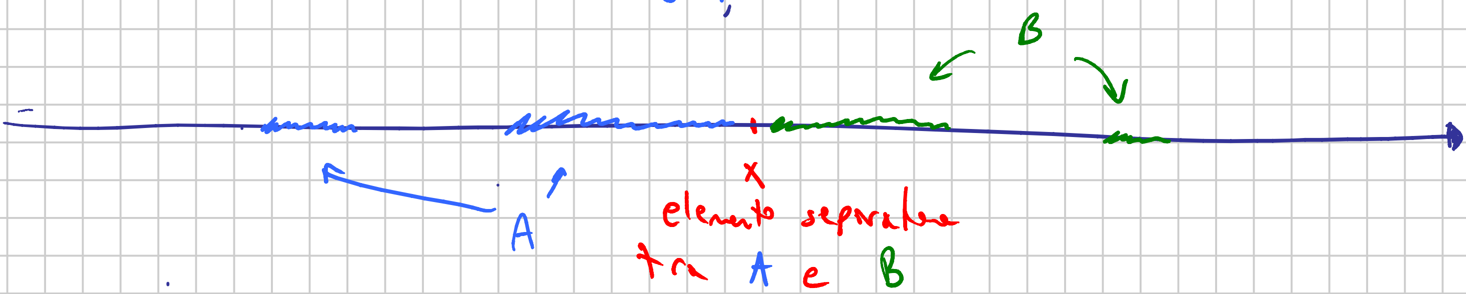
$$\boxed{\forall a \in A \quad a \leq 1}$$

A è limitato inferiormente (ad esempio $\frac{1}{n} \geq \overset{x\,=}{0}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) però non avrà minimo.

Assioma di completezza (proprietà di $\mathbb{R}$)

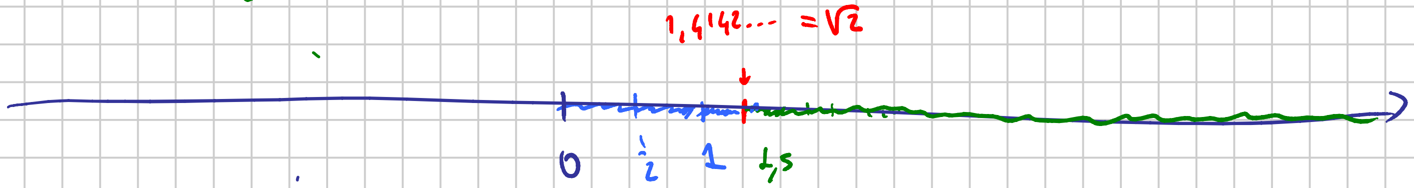
Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che "A sia alla sinistra di B" (cioè che $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$ si ha $a \leq b$)

Allora esiste un ELEMENTO SEPARATORE $x \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq x \leq b$ $\forall a \in A, b \in B$.



Nota Non è ovvio... $A = \{x \in \mathbb{Q}, x \geq 0$ tali che $x^2 \leq 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{Q}, x \geq 0$, tali che $x^2 \geq 2\}$



Per l'assioma di completezza $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tale che

$x \geq a$ $\forall\, a \in A$ e $x \leq b$ $\forall\, b \in B$.

Quindi si avrà $x^2 \geq 2$ e $x^2 \leq 2$, quindi $x^2 = 2$

cioè $x = \sqrt{2}$.

N.B. $x \notin \mathbb{Q}$, in particolare $x \notin A$, $x \notin B$.

Dim. (PER ASSURDO) Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, cioè che $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ $q \neq 0$.

Inoltre possiamo supporre che $MCD(p, q) = 1$, altrimenti potrei semplificare la frazione.

Allora $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$; moltiplicando ambo i membri per q^2 ottengo $\underbrace{p^2 = 2q^2}_{\text{è pari}}$. ma allora anche p^2 è pari, quindi p è pari : $p = 2 \cdot m$ con $m \in \mathbb{N}$.

$$(2m)^2 = 2q^2$$

$$\cancel{4}^{2} \cdot m^2 = \cancel{2}^{1} q^2$$

$$\underbrace{2m^2}_{\text{è pari}} = q^2 \rightarrow q \text{ è pari}$$

ma allora poiché p, q sono pari $MCD(p,q) \geq 2$ ↯

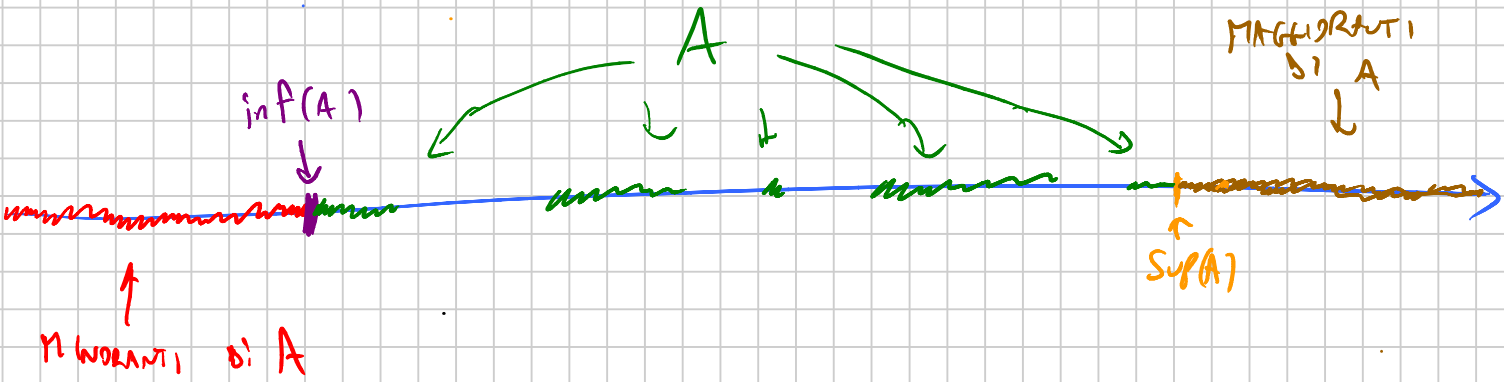
Def. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ definisco

- x è un MAGGIORANTE di A se $x \geq a \quad \forall a \in A$
- x è un MINORANTE di A se $x \leq a \quad \forall a \in A$

Def. (estremo inferiore e superiore)

- Se A è limitato superiormente si chiama $x \in \sup(A)$ (l'estremo superiore di A) l'unico elemento separatore tra A e l'insieme dei maggioranti di A. x sarà esso stesso un maggiorante e quindi sarà anche il MINIMO dei maggioranti.

- Se A è limitato inferiormente, si chiama $y = \inf(A)$ (l'estremo inferiore di A) l'unico elemento separatore fra A e l'insieme dei minoranti di A. y sarà esso stesso un minorante ed è quindi il MASSIMO dei minoranti.



$s = \sup(A) \iff$ $s \geq a \ \forall \ a \in A$ (s è un maggiorante)

$\underbrace{\forall \ s' < s}_{\text{qualsiasi } s' < s}$ $\underbrace{\exists \ a' \in A \ \text{t.c.} \ s' < a'}_{\text{c'è qualche elemento di A alla destra di } s' \text{ cioè } s' \text{ NON è un maggiorante}}$

$t = \inf(A) \iff \cdot \ t \leq a \quad \forall a \in A$ (t è un minorante)

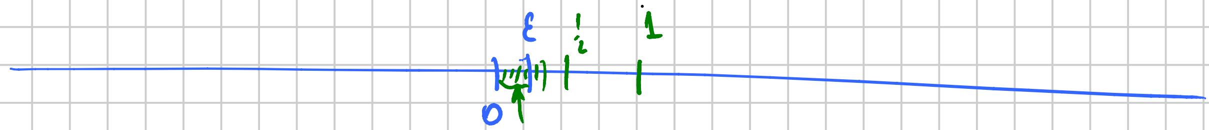
$\cdot \ \forall \ t' > t \quad \exists \ a' \in A \ \text{t.c.} \ t' > a'$

(qualsiasi $t' > t$ non è un minorante)

$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \ \ n \geq 1 \right\}$ $\quad \sup(A) = 1 \quad \inf(A) = 0$

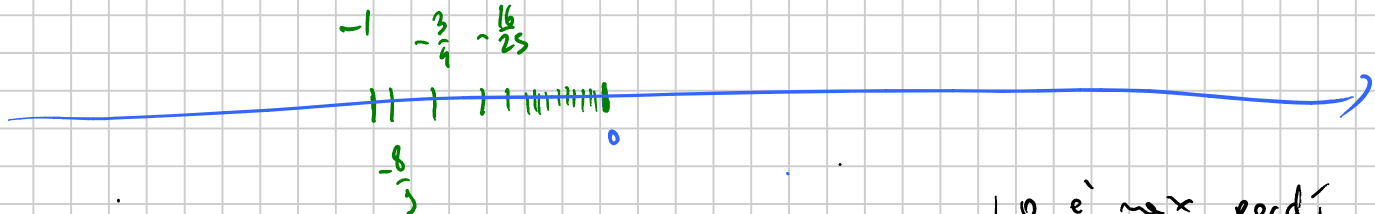
→ voglio dimostrarlo (i) $0 \leq \frac{1}{n} \ \forall \ n \geq 1$ ✓ (0 è un minorante)

(ii) $\forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ a' \in A$ (cioè $n \in \mathbb{N}$) t.c. $\varepsilon > a' = \frac{1}{n}$



$\varepsilon > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ ad esempio posso prendere $n = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ ← parte intera superiore.

• $A = \left\{ \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n} \;:\; \underset{n \geq 1}{n \in \mathbb{N}} \right\} = \{ \underset{n=1}{0}, \underset{n=2}{-1}, \underset{n=3}{-\frac{8}{9}}, \underset{n=4}{-\frac{3}{4}}, \underset{n=5}{-\frac{16}{25}}, \dots \}$



$\sup(A) = 0$ → è anche il massimo

$\inf(A) = -1$ → è anche il minimo

| 0 è max perché $0 \geq \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n} \quad \forall n \geq 1$, $0 \in A$

• $A = \left\{ \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n} \;:\; n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \right\}$

$\sup(A) = 0$ → è solo estremo superiore ma non il massimo.

$\inf(A) = -1$ → è anche il minimo

Dim. che $0 = \sup(A)$

(i) $0 \geq \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n} \quad \forall n \geq 1$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ vorrei far vedere che $-\varepsilon$ non è un maggiorante cioè che $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che

$$-\varepsilon < \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n} \iff \frac{4}{n} - \frac{4}{n^2} < \varepsilon \iff \frac{4n-4}{n^2} < \frac{\varepsilon n^2}{n^2}$$

$\frac{\varepsilon n^2 - 4n + 4}{n^2} > 0$

Mi basta considerare m tale che $\frac{1}{m} < \varepsilon$ e poi prendo $n = 4m$ $\qquad \frac{4}{n} - \frac{4}{n^2} \leq \frac{4}{n} = \frac{4}{4 \cdot m} = \frac{1}{m} < \varepsilon$

- $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad \inf A = 1 \qquad \sup A = +\infty$

A	limitato inf.?	inf ?	è anche min?	lim sup.?	sup ?	è anche max?	limitato/illimitato
(a,b)							
$[a,b)$	SÍ	a	SÍ	SÍ	b	NO	LIMITATO
$(a,b]$							
$[a,b]$	SÍ	a	SÍ	SÍ	b	SÍ	LIMITATO
$(a,+\infty)$	SÍ	a	NO	NO	$+\infty$	/	ILLIMITATO
$[a,+\infty)$							
$(-\infty,a)$							
$(-\infty,a]$							