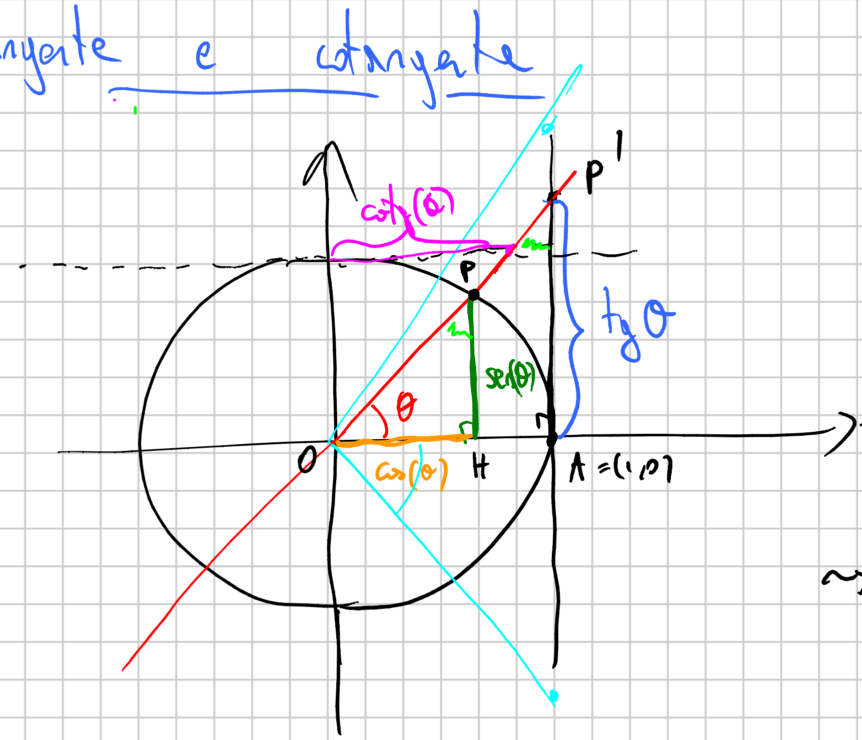
Analisi Matematica I - Lezione 7

Titolo nota 18/10/2022

Tangente e cotangente



$P\hat{H}O \approx P'\hat{A}O$

$PH : HO = P'A : AO$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{tg(\theta)}{1}$$

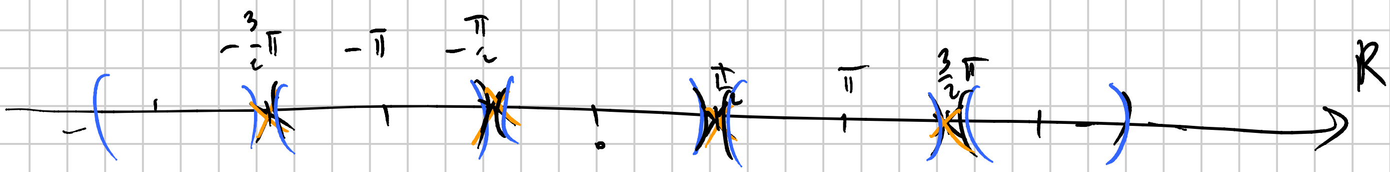
$$\rightsquigarrow \boxed{tg(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}}$$

NOTA: $tg(\theta)$ è crescente in θ per $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tuttavia per $\theta = \frac{\pi}{2}$ P' non esiste e dunque non posso definire la tangente.

$$\text{Dominio}\,(tg) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi \dots\right\}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \dots$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$



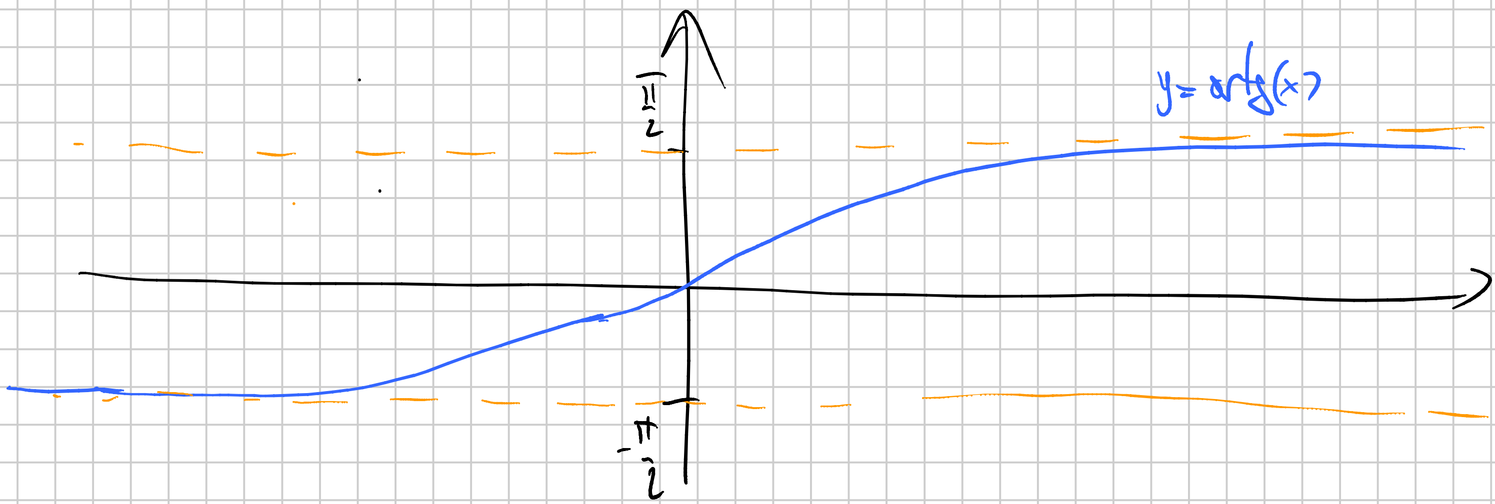
- tg è periodica di periodo π.
- $Im(tg) = \mathbb{R}$

- $tg : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ e' bigettiva e str. crescente.

MA ALLORA È INVERTIBILE, CHIAMO LA SUA INVERSA

$arctg : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

str. crescente



- tg e' dispari quindi anche arctg lo e'.

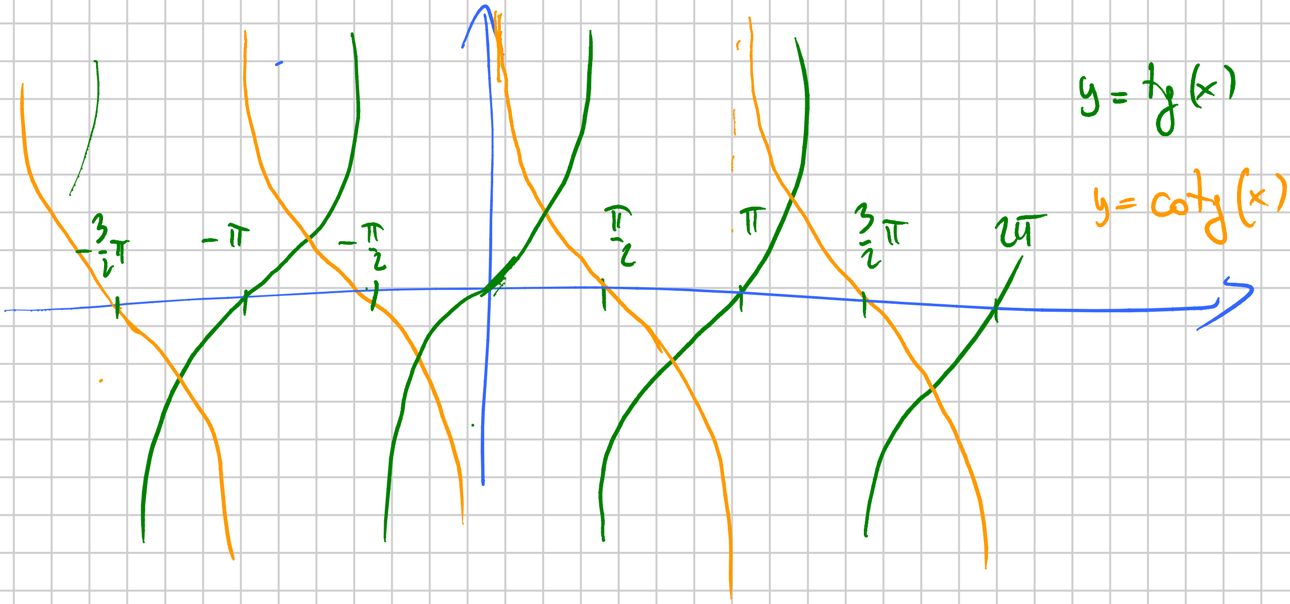
$$cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

$$Dom(cotg) = (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi) \cup (-2\pi, -\pi) \cup (-\pi, 0) \ldots$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$$

- cotg e' dispari, periodica di periodo π, decrescente in $(0,\pi)$.

- $arccotg : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ la sua inversa



nota: $tg(x) = \frac{1}{cotg(x)}$ dove sono definite entrambe

---

$$tg(x+y) = \frac{tg(x) + tg(y)}{1 - tg(x)\,tg(y)}$$

$$tg(2x) = \frac{2\,tg(x)}{1 - tg(x)^2}$$

A partire da funzioni elementari possiamo produrne di più complicate tramite

- OPERAZIONI ALGEBRICHE (somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni)

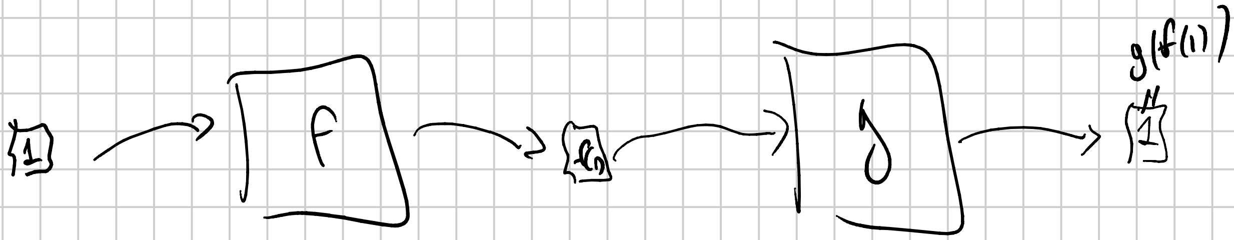
- COMPOSIZIONE.

Le funzioni le posso immaginare come delle scatole magiche che ricevono come input un numero e restituiscono un altro numero come output

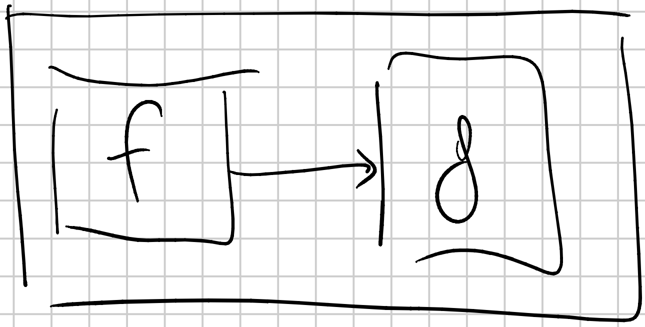
$$\boxed{1} \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow \boxed{2}$$

$f(1) = 2$

$f(x) = 2x$



g è l'inversa se l'output finale è come l'input, cioè se $g(f(x)) = x \quad \forall x$



è la scatola $g \circ f$

dato x, restituisce $g(f(x))$.

TIPICAMENTE: $g(f(x)) \neq f(g(x))$.

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$2x$	e^y	e^{2x}
e^x	y^2	$(e^x)^2 = e^{2x}$
$tg(x)$	y^2	$(tg(x))^2$
x^2	$tg(y)$	$tg(x^2)$

$2x$	$\text{artg}(y)$	$\text{artg}(2x)$
$\text{sen}(x)$	$y + y^2$	$\text{sen}(x) + \text{sen}(x)^2$

---

domino di $g \circ f$? quando ha senso $g(f(x))$?

$$\text{dom}(g(f(x))) = \{ x \in \text{dom} f : f(x) \in \text{dom}\, g \}.$$

$$\ln(\sqrt{x} - 1) = g(f(x))$$

$f(x) = \sqrt{x} - 1$

$g(y) = \ln(y)$

$$\text{dom}(f) = \{x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

$$\text{dom}(g) = \{y > 0\} = (0, +\infty)$$

$$\text{dom}(g \circ f) = \{ x \geq 0 : \sqrt{x} - 1 > 0 \}$$

$$\sqrt{x} - 1 > 0 \iff \sqrt{x} > 1 \iff x > 1$$

$$= \{ x \geq 0 : x > 1 \} = (1, +\infty).$$

$$\ln(\sqrt{x} + 1)$$

Successioni di numeri reali e loro limiti

$0°$ $1°$ $2°$ $3°$ $4°$ $5°$ $6°$ $7°$

$0, 1, 2, 2, 5, 3{,}14, -20, 70, \ldots$

UNA SUCCESSIONE È UN ELENCO DI NUMERI **ORDINATO**;

POSSIAMO PENSARLE COME DELLE FUNZIONI $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sarà la successione formata dai numeri

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Esempi: • NUMERI PRIMI (ORDINATI IN MANIERA CRESCENTE)

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$

$\boxed{p_n = \text{" l'}n\text{-esimo numero primo "}}$

Fun fact! $p_n \sim n \ln(n)$

• NUMERI NATURALI PARI

$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$

$\boxed{a_n = 2n}$

• NUMERI NATURALI DISPARI

$\boxed{a_n = 2n+1} \rightsquigarrow 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

• QUADRATI PERFETTI

$\boxed{a_n = n^2}$ $a_0 = 0$ $a_1 = 1^2 = 1$ $a_2 = 2^2 = 4$

$a_3 = 3^2 = 9$, ...

$0, 1, 4, 9, 16, \ldots$

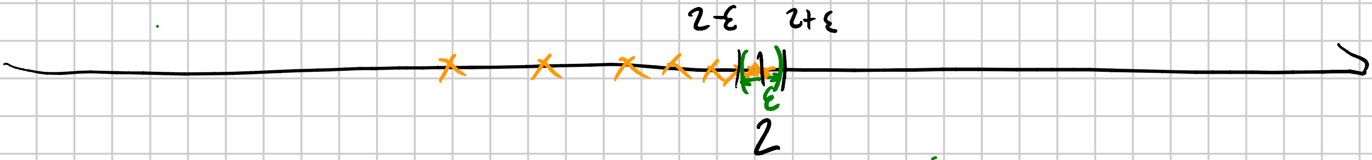
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$ → def.ne algoritmica di a_n

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \boxed{2 - \frac{1}{2^n}}$$ ← formula chiusa per a_n

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_n & \dots \\ \| & \| & \| & \| & \| & \\ 1, & \frac{3}{2}, & \frac{7}{4}, & \frac{15}{8}, & \frac{31}{16}, & \frac{63}{32}, & \dots \end{array}$$

1, 1,5, 1,75, 1,875, 1,9325, 1,95..., ...

Notiamo che i numeri che compongono la successione si avvicinano ad un numero che in questo caso risulta essere 2.



Def. $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ t.c. $\forall n \geq N_\varepsilon$ si ha $|a_n - l| \leq \varepsilon$ cioè

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$$

Esempio Sia $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$

Vorremo mostrare che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 2$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ t...

$$2-\varepsilon < a_n < 2+\varepsilon \quad \forall \; n > N_\varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$2-\varepsilon < 2-\frac{1}{2^n} < 2+\varepsilon \quad \left(\forall \; n > N_\varepsilon\right)$$

$$\Uparrow$$

$$\begin{cases} \cancel{2}-\varepsilon < \cancel{2}-\dfrac{1}{2^n} \\ \cancel{2}-\dfrac{1}{2^n} < \cancel{2}+\varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon \\ \dfrac{1}{2^n} > -\varepsilon \end{cases} \Leftarrow$$

sempre vero perché $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \overset{\Leftarrow}{(\Rightarrow)} 2^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\overset{\Leftarrow}{(\Rightarrow)} \; n > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Considerate $N_\varepsilon = \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right\rceil$

Ma allora, se $n > N_\varepsilon$ ho anche $n > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ma allora.

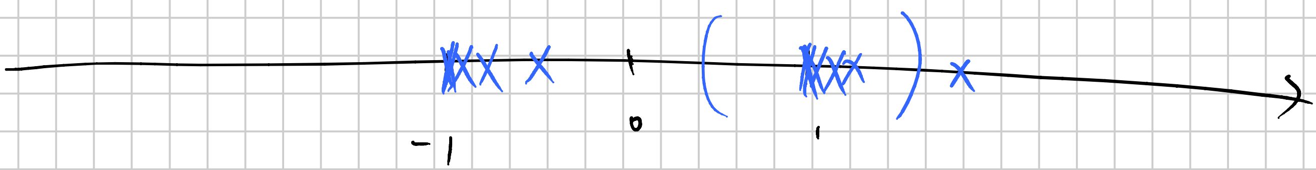
$\boxed{\text{Def.}}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se $\forall \; M > 0 \;\; \exists \; N_M$ tale che se $n > N_M$ allora $a_n > M$.

Def. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ se $\forall M > 0$ $\exists N_M$ t.c.

$\forall n > N_M$ si ha $a_n < -M$

Es. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & \dots \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\
1+1 & , & -1+\frac{1}{2} & , & 1+\frac{1}{3} & , & -1+\frac{1}{4} & , & 1+\frac{1}{5} & , & -1+\frac{1}{6} & , & 1+\frac{1}{7} \\
2 & , & -0,5 & , & 1,\overline{3} & , & -0,75 & , & 1,25 & , & -0,82\dots & , & 1,1\dots
\end{array}
$$



In questo caso la successione oscilla tra -1 e 1 e non ha limite.

Dim. $|a_n - a_{n+1}| = \left| (-1)^n + \frac{1}{n+1} - \left((-1)^{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right| =$

$$= \left| (-1)^n + \frac{1}{n+1} + (-1)^n - \frac{1}{n+2} \right|$$

$$= \left| 2(-1)^n + \overset{\geq 0}{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)} \overset{\leq 1}{} \right| > 1$$

Ma allora supponiamo per assurdo che

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$. Allora per $\varepsilon = 0,2$ esiste

$N_{0,2}$ t... $\forall n > N_{0,2}$ si ha

$$|a_n - \ell| < 0,2$$

Ma allora anche $|a_{n+1} - \ell| < 0,2$, ma allora

per disug. Triangolare

$$|a_n - a_{n+1}| = |a_n - \ell + \ell - a_{n+1}|$$

$$\leq |a_n - \ell| + |\ell - a_{n+1}| < 0,4$$

↯.

Teorema Sia a_n una successione MONOTÒNA crescente (decrescente)

cioè tale che $\forall n > m$ $a_n > a_m$ ($a_n < a_m$). Allora

si ha che

- $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ ($-\infty$)

- $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ e $\ell = \sup \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$ (inf)
