Lezione 15 - Analisi Matematica I

Titolo nota 06/12/2022

Def. Sia I un intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

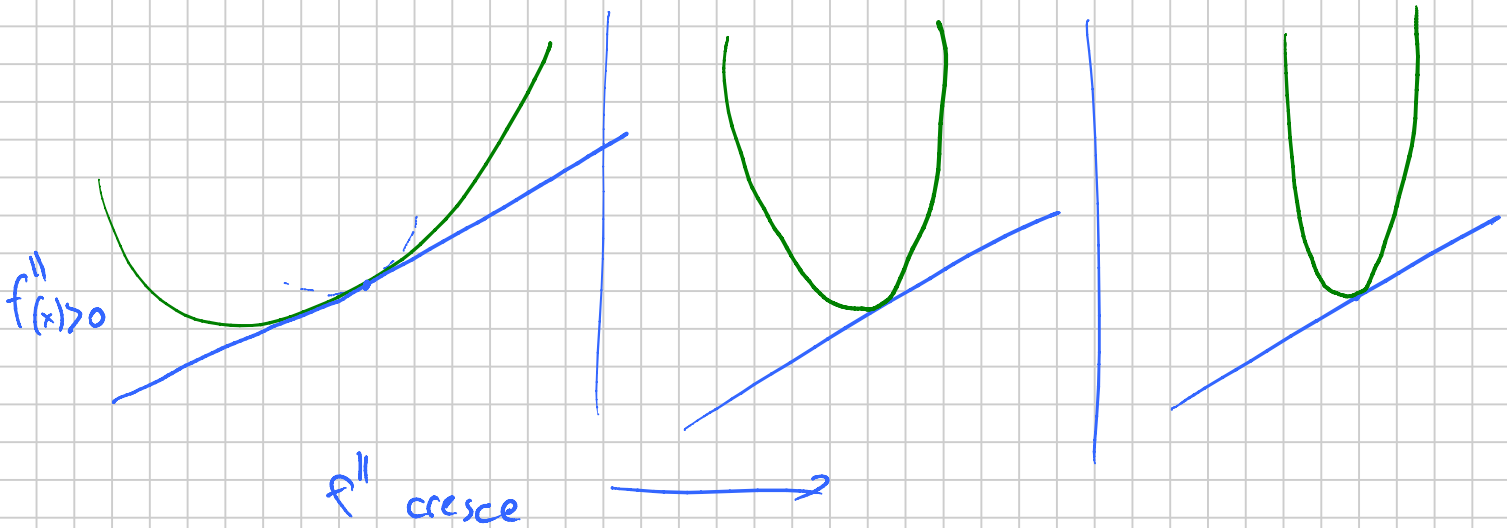
(i) f sia continua e derivabile in I

(ii) $f': I \to \mathbb{R}$ sia anch'essa derivabile

Allora la funzione f si dice derivabile 2 VOLTE in I e $f''(x) = \frac{d^2}{(dx)^2} f(x) = f^{(2)}(x) = (f')'(x)$ è la derivata della derivata prima e si chiama derivata SECONDA.

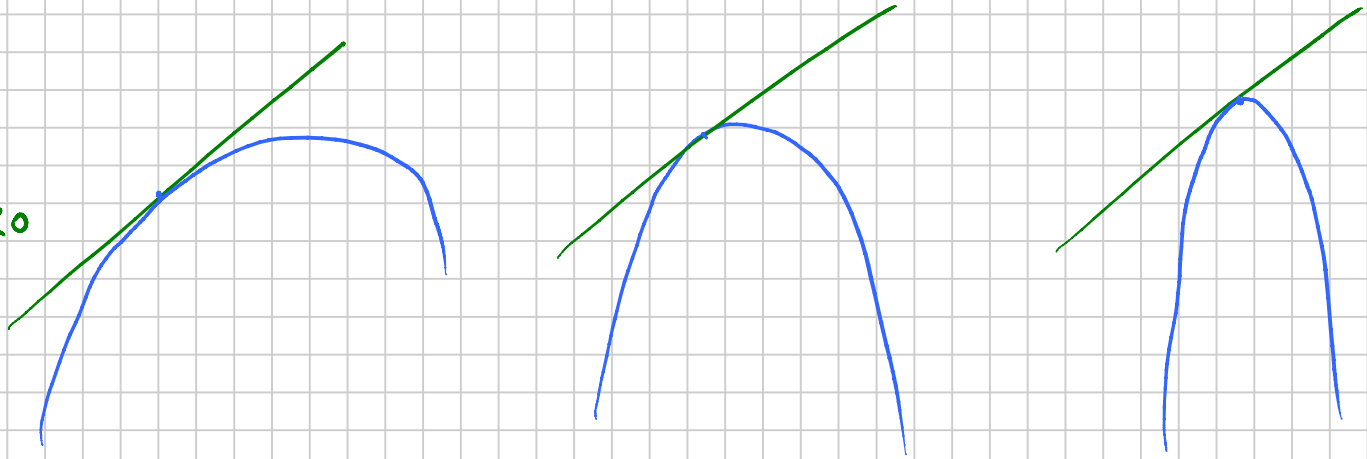
Similmente posso definire $f''', f^{IV}, f^{V}, \dots$ $(f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)} \dots)$.

Geometricamente: LA DERIVATA SECONDA DESCRIVE (QUANTIFICA) LA CURVATURA/CONCAVITÀ DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE.



f CONVESSA

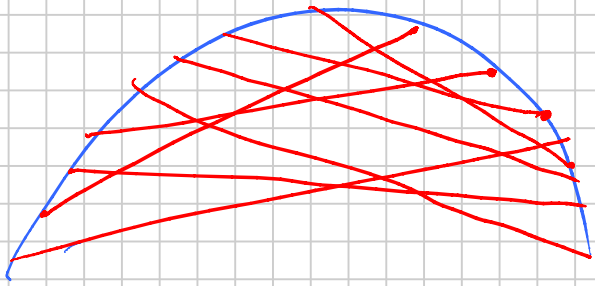
$f''(x)<0$



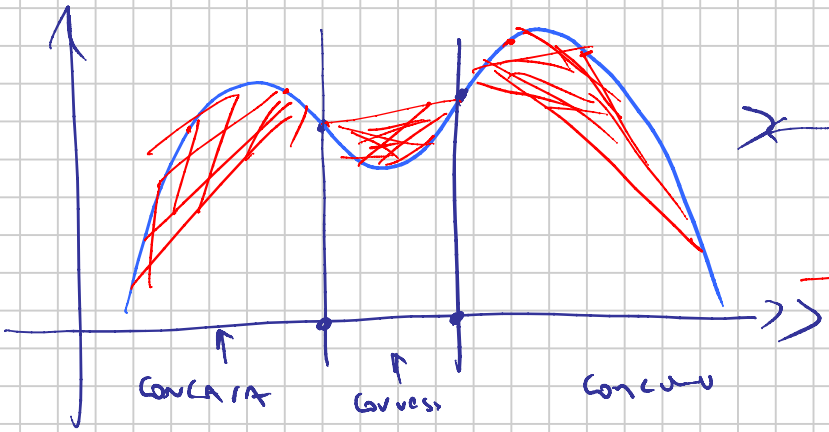
f'' decresce $\longrightarrow$

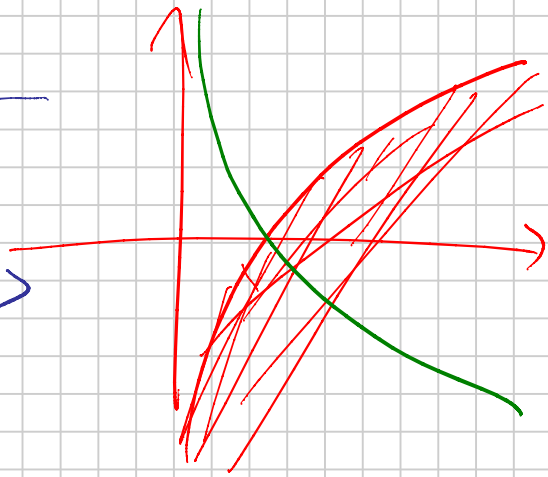
f CONCAVA

QUALSIASI CORDA È SEMPRE SOPRA IL GRAFICO



QUALSI CORDA È SEMPRE SOTTO IL GRAFICO



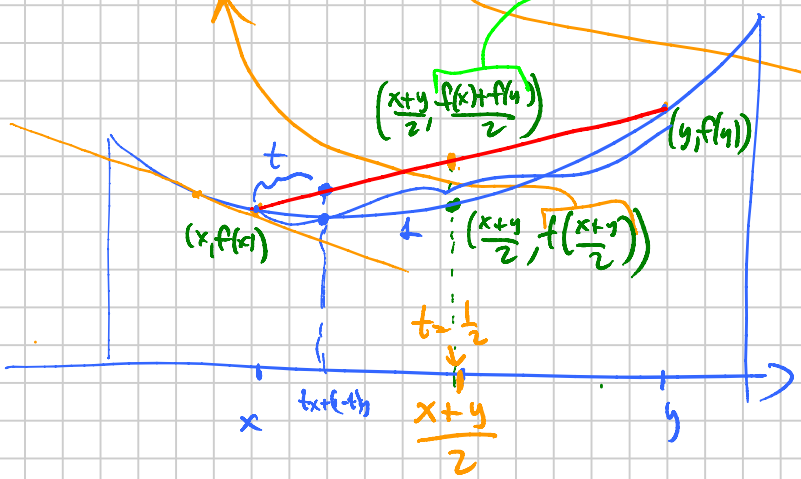


Def. I intervallo. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione allora f si dice convessa in I se

$$f(\underbrace{tx+(1-t)y}) \le \underbrace{t f(x) + (1-t) f(y)} \qquad \boxed{\forall x,y \in I} \quad \forall t \in (0,1).$$

per ogni corda

TUTTA LA CORDA È SOPRA IL GRAFICO



Def' I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f si dice CONCAVA in I se

$$f(tx+(1-t)y) \ge t f(x) + (1-t) f(y) \qquad \forall x,y \in I \quad \forall t \in (0,1).$$

Teo. CARATTERIZZAZIONI DELLA CONV./CON.

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I. Allora sono equivalenti:

(i) f è CONVESSA (CONCAVA) in I

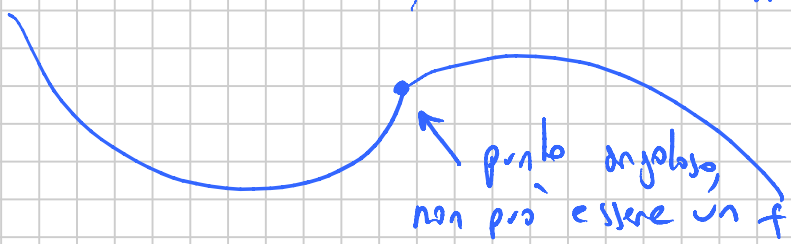
(ii) (se f è DERIVABILE in I) $f'(x)$ è CRESCENTE (DECRESCENTE) in I

(iii) (se f è DERIVABILE 2 VOLTE in I) $f''(x) \ge 0$ ($\le$) in I

(iv) (se f è DERIVABILE) $f(y) \ge f(x) + (y-x) f'(x)$ ($\le$) $\forall x,y \in I$

(v) $\Delta(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ è crescente (decrescente) sia in x che in y.

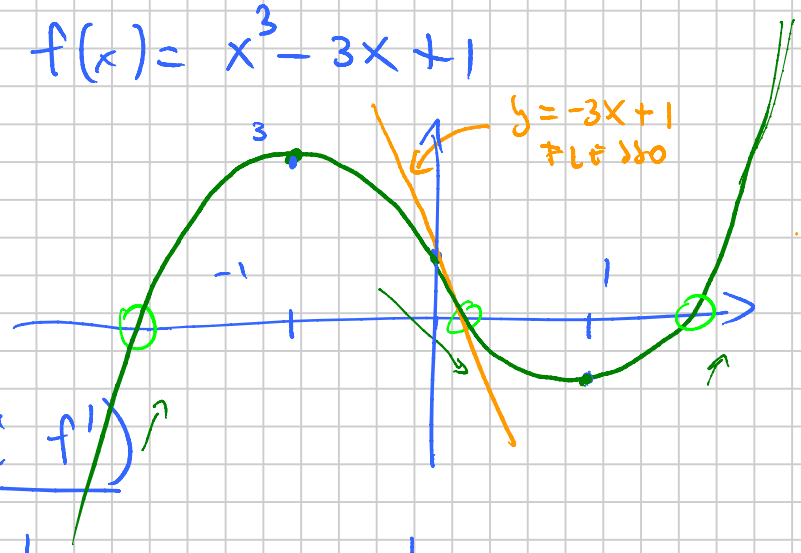
Def. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione <u>derivabile in x_0</u>. Allora x_0 si dice <u>punto di flesso</u> per f se $\exists\, \delta > 0$ tale per cui f è concava in $(x_0-\delta, x_0)$ ed è convessa in $(x_0, x_0+\delta)$ o VICEVERSA (c'è un CAMBIO DI CONCAVITÀ). IL FLESSO è la retta tangente in x_0



Es. (studio convessità/concavità) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$



<u>studio la monotonia (segno di f')</u>

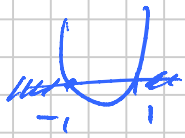
		-1		1	
f'	+		−		+
	↗		↘		↗

pto max locale

pto di min locale

$f' \geq 0$

$3x^2 - 3 \geq 0$



studio la concavità (segno di f'')

		0	
f''	−		+
	∩		∪

$f'' \geq 0$

$6x \geq 0 \iff x \geq 0$

punto di flesso perché $\nexists$ derivabile in 0

coefficiente angolare del flesso (in 0) : $f'(0) = -3$

STUDIO DI FUNZIONE (Schema)

1. Determinare il dominio di f e scriverlo come unione di intervalli $dom(f) = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$

2. Determinare (se possibile/sensato) segno della funzione ed eventuali intersezioni con gli assi coordinati: segnare qualche punto "notevole" sul grafico.
   Chiedersi eventuali simmetrie della funzione.

3. Determinare gli eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui [fare i limiti agli estremi del dominio]

4. Determinare gli intervalli di monotonia [studio del segno di f']

5. Determinare (se possibile/sensato) gli intervalli di convessità e concavità ed eventuali flessi [studio del segno di f'']

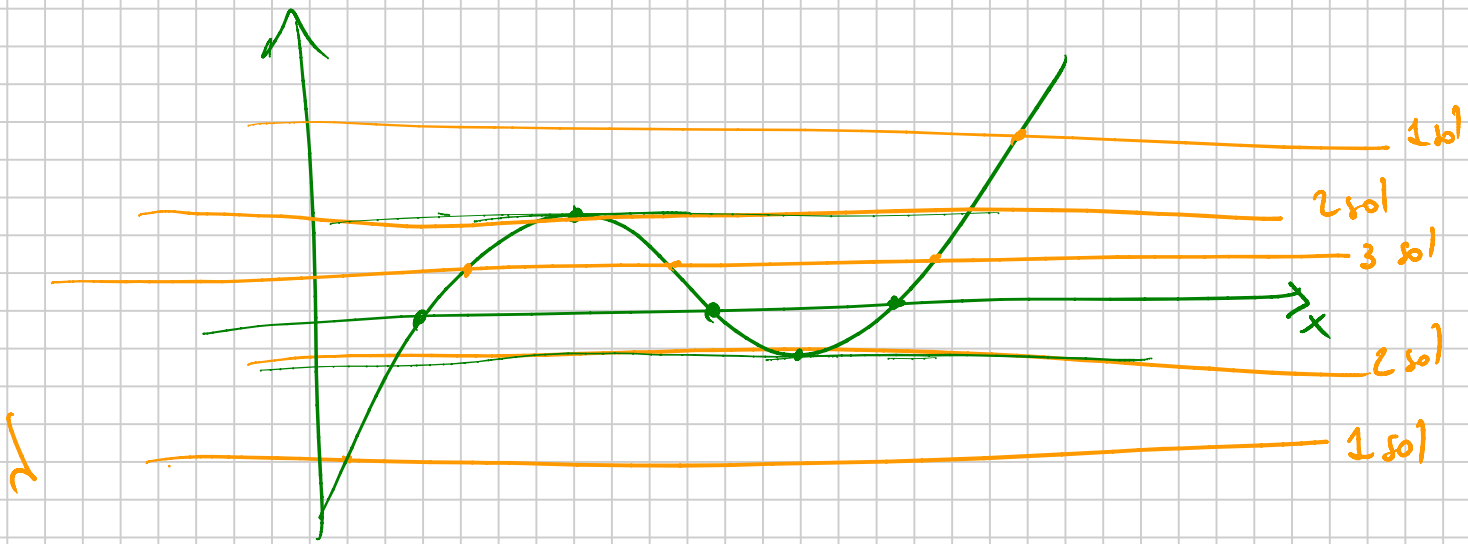
6. Ricerca di massimi e minimi relativi e assoluti; trovare inf e sup della funzione, e determinare se sono raggiunti.

7. Determinare $Im(f)$

8. Tracciare un grafico qualitativo di f.

Domande ulteriori possibili

- quante soluzioni ha l'equazione $f(x)=0$?
- Per quali λ l'equazione $f(x)=\lambda$ NON HA soluzione



- scrivere l'equazione del flesso
- " " della retta tangente in ....

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & x\geq 0 \\ x-b & x<0 \end{cases} \qquad f(0)=1 \qquad f'(x)=\begin{cases} 2x-a & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

1) Per quali valori di $a,b\in\mathbb{R}$ f è continua in $\mathbb{R}$?

2) " " " $a,b\in\mathbb{R}$ f è derivabile in $\mathbb{R}$?

Innanzi tutto osservo che per $x\neq 0$ la funzione è continua e derivabile.

1) $$\lim_{x\to 0^+} f(x) \overset{x>0}{=} \lim_{x\to 0^+} x^2-ax+1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \overset{x<0}{=} \lim_{x\to 0^-} x-b = -b$$

def. di continuità

$$f \text{ è continua in } 0 \iff \boxed{\underbrace{\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)}_{\lim_{x\to 0} f(x)} = f(0)}$$

$$\iff 1 = -b = 1$$

$$\iff \boxed{b=-1}$$

f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $b=-1$ e a qualunque

2) 2 strade: • limite del rapporto incrementale (IMPONGO f continua e poi ...)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \Rightarrow f \text{ è derivabile in } 0.$$

• altro metodo

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} \overset{h>0}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2-ah+\cancel{1}-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{h}_1} - a\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}_1} = -a$$

$h<0$ e $\boxed{b=-1}$ per la continuità

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \overset{h<0}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{h-(-1)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}^1}{\cancel{h}_1} = 1$$

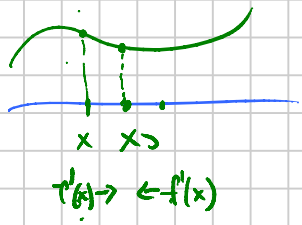
Ma allora f è derivabile in 0 se e solo se $\boxed{b=-1}$ per la cont. e $\boxed{a=-1}$.

$\boxed{\text{Teo.}}$ Sia $f: I \to \mathbb{R}$ con I intervallo una funzione. Sia $x_0 \in I$ un punto interno. Supponiamo che

(i) f sia derivabile in $I \setminus \{x_0\}$

(ii) f continua in x_0

(iii) $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \ell$



Allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \ell$

Operativamente nel nostro caso $I = \mathbb{R}$ $x_0 = 0$

(i) f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$? ✓

(ii) f è continua in $x_0 = 0$? sì se $\boxed{b=-1}$

(iii) $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -a$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$? sì, se $\boxed{a=-1}$

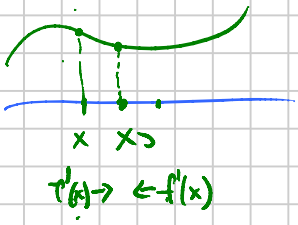
$\rightsquigarrow$ $\boxed{f \text{ è derivabile in } 0 \quad f'(0) = 1 \quad \text{se} \quad b = -1 \quad \text{e} \quad a = -1}$

Teo. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo una funzione. Sia $x_0 \in I$ un punto interno. Supponiamo che

(i) f sia derivabile in $I \setminus \{x_0\}$

(ii) f continua in x_0

(iii) $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \ell_1$

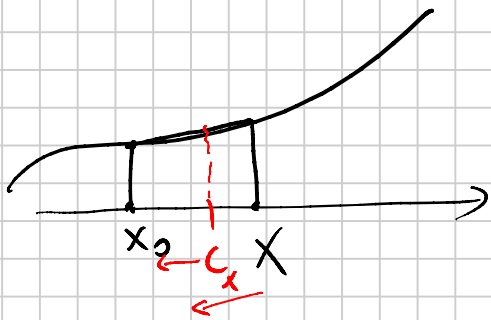


allora f è derivabile da DESTRA in x_0 e $f'_+(x_0) = \ell_1$.

Dim.

Lagrange su $[x_0, x]$*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{\cancel{x \to x_0} \\ c \to x_0^+}} f'(c) = \ell_1$$



* f continua in $[x_0, x]$ ✓

f derivabile in (x_0, x) ✓

$\rightsquigarrow \exists\, c \in (x_0, x)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

per i carabinieri

$x_0 < c_x < x$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x_0 \qquad x_0$

$\square$.