Un'altra applicazione geometrica

- Il prodotto scalare nullo caratteriza l'ortogonalità di due vettori:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u \perp v$$

- Il prodotto vettoriale nullo caratterizza il parallelismo di due vettori:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ sono paralleli}$$

- **Il prodotto misto nullo caratteriza la complanarità di tre vettori**:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ sono complanari}$$

  Infatti un parallelepipedo ha volume nullo se e solo se i suoi tre spigoli sono complanari.

Proprietà del prodotto misto

Le proprietà del prodotto misto si ricavano (e dimostrano) dalle proprietà del prodotto scalare e del prodotto vettoriale.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$$

Infatti,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u}$$

e si ha

$$|\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u}|$$

poiché le due quantità sono il volume del medesimo parallelepipedo. Pertanto

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \pm \vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u}$$

Il segno da scegliere è $+$ perchè $\vec{u} \wedge \vec{v}$ appartiene al medesimo semispazio di $\vec{w}$ se e solo se $\vec{v} \wedge \vec{w}$ appartiene al medesimo semispazio di $\vec{u}$.

Proprietà del prodotto misto

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \quad & \vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u} = \quad & \vec{w} \wedge \vec{u} \cdot \vec{v} = \\
= -\vec{u} \wedge \vec{w} \cdot \vec{v} = \quad & -\vec{w} \wedge \vec{v} \cdot \vec{u} = \quad & -\vec{v} \wedge \vec{u} \cdot \vec{w}
\end{aligned}
$$

Infatti

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} &= -\vec{v} \wedge \vec{u} \cdot \vec{w} = \\
&= -\vec{v} \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} = -\vec{u} \wedge \vec{w} \cdot \vec{v} = \\
&= \vec{w} \wedge \vec{u} \cdot \vec{v} = \\
&= \vec{v} \cdot \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u} = \\
&= -\vec{w} \wedge \vec{v} \cdot \vec{u}
\end{aligned}
$$

Il calcolo vettoriale si può applicare a problemi di geometria (del piano e dello spazio).

Richiamo: Poichè ogni vettore $\vec{v} = OP$ si può identificare con il punto P che è il suo secondo estremo, se $P = (a, b, c)$, si può scrivere

$$\begin{aligned} \vec{v} &= a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \\ &= (a, b, c) \end{aligned}$$

Con questa notazione

$$\begin{aligned} \vec{i} &= (1, 0, 0) \\ \vec{j} &= (0, 1, 0) \\ \vec{k} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Rette in forma parametrica

Una retta r nello spazio può essere individuata da:

(a) Un punto in r e la direzione di r; oppure

(b) Due punti distinti di r

Ognuna di queste due descrizione genera un modo analitico di rappresentare la retta r.

Retta per un punto con direzione data

Sia $P(a, b, c) \in r$. La direzione di r può essere individuata fornendo un vettore non nullo parallelo a r: $\vec{u} = (\lambda, \mu, \nu) = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \nu\vec{k}$.

Un punto $Q(x, y, z)$ appartiene a r se e solo se

$$\text{il vettore } (Q - P) \text{ è parallelo a } \vec{u}$$

cioè se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$(Q - P) = t\vec{u}$$

Retta per un punto con direzione data

L'equazione si può anche scrivere

$$Q = P + t\vec{u}$$

È un'*equazione parametrica* (vettoriale) della retta r: al variare di $t \in \mathbb{R}$ si ottengono tutti e soli i punti $Q \in r$.

Esprimendola in coordinate si ottengono le tre equazioni parametriche (scalari) della retta r:

$$\begin{cases} x = a + \lambda t \\ y = b + \mu t \\ z = c + \nu t \end{cases}$$

Retta per due punti

Il caso della retta passante per due punti distinti

$$P(a, b, c), \quad P'(a', b', c')$$

si riconduce al precedente: è la retta per P parallela al vettore $(P' - P) = (a' - a, b' - b, c' - c)$. Dunque

$$Q = P + t(P' - P)$$

è l'equazione parametrica vettoriale;

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a + (a' - a)t \\ y & = & b + (b' - b)t \\ z & = & c + (c' - c)t \end{array} \right.$$

sono le equazioni parametriche scalari.

Posizione reciproca di due rette

Definizione. L'*angolo tra due rette* r e r' è l'angolo formato da un vettore non nullo parallelo a r e un vettore non nullo parallelo a r'.

Nota: Quindi se α e angolo tra r e r', anche $\pi - \alpha$ lo è.

Siano r e r' rette dello spazio. Si hanno i casi seguenti:

(1) $r = r'$: le rette sono *coincidenti*

(2) i vettori direzioni di r e r' sono paralleli: le rette sono *parallele*.
Nota: Rette coincidenti sono parallele.

(3) r e r' non sono parallele, ma hanno un punto comune: le rette sono *incidenti*

(4) nei casi (1), (2), (3), le rette sono *complanari*

(5) r e r' non sono incidenti nè parallele: sono *sghembe*

Posizione reciproca di due rette

Le operazioni vettoriali sulle equazioni parametriche delle rette permettono di stabilirne la posizione reciproca.

Siano

$$\begin{array}{rll} r: & Q = & P + t\vec{u} \\ r': & Q = & P' + s\vec{v} \end{array}$$

ovvero

$$r: \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a + \lambda t \\ y & = & b + \mu t \\ z & = & c + \nu t \end{array} \right. \quad , \quad r': \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a' + \lambda' s \\ y & = & b' + \mu' s \\ z & = & c' + \nu' s \end{array} \right.$$

Posizione reciproca di due rette

Per trovare l'angolo α tra r e r':

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

In particolare:

Se $\cos\alpha = \pm 1$, allora $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$, e le rette sono parallele

Se $\cos\alpha = 0$, allora $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e le rette sono perpendicolari

Posizione reciproca di due rette

Gli eventuali punti comuni delle due rette si trovano risolvendo l'equazione in t, s:

$$P + t\vec{u} = P' + s\vec{v}$$

cioè il sistema

$$\begin{cases} a + \lambda t & = & a' + \lambda' s \\ b + \mu t & = & b' + \mu' s \\ c + \nu t & = & c' + \nu' s \end{cases}$$

Nessuna soluzione: nessun punto comune

Una soluzione $(\bar{s}, \bar{t})$: un punto comune:

$$(a + \lambda\bar{t}, b + \mu\bar{t}, c + \nu\bar{t}) = (a' + \lambda'\bar{s}, b' + \mu'\bar{s}, c' + \nu'\bar{s})$$

Infinite soluzioni: rette coincidenti: $r = r'$

Posizione reciproca di due rette

Le rette sono complanari se e solo se i vettori

$$\vec{u} \qquad \vec{v} \qquad PP'$$

sono complanari, cioè se e solo se

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot PP' = 0$$

Piani

Un piano (in forma cartesiana) si può rappresentare come il *luogo* (cioè: insieme) dei punti P dello spazio le cui coordinate (x, y, z) soddisfano un'equazione lineare:

$$ax + by + cz + d = 0$$

con a, b, c non tutti nulli.

Equazione cartesiana del piano

Infatti un piano α è determinato conoscendo:

- un punto $P_0 \in \alpha$
- una retta (direzione) ortogonale a α

Siano dunque

- $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$
- $\vec{n} = (a, b, c)$ un vettore *non nullo* ortogonale a α
- $P(x, y, z)$ il generico punto dello spazio, del quale vogliamo determinare le condizioni d'appartenenza a α

$$\begin{aligned} \text{Il punto } P \text{ appartiene a } \alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il vettore } P_0P \text{ è ortogonale a } \vec{n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad P_0P \cdot \vec{n} = 0 \end{aligned}$$

Equazione cartesiana del piano

$$P_0P \cdot \vec{n} = 0$$

è un'equazione (cartesiana, vettoriale) del piano α.

In componenti:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

cioè

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

è un'equazione (cartesiana, scalare) di α. È equivalente a

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

quindi è della forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

Osservazione. Scrivendo l'equazione come

$$ax + by + cz = -d$$

e poiché (x, y, z) sono le componenti del vettore OP, l'equazione diventa:

$$OP \cdot \vec{n} = -d$$

cioè: un piano α ortogonale a $\vec{n}$ è l'insieme dei punti P dello spazio tali che il prodotto scalare $OP \cdot \vec{n}$ è costante $(= -d)$.

Il valore di questa costante $-d$ dipende dalla posizione di α nello spazio: al variare di $d \in \mathbb{R}$ si descrivono tutti i piani ortogonali a $\vec{n}$.