Esercizi

1. Calcolare
   - $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$
   - $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   - $4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

Risposte.

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{3} & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ -1 & \sqrt{2}+1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 12 & 4\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$

Esercizi

2. Assegnate le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ in modo che $5A + \lambda B + \mu C$ sia una matrice simmetrica.

Esercizi.

Svolgimento.

$5A + \lambda B + \mu C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ -5 - \mu & \lambda + 2\mu & 0 \\ 10 + \lambda + 4\mu & 15 + \lambda + 5\mu & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$. Tale matrice è simmetrica se e solo se $\begin{cases} -5 - \mu & = & 0 \\ 10 + \lambda + 4\mu & = & 0 \\ 15 + \lambda + 5\mu & = & 0 \end{cases}$. La terza equazione e la differenza tra la seconda e la prima; dalle prime due equazioni si ottiene $\lambda = 10, \mu = -5$.

Esercizi

3. Calcolare

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 3+\sqrt{2}0 & 1\cdot 2+\sqrt{2}1 & 1\cdot 0+\sqrt{2}1 & 1\cdot 2+\sqrt{2}0 \\ 2\cdot 3+1\cdot 0 & 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 0+1\cdot 1 & 2\cdot 2+1\cdot 0 \\ 0\cdot 3+3\cdot 0 & 0\cdot 2+3\cdot 1 & 0\cdot 0+3\cdot 1 & 0\cdot 2+3\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2+\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

a AB non esiste

b AB è una matrice 2×2

c $AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

d $AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 \end{pmatrix}$

Svolgimento.

(a) Il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B; il prodotto AB esiste e l'affermazione (a) è falsa.

(b,d) A ha due righe e B ha una colonna. Quindi AB è una matrice 2×1 e le affermazioni (b, d) sono false.

(c) $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'affermazione (c) è vera.

5. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

calcolare AB e BA.

Svolgimento.

$$AB = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2)) = (-4)$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot 3 & 0 \cdot 4 \\ -2 \cdot 2 & -2 \cdot 3 & -2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Esercizi

6. Trovare due matrici A e B tali che esistano AB e BA, ma $AB \neq BA$.

Svolgimento. Per esempio, se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Dimostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile.

Svolgimento. Se la matrice data fosse invertibile, esisterebbe una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ciò che è impossibile.

Esercizi

8. Siano $A, B \in K^{n,n}$ matrici invertibili. Dimostrare che
   - $(A^{-1})^{-1} = A$
   - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Svolgimento.

- Si deve dimostrare che A è l'inversa di A^{-1}, cioè che $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$. Queste uguaglianze valgono per la definizione di A^{-1}.
- Si deve dimostrare che $B^{-1}A^{-1}$ è l'inversa di AB. In effetti, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$; similmente, $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.