Organizzazione del corso

L'insegnamento di Geometria consiste di:

- 48 ore di lezione
- 12 ore di esercizi sugli argomenti visti a lezione
- ore di assistenza didattica con esercitazioni guidate, tipicamente online, i lunedì e venerdì 14h00-15h30, a partire dal 26-9
- Esiste una pagina Teams del corso (codice accesso: b810aa1). Potrà essere usata per esercitazioni guidate, consulenze, ecc. La pagina contiene anche le registrazioni delle lezioni dello scorso a.a.

Testi consigliati

Una lista di testi segnalati è presente sulla pagina di presentazione del corso. Tuttavia, in genere, un qualunque testo di base di algebra e lineare e geometria copre gli argomenti che costituiscono il programma di questo insegnamento.

Orario di ricevimento: Giovedì 11h00–13h00, ovvero su appuntamento (anche online).

Scopo del corso

Sviluppare **in modo logicamente rigoroso** una teoria che:

- fornisce un framework e un linguaggio generali per trattare problemi matematici diversi
- ha numerose applicazioni

In modo logicamente rigoroso: ogni affermazione fatta segue logicamente, cioè si dimostra, da quelle precedenti.

Nota: Sebbene in genere la conoscenza delle dimostrazioni non sia necessaria per svolgere gli esercizi, capire le dimostrazioni e imparare a farle è utile:

- per verificare se si sono capiti i concetti usati
- per dover ritenere a memoria una quantità limitata di nozioni, essendo in grado di costruirle autonomamente
- perché è bello

Modalità d'esame

L'esame consiste di una prova scritta.

La commissione d'esame può richiedere lo svolgimento di una prova orale integrativa qualora lo ritenga utile.
L'esame scritto è open book e personale:

- È ammessa la consultazione di testi o appunti personali, non l'utilizzo di ausili elettronici o simili
- Non è ammessa la collaborazione

Insiemi numerici e loro struttura

Alcuni insiemi numerici di base sono:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: insieme dei numeri interi
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$: insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali (numeri che corrispondono ai punti di una retta)

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

In tutti questi insiemi sono definite operazioni binarie: $+$ (addizione) e $\cdot$ (moltiplicazione).

Su ognuno di questi insiemi, le operazioni soddisfano le proprietà seguenti:

1. (associatività) Per ogni x, y, z:

$$(x + y) + z = x + (y + z), \qquad (xy)z = x(yz)$$

2. (commutatività) Per ogni x, y:

$$x + y = y + x, \quad xy = yx$$

3. (distributività di addizione rispetto alla moltiplicazione) Per ogni x, y, z:

$$x(y + z) = xy + xz$$

4. (esistenza dell'elemento neutro: 0 per l'addizione, 1 per la moltiplicazione) Per ogni x:

$$0 + x = x, \qquad 1x = x$$

Negli insiemi $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ vale anche la seguente proprietà:

5. (esistenza dell'opposto per l'addizione) Ogni elemento ha un opposto, cioè per ogni x esiste un y tale che

$$x + y = 0$$

Questo y, che dipende da x è denotato $-x$.

Nota: Questa proprietà non vale in $\mathbb{N}$: il numero 1 non ha opposto, cioè non esiste alcun $y \in \mathbb{N}$ tale che $1 + y = 0$.

Negli insiemi $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ vale anche la seguente proprietà:

6. (esistenza dell'inverso per la moltiplicazione) Ogni elemento diverso da 0 ha un inverso, cioè per ogni $x \neq 0$ esiste un y tale che

$$xy = 1$$

Questo y, che dipende da x, è denotato x^{-1}.

Nota: Questa proprietà non vale in $\mathbb{N}$ nè in $\mathbb{Z}$: il numero 2 non ha inverso, cioè non esiste alcun $y \in \mathbb{Z}$ tale che $2y = 1$.

Definizione

Un insieme numerico che soddisfi le proprietà (1)–(6) si dice *campo*.

Esempi.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ **non** sono campi. Falliscono, rispettivamente: le proprietà (5) e (6) (per $\mathbb{N}$) e la proprietà (6) (per $\mathbb{Z}$).
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sono campi.

Equazioni algebriche

Sia K un campo (per es., $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{R}$). Un'*equazione algebrica* (o *equazione polinomiale*) in K è un'equazione del tipo

$$P(x) = 0$$

dove P è un polinomio a coefficienti in K.
Un'equazione algebrica è quindi della forma

$$c_g x^g + c_{g-1} x^{g-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0,$$

dove $c_0, c_1, \ldots, c_g$ sono elementi del campo (i *coefficienti*).

Se $a \in K$ è tale che $P(a) = 0$ si dice che a è una *soluzione* dell'equazione $P(x) = 0$, o anche che a è una *radice* del polinomio P.

Esempi

- $\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 5 = 0$ è un'equazione algebrica in $\mathbb{Q}$ (e quindi anche in $\mathbb{R}$)
- $-3x^5 + e^{\pi}x^2 - \sqrt{7}x^2 + x - 3 = 0$ è un'equazione algebrica in $\mathbb{R}$
- $\cos x + \sin x = 0$ non è un'equazione algebrica (ma è un'equazione con infinite soluzioni)
- $7 = 0$ è un'equazione algebrica (senza soluzioni)
- $0 = 0$ è un'equazione algebrica (di cui ogni numero è soluzione)

Definizione

Un campo si dice *algebricamente chiuso* se ogni equazione algebrica $P(x) = 0$, con P polinomio non costante, ha almeno una soluzione.

Esempio. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ **non** sono algebricamente chiusi: l'equazione

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni nè in $\mathbb{Q}$, nè in $\mathbb{R}$.

I numeri complessi

Si costruisce un nuovo esempio di campo, il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* che risulta algebricamente chiuso.

Definizione

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Quindi:

Ogni numero complesso è un punto del piano cartesiano: il numero complesso (a, b) è il punto di ascissa a e ordinata b.

Il piano cartesiano, pensato come insieme dei numeri complessi, si usa chiamare *piano di Gauss*.

I numeri complessi

Tra i numeri complessi si definiscono due operazioni $+, \cdot$ di addizione e moltiplicazione:

Definizione

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Nota. Le operazioni di addizione e moltiplicazione sui numeri complessi sono definite usando le operazioni note di addizione e moltiplicazioni sui numeri reali.

Esempi.

- $(2, 3) + (-1, 7) = (2 + (-1), 3 + 7) = (1, 10)$
- $(2, 3)(-1, 7) = (2(-1) - 3 \cdot 7, 2 \cdot 7 + 3(-1)) = (-23, 11)$

Teorema

Con le operazioni di addizione e moltiplicazione definite, l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è un campo.

Dimostrazione. Con molta pazienza si verifica che valgono tutte le proprietà (1)–(6).
Suggerimento: Provare a farlo per esercizio.

L'elemento neutro per l'addizione risulta essere $(0,0)$:
$(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)$.
L'elemento neutro per la moltiplicazione risulta essere $(1,0)$:
$(a,b)(1,0)=(a1-b0,a0+b1)=(a,b)$.

Poiché $\mathbb{C}$ è un campo, valgono tutte le usuali proprietà algebriche che già si conoscono e si sanno utilizzare per $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Due fatti importanti, più due

- $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0)$
- $(a, 0)(b, 0) = (ab - 0 \cdot 0, a0 + 0b) = (ab, 0)$

Queste uguaglianze mostrano che le operazioni sui numeri complessi che hanno seconda coordinata nulla si comportano come le corrispondenti operazioni sui numeri reali. Un numero complesso del tipo $(a, 0)$ si può quindi identificare con la sua prima componente, cioè il numero reale a. Con questa identificazione:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

- $(0, 1)(b, 0) = (0b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1b) = (0, b)$
- $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$

Forma algebrica

Usando le proprietà precedenti, denotiamo:

$$\begin{array}{l} a = (a, 0), \text{ per ogni } a \in \mathbb{R} \\ i = (0, 1) \end{array}$$

(**Nota:** In alcuni ambiti, per es. in elettronica, per indicare il numero $(0, 1)$ si usa tradizionalmente la lettera j invece di i)

Allora:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib$$

Quindi:

I numeri complessi sono i termini del tipo

$$a + ib$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.

Questo modo di rappresentare i numeri complessi si dice *forma algebrica*.

Forma algebrica

Usando la rappresentazione in forma algebrica, il fatto che $i^2 = -1$ e le usuali proprietà algebriche, il calcolo delle operazioni si semplifica. Per esempio:

$$(2+3i)(-1+7i) = -2+14i-3i-21 = -23+11i$$

Terminologia

- Il numero i si dice *unità immaginaria*
- Se $\alpha = a + ib$, è un numero complesso scritto in forma algebrica:
  - Il numero reale a si dice *parte reale* di α, e si indica anche $Re\alpha$
  - Il numero ib si dice *parte immaginaria* di α
  - Il numero reale b si dice *coefficiente dell'immaginario* di α, e si indica anche $Im\alpha$

  Quindi

  $$\alpha = Re\alpha + iIm\alpha$$

  - Se $b = 0$, cioè $\alpha = a$, allora α è un numero reale
  - Se $a = 0$, cioè $\alpha = ib$, allora α si dice *immaginario puro*