Forma trigonometrica

Si consideri il numero complesso scritto in forma algebrica

$$\alpha = a + ib$$

Il *modulo* di α è il numero reale non negativo

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Per il teorema di Pitagora, $|\alpha|$ è la distanza del punto del piano $\alpha = (a, b)$ dall'origine $0 = (0, 0)$.

Un *argomento* di α è un qualunque numero reale θ tale che

$$a = |\alpha| \cos \theta, \qquad b = |\alpha| \sin \theta$$

Se θ è un argomento di α, anche $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ è un argomento di α.
L'argomento θ è l'angolo che nel piano il segmento di estremi $0, \alpha$ forma con la retta dei numeri reali.
Se $\alpha = 0$, allora $|\alpha| = a = b = 0$, e quindi ogni θ è un argomento di α.

Forma trigonometrica

Se ρ è il modulo e θ un argomento del numero complesso $\alpha = a + ib$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) , dalle relazioni

$$a = \rho\cos\theta, \qquad b = \rho\sin\theta$$

segue che

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \\ &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

L'espressione

$$\alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove ρ è il modulo e θ è l'argomento di α, si dice *forma trigonometrica* del numero complesso α.

Nota: (ρ, θ) sono le coordinate polari del numero complesso α come punto del piano di Gauss.

Moltiplicazioni in forma trigonometrica

L'espressione in forma trigonometrica dei numeri complessi è scomoda per eseguire addizioni, ma è conveniente per le moltiplicazioni:

Il prodotto di due numeri complessi ha

- modulo uguale al prodotto dei moduli dei fattori
- argomento uguale alla somma degli argomenti dei fattori

cioè:

$$\begin{aligned}\alpha &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\\ \beta &= \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\ \alpha\beta &= \rho\sigma[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)]\end{aligned}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}&\alpha\beta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi) =\\ &= \rho\sigma[\cos\theta\cdot\cos\varphi - \sin\theta\cdot\sin\varphi + i(\sin\theta\cdot\cos\varphi + \cos\theta\cdot\sin\varphi)] =\\ &= \rho\sigma[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)]\end{aligned}$$

Potenze di numeri complessi

Applicando ripetutamente la formula per la moltiplicazione di numeri complessi si ottiene una formula per la potenza di un numero:

$$z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}}$$

Sia, in forma trigonometrica,

$$z = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Allora:

$$z^2 = \sigma^2(\cos 2\psi + i\sin 2\psi)$$
$$z^3 = \sigma^3(\cos 3\psi + i\sin 3\psi)$$
$$\ldots$$

In generale:

$$z^n = \sigma^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

Radici di numeri complessi: l'equazione $z^n = \alpha$

Fissiamo un numero naturale $n > 0$ e un numero complesso $\alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ scritto in forma trigonometrica; cerchiamo le soluzioni dell'equazione

$$z^n = \alpha$$

dove z è l'incognita. Ogni soluzione di tale equazione si dice *radice* n-*esima* del numero α.

Caso stupido: $\alpha = 0$.
L'unico numero complesso z tale che $z^n = 0$ è $z = 0$: 0 è l'unica radice n-esima di 0.

Radici di numeri complessi: l'equazione $z^n = \alpha$

Caso interessante: $\alpha \neq 0$.
Scriviamo anche l'incognita in forma trigonometrica:
$z = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$. L'equazione diventa

$$[\sigma(\cos\psi + i\sin\psi)]^n = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove le incognite sono i numeri reali σ, ψ, modulo e argomento dell'incognita complessa z.
Applicando la formula della potenza:

$$\sigma^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Questa è un'uguaglianza tra due numeri complessi in forma trigonometrica. Tale uguaglianza vale se e solo se:

- i due numeri hanno lo stesso modulo, cioè $\sigma^n = \rho$
- gli argomenti dei due numeri differiscono di un multipli intero di 2π, cioè $n\psi = \theta + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$

Radici di numeri complessi: l'equazione $z^n = \alpha$

I valori di modulo e argomento dell'incognita z sono quindi:

- $\sigma = \sqrt[n]{\rho}$
- $\psi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, per $k \in \mathbb{Z}$

C'è quindi un unico valore possibile per il modulo, mentre per l'argomento ci sono infiniti valori possibili.
Le soluzioni dell'equazione $z^n = \alpha$ sono quindi tutti i numeri della forma

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \qquad \text{per } k \in \mathbb{Z}$$

(dove ρ e θ sono il modulo e un argomento di α).

Radici di numeri complessi: l'equazione $z^n = \alpha$

Domanda: Quante sono le soluzioni trovate?

$$
\begin{aligned}
&z_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\tfrac{\theta}{n} + i\sin\tfrac{\theta}{n}\right)\\
&z_1 = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\tfrac{\theta}{n} + \tfrac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta}{n} + \tfrac{2\pi}{n}\right)\right]\\
&z_2 = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\tfrac{\theta}{n} + \tfrac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta}{n} + \tfrac{4\pi}{n}\right)\right]\\
&\dots\\
&z_{n-1} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Questi valori sono tutti distinti perché, pur avendo lo stesso modulo, hanno argomenti che non differiscono tra loro per multipli interi di 2π: infatti la differenza di argomento tra due soluzioni consecutive z_k e z_{k+1} è di $\frac{2\pi}{n}$.

Per la stessa ragione, invece, ogni altro valore z_k coincide con uno dei valori $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$. Per esempio:

$z_n = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n}\right)\right] =$
$\sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right)\right] = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) = z_0.$

Similmente, $z_{n+1} = z_1, z_{n+2} = z_2, \dots, z_{-1} = z_{n-1}, \dots$

Pertanto:

Le soluzioni dell'equazione $z^n = \alpha$ in campo complesso sono tutti e soli i numeri $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.
In particolare, ogni numero complesso diverso da 0 ha esattamente n radici n-esime.

Tutte queste n radici hanno il medesimo modulo $\sqrt[n]{\rho}$; nel piano di Gauss si trovano quindi sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.
Poiché la differenza tra gli argomenti di due radici consecutive z_k e z_{k+1} è sempre di $\frac{2\pi}{n}$, queste radici sono i vertici di un n-agono regolare di centro l'origine.

Esercizio. Calcolare e rappresentare sul piano di Gauss le radici quarte del numero i.

Calcolo delle radici quarte di i

In forma trigonometrica

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Chiamate z_0, z_1, z_2, z_3 le quattro radici quarte da determinare, in forma trigonometrica queste sono del tipo

$$z_k = \sigma(\cos\psi_k + i\sin\psi_k)$$

dove:

- $\sigma = \sqrt[4]{1} = 1$
- $\psi_k = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} + \frac{2k\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

Quindi:

- $z_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$
- $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$
- $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$
- $z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$

Nel piano di Gauss, i numeri z_0, z_1, z_2, z_3 sono i vertici di un quadrato di centro l'origine, inscritto nella cerchio unitario, col primo vertice di argomento $\frac{\pi}{8}$.

L'operazione di coniugio

Un'ulteriore operazione importante è definita sui numeri complessi: il *coniugio*.
Dato un numero complesso $\alpha = a + ib$, scritto in forma algebrica, il *coniugato* di α è il numero

$$\bar{\alpha} = a - ib$$

Nel piano di Gauss, $\bar{\alpha}$ è il punto simmetrico di α rispetto all'asse reale.

Proprietà

- $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$
- $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$
- $\overline{\alpha^n} = \bar{\alpha}^n$
- $\alpha + \bar{\alpha} = 2Re\alpha$; in particolare $\alpha + \bar{\alpha} \in \mathbb{R}$
- $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$; in particolare $\alpha\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$
- $\alpha = \bar{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Esercizio (facile).

Vettori del piano o dello spazio

Un *vettore (libero)* nel piano (o nello spazio) è un ente $\vec{v}$ caratterizzato da

(i) Una *direzione*, cioè una retta (che lo contiene)

(ii) Un *verso*, dei due possibili sulla retta direzione

(iii) Un *modulo* (o *intensità*, o *norma*), cioè la sua lunghezza, denotato $|\vec{v}|$ (o talvolta $||\vec{v}||$)

Due vettori che hanno la medesima direzione si dicono *paralleli*.
Due vettori paralleli si dicono *concordi* se hanno lo stesso verso; altrimenti si dicono *discordi*.

Se inoltre si stabilisce un punto di inizio del vettore (*punto d'applicazione*) si ottiene un *vettore applicato*.

Un vettore si rappresenta come segmento orientato (*freccia*). Se il vettore è applicato, l'origine della freccia è nel suo punto d'applicazione.

Vettori del piano o dello spazio

Fissato un punto d'applicazione O, tutti i vettori applicati in O sono determinati dal loro secondo estremo, cioè: per ogni punto P esiste un unico vettore $\vec{v}$ applicato in O che ha come secondo estremo P.

Notazione: $\vec{v} = OP = (P - O)$
Avvertenza: Talvolta $(P - O)$ indica il *vettore libero* determinato da O e P.

I vettori applicati (in un punto fissato O) si possono quindi identificare con i punti del piano (o dello spazio).

Esempio. Fissato $r \in \mathbb{R}^+$, i vettori del piano applicati in O di modulo r descrivono la circonferenza di centro O e raggio r.

Il vettore nullo

Quando si considerano i vettori OP, è ammesso il caso particolare $O = P$.

Il vettore OO si chiama *vettore nullo* e si denota $\vec{0}$:

- ha direzione e verso *indeterminati*
- $|\vec{0}| = 0$

Nota: Il vettore nullo è l'unico vettore che ha modulo 0: tutti gli altri hanno modulo positivo.

Operazioni sui vettori

I vettori geometrici possono essere manipolati usando varie operazioni.

- **Somma**
- **Prodotto per scalari**
- **Prodotto interno, o scalare**
- **Prodotto esterno, o vettoriale**
- **Prodotto misto**
- ...

L'insieme V dei vettori geometrici con le operazioni di somma e prodotto per scalari costituisce un primo esempio, *concreto*, di *spazio vettoriale*.

La somma di vettori

È un'operazione che prende in input una coppia di vettori $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e produce un vettore $\vec{u} + \vec{v} \in V$.

Il vettore $\vec{u} + \vec{v}$ è definito usando la *regola del parallelogramma*: $\vec{u} + \vec{v}$ è la diagonale del parallelogramma che ha per lati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, dove $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$ siano applicati allo stesso punto.

Equivalentemente (*regola di concatenazione*)**:** se $\vec{v}$ è applicato nel secondo estremo di $\vec{u}$, il vettore $\vec{u} + \vec{v}$ si ottiene come il vettore applicato nel punto d'applicazione di $\vec{u}$ il cui secondo estremo è il secondo estremo di $\vec{v}$.

Proprietà notevoli della somma

La somma di vettori geometrici:

(1) è associativa: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V,\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

(2) è commutativa: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

(3) ammette un elemento neutro (il vettore nullo): $\forall \vec{u} \in V,\ \vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$

(4) ogni elemento ha un opposto: $\forall \vec{u} \in V,\ \exists \vec{v} \in V,\ \vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$

Notazioni

- L'opposto del vettore $\vec{u}$ si denota $-\vec{u}$: è il vettore che ha
  - stessa direzione di $\vec{u}$
  - verso opposto a $\vec{u}$
  - modulo: $|-\vec{u}| = |\vec{u}|$
- L'associatività permette di scrivere a somma di tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ senza l'uso di parentesi:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

e, in generale, per una somma di m vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$:

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_m$$

Per calcolare la somma di tre o più vettori, può essere utile applicare (ripetutamente) la regola di concatenazione.

Il prodotto per scalari

Consiste nel moltiplicare tra loro uno *scalare* (numero reale) e un vettore: $(\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda\vec{v}$.

Intuitivamente, il vettore $\vec{v}$ da cui si parte è allungato (o accorciato) di un fattore λ.

Dati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in V$, si definisce il loro prodotto $\lambda\vec{v} \in V$ nel modo seguente:

(i) la direzione di $\lambda\vec{v}$ è la direzione di $\vec{v}$

(ii) il verso di $\lambda\vec{v}$ è il verso di $\vec{v}$ se $\lambda > 0$; è opposto al verso di $\vec{v}$ se $\lambda < 0$

(iii) $|\lambda\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}|$

Nota: se $\lambda = 0$:
La terza condizione nella definizione fornisce $|0\vec{v}| = |0||\vec{v}| = 0|\vec{v}| = 0$, quindi $0\vec{v} = \vec{0}$.

Proprietà notevoli del prodotto per scalari

Il prodotto per scalari soddisfa le seguenti proprietà:

(5) $\forall \vec{u} \in V,\ 1\vec{u} = \vec{u}$

(6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in V,\ \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

(7) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

(8) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in V,\ (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$

La proprietà (6) è detta *omogeneità*.
(7) e (8) sono le *proprietà distributive*.

Versori

Si cerca ora un modo *algebrico* di rappresentare un vettore *geometrico*, per poter sfruttare in ambito geometrico gli strumenti (specialmente di calcolo) dell'algebra.

Definizione. Un *versore* (o *vettore unitario*) è un vettore $\vec{v}$ tale che

$$|\vec{v}| = 1$$

Nota: di tutti i vettori applicati in O, i versori sono quelli che si trovano (più precisamente: il cui secondo estremo di trova) sulla circonferenza (o sulla superficie sferica) di centro O e raggio 1.

Osservazione. Dato un qualunque vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ esiste un unico versore parallelo e concorde con $\vec{v}$: è il vettore

$$\vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

Infatti

$$|\vec{w}| = \left|\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{v}|}\right| |\vec{v}| = \frac{1}{|\vec{v}|}|\vec{v}| = 1$$

Tale versore si dice *versore di* $\vec{v}$ e si indica con $vers(\vec{v})$.

Versori fondamentali

In particolare, fissato un sistema di riferimento (ortogonale, monometrico) nello spazio $(Oxyz)$, esiste un'unica terna di versori

$$\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k}$$

paralleli e concordi con gli assi coordinati.

I versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ si dicono *versori fondamentali* (del sistema di riferimento).

Coordinate dei punti, componenti dei vettori

Fissato un sistema di riferimento, ogni punto P dello spazio è associato, in modo biunivoco, a una terna $(x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$: le sue *coordinate*.
Le coordinate di P si ottengono proiettando P sugli assi coordinati.

Sia $\vec{v}$ un vettore, pensato applicato in O. Allora esiste un unico punto P tale che $\vec{v} = OP$.
Proiettando $\vec{v}$ sugli assi coordinati si ottengono i vettori

$$x_P \vec{i}, \quad y_P \vec{j}, \quad z_P \vec{k}$$

e vale la relazione

$$\vec{v} = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}$$

Le coordinate di P si dicono *componenti* del vettore $\vec{v}$ (rispetto alla terna di versori fondamentali $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

Coordinate dei punti, componenti dei vettori

Si è dunque ottenuto che:

Per ogni vettore $\vec{v}$ esiste un'unica terna $(v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Le componenti (v_x, v_y, v_k) di $\vec{v}$ sono le coordinate del secondo estremo di $\vec{v}$ quando questi è applicato in O.

L'espressione

$$v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

si chiama *combinazione lineare* (dei vettori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

Quanto ottenuto si può enunciare allora dicendo che:
Ogni vettore dello spazio è esprimibile come combinazione lineare dei versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, per un'unica scelta dei coefficienti (le componenti del vettore).