

Algebra per Informatica

Esame 17 luglio 2024

Svolgere i seguenti esercizi **motivando chiaramente** le risposte.

Esercizio 1. Si consideri la seguente funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^2 + 4z. \end{aligned}$$

1. Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.
2. Determinare $f^{-1}(-5)$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente relazione d'equivalenza sull'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + b - 7 = c + d - 7.$$

Determinare la cardinalità di ciascuna delle seguenti classi di equivalenza:

$$\overline{(0, 0)}, \overline{(1, 1)}, \overline{(2, 3)}, \overline{(7, 2)}.$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x, y) = 15x - 24y$.

1. Determinare le seguenti controimmagini:

$$f^{-1}(10), f^{-1}(3).$$

2. Determinare (se esistono) un'inversa sinistra e un'inversa destra per f .

Esercizio 4. Determinare (se esiste) l'inverso dei seguenti elementi nei monoidi assegnati:

1. $\bar{2}$ nel monoide $(\mathbb{Z}_{10}, +, \bar{0})$;
2. $\bar{2}$ nel monoide $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot, \bar{1})$;
3. $\bar{3}$ nel monoide $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot, \bar{1})$;
4. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = x - 1$ nel monoide $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \circ, \text{id}_{\mathbb{Z}})$.