Tutorato Geometria 26/09/2022

HONGMIAO YU

E-mail: Yu@dima.unige.it

Ufficio: DIMA 811

ORARIO: LUNEDÌ . VENERDÌ 14:00 ~ 15:30

RICORDIAMO:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{NUMERI COMPLESSI}\\ \mathbb{C} = \{ z = (a,b) : \ a, b \in \mathbb{R} \}\end{array}}$$

forma algebrica

$z = a + ib$

con $a, b \in \mathbb{R}$

forma trigonometrica

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

con $\rho, \theta \in \mathbb{R}$

$\rho \geq 0$

Sia $z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\operatorname{Re} z = a = \rho\cos\theta$

$\operatorname{Im} z = b = \rho\sin\theta$ $\qquad \operatorname{Im} z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \rho \qquad |z|=0 \iff z=0$$

$$\bar{z} = a-ib = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \rho(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

$$z=\bar{z} \iff z\in\mathbb{R}$$

Dati $z=a+ib$, $w=c+id$, Allora

$$z+w = (a+c)+i(b+d)$$

$$zw = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

Dati $\alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\beta = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\alpha\beta = \rho\sigma\left(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\right)$$

in particolare,

$$\alpha^n = \rho^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$$

per ogni $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 1$

Equazione algebrica $p(x)=0$

sia $p(x)=0$ un'equazione algebrica in un campo k.

$$p(x) = c_g x^g + c_{g-1} x^{g-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

con $g \in \mathbb{N}$, $c_0, \dots, c_g \in k$

$a \in k$ si dice una <u>soluzione</u> dell'equazione $p(x)=0$ se $p(a)=0$

NOSTRO CASO: $k = \mathbb{C}$

$\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

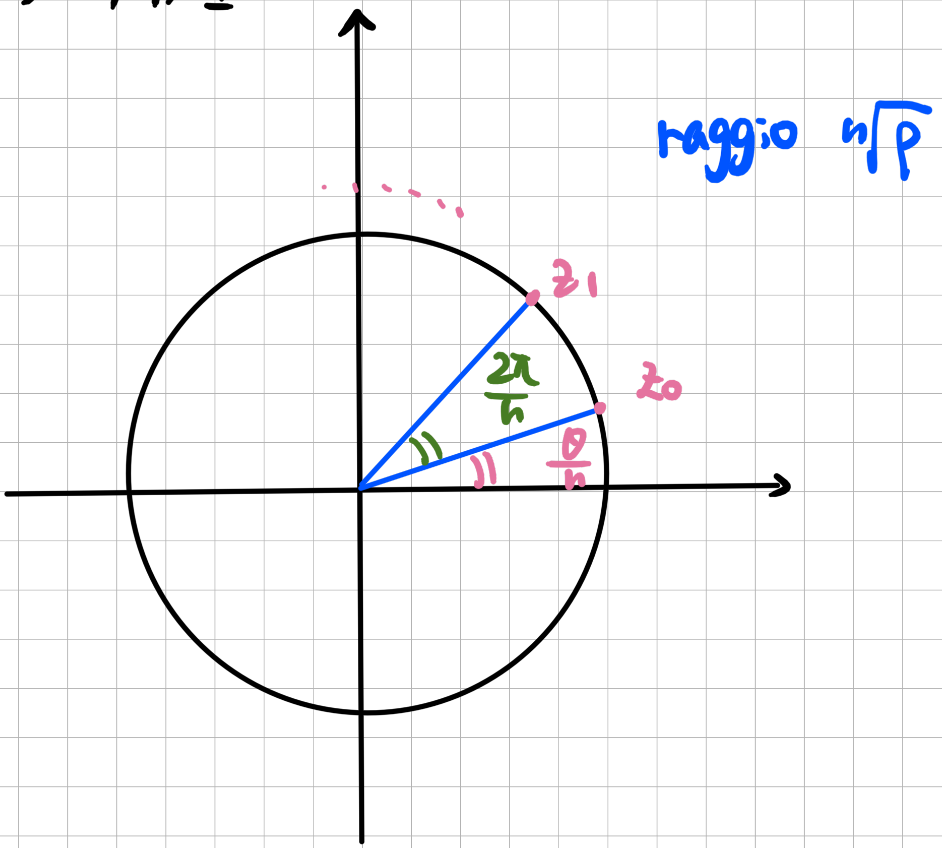
$p(x) = x^n - \alpha$

$\mathbb{C}$ algebricamente chiuso $\Rightarrow$ $p(x)=0$ (cioè $x^n = \alpha$) ha almeno una soluzione

le soluzioni di $x^n = \alpha$, detti <u>radici n-esime del numero α</u>, sono

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

con $k = 0, \dots, n-1$



ESERCIZI:

Ex 1 Determinare parte reale, parte immaginaria modulo e argomento dei seguenti numeri:

① $(1+\sqrt{3}i)^4\left(\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)\right)$

② $\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^4}{i\,(2+2i)}$

Sol:

ⓐ $$1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} |1+\sqrt{3}i| &= \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} \\ &= 2 \end{aligned}}$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow (1+\sqrt{3}i)^4 = 2^4\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

$z=$

$$\Rightarrow (1+\sqrt{3}i)^4\left(\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)\right)$$

$$= 2^4\left(\cos\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)\pi+i\sin\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\pi\right)\right)$$

$$= 16\left(\cos\left(\frac{26}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{26}{15}\pi\right)\right)$$

$\operatorname{Re} z = 16\cos\left(\frac{26}{15}\pi\right)$

$\operatorname{Im} z = 16\sin\left(\frac{26}{15}\pi\right)$

$|z| = 16$ argomento $\frac{26}{15}\pi$

② $z = \dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^4}{i(2+2i)}$

$-1+\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$|-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$

$= 2$

$= 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

$(-1+\sqrt{3}i)^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{8}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{8}{3}\pi\right)\right)$

$= 16\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

$\frac{8}{3}\pi = 2\pi + \frac{2}{3}\pi$

$i(2+2i) = 2i + (2i)i$

$= -2+2i$

$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$2\sqrt{2} = |-2+2i|$

$i \cdot \bar{i} = |i|^2 = 1$

$\shortparallel$

$i(-i) = -i^2$

$\Rightarrow i^2 = -1$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

— INSERITO:

in generale, dati numeri complessi z, w.

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

N.B. $|w|^2$ numero reale!

se sappiamo le forme trigonometriche di z e w:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$w = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

allora

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{\rho\cancel{\sigma}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{\sigma^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{\rho}{\sigma}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$\sigma \neq 0$

$$= \frac{\rho}{\sigma}\left(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\right) + i\left(\sin\theta\cos\varphi - \right.$$

$\cos\theta \sin\varphi)$

$$= \frac{\rho}{\sigma}\left(\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)\right)$$

In realtà, se consideriamo $\cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)$, allora otteniamo

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$
$$\parallel$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$$
$$\parallel$$
$$\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)$$

usando la proprietà che abbiamo visto (invece di fare calcolo)

— fine del inserito ————

$$z = \frac{(-1+\sqrt{3}i)^4}{i(2+2i)}$$

$$= \frac{16\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\pi + i \sin\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\pi\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$\mathrm{Re}\, z = 4\sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

$\mathrm{Im}\, z = 4\sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

$|z| = 4\sqrt{2}$

Argomento $-\frac{\pi}{12}$.

End Ex 1

Ex 2. Determinare tutti i numeri complessi z di modulo 1 tale che $(1+3i)z \in \mathbb{R}$

Sol:

poniamo $z = a+ib$

$$(1+3i)z = (a-3b) + i(3a+b) \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$3a+b = 0$$

$\Rightarrow \quad b = -3a$

$\Rightarrow \quad z = a - 3ai \qquad$ con $\quad a \in \mathbb{R}$

$$|z| = 1$$
$$\|$$
$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-3a)^2} = \sqrt{10a^2}$$

$\Rightarrow \quad 10a^2 = 1$

$\Rightarrow \quad a = \pm \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\Rightarrow \quad z = \pm \left(\dfrac{\sqrt{10}}{10} - \dfrac{3}{10}\sqrt{10}\, i \right)$

End Ex 2

Ex 3. Rappresentare nel piano il sottoinsieme

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : (z-i)(3+\bar{z}) \in \mathbb{R} \}$$

Sol:

poniamo $z = a+ib$

$$(z-i)(3+\bar{z}) = (a+ib-i)(3+a-ib)$$

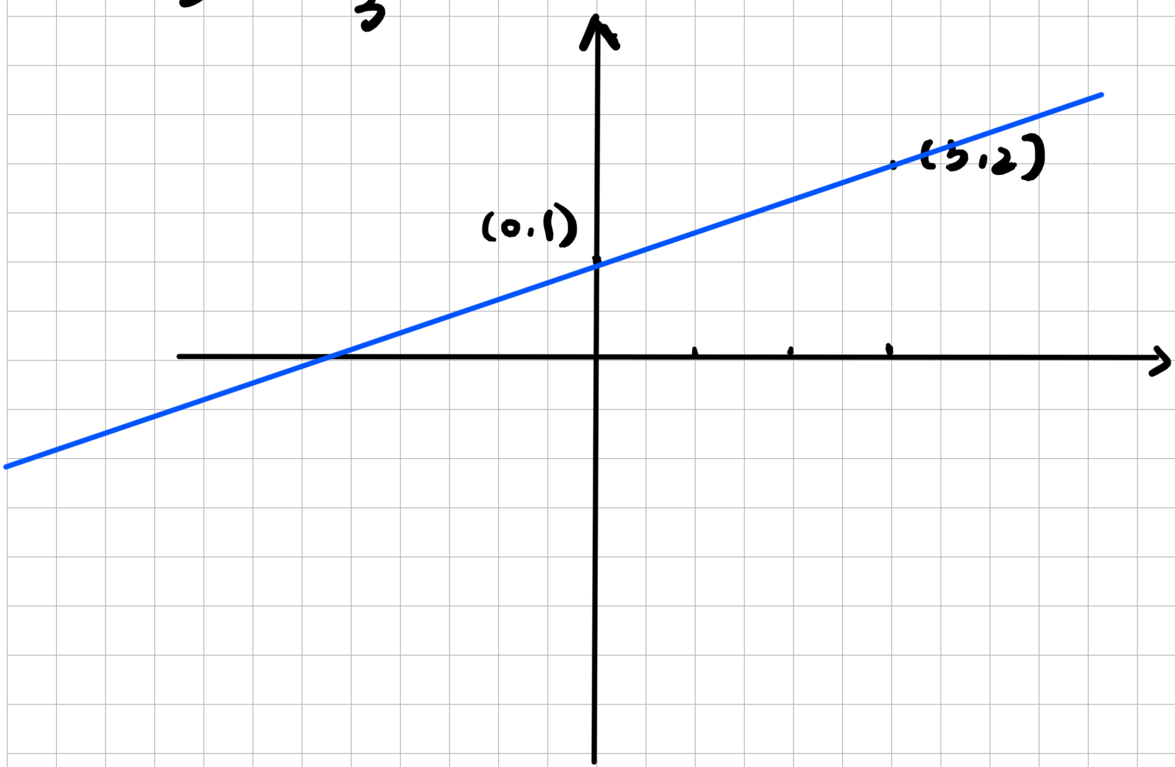
$$= (a^2+3a+b^2-b) + i\big((b-1)(3+a) - ab\big)$$

$$= (a^2+3a+b^2-b) + i(3b-a-3)$$

$$\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 3b - a - 3 = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{a}{3} + 1$$



End Ex 3

Ex 4. Calcolare le radici quinte di

$$\frac{1-i}{3+\sqrt{3}i}$$

Sol:

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(-x) = -\sin(x) \\ \Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}}$$

$$3+\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1-i}{3+\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right)$$

le radici quinte sono

$$z_k = \sqrt[5]{\frac{\sqrt{6}}{6}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{5}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{5}\right)\right)$$

con $k = 0, 1, 2, 3, 4$

End Ex 4

Ex 5. sia $z \in \mathbb{C}$. provare

se $z = |z|$ allora $z = \bar{z}$

Pf:

MODO 1 (senza fare calcolo)

$$|z| \in \mathbb{R}, \quad z = |z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$z = \bar{z}$$

MODO 2:

$$z = |z| \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ z \cdot z}}{z^2} = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$\Rightarrow \quad z(z-\bar{z})=0$

— INSERITO ————————————

K un campo. $a, b \in K$ t.c. $ab=0$

Allora $a=0$ oppure $b=0$

Pf:

se $a=0$ ok

se $a \neq 0$, allora a è invertibile

visto che K è un campo. Quindi

$$\begin{array}{ccc} a^{-1}ab & = & b \\ \| & & \\ a^{-1}\cdot 0 & = & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow b=0.$ $\square$

———————————— End INSERITO ————

$\Rightarrow \quad z=0$ oppure $z-\bar{z}=0$ ($\mathbb{C}$ è un campo)

$\Rightarrow \quad z=\bar{z}=0$ oppure $z=\bar{z}$

$\Rightarrow \quad z=\bar{z}$ $\square$

Domanda:

$$z = \bar{z} \not\Rightarrow z = |z|$$

Risposta: NO!

Controesempio: $z \in \mathbb{R}$, $z < 0$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

ma $|z| = \sqrt{z^2} = -z \neq z$

N.B.

se $z = \bar{z}$, $\boxed{z \geq 0}$, allora $z = |z|$

questa è un proprietà di numero reale.

End Ex 5

Ex 6. Quali luoghi geometrici sono descritti nel piano delle seguenti condizioni?

1) $z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z| < 1$

2) $z^2 \in \mathbb{R}$

3) $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z$

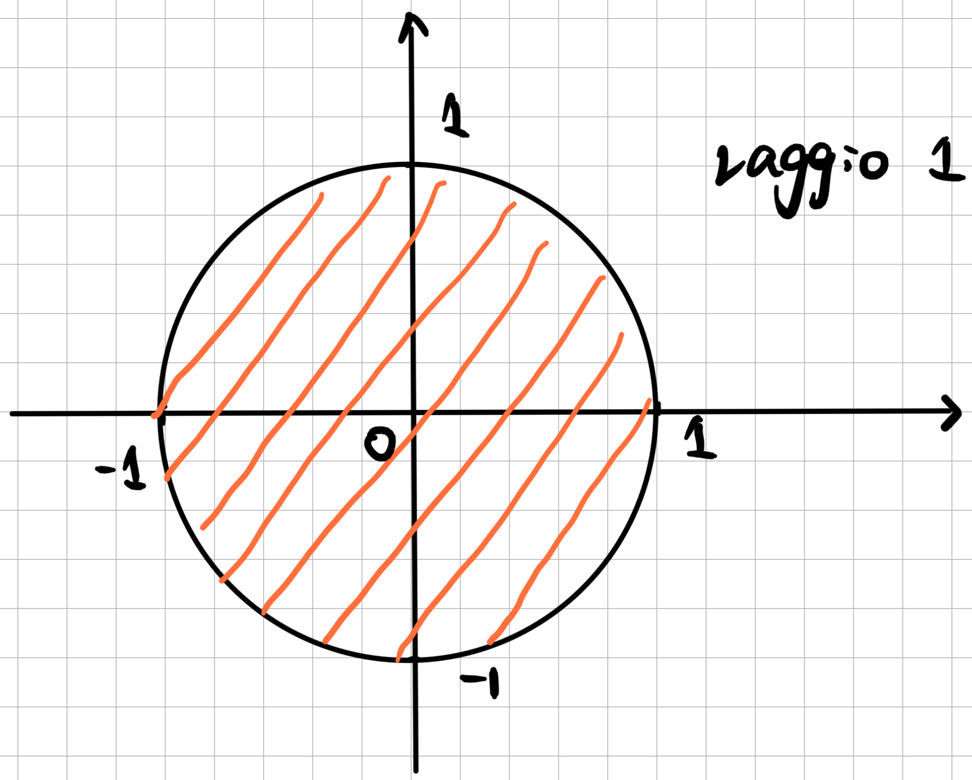
4) $\mathrm{Re}(z^3) = 0$

Sol: poniamo sempre $z = a + ib$

1) $|z| < 1$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2 < 1$$



parte intero

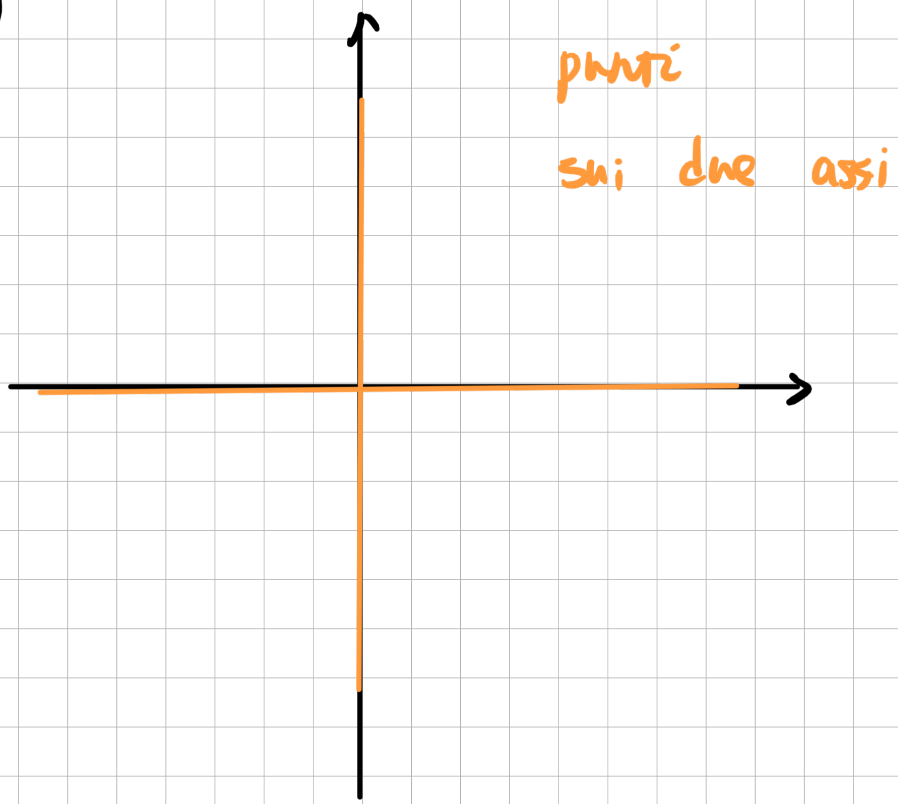
2) $z^2 \in \mathbb{R}$

$$z^2 = (a+ib)^2 = (a^2-b^2) + 2abi \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$ab = 0$$

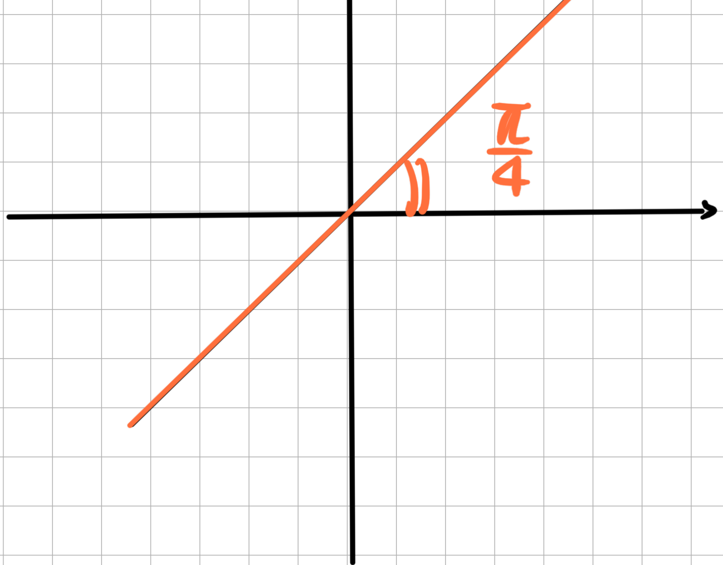
$\Rightarrow \quad a = 0$ oppure $b = 0$ (perché $\mathbb{R}$ è un campo)



3) $Re(z) = Im(z)$

$$\underset{a}{\underset{\|}{Re(z)}} = \underset{b}{\underset{\|}{Im(z)}}$$

$\Rightarrow \quad a = b$



4) $Re(z^3) = 0$

$$z^3 = \underbrace{z^2}_{} \cdot z = (a^2 - b^2 + 2abi)(a+ib)$$

calcolato in 2)

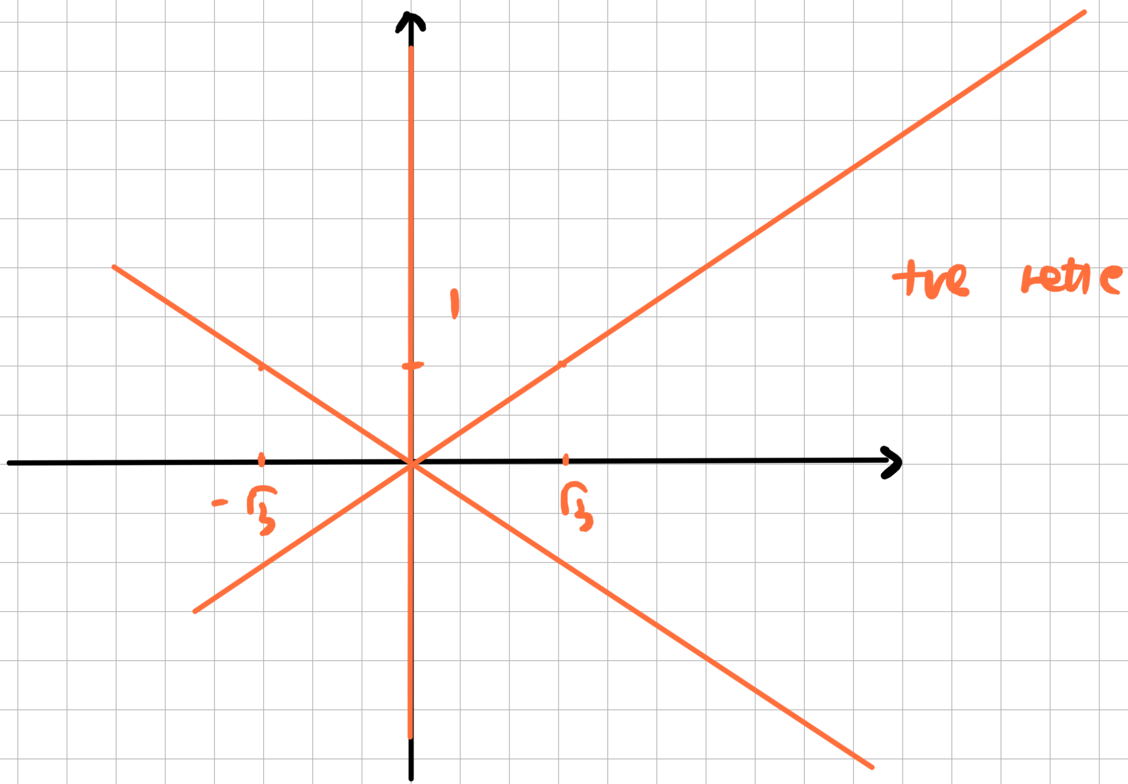
$$= a^3 - ab^2 - 2ab^2 + i(\quad \cdots \quad)$$

parte immaginario non ci interessa

$$\Rightarrow Re\, z^3 = a^3 - ab^2 - 2ab^2$$

$$= a(a^2 - 3b^2) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad \text{opp.} \quad a = \pm\sqrt{3}\, b$$



End Ex 6

Ex 7. Scrivere un polinomio $p(x)$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ t.c.

- $p(x)$ abbia come radici i, $1-i$
- $p(1) = 4$
- $p(x)$ sia di grado minimo

Sol:

Claim: se z è una soluzione di $p(x)=0$, allora $\bar{z}$ è una soluzione di $p(x)=0$:

Infatti:

$$p(x) = c_g x^g + c_{g-1} x^{g-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

con $g \in \mathbb{N}$. $\underbrace{c_g, \dots, c_0 \in \mathbb{R}}$.

$$\Updownarrow$$

$$c_i = \overline{c_i} \quad \forall i = 0, \dots, g$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, abbiamo

$p(\alpha) \in \mathbb{C}$ e

$$\overline{p(\alpha)} = \overline{c_g \alpha^g} + \overline{c_{g-1} \alpha^{g-1}} + \dots + \overline{c_2 \alpha^2} + \overline{c_1 \alpha} + \overline{c_0}$$

$$= \bar{c}_g \bar{\alpha}^g + \dots + \bar{c}_2 \bar{\alpha}^2 + \bar{c}_1 \bar{\alpha} + \bar{c}_0$$

$$= c_g \bar{\alpha}^g + \dots + c_2 \bar{\alpha}^2 + c_1 \bar{\alpha} + c_0$$

se $\alpha = z$ è una soluzione di $p(x) = 0$,

allora

$$\overline{p(z)} = \bar{0} = 0$$

cioè

$$c_g \bar{z}^g + \dots + c_2 \bar{z}^2 + c_1 \bar{z} + c_0 = 0$$

$\Rightarrow$ $\bar{z}$ è una soluzione di $p(x) = 0$

otteniamo il nostro claim.

$p(x)$ ha come radici i, $1-i$

$\Rightarrow$ $p(x)$ ha come radici i, $\bar{i}$, $1-i$, $\overline{1-i}$

$$\Rightarrow \quad p(x) = c(x-i)(x-\bar{i})(x-(1-i))(x-(\overline{1-i}))$$

$$= c(x-i)(x+i)(x-1+i)(x-1-i)$$

$$= c(x^2+1)((x-1)^2+1)$$

$$= c(x^2+1)(x^2-2x+2)$$

$p(1)=4 \Rightarrow c(1+1)(1-2+2)=4$

$\Rightarrow c=2$

$$\Rightarrow \quad p(x) = 2(x^2+1)(x^2-2x+2)$$

$$= 2(x^4-2x^3+2x^2+x^2-2x+2)$$

$$= 2x^4-4x^3+6x^2-4x+4$$

End Ex 7

Ex 8. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 13$

$g(x) = x - 3 - 2i$

$f(x)$ è divisibile per $g(x)$?

Sol:

si può fare la divisione con resto di $f(x)$ e $g(x)$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 5x^2 + 7x + 13 & x - 3 - 2i \\ x^3 - (3+2i)x^2 & x^2 + \cdots \\ \hline (-2+2i)x^2 + 7x + 13 & \\ \vdots & \end{array}$$

Ma si può anche considerare nel seguente modo:

$f(x)$ è divisibile per $g(x) \overset{1)}{\iff} f(x) = g(x)h(x)$

$\overset{2)}{\iff} f(3+2i) = 0$

1) è per definizione

2) è perché:

$3+2i$ è una soluzione di $f(x)=0$

se e solo se

$f(x) = (x-(3+2i))(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})$

con $n = \deg f$

$\alpha_1, \dots \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$

Quindi basta calcolare $f(3+2i)$.

$f(3+2i) = (3+2i)^3 - 5(3+2i)^2 + 7(3+2i) + 13$

$= 0$

$\Rightarrow g \mid f$

End Ex 8