# MECCANICA

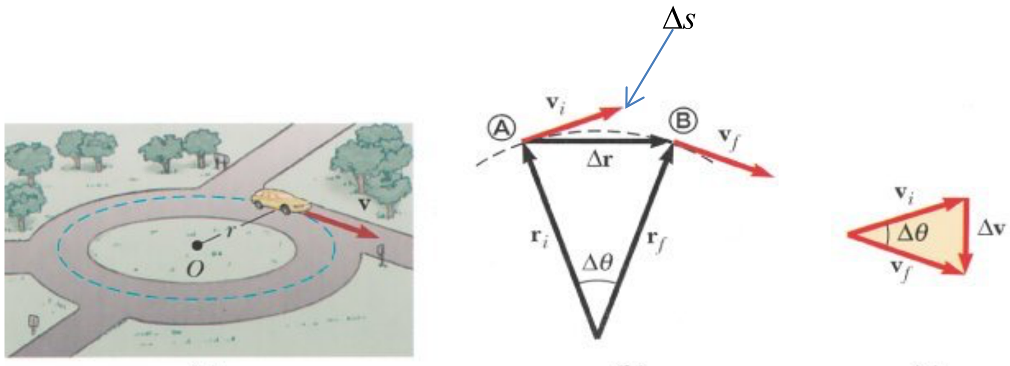
## CINEMATICA

## Moti circolari e armonici

Prof. M. Sannino e D. Barberis - Genova

# Moto Circolare Uniforme (I)

Un oggetto qualsiasi (ad es. un' automobile) in moto su un percorso circolare con velocità lineare $v$ , ha *sempre* un'accelerazione anche se si muove con velocità di *modulo* costante. Tale accelerazione è dovuta alla continua variazione della *direzione* del vettore velocità lungo la traiettoria del moto, pur restando costante il modulo.



(a) (b) (c)

Nella fig. (b) a fianco viene rappresentato un punto materiale che si muove con velocità di modulo costante lungo una traiettoria circolare passando all'istante $t_i$ con velocità vettoriale $\vec{v}_i$ per il punto **A** e all'istante $t_f$ per il punto **B** con velocità vettoriale $\vec{v}_f$. Le velocita` vettoriali $\vec{v}_i$ e $\vec{v}_f$ differiscono solo per la direzione ma per quanto sopra detto sono uguali in modulo.

L'accelerazione media è: $\bar{\vec{\mathbf{a}}} \equiv \dfrac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

nella fig. (c) e` rappresentato il vettore $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$

I due triangoli, in fig. (b) e in fig. (c) rispettivamente, sono simili in quanto entrambi isosceli con i lati perpendicolari fra loro per cui, confondendo $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|$ con $\Delta s$, se $\Delta\theta \ll 1$,

$\dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{\Delta s}{r}$ ovvero, tenendo conto che $\Delta v = \bar{a}\,\Delta t$ , è anche $\dfrac{\bar{a}\,\Delta t}{v} = \dfrac{\Delta s}{r}$ e quindi $\bar{a} = \dfrac{v\,\Delta s}{r\,\Delta t}$.

Quando $\Delta t$ è molto piccolo i punti **A** e **B** si avvicinano molto fra loro, $\Delta\theta$ è molto piccolo e di conseguenza $\Delta s$, arco di traiettoria circolare sotteso tra $\vec{\mathbf{r}}_i$ e $\vec{\mathbf{r}}_f$ è

anche molto piccolo per cui $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v$ e nel limite $\Delta t \rightarrow 0$ l'*accelerazione* è $\boxed{a_r = \dfrac{v^2}{r}}$

# Moto Circolare Uniforme (II)

Si è dunque trovato che in un moto circolare uniforme l'accelerazione è *radiale*, cioè diretta verso il centro della circonferenza che costituisce la traiettoria ,e che il suo modulo è

$$\boxed{a_{\mathrm{r}} = \frac{v^2}{r}}$$

Dal punto di vista dimensionale le sue dimensioni sono:

$$[a_{\mathrm{r}}] = \frac{[\,\mathrm{L}^2\ \mathrm{T}^{-2}\,]}{[\mathrm{L}]} = [\,\mathrm{L}\ \mathrm{T}^{-2}\,]$$

Cioè le dimensioni di una accelerazione vera e propria.

# Moto Circolare Uniforme (III)

Abbiamo visto che nel moto circolare uniforme:

- Rimane costante il modulo della velocità $|\mathbf{v}|$
- Rimane costante il modulo dell'accelerazione radiale $|\mathbf{a}_r|$ che è sempre perpendicolare a $\mathbf{v}$ e ha verso diretto al centro del cerchio
- I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ non sono costanti, dato che ne varia continuamente la direzione, ma sono sempre perpendicolari fra di loro

Possiamo ora introdurre una nuova variabile fisica derivata, la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ (omega):

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\frac{S}{r})}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$$

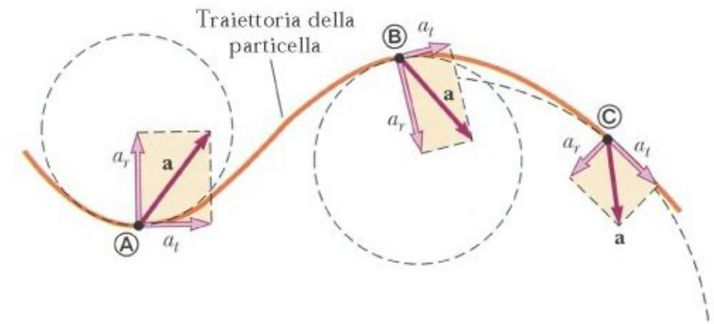
Come si vede, la velocità angolare ha la dimensione di $[\mathrm{T}]^{-1}$ e si misura in rad/s.

Il raggio della traiettoria e la velocità angolare sono le variabile fisiche che sono uniformi (costanti) in un moto circolare uniforme.

La velocità angolare può essere rappresentata con un vettore di modulo $\omega = \frac{v}{r}$, direzione perpendicolare al piano della traiettoria e verso uscente se il moto è antiorario, entrante se il moto è orario (regola della mano destra).

# Moto Curvilineo

Quando un punto materiale si muove lungo un percorso curvilineo e la sua velocità varia sia in direzione che in modulo si può osservare che la sua velocità è sempre tangente al percorso mentre il vettore accelerazione $\vec{a}$ forma un certo angolo con il percorso e cambia da punto a punto. Questo vettore puo` essere risolto in due vettori componenti: un vettore componente $\vec{a}_r$ radiale e un vettore componente $\vec{a}_t$ tangenziale e questo vuol dire che il vettore accelerazione totale $\vec{a}$ puo` essere scritto come la somma vettoriale di questi vettori componenti:




$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t}$$

L'accelerazione *tangenziale* è dovuta alla rapidità di variazione temporale del *modulo* del vettore velocità del punto materiale e il suo modulo è dato da

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

L'accelerazione *radiale* è dovuta alla rapidità di variazione temporale della *direzione* del vettore velocità del punto materiale e il suo modulo è dato da

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r}}$$

# Riepilogo dei moti rettilinei e circolari

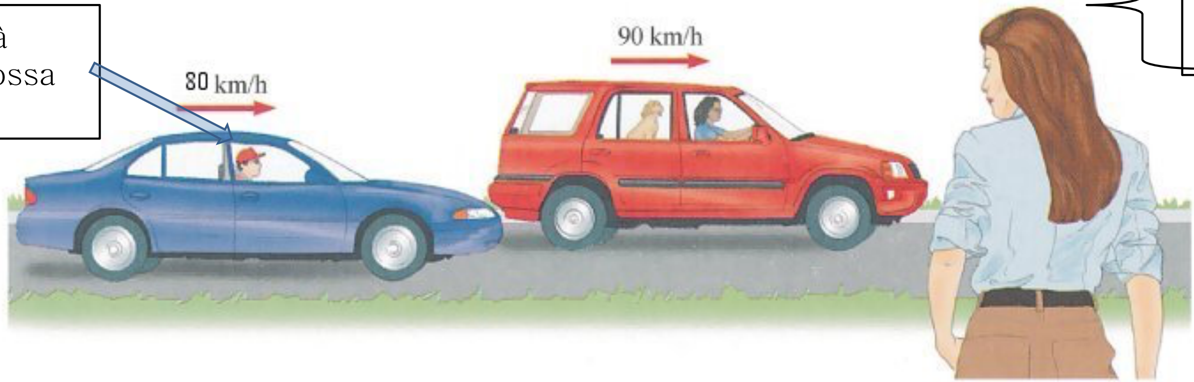
| | Moti rettilinei | Moti circolari |
|---|---|---|
| Posizione | $x$ | $\theta = \frac{s}{r}$ |
| Velocità | $v = \frac{dx}{dt}$ | $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$ |
| Accelerazione | $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ | $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_t}{r}$ |
| Moto uniforme | $x = x_0 + v\,t$ | $\theta = \theta_0 + \omega\,t$ |
| Moto uniformemente accelerato | $x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$ | $\theta = \theta_0 + \omega_0\,t + \frac{1}{2}\,\alpha\,t^2$ |

# Moto Relativo (I)

## Velocita` relativa e Accelerazione relativa (I)

E` importante esaminare come osservazioni eseguite da osservatori diversi in differenti sistemi di riferimento siano connesse l'una all'altra: in generale osservatori appartenenti a sistemi di riferimento differenti possono misurare spostamenti, velocita` e accelerazioni differenti per un punto materiale in moto senza concordare sul risultato di una misura.

Per me la velocità dell'automobile rossa è 10 km/h

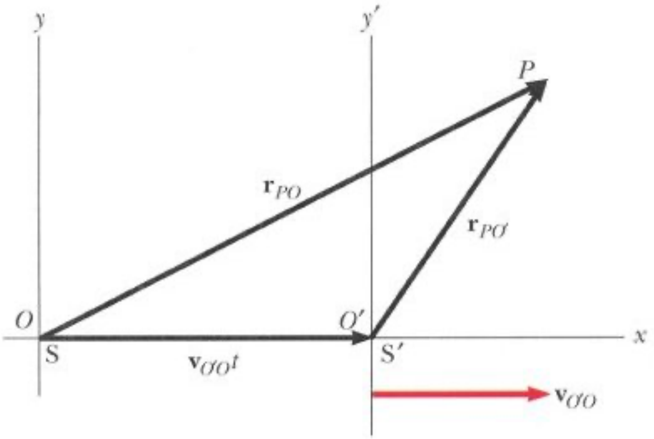



Per me la velocità dell'automobile rossa è 90 km/h

Per esempio, date due automobili che procedono nella stessa direzione una con velocita` di 80 km/h e l'altra con velocita` di 90 km/h, un passeggero sull'automobile piu` lenta osservera` che la velocita` dell'automobile piu` veloce rispetto alla piu` lenta e` di 10 km/h. Naturalmente un osservatore in quiete misurera` 90 km/h per la velocita` dell'automobile piu` veloce. Questo esempio mostra che le misure di velocita` sono differenti in sistemi di riferimento differenti.

# Moto Relativo (II)
## Velocita` relativa e Accelerazione relativa (II)

In una situazione piu` generale si consideri un punto materiale posto nel punto **P** in figura. Si immagini che il moto di questo punto materiale venga descritto, uno nel sistema di riferimento **S** , fisso alla terra, l' altro nel sistema di riferimento **S'** , che si muove a destra rispetto a **S** con velocita` $\vec{v}_{o'o}$ . Si noti che, rispetto ad un osservatore in **S'**, **S** si muove verso sinistra con velocita` $-\vec{v}_{o'o}$ . La collocazione di uno qualsiasi degli osservatori nel proprio sistema di riferimento e` irrilevante ai fini della discussione ma, tanto per precisare gli osservatori possono essere posti nell'origine.




Siano $\vec{r}_{PO}$ e $\vec{r}_{PO'}$ i vettori posizione del punto materiale **P** rispettivamente nei sistemi di riferimento **S** e **S'** all'istante $t$ . Se le origini dei due sistemi di riferimento coincidono a $t = 0$, allora i vettori $\vec{r}_{PO}$ e $\vec{r}_{PO'}$ sono connessi l'uno all'altro tramite l'espressione ovvero $\vec{\mathbf{r}}_{PO} = \vec{\mathbf{r}}_{PO'} + \vec{\mathbf{v}}_{OO'}\, t$

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}_{PO'} = \vec{\mathbf{r}}_{PO} - \vec{\mathbf{v}}_{OO'}\, t}$$

Cioè in un intervallo di tempo $t$ il riferimento **S'** si è spostato verso destra di $\vec{\mathbf{v}}_{OO'}\, t$

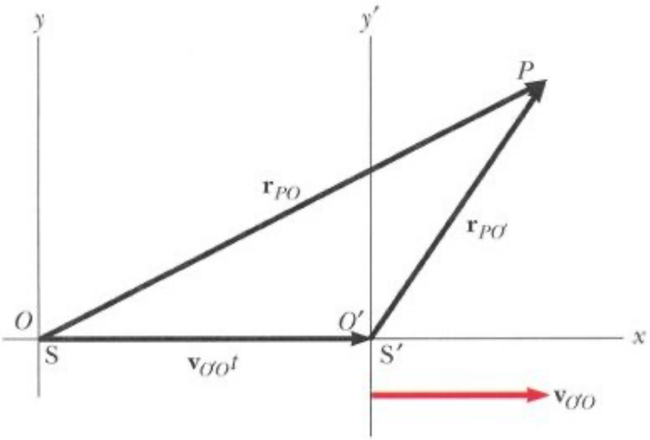
Differenziando l'equazione ottenuta rispetto al tempo e ricordando che $\vec{\mathbf{v}}_{OO'}$ è costante

Si ottiene $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}_{PO'}}{dt} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}_{PO}}{dt} - \vec{\mathbf{v}}_{OO'}$ ovvero $\boxed{\vec{\mathbf{v}}_{PO'} = \vec{\mathbf{v}}_{PO} - \vec{\mathbf{v}}_{OO'}}$ dove $\vec{\mathbf{v}}_{PO'}$ e $\vec{\mathbf{v}}_{PO}$ sono le velocità del punto materiale osservate rispettivamente nel sistema **S** e nel sistema **S'**

Le trasformazioni per $\vec{r}$ e per $\vec{v}$ sopra ottenute sono dette Trasformazioni di Galileo

# Moto Relativo (III)
## Velocita` relativa e Accelerazione relativa (III)

Sebbene osservatori diversi uno solidale con il sistema di riferimento S e l'altro con S' misurino velocita` differenti per lo stesso punto materiale, essi misurano la *stessa* *accelerazione* quando $\vec{\mathbf{v}}_{OO'}$ velocita` relativa del sistema di riferimento S' rispetto a S, è costante. Infatti, dato che, come si è visto, $\vec{\mathbf{v}}_{PO'} = \vec{\mathbf{v}}_{PO} - \vec{\mathbf{v}}_{OO'}$ per cui derivando rispetto al tempo *t* si ottiene




$$\boxed{\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}_{PO'}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{PO}}{dt} - \frac{d\,\vec{\mathbf{v}}_{OO'}}{dt}}$$

Poiché $\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}_{OO'}}{dt} = 0$ ne consegue che $\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}_{PO'}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{PO}}{dt}$

e quindi che

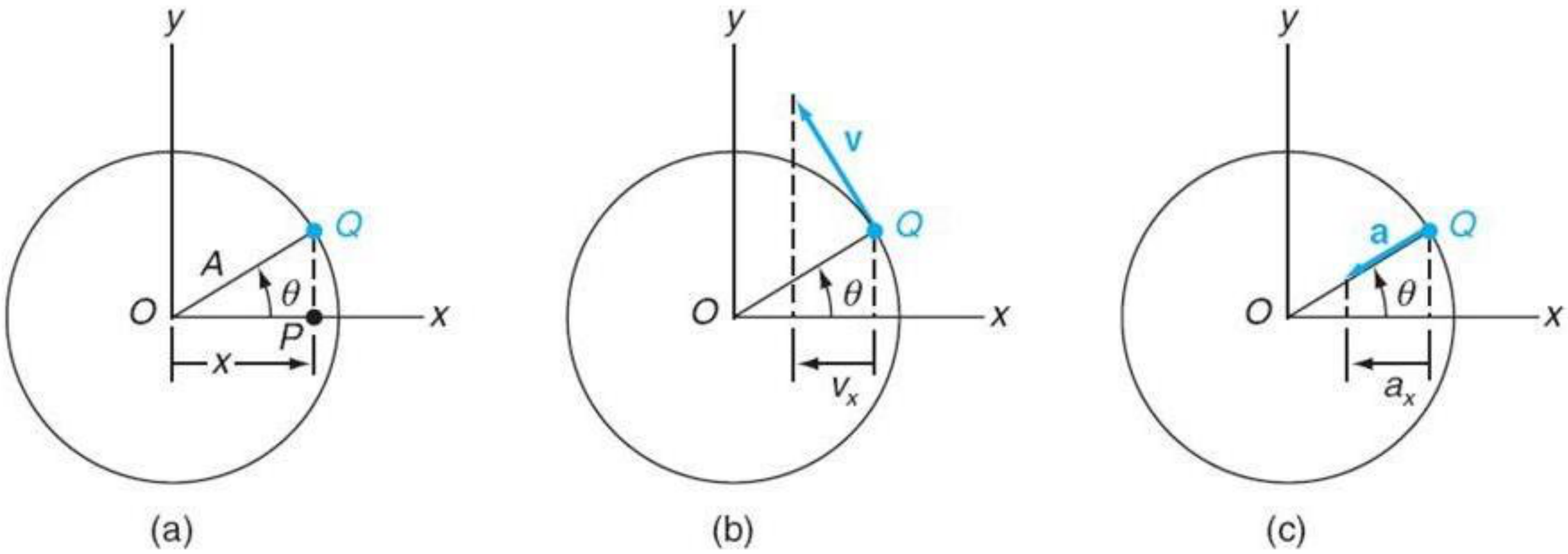
$\boxed{\vec{a}' = \vec{a}}$ dove $\vec{a}' = \frac{d\,\vec{\mathbf{v}}_{PO'}}{dt}$ e $\vec{a} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{PO}}{dt}$

In conclusione osservatori differenti che si muovono con velocita` *costante* uno rispetto all'altro misurano velocita` differenti per lo stesso corpo (o punto materiale) ma la *stessa* *accelerazione.*

Le *Trasformazioni di Galileo* sono valide per velocita` di punti materiali molto inferiori a quella della luce ( $c \cong 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ ) e devono essere sostituite dalle trasformazioni di Lorentz della Relativita` Ristretta per corpi con velocita` prossima a quella della luce.

Le *Trasformazioni di Galileo* connettono le coordinate e le velocità di un punto materiale in un sistema di riferimento terrestre con quelle misurate in un sistema di riferimento in moto uniforme rispetto alla Terra.

# MOTO ARMONICO (I)



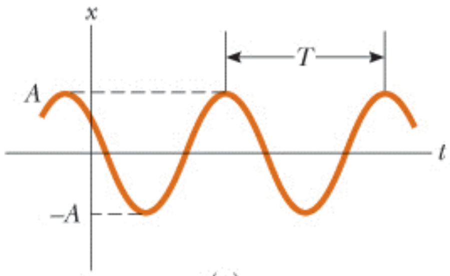

Sia dato un punto $Q$ che si muove in senso antiorario su una circonferenza di raggio $A$ con velocità angolare costante, tale che la posizione angolare varia nel tempo come $\theta = \omega t + \delta$. Per il punto $P$, proiezione di $Q$ lungo $x$, valgono le seguenti considerazioni:

a) La coordinata $x$ del punto $P$ è $x = A\cos(\theta) = A\cos(\omega t + \delta)$
b) La velocità del punto $P$ è $v_x = v\cos(\theta + \pi/2) = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$
c) L'accelerazione del punto $P$ è $a_x = a\cos(\theta + \pi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$

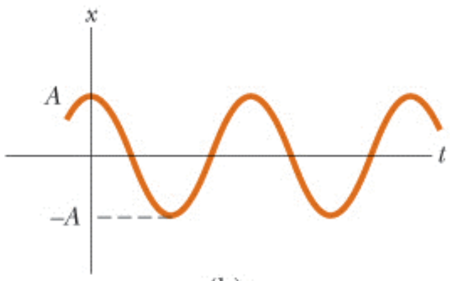
Si può quindi facilmente concludere che <u>la *proiezione* lungo uno degli assi coordinati di un moto circolare uniforme centrato sull'origine segue un moto oscillatorio: il moto armonico</u>.

La proiezione di un moto circolare lungo l'asse $y$ è $y = A\cos(\pi/2 - \theta) = A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$
cioè si tratta di un moto armonico ritardato di $\pi/2$ rispetto a quello dovuto alla proiezione del medesimo moto circolare uniforme lungo l'asse $x$.

# MOTO ARMONICO (II)



(a)



(b)

Un moto armonico è caratterizzato da una legge del moto del tipo

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

Con $A$ ampiezza del moto (modulo dello spostamento massimo dalla posizione di equilibrio)

$\omega$ pulsazione (o frequenza angolare)

$\delta$ angolo di fase (angolo al tempo $t = 0$)

$A$ a $\delta$ sono univocamente determinati dalla velocità e dalla posizione iniziale del punto materiale.
Viceversa, noti $A$ e $\delta$ si possono ricavare velocità e posizione al tempo $t = 0$ .

$(\omega t + \delta)$ è detta *fase* del moto ed è utile per confrontare il moto di due punti materiali.

$x$ è una funzione *periodica* del tempo che si *ripete* quando $\omega t$ aumenta di $2\pi$ radianti.

$T$ è il *periodo* cioè l'intervallo di tempo necessario per compiere un *ciclo completo* del moto e cioè
$x(t) = x(t + T)$ e la fase aumenta di $2\pi$ per cui $\omega t + \delta + 2\pi = \omega(t + T) + \delta \;\Rightarrow \omega T = 2\pi$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

L'inverso del periodo è il *numero di oscillazioni complete compiute nell' unità di tempo* ed è detto *frequenza* $\nu$ del moto:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

L' unità di misura di $\nu$ misura sono i cicli/s detti anche Hertz (Hz)

# MOTO ARMONICO (III)

Dai risultati trovati si può anche osservare che per un punto materiale che si muove di moto armonico

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A \,\mathrm{sen}(\omega \mathrm{t} + \delta)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A \cos(\omega \mathrm{t} + \delta)$$

e che, poichè $x(t) = A\cos(\omega \mathrm{t} + \delta)$ si può anche scrivere

$$\boxed{a =} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega \mathrm{t} + \delta) = \boxed{-\omega^2 x}$$

Si ottiene cioè l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0}$$

che *non* è un'equazione fra numeri ma un'equazione fra *una funzione e la sua derivata* (o, meglio, fra una funzione e la sua derivata seconda).

Una equazione di questo tipo si chiama *Equazione Differenziale* e, in particolare, quella sopra inquadrata è l'*equazione differenziale del moto armonico* che si può dimostrare essere *solamente* (*) soddisfatta da una funzione del tipo

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega \mathrm{t} + \delta)}$$

che è appunto la legge oraria del moto armonico

(*)Teorema di Esistenza e Unicità della soluzione di un' equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti (V. corso di Analisi Matematica)