MECCANICA

CINEMATICA

Moti rettilinei

Prof. M. Sannino e D. Barberis - Genova

Meccanica – Considerazioni Generali

La Meccanica ha per oggetto lo studio dei fenomeni del movimento.
Il problema della meccanica e` sostanzialmente quello di descrivere in modo univoco e semplice tutti i movimenti che si osservano in Natura.

Si usa dividere la meccanica in *cinematica*, *statica* e *dinamica*

i. Cinematica : e`una specie di *geometria del moto* dove, ai concetti propri della geometria si unisce il concetto di tempo e si studia il moto unicamente come fenomeno *spazio-temporale*.
ii. Dinamica : ha il compito di individuare le condizioni essenziali affinche` il moto, come fenomeno, si verifichi in modo *prevedibile* ovverossia di individuare le *cause del moto* che a loro volta si identificano con il concetto di *forza.*
iii. Statica : studia le forze in *equilibrio* e, in qualche modo, puo` essere considerata come parte della dinamica.

Grandezze Fondamentali nella Meccanica

In Meccanica ci sono 3 grandezze fondamentali

Lunghezza	**L**
Tempo	**T**
Massa	**M**

Tutte le altre grandezze fisiche in Meccanica possono essere espresse in termini di esse

Moto in una dimensione (I)

La sezione della meccanica che descrive il moto usando i concetti di spazio e di tempo *indipendentemente* dalle cause del moto viene detta cinematica.

In quanto segue consideriamo il moto in *una* dimensione.

Dall'esperienza quotidiana si sa che il moto rappresenta il cambiamento continuo della posizione di un oggetto.
Il moto di un oggetto attraverso lo spazio puo` essere accompagnato dalla rotazione e dalla vibrazione dell'oggetto dando luogo a situazioni molto complesse.
Tuttavia… in molte situazioni un oggetto puo` essere trattato come un *punto materiale* (particella) se l'*unico moto* preso in considerazione e` quello di una *traslazione* nello spazio.
Questa approssimazione e` lecita quando il corpo e` tale che le sue *dimensioni lineari* sono trascurabili rispetto agli altri parametri in gioco e che quindi si possono trascurare movimenti rotatori, vibrazionali etc.

Il punto materiale e` analogo a un *punto matematico* senza dimensioni

Moto in una dimensione (II)

Esempi:

1) moto della Terra intorno al Sole : l'approssimazione di punto materiale è giustificata dal fatto che il raggio dell'orbita terrestre è molto grande rispetto alle dimensioni della Terra e del Sole.
2) Posizione di una nave in navigazione : quando si considera una nave in navigazione la sua posizione puo` essere idealizzata come un punto sulla carta nautica e cio` è giustificato dal fatto che le dimensioni della nave sono trascurabili rispetto alle distanze in gioco (cammino percorso, distanza da fari, promontori etc…)

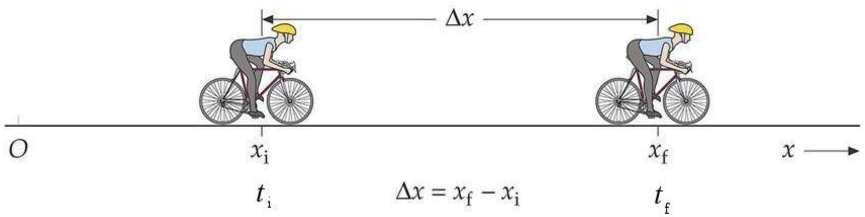
N.B. La descrizione di un sistema fisico con l'approssimazione del punto materiale puo` essere adeguata a certi scopi ma non ad altri.

Esempi:

I. La pressione di un gas sulle pareti di un contenitore puo` essere spiegata trattando le molecole del gas come particelle, cioe` come punti materiali mentre la descrizione come insieme di punti materiali e` inadeguata per comprendere quelle proprieta` del gas che dipendono dai moti molecolari come rotazioni e vibrazioni (ad es. calori specifici)
II. Se oltre alla posizione di una nave in navigazione si vogliono considerare i suoi movimenti dovuti alle onde (rollio, beccheggio etc.) l'approssimazione del punto materiale e` del tutto inadeguata.

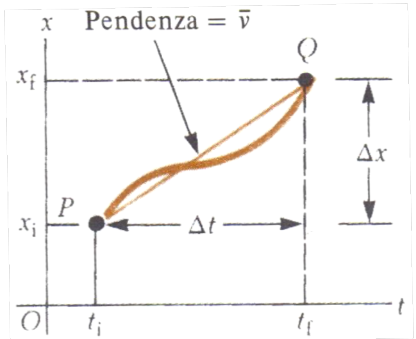
Moto in una dimensione (III)

Velocità Media (I)



Il moto di un ciclista che cammina lungo un rettilineo può essere approssimato al moto di un punto materiale quando non ci si interessi ai moti interni come le ginocchia del ciclista che pedalano o la catena di trasmissione della bicicletta.

Se si definisce come asse x l'asse del moto, siano x_i e x_f rispettivamente le posizioni a agli istanti t_i e t_f (gli indici **i** e **f** si riferiscono ai valori iniziali e finali).
La posizione, e cioè la coordinata spaziale della particella ai successivi istanti temporali, può essere riportata come una curva su un diagramma cartesiano in cui sull'asse delle



ascisse viene riportato il tempo, e sull'asse delle ordinate la coordinata spaziale, cioè la posizione del punto materiale.
Detta curva mette in corrispondenza ogni differente istante temporale con una e una sola posizione del punto materiale lungo l'asse x .

Un tale diagramma viene comunemente chiamato un grafico posizione – tempo e rappresenta "la coordinata del punto materiale in funzione del tempo".
Nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$, lo spostamento della particella è $\Delta x = x_f - x_i$ per cui la componente x della *velocità media* $\bar{v}$ del punto materiale è definita come il rapporto tra il suo spostamento Δx e l'intervallo di tempo Δt

$$\boxed{\bar{v} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}}$$

Moto in una dimensione (IV)
Velocità Media (II)

Dalla definizione è evidente che la velocità media ha le *dimensioni* di una *lunghezza divisa per un tempo* il che, in equazioni dimensionali, si esprime come

$$\boxed{[v] = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]} = [\mathrm{L}][\mathrm{T}^{-1}] = [\mathrm{L}\mathrm{T}^{-1}]}$$

Unita` di misura nel SI $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

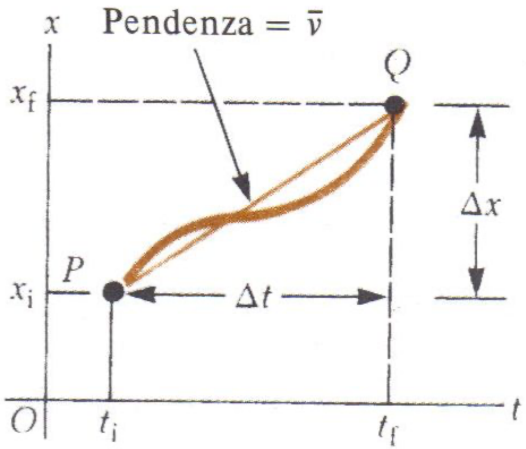
La velocità media *non* dipende dal particolare percorso fra il punto iniziale $\mathbf{P}$ e il punto finale $\mathbf{Q}$ (nel caso che il moto non si svolga lungo l'asse x ma nello *spazio tridimensionale* e che lungo la coordinata x si svolga *solo una* delle componenti del vettore spostamento): infatti la velocità media è proporzionale allo *spostamento* Δx che, a sua volta, dipende solo dalle *coordinate iniziali e finali* del punto materiale.

Di conseguenza, se un punto materiale parte da un certo punto e ritorna allo stesso punto attraverso un percorso arbitrario, la sua velocità media è nulla poiché il suo spostamento lungo una tale traiettoria è nullo.

Lo spostamento *non* deve essere confuso con il cammino percorso che in uno spostamento *arbitrario* è certamente *non nullo.*
Ne consegue che la velocità media non fornisce alcun dettaglio circa il moto fra i punti $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ ma dà solo un'*informazione* sul risultato *globale* di detto moto.

La velocità media in una dimensione (e quindi le componenti nel caso tridimensionale) può essere sia *positiva* che *negativa* a seconda del segno dello spostamento (ricordare che è *sempre* $\Delta t > 0$). Se $x_f > x_i$ allora $\Delta x > 0$ e $\overline{v} > 0$ cioe` la velocita` media è diretta secondo le x crescenti. Se $x_f < x_i$ allora $\Delta x < 0$ e $\overline{v} < 0$.

Moto in una dimensione (V)
Velocità Media (III)



La velocità media può anche essere interpretata geometricamente disegnando una retta fra i punti **P** e **Q** sul diagramma che rappresenta la posizione in funzione del tempo. Questa retta forma l'ipotenusa di un triangolo di altezza Δx e base Δt .

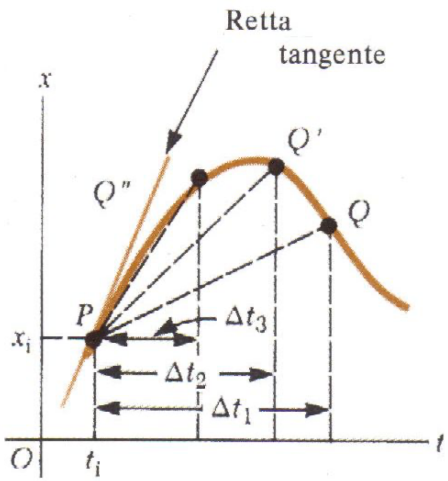
La pendenza di questa retta è il rapporto $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Si può quindi concludere che la velocità media della particella durante l'intervallo da t_i a t_f eguaglia la *pendenza* della retta che congiunge i punti iniziali e finali del grafico spazio – tempo.

N.B. Con la parola *pendenza* si intende il *rapporto* fra la variazione della quantità rappresentata sull'asse verticale e la variazione della quantità rappresentata sull'asse orizzontale. La pendenza è uguale alla quantità chiamata *coefficiente angolare* in Geometria Analitica.

Moto in una dimensione (VI)

Velocità Istantanea(I)



La velocità di un punto materiale ad un istante arbitrario t è detta *velocità istantanea*. Questo concetto è particolarmente utile quando la velocità media in differenti intervalli di tempo *non è costante*.

Dato il moto di un punto materiale fra due punti del grafico spazio-tempo, man mano che il punto **Q** si avvicina sempre di piu` al punto **P**, gli intervalli di tempo (Δt_1, Δt_2, Δt_3) diventano sempre più piccoli. La velocità media per ciascun intervallo di tempo è la pendenza della corrispondente linea tratteggiata. Quando il punto **Q** tende a **P**, l'intervallo di tempo tende a zero ma contestualmente la pendenza della linea tratteggiata tende alla pendenza della retta tangente alla curva nel punto **P**.

La *pendenza* della retta tangente nel punto **P** è definita come la *velocità istantanea* all'istante t

ovvero

La velocità istantanea v eguaglia il valore limite del rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero:

$$\boxed{v \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

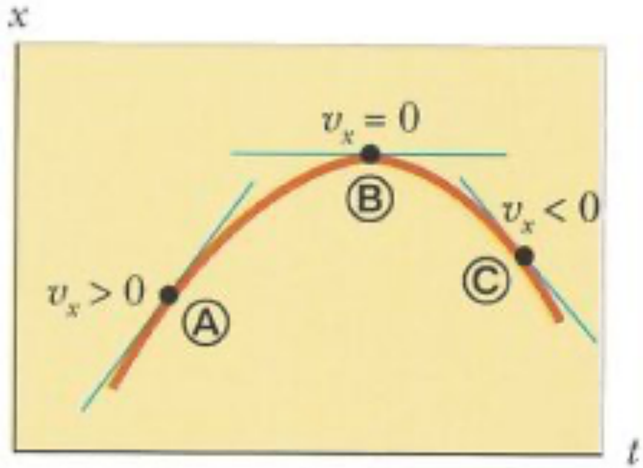
Moto in una dimensione (VII)

Velocità Istantanea (II)

Con la notazione del calcolo differenziale questo limite è chiamato la *derivata di x rispetto a t* *e scritto* $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{v \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

La velocità istantanea può essere positiva, negativa o nulla



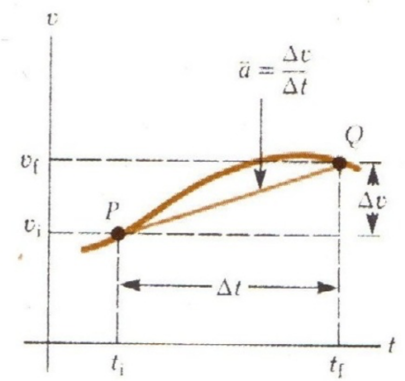
Nel grafico posizione-tempo mostrato, la velocità è positiva in A, dove la pendenza della linea tangente è positiva; la velocità è zero in B, dove la pendenza della tangente è zero; e la velocità è negativa in C, dove la pendenza della tangente è negativa.

D'ora in avanti adopereremo la parola *velocità* per indicare la *velocità istantanea*

Moto in una dimensione (VIII)
Accelerazione Media

Quando la velocità varia nel tempo si dice che il punto materiale è *accelerato*.
Per esempio la velocità di un'automobile aumenta quando si schiaccia l'acceleratore. Ovviamente è necessaria una definizione di accelerazione più precisa di questa.

Dato un punto materiale in moto lungo l'asse x con velocità v_i e v_f rispettivamente agli istanti t_i e t_f (gli indici **i** e **f** si riferiscono ai valori iniziali e finali).



l'*accelerazione media* $\bar{a}$ del punto materiale nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$, è definita come il rapporto tra la sua variazione di velocità $\Delta v = v_f - v_i$ e l'intervallo di tempo Δt

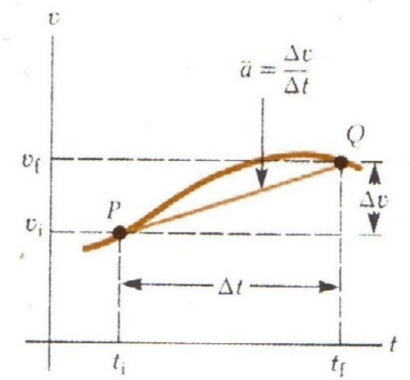
$$\boxed{\bar{a} \equiv \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

L'accelerazione ha le *dimensioni* di una *lunghezza divisa per un (tempo)²*

$$\boxed{[a] = \frac{[L]}{[T^2]} = [L][T^{-2}] = [LT^{-2}]}$$

Le unità comunemente adoperate nel SI sono $\frac{m}{s^2}$

Moto in una dimensione (IX)
Accelerazione Istantanea (I)



In generale il valore dell'accelerazione media può essere differente in differenti intervalli di tempo.
E\` pertanto utile definire l'*accelerazione istantanea* come limite dell'accelerazione media quando Δt tende a zero.
In modo analogo alla definizione di velocità istantanea, se si immagina che il punto **Q** si avvicina sempre di piu\` al punto **P** e si considera il limite del rapporto $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero, si ottiene l'*accelerazione istantanea*

$$\boxed{a \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$$

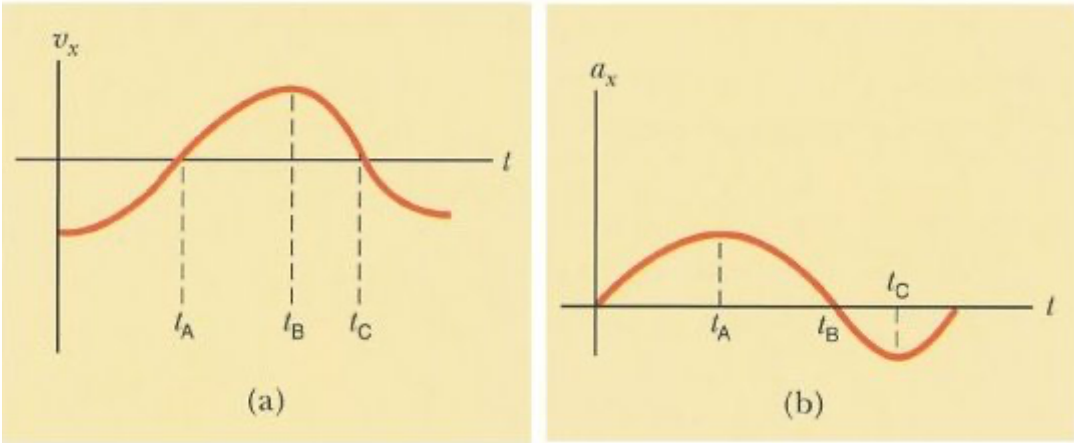
Per definizione l'accelerazione istantanea è quindi la *derivata della velocità rispetto al tempo,* ovveroè\` data dalla *pendenza* del grafico velocità-tempo.
Analogamente al caso della velocità, se a è positiva l'accelerazione è diretta verso i valori di x crescenti e viceversa verso i valori di x decrescenti se a è negativa.
Con il termine "accelerazione" si suole indicare l'*accelerazione istantanea* .

Dato che $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, l' *accelerazione istantanea* può anche essere scritta:

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}}$$

Cioè l'accelerazione è uguale alla *derivata seconda della coordinata rispetto al tempo*

Moto in una dimensione (X)
Accelerazione Istantanea (II)



La curva accelerazione-tempo può essere dedotta dalla curva velocità-tempo.
In queste rappresentazioni l'accelerazione ad un generico istante è semplicemente la pendenza del grafico velocità-tempo a quell'istante. Valori positivi dell'accelerazione corrispondono a quei punti in cui la velocità cresce nel verso delle x crescenti (*). L'accelerazione raggiunge un massimo all' istante t_A , quando la pendenza del grafico velocità-tempo è massima. L'accelerazione si riduce a zero all'istante t_B , quando la velocità è massima (cioè quando la pendenza della curva v in funzione di t è nulla). Poi l'accelerazione è negativa quando la velocità nel verso delle x crescenti decresce nel tempo fino a fermarsi, cambiare verso all'istante t_C , quando l'accelerazione negativa raggiunge un minimo (cioè il suo modulo è a un massimo ma il suo segno è negativo), per poi nuovamente crescere, sempre con il segno negativo, fino a diventare nulla quando la velocità raggiunge un minimo.

(*) **N.B.** Il fatto che una velocità negativa, e quindi diretta nel verso delle x decrescenti, decresca in modulo fino ad annullarsi per poi diventare positiva, e di conseguenza diretta nel verso delle x crescenti, implica che essa cresca nel verso delle x crescenti.

Moto in una dimensione (XI)

Moto con accelerazione costante (I)

Nel caso di accelerazione costante l'accelerazione media è pari all'accelerazione istantanea e di conseguenza la velocità cresce o decresce con la stessa rapidità durante il moto.
Sostituendo $\bar{a}$ con a nell'equazione

$$\bar{a} \equiv \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

si ottiene

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Ponendo $t_i = 0$ e $t_f = t$ (istante di tempo arbitrario), $v_i = v_0$ (velocità iniziale a $t = 0$) e $v_f = v$ (velocità ad un tempo arbitrario t) si può esprimere l'accelerazione come

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

da cui per la velocità si ottiene

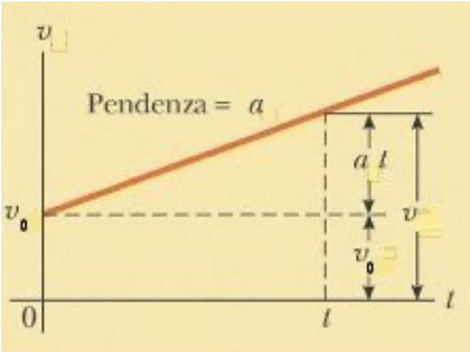
$$\boxed{v = v_0 + a\,t}$$

(per a costante)

Questa espressione ci permette di predire la velocità ad ogni istante t se la velocità iniziale, l'accelerazione (*costante*) ed il tempo trascorso sono noti.

Moto in una dimensione (XII)

Moto con accelerazione costante (II)



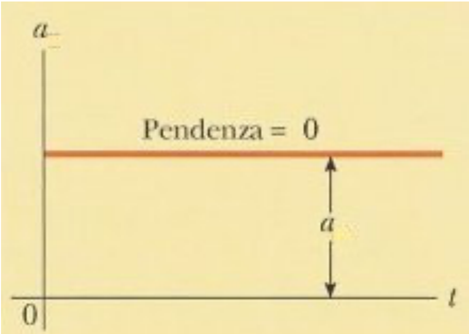
Il grafico della velocita` in funzione del tempo per un moto con accelerazione costante (detto anche *uniformemente accelerato*) e` rappresentato da una retta la cui pendenza e` l'accelerazione a.

Da questo grafico e dalla relazione $v = v_0 + at$ si vede che la velocita` ad un istante arbitrario $t$ e` la somma della velocita` iniziale $v_0$ e della variazione di velocita` at.

Dato che la velocita` varia linearmente nel tempo secondo la relazione $v = v_0 + at$ si puo` esprimere la velocita` media in un intervallo di tempo arbitrario come la media aritmetica della velocita` iniziale v_0 e della velocita` finale v .

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

N.B. Questa espressione e` valida solo quando l' accelerazione e` *costante* cioe` quando la velocita` varia *linearmente* con il tempo.



Il grafico dell'accelerazione in funzione del tempo e` una retta con pendenza nulla poiche` l'accelerazione e` costante.

Se l'accelerazione fosse negativa (una particella che decelera, cioe` rallenta), la pendenza del grafico della velocita` in funzione del tempo sarebbe negativa.

Moto in una dimensione (XIII)
Moto con accelerazione costante (III)

Facendo uso della relazione $\bar{v} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$ che definisce la velocità media si può ottenere lo spostamento in funzione del tempo.

Di nuovo, scegliendo $t_i = 0$, istante in cui la posizione iniziale è $x_i = x_0$, si ottiene

$$\Delta x = \bar{v}\,\Delta t = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right) t$$

ovvero

$$\boxed{x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t} \qquad \text{(per } a = \textit{costante}\text{)}$$

Si può ottenere un'altra utile espressione per lo spostamento sostituendo la relazione $v = v_0 + at$ nella relazione sopra trovata ottenendo

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + a\,t)t$$

$$\boxed{x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2} \qquad \text{(per } a = \textit{costante}\text{)}$$

Moto in una dimensione (XIV)

Moto con accelerazione costante (IV)

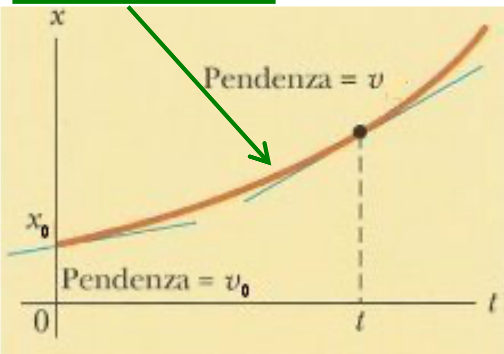
Infine si può ottenere un'equazione che non contiene il tempo sostituendo il valore di t che si ottiene dalla solita relazione $v = v_0 + at$ nell'equazione $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$

e cioè $t = \frac{v - v_0}{a}$ per cui sostituendo si ottiene

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

$$\boxed{x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$



Nel grafico posizione-tempo un moto uniformemente accelerato con accelerazione $a > 0$ è rappresentato da un arco di parabola descritto dall'equazione $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

La pendenza della tangente a questa curva a $t = 0$ è pari alla velocità iniziale, v_0 , e la pendenza della tangente ad un tempo t arbitrario è pari alla velocità v in quell'istante

Se il moto avviene con accelerazione nulla allora si vede che

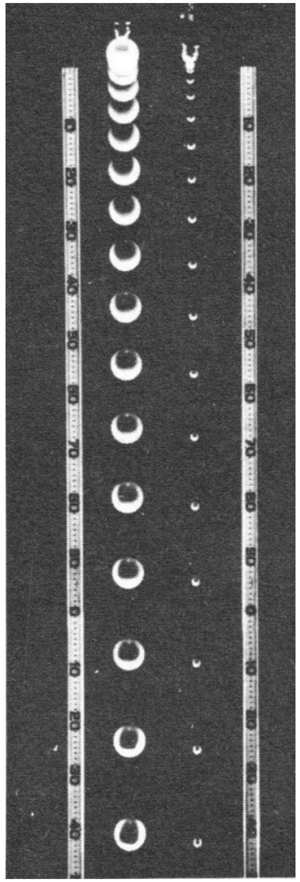
$$\left.\begin{array}{l} v = v_0 \\ x - x_0 = v\,t \end{array}\right\} \quad \text{quando } a = 0.$$

Cioè quando l'accelerazione è nulla la velocità è costante e lo spostamento varia linearmente nel tempo.

Moto in una dimensione (XV)

Moto con accelerazione costante (V)

Accelerazione di Gravità



Un corpo abbandonato a se stesso in prossimità della superficie terrestre accelera verso il basso sotto l'influenza della forza di gravità. Se la resistenza dell'aria è stata eliminata (collocando il corpo in un recipiente in cui è stato praticato il vuoto), il corpo è in *caduta libera* e il moto verso il basso procede con accelerazione *costante*. È un fatto notevole che il valore di questa accelerazione è esattamente lo stesso per tutti i corpi abbandonati a se stessi nella stessa posizione. Nella cronofotografia(*) è illustrata una dimostrazione sperimentale dell'uguaglianza delle accelerazioni di due corpi in caduta libera.

Questa accelerazione è detta *accelerazione di gravità* e si denota con g.
Il valore approssimato di g è

$$g \cong 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Il valore esatto dell'accelerazione di gravità varia da luogo a luogo sulla Terra, decresce con l'altitudine geografica e cresce con la latitudine. In Europa, Asia e America Settentrionale si può assumere per g il valore $9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ a meno di $\pm 0{,}02 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Per descrivere il moto di caduta libera si orienta l'asse x nella direzione verticale ascendente e quindi $a = -g$ per cui le equazioni per v e per x del moto uniformemente accelerato diventano

$$\boxed{v = v_0 - g\,t} \quad \text{e} \quad \boxed{x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g\, t^2}$$

(*) Una cronofotografia è una fotografia eseguita tenendo aperto l'otturatore della macchina in una stanza buia con una lampada a "flash" che illumina gli oggetti con lampi che scattano ad istanti posti ad intervalli di tempo uguali fra loro

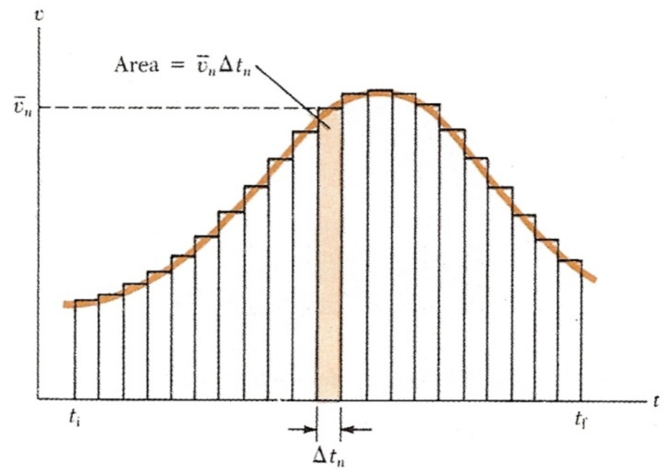
Moto in una dimensione (XVI)

Equazioni Cinematiche derivate dal calcolo (I)

La velocita` di un punto materiale che si muove di moto rettilineo si puo` ottenere dalla conoscenza della sua posizione in funzione del tempo ed e` la derivata della coordinata rispetto al tempo.

Esiste tuttavia anche il problema inverso e cioe`, conoscendo la velocita` in funzione del tempo determinare lo spostamento di un punto materiale. Nel Calcolo questa procedura e` chiamata *integrazione*.

Dato un diagramma di velocita` in funzione del tempo per un punto materiale che si muove lungo l'asse x , si suddivide l'intervallo di tempo $t_f - t_i$ in molti intervalli parziali di durata Δt_n abbastanza piccoli da poter considerare l'accelerazione come approssimativamente costante in ciascun intervallo. Dalla definizione di velocita` media si puo` vedere che lo spostamento durante un generico intervallo parziale quale quello evidenziato in figura, e` dato da $\Delta x_n = \overline{v}_n \Delta t_n$, dove $\overline{v}_n$ è la velocità media in quell'intervallo.



Pertanto lo spostamento durante questo intervallo parziale è semplicemente l'area del rettangolo evidenziato. Lo spostamento totale relativo all'intervallo $t_f - t_i$ è la somma delle aree di tutti i rettangoli.

$$\Delta x = \sum_n \overline{v}_n \Delta t_n$$

in cui la somma va estesa a tutti i rettangoli da t_i a t_f .
Quando ogni intervallo viene progressivamente ristretto, il numero di termini nella somma aumenta e la somma tende ad un valore uguale all'area sotto la curva velocità-tempo.

Moto in una dimensione (XVII)
Equazioni Cinematiche derivate dal calcolo (II)

Pertanto nel limite $\mathrm{n} \to \infty$ ovvero $\Delta t_\mathrm{n} \to 0$, si vede che lo spostamento è dato da

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_\mathrm{n} \to 0} \sum_\mathrm{n} v_\mathrm{n} \Delta t_\mathrm{n}$$

Ovvero **Spostamento = area sotto la curva velocità-tempo**

Nella somma si è sostituita la velocità istantanea v_n alla velocità media $\overline{v_n}$. Questa approssimazione è valida in quanto, come si è visto nella figura precedente, si sono scelti gli intervalli Δt_n molto piccoli, al limite piccoli a piacere cioè infinitesimi.

Si puo\` concludere che se è noto il grafico velocità-tempo per un moto rettilineo, lo spostamento in un qualsiasi intervallo di tempo puo\` essere ottenuto misurando l'area sotto la curva.

Va osservato che tale area va presa con il segno: infatti nel caso v_n sia negativa ($v_n < 0$), l'area del rettangolino $v_n \Delta t_\mathrm{n}$ è pure negativa e dà un contributo negativo all'integrale.

Il limite della somma nella relazione $\Delta x = \lim_{\Delta t_\mathrm{n} \to 0} \sum_\mathrm{n} v_\mathrm{n} \Delta t_\mathrm{n}$ è detto *integrale definito* e si scrive

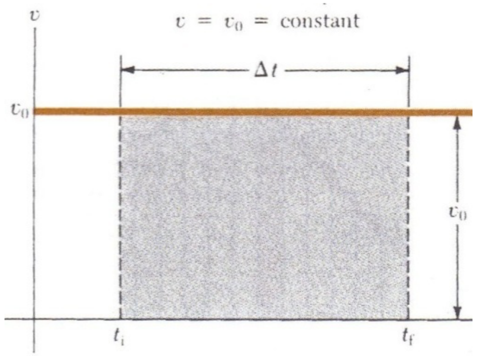
$$\boxed{\Delta x = \lim_{\Delta t_\mathrm{n} \to 0} \sum_\mathrm{n} v_\mathrm{n} \Delta t_\mathrm{n} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v(t)\,\mathrm{d}t}$$

Dove $v(t)$ indica la velocità ad un generico istante t .
Se la forma funzionale di $v(t)$ è nota, lo specifico integrale può essere valutato analiticamente o numericamente.

Moto in una dimensione (XVIII)
Equazioni Cinematiche derivate dal calcolo (III)

Esempi:

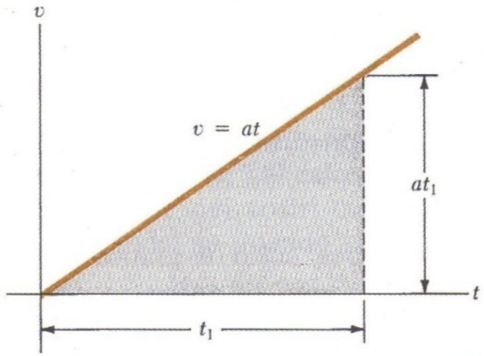
1) Punto materiale che si muove a velocità costante



Se un punto materiale si muove con velocità costante v_0 come in figura il suo spostamento durante l'intervallo Δt è semplicemente l'area del rettangolo tratteggiato e cioè

$$\Delta x = v_0 \Delta t \quad \text{(quando } v = v_0 = \text{costante)}$$

2) Punto materiale che si muove con velocità proporzionale al tempo (moto uniformemente accelerato)



Se $v = at$ dove la costante di proporzionalità è a (l'accelerazione), si trova che lo spostamento del punto materiale durante l'intervallo di tempo da $t = 0$ a $t = t_1$ è l'area del triangolo evidenziato in figura e cioè

$$\Delta x = \frac{1}{2}(t_1)(a\,t_1) = \frac{1}{2}\left(a\,t_1^2\right)$$

Moto in una dimensione (XIX)

Equazioni Cinematiche derivate dal calcolo (IV)

Equazioni Cinematiche (I)

Si fa uso delle equazioni che definiscono l'accelerazione e la velocità per derivare le equazioni cinematiche.

L'equazione che definisce l'accelerazione

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

puo` anche essere scritta in termini di un integrale come

$$v = \int a\,\mathrm{d}t + \mathrm{C}_1$$

dove $\mathbf{C_1}$ è una costante di integrazione. Nel caso particolare in cui l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è una costante esso si riduce a

$$v = a\,t + \mathrm{C}_1$$

Il valore di $\mathbf{C_1}$ dipende dalle condizioni iniziali del moto. Se si prende $\boldsymbol{v = v_0}$ per $\boldsymbol{t = 0}$ e si sostituiscono nell'ultima equazione, si ottiene

$v_0 = a \cdot 0 + \mathrm{C}_1$ Ovvero $\mathrm{C}_1 = v_0$ da cui la prima equazione cinematica

$$\boxed{v = v_0 + a\,t}$$ (per $\boldsymbol{a}$ costante)

Moto in una dimensione (XX)

Equazioni Cinematiche derivate dal calcolo (V)

Equazioni Cinematiche (II)

Facendo uso dell'equazione che definisce a velocità

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

la si può scrivere anche sotto forma integrale come

$$x = \int v \,\mathrm{d}t + C_2$$

dove C_2 è una costante di integrazione.
Poiché $v = v_0 + at$ l'equazione sopra diventa

$$x = \int (v_0 + at)\,\mathrm{d}t + C_2 = \int v_0 \,\mathrm{d}t + \int a t \,\mathrm{d}t + C_2 \quad \Longrightarrow \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + C_2$$

Per determinare C_2 si fa uso della condizione iniziale in base alla quale $x = x_0$ per $t = 0$ e, sostituendola nell'ultima equazione, si ottiene $C_2 = v_0$ da cui si ottiene

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

Questa è la seconda equazione cinematica (ricordare che x-x_0 e\` lo spostamento del punto materiale con posizione iniziale x_0).

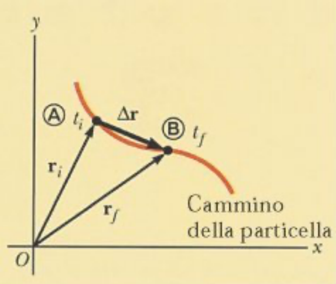
Moto nello Spazio e nel Piano (I)

Moto bidimensionale di un punto materiale (I)

Esempi comuni di moti piani sono il moto dei proiettili e dei satelliti e il moto delle particelle cariche sottoposte a campi elettrici uniformi.

Vettori spostamento, velocita` e accelerazione

Il moto di un punto materiale lungo una retta e` determinato in maniera completa se e` nota la sua coordinata in funzione del tempo.
Nel caso bidimensionale la posizione di un punto materiale e` descritta dal vettore posizione $\vec{r}$ tracciato fino al punto materiale a partire dall'origine di un qualche sistema di riferimento. All' istante t_i il punto materiale (particella) si trova in **A**.



e ad un qualche istante successivo t_f il punto materiale si trova in **B**. Quando il punto materiale si muove da **A** a **B** nell' intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ il vettore posizione cambia da $\vec{r}_i$ a $\vec{r}_f$.

Poiche` $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \Delta\vec{r}$, il vettore spostamento del punto materiale e`

$$\boxed{\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i}$$

Il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ (V. figura) e` pari alla differenza fra il vettore posizione finale e il vettore posizione iniziale e` il suo modulo e` minore della distanza percorsa lungo il percorso curvilineo: di fatto il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$
e` rappresentato dalla corda della traiettoria.

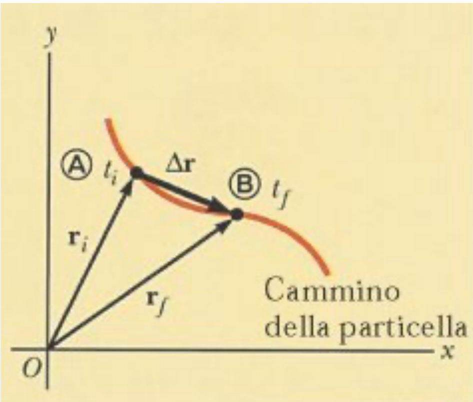
Moto nello Spazio e nel Piano (II)

Moto bidimensionale di un punto materiale (II)

Si definisce *velocita` media* durante l'intervallo di tempo $\Delta t$ il rapporto fra lo spostamento $\Delta\vec{r}$ e l'intervallo di tempo $\Delta t$ necessario affinche` il punto materiale possa compiere detto spostamento.

$$\boxed{\overline{\vec{v}} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

La velocita` media, in quanto rapporto fra un vettore ed uno scalare e` essa stessa un *vettore* che ha a sua volta *medesimi* direzione e verso di $\Delta\vec{r}$

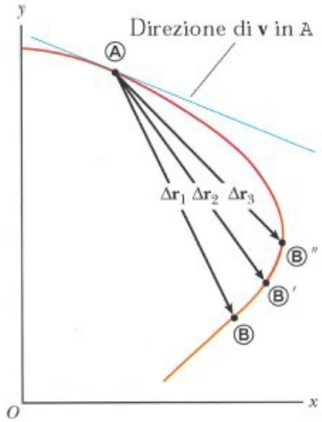


La velocita` media fra i punti **A** e **B** e` *indipendente* dal percorso fra i due punti e questo accade poiche` la velocita` media e` proporzionale allo spostamento che a sua volta dipende solo dai vettori posizione iniziale e finale.

Come nel caso del moto unidimensionale si puo` concludere che, se un punto materiale inizia il suo moto ad un certo punto e ritorna allo stesso punto tramite un percorso arbitrario, la sua velocita` media e` nulla in quanto il suo spostamento e` nullo.

Moto nello Spazio e nel Piano (III)

Moto bidimensionale di un punto materiale (III)



Dato un punto materiale che si muove fra due punti lungo una traiettoria nel piano $x\ y$, quando gli intervalli di tempo diventano sempre piu\` piccoli gli spostamenti $\Delta\vec{r}_1,\ \Delta\vec{r}_2,\ \Delta\vec{r}_3,\ldots$
Diventano progressivamente piu\` piccoli e la direzione dell spostamento tende a quella della tangente alla traiettoria nel punto $\mathbf{A}$.

La *velocita\` istantanea* $\boldsymbol{v}$ e\` definita come il limite della velocita\` media

$\bar{\vec{v}} \equiv \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ quando $\boldsymbol{\Delta t}$ tende a zero.

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{\mathbf{r}}}{d\,t}}$$

cioe\` la velocita\` istantanea e\` pari alla derivata del vettore posizione rispetto al tempo.
La direzione del vettore velocita\` istantanea giace lungo una retta tangente alla traiettoria del punto materiale e il suo verso e\` nella direzione del moto.
Quanto sopra esplicitamente esposto nel caso bidimensionale puo\` essere esteso senza alcuna variazione nel caso tridimensionale.

Moto nello Spazio e nel Piano (IV)

Moto tridimensionale di un punto materiale (I)

In generale, dato un vettore posizione di componenti $x(t), y(t), z(t)$ dipendenti dal tempo si definisce derivata del vettore posizione rispetto al tempo quel vettore che ha per componenti le derivate del vettore posizione rispetto al tempo e cioe` , dato

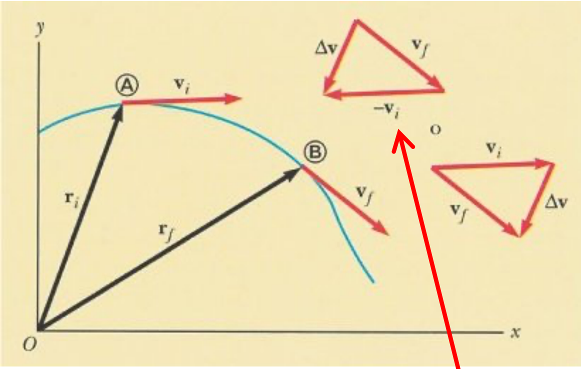
$$\boxed{\begin{gathered}\vec{\mathbf{r}}(t) \equiv \big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ \vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{z}(t)\,\hat{\mathbf{k}}\end{gathered}}$$

Si definisce $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\,t}$ cioe` vettore velocita` $\vec{v}$, il vettore

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\,t} \equiv \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\,t} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}, \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}, \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}\right)\end{gathered}}$$

Moto nello Spazio e nel Piano (V)

Moto tridimensionale di un punto materiale (II)



Quando un punto materiale si muove da **A** a **B** lungo un percorso arbitrario, il suo vettore velocita` istantanea cambia da $\vec{v}_i$ al tempo t_i a $\vec{v}_f$ al tempo t_f .

L' *accelerazione media* di un punto materiale nel suo moto da **A** a **B** e` definita come il rapporto della variazione del vettore velocita` istantanea $\Delta\vec{v}$ e il tempo trascorso Δt.

Il vettore $\Delta\vec{v}$ si trova aggiungendo al vettore $-\vec{v}_i$ il vettore $\vec{v}_f$ in quanto, per definizione, $\Delta\vec{v} \equiv \vec{v}_f - \vec{v}_i$

$$\boxed{\bar{\vec{\mathbf{a}}} \equiv \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$

L'accelerazione media e` il rapporto fra un vettore $\Delta\vec{v}$ e uno scalare $\Delta t$ per cui $\bar{\vec{\mathbf{a}}}$ e` un vettore diretto lungo $\Delta\vec{v}$

L' *accelerazione istantanea* $\vec{\mathbf{a}}$ e` definita come il valore limite del rapporto $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero cioè è pari alla derivata prima del vettore velocità rispetto al tempo.

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Un punto materiale puo` accelerare per diverse ragioni:

a) Il modulo del vettore velocità può variare nel tempo come nel moto unidimensionale.

b) La direzione del vettore velocità varia nel tempo anche se il modulo è costante.

c) Sia il modulo che la direzione del vettore velocità variano nel tempo.

Dal caso c) è evidente che l'accelerazione ha componenti vettoriali sia *tangenziali* che *perpendicolari* alla traiettoria.

Moto nello Spazio e nel Piano (VI)

Moto tridimensionale di un punto materiale (III)

Moto uniformemente accelerato nello spazio (I)

Un' accelerazione *costante* $\vec{\mathbf{a}}$ produce una variazione della velocità $\vec{\mathbf{a}}\,\Delta t$ in un intervallo di tempo Δt Se il vettore velocità iniziale è $\vec{v}_0$ la velocità dopo un intervallo di tempo t è

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\mathbf{a}}\,t}$$

In modo analogo al caso unidimensionale vale per il vettore posizione la relazione vettoriale

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}\,t^2}$$

Le componenti x, y, z delle due equazioni per $\vec{v}$ e per $\vec{r}$ sono rispettivamente

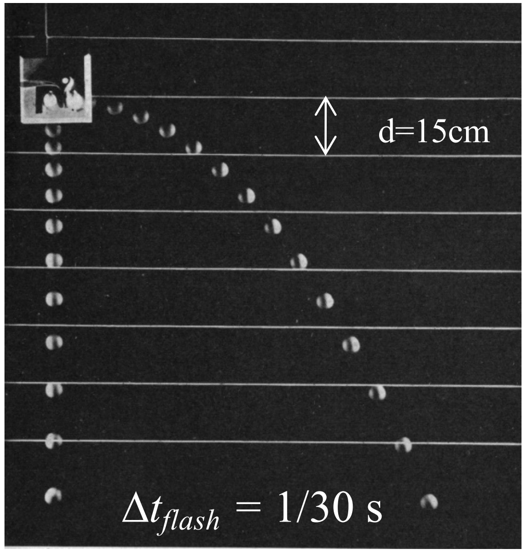
$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ v_y &= v_{0y} + a_y t \\ v_z &= v_{0z} + a_z t \end{aligned}} \quad \text{e} \quad \boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z &= z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{aligned}}$$

Queste sei equazioni esprimono il fatto che le componenti x, y, z del moto procedono in modo completamente *indipendente* l'una dall'altra, per cui l'accelerazione lungo x influenza soltanto la velocità lungo x, e così la variazione di posizione lungo x è determinata interamente dall'accelerazione lungo x e dalla velocità iniziale lungo x.

Moto nello Spazio e nel Piano (VII)

Moto tridimensionale di un punto materiale (IV)

Moto uniformemente accelerato nello spazio (II)



La figura illustra una dimostrazione sperimentale di questa indipendenza fra differenti componenti del moto. Due palle da golf sono state abbandonate a se stesse simultaneamente da una piattaforma sopra la superficie terrestre. Una palla è stata solo abbandonata a se stessa a partire dalla condizione di quiete mentre l'altra è stata lanciata con una velocità orizzontale iniziale.

Dato che le accelerazioni verticali sono uguali (si tratta dell'accelerazione di gravità per cui $a_z = -g$) le equazioni

$$v_z = v_{0z} + a_z t = v_{0z} - g\,t \qquad z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z\,t^2 = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}g\,t^2$$

prevedono che le componenti verticali dei moti siano esattamente le stesse per entrambe le palle, anche una di esse è animata da un moto orizzontale: solo le componenti orizzontali dei moti dovrebbero differire.

La cronofotografia mostra che esse effettivamente cadono all'unisono, raggiungendo quote uguali allo stesso istante per cui solo gli spostamenti orizzontali differiscono.