Lezione 1 (3ª ora)

Attenzione all'ordine dei quantificatori!

① $\forall a \in \mathbb{R}_{a\neq 0}, \exists n \in \mathbb{N} : \quad n \geq \frac{1}{a} + 1$ vera!

② $\exists n \in \mathbb{N} : \quad \forall a \in \mathbb{R}_{a \neq 0} \quad n \geq \frac{1}{a} + 1$

③ $\exists n \in \mathbb{N} : \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad n \geq \frac{1}{1+a^2}$

② $\mathbb{R} \ni a \longmapsto \frac{1}{a} + 1$ ha immagine illimitata cioè può essere grande quanto voglio.

Ad esempio posso considerare $a = \frac{1}{n}$.

<u>Dimostrazione per assurdo</u> Nego la tesi e arrivo a qualcosa di assurdo.

In questo caso la tesi è $\boxed{② \text{ è FALSA}}$

Supponiamo per assurdo che ② sia vera.

Ma allora $\exists \; n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq \frac{1}{a} + 1 \qquad \forall a \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

in particolare deve essere vera anche per $a = \frac{1}{n}$.

Questo implicherebbe $\boxed{n \geq \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} + 1 = n+1}$ ↯.

Dimostrazione per induzione

Può servire quando dobbiamo dimostrare una proposizione $P(n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

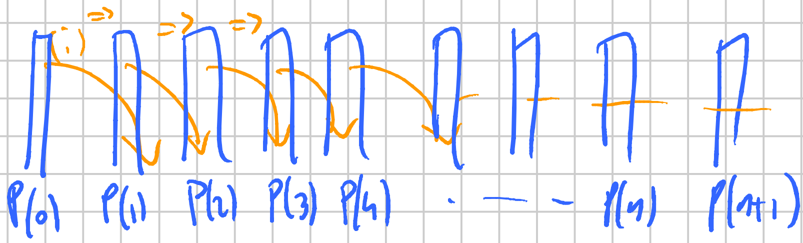
Se valgono le seguenti

(i) $P(0)$ e' vera (passo base)

(ii) $\forall n$, se $P(n)$ e' vera allora $P(n+1)$ e' vera (passo induttivo)

Allora $P(n)$ è vera $\forall\, n \in \mathbb{N}$

"Brutalmente" vuol dire dimostrare una proprieta' con l'effetto domino



Esempio: $0+1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad P(n)$

(i) $P(0)$? $\quad 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2} = 0$? ✓ ok.

(ii) supponiamo $0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad P(n)$ vera

$$(0+1+2+\dots+n)+(n+1) \overset{?✓}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\|$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

$\rightsquigarrow$ $P(n+1)$ è vera.

$\rightsquigarrow$ $P(n)$ è vera $\forall\, n\in\mathbb{N}$

Esercizio. $0^2+1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- $0^3+1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$\boxed{\text{Disuguaglianza di Bernoulli}}$ $\forall\, x\geq -1,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$

vale $(1+x)^n \geq 1+nx$ $\quad P(n)$

(i) (PASSO base) $P(0)$ $\quad (1+x)^0 \geq 1+0\cdot x$?

$\quad 1 \geq 1$ ✓

(ii) (PASSO INDUTTIVO) Supponiamo $P(n)$ vera $\quad \underset{A}{(1+x)^n} \geq \underset{B}{(1+nx)}$

Vogliamo dimostrare $P(n+1)$ $\quad (1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = \underset{A}{(1+x)^n}\cdot\underset{C}{(1+x)} \overset{\boxed{1+x\geq 0}\,+\,\text{ip. induttiva}}{\geq} \underset{B}{(1+nx)}\cdot\underset{C}{(1+x)} = 1+nx+x+nx^2$$

$$= 1+(n+1)x+\underset{\geq 0}{nx^2} \geq 1+(n+1)x$$

Variante 1 (i) $P(2022)$ è vera

(ii) $\forall_n$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Allora $P(n)$ è vera per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2022$

Esempio dove non funziona: Se una persona in questa stanza ha gli occhi azzurri allora tutti hanno gli occhi azzurri. $P(n)$ n persone hanno gli occhi azzurri

(i) $P(1)$ è vera

(ii) Supponiamo che $\forall n$ $P(n)$ è vera

$P(n+1)$