Ivan Schiavi
Corso SdM
aa 2021-2022

Appunti
Di
“Fisica Generale”
I e II

- Cinematica dei corpi
- Dinamica dei corpi
- Meccanica rotazionale
- Gravitazione
- Fluidostatica
- Fluidodinamica
- Termodinamica

BREVE INTRODUZIONE MATEMATICA

Per poter affrontare gli argomenti da un punto di vista fisico bisogna per prima cosa fare un introduzione matematica ai concetti di derivata, di funzioni a più variabili e di integrale.

Concetto di derivata:

$y = f(x)$	$y' = f'(x) = \frac{df}{dx}$
costante	0
x^r (r reale)	rx^{r-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\text{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Del concetto matematico di derivata, quel che ci interessa è sapere come derivare le funzioni note seguendo la tabella a fianco e come operare con esse seguendo invece le formule sotto illustrate.

- Somma/differenza: $f \pm g = f' \pm g'$
- Prodotto: $f \cdot g = f'g + fg'$
- Rapporto: $\frac{f}{g} = \frac{f'g+fg'}{[g]^2}$
- Funzione di funzione: $f\big(g(x)\big) = \big[f\big(g(x)\big)\big]' = z'f'$

Bisogna ricordare poi che la notazione per la derivata seconda di una funzione è: $f''(x)$ e le regole di derivazione e di operazione con essa sono le medesime che per la derivata prima.

Derivate parziali e differenziale totale di funzioni a più variabili:

Sia g(x,y) una funzione delle variabili x e y. Si chiama “derivata parziale” della g rispetto a x la derivata della funzione g(x,y) rispetto a x effettuata considerando y costante e si indica:

$$\frac{\partial g}{\partial x}$$

Analogamente per y si ha:

$$\frac{\partial g}{\partial y}$$

Se prendiamo ad esempio: $g(x,y) = ax^3 + bx^2y$ le derivate parziali sarebbero:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3ax^2 + 2by$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = by^2$$

Le derivate parziali possono poi essere a loro volta funzioni di x e y. Si possono quindi considerare le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

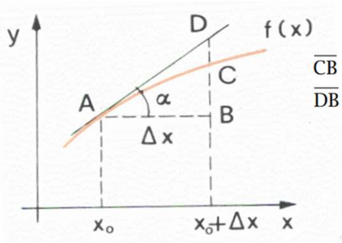
Secondo il teorema di Schwartz le derivate seconde miste sono indipendenti dall'ordine di derivazione; ovvero:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \; [\#]$$

Ricordiamo poi che data una funzione f(x) della variabile x, definita e derivabile in un intervallo [a,b], si definisce differenziale della funzione f:

$$df = f'(x)dx = \left(\frac{df}{dx}\right)dx$$

Il significato geometrico del differenziale lo possiamo ricavare qualitativamente osservando la figura che segue.



$\overline{CB} = \Delta f$
$\overline{DB} = df$

Se consideriamo un punto $x=x_0$, la funzione ha in quel punto il valore $f(x_0)$; nella posizione $x_o+\Delta x$ la funzione risulta incrementata di Δf poiché $f'(x_0) = \text{tang } \alpha$. Questo è l'incremento di y lungo la tangente alla curva f(x) in x_0 quando questo viene incrementato di un delta x. Se si considera ora un delta x tendente a 0, tale incremento DB tende a coincidere con l'incremento df = BC della funzione f(x) quando x_0 è incrementato della quantità infinitesima dx. si può quindi dire che: $\Delta x \to 0, \quad df \to \Delta f = \overline{CB}$.
Bisogna poi ricordare che l'incremento della funzione f(x) quando si passa da una posizione x_1 a una posizione x_2 è pari alla somma degli incrementi infinitesimi che si hanno dividendo l'intervallo (x_2-x_1) in tanti elementi infinitesimi dx.
Se si considera una funzione a più variabili allora viene definito differenziale totale della funzione l'incremento della funzione quando x è incrementato di dx e quando y è incrementato di dy.
È infine possibile dimostrare che per una funzione del tipo g(x,y); è valida la relazione:

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x dy$$

Concetto di integrale:

Data una funzione f(x) si dice che F(x) è primitiva di f(x) se è soddisfatta la condizione:

$$F(x) = \frac{dF}{dx}$$

In generale:

$$F(x) = \int f(x)\, dx + c$$

Supponiamo di avere:

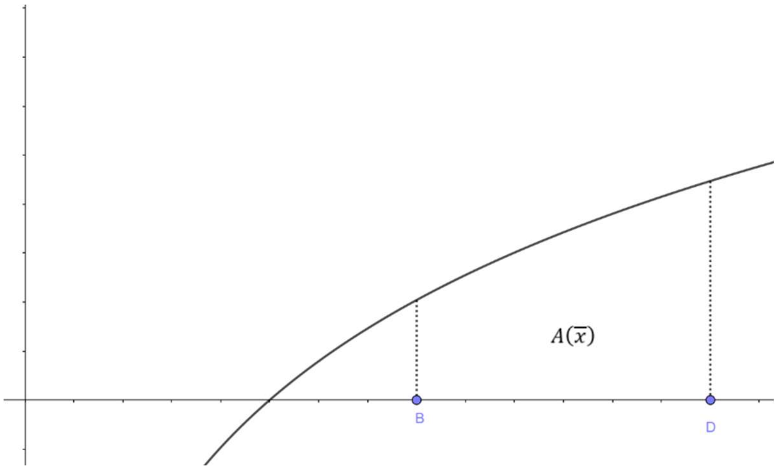
$$G = F + K => \frac{dG}{dx} = \frac{dF}{dx} + 0 = f(x)$$

Questo significa che tutte le funzioni del tipo F + costante sono primitive di f(x). In fisica avremo un problema con le costanti poiché vorremo descrivere fenomeni singoli.
Quella che segue è la tabella degli integrali noti.

Interpretazione grafica/geometrica dell'integrale:

f(x)	$F(x) = \int f(x)\, dx$
0	c
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
cos x	sin x+c
sin x	-cos x+c
$\frac{1}{\cos^2 x}$	tg x+c
e^x	e^x+c
$\frac{1}{x}$	ln x+c
$\frac{1}{\sin^2 x}$	-cotg x+c
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin x+c
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	-arccos x+c
$\frac{1}{1+x^2}$	arctg x+c

Definisco A(x) l'ara sottesa al grafico di una funzione (che sia continua e derivabile nell'intervallo [B,D]. Per calcolare il valore



numerico di A(x) posso suddividere tale area in piccolissimi rettangoli in modo che:

$$A(\bar{x}) \approx \sum f(x_i)\Delta x_i$$

$$A(\bar{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum f(x_i)\Delta x_i \right)$$

Matematicamente possiamo definire tale relazione integrale definito tra B e D di f(x) ovvero:

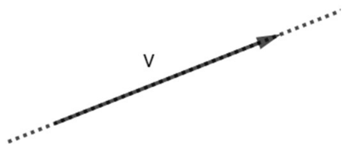
$$A(\bar{x}) = \int_B^D f(x)dx$$

Fino a questo punto può sembrare strano il collegamento tra il ricercare una funzione primitiva e la geometria. Tuttavia esiste un teorema, quello fondamentale del calcolo integrale; secondo il quale:

$$\int_B^D f(x)dx = F(D) - F(B)$$

I VETTORI

Un vettore è un entità matematica utilizzata per indicare grandezze vettoriali (es: velocità, forze, intensità di campi vettoriali etc…) le quali hanno necessitano di tre principali caratteristiche:



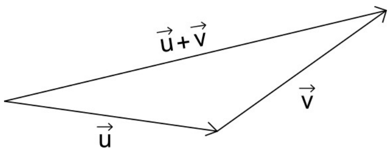
a) Intensità: valore numerico associato al vettore (si indica con: $|\overrightarrow{vettore}|$
b) Direzione: retta su cui il vettore giace
c) Verso: segno del valore numerico associato al vettore

I vettori che possiedono la stessa intensità, la stessa direzione e lo stesso verso sono uguali.
Da un punto di vista grafico il vettore si indica con una freccia. La freccia è anche notazione del vettore ($\vec{v}$).
È definito "versore" un vettore la cui intensità è pari a 1u

Operazioni vettoriali:

Essendo i vettori entità matematiche, è possibile operare con essi, questi possono essere infatti sommati, sottratti etc.. L'unica operazione che non è possibile effettuare con i vettori è la divisione.

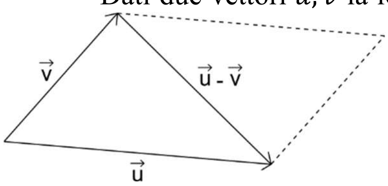
- ***Somma vettoriale:***



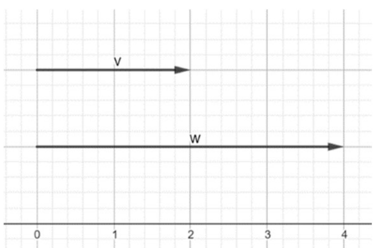
Dati due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ la loro somma è un vettore $\overrightarrow{u+v}$ definito come il vettore che collega la coda del primo vettore con la punta del secondo o viceversa.

- ***Differenza vettoriale:***

Dati due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ la loro differenza è un vettore $\overrightarrow{u-v}$ definito come il vettore che collega la punta del primo con la punta del secondo o per meglio dire la coda del primo con la coda del secondo preso con verso negativo o viceversa.



- **Prodotto di un vettore per una costante:**



Il prodotto tra un vettore $\vec{v}$ e una generica costante α è un vettore che ha stessa direzione e stesso verso del vettore $\vec{v}$ ma intensità moltiplicata per la costante α.
Se il modulo del vettore è 2 (come nell'esempio presente a sinistra) e il valore della costante α è 2 allora il vettore risultante $\vec{w}$ è un vettore che ha stessa direzione e stesso verso di $\vec{v}$ ma di intensità pari al doppio di quella del vettore di partenza. Nel caso riportato nell'esempio accade infatti che:

$$|\vec{w}| = 2(2) = 4$$

- ***Prodotto vettoriale:***

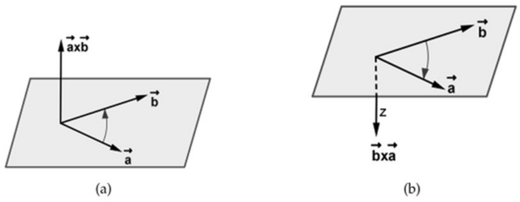
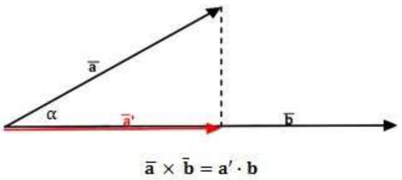


Figura 4.7.1.: *Prodotto vettoriale*

Il vettore risultante dalla moltiplicazione tra due altri vettori è sempre perpendicolare ai due vettori moltiplicati. Per determinare verso e direzione bisogna utilizzare il metodo della mano destra. Per l'intensità del vettore risultante basta invece eseguire la moltiplicazione tra le intensità dei vettori di partenza per il seno dell'angolo compreso tra essi:

$$vettore\ risultante = \begin{cases} intensità: \quad |a \times b| = |a| \cdot |b| \ \cdot \sin(\vartheta) \\ direzione\text{: mano destra} \\ verso\text{: mano destra} \end{cases}$$

- ***Prodotto scalare:***



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = n;$$

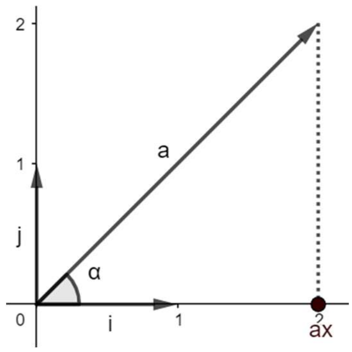
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \ \cdot \cos(\alpha)$$

N.B.: il prodotto scalare a differenza di quello vettoriale è commutativo.

Le componenti di un vettore e operazioni con versori i, j e k

Dato un piano come raffigurato a destra, definiamo:

- $\hat{\imath}$ il versore lungo x
- $\hat{\jmath}$ il versore lungo y
- ax la proiezione del vettore a su x



$$ax = \vec{a}\hat{\imath} = |\vec{a}|\cos(\alpha)$$

Se proviamo a sommare un qualunque vettore come ad esempio:

$\vec{a} = (5,4) \ e \ \vec{b} = (-2,-3)$ otteniamo:

$\vec{a} + \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}) + (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}) =$

$= \hat{\imath}(a_x + b_x) + \hat{\jmath}(a_y + b_y) =$

$= \hat{\imath}(5 + (-2)) + \hat{\jmath}(4 + 3) =$

$= \hat{\imath}(3) + \hat{\jmath}(7)$ questo è il vettore somma

Ugualmente può essere fatto con le altre operazioni vettoriali, ad esempio nel caso del prodotto vettoriale si avrebbe:

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}) \times (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}) =$

$= a_x\hat{\imath} \times b_y\hat{\jmath} + a_y\hat{\jmath} \times b_x\hat{\imath} =$

$= (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$

Quelle nelle parentesi sono le coordinate del nuovo vettore mentre $\hat{k}$ indica che esso è perpendicolare a $\hat{\imath}$ e a $\hat{\jmath}$ infatti lui è il versore lungo z

Funzioni vettoriali, limiti e derivate di esse

Ad ogni valore di t (scalare) corrisponde un valore di $\vec{a}$. Questa è la funzione vettoriale definita come:

$$\vec{a} = \vec{a}(t) \equiv [a_x(t), a_y(t), a_z(t)]$$

Si ha quindi: $\begin{cases} a_x = a_x(t) \\ a_y = a_y(t) \\ a_z = a_z(t) \end{cases}$

Per calcolare i limiti di questa funzione bisogna tenere a mente che:

$$\lim_{t \to t_0} \left(\vec{a}(t) \right) = \vec{b}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \to t_0} \left(a_x(t) \right) = \overrightarrow{b_x} \\ \lim_{t \to t_0} \left(a_y(t) \right) = \overrightarrow{b_y} \\ \lim_{t \to t_0} \left(a_z(t) \right) = \overrightarrow{b_z} \end{cases}$$

Stesso concetto vale per la derivata della funzione vettoriale.

$$a'(t) = \frac{d\vec{a}}{d\vec{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\vec{a}(t + \Delta t - \vec{a}(t)}{\Delta t} \right) = b$$

$$a'(t) = \begin{cases} b_x = \dfrac{da_x}{dt} \\ b_y = \dfrac{da_y}{dt} \\ b_z = \dfrac{da_z}{dt} \end{cases}$$

LA CINEMATICA

Velocità e accelerazione nel moto puntiforme

Se definiamo x lo spazio percorso da un oggetto in un suo moto, allora:
Dato un oggetto che si muove unidimensionalmente; definiamo velocità media il rapporto:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Per la precedente relazione, se il punto di partenza e il punto di arrivo coincidono allora $\bar{v}_m = 0$.
Definiamo poi velocità istantanea o puntuale come:

$$v_p = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = x' = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Definiamo poi "accelerazione" la grandezza che misura il variare della velocità in funzione al tempo.
Anche l'accelerazione può essere:

- Accelerazione media: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$

- Accelerazione istantanea: $a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = x'' = \ddot{x}$

Per il moto puntiforme (unidimensionale) abbiamo quindi definito le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} v_p = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = x' \\ a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = x'' \end{cases}$$

<u>*Dall'accelerazione alla velocità e all'equazione oraria del moto:*</u>
Risalire alla velocità e allo spazio percorso partendo dall'accelerazione significa cercare la funzione primitiva. Come abbiamo visto; lo strumento matematico che ci permette di fare questo è l'integrale.

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

, allora:

$$\int_0^t a \ dt = v(t) - v_0$$

$$=> \ v(t) = v_0 + \int_0^t a \, dt$$

Allo stesso modo posso andare alla ricerca di x(t):

$$\int_0^t v \, dt = x(t) - x_0$$

$$=> x(t) = x_0 + \int_0^t v \, dt$$

Se supponiamo che l'accelerazione sia costante possiamo allora dire che:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt = v_0 + a\int_0^t dt = \boxed{v_0 + at} \\ x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 + at\,dt = x_0 + \int_0^t v_0\,dt + \int_0^t at\,dt \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} \text{"} \\ x_o + v_0 t + a\int_0^t t\,dt = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = \boxed{x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2} \end{cases}$$

Abbiamo così dimostrato le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato. Cerchiamo ora una formula che non contenga al suo interno il tempo.

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} t = \frac{v - v_0}{a} \\ \text{"} \end{cases} => \begin{cases} \text{"} \\ x(t) = x_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{(v - v_0)^2}{a^2}\right) \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} \text{"} \\ x - x_0 = \frac{2v_0 v - 2{v_0}^2}{2a} + \frac{v^2 + {v_0}^2 - 2v_0 v}{2a} \end{cases} => \begin{cases} \text{"} \\ x - x_0 = \frac{2v_0 v - 2{v_0}^2 + v^2 - 2v_0 v}{2a} \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} t = \frac{v - v_0}{a} \\ v^2 = {v_0}^2 + 2a(x - x_0) \end{cases} => \begin{cases} t = \frac{v - v_0}{a} \\ v = \sqrt{{v_0}^2 + 2a(x - x_0)} \end{cases}$$

Così facendo possiamo calcolare la velocità senza dover utilizzare il tempo ma usando solamente accelerazione e posizione.

I Corpi in caduta libera

Empiricamente osserviamo che <u>mediamente</u> un oggetto lasciato cadere, si muove con una accelerazione pari a 9,81 m/s^2. Tale accelerazione è definita "accelerazione di gravità" e si indica con la lettera "g". Il valore di questa costante non dipende dalle proprietà fisiche dell'oggetto che compie il moto. Per svolgere i problemi sulla caduta libera possiamo utilizzare due sistemi di riferimento, quello riguardante il quadrante (+x,+y) oppure quello riguardante il quadrante (+x,-y). Nel primo caso il valore di "g" è negativo, nel secondo caso è positivo. Il moto di un corpo che cade in caduta libera è quindi descrivibile attraverso le leggi:

$$moto\ di\ caduta\ libera = \begin{cases} v(t) = v_0 \pm gt \\ y(t) = y_0 + v_o t \pm \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La cinematica tridimensionale

- *Posizione:*

La posizione è legata a:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \text{vettore posizione : } r = r(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

- *Velocità:*

In precedenza abbiamo definito la velocità media come:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Possiamo allora dire che le componenti del vettore velocità media sono descrivibili dal sistema:

$$\begin{cases} \overline{v_x} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \\ \overline{v_y} = \dfrac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \\ \overline{v_z} = \dfrac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

E definiamo invece la velocità istantanea come:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Anche in questo caso le componenti del vettore velocità sono date dalla contemporaneità dell'uguaglianza sopra indicata per v_x , v_y e v_z .

- *Accelerazione:*

In precedenza abbiamo anche dato una definizione di accelerazione, avevamo detto infatti che:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

e

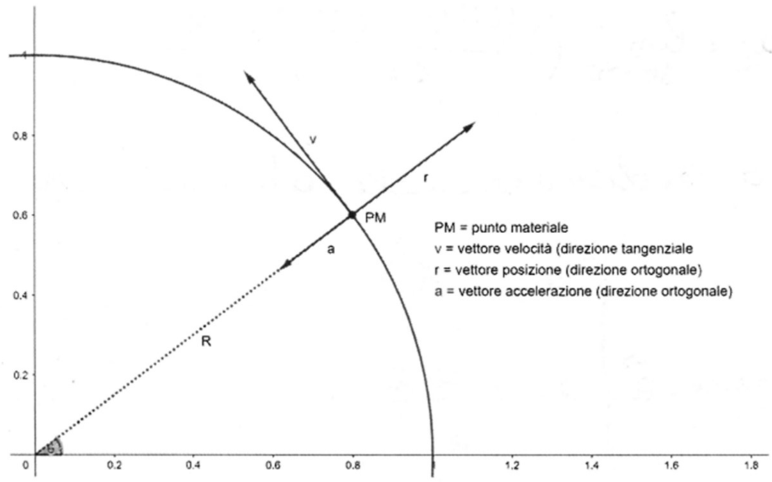
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

nel caso della cinematica tridimensionale abbiamo la stessa relazione ripetuta per tutte e tre le coordinate:

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{d\overrightarrow{v_x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{d\overrightarrow{v_y}}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{d\overrightarrow{v_z}}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

I moti

Il moto circolare uniforme



Se all'istante t=0 "PM" occupa una posizione tale che R formi un angolo (θ) con l'asse x allora accade che:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

"ω" è una costante che definiamo "velocità angolare" e la sua unità di misura è il rad/s.

Le equazioni parametriche del moto circolare uniforme sono:

$$\vec{r} = \begin{cases} x(t) = Rcos\big(\theta(t)\big) = Rcos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) = Rsin\big(\theta(t)\big) = Rsin(\omega t + \theta_0) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Il vettore spostamento è quindi:
$r = Rcos(\omega t + \theta_0)\hat{\imath} + Rsin(\omega t + \theta_0)\hat{\jmath} = R[cos(\omega t + \theta_0)\hat{\imath} + sin(\omega t + \theta_0)\hat{\jmath}]$

Il m.c.u. viene definito "moto periodico" in quanto il suo periodo rispetta la relazione: $T = \frac{2\pi}{\omega}$
Le equazioni che descrivono la velocità sono invece:

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x(t) = -R\omega\sin(\omega t + \theta_0) \\ v_y(t) = +R\omega\cos(\omega t + \theta_0) \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$ [lo si può evincere derivando il vettore spostamento]

, di conseguenza l'accelerazione è definibile come:

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x(t) = -R\omega^2\cos(\omega t + \theta_0) = v_x{}'(t) \\ a_y(t) = -R\omega^2\sin(\omega t + \theta_0) = v_y{}'(t) \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

N.B.: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{[-R\omega^2\cos(\omega t + \theta_0)]^2 + [-R\omega^2\sin(\omega t + \theta_0)]^2}$

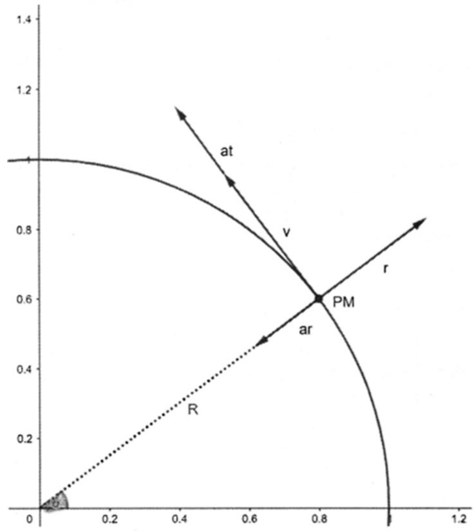
Il vettore accelerazione è diretto in maniera radiale (segue il raggio) poiché:
$\vec{a} = -R\omega^2[(\cos(\dots)\,\hat{\imath} + \sin(\dots)\,\hat{\jmath}] = -R\omega^2\hat{u}$

Il moto circolare non uniforme

La sostanziale differenza tra il moto circolare uniforme e quello non, è la presenza di una accelerazione tangenziale alla traiettoria. Le equazioni che descrivono la posizione e la velocità rimangono infatti uguali al caso del m.c.u. .
A variare è l'accelerazione che in questo caso diventa:

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = -R[\omega^2 \cos\big(\theta(t)\big) + \omega' \sin\big(\theta(t)\big)] \\ a_y = R[-\omega^2 \sin\big(\theta(t)\big) + \omega' \cos\big(\theta(t)\big)] \end{cases} \;;\quad \text{con} \qquad \omega' = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Il termine "ω^2" è definito accelerazione angolare e descrive la variazione della velocità angolare.
Il vettore accelerazione è quindi:
$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$
$\vec{a} = [-R\omega^2\widehat{u_r}] + [R\omega'\widehat{u_t}]$



Il primo membro della relazione rappresenta la componente radiale dell'accelerazione (che già era presente nel moto uniforme) e il secondo membro rappresenta la componente tangenziale.
La componente radiale "a_r" è matematicamente definibile come:

$$a_r = -R\omega^2\widehat{u_r} = -\omega^2\vec{r}$$

Oppure come:

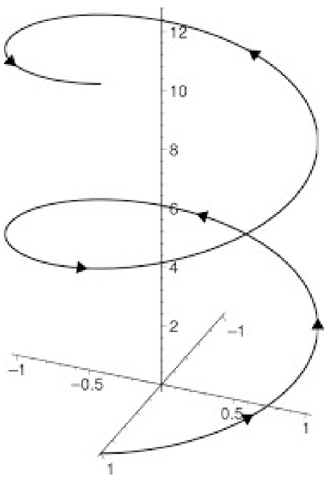
$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Quello del moto circolare non uniforme è uno dei casi in cui non è possibile risalire al vettore posizione partendo dall'accelerazione utilizzando un integrale poiché tale valore dipende da due variabili; infatti:

$$\vec{a}(t,r)$$

Il moto circolare è importante poiché a questo posso approssimare un qualunque moto la cui traiettoria non è da me conosciuta. Questo è possibile grazie all'utilizzo di una circonferenza osculatrice definita come "circonferenza che meglio approssima localmente la curvatura di una funzione.

Il moto elicoidale



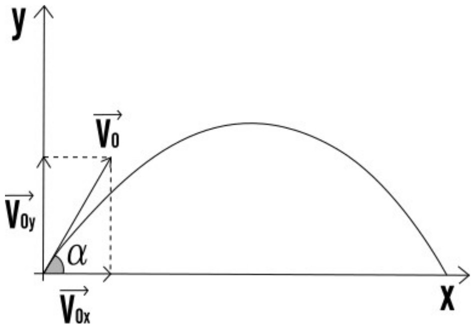
Il moto elicoidale va inteso come un'estensione tridimensionale di un moto circolare. Se per il moto circolare le componenti lungo l'asse "z" erano infatti nulle, in questo caso non è così:

$$\begin{cases} x(t) = Rcos(\theta(t)) \\ y(t) = Rsin(\theta(t)) \\ z(t) = z_0 + v_{0_{(z)}}t \end{cases}$$

Analogamente si ha una scomposizione lungo "z" anche per la velocità e per l'accelerazione nel caso in cui il moto non sia uniforme.

Il moto parabolico

Per poter introdurre il moto parabolico (detto del proiettile) dobbiamo vedere come passare dall'accelerazione allo spazio nel moto tridimensionale. Come nel moto in due dimensioni, anche in questo caso bisogna utilizzare l'integrale definito applicandolo a ogni componente del moto.
Il moto del proiettile rientra nel caso della caduta di un grave.
Osserviamo la situazione qui sotto rappresentata:



Diamo a un punto materiale una velocità $\overrightarrow{v_0}$ iniziale inclinata di un angolo α, la quale avrà una componente lungo l'asse x e una lungo l'asse y. Teniamo in considerazione il fatto che l'unica accelerazione presente è l'accelerazione di gravità diretta verso il basso. Di fatto abbiamo due moti: il primo lungo x di tipo rettilineo uniforme e uno lungo y di tipo rettilineo uniformemente accelerato.
Bisogna tuttavia tener conto del fatto che la traiettoria del moto cambia radicalmente al variare delle condizioni iniziali.
Le equazioni che descrivono questo moto sono:

$$\vec{r} = \begin{cases} x = x_0 \int_0^t v_{0_x}\, dt = x_0 + v_{0_x} t \\ y = x_0 \int_0^t v_{0_y}\, dt = y_0 + v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ z = z_0 + \int_0^t v_{0_z}\, dt = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} \int_0^t \vec{a}\, dt = \begin{cases} v_x = v_{0_x} + \int_0^t 0\, dt = v_{0_x} \\ v_y = v_{0_y} + \int_0^t g\, dt = v_{0_y} - gt \\ v_z = v_{0_z} + \int_0^t v_{0_z} dt = 0 \end{cases}$$

Per trovare una traiettoria generica del moto dobbiamo trovare la funzione y(t) definita come:

$$y(t) = y_0 + v_{0_y}\left(\frac{x - x_0}{v_{0_x}}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{(x - x_0)^2}{\left(v_{0_x}\right)^2}\right)$$

I moti relativi

La descrizione del moto richiede la specificazione di un sistema di riferimento; generalmente viene scelto quel riferimento il cui uso semplifica i calcoli e le osservazioni. Tuttavia, poiché osservatori differenti possono adoperare diversi sistemi di riferimento, è opportuno stabilire le relazioni che intercorrono tra le osservazioni eseguite dagli osservatori differenti. Ad esempio, la maggior parte delle determinazioni svolte nell'ambito della meccanica sono relative ad un sistema di riferimento solidale alla Terra e quindi in moto con essa; la descrizione del moto della Terra nel sistema solare adopera un sistema di riferimento generalmente solidale col Sole, come il moto degli elettroni atomici è stabilito relativamente al nucleo.
Prendiamo il caso in cui il sistema di riferimento O' si muove di moto traslatorio rispetto al sistema O con una velocità costante v. Per semplicità di calcolo usiamo due sistemi paralleli tra loro (x//x' , y//y' , z//z'). Come posso trovare la posizione di un punto P?
Il vettore posizione deve per forza di cose essere definito come:

$$\overrightarrow{r_P} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{r_{P'}}$$

allora:

$$\begin{cases} x_p(t) = X + x'_p(t) \\ y_p(t) = Y + y'_p(t) \\ z_p(t) = Z + z'_p(t) \end{cases} ;\ \vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \quad ;\overrightarrow{r'} = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k}$$

Note le leggi della posizione possiamo trovare quelle della velocità andando a derivare il sistema proposto sopra andando ad ottenere:

$$\vec{V} = \vec{v} + \overrightarrow{v'} \ => \begin{cases} \overrightarrow{V_x} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v'_x} \\ \overrightarrow{V_y} = \overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{v'_y} \\ \overrightarrow{V_z} = \overrightarrow{v_z} + \overrightarrow{v'_z} \end{cases}$$

"v" è detta "velocità di trascinamento e "v' " è invece la velocità relativa.
Allo stesso modo andiamo alla ricerca dell'accelerazione.

$$\vec{a} \begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = a_x = a'_x \\ \dfrac{dV_y}{dt} = a_y = a'_y \\ \dfrac{dV_z}{dt} = a_z = a'_z \end{cases}$$

Abbiamo così scoperto che $\vec{a}$ e $\overrightarrow{a'}$ sono coincidenti se la velocità di trascinamento è costante.
Se questo non accade si ottiene invece il sistema:

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = A_x + a'_x \\ a_y = A_y + a'_y \\ a_z = A_z + a'_z \end{cases}$$

LA DINAMICA

Introduzione

La Dinamica è la branca della fisica che vuole rispondere alla domanda: “perché i corpi si muovono?”. Questa disciplina si basa su quattro postulati fondamentali.

Principio 0: “Principio della covarianza”
“Le leggi fondamentali della fisica sono identiche in tutti i sistemi di riferimento che si muovono con moto relativo traslatorio di tipo rettilineo uniforme”.
Per enunciare gli altri tre principi è necessario introdurre due concetti di fondamentale importanza:

1) La forza: è una grandezza vettoriale che misura il cambiamento di velocità e di accelerazione che essa produce su un corpo. La sua unutà di misura è il Newton (N) ed è fisicamente definita come Kg/m^2.
2) Massa: l’accelerazione prodotta da una forza è inversamente proporzionale alla massa perciò le masse dei corpi possono essere misurate confrontando l’accelerazione prodotta da una forza su un corpo campione di massa m_0 = 1kg La massa è una grandezza fisica propria degli oggetti.

Principio 1: “Principio di inerzia”
“Ogni corpo non soggetto a forze, rimane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale”.
Da questo principio si evince che in in un sistema di riferimento inerziale: $\sum \vec{F} = 0$

Principio 2: “Principio di forza-accelerazione”
In un sistema di riferimento inerziale l’accelerazione di un corpo è proporzionale alla somma delle risultanti di tutte le forze agenti sul corpo stesso.”

$$\sum \vec{F} = ma$$

in forma scalare:

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_x} = ma_x \\ \overrightarrow{F_y} = ma_y \\ \overrightarrow{F_z} = ma_z \end{cases}$$

Una forza può essere poi definita in modo:

- Dinamico se la forza applicata alla massa di 1kg che produce un’accelerazione di $1m/s^2$ ha una intensità di 1N
- Statico in base alla deformazione prodotta su una molla di un dinamometro da una massa di 0,102kg alla latitudine in cui $g=9,81m/s^2$.

Utilizzando una notazione vettoriale, una forza può essere descritta come:

$$\sum \vec{F_i}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

ovvero:

$$\sum \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) = ma$$

Nel caso tridimensionale poi la forza possiederà tutte le dovute scomposizioni lungo x, y e z.

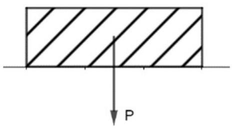
Principio 3: “Principio di azione-reazione”
“Se un corpo esercita una forza su un secondo corpo, quest’ultimo a sua volta eserciterà una forza sul primo. Queste due forze sono uguali in modulo e direzione ma di verso opposto”.
Sulla base di questo principio si fondano importanti conclusioni teoriche come quella di Archimede sullo studio del moto nei fluidi.

In natura le forze fondamentali sono quattro:

1) Forza gravitazionale: struttura su grande scala la materia
2) Forza elettromagnetica: struttura microscopicamente la materia
3) Forza nucleare forte: struttura il nucleo atomico
4) Forza nucleare debole: entra in campo principalmente nei processi di decadimento radioattivo della materia.

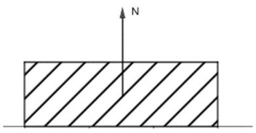
Le Forze empiriche

La forza peso



La forza peso è la manifestazione della forza di gravità risentita da tutti gli oggetti. Questa forza è sempre diretta verso il centro della Terra e matematicamente è calcolata come il prodotto tra l'accelerazione di gravità e la massa dell'oggetto.
$\vec{P} = mg = mg\hat{j}$

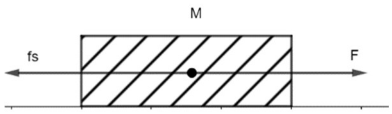
La forza normale (reazione vincolare)



La forza normale anche chiamata reazione vincolare è una reazione ortogonale a un vincolo. Nel caso di un oggetto appoggiato su un piano, per il terzo principio della dinamica sappiamo che il piano genera una forza contraria e uguale in modulo alla forza peso. Tuttavia bisogna ricordarsi che il modulo di questa forza non è conoscibile e non è vera l'affermazione secondo la quale il modulo di "N" è sempre contrario alla forza peso.

La forze di attrito

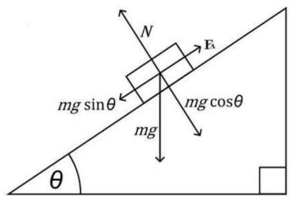
Sono reazioni vincolari tangenziali alla verticale locale. La componente tangenziale della reazione vincolare esiste sempre ma in alcuni casi può essere trascurata (ad esempio accade quando il vincolo è un piano di ghiaccio). In generale, posto un oggetto su un piano, per metterlo in movimento bisogna applicare una forza. Empiricamente si osserva che se F è troppo piccola l'oggetto rimane in quiete. Deve esistere perciò una forza contraria (sempre per 3° principio della dinamica) a quella da me applicata sull'oggetto.



Chiamiamo questa forza: "forza di attrito statico" ($\vec{f_s}$).
Matematicamente la situazione osservata si riassume nella relazione: $|\vec{f_s}| = \mu_s \vec{N}$
"μ_s" è una costante chiamata "coefficiente di attrito statico" e dipende dai materiali dell'oggetto e da quelli deli piano. Una volta che il nostro corpo "M" viene messo in movimento di moto rettilineo nella direzione di "F", sempre empiricamente osserviamo che per mantenerlo in moto dobbiamo continuare ad esercitare la forza poiché continua ad esistere una forza che si oppone al moto. Chiamiamo questa forza "forza di attrito dinamico" ($\vec{f_d}$). Matematicamente si ha: $|\vec{f_d}| = \mu_d \vec{N}$.
L'interpretazione microscopica delle forze d'attrito è: quando un corpo viene appoggiato su una superficie (o in generale su un altro corpo) vengono create delle "microsaldature elettroniche" tra gli atomi dei due oggetti che andranno vinte per applicare un'accelerazione positiva al corpo. Per questo motivo le forze d'attrito rientrano nel caso delle forze elettromagnetiche.
Per conoscere i valori dei coefficienti d'attrito bisogna consultare apposite tabelle. Tuttavia possiamo provare a calcolare il valore μ_s in maniera empirica, partendo da un esempio.
Poniamo un oggetto su un piano inclinato e andiamo a disegnare lo schema delle forze in gioco che agiscono lungo i due assi x e y. A questo punto poniamo il sistema ottenuto uguale a 0 poiché a noi interessa la situazione fisica nell'istante subito precedente all'inizio del moto da parte dell'oggetto.
Otteniamo allora:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\begin{cases} \overrightarrow{p_{\parallel}} + \overrightarrow{f_s} = 0 \\ \vec{N} - p_{\perp} = 0 \end{cases} => \begin{cases} psin(\theta) - f_s = 0 \\ N - pcos(\theta) = 0 \end{cases} => \begin{cases} f_s = psin(\theta) \\ N = pcos(\theta) \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} \mu_s N = psin(\theta) \\ \text{"} \end{cases} => \begin{cases} \mu_s pcos(\theta) = psin(\theta) \\ \text{"} \end{cases}$$



Possiamo allora dire che: $\mu_s = \frac{psin(\theta)}{pcos(\theta)} = \tan(\theta)$

Infine si osserva che:

- $\left|\overrightarrow{f_s}\right| \leq \mu_s N$
- $\left|\overrightarrow{f_d}\right| = \mu_d N$

Tuttavia la seconda relazione non è del tutto corretta poiché vettorialmente dobbiamo evidenziare il fatto che l'attrito è contrario alla tendenza di moto, ovvero che:

$$\overrightarrow{f_d} = -\mu_d N \widehat{u_v}$$

; con $\widehat{u_v}$ il versore velocità.

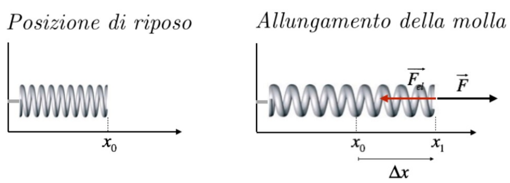
Esiste poi l' "attrito volvente" ovvero quello presente tra una superficie e un corpo che rotola ma esso lo definiremo trattando della meccanica dei corpi rigidi.
Un ultimo tipo di forza d'attrito che bisogna ricordare è la "forza di attrito viscoso" ($\overrightarrow{f_v}$).
Se un punto materiale si muove in un fluido (vedi def. di fluido nella parte di fluidodinamica) subisce una forza dipendente dalla velocità del punto e contraria (vettorialmente) al moto. Matematicamente questa forza è definibile come il prodotto tra un coefficiente di viscosità (β che dipende dal fluido e dalla forma dell'oggetto che si muove in esso) e la velocità stessa dell'oggetto:

$$\left|\overrightarrow{f_v}\right| = \beta \cdot \vec{v}$$

Nella situazione sopra descritta, empiricamente si osserva che a mano a mano che un oggetto che si muove in un fluido accelera, la forza di attrito viscoso aumenta. Se però tale forza di attrito eguaglia le altre forze (o per meglio dire se la sommatoria di tutte le forze è pari a zero) allora l'oggetto si muoverà di moto rettilineo uniforme ad una velocità v_r definita "velocità di regime".

$$v_r = \frac{m}{\beta} g$$

La forza elastica



Empiricamente possiamo osservare che se tiriamo o accorciamo una molla collegata a un blocchetto, quest'ultimo subisce una forza F_e esercitata dalla molla. F_e è definita "forza elastica", è sempre contraria alla forza applicata inizialmente e dipende dalle caratteristiche chimico-fisiche della molla e dall'allungamento/accorciamento di quest'ultima.
Matematicamente è possibile calcolare il modulo di tale forza utilizzando la legge di Hooke la quale dice che:

$$\left|\overrightarrow{F_e}\right| = -k\Delta x\hat{\imath}$$

, con "k" la costante elastica dipendente da molla a molla e Δx l'allungamento complessivo della molla.
Se consideriamo come "0" la x di partenza della molla (posizione a riposo) allora possiamo sostituire Δx con un valore preciso di x.
Proviamo ora a studiare il moto di un blocchetto collegato a una molla a partire dal momento in cui la molla viene lasciata dopo averla tirata.

Per il secondo principio della dinamica sappiamo che:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\begin{cases} -F_e = ma \\ N - P = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} -kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

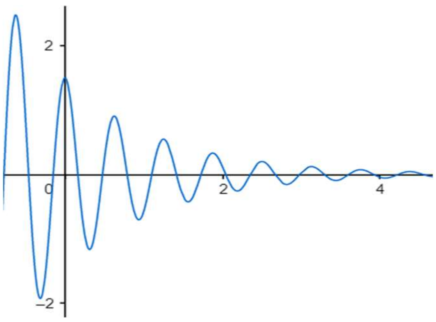
Sfortunatamente non possiamo risolvere la prima equazione del sistema con gli integrali poiché essa è una equazione differenziale armonica e non abbiamo ancora le competenze matematiche tuttavia prendiamo per buona la soluzione: $x(t) = Acos(\omega t + \phi_0)$.
Come vedremo nel modulo 3 di questo corso; A, ω e ϕ_0 indicano particolari proprietà dell'onda coseno che descrive l'oscillazione della molla per ora possiamo solamente accontentarci di provare che quella a noi fornita sia realmente soluzione della nostra equazione di partenza, infatti:
$x'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$
$x''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$
Poiché la nostra equazione era: $x''(t) = -\omega^2 x \quad => \; -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) + \omega^2\cos(\omega t + \phi) = 0$
allora l'equazione viene sempre soddisfatta!
Le condizioni iniziali erano:

$$\begin{cases} x(t=0) = Acos(\phi) \\ v(t=0) - A\omega sin(\phi) \end{cases}$$

Se nella situazione sopra descritta venisse inserito anche l'attrito si otterrebbe la situazione:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\begin{cases} F_e + f_d + f_v = ma \\ \quad N - P = 0 \end{cases}$$

La prima equazione del sistema sarebbe: $-kx + \mu_d N + \beta\frac{dx}{dt} = ma$
in questo caso ci troviamo di fronte a una oscillazione sinusoidale smorzata, la cui equazione è ancora più complicata rispetto alla precedente, ma la cui raffigurazione grafica corrisponde alla seguente:



Dal grafico possiamo notare come all'aumentare del tempo (asse delle x) lo spazio percorso dal nostro oggetto (asse y) vada a diminuire. La forza d'attrito infatti lo rallenta sempre più a ogni oscillazione fino a farlo fermare .

Tensione

Se collego una fune a un punto materiale e applico su di esso una forza per mezzo della fune, empiricamente si osserva che la fune risponde con una forza uguale e contraria a quella da me applicata in concordanza con il 3° principio della dinamica. Tale forza o reazione la chiamiamo "forza di tensione"

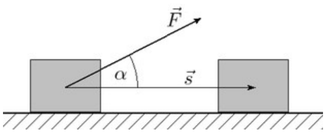
Le forze apparenti

Un'automobile si sta muovendo di moto rettilineo uniforme (sistema inerziale) quando all'improvviso è costretta a decelerare. Il cambiamento improvviso dello stato di moto-velocità fa si che gli oggetti che non sono collegati all'automobile tendano a continuare il loro moto. Pur essendo controintuitivo nessuna forza agisce su questi oggetti. Ciò nonostante, al fine di semplificare al massimo la rappresentazione di questa situazione possiamo immaginare che esista una forza fittizia che spinge i corpi in avanti. Usiamo quindi la dinamica per spiegare fenomeni che di per sé non appartengono alla dinamica ma solamente alla cinematica.

Dalla cinematica relativa (vedi pag. 14) sappiamo che: $\vec{a} = \vec{A} + \vec{a'}$ possiamo perciò affermare che:
$\vec{F'} = m(\vec{a} - \vec{A}) = m\vec{a} - m\vec{A} = \vec{F} - m\vec{A}$

Possiamo quindi (anche matematicamente) supporre che in [x'y'z'] esista una forza contraria ad $\vec{A}$. Una situazione analoga accade nel moto circolare in cui si ha una forza detta "centrifuga" che è diretta radialmente (in verso contrario all'accelerazione centripeta/radiale) e nel caso di moto non uniforme esiste anche una forza tangenziale contraria alla componente tangenziale dell'accelerazione.
Un altro valido esempio di forza apparente è la cosiddetta "forza di Coriolis" che si avverte quando un corpo si muove con una velocità v'$\neq$ 0 rispetto a un determinato sistema di riferimento (in rotazione come ad esempio il pianeta Terra).
Matematicamente questa ultima forza è calcolabile come: $|\overrightarrow{F_{cor}}| = -2m\vec{\omega} \times v$

Il Lavoro



Il "lavoro" è una grandezza scalare definita come:

$$L = \vec{F}\Delta s = \vec{F}\Delta s cos(\alpha)$$

L'unità di misura utilizzata per il lavoro è il Newton per metro [Nm] oppure il Joule [J]. Se in un sistema si hanno più forze che agiscono sullo stesso corpo allora posso dire che:

$$L_{tot} = \sum \vec{F_i}\Delta s \cdot cos(\theta)$$

Il lavoro è una grandezza che può essere positiva, negativa oppure nulla. Il valore della grandezza dipende dall'angolo θ (in particolare dalla grandezza "$cos(\theta)$". Se l'angolo tra due forze è di 90° allora il lavoro è nullo.
Nel caso del pendolo conico (vedi appendice finale) essendo T e P ortogonali allo spostamento, il lavoro compiuto dalle forze è zero.
Ma che cosa accade se la forza varia nel tempo?
Supponiamo di avere un punto materiale collegato ad una molla, in questo caso la precedente definizione di lavoro non ha senso. Tuttavia in questo caso possiamo suddividere lo spostamento in molti infinitesimi, giungendo alla conclusione che:

$$dL = Fdx$$

$$L = \lim_{\triangle x \to 0} \left(\sum F \triangle x\right) = \int_{x_i}^{x_f} F\, dx$$

Proviamo ad esempio a calcolare il lavoro compiuto dalla forza elastica nell'intervallo (x_1 , x_2):

$$L_{el} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\, dx = -k \ \ |_{x_1} \frac{x^2}{2} |_{x_2} = -\frac{k}{2}({x_2}^2 - {x_1}^2)$$

Che cosa accade invece se una forza come ad esempio la forza peso avesse più componenti come accade ad esempio su un piano inclinato?
In quel caso il lavoro andrebbe calcolato come:

$$L = \int P \triangle s = \int (-mg\hat{j})(dx\hat{\imath} + dy\hat{j}) = \int (dx - mgdy) = \int -mgdy$$

Da questa relazione è possibile capire come effettivamente quello che conta è solamente lo spostamento lungo y.

Il teorema lavoro-energia cinetica

Esiste un secondo modo per scrivere la seconda legge della dinamica, il lavoro totale delle forza che agiscono su un punto materiale è dato da:

$$L_{tot} = \int_A^B \sum F_i \, d\vec{s} = \int_A^B m\vec{a}d\vec{s} = \int_A^B m\frac{dv}{dt}d\vec{s} = \int_A^B md\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$d\vec{v} \cdot \vec{v}$ è il differenziale esatto di v^2, infatti:
$d(v^2) = d(vv) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2d\vec{v} \cdot \vec{v}$
allora:

$$L_{tot} = m\int_A^B \frac{dv^2}{2} = \frac{1}{2}mv^2|_A^B = \frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2$$

Alla grandezza $1/2\, mv^2$ diamo il nome di "energia cinetica" (k). Da questo teorema capiamo che se il valore del lavoro è zero allora il modulo della velocità non cambia. Da un punto di vista pratico questo teorema è molto utile poiché volendo calcolare il modulo della velocità di un punto materiale non è necessario risolvere prima la dinamica e poi la cinematica se si passa per questo teorema.
Nota la velocità in un punto "A" di un blocchetto collegato a una molla, proviamo a calcolare la velocità in un punto generico "B".

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2 = \frac{1}{2}k(x_B{}^2 - x_A{}^2)$$
$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 = -\frac{1}{2}k(x_B{}^2 - x_A{}^2) + \frac{1}{2}mv_A{}^2$$
$$mv_B{}^2 = 2\left(-\frac{1}{2}k(x_B{}^2 - x_A{}^2) + \frac{1}{2}mv_A{}^2\right)$$
$$v_B{}^2 = \frac{2\left(-\frac{1}{2}k(x_B{}^2 - x_A{}^2) + \frac{1}{2}mv_A{}^2\right)}{m}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{2}k(x_B{}^2 - x_A{}^2) + \frac{1}{2}mv_A{}^2\right)}{m}}$$

Essendo "L" dipendente da Δs o da v (per teorema precedente) allora possiamo dire che queste precedenti sono anch'esse grandezze relative, tuttavia sono covarianti, ovvero accade che:

$$\begin{cases} L = \Delta K \\ L' = \Delta K' \end{cases}$$

Proviamo tale ragionamento matematicamente.
Un uomo spinge una cassa su un carrello ferroviario. Il treno si muove in linea retta con una velocità costante pari a 15m/s. La cassa ha una massa di 12Kg e la sua velocità (rispetto al carro) aumenta con una accelerazione costante da 0 a v' pari a 1,5m/s. Si calcoli il lavoro e l'energia cinetica sia rispetto a un osservatore interno sia a un osservatore esterno.

- Osservatore interno:

$$\Delta k' = \frac{1}{2}mv'_f{}^2 - \frac{1}{2}mv'_0{}^2 = 13{,}5J$$
$$L' = F\Delta x' = m\frac{v'_f{}^2}{2\Delta x}\Delta x' = 13{,}5J$$

- Osservatore esterno:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f{}^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2$$

Dalla teoria sulla cinematica relativa sappiamo che $v = v' + V$.
Possiamo allora dire che:

$$\begin{cases} v_f = v'_f + V \\ v_0 = v'_0 + V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}5 + 15 = 16{,}5m/s \\ 15m/s \end{cases}$$

$\Delta K = 284J$
$L = F\Delta x = ma\Delta x$ [poiché il carro si muove di moto rettilineo uniforme allora a e a' coincidono]
$$L = ma'(\Delta x + V\Delta t) = ma'\left(\Delta x' + V\left(\frac{v_f - v_0}{a'}\right)\right) = 284J$$
Abbiamo così dimostrato la relatività di queste grandezze.
In alcuni casi è necessario descrivere il lavoro per unità di tempo e per questo viene definita la "potenza" come il rapporto tra il lavoro e l'intervallo di tempo:

$$\bar{P} = \frac{L}{t} \quad [potenza\ media]$$

$$P = \frac{dL}{dt} \quad [potenza\ istantanea]$$

$$poich\grave{e}\ \ dL = Fds \ \ \Rightarrow P = \frac{F\,ds}{dt} = Fvcos(\theta)$$

Forze conservative e forze non conservative

Una forza è definita conservativa se il lavoro totale da essa compiuto su un qualunque percorso <u>chiuso</u> è pari a zero, ovvero se:
$$\oint \vec{F}ds = 0$$

Data tale definizione vediamo ora quali delle seguenti forze sono conservative e quali non.

a) Forza peso: sia preso un oggetto e lanciato verso l'alto in modo tale che torni (dopo la caduta) nel punto iniziale (come coordinata y). In questo caso:

$$L_{salita} = \int_{y_1}^{y_2} (-mgh)dy = -mg(y_f - y_i) = -mgh$$

$$L_{discesa} = \int_{y_1}^{y_2} (-mg)dy = -mg(y_i - y_f) = -mg(-h) = mgh$$

$$L_{tot} = L_{salita} + L_{discesa} = 0$$

La forza peso è quindi conservativa!

b) Forza elastica: sia presa e compressa una molla collegata a un blocchetto. Come già abbiamo ossrvato in precedenza, il blocchetto inizierà ad oscillare. Vediamo ora se la forza elastica è conservativa oppure no.

$$L_{+d\to 0} = \int_{+d}^{0} F_e\, dx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{+d}^{0} = \frac{1}{2}kd^2$$

$$L_{0\to -d} = \int_{0}^{-d} F_e\, dx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{0}^{-d} = -\frac{1}{2}kd^2$$

$$L_{-d\to 0} = \int_{-d}^{0} F_e\, dx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{-d}^{0} = \frac{1}{2}kd^2$$

$$L_{0\to +d} = \int_{0}^{+d} F_e\, dx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{0}^{+d} = -\frac{1}{2}kd^2$$

$$L_{tot} = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

Abbiamo perciò dimostrato che anche la forza elastica è conservativa.

c) Forza di attrito dinamico: la forza d'attrito dinamico (sia esso radente o viscoso), restituisce sempre valori negativi perciò non può essere una forza conservativa; infatti:

$$L_f = \overrightarrow{f_d} \cdot \Delta s \neq 0$$

Parlando del lavoro possiamo poi affermare che:

$$L = \oint \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = 0$$

$$=> \oint \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\,\vec{s} - \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = 0$$

ne consegue quindi che :

$$\int_{A^1}^{B} \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = \int_{A^2}^{B} \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = 0$$

Questa è nuovamente la prova del fatto che il lavoro compiuto da una forza conservativa non dipende dal percorso. Su un percorso aperto il lavoro di una forza conservativa tra un punto A e uno B dipende solamente dalle posizioni dei due punti e non dal percorso intermedio.

L'energia potenziale

Il lavoro può essere espresso come la differenza dei valori di una funzione "U" calcolata tra due punti:

$$L_{A\to B} = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

Alla funzione U(x) diamo il nome di "energia potenziale".

$$U(A) = U(B) + L_{A\to B} = U(B) + \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\,\vec{s}$$

Ne consegue che per calcolare il valore dell'energia potenziale in un punto bisogna possedere un altro punto di riferimento. Posso associare a un qualunque punto dello spazio un valore di U, esiste quindi un campo scalare dell'energia potenziale.
In oltre possiamo dire che nel caso unidimensionale vale la relazione:

$$\int_{A}^{B} F dx = -U \quad ; F dx = -dU \quad => F = -\frac{dU}{dx}$$

E nel caso tridimensionale:

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \overrightarrow{F_y} = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \overrightarrow{F_z} = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Se andiamo a calcolare l'energia potenziale per le forza conservative fino ad ora studiate, otteniamo:

- Forza peso:

$$L_{A\to B} = \int_{A}^{B} \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_{A}^{B} -mg\,dy = -mg(y_A - y_B) = mgy_A - mgy_B$$

$$\boxed{U(P) = mgy + c}$$

- Forza elastica:

$$L_{A \to B} = \int_A^B \vec{F_e} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}kx^2 \Big|_A^B = \frac{1}{2}k{x_A}^2 - \frac{1}{2}k{x_B}^2$$

$$\boxed{U(F_e) = \frac{1}{2}kx^2 + c}$$

Il teorema di conservazione dell'energia cinetica meccanica totale

Se in un sistema agiscono solamente forze conservative allora possiamo affermare che è vera la relazione:

$$\begin{cases} L = \Delta K \\ L = -\Delta U \end{cases}$$

risolvendo il sistema ottengo:

$$\Delta K = -\Delta U$$
$$\Delta K + \Delta U = 0$$
$$\Delta(K + U) = 0$$
$$\Delta E = 0$$

Chiamiamo la somma tra le energie "energia meccanica totale".
Se nel sistema agiscono anche forze non conservative allora questo teorema non vale più poiché si avrebbe:

$$L_C + L_{/C} = \Delta K$$
$$-\Delta U + L_{/C} = \Delta K$$
$$L_{/C} = \Delta K + \Delta U$$
$$\Delta E = L_{/C}$$

Sistemi di punti materiali

Fino a questo momento abbiamo considerato punti materiali ma al fine di descrivere in modo completo la realtà abbiamo bisogno di descrivere la cinematica e la dinamica dei corpi rigidi, ovvero di corpi estesi lungo le tre dimensioni. Tali corpi possono essere pensato come costituiti da un insieme di punti materiali e possono essere discreti o continui.
I sistemi discreti sono costituiti da punti materiali dotati di massa, posti a distanza finita mentre nei sistemi continui i punti materiali sono posti a distanze molto piccole tanto che la materia del corpo può essere considerata distribuita con continuità in tutto il volume occupato dal corpo. Per studiare questi sistemi dobbiamo dare alcune definizioni.
La prima definizione è quella si centro di massa (o baricentro) di un sistema. Questo è il punto geometrico che corrisponde al valore medio della distribuzione della massa del sistema nello spazio. Matematicamente è calcolabile infatti come una media ponderata.

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i}$$

Naturalmente parlando di sistemi tridimensionali, bisogna estendere questo concetto lungo tutti e tre gli assi (x, y, z) attraverso l'utilizzo di un sistema di equazioni.
La seconda definizione è quella di "densità". Dato un sistema continuo possiamo dividere il suo volume e la sua massa un tanti volumi e masse infinitesime, dopodiché definiamo la densità () come:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

La densità è una funzione dello spazio ed è una grandezza scalare! $\rho(x, y, z)$
La densità può anche essere superficiale (descrive la distribuzione della massa su una superficie) oppure lineare (descrive la distribuzione di massa lungo una linea retta come potrebbe essere un flo):

- Densità superficiale: $\sigma = \frac{dm}{ds}$
- Densità lineare: $\lambda = \frac{dm}{dl}$

Possiamo ora descrivere il centro di massa nei sistemi continui. In questo caso i volumi e le masse infinitesime vanno fatte tendere a zero, ottenendo:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \iiint \rho(x, y, z)\vec{r}dx\, dy\, dz \Big/ \iiint \rho(x, y, z)dx\, dy\, dz$$

Le equazioni del moto del centro di massa

Preso il caso dei sistemi discreti, la velocità del centro di massa è definibile come:

$$\overrightarrow{v_{CM}} = \overrightarrow{r_{CM}}' = \frac{dr_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}\, v_i}{\sum m_i}$$

e l'accelerazione:

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \overrightarrow{r_{CM}}'' = \frac{\sum m_i \vec{r_i}\, a_i}{\sum m_i}$$

Consideriamo ora le forze che agiscono sui punti materiali che formano il sistema. Queste possono essere esterne (dovute a corpi che non fanno parte del sistema) oppure interne (dovute agli altri punti materiali del sistema).
Per la seconda legge della dinamica possiamo dire che:

$$\sum F_e + \sum F_i = m_i a_i$$

$$=> \overrightarrow{a_{CM}} = \frac{\sum[\sum F_e + \sum F_i]}{\sum m_i}$$

Per il terzo principio però, le forze interne al sistema si annullano e per questo motivo possiamo scrivere l'accelerazione del centro di massa come il seguente rapporto:

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{\sum F_e}{M} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{F_e} = M \cdot \overrightarrow{a_{CM}}$$

Possiamo quindi considerare il centro di massa come un punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema.

Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi, la quantità di moto

Questa "versione" della seconda legge della dinamica può essere scritta anche in un secondo modo. Prima però dobbiamo introdurre una nuova grandezza: la "quantità di moto", la quale è il risultato del prodotto tra la velocità e la massa.

$$\vec{p} = mv$$

Da tale definizione deriva una importante considerazione:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = F_e$$

Se andiamo a sostituire questa grandezza nelle equazioni del moto del centro di massa otteniamo le seguenti equazioni:

$$M\overrightarrow{v_{CM}} = \sum p_i$$

$$M\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{dp}{dt} \quad dalla\ quantità\ di\ moto\ otteniamo: \boxed{F_e = \frac{dp}{dt}}$$

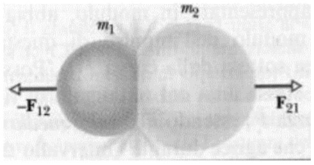
Questa equazione finale ci permette di descrivere sistemi a massa variabile (come ad esempio un sacco di farina bucato che viene portato sulle spalle di un uomo che si muove di moto rettilineo uniforme). Abbiamo quindi capito che se sono presenti forze esterne allora esiste un'accelerazione associata al centro di massa.

La conservazione della quantità di moto

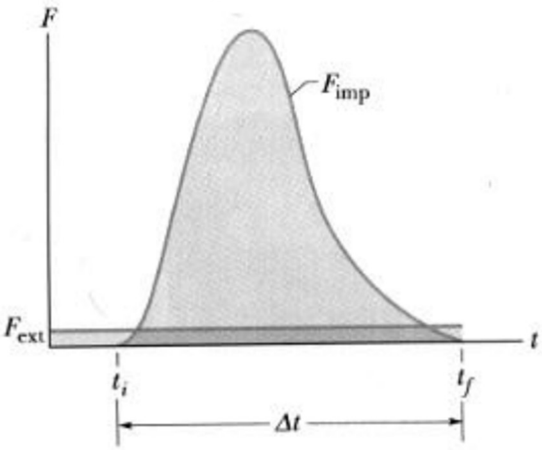
Dalla prima equazione cardinale della meccanica dei sistemi ne consegue che se il risultante delle forze esterne è nullo allora la quantità di moto del sistema rimane costante nel tempo. La legge di conservazione della quantità di moto è valida in tutti i sistemi di riferimento inerziali!
Il valore della quantità di moto, se è soddisfatta la condizione sopra detta, rimane costante per qualunque osservatore.

Gli Urti

Come abbiamo visto, se il risultante delle forze esterne a un sistema è nullo allora la quantità di moto del sistema si conserva. Una importante categoria di fenomeni di questo tipo sono gli urti. In questi casi, le forze che agiscono tra i corpi determinano un rapido cambiamento del moto di questi e perciò sono dette "forze impulsive".



Durante un urto (se i corpi non sono vincolati), le forze esterne sono trascurabili, sono cioè molto più piccole di quelle impulsive. Preso il caso rappresentato nel disegno, F_{12} è la forza che il corpo 2 esercita sul corpo 1 e F_{21} è quella contraria (per principio III della dinamica).
Graficamente la situazione si può rappresentare nel seguente modo.



L'area sottesa da $F_{esterne}$ è molto minore rispetto all'area sottesa a $F_{impulsive}$.
Dalla prima equazione cardinale applicata a due corpi che si urtano si ha allora:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{F_{est}} \approx 0$$

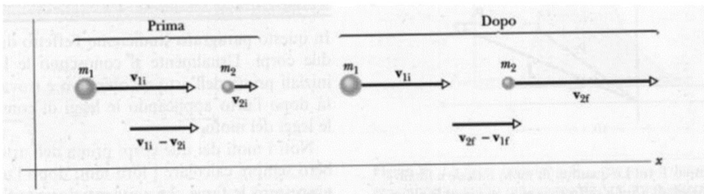
Da questa relazione ne consegue che la quantità di moto complessiva del sistema costituito dai due corpi che si urtano rimane invariata, ovvero che:

$$\overrightarrow{p_{tot\ iniziale}} = \overrightarrow{p_{tot\ finale}} = \overrightarrow{p_{1i}} + \overrightarrow{p_{2i}} = \overrightarrow{p_{1f}} + \overrightarrow{p_{2f}}$$

Gli urti possono essere classificati come:

- Elastici (se si conserva l'energia cinetica)
- Anelastici (se l'energia cinetica non rimane uguale)
- Completamente anelastici (se prima e dopo l'urto i corpi seguono la stessa retta)

Gli urti elastici unidimensionali



Il primo caso di urto che andiamo ad affrontare è quello "elastico unidimensionale". Supponiamo che l'urto avvenga tra due punti materiali di massa m_1 e m_2 non vincolati. Le velocità iniziali e quelle finali sono rispettivamente: v_{1i} , v_{2i} , v_{1f} , v_{2f} e abbiano tutte la stessa direzione. Per i processi di questo tipo è possibile scrivere la conservazione delle quantità di moto in forma scalare lungo la direzione del moto come: $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$
Se l'urto è di tipo elastico però; si ha anche la conservazione dell'energia cinetica allora:

$$\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2$$

Da queste due equazioni è possibile ricavare le due velocità finali:

$$\begin{cases} v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{cases}$$

Esistono poi dei casi particolari, ci riferiamo ad esempio all’urto tra due corpi di massa uguale, in questo caso la velocità finale di m_1 è uguale a quella iniziale di m_2 e viceversa.
Un altro caso particolare potrebbe essere quello di un bersaglio (m_2) in quiete in cui la sua velocità iniziale sarà pari a zero.

Gli urti completamente anelastici

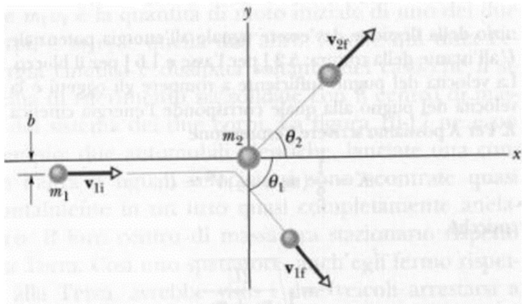
Negli urti anelastici l’energia cinetica non si conserva perché parte di essa si trasforma.
Se l’urto è unidimensionale, le velocità dei corpi prima e dopo l’urto hanno la stessa direzione. Le incognite cinematiche sono quindi due: i moduli delle velocità dei corpi dopo l’urto. La conservazione della quantità di moto però può fornirci una relazione tra le velocità iniziali e quelle finali.
Il problema non è dunque risolubile a meno che non si abbia anche l’informazione della frazione di energia cinetica convertita in altra forma o a meno che l’urto non sia di tipo “completamente anelastico”.
Il quest’ultimo caso, poiché i corpi dopo l’urto procedono uniti, le incognite si riducono ad una: la velocità comune di due corpi che possono ora essere considerati come un unico sistema. Ora sì che il problema può essere risolto (con la conservazione della quantità di moto).

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1f}$$

Gli urti tra due punti materiali in due dimensioni

Consideriamo ora urti bidimensionali tra due punti materiali.
Supponiamo che la particella proiettile di massa m_1 e velocità v_{1i} nella direzione x urti la particella bersaglio di massa m_2 ferma nell’origine di un sistema di riferimento Oxy e che dopo l’urto il proiettile e il bersaglio abbiano velocità pari a v_{1f} e v_{2f} . poiché la quantità di moto si conserva, è possibile scrivere la seguente relazione:



$$m_1 \overrightarrow{v_{1i}} = m_1 \overrightarrow{v_{1f}} + m_2 \overrightarrow{v_{2f}}$$

Che essendo in questo caso in due dimensioni, può essere scomposto in:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\, cos\theta_1 + m_2 v_{2f}\, cos\theta_2 \\ \quad 0 = -m_1 v_{1f}\, sin\theta_1 + m_2 v_{2f} sin\theta_2 \end{cases}$$

Se l’urto fosse poi di tipo elastico bisogna tener conto del fatto che a conservarsi è anche l’energia cinetica.

Il moto rotazionale dei corpi rigidi

In generale possiamo dire che il moto di un corpo rigido è simultaneamente rotatorio e traslatorio. La posizione di un corpo può essere data dalla posizione istantanea del suo centro di massa (che avrà tre coordinate), dalla direzione istantanea dell'asse di rotazione che passa per il centro di massa (che avrà due parametri) e dall'angolo istantaneo di rotazione intorno all'asse rispetto ad un piano di riferimento (un solo parametro).
Per descrivere il moto roto-traslatorio di un corpo è quindi necessario avere sei parametri ("gradi di libertà") che sono tra loro indipendenti. Lo studio di tale moto può essere suddiviso nello studio del suo centro di massa (attraverso l'utilizzo della prima equazione cardinale della meccanica) e del moto intorno allo stesso.
Abbiamo già visto la prima parte di questo studio, vediamo ora la seconda. Per prima cosa iniziamo a dare alcune definizioni:

a) Chiamiamo "<u>posizione angolare</u>" l'angolo (espresso in radianti) formato dal raggio nella posizione considerata del punto P con la retta di riferimento che corrisponde alla posizione angolare "zero". Tutte le parti di un corpo rigido nello stesso intervallo di tempo, ruotano dello stesso angolo.
b) Chiamiamo poi "<u>velocità angolare</u>" la variazione di un angolo in funzione del tempo; ovvero il rapporto:

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

per il valore istantaneo si ha:

$$\lim_{\Delta t \to 0} (\overline{\omega}) = \frac{d\theta}{dt}$$

c) Definiamo infine "<u>accelerazione angolare</u>" la variazione nel tempo della velocità angolare; ovvero il rapporto:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Naturalmente facendo il limite della funzione $\bar{\alpha}$ è possibile ricavare il valore di α.
Se il corpo ruota attorno ad un asse fisso, l'accelerazione angolare vettoriale ha la direzione di ω.
Dalla definizione si ha che l'unità di misura dell'accelerazione angolare è [rad/s^2].

Il momento di inerzia

Preso un corpo che ruota intorno ad un asse possiamo dividerlo in infinitesimi la cui velocità sarà descrivibile dall'equazione $v_i = \omega r_i$ [velocità tangenziale]
L'energia cinetica posseduta dall'oggetto sarà invece:

$$k = \sum \frac{1}{2} m_i {v_i}^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \omega^2 {r_i}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i {r_i}^2\right)\omega^2$$

Chiamiamo il termine interno alla parentesi "<u>momento di inerzia</u>" (I), questa è una grandezza che descrive come la massa è distribuita rispetto all'asse di rotazione. Possiamo scrivere l'energia cinetica come:

$$k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Nel caso di sistemi non discreti:

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \left(\sum m_i {r_i}^2 \right) = \lim_{\Delta m \to 0} \left(\sum \varphi_i \, \Delta v_i {r_i}^2 \right) = \int \varphi r^2 \, dv$$

Qui di seguito sono riportati i principali momenti di inerzia che possono servire nello svolgimento degli esercizi.

- Sbarretta con asse centrale

$$I = \frac{1}{12} \cdot ML^2$$

- Sbarretta con asse non centrale

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

La funzione con cui varia il momento di inerzia è: $I(x) = I_{CM} + M\left(\frac{x}{2}\right)^2$

- Sfera piena con asse centrale

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

- Cilindro pieno con asse centrale

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

- Cilindro vuoto con asse centrale

$$I = \frac{1}{2} m({r_2}^2 - {r_1}^2)$$

- Disco piatto

$$I = MR^2$$

Il teorema di Steiner

Il teorema di Steiner (anche chiamato "degli assi paralleli") dice che il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse di rotazione arbitrario è uguale alla somma del momento di inerzia del corpo stesso rispetto ad un asse parallelo passante per il centro di massa per il prodotto della massa totale del corpo per il quadrato della distanza tra i due assi.

Un'altra importante grandezza da definire è il momento di una forza.

Il momento di una forza

La rotazione di un corpo intorno ad un asse dipende dalla forza applicata e dal suo punto di applicazione rispetto all'asse. La grandezza che tiene conto di questo è proprio il "momento di una forza rispetto a un polo", la quale è definita come:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Il vettore $\vec{\tau}$ ha per intensità il prodotto: $rFsin(\theta)$, mentre direzione e verso vanno definiti con la regola della mano destra.

ATTENZIONE!
Il momento risultante di più forze rispetto a un polo non è uguale al momento della risultante delle forze rispetto allo stesso polo, esso è piuttosto uguale a:

$$\tau_{tot} = \sum_{1}^{n}(\vec{r_i} \times \vec{F_i}) \quad ; n = numero\ delle\ forze$$

La seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Supponiamo di prendere una porta, quindi un sistema come quello riportato nella figura. Se applichiamo una forza applichiamo anche (per il principio II della dinamica) una accelerazione. Tuttavia dovendo la porta ruotare intorno a un fulcro (che funge da asse di rotazione), dobbiamo utilizzare la dinamica rotazionale.
Riscriviamo allora il secondo principio della dinamica come:

$$\tau = I \cdot \alpha$$

L'accelerazione che otteniamo è di tipo angolare, come abbiamo visto, questa ci descrive la variazione di ω in funzione del tempo e per questo possiamo scrivere:

$$\tau = I\frac{d\omega}{dt}$$

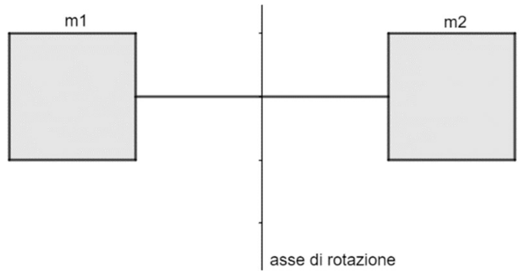
L'angolo θ in funzione del tempo varia invece secondo la legge:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Ovvero:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{I}\right)t^2$$

Partendo dal sistema proposto in figura, proviamo a vedere se L è collegato in qualche modo a ω.
Calcoliamo per prima cosa il momento angolare del sistema ricordandoci che: $l = \vec{r} \wedge m\vec{v}$.



$$L = \vec{l_1} + \vec{l_2} = \vec{r_1} \wedge m\vec{v}_1 + \vec{r_2} \wedge m\vec{v}_2 = dmv\hat{k} + dmv\hat{k}$$
$$= 2d^2 m\omega\hat{k} \;; d = raggio$$

Il momento di inerzia vale invece:

$$I = md^2 + md^2 = 2md^2$$

Dall'equazione di L otteniamo allora:

$$\begin{cases} 2d^2 m = I \\ \omega\hat{k} = \omega \end{cases}$$

Abbiamo allora dimostrato che $L = I\vec{\omega}$.
Per questo motivo la seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi può essere vista come:

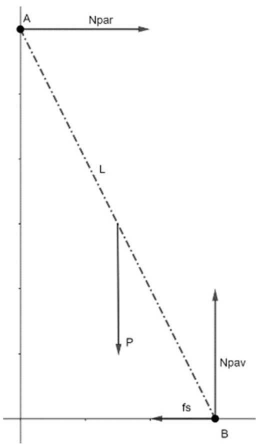
$$\sum \tau^e = \frac{dL}{dt}$$

$$
\begin{cases}
\sum \overrightarrow{F_x^e} = m\overrightarrow{a_{xCM}} \\
\sum \overrightarrow{F_y^e} = m\overrightarrow{a_{yCM}} \\
\sum \overrightarrow{F_z^e} = m\overrightarrow{a_{zCM}} \\
\sum \overrightarrow{\tau_x^e} = I_x\alpha \\
\sum \overrightarrow{\tau_y^e} = I_y\alpha \\
\sum \overrightarrow{\tau_z^e} = I_z\alpha
\end{cases}
$$

La condizione di equilibrio

Affinché un corpo sia definibile "in equilibrio" deve accadere che le equazioni cardinali siano uguali a zero, non ci deve essere cioè nessuna rotazione e nessuna traslazione.
Non sempre questa rappresentazione è però possibile.
Prendiamo ad esempio una scala appoggiata ad un muro come rappresentato nel disegno. La scala (rappresentata dalla linea tratteggiata è in equilibrio se:

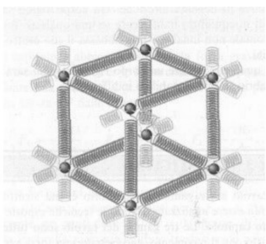
$$
\begin{cases}
\sum \overrightarrow{F^e} = 0 \\
\sum \overrightarrow{\tau^e} = 0
\end{cases}
=>
\begin{cases}
\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\begin{cases} N_{par} - f_s = 0 \\ N_{pav} - P = 0 \end{cases} \\
mg\dfrac{L}{2}\cos(\theta) - N_{par}Lsin(\theta) = 0
\end{cases}
$$



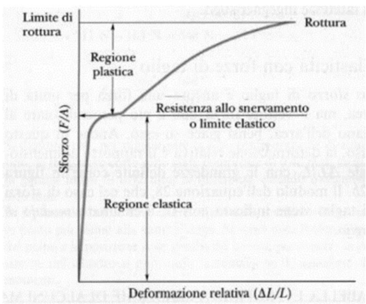
Ottengo un sistema a tre equazioni tre incognite. Questo significa che non posso permettermi di aggiungere una quarta equazione (ad esempio l'attrito tra la scala e la parete).
Mi trovo di fronte a una situazione reale che non può essere descritta.
Un altro esempio è quello di un tavolo che ha quattro gambe ovvero quattro reazioni vincolari. Ci troviamo di fronte al limite di validità della schematizzazione di un corpo rigido.
Per aggirare questo problema devo considerare il corpo come formato da un insieme di molle che oscillano. Così facendo riesco ad aumentare il numero dei gradi di libertà del nostro corpo rigido.

L'elasticità dei corpi, i casi iperstatici

Come abbiamo detto, se nell'esempio precedente della scala si fosse considerato anche la forza di attrito



scala-parete non avremmo potuto risolvere il sistema. Questi casi vengono definiti "iperstatici". La fisica deve comunque giungere ad una soluzione che sia in grado di descrivere la realtà. Bisogna cioè abbandonare la schematizzazione "classica" per adottare il "modello elastico per la rappresentazione dei corpi rigidi".
L'elasticità è legata alla struttura (atomica) dei corpi, gli atomi sono legati da forze che approssimativamente possono essere considerate elastiche. In conseguenza a ciò, i corpi quando sono soggetti a sforzi subiscono deformazioni. In particolare nel caso della trazione si ha il seguente comportamento tipico riportato nel grafico a destra.



LA GRAVITAZIONE

La teoria moderna della gravitazione inizia con la formalizzazione di Isaac Newton che nel 1665 unì due fenomeni conosciuti fin dall'antichità: la tendenza dei corpi se abbandonati ad una certa altezza rispetto al suolo a cadere sulla terra e il moto dei pianeti e dei satelliti nel sistema solare.
Newton postulò la seguente legge:
"Dati due punti materiali P_1 e P_2 di massa m_1 e m_2 , tra di essi si esercita una forza attrattiva, la forza gravitazionale".
La forza gravitazionale è indipendente dalla presenza di altri corpi e dalle proprietà del mezzo in cui i punti materiali sono immersi matematicamente è calcolabile come:

$$\overrightarrow{F_G} = -G\frac{m_1 m_2}{\left(r_{1,2}\right)^2}\ \overrightarrow{u_{r_{1,2}}}$$

"G" è la costante di gravitazione universale e vale $6{,}67259 \times 10^{-11}$ Nm^2/Kg^2.
In generale il calcolo di questa forza potrebbe essere complicato, ma se le masse sono distribuite con una simmetria che sia il più possibile sferica allora la forza attrattiva è pari a quella che si avrebbe tra due punti materiali di massa pari alle masse dei due corpi e coincidenti con il centro di questi.
Questa formulazione di Newton permette di spiegare l'accelerazione di gravità "g". un oggetto di massa m alla distanza "r" dalla Terra è soggetto a una forza attrattiva (come abbiamo visto a pagina 16) chiamata forza-peso. La principale causa di tale forza è proprio la forza gravitazionale newtoniana che il nostro pianeta (di massa M_T) esercita sull'oggetto preso in questione.
Infatti:

$$per\ F = ma\ si\ ha\colon\quad p_0 = \frac{GM_T m}{r^2} = mg_0$$

;con

$$g_0 = \frac{GM_T}{r^2}$$

Dai calcoli precedenti è possibile costruire la seguente tabella:

Altezza (Km) - r	Valore di g
0	9,83
5	9,81
10	9,80
50	9,68
100	9,53
400	8,70

A tal proposito in laboratorio si è voluto calcolare il valore dell'accelerazione di gravità. Nella pagina successiva è riportata la relazione di tale esperienza.

Genova, 12 Aprile 2022
Corso di laurea triennale in "Scienza dei Materiali" anno I, corso di "Laboratorio di Fisica Generale"
Esperienza di Laboratorio numero uno
"Calcolo dell'accelerazione di gravità con piano inclinato"

Lo scopo dell'esperienza è stato quello di voler determinare il valore dell'accelerazione di gravità in modo pratico, applicando cioè le nozioni della cinematica apprese nel corso di fisica generale (primo modulo). Per fare ciò è stato osservato il moto di una biglia lungo un piano inclinato.

Preso un piano inclinato sono state misurate le lunghezze del cateto minore (h = 18,9 ± 0,1cm) e dell'ipotenusa (i = 120,0 ± 0,1cm). In questa prima fase è stato utilizzato come errore la sensibilità dello strumento. È stato poi calcolato il valore del seno dell'angolo attraverso la seguente operazione:

$$sin(\alpha) = \frac{h}{i} = 0{,}158$$

; dalla quale è stato ottenuto:

$$\alpha = arcsin\ (sin\alpha)) = 9{,}06^{o}$$

, valore che in un secondo momento verrà considerato errato.
Lungo il piano sono state poste delle fotocellule collegate a un cronometro digitale e posizionabili in diversi punti del piano. È stato deciso di mantenere fisso il punto del primo traguardo (quello più alto) e traslare progressivamente il secondo in modo tale che le distanze tra i due risultassero: $d_1 = 0{,}87 \pm 0{,}01m$, $d_2 = 0{,}70 \pm 0{,}01m$, $d_3 = 0{,}45 \pm 0{,}01m$, $d_4 = 0{,}30 \pm 0{,}01m$, $d_5 = 0{,}10 \pm 0{,}01m$.
Nella condizione di partenza la biglia metallica era trattenuta da un elettromagnete in modo da evitare l'errore sistematico dell'operatore sul tempo di rilascio. Per ogni distanza sono state effettuate dieci misurazioni del tempo impiegato dalla biglia per percorre quel determinato spazio (d). Essendo il cronometro utilizzato molto preciso, avendo quindi una sensibilità molto elevata dello strumento ed essendo numerose le interferenze provenienti dall'ambiente esterno, come errore è stata utilizzata la deviazione standard calcolata dal software "SciDavis" partendo dai dati rilevati empiricamente.
Sempre mediante l'utilizzo di "SciDavis", è stato tracciato il grafico della situazione sperimentata. L'equazione ottenuta è stata utilizzata come se il moto della biglia fosse di puro rotolamento poiché sulla superficie del piano l'attrito era elevato a causa di una striscia di nastro adesivo applicato appositamente. In oltre la distanza tra il punto di partenza del corpo e il primo fotosensore poteva essere considerata sufficiente affinché l'iniziale moto traslatorio del corpo stesso diventasse rotazionale. Nel caso di puro rotolamento la formula che descrive il moto è quella indicata nell'appendice finale. Essendo il valore di g troppo distante da quello teorico è stata ricercata la possibile fonte di errore. Poiché le misure del tempo avevano un margine di errore molto basso si è dedotto che il valore del seno dell'angolo potesse essere la principale causa di errore. Sono state svolte altre misurazioni tramite l'ausilio di un goniometro che hanno riportato il seguente risultato : α = 6.3 ° e quindi sin(α) = 0,11

Il risultato finale dell'accelerazione di gravità è quindi stato attestato a $g = 9.86\ \pm\ 0.24\, m/s^2$

Ivan Schiavi
Elia Guastini
Valentina Chessa

Il risultato di questa esperienza è stato più che soddisfacente. Confrontando in un secondo momento il valore da noi ottenuto con il valore empirico registrato per Genova, l'errore è stato di 0,10 m/s^2.

Tuttavia la Terra differisce dal modello di “sfera con distribuzione simmetrica di materia poiché:

- Il suo volume non è perfettamente sferico, la Terra è un geoide appiattito ai poli
- La Terra ruota con una velocità angolare
- La distribuzione di massa del nostro pianeta non è omogenea.

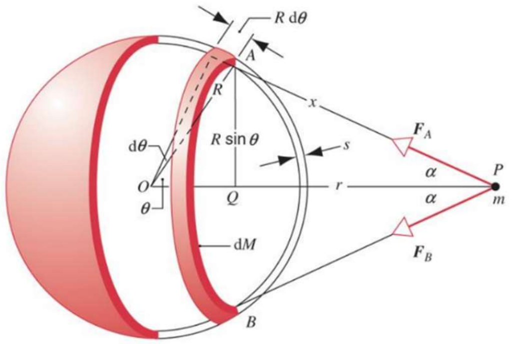
L’accelerazione di gravità deve perciò essere corretta in base alla posizione in cui ci si trova e da questo ne deduciamo che lo schiacciamento ai poli fa aumentare il modulo di “g” e che la Terra non è un sistema inerziale.

$$\vec{g} = g_0 + \omega^2 \vec{d}$$

I due teoremi dei gusci

I due teoremi dei gusci enunciati da Newton ci assicurano che le masse sono distribuite con simmetria sferica allora la forza attrattiva terrestre è pari a quella che si avrebbe tra due punti materiali aventi masse pari alle masse dei due corpi e coincidenti con i centri dei corpi stessi.

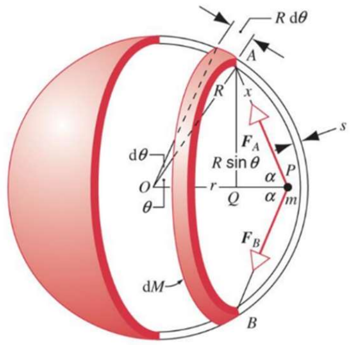
<u>Primo teorema:</u>



“Un guscio sferico avente la distribuzione di densità di massa uniforme attrae una particella esterna come se tutta la massa del guscio fosse concentrata nel centro della sfera che costituisce il guscio stesso”.

<u>Secondo teorema:</u>

“Un guscio sferico avente la distribuzione di densità di massa uniforme non esercita alcuna forza gravitazionale su una particella collocata in un qualunque punto interno alla sfera che costituisce il guscio stesso”.



Vediamo ora quali sono le conseguenze di questi due teoremi.
Un corpo sferico di raggio R, di centro O e di massa totale M (distribuita uniformemente) può considerarsi formato da una serie di gusci di raggio ($0 \leq r \leq R$) in ciascuno dei quali la densità di massa è costante. Ciascun guscio (per 1° Theo) esercita su un punto materiale P esterno al suo volume, a distanza quindi $d > R$ una forza pari a quella che eserciterebbe un punto materiale di massa pari alla massa totale del guscio stesso posto nel centro O.
La forza totale esercitata dal corpo sferico in P è pari alla somma delle forze esercitate da ogni guscio.
I due teoremi discendono dalla legge di Newton e in particolare dal fatto che la forza di gravitazione tra due masse puntiformi è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Al giorno d’oggi possiamo scrivere la legge di Newton come

$$\overrightarrow{F_G} = -G\frac{Mm}{r^{2+\delta}} \quad ; \delta \leq 10^{-4}$$

In oltre per il secondo teorema si può dimostrare che se si scavasse un tunnel lungo quanto il raggio terrestre e dalla superficie si andasse verso il centro, la forza gravitazionale sarebbe solamente dovuta alla massa contenuta nella sfera di raggio pari alla distanza dal centro della Terra.

In ultima analisi vogliamo rispondere alla domanda: “è la forza gravitazionale conservativa?”

$$L = \oint \overrightarrow{F_G}\ ds$$

$$L_{A\to B}(\overrightarrow{F_G}) = \int_A^B -G\frac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}\,ds = \int_A^B -G\frac{m_1m_2}{r^2}\,dr = -Gm_1m_2\left(-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_A}\right)$$

Si nota come ciò che conta nel calcolo del lavoro è solamente la posizione iniziale e quella finale. Non contando il “percorso” che viene fatto dalla forza allora possiamo affermare che la forza gravitazionale è conservativa.

Ne consegue poi che: $L = U(a) - U(b)$

$$U(a) = -G\frac{m_1m_2}{{r_a}^2} + c \quad ; c \in \mathbb{R}\ , U(\infty) = 0$$

Questa è la formula dell’energia potenziale gravitazionale.

Definiamo poi “velocità di fuga” la velocità minima che un corpo deve possedere per poter sfuggire alla gravità di un corpo celeste.

Nel caso del nostro pianeta, tale velocità vale:

Al momento del lancio l’energia meccanica del sistema terra-corpo vale:

$$E_i = U_i + k_i = -G\frac{Mm}{R_{Terra}} + \frac{1}{2}m\cdot(v_{fuga})^2$$

Per sfuggire alla gravità terrestre deve accadere che:

- $v_\infty = 0$
- $U_\infty = 0$

Allora:

$$E_\infty = U_\infty + k_\infty = 0$$
$$E_\infty = E_i$$

, da cui si ricava:

$$v_{fuga} = \sqrt[2]{\frac{2GM_T}{R_T}} = 1{,}12\times10^4\,\frac{m}{s} = 4\times10^4\ Km/h$$

La velocità di fuga non dipende (come si vede dalla formula) dalla massa del corpo che si allontana dal pianeta /corpo celeste.

Le leggi di Keplero

Quando parliamo di corpi celesti poi non possiamo dimenticare le “leggi di Keplero”, le quali enunciano:

1) Legge I: *«L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.»*

2) Legge II: *«Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta orbitante descrive aree uguali in tempi uguali. »*

Dalla seconda legge ne consegue che le velocità dei pianeti durante la loro orbita non è costante ma aumenta all’avvicinarsi al sole. Questa è una conseguenza della forza gravitazionale, e più in generale del principio II della dinamica, attraverso il quale è possibile descrivere questo fenomeno.

3) Legge III: *«I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore.»*

LA FLUIDOMECCANICA

Introduzione

La materia normalmente si presenta in tre stati di aggregazione: solido, liquido e gassoso. I solidi hanno una forma propria, i liquidi prendono la forma del recipiente in cui sono contenuti e i gas fanno lo stesso ma a differenza dei primi occupano tutto il volume occupabile.
In oltre:

- I solidi sono poco comprimibili e possono sopportare/trasmettere sollecitazioni notevoli (come visto nei precedenti capitoli)
- Nei liquidi le distanze tra le molecole sono generalmente maggiori che nei solidi e per questo hanno la proprietà di essere più comprimibili rispetto ai primi. La materia che si trova in questo stato di aggregazione può sopportare/trasmettere sollecitazioni ma non sforzi di taglio.
- I gas sono poi formati da molecole che interagiscono molto debolmente tra loro e come i liquidi non sopportano/trasmettono sforzi di taglio.

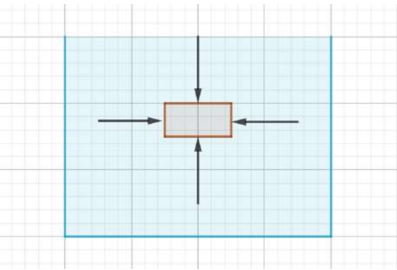
I liquidi e i gas sono detti "fluidi". La meccanica dei fluidi è una teoria che si basa sulle leggi della meccanica classica formulata per la materia liquida e gassosa.
Per capire come si comportano le sostanze che si trovano in questi due stati di aggregazione si comportino dobbiamo introdurre alcune grandezze:

Pressione: la pressione dovuta a una forza che agisce su una superficie è definita come il rapporto tra il modulo della forza normale alla superficie e la superficie stessa.

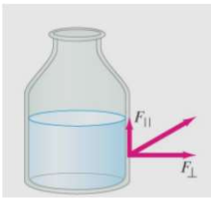
$$P = \frac{F_y}{S} = \frac{F\sin(\alpha)}{S}$$

La pressione è una grandezza scalare la cui unità di misura è il Pascal; definito come: $\left[\frac{Newton}{m^2}\right]$

È importante osservare che un fluido in quiete esercita in una determinata posizione la stessa pressione in tutte le direzioni. Presa la raffigurazione qui di fianco, la pressione sul volumetto di un fluido in quiete è la stessa in tutte le direzioni poiché se così non fosse il volumetto si muoverebbe e il fluido non sarebbe in quiete.



Un'altra caratteristica che va tenuta in considerazione è che un fluido in quiete esercita su qualunque superficie solida con cui viene a contatto una forza dovuta alla pressione sempre perpendicolare alla superficie stessa. Se il fluido esercitasse sulla parete del recipiente una forza non perpendicolare, come indicato della figura a destra con una componente $F_{||} \neq 0$, per il terzo principio della dinamica la parete eserciterebbe una forza $-F_{||}$ sul fluido che quindi si metterebbe in movimento e non sarebbe in quiete come supposto.



Un'altra importante grandezza (che abbiamo in parte già trattato) da dover definire è la densità. Essa è definibile come:

$$\delta(x, y, z) = \frac{dm}{dV}$$

Se la massa del fluido è distribuita omogeneamente nel volume allora la densità è costante. Bisogna ricordarsi (e lo vedremo più avanti) che i gas hanno variazioni di densità elevate al variare della temperatura e della pressione.

LA FLUIDOSTATICA

Le tre leggi fondamentali della fluidostatica

La legge di Stevino

Dato un fluido di densità δ, consideriamo nel volume da esso occupato un elemento cilindrico in equilibrio di altezza dy e area di base A. Se quell'elemento è in equilibrio allora la somma vettoriale delle forze deve essere uguale a zero, deve accadere cioè:

(peso)+(forza pressione superficiale)+(forza pressione inferiore)=0

La forza di pressione laterale non viene in questo caso contata poiché si annulla.
A questo punto posso dire:

$$-g\delta gdy - (P + dP)A + PA = 0$$
$$dP = -\delta gdy$$

, da questa ultima relazione ne deriva che:

$$\frac{dP}{dy} = -\delta g$$

e che:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \int_{P_1}^{P_2} dP = \int_{P_1}^{P_2} -\delta gdy$$

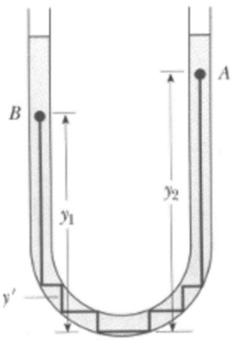
Se poi il fluido fosse un liquido (considerato come incomprimibile) la densità sarebbe costante e le differenze di livello sarebbero tali per cui:

$$\Delta P = \delta g \cdot (y_2 - y_1)$$

Se si prende come riferimento la superficie di separazione tra il liquido e l'aria bisogna considerare P_2 uguale alla pressione atmosferica P_0 ovvero 1013hPa
Si potrebbe cioè scrivere:

$$P = P_0 + \delta g \cdot (y_2 - y_1) = P_0 + \delta gh$$

Questa è la legge di Stevino.
In generale, si può dire che le superfici equipotenziali (dal punto di vista della forza-peso) sono anche isobariche.



Un'applicazione di questa legge è il il tubo a "U".
il tubo rappresentato nel disegno è riempito con un fluido omogeneo di densità δ.
La differenza di pressione tra i punti A e B dipende dalla differenza della quota $y_2 - y_1$:

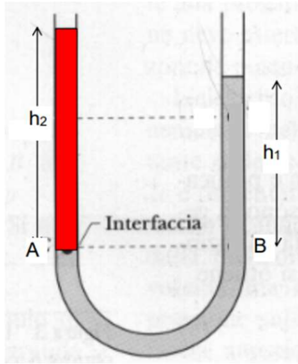
$$P(B) - P(A) = \delta gh\Delta$$

Se i punti A e B sono sulla superficie di separazione fluido-aria si ha allora:

$$P(B) = P(A) = P_0 \quad => \quad P(B) - P(A) = \delta g(y_2 - y_1) = 0$$

I livelli nei due rami del tubo a "U" devono essere uguali, ciò è coerente con quanto detto fino ad ora poiché le superfici di separazione sono isobariche ed equipotenziali secondo la formula $U = mgh$.

Consideriamo poi il caso in cui nel tubo vengono inseriti due differenti fluidi aventi diverse densità. In questo caso la posizione di A (contatto tra i due fluidi) e B (stessa altezza di A) appartengono alla stessa superficie equipotenziale della forza-peso e per questo motivo sono anche alla stessa pressione.



Se P_0 è la pressione atmosferica si ha allora:

$$P(A) = P(B)$$

$$P(A) = P_0 + \delta_2 g h_2 \quad ; \quad P(B) = P_0 + \delta_1 g h_1$$

; ne consegue che:

$$\delta_2 g h_2 = \delta_1 g h_1$$

da cui:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

"Il rapporto tra le altezze delle colonne è inversamente proporzionale alla loro densità".

Se il fluido fosse un gas, la sua densità sarebbe piccola e perciò la differenza di pressione tra due generiche quote sarebbe trascurabile. Possiamo quindi ritenere che nel recipiente, a tutte le quote la pressione del gas sia sempre la stessa.
Se invece il gas occupa uno spazio molto grande (come accade per l'aria che costituisce l'atmosfera) allora la densità del gas varierebbe con la quota.
Per calcolare tale differenza si utilizza la formula prima spiegata

$$\frac{dP}{dy} = -\delta g$$

Tenendo in considerazione le seguenti ipotesi:

a) La densità del gas non è costante e si può supporre che sia proporzionale alla pressione:

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{P}{P_0} \; ; \; \delta_0 = 1{,}21 \; {}^{Kg}/_{m^3}$$

b) Semplificando si può affermare che la temperatura dell'aria e l'accelerazione di gravità non varino con l'altezza.

Integrando la formula con queste ipotesi si ottiene:

$$\frac{dP}{dy} = -\delta g \; ; \; \delta = P \cdot \frac{\delta_0}{P_0}$$

;

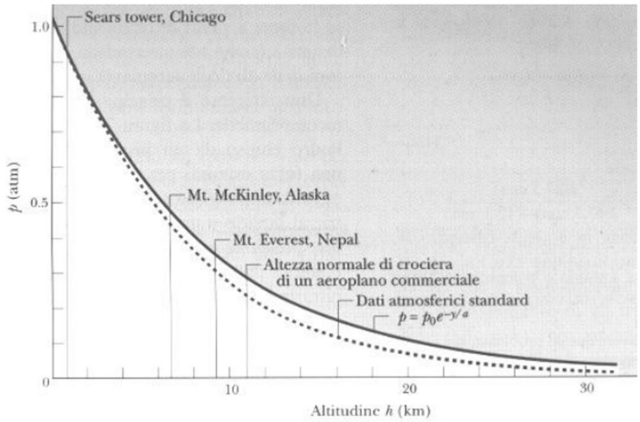
$$\frac{dP}{P} = -\frac{\delta_0}{P_0} g \, dy$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\int_{0}^{y} \frac{\delta_0}{P_0} g \, dy$$

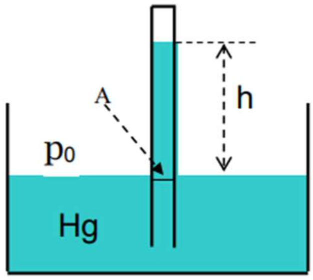
Esponenziando i membri si ottiene:

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{g\delta_0}{P_0} \cdot y}$$

Il grafico che segue riporta la variazione della pressione atmosferica al variare della quota sul livello del mare.



La pressione atmosferica può essere calcolata mediante l'utilizzo del "barometro di torricelli", il cui schema è di seguito riportato.



Una provetta contenente mercurio viene rovesciata in una vaschetta contenente anch'essa mercurio. ($\delta_{Hg} = 13{,}6 \times 10^3 Kg/m^3$) e si determina la situazione schematizzata a sinistra.
Poiché la sezione A della provetta e la superficie di separazione tra il mercurio nella vaschetta e l'aria sono alla stessa quota, la pressione atmosferica e quella determinata dal mercurio devono essere uguali:

$$P = \delta g h$$

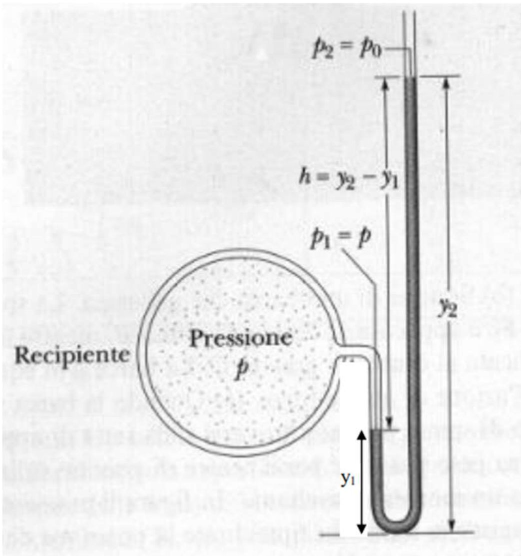
In particolare, poiché a livello del mare si osserva che il valore di h è pari a 760mm, si ha per la pressione atmosferica un valore pari a 1013 hPa.
Oltre al pascal possono essere utilizzate altre misure come il bar (=10^5 Pa), l'atmosfera (atm/ata) o il torr.

Il manometro a tubo aperto:
questo è uno strumento che viene utilizzato per misurare la pressione di un gas in un recipiente. È costituito da un tubo a U che contiene un liquido con un'estremità a contatto con l'atmosfera e con una seconda estremità a contatto con il gas di cui si vuole misurare la pressione. Dalla legge di Stevino si ha:

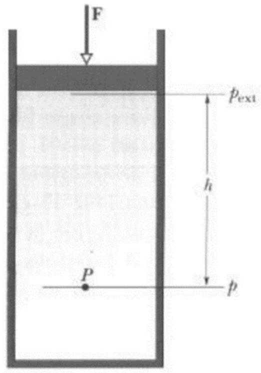
$$p - p_0 = \delta g (y_2 - y_1) = pgh$$

$$p = p_0 + \delta g h$$

Se il recipiente contiene gas ad alta pressione viene utilizzato un liquido denso (es. mercurio) altrimenti il liquido utilizzato è l'acqua.



La legge di Pascal:



"La pressione applicata ad un punto di un fluido viene trasmessa inalterata in ogni punto del fluido stesso e di conseguenza anche alle pareti del recipiente in cui il fluido è contenuto".

Se prendiamo ad esempio un liquido contenuto in un contenitore dotato di copertura mobile, alla profondità h la pressione è data da pressione esterna sommata alla pgh. Se il liquido fosse incomprimibile e ad esso fosse applicata una variazione di pressione esterna alla quota h si avrebbe:

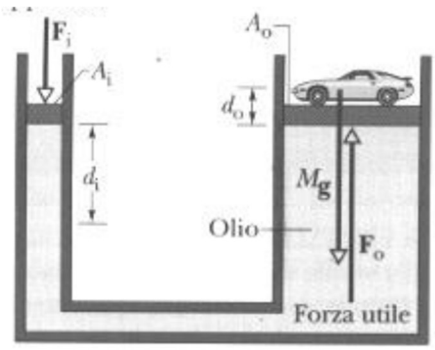
$$\Delta P = \Delta P_{esterna} + \Delta(\delta g h)$$

Poiché $\Delta(\delta g h)$ è nullo,

$$\Delta P = \Delta P_{esterna}$$

La legge di Pascal viene applicata in numerosi dispositivi meccanici (freni automobilistici, leve idrauliche etc…). Vediamo il caso del "Torchio idraulico".

Grazie a questo strumento è possibile sollevare masse notevoli con piccole forze. Applicando la legge di Pascal alle due parti mobili di superficie A_0 su cui viene posta una massa "m" e A_1 alla quale viene applicata una forza F_i si ottiene:



$$p_i = p_0$$

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_0}$$

$$F_i = F_o \frac{A_i}{A_0} = F_p \frac{A_i}{A_0}$$

ed essendo $\frac{A_i}{A_0}$ << 1 è possibile affermare che $F_i << F_p$

è stato perciò dimostrato come con una piccola forza sia possibile sollevare una massa "m".

La legge di Archimede:

Consideriamo un corpo di volume V e di densità δ immerso in un fluido di densità δ_f. Se togliamo il corpo dal fluido, anche quel volume V sarà occupato dal fluido che, essendo in equilibrio, deve avere una risultante delle forze applicate pari a zero sul volume di fluido V limitato dalla (da una) superficie S ovvero dovrà accadere:

$$\overrightarrow{F_p^s} + M_f \vec{g} = 0$$

; con $\overrightarrow{F_p^s}$ forze superiori di pressione e $M_f \vec{g}$ la forza peso del fluido.

Dalla precedente relazione è possibile evincere che: $\overrightarrow{F_p^s} = -M_f \vec{g}$.

Questo significa che: *"se su un corpo immerso in un fluido agisce una forza (spinta di Archimede) la cui intensità è pari al peso del fluido spostato".*

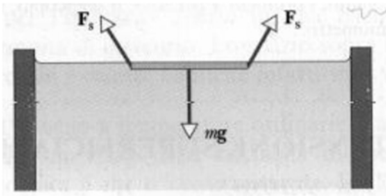
La "spinta di Archimede" è applicata al centro di massa della massa di fluido spostato. In generale ne consegue che:

- Se la forza-peso è maggiore della spinta il corpo immerso affonda
- Se la forza-peso è inferiore della spinta il corpo immerso galleggia

In base a questo ragionamento le due forze applicate a una barca che galleggia sono applicate in punti differenti . il centro di massa della barca non deve poi essere posto troppo in alto altrimenti l'imbarcazione può facilmente capovolversi.

La Tensione superficiale

Se appoggiamo alcuni oggetti (come ad esempio una lametta) su un fluido liquido si osserva che questi galleggiano. Le forze tra le molecole del fluido hanno un raggio d'azione limitato. Le molecole interne sono poi soggette a forze mediamente nulle o comunque considerabili come tali. Le molecole di superficie sono soggette invece a forze le cui risultanti sono dirette verso il basso. Questo dà origine alla "tensione superficiale" cioè a forze dirette verso l'interno del liquido.



Quando appoggiamo la lametta sulla superficie dell'acqua contenuta in un bicchiere, questa sposta una parte dello strato superficiale e ci si ritrova nella situazione descritta dal disegno a destra. Si sviluppa quindi una "forza di richiamo" la cui componente verticale equilibra la forza-peso. Poiché la sommatoria di tutte le forze risulta essere pari a zero allora il sistema è in equilibrio e l'oggetto galleggia.

In generale possiamo definire la tensione superficiale come la forza che agisce per unità di lunghezza in modo perpendicolare a ogni linea/bordo della superficie di un fluido liquido.

LA FLUIDODINAMICA

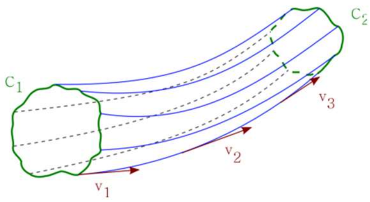
Il moto di un fluido può essere studiato attraverso due differenti schematizzazioni:

- Schema lagrangiano: prevede lo studio del moto di ogni singola particella attraverso l'utilizzo della meccanica classica.
- Schema euleriano: prevede lo studio delle grandezze fisiche in funzione del tempo.

Noi affiancheremo lo schema euleriano.

Linee e tubi di flussi:

Nello schema euleriano si definisce "linea di flusso" una linea che ha per tangente in ogni punto la velocità di un fluido. Si definisce invece "tubo di flusso" l'insieme delle linee di flusso che sono tangenti a una linea geometrica chiusa. Le particelle del fluido non attraversano la superficie del tubo di flusso.



Siano A_1 e A_2 due sezioni di qualunque di un tubo di flusso, la massa di fluido che passa attraverso la sezione A_1 in un generico intervallo di tempo Δt è ricavabile dalla relazione:

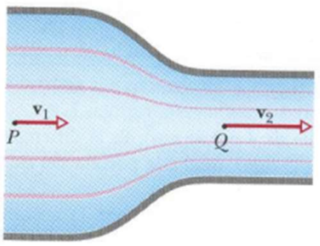
$$\Delta m_1 = \delta_1 A_1 v_1 \Delta t$$

La massa di fluido Δm_1 si definisce "flusso di massa" o "portata di massa attraverso A_1".

Se tra C_1 e C_2 non c'è immissione o sottrazione di fluido allora il flusso di massa passante per C_1 deve essere uguale a quello passante per C_2.

Per la legge di conservazione della massa possiamo poi affermare che: $\delta A v = costante$

Lungo tutto un tubo di flusso, la portata di massa è costante. In oltre, se la densità è costante il fluido è incomprimibile e per questo sarà costante anche la "portata volumica", grandezza definita come "il volume di fluido che attraversa una sezione di un tubo di flusso in una unità di tempo.



Preso il tubo di flusso mostrato a sinistra si ha:

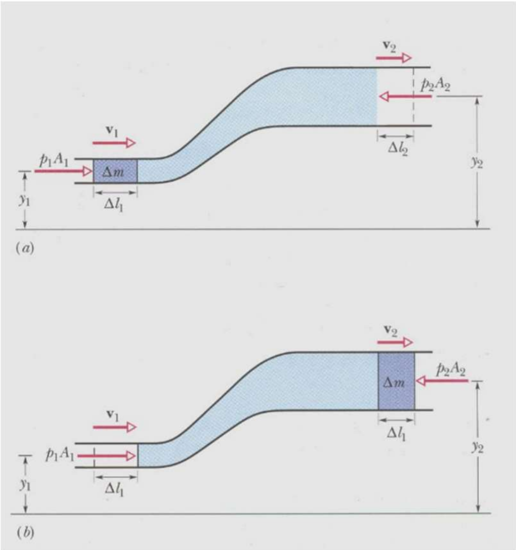
$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

Questa relazione indica che dove la sezione del tubo è minore la velocità del fluido è maggiore.

Come conseguenza si ha che la pressione del fluido nella zona a sezione minore è minore della pressione nella zona a sezione maggiore.

Il teorema di Bernoulli



Consideriamo un fluido non viscoso e incomprimibile, di densità δ in moto stazionario (le grandezze del moto non variano nel tempo) in una conduttura (che coincide con il tubo di flusso) in presenza della forza-peso. Sotto l'azione delle forze che agiscono sul fluido, il generico elemento di flusso di massa Δm e volume ΔV, che all'istante "t" si trova alla quota y_2. Per il teorema del lavoro si ha: L=Δk. Calcoliamo allora il lavoro delle forze sull'elemento di fluido.

$$L = P_1 A_1 \Delta l_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 - \Delta m g (y_2 - y_1)$$

, essendo: $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2 = \Delta V = \frac{\Delta m}{\delta}$

si ottiene allora:

$$L = P_1 \cdot \left(\frac{\Delta m}{\delta}\right) - P_2 \cdot \left(\frac{\Delta m}{\delta}\right) - \Delta m g (y_2 - y_1)$$

e, $\Delta k = \frac{1}{2} \Delta m {v_2}^2 - \frac{1}{2} \Delta m {v_1}^2$

Per il teorema del lavoro poi;

$$P_1 \left(\frac{\Delta m}{\delta}\right) - P_2 \left(\frac{\Delta m}{\delta}\right) - \Delta m g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \Delta m {v_2}^2 - \frac{1}{2} \Delta m {v_1}^2$$

$$P_1 + \delta g y_1 + \frac{1}{2} \delta {v_1}^2 = P_2 + \delta g y_2 + \frac{1}{2} \delta {v_2}^2$$

Poiché A_1 e A_2 sono due sezioni qualunque del tubo di flusso possiamo dire che lungo tutto il tubo si ha:

$$P + \delta g y + \frac{1}{2} \delta v^2 = costante$$

Questa è l'equazione di Bernoulli.
Vi è poi un'importante conseguenza a tale legge. Preso un liquido che scorre in una condotta orizzontale la cui sezione è variabile si ha che y_1 è uguale a y_2 e dal precedente teorema; possiamo affermare che:

$$P_1 + \frac{1}{2} \delta (v_1)^2 = P_2 + \frac{1}{2} \delta (v_2)^2$$

e conservandosi la portata volumica, accade anche che: $v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$

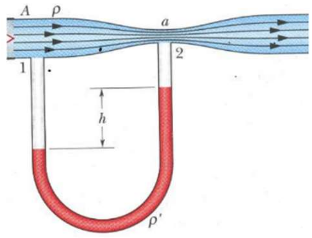
Applicando le precedenti relazioni si ricava che:

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \delta (v_1)^2 \cdot \left(1 - \frac{{A_1}^2}{{A_2}^2}\right)$$

Ne consegue che se la sezione 1 è maggiore della sezione 2 allora anche la prima pressione è maggiore della seconda e viceversa. Nel caso statico dell'equazione di Bernoulli si ottiene invece la già enunciata legge di Stevino.

Applicazioni dell'equazione di Bernoulli:

1) <u>Il dispositivo di venturi:</u>



Tale dispositivo serve per misurare la velocità di un fluido all'interno di un condotto. È costituito da un tubo a U contenente un fluido di densità δ' che ha un estremo collegato a una strozzatura di sezione "a" di un altro tubo e il secondo estremo collegato alla parte dello stesso tubo di sezione "A" uguale a quella del condotto (come si vede in figura).
Dal teorema di Bernoulli e dalla conservazione della portata si ha che:

$$P_A + \frac{1}{2}\delta(v_A)^2 = P_a + \frac{1}{2}\delta(v_a)^2$$

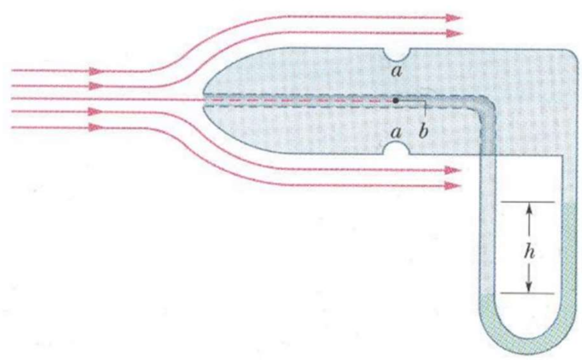
$$P_A - P_a = \delta' gh = \frac{1}{2}\delta({v_a}^2 - {v_A}^2)$$

$$v_a \cdot a = v_A \cdot A \quad => \quad v_a = \frac{v_A \cdot A}{a}$$

$$v_A = a\sqrt{\frac{2\delta' gh}{\delta(A^2 - a^2)}}$$

La velocità del fluido nel tubo si calcola quindi dal dislivello h del liquido contenuto nel tubo a "U".

2) <u>Il tubo di Pitot:</u>



Il tubo di Pitot è invece uno strumento utilizzato in campo aeronautico per misurare la velocità di un gas. È costituito da un tubo a "U" contenente in liquido di densità δ' , che possiede un estremo connesso all'apertura "a" e che quindi si trova alla pressione del fluido che scorre nella condotta. L'altro estremo è connesso al gas che penetra nel dispositivo e del quale si vuole calcolare la velocità. Tale gas entra in "b" ed è posto costantemente alla pressione P_b .
Il dislivello "h" tra la pressione statica in b e quella in a è legata alla velocità del gas dal teorema di Bernoulli:

$$P_a + \frac{1}{2}\delta {v_a}^2 = P_b$$

$$P_b - P_a = \frac{1}{2}\delta {v_a}^2$$

, se

$$P_b - P_a = \delta' gh$$

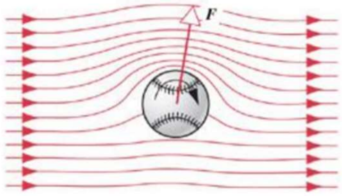
$$=> \; P_b - P_a = \frac{1}{2}\delta gh = \frac{1}{2}\delta {v_a}^2$$

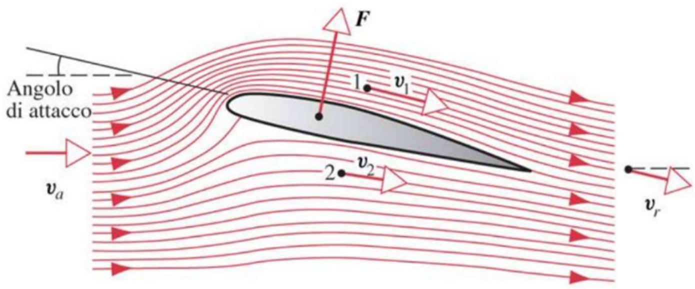
da cui posso ricavare:

$$v_a = \sqrt{\frac{2gh\delta'}{\delta}}$$

La spinta dinamica (o portanza)

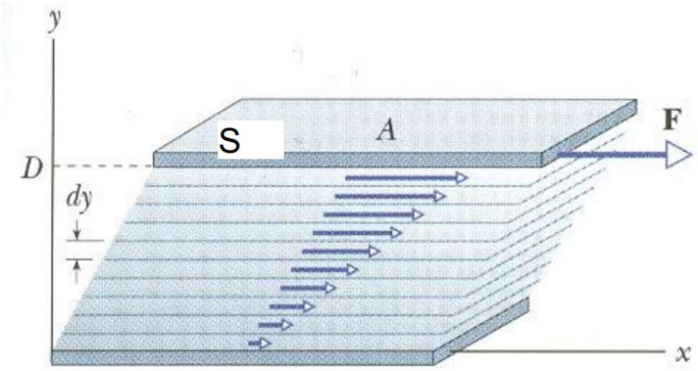
L'ultimo concetto che va introdotto parlando dei fluidi è la spinta dinamica. Se si imprime a una palla in movimento nell'aria una opportuna rotazione, questa riceve una spinta verso l'alto. Se la sfera viene quindi messa in rotazione, l'aria nelle vicinanze viene trascinata dal suo moto. La velocità dell'aria sopra alla sfera è la somma della velocità di traslazione e di quella dovuta alla rotazione. Per l'aria sottostante è invece la differenza. La sfera è quindi soggetta a una "spinta dinamica" verso l'alto (la quale può essere considerata come una forza, e quindi come una grandezza vettoriale).
Un analoga situazione si crea sulle ali di un aeroplano in volo come illustrato nella seconda immagine sotto proposta.





Il coefficiente di viscosità

Se si parla di fluidi reali, bisogna introdurre una nuova grandezza: la "viscosità". Tale grandezza è per i fluidi l'analogo dell'attrito nel moto dei solidi e deriva dalle forze che si esplicano tra le molecole del fluido.
Si può mettere in evidenza e misurare osservando quello che succede quando una tavola galleggiante sul fluido è soggetta ad una forza orizzontale. Gli strati di fluido sottostanti alla tavola vengono trasportati per effetto della viscosità con velocità decrescenti con la profondità. Lo strato a contatto con il fondo è fermo, quello a contatto con la tavola si muove invece alla velocità della tavola, come illustrato nell'immagine.



Se si varia F in modo che la velocità della tavola sia costante, si può dire che la somma delle forze applicate orizzontalmente alla tavola è nulla. Facendo questo esperimento, si trova inoltre per le velocità degli strati di fluido sottostanti la relazione:

$$v(y + \Delta y) - v(y) = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{F}{S} \cdot \Delta y$$

; in cui "y" è la distanza dal fondo e η è definito "coefficiente di viscosità" la cui unità di misura è $[Pa \cdot s]$
Dalla precedente relazione si ha per una variazione infinitesima dy che:

$$dv = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{F}{S}\, dy$$

e quindi integrando tra la quota 0 dove la velocità del fluido è 0 e una generica quota h dove la velocità del fluido vale v';

$$\int_0^{v'} dv = \int_0^h \frac{1}{\eta} \cdot \frac{F}{S}\, dy$$

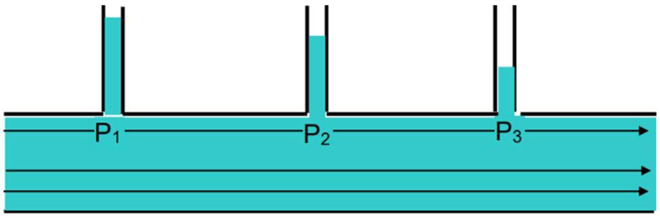
da cui possiamo ottenere.

- $v' = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{F}{S} \cdot h$
- $\eta = \frac{F \cdot h}{S \cdot v'}$

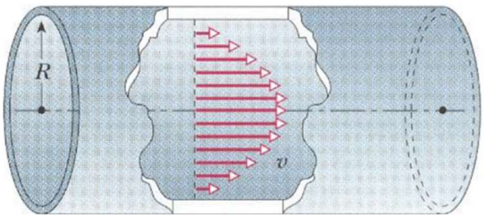
Ricorda, la viscosità di un liquido dissipa energia quando questo è in movimento.
Nella tabella che segue è riportata la viscosità di alcuni fluidi.

Fluido (Temperatura in °C)	Coefficiente di viscosità ($x10^{-3}$)
Acqua (0)	1,8
Acqua (20)	1,0
Acqua (100)	0,3
Sangue intero (37)	circa 4
Plasma sanguineo (37)	circa 1,5
Alcol etilico (20)	1,2
Olio per motore (30)	200
Glicerina (20)	1500
Aria (20)	0,018
Idrogeno (0)	0,009
Vapore acqueo (100)	0,013

Se il moto è poi di tipo laminare stazionario lungo un condotto cilindrico, a causa della viscosità la pressione decresce lungo la direzione del moto. Tale caduta di pressione è conseguenza della viscosità,



poiché per far avanzare il fluido è necessaria una forza che bilanci la resistenza dovuta proprio alla viscosità.
Nel disegno proposto a sinistra ad esempio, se consideriamo il moto del liquido tra la posizione 1 e la posizione 3, la differenza di pressione $P_1 - P_3$ genera tale forza.
Possiamo quindi, vista questa affermazione, dire che *"in un tubo cilindrico, a causa della viscosità, la velocità del fluido è massima al centro del cilindro e nulla a contatto con la superficie del cilindro stesso"*.
Se il tubo ha una sezione molto piccola (capillare), l'andamento delle velocità al variare della distanza dall'asse del cilindro è del tipo rappresentato nella figura di destra.
Gli strati cilindrici di fluido compresi tra la distanza r e r+dr dall'asse hanno differenti velocità al variare di r tra 0 e R.
Analiticamente si ha l'andamento:



$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta l} \cdot (R^2 - r^2)$$

Se si considera "S" la sezione del capillare, dS l'area della corona circolare di raggio compreso tra r e r+dr, utilizzando tale formula possiamo ricavare la portata volumica "Q" del fluido all'interno del capillare come:

$$Q = \int_0^R v(r)\, 2\pi r\, dr = \frac{\Delta P}{4\eta l} 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) r\, dr = \frac{\pi \Delta P}{8 l \eta} R^4$$

La legge di Poiseuille

I viscosimetri a flusso capillare si basano su tale legge. Con essi si ottiene il coefficiente di viscosità misurando la portata del capillare e applicando poi la formula di Poiseuille, la quale dice:

$$\eta = \frac{\pi \Delta P}{8 l Q} R^4$$

LA TERMODINAMICA

Introduzione

La termodinamica studia i processi che coinvolgono il trasferimento di energia per lo più sotto forma di calore.
Empiricamente osserviamo che mettendo a contatto due corpi che si trovano a temperature differenti, dopo un certo lasso di tempo, la temperatura dei due corpi diventa la stessa. Possiamo dire che il sistema formato dai due corpi raggiunge l' "equilibrio termico". In fisica interpretiamo tale fenomeno come un trasferimento di calore dal corpo più caldo al corpo più freddo. Il modello oggi più accreditato per lo studio dei fenomeni termodinamici nacque nel XIX secolo quando si assunse come verità il fatto che il calore è una forma di energia che passa dai corpi a temperatura maggiore a quelli a temperatura minore.
Come vedremo in seguito, la termodinamica classica non tiene conto della costituzione e della dinamica microscopica della materia ma si basa su leggi sperimentali che consentono di fare previsioni su aspetti generali del comportamento dei sistemi presi in esame.
Per tale motivo è necessario prima di addentrarsi in questa branca della fisica conoscere alcune caratteristiche sperimentali dei sistemi (es: equazioni di stato, calori specifici, calori latenti di trasformazione di fasi etc…).
Fatta questa premessa bisogna però dire che oggi, grazie alla "meccanica statistica" è possibile spiegare molte delle leggi della termodinamica classica.
Iniziamo ora fornendo qualche definizione.

Definiamo "*sistema termodinamico*" (ST) una parte del mondo circostante di cui osserviamo le proprietà fisiche macroscopiche che lo caratterizzano e le loro variazioni. Un ST può in generale ricevere e cedere calore dall'ambiente esterno, compiere e subire lavoro dall'ambiente esterno.
Un ST è poi costituito da un grande numero di sottosistemi microscopici (atomi e molecole).
A descrivere un ST sono le così dette "*variabili termodinamiche*" o "*parametri di stato*". Tali variabili sono le classiche grandezze della fisica quali temperatura, pressione, volume, densità, concentrazione molare etc…
Se un ST non scambia materia con l'esterno allora tale sistema è definito "*chiuso*" e in tal caso l'unica cosa che viene scambiata con l'esterno è l'energia sotto forma di calore o di lavoro.
Se non viene scambiata neppure l'energia (questa è più che altro una situazione teorica) il ST è definito "*isolato*".
Il pianeta Terra è ad esempio con buona approssimazione un sistema chiuso ma non isolato.
Per quanto riguarda lo stato termodinamico di un ST, esso si dice "*stazionario*" o "*di equilibrio*" se i suoi parametri (prima presentati) sono costanti nel tempo, vi deve essere perciò equilibrio meccanico (sommatoria delle forze interne ed esterne pari a zero), equilibrio termico (tutte le parti del sistema devono essere alla stessa temperatura) ed infine deve esservi l'equilibrio chimico (nessuna reazione chimica deve avvenire all'interno del sistema in quanto queste utilizzano o cedono energia).
Lo stato di un sistema può però cambiare e tali "*cambiamenti di stato*" sono nella maggior parte delle volte causati da una interazione sistema-ambiente esterno.
Le "*trasformazioni termodinamiche*" possono avere caratteristiche differenti. Esse possono essere "*rapide*" (se lo stato iniziale e quello finale sono in equilibrio e la trasformazione li connette), "*quasi statiche*" (se il sistema passa da uno stato iniziale in equilibrio a uno stato finale anch'esso in equilibrio attraversando una moltitudine di stati di equilibrio), "*cicliche*" (se lo stato iniziale e quello finale coincidono) oppure "*reversibili*" (se il sistema e l'ambiente circostante possono essere ricondotti alle rispettive condizioni iniziali).
Le trasformazioni reali sono irreversibili poiché non sono quasi mai statiche e poiché implicano effetti dissipativi.
Una trasformazione si dice poi "spontanea" se un sistema isolato, lontano dall'equilibrio compie senza intervento esterno una trasformazione che lo porta al raggiungimento dello stato di equilibrio.

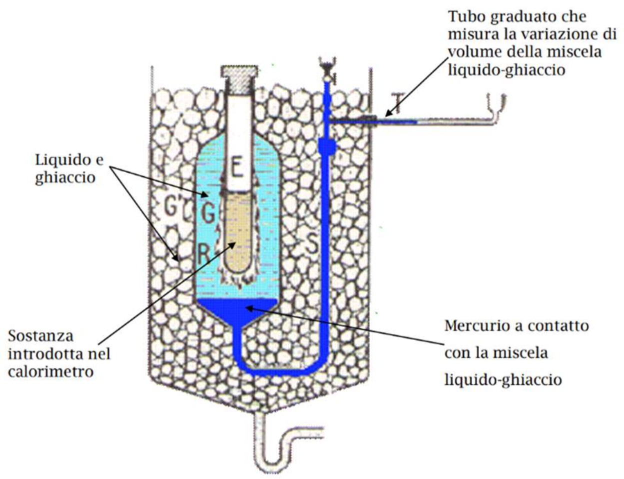
Bisogna infine dare la definizione "fisica" di alcune grandezze.

La Temperatura e il Calore:

La Temperatura è una grandezza fisica che rende quantitativo il criterio con cui sensorialmente si distingue il diverso stato termico in cui si trovano i corpi. Per arrivare a una definizione oggettiva della temperatura ci si basa sulle seguenti considerazioni:

- Alcune proprietà dei corpi cambiano al variare del loro stato termico (es: dilatazione termica)
- Se due corpi, inizialmente in stati termici differenti vengono messi a contatto, dopo un certo lasso di tempo finiscono per trovarsi nello stesso stato termico. Tale affermazione è definita "*principio zero della termodinamica*". Come già detto nella parte introduttiva, il sistema formato dai due corpi tende all'equilibrio termico. Quando tale equilibrio viene raggiunto si dice che i corpi che fanno parte del ST hanno la stessa temperatura.
- Sulla base delle precedenti affermazioni è possibile costruire uno strumento chiamato "termoscopio al mercurio" che misura il differente stato termico dei corpi. Tale strumento si basa sulla dilatazione termica del mercurio.
- Attraverso il termoscopio al mercurio ci si può rendere conto di come i passaggi di stati della materia (solidificazione, fusione, vaporizzazione, condensazione, sublimazione e brinamento) di uno stesso corpo a pressione costante avvengono sempre alla stessa temperatura.
- Si sono attribuiti convenzionali valori di temperatura a due cambiamenti di stato e l'intervallo tra questi è stato diviso in un fissato numero di parti uguali.
- Le unità di misura utilizzate per la Temperatura sono i gradi: Celsius, Kelvin, Fahrenheit.

La seconda grandezza che già abbiamo accennato ma della quale bisogna dilungarsi ancora è il "*calore*". Per spiegare questa grandezza è possibile utilizzare un "calorimetro di Bunsen", il cui schema è riportato a destra. Se si inserisce nel calorimetro un corpo a temperatura differente da quella della miscela acqua-ghiaccio (ad esempio maggiore), si osserva che parte del ghiaccio si scioglie e il suo volume cambia. La differenza di volume dipende dal calore cioè dall'energia scambiata dal corpo più caldo al ghiaccio che si scioglierà. Possiamo così definire l'unità di misura del calore: la "*caloria*" [cal]. *Una caloria è data dalla variazione di volume che si misura in corrispondenza alla quantità di calore che viene sottratta a 1 grammo di acqua quando la sua temperatura passa da 15,5 a 14,5 °C.*



Poiché il calore è una forma di energia, bisogna ricordare che 1 caloria equivale a 1,186 J.
In generale per il calore scambiato tra il ST e l'ambiente si usa la seguente convenzione: "*il calore è positivo se ricevuto dal sistema ed è negativo se è ceduto dal sistema*".
Si definisce invece "*calore latente associato a un cambiamento di stato*" di una sostanza la quantità di calore trasferita dall'unità di massa della sostanza all'ambiente esterno durante il cambiamento di stato. Se definiamo λ il calore latente e data una massa "m" di sostanza allora possiamo affermare che il calore "Q" è ricavabile dalla relazione:

$$Q = \lambda m$$

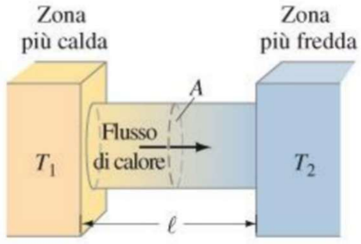
Un'altra grandezza da definire è il "calore specifico", definito come il calore necessario a far aumentare di 1 °C un chilogrammo di una determinata sostanza.
Infine bisogna definire la "capacità termica", come il prodotto tra il calore specifico "c" e la massa di sostanza: $C = cm$

La trasmissione del calore

Il calore, tra corpo e corpo, può essere trasmesso in tre differenti modi, per:

1) Conduzione:

Tale trasferimento si ha quando due o più corpi sono direttamente a contatto. La rapidità di trasmissione del calore per conduzione può essere misurata mettendo a contatto il corpo con due sorgenti di calore (corpi la cui temperatura non varia anche ricevendo o cedendo calore) a temperature differenti, come schematizzato qui di seguito.



Un corpo di forma cilindrica è a contatto con le due sorgenti di calore alle temperature T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$).

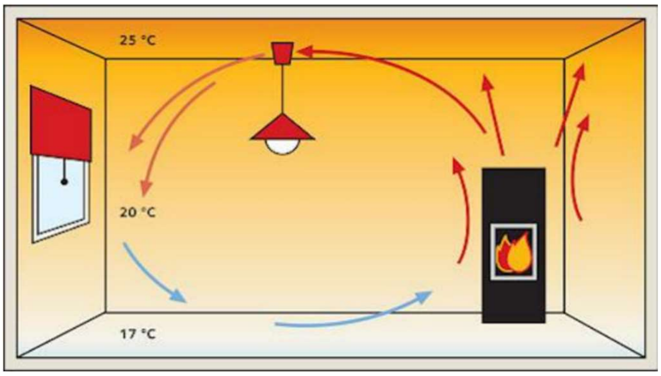
Il flusso di calore per conduzione (il calore che passa cioè attraverso una sezione del cilindro di altezza h e area di base A nell'untità di tempo Δt) è dato dalla formula:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA \cdot \frac{T_1 - T_2}{h}$$

"k" è una costante detta "*conduttività termica*" che dipende dal materiale di cui è fatto il cilindro. I materiali come i metalli hanno una grande conduttività termica e per questo sono buoni "conduttori termici". A differenza dei primi, materiali come lana, fibra di vetro o aria sono "isolanti termici".

2) Convezione:

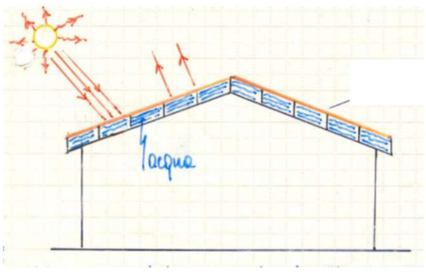
La Convezione è quel meccanismo di trasmissione del calore che avviene con il movimento di un fluido da un luogo a un altro. La Convezione può essere naturale o forzata. Un esempio di convezione forzata si ha ad esempio quando l'aria scaldata da una stufa viene spinta da una ventola in una stanza. Un esempio di convezione naturale è invece quello dell'aria riscaldata da un termosifone che in modo naturale, per differenza di densità, sale verso l'alto.



3) Irraggiamento:

L'irraggiamento è invece il meccanismo di trasmissione del calore che avviene senza contatto e senza che sia necessaria la presenza di fluidi tra i corpi. Tale meccanismo di scambio del calore può quindi avvenire anche nel vuoto. L'esempio più lampante è il calore del Sole che si trasmette nello Spazio. L'irraggiamento consiste nell'emissione da parte dei corpi di onde elettromagnetiche (guarda "*appunti di chimica analitica*") di lunghezza d'onda legata alla temperatura dei corpi stessi. Poiché le onde elettromagnetiche trasportano energia, tale energia può essere in un secondo momento espressa sotto forma di calore.

Vengono chiamati "materiali selettivi" i materiali che risultano trasparenti solo a radiazioni di certe frequenze, tali materiali vengono utilizzati ad esempio nell' "effetto serra", con il quale è possibile mantenere la temperatura interna di alcuni locali superiore a quella esterna. Con l' "effetto serra inverso" invece, gli ambienti si raffreddano. I materiali selettivi sono utilizzati anche nel riscaldamento dell'acqua utilizzando l'energia solare. La radiazione solare passa attraverso il materiale selettivo e viene assorbita dall'acqua che si riscalda.



La grandezza "Lavoro" in termodinamica:

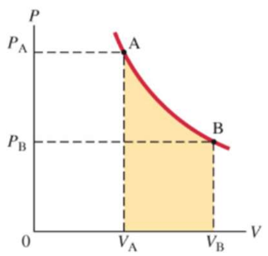
Il lavoro è un'altra grandezza importante nello studio dei processi termodinamici.
Se prendiamo il caso di trasformazioni quasi statiche, il sistema passa da uno stato di equilibrio A ad uno stato di equilibrio B molto lentamente, attraverso una serie di successivi stati di equilibrio. La lenta espansione di un gas in un contenitore rigido, cilindrico, di sezione S e dotato di un pistone, può essere preso come esempio per trasformazioni di questo tipo. Supponiamo che una serie di piccoli pesi siano appoggiati sul pistone e vengano rimossi molto lentamente uno alla volta. Facendo ciò, la pressione del gas è sempre uguale a quella dell'ambiente esterno durante tutta la trasformazione. Il lavoro che fa il gas per sollevare il pistone di una misura "dh" è il seguente:

$$dL = F \cdot dh = P \cdot S \cdot dh = PdV \quad ; con\ dV\ la\ variazione\ di\ volume$$

Il lavoro fatto dal gas nel passaggio di stato A allo stato B, è dati dalla somma di tutti gli elementi dL; ovvero:

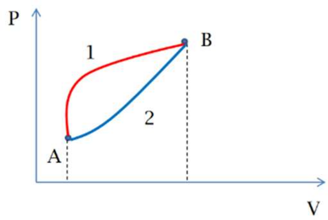
$$L = (dL)_1 + \cdots + (dL)_n = \int_A^B dL = \int_{V_A}^{V_B} P\ dV$$

La relazione ottenuta è valida per qualunque sistema il cui volume varia in maniera quasi-statica!
Se il ST è caratterizzato dai parametri di stato P e V, gli stati di equilibrio sono rappresentabili con punti nel "Piano di Clapeyron" (P,V) e le trasformazioni quasi-statiche si possono rappresentare con linee nello stesso piano.



"Il lavoro compiuto da un sistema termodinamico in una trasformazione quasi-statica è rappresentato nel piano di Clapeyron dall'area sottesa alla linea che rappresenta la trasformazione".

Come si vede invece dal grafico di destra, l'area sottesa alla trasformazione 1 e quella sottesa alla trasformazione 2 sono diverse, possiamo però dire che il lavoro compiuto dal sistema dipende dalla trasformazione seguita per andare dallo stato A allo stato B.

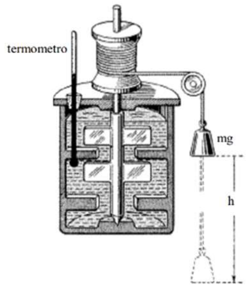


Se prendiamo invece il caso di trasformazioni non quasi statiche, il sistema passa dallo stato iniziale A di equilibrio a quello finale B in maniera molto rapida e gli stati intermedi non sono di equilibrio. Se si ha ad esempio la rapida espansione di un gas, il sistema lavora, durante tutta la trasformazione, in maniera contraria a una pressione costante (pressione atmosferica) e si ha la relazione:

$$L = \int_A^B P_{ext}\ dV = P_{ext} \int_A^B dV = P_{ext} \cdot (V_B - V_A)$$

ATTENZIONE!
Le trasformazioni non quasi-statiche non sono rappresentabili nel piano di Clapeyron poiché pressione e volume non vengono definiti durante la trasformazione.

IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA



Alla base del primo principio della termodinamica c'è la dimostrazione sperimentale (fatta per la prima volta da Joule) dell'equivalenza tra calore e lavoro. Quello di seguito descritto è l'esperimento di Joule. Preso un contenitore impermeabile al calore riempito d'acqua, una massa "m" è legata a un filo avvolto su un cilindro che può ruotare intorno ad un asse verticale a cui sono saldate alcune palette. Quando il peso scende di un tratto "h", la forza peso fa un lavoro (L = mgh) e mette in rotazione le palette immerse nell'acqua. In conseguenza a ciò un termometro rileva che vi è stato un aumento della temperatura dell'acqua. Poiché tale comportamento può essere giustificato solamente fornendo una determinata quantità di calore all'acqua, e poiché nell'esperimento non è stato descritto alcun scambio di calore con l'ambiente esterno, allora il lavoro prodotto dalla discesa del peso ha prodotto lo stesso effetto di un trasferimento di calore. Da questo esperimento è possibile affermare che:

"Una certa quantità di lavoro fatto su un sistema è sempre equivalente ad una precisa quantità di calore trasferito al sistema stesso".

Da questa legge possiamo affermare per prima cosa che il calore e il lavoro hanno le stesse dimensioni e per tale motivo possono essere espressi mediante l'utilizzo delle medesime unità di misura. Ne deduciamo in oltre che il calore è un trasferimento di energia tra corpi che si trovano a differenti temperature e che il lavoro è un trasferimento di energia da un corpo a un altro con mezzi meccanici.
Fatte queste premesse, per arrivare all'esposizione del primo principio della termodinamica, definiamo l' "*energia interna a un sistema termodinamico*" come la somma dell'energia di tutte le molecole che compongono un ST.
in particolare, per un gas perfetto (a bassa pressione) monoatomico, sia "n" il numero di moli di gas prese, l'energia interna dipende solamente dalla temperatura e da "n", secondo la relazione:

$$E_{int} = \frac{3}{2}nRT$$

Se il gas preso inn esame fosse poliatomico, l'energia sarebbe comunque dipendente solamente dalla temperatura! L'energia interna dei gas reali, dipende dalla temperatura ma anche dalla pressione o dal volume. Per i corpi solidi o liquidi invece l'energia interna contiene anche l'energia potenziale associata alle forze intermolecolari e avrebbe quindi una formula analitica molto più complessa.

Date queste definizioni, possiamo dire che a ogni stato di un ST è associabile un valore dell'energia interna che rimane invariato fino a quando il sistema non interagisce con l'ambiente esterno. Il primo principio della termodinamica esprime proprio questo legame tra la variazione dell'energia interna, il calore e il lavoro scambiati con l'ambiente durante una trasformazione termodinamica ed enuncia:

"La variazione di energia interna a un sistema chiuso è uguale alla quantità di energia sottratta o aggiunta mediante scambio di calore e di lavoro con l'ambiente esterno"

Matematicamente scriviamo questa relazione come:

$$E_{int} = Q - L$$

Per convenzione il calore è maggiore di zero quando questo è assorbito dal sistema, il lavoro è positivo quando è compiuto dal sistema e viceversa.
In conclusione bisogna osservare che l'energia interna dipende solamente dallo stato del sistema ed è una funzione termodinamica di stato e che le quantità di calore e di lavoro non sono caratteristiche intrinseche del ST ma dipendono dalle trasformazioni che esso compie.

Se poi un sistema termodinamico fosse in movimento allora possiederebbe anche un'energia cinetica ed eventualmente una energia potenziale. Il primo principio della termodinamica tiene conto anche di questa possibilità e per questo si generalizza come:

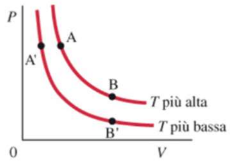
$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = Q - L$$

Di seguito tratteremo quasi sempre ST nei quali il valore dell'energia cinetica e di quella potenziale non varia nel tempo.

Applicazioni del primo principio della termodinamica

Trasformazioni isoterme di un gas perfetto:

Una certa quantità di gas perfetto è contenuto un cilindro dotato di un pistone mobile, il contenitore è collegato a un termostato che, scambiando calore con il gas, mantiene quest'ultimo a una temperatura costante. L'equazione di stato dei gas perfetti ci mostra che essendo la temperatura costante allora il prodotto pressione per volume deve essere costante anch'esso. Ne deriva che a temperatura costante le trasformazioni isoterme quasi-statiche del gas perfetto sul piano di Clapeyron sono dei rami di iperbole rappresentati come nel grafico riportato di seguito.



Se la trasformazione è isoterma, l'energia interna del gas rimane costante e dal primo principio della termodinamica si ha:

$$Q - L = \Delta E_{int} = 0$$
$$Q = L$$

Se ad esempio in una trasformazione isoterma da uno stato A ad uno stato B, una certa quantità di gas riceve una certa quantità di calore, il sistema si espande e compie un lavoro pari alla quantità di calore ricevuto, ovvero:

$$Q = L = \int_A^B P\ dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT\ dV}{V}$$

Essendo T costante:

$$Q = L = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Trasformazioni Adiabatiche, isobare e isocore

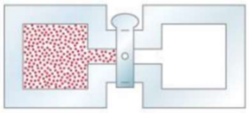
Una trasformazione si dice Adiabatica quando non vi è scambio di calore tra il sistema termodinamico e l'ambiente esterno. Trasformazioni di questo tipo si possono avere quando il sistema è isolato termicamente o quando la trasformazione è tanto rapida che il calore non possiede il tempo sufficiente per entrare o uscire dal sistema. Ciò avviene ad esempio in un motore endotermico.
Date queste condizioni possiamo facilmente capire che il calore in queste trasformazioni vada imposto uguale a zero e perciò, dal primo principio otteniamo:

$$-L = \Delta E_{int}$$

Se il sistema compie un lavoro positivo la sua energia interna diminuisce, se il lavoro compiuto è invece negativo la sua energia interna aumenta.

Le trasformazioni isobare sono quelle che avvengono a pressione costante. Le isocore sono invece quelle che avvengono a volume costante.

L'espansione libera di un gas perfetto



Un gas è inizialmente contenuto in una sola parte del contenitore isolante; nell'altra parte è stato fatto il vuoto. Quando si apre la valvola, il gas si espande rapidamente e nello stato finale occupa il volume di tutto il recipiente. Valutiamo ora quanto vale la temperatura del gas. Nella trasformazione il valore del lavoro e del calore è pari a zero; il primo perché il gas si espande rapidamente nel vuoto e il secondo perché abbiamo supposto essere il contenitore isolante. Dal primo principio della termodinamica e dal fatto che l'energia interna di un gas perfetto dipende solamente dalla temperatura, possiamo dire che:

$$\Delta E_{int} = \frac{3}{2} nR\Delta T = 0$$

$$\Delta T = 0$$

Abbiamo capito allora che nell'espansione libera di un gas perfetto non vi è variazione di temperatura del gas.

I calori specifici

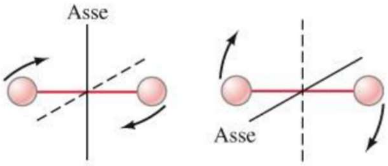
Ricordiamo che il calore specifico di una sostanza è la quantità di calore necessaria ad innalzare di un grado centigrado la temperatura di un chilogrammo di quella sostanza. Per i gas bisogna però ricordare che tale grandezza dipende anche dal tipo di trasformazione tenendo in considerazione quindi se a rimanere costante è il volume o la pressione.
Per le sostanze gassose si parla quindi di:

- calore specifico a volume costante (c_v)
- calore specifico a pressione costante (c_p)
- calore specifico molare a volume costante (C_v)
- calore specifico molare a pressione costante (C_P)

Matematicamente, sia M la massa di una mole di gas, sono valide le relazioni:

$$\begin{cases} C_V = Mc_v \\ C_P = Mc_P \end{cases}$$

In generale bisogna fare due osservazioni. La prima è che i valori dei calori specifici molari sono approssimativamente uguali per i gas che possiedono lo stesso numero di atomi per molecola e la seconda è che il prodotto tra i calori specifici molari di un gas è di circa 2 calorie su moli kelvin per tutti i gas.



In questo momento stiamo considerando le molecole di gas come punti materiali. Le stiamo quindi considerando come molecole monoatomiche possedenti tre gradi di libertà ed energia solamente traslazionale. Se si considerano però molecole poliatomiche, i calori molari aumentano all'aumentare del numero di atomi che compongono le molecole del gas. Tale fenomeno avviene a causa dell'aumentare del numero di gradi di libertà della molecola, questa infatti oltre a traslare può anche ruotare su due assi distinti, portando a cinque il numero dei gradi di libertà.
Da qui nasce il "*principio di equipartizione dell'energia*" secondo il quale "l'energia posseduta dalle molecole dei gas è suddivisa in modo uguale tra i gradi di libertà delle molecole stesse".

Ogni grado di libertà contribuisce mediamente all'energia di ogni molecola con un valore pari a $0{,}5K_bT$, e dà quindi un contributo medio all'energia interna di un gas composto da N molecole esprimibile dalla relazione:

$$N\left(\frac{1}{2}K_bT\right) = N\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{N_A}T\right) = \frac{N}{N_A}\cdot\frac{1}{2}RT = \frac{1}{2}nRT$$

Ne consegue che l'energia interna di un gas perfetto monoatomico (tre gradi di libertà) è:

$$E_{int} = 3\cdot\left(\frac{1}{2}nRT\right) = \frac{3}{2}nRT$$

Essendo l'energia intera di un gas perfetto pari a:

$$E_{int} = nC_VT$$

allora, il calore molare a volume costante di un gas perfetto monoatomico è dato dalla relazione:

$$C_V = \frac{3}{2}R$$

Se il gas perfetto fosse poliatomico, seguendo lo stesso ragionamento si ottiene:

$$\begin{cases} E_{int} = \dfrac{5}{2}nRT \\ C_V = \dfrac{5}{2}R \end{cases}$$

Da notare è che il principio di equipartizione dell'energia è valido anche per i corpi solidi. A temperature sufficientemente elevate ogni atomo del solido possiede sei gradi di libertà: tre per l'energia potenziale e tre per quella cinetica.

L'espansione adiabatica di un gas perfetto

Come abbiamo visto quando un gas perfetto compie una trasformazione adiabatica (senza scambio di calore) si raffredda se si espande e si riscalda se si comprime. Proviamo ora a ricavare la forma analitica della curva che rappresenta la trasformazione adiabatica quasi-statica nel piano di Clapeyron. Dal primo principio della termodinamica si ha per una trasformazione adiabatica infinitesima:

$$dE_{int} = dQ - dL = 0 - PdV = -PdV$$

Poiché l'energia interna di un gas perfetto dipende solamente dalla temperatura la relazione può anche essere scritta come:

$$dE_{int} = nC_VdT$$

Dalle due precedenti relazioni si ricava:

$$nC_VdT + PdV = 0$$

e, differenziando l'equazione di stato dei gas perfetti si ottiene in oltre:

$$P\,dV + V\,dP = nR\,dT$$

$$=> dT = \frac{P\,dV + V\,dP}{nR}$$

Sostituendo "dT" alla relazione del punto precedente si ottiene:

$$nC_v = \frac{P\ dV + V\ dP}{nR} + PdV = 0$$

$$nC_V PdV + nC_V VdP + nRPdV = 0$$

$$(C_V + R)P\ dV + C_V\ dP = 0$$

poiché:

$$C_P - C_V = R$$

la precedente relazione può essere scritta come:

$$C_P P\ dV + C_v VdP = 0$$

$$\frac{C_P}{C_V} P\ dV + VdP = 0$$

se chiamiamo γ il rapporto tra C_P e C_v allora:

$$\gamma P\ dV + VdP = 0$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

integrando:

$$\int \frac{dP}{P} + \gamma \int \frac{dV}{V} = 0$$

che ha per soluzione:

$$\ln(P) + \gamma \ln(V) = costante$$

infine, esponenziando i membri, si ottiene la relazione analitica tra pressione e volume del gas perfetto che compie una trasformazione adiabatica quasi-statica:

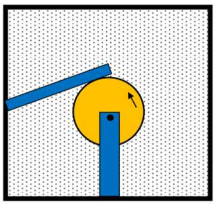
$$PV^{\gamma} = costante$$

IL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

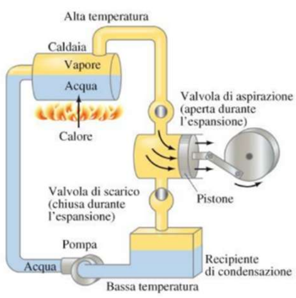
Come abbiamo visto, il primo principio della termodinamica è una formulazione generale della conservazione dell'energia che deve essere soddisfatto in ogni trasformazione. Tuttavia esistono trasformazioni che pur conservando l'energia non avvengono spontaneamente in natura, esempi sono il calore che fluisce da un corpo a un altro con temperatura più elevata (mentre il contrario accade) oggetti che sono rotti non si ricompongono mentre siamo soliti pensare ad oggetti interi che ad esempio cadendo si frantumano.
Il secondo principio della dinamica venne formulato nella seconda metà del XIX secolo proprio per spiegare la mancanza di reversibilità di molti fenomeni naturali. Tale principio stabilisce infatti quali trasformazioni sono possibili e quali non. Nell'esporre questo principio seguiremo lo sviluppo storico, inizieremo parlando delle formulazioni che derivano dai processi che coinvolgono calore e lavoro e poi introdurremo la formulazione più generale.
Alle prime formulazioni appartiene quella proposta da R.J.E. Clausius il quale affermò: "è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico scopo sia quello di far passare calore da un corpo ad un altro che si trova a temperatura superiore".
In un primo momento potrebbe sembrare che una macchina frigorifera violi questo principio tuttavia il trasferimento di calore non è l'unico risultato di quella trasformazione, infatti vi è anche il lavoro che viene fatto dall'esterno sulla macchina, in generale da un compressore che utilizza energia elettrica e quindi il secondo principio di Clausius non risulta violato.
La formulazione più generale, avvenuta cronologicamente dopo rispetto alla prima già proposta, arrivò grazie all'invenzione e allo studio delle proprietà delle macchine termiche.

Le macchine termiche

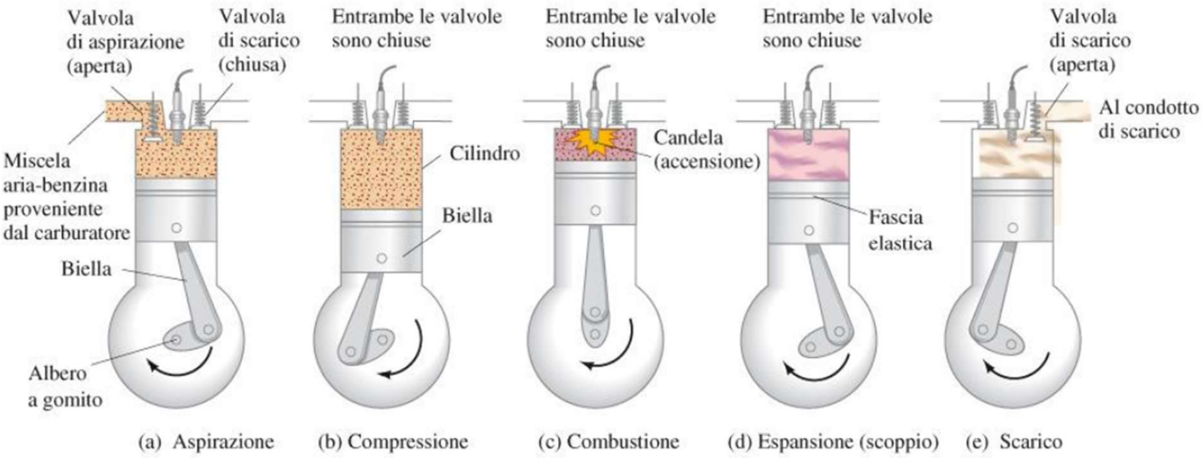
Le macchine termiche servono a trasformare calore in lavoro e lo studio della loro realizzazione portò alla conclusione che, mentre la trasformazione totale di lavoro in calore è possibile, la trasformazione inversa di calore in lavoro non lo è.



Guardando la figura di sinistra, possiamo immaginare che una barretta metallica freni per attrito un disco immerso in un gas a cui era stata precedentemente applicata una rotazione. Il tutto è contenuto in un contenitore impermeabile al calore. Dopo un certo periodo di tempo, empiricamente osserviamo che il disco smette di ruotare e che la temperatura interna del contenitore è aumentata rispetto all'inizio dell'esperimento.
Interpretiamo ciò che è accaduto dicendo che il lavoro fatto dalla forza di attrito per frenare il disco è stato trasformato in calore ceduto all'interno del contenitore. Il lavoro (proveniente da una sorgente meccanica) si è dunque "trasformato" in energia termica. Questo accade mentre il processo inverso in cui il gas si raffredda e rimette in moto il disco cedendogli energia cinetica (per mezzo di quella termica) non avviene!
Come abbiamo già detto infatti, la trasformazione di calore in lavoro è molto più difficile ed è possibile solamente mediante l'utilizzo delle macchine termiche, con le quali si cerca di ottimizzare la percentuale di calore che si trasforma in lavoro.
Il primo dispositivo di questo tipo che venne inventato (nel corso del '700) fu la macchina a vapore. Schematicamente possiamo dire che il calore prodotto dalla combustione del carbone, petrolio o gas fa evaporare l'acqua contenuta in una caldaia. Quando la valvola di aspirazione è aperta e quella di scarico è chiusa, il vapore ad alta temperatura si espande contro a un pistone e lo fa muovere. Successivamente, quando la valvola di aspirazione viene chiusa e quella di scarico aperta, il pistone torna nella sua posizione iniziale e il vapore è spinto nel recipiente di condensazione che si trova a temperatura ambiente. Dopo esser tornata allo stato liquido l'acqua viene riportata da una pompa



nella caldaia e il ciclo può ricominciare. Il movimento alternato del pistone viene trasformato in un movimento rotatorio che viene utilizzato per fare avanzare la macchina e in tal modo il calore è trasformato in lavoro.
Nella macchina a vapore a turbina il pistone è sostituito da una ruota con una serie di pale ed è messa in rotazione con un sistema simile a quello descritto precedentemente.
Un'altra macchina termica è il motore endotermico (a combustione interna) il cui funzionamento (per un tipo a quattro tempi) è ben descritto nell'immagine seguente.

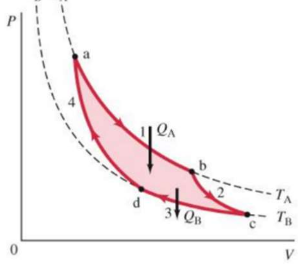


Definiamo "*efficienza*" o "*rendimento*" (e) di una macchina termica il rapporto tra il lavoro e la quantità di calore assorbito durante il ciclo. Più il valore del rendimento si avvicina a "1" e più efficiente è la macchina nel trasformare il calore in lavoro. Il valore $e = 1$ è un limite asintotico.
Applicando il primo principio della termodinamica (l'energia interna a un ciclo è pari a zero); il rendimento può essere calcolato come:

$$e = 1 - \frac{Q_B}{Q_A}$$

Gli esperimenti sulle macchine termiche hanno portato Kelvin e Planck a enunciare il secondo principio della termodinamica; il quale dice:

"È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia la trasformazione in lavoro del calore sottratto ad un'unica sorgente".



La macchina ideale di Carnot

All'inizio del 1800 Sadi Carnot, nel tentativo di trovare le trasformazioni termodinamiche che potessero ottimizzare il rendimento delle macchine termiche, inventò una macchina ideale che ebbe un ruolo fondamentale nello studio della termodinamica. Tale macchina compie un ciclo chiamato appunto: "Ciclo Carnot" il cui grafico è sotto riportato.
La macchina, come si evince anche dal grafico compie una trasformazione ciclica reversibile formata da due trasformazioni isoterme e due adiabatiche.
Se calcoliamo il rendimento per la macchina di Carnot otteniamo:

$$Q_A = L_{a \to b} = \int_a^b P\, dV = nRT_a \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} = nRT_A \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$$

Analogamente, per Q_b si ha:

$$Q_b = nRT_b \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right)$$

Dalle due precedenti relazioni si ottiene:

$$\frac{Q_b}{Q_a} = \frac{nRT_b \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right)}{nRT_A \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)}$$

Se si considerano le trasformazioni adiabatiche b-c e d-a, svolgendo i calcoli si ottiene invece:

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

Unendo poi le due precedenti relazioni si giunge ad affermare:

$$\frac{Q_b}{Q_a} = \frac{nRT_b \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right)}{nRT_A \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)} = \frac{T_b}{T_a}$$

Il rendimento della macchina di Carnot è quindi:

$$e = 1 - \frac{T_b}{T_a}$$

Bisogna ricordarsi che le temperature sono sempre espresse in gradi Kelvin.
Alla fine dei suoi studi, Carnot giunse alla stesa conclusione di Kelvin-Planck.

La funzione di stato "Entropia"

Nella seconda metà dell' '800 si arrivò a una formulazione più generale del secondo principio della termodinamica basato sul concetto di "*entropia*". Definiamo allora questa grandezza.
L'entropia è definibile come "*il grado di disordine di un sistema termodinamico*".
Matematicamente si definisce l'entropia Δs come:

$$\Delta s = \int_a^b \frac{dQ}{T}$$

se poi;

- la temperatura è costante

$$\Delta s = \frac{Q}{T}$$

- se la trasformazione è ciclica

$$\Delta s = 0$$

- se la trasformazione è adiabatica reversibile

$$\Delta s = 0$$

- se la trasformazione è isoterma reversibile

$$\Delta s = nR \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) = -nR \ln\left(\frac{P_b}{P_a}\right)$$

- se la trasformazione è isobara reversibile

$$\Delta s = nc_p \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) = nc_p \ln\left(\frac{T_b}{T_a}\right)$$

- se la trasformazione è isocora reversibile

$$\Delta s = nc_v \ln\left(\frac{T_b}{T_a}\right) = nc_v \ln\left(\frac{P_b}{P_a}\right)$$

L'entropia ci indica la direzione verso la quale i fenomeni termodinamici avvengono spontaneamente. In generale possiamo affermare che ad avvenire sono quelle trasformazioni che hanno una variazione di entropia positivo, cioè un aumento di tale grandezza. Fenomeni come la ricomposizione di un bicchiere frammentato o il flusso di calore da un corpo freddo a uno caldo non possono avvenire poiché si avrebbe una diminuzione del valore dell'entropia.

Altre funzioni di stato

Le funzioni termodinamiche permettono di imporre le condizioni derivanti dal primo e dal secondo principio della termodinamica in maniera sintetica, permettendo di trattare i problemi con minor difficoltà. Nel seguito presentiamo le caratteristiche principali delle seguenti funzioni di stato:

a) Energia interna (in parte già vista)
b) Entalpia
c) Funzione di Helmholtz
d) Energia libera di Gibbs

Energia interna

Consideriamo una trasformazione quasi statica di un sistema termodinamico. Lungo uno dei tanti elementi in cui la trasformazione può essere scomposta, per il primo principio, si può scrivere:

$$dE_{int} = dQ - dL = dQ - P\,dV$$

Se durante tutta la trasformazione il volume rimane costante; allora:

$$dQ = dE_{int}$$

ovvero:

$$\Delta Q = \Delta E_{int}$$

"il calore scambiato con l'ambiente durante la trasformazione isovolumica dallo stato A allo stato B è pari alla variazione di energia interna del sistema termodinamico".

Entalpia

Spesso le trasformazioni che si considerano, in particolare molte reazioni chimiche, avvengono a pressione costante, la pressione atmosferica. In questi casi il calcolo del calore scambiato durante la trasformazione è facilitato utilizzando la funzione entalpia così definita:

$$H = E_{int} + PV$$

"la quantità di calore scambiata con l'ambiente in una trasformazione a pressione costante è pari alla variazione di entalpia".

Funzione di Helmoltz

La Funzione di Helmoltz ci da informazioni sul lavoro ottenibile dalle trasformazioni dei sistemi termodinamici che scambiano calore con una sola sorgente a temperatura costante T come spesso accade quando lo scambio avviene con l'ambiente esterno. Per il secondo principio della termodinamica, la variazione di entropia del sistema tra lo stato iniziale A e finale B, soddisfa la relazione:

$$S(b) - S(a) \geq \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{dQ}{T}$$

, il segno di uguaglianza vale per le trasformazioni reversibili.
Se la temperatura T della sorgente è costante durante la trasformazione dalla relazione precedente si ha:

$$S(b) - S(a) \geq \frac{1}{T}\int_{a}^{b} dQ = \frac{Q}{T}$$

Da cui è possibile ricavare:

$$Q \leq T[S(b) - S(a)]$$

; e tenendo conto del primo principio possiamo anche affermare:

$$L \leq T[S(b) - S(a)] - [E_{int}(b) - E_{int}(a)]$$

Se si introduce la Funzione di Helmoltz come:

$$F = E_{int} - TS$$

e se T è anche la temperatura del sistema negli stati iniziale e finale del sistema (TA=TB=T), la relazione precedente si può scrivere come:

$$L \leq -\Delta F$$

Tale formula pone un limite superiore al lavoro che si può ottenere nella trasformazione dallo stato A a quello B quando la temperatura dell'ambiente esterno è costante e uguale alla temperatura del sistema negli stati iniziale e finale; il segno di uguale si ha per le trasformazioni reversibili. Il massimo lavoro, nelle condizioni dette sopra, è dunque uguale alla diminuzione dell'energia libera di Helmoltz.

Energia libera di Gibbs

Spesso si ha a che fare con sistemi termodinamici che compiono trasformazioni che avvengono con scambi di calore con un ambiente a temperatura T costante e a pressione P costante. Ciò avviene per esempio in molte reazioni chimiche e in trasformazioni fisiche che riguardano cambiamenti di stato di aggregazione. In questi casi è utile l'introduzione della funzione di stato energia libera di Gibbs:

$$G = H - TS$$

Se P e T sono costanti durante la trasformazione, per il lavoro fatto dal sistema si ha:

$$L = P(V_b - V_a)$$

Se T e P sono gli stati iniziali e finali del sistema allora $\Delta G \leq 0$.
In generale possiamo affermare che: *"se un sistema termodinamico subisce una trasformazione a pressione costante e a temperatura costante, l'energia libera di Gibbs non può aumentare: rimane costante se la trasformazione è reversibile, diminuisce se la trasformazione è irreversibile. Gli stati di equilibrio del sistema sono quelli di energia libera di Gibbs minima".*

Molte trasformazioni chimiche e fisiche avvengono a temperatura ambiente costante e spesso anche a pressione e temperatura costanti. Le funzioni termodinamiche F e G sono molto importanti perchè gli stati di equilibrio, come abbiamo visto, sono allora individuati dai valori minimi di queste funzioni. Per questa ragione queste funzioni vengono anche chiamate potenziali termodinamici in analogia a quanto avviene per la funzione energia potenziale il cui minimo in meccanica individua le situazioni di equilibrio nei casi di presenza di sole forze conservative.

Indice degli argomenti trattati
