# Analisi Matematica 1

Titolo nota 29/11/2022

## Derivate di funzioni elementari

$f(x) = e^x$ qual è la sua derivata? Calcoliamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x \cdot \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\substack{\downarrow \text{ limite notevole} \\ 1}} = e^x = f'(x)$$

---

$f(x) = \ln(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}\cdot x}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

LIMITE NOTEVOLE

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \boxed{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}} = \frac{1}{x}$$

$\frac{h}{x} \to 0$, $\to 1$

---

$f(x) = \text{sen}(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cdot\text{sen}(h) + \text{sen}(x)\cos(h) - \text{sen}(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x) \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}}_{\to 1} + \operatorname{sen}(x) \cdot \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h \cdot h}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{h}_{\to 0}$$

$$= \cos(x) + \cancel{\operatorname{sen}(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0} = \cos(x)$$

---

$$a^x = e^{\ln(a) \cdot x}, \qquad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \qquad \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

## L'algebra delle funzioni derivabili

Siano $f, g$ due funzioni derivabili in $x_0$, allora le funzioni: $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ * sono derivabili in $x_0$ e le loro derivate sono:

$$\left(f(x) + g(x)\right)' \Big|_{x = x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\left(f(x) - g(x)\right)' \Big|_{x = x_0} = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$\left(f(x) g(x)\right)' \Big|_{x = x_0} = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \Big|_{x = x_0} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

* $g(x_0)$ deve essere diverso da 0.

**Corollario** Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f(x) + \mu g(x)$ e' derivabile in $x_0$ e la sua derivata e'

$$\lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

In particolare $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$.

$$f(x) = \log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{\ln(e)}}}_{\lambda \text{ COSTANTE}} \cdot \ln(x)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\ln(e)} \cdot \frac{1}{x}}$$

$$f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

$$f'(x) = \frac{(sen(x))' \cdot cos(x) - (cos(x))' \cdot sen(x)}{cos(x)^2} = \frac{cos(x) \cdot cos(x) - (-sen(x)) \cdot sen(x)}{cos(x)^2}$$

solo se $cos(x) \neq 0$

$$= \frac{cos(x)^2 + sen^2(x)}{cos^2(x)}$$

$$\to \frac{1}{cos(x)^2}$$

$$\to 1 + \left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right)^2 = 1 + tg(x)^2$$

# Derivata di funzione composta

Siano $f, g$ due funzioni tali che $g(x_0) = y_0$ e $g$ è derivabile in $x_0$ e $f$ è derivabile in $y_0$.
Allora $h(x) = f(g(x))$ è derivabile in $x_0$ e la sua derivata è

$$h'(x_0) = g'(x_0) \cdot f'(\underbrace{g(x_0)}_{=y_0})$$

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & g(x_0)=y_0 \arrow[r, bend left, "f"] & f(y_0) \end{tikzcd}$$

## Esempi

- $\cos(x^2) = h(x) = f(g(x))$   $f(y) = \cos(y)$
  $g(x) = x^2$

  $f(g(x)) = \cos(g(x)) = \cos(x^2)$ ✓

  $h'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) = 2 \cdot x \cdot (-\operatorname{sen}(x^2))$

  $= -2x \operatorname{sen}(x^2)$

- $e^{2x} = f(g(x))$   ① $f(y) = e^y$   $g(x) = 2x$
  $(e^x)^2$   ② $f(y) = y^2$   $g(x) = e^x$

① $(e^{2x})' = g'(x) \cdot f'(g(x)) = 2 \cdot e^{2x}$.

② $(e^{2x})' = g'(x) \cdot f'(g(x)) = e^{x} \cdot 2 \cdot e^{x} = 2e^{2x}$.

③ $e^{2x} = e^{x} \cdot e^{x}$ $\quad (e^{x} \cdot e^{x})' = e^{x} \cdot e^{x} + e^{x} \cdot e^{x} = 2e^{2x}$.

## Derivata di funzione composta

Siano $f, g$ due funzioni tali che $g(x_0) = y_0$ e $g$ è derivabile in $x_0$ e $f$ è derivabile in $y_0$.

Allora $h(x) = f(g(x))$ è derivabile in $x_0$ e la sua derivata è $h'(x_0) = g'(x_0) \cdot f'(y_0)$

**Dim.**

$$\lim_{k \to 0} \frac{h(x_0+k) - h(x)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(g(x_0+k)) - f(g(x_0))}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{f(g(x_0+k)) - f(\overset{y_0}{\cancel{g(x_0)}})}{g(x_0+k) - \underset{y_0}{\cancel{g(x_0)}}} \cdot \overbrace{\boxed{\frac{g(x_0+k) - g(x_0)}{k}}}^{g'(x_0)} = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$$

$y = g(x_0+k)$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0)$$

**Q.** che $\lim_{k\to 0} y = \lim_{k\to 0} g(x_0+k) \overset{\downarrow}{=} g(x_0) = y_0$ se g continua in $x_0$, che è vero per il prossimo teorema

**Teorema** Sia f derivabile in $x_0$, allora f è anche CONTINUA in $x_0$.

**Dim.**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \left(f(x)-f(x_0)\right)$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \overbrace{(x-x_0)}^{\to 0}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$$

$\square$.

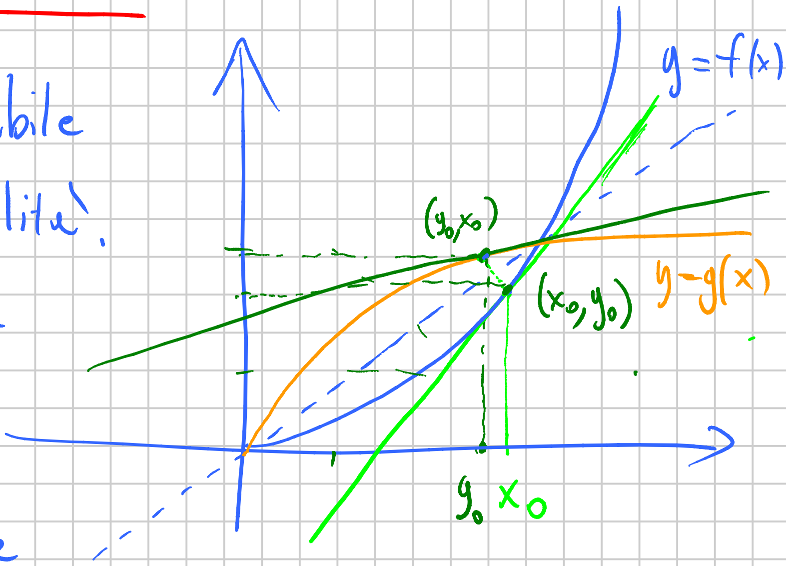
## Derivata della funzione INVERSA

Sia $f(x)$ una funzione invertibile e $x_0$ un punto di derivabilità.

Sia $g$ la funzione inversa di $f$ e $\boxed{y_0 = f(x_0)}$

Allora $g$ risulta derivabile in $y_0$ e inoltre

$\boxed{x_0 = g(y_0)}$




$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

$g$ inversa di $f$ $\rightsquigarrow$ $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ . $\left[ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right]$

$\boxed{\text{NOTA}}$ Se sappiamo già che $f$ è derivabile in $x_0$ e $g$ è derivabile in $y_0$, possiamo applicare la derivata di funzione composta:

$$\boxed{f(g(x)) = x}$$ (poiché $g$ è funz. inversa di $f$)

$$g'(y_0) \cdot f'(g(y_0)) = 1$$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

---

Es. $g(x) = \text{arctg}(x)$, funzione inversa di $f(x) = \text{tg}(x)$.

$\boxed{f'(x) = 1 + \text{tg}(x)^2}$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \text{tg}(g(x))^2} =$$

$$= \frac{1}{1 + \text{tg}(\text{arctg}(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

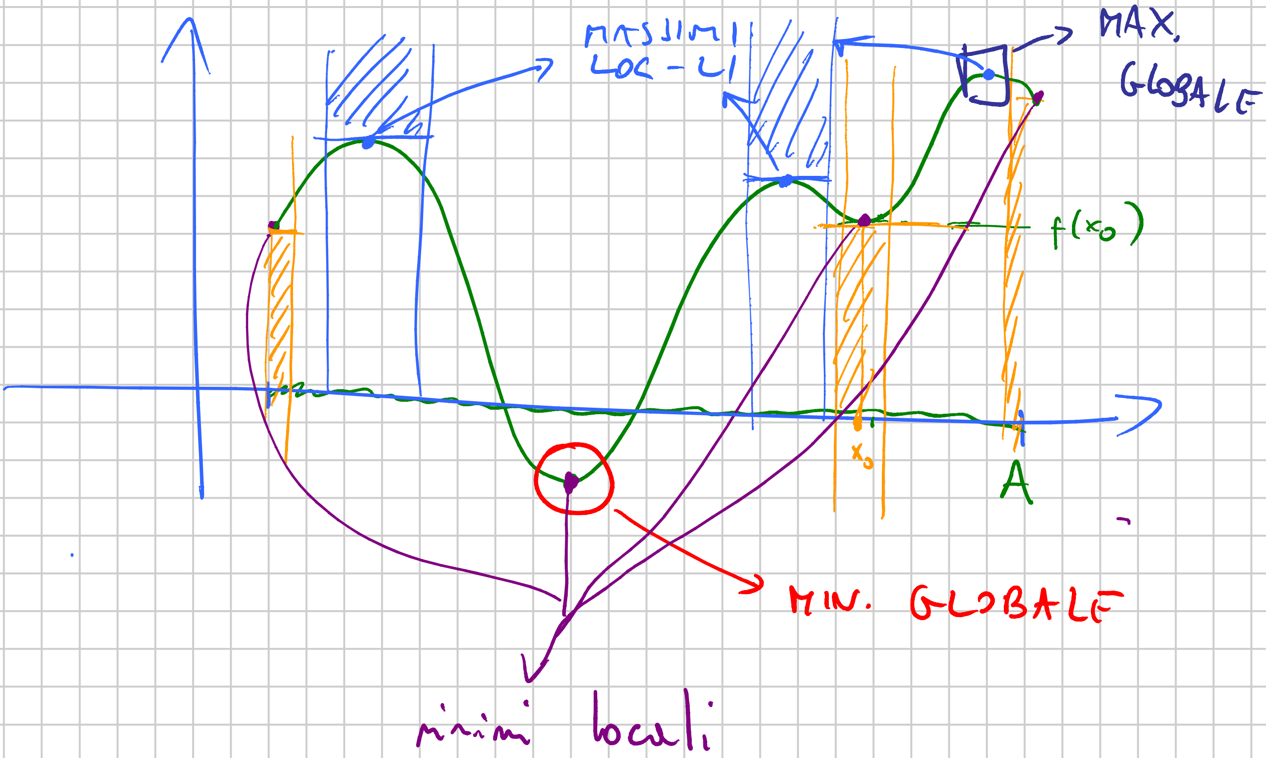
arctg è funz. inv. della tangente.

# Proprietà di funzioni CONTINUE e DERIVABILI

**Def** Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.
$x_0$ è detto punto di minimo (massimo) locale (o relativo) se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha

$$f(x) \overset{(\leq)}{\geq} f(x_0)$$

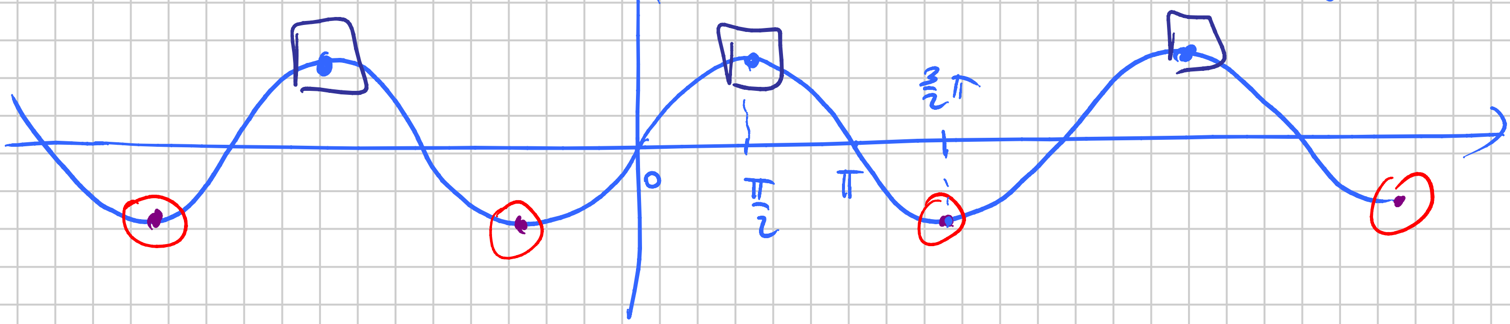
Si chiama inoltre minimo (massimo) locale stretto se vale la disuguaglianza stretta quando $x \neq x_0$



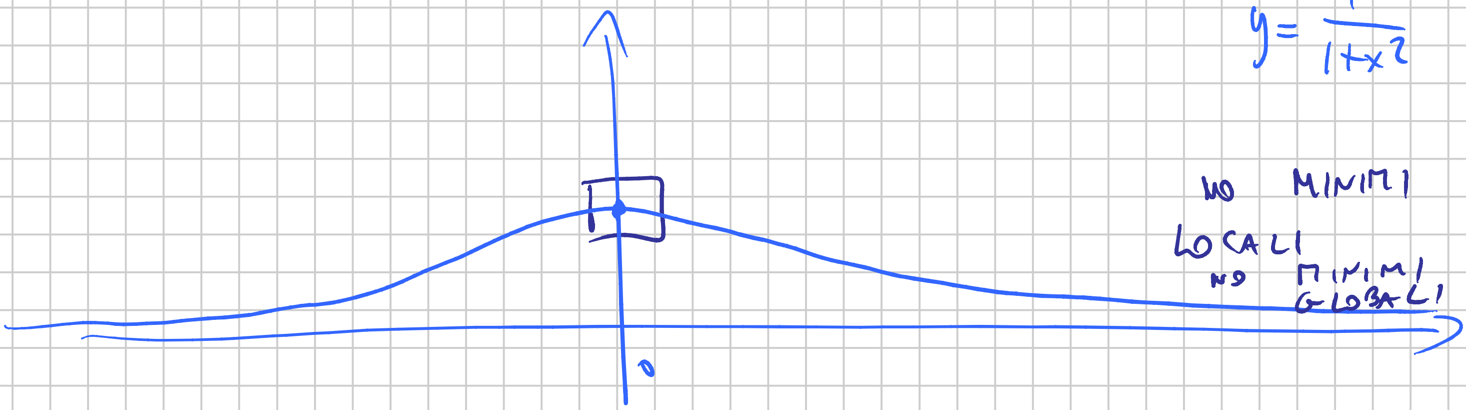

**Def.** Sia $f: A \to \mathbb{R}$. $x_0 \in A$ è detto punto di minimo (massimo) GLOBALE se

$$f(x) \overset{(\leq)}{\geq} f(x_0) \quad \forall\, x \in A.$$

$y = \sin(x)$



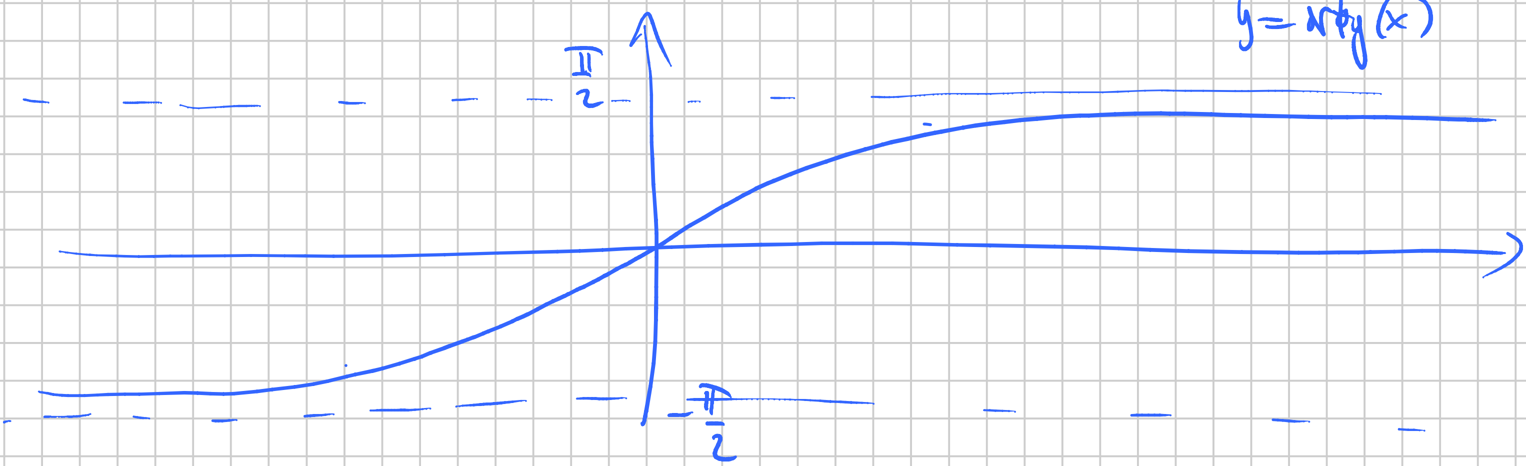
$y = \dfrac{1}{1+x^2}$



NO MINIMI LOCALI

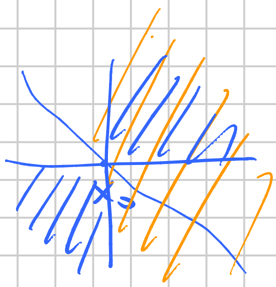
NO MINIMI GLOBALI

$y = \text{arctg}(x)$



MIN. LOCALE

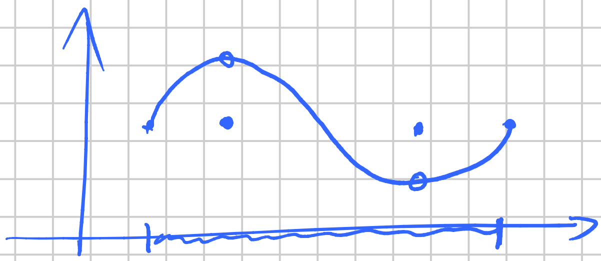
FUNZ. CRESCENTE.



FUNZ. DECRESCENTE

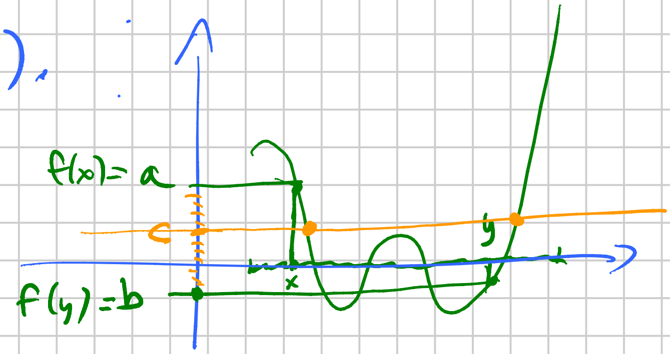
**Teo. (Weierstrass)** Sia $f: I \to \mathbb{R}$ con $I$ un $\boxed{\text{intervallo chiuso e limitato}}$ e $\boxed{f \text{ una funzione continua}}$.
Allora esistono sempre un punto di massimo globale e un punto di minimo globale.

Perché intervallo limitato? (vedi esempio arctg)
Perché intervallo chiuso? (Considero $f(x)=x$ su $I=(0,1)$ )
Perché funzione continua?



**Nota** Questo ci dice che $Im(f) \subseteq \mathbb{R}$ ha massimo e minimo quando $f: I \to \mathbb{R}$ è continua e $I$ è intervallo chiuso e limitato.

**Teo (dei valori intermedi)** Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua e $I$ intervallo. Allora se $a, b \in Im(f)$, allora $\forall\, c$ tale che $a \leq c \leq b$, si ha $c \in Im(f)$, cioè $[a,b] \subseteq Im(f)$.



**Corollario 1** Se $f: I \to \mathbb{R}$ $I$ intervallo e $f$ continua $\leadsto$

$$(\inf(f), \sup(f)) \subseteq Im(f)$$

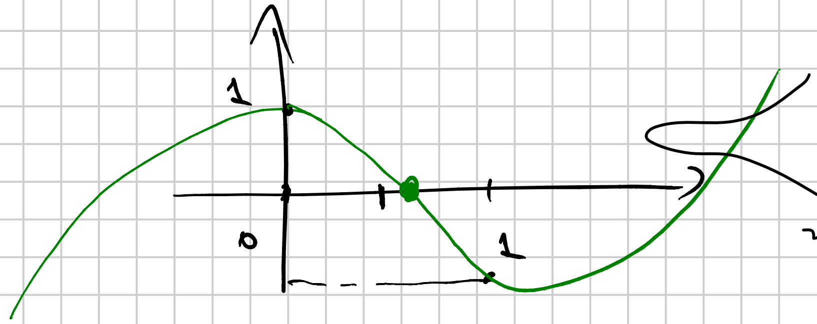
Gli unici altri elementi di $Im(f)$ sono $\inf(f)$ e $\sup(f)$ che appartengono ad $Im(f)$ quando $f$ realizza rispettivamente il minimo o il massimo (in particolare questo succede sempre se $I$ è chiuso e limitato)

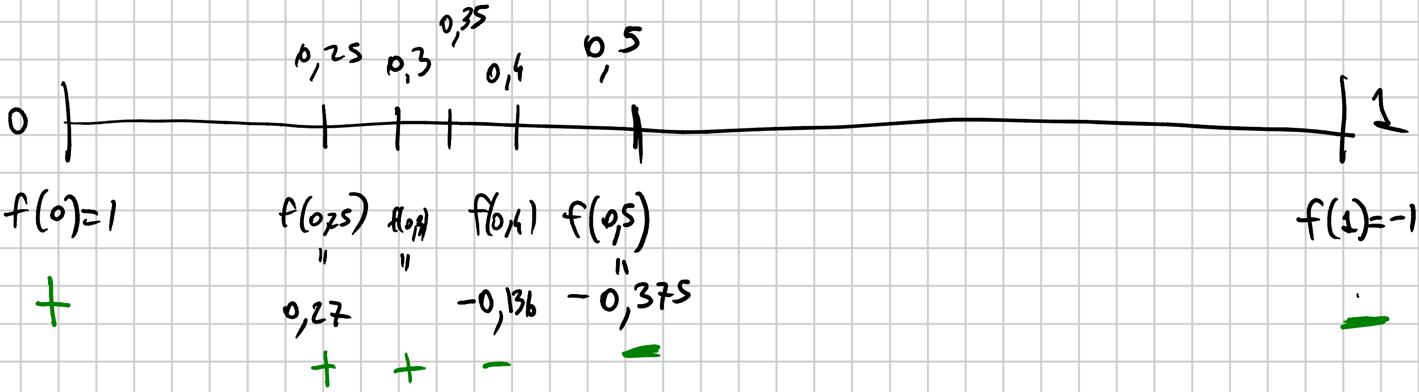
**Corollario 2** (Teo degli zeri) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists\ c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.

<u>Dim.</u> $f(a) \in Im(f)$, $f(b) \in Im(f)$, ma $0 \in [f(a), f(b)]$, e quindi anche $0 \in Im(f)$ e dunque $\exists\ c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$. Ovviamente $c \neq a$, $c \neq b$.

<u>Come fare a trovare questo punto c?</u>

Sia $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Considero $f(0) = 1$ e $f(1) = -1$






Dopo 10 volte, se ho fatto bisezione, mi trovo in un intervallo lungo $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < 0{,}001$.