Esempio

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \in K^{1,n}, \;\; v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^{n,1}$$

$$uv = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = (u \cdot v) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \right) \in K^{1,1}$$

$$vu = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & \dots & v_1 u_n \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & \dots & v_2 u_n \\ \dots & & & \\ v_n u_1 & v_n u_2 & \dots & v_n u_n \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

Alcune proprietà del prodotto di matrici

Se le operazioni sono definite, si ha:

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Nota: Il prodotto di matrici non è commutativo.

Matrice identità

Per ogni n, sia

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

la matrice *identità*.
È elemento neutro per il prodotto in $K^{n,n}$. Più in generale:

$$\begin{aligned} \forall A \in K^{m,n}, &\quad AI_n = A \\ \forall B \in K^{n,p}, &\quad I_nB = B \end{aligned}$$

Matrici invertibili

Data una matrice $A \in K^{n,n}$, se esiste $B \in K^{n,n}$ tale che

$$AB = I_n$$

allora A si dice *invertibile*, e B è l'inversa di A e si denota A^{-1}.
In tal caso si ha anche

$$A^{-1}A = I_n$$

Nota: Non tutte le matrici quadrate sono invertibili.

Problema generale: Trovare criteri per stabilire se una data matrice quadrata è invertibile.

Esercizio: Determinare quando una matrice 1×1 è invertibile.

Sistemi di equazioni lineari

I sistemi di equazioni lineari sono una delle principali applicazioni delle matrici.

Un *sistema lineare* (con m equazioni e n incognite) è una collezione di equazioni del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

In genere, di un tale sistema si cercano le soluzioni, cioè tutte le n-uple ordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ che soddisfano tutte le m equazioni.

Terminologia

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$ è la *matrice dei coefficienti*
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^{m,1}$ è il vettore (colonna) dei *termini noti*
- $x_1, \dots, x_n$ sono le *incognite*, cioè $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n,1}$ è il vettore delle incognite

Notazione matriciale

Il sistema si può allora riscrivere come prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

cioè l'equazione matriciale

$$AX = B$$

Un caso particolare

Supponiamo che il sistema

$$AX = B$$

abbia tante equazione quante incognite (cioè $m = n$) e che la matrice dei coefficienti A sia invertibile.

Allora il sistema si può risolvere nel modo seguente:

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ I_nX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Si vede che in questo caso il sistema ammette un'unica soluzione.

Nota. Il calcolo di A^{-1} può essere complicato.

È opportuno sviluppare altri metodi di risoluzione, e che si applichino in situazioni più generali.

Sistemi omogenei

Un sistema $AX = O_{m1}$, cioè con i termini noti tutti nulli, si dice *omogeneo*.
Scritto per esteso:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases}$$

Nota: Un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno la soluzione $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, cioè il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K^{n,1}$

Una strategia per risolvere un sistema lineare è di modificarlo, **mantenendo invariato l'insieme delle soluzioni**, in un sistema più semplice, del quale le soluzioni si riconoscano facilmente.

Esempio

$$\begin{cases} 3x & -y & +7z & = & 1 \\ & y & +2z & = & 3 \\ -x & & +z & = & -2 \end{cases}$$

scambiando prima e terza riga: $R_1 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{cases} -x & & +z & = & -2 \\ & y & +2z & = & 3 \\ 3x & -y & +7z & = & 1 \end{cases}$$

moltiplicando la prima riga per -1: $R_1 \to -R_1$

$$\begin{cases} x & & -z & = & 2 \\ & y & +2z & = & 3 \\ 3x & -y & +7z & = & 1 \end{cases}$$

sostituendo la terza riga con la terza riga meno 3 volte la prima: $R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\begin{cases} x & & -z & = & 2 \\ & y & +2z & = & 3 \\ & -y & +10z & = & -5 \end{cases}$$

Esempio

sostituendo la terza riga con la somma della terza e della seconda riga: $R_3 \to R_3 + R_2$

$$\begin{cases} x & & -z & = & 2 \\ & y & +2z & = & 3 \\ & & 12z & = & -2 \end{cases}$$

moltiplicando la terza riga per $\frac{1}{12}$: $R_3 \to \frac{1}{12} R_3$

$$\begin{cases} x & & -z & = & 2 \\ & y & +2z & = & 3 \\ & & z & = & -\frac{1}{6} \end{cases}$$

sostituendo il valore di $z = -\frac{1}{6}$ nelle equazioni precedenti, si trovano i valori delle altre incognite (in questo caso il sistema ammette un'unica soluzione).

Ma si può anche continuare a *ridurre* il sistema:
sostituendo la seconda riga con la differenza tra la seconda riga e due volte la terza: $R_2 \to R_2 - 2R_3$

Esempio

$$\begin{cases} x \quad\quad -z = 2 \\ \quad y \quad\quad = \frac{10}{3} \\ \quad\quad\quad z = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

finalmente, sostituendo la prima riga con la somma della prima e della terza riga: $R_1 \to R_1 + R_3$

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad = \frac{11}{6} \\ \quad y \quad\quad = \frac{10}{3} \\ \quad\quad\quad z = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Ritorno al sistema

Il sistema

$$AX = B$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

può essere riscritto come:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = B$$

Ritorno al sistema

cioè come

$$(*) \qquad x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = B$$

Ovvero: la colonna B dei termini noti è una *combinazione lineare* delle colonne di A con le incognite come coefficienti

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n = B$$

Quindi: Il sistema $AX = B$ è risolubile se e solo se esistono $x_1, \dots x_n \in K$ tali che l'equazione $(*)$ è soddisfatta, cioè se e solo se la colonna dei termini noti B è combinazione lineare delle colonne $c_1, \dots, c_n$ della matrice dei coefficienti:

$$B \in \mathcal{L}(c_1, \dots c_n)$$

L'insieme delle soluzioni del sistema lineare è l'insieme di tutte le n-uple ordinate $(x_1, \dots, x_n)$ di coefficienti che esprimono B come combinazione lineare di $c_1, \dots, c_n$.

Ritorno all'esempio

Il sistema

$$\begin{cases} 3x & -y & +7z & = & 1 \\ & y & +2z & = & 3 \\ -x & & +z & = & -2 \end{cases}$$

ha come unica soluzione $(\frac{11}{6}, \frac{10}{3}, -\frac{1}{6})$ perché

$$\frac{11}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{10}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e non ci sono altre terne (x, y, z) tali che

$$x\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nelle trasformazioni effettuate sul sistema $AX = B$:

$$\begin{cases} 3x & -y & +7z & = & 1 \\ & y & +2z & = & 3 \\ -x & & +z & = & -2 \end{cases}$$

per portarlo in una forma facilmente risolubile, la posizione delle incognite x, y, z è rimasta sempre la medesima. A ogni passaggio sono cambiati solo i coefficienti e i termini noti. Si è cioè operato solo sulle matrici A e B:

$$A|B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ -1 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 3 & -1 & 7 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Il metodo della riduzione

$R_1 \to -R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 - 3R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 10 & -5 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 + R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & -2 \end{array}\right)$$

La parte sinistra della matrice è *ridotta*: in ogni riga non nulla c'è un elemento non nullo al di sotto del quale tutti gli elementi sono 0.
Il sistema corrispondente si risolve partendo dall'ultima equazione non nulla e sostituendo successivamente i valori trovati delle incognite nelle righe precedenti.

Il metodo della riduzione

Continuando nella riduzione:

$R_3 \to \frac{1}{12}R_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{11}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

La parte della sinistra della matrice è *fortemente ridotta*: ogni riga non nulla contiene un elemento non nullo che è l'unico elemento non nullo della sua colonna.

Il sistema corrispondente si risolve risolvendo indipendentemente tutte le equazioni non nulle, senza bisogno di sostituire i valori trovati nelle altre equazioni.