

Algebra per Informatica

Foglio di esercizi 2

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti relazioni sono funzioni tra gli insiemi specificati:

- 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+3}$;
- 2) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, g(a, b) = a \cdot b$;
- 3) $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}, h(p/q) = p - q$;
- 4) $k : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), k(X) = X \cap \mathbb{N}$;
- 5) $\alpha : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ data da $\alpha(1) = a, \alpha(2) = b$;
- 6) $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ data da $\gamma(n) = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è un divisore di } n\}$;
- 7) $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \beta(x) = \sqrt{x}$;
- 8) $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \delta(x) = \sqrt{x}$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $f(x) = x^2 + 1$. Determinare le seguenti controimmagini:

$$f^{-1}(0), \quad f^{-1}(1), \quad f^{-1}(2), \quad f^{-1}(3).$$

Esercizio 3. Definire un'applicazione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ diversa dall'identità e tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $f(3n) = 3n$.

Esercizio 4. Calcolare $f(5)$ dove $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è l'applicazione definita da:

$$f(0) = 1, \quad f(n) = n \cdot f(n-1) \quad \forall n > 0.$$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione data da $f(x, y) = x - y$ e siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}.$$

Determinare $f(A)$ e $f(B)$.

Esercizio 6. Sia $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = x^2 - y^2$ e sia $M = \{(\sqrt{5}, \sqrt{5}), (7, 7)\}$. Determinare $h^{-1}(h(M))$.

Esercizio 7. Siano $f : A \rightarrow B$ una funzione e $X, Y \subseteq A$ due sottoinsiemi. Provare che:

- 1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
- 2) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

Esibire un esempio in cui $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.