Analisi Matematica - Lezione 4

Titolo nota 29/09/2022

Prossime lezioni: - Prof. CAPELLI 04/10/2022 (Alle 8:00 precise)

Non c'è lezione 06/10/2022, che recuperiamo il 04/10/2022 pomeriggio.

Funzioni

Non useremo definizioni rigorose, per noi una funzione è un'associazione di elementi $f: A \to B$, nella definizione di funzione sono <u>sempre</u> inclusi l'insieme di partenza (DOMINIO) e l'insieme di arrivo (CODOMINIO).

Per essere pedanti dovrei sempre introdurre una funzione come (f, A, B). Tuttavia tipicamente (in questo corso) questo non si fa e ci si attiene al dominio "naturale" e codominio "naturale".

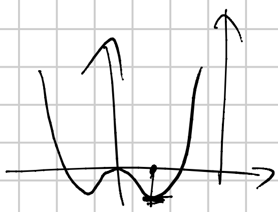
Es.

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ma avrebbe anche senso $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$f(x) = x^4 - x^2$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



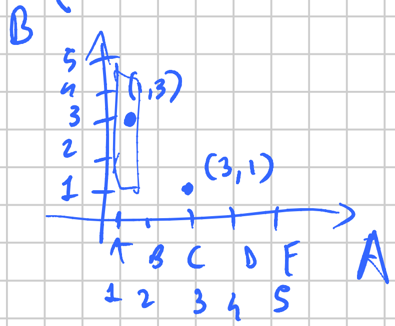
Def. Il grafico di una funzione $f : A \to B$

$graph(f) \subseteq A \times B$

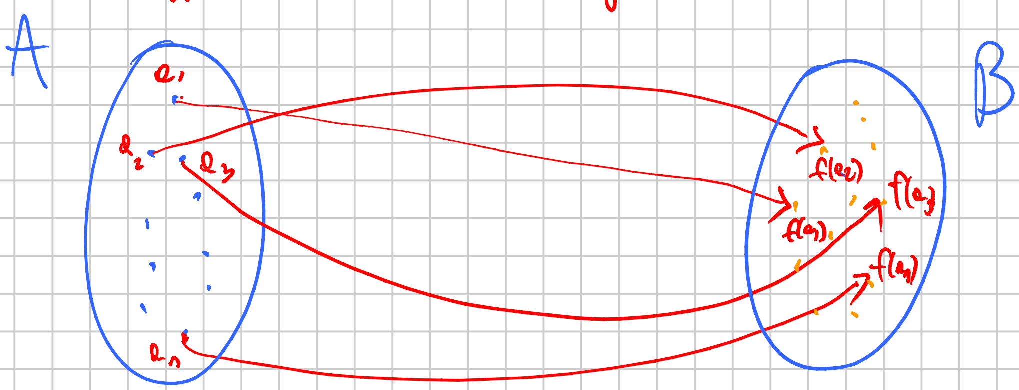
$$graph(f) = \{ (a, f(a)) : a \in A \}$$

Def. $A \times B = \{ (a,b) : a \in A, \ b \in B \}$ coppie ORDINATE

NOTA: in $\mathbb{R}^2$ il punto $(1,2) \neq (2,1)$ (BATTAGLIA NAVALE)



rappresentazione del grafico di f



Particolarità delle funzioni: $\forall \ a \ \exists! \ b \in B$ t.c. $f(a) = b$

Proprietà delle funzioni: iniettività, surgettività, biettività

- Una funzione $f : A \to B$ si dice INIETTIVA se elementi distinti di A vanno in elementi distinti di B.

Più formalmente: f INIETTIVA se

$$\forall \ a_1 \in A, \ a_2 \in A, \ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

equiv. $f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$

"Brutalmente" frecce che partono da punti diversi vanno in punti diversi

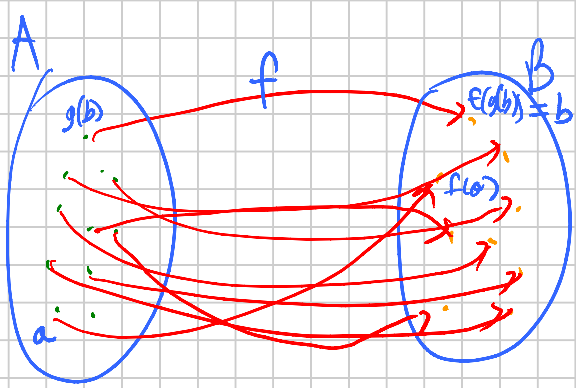
- $f: A \to B$ si dice SURGETTIVA (o SURIETTIVA) se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A (ogni elemento di B è "preso").

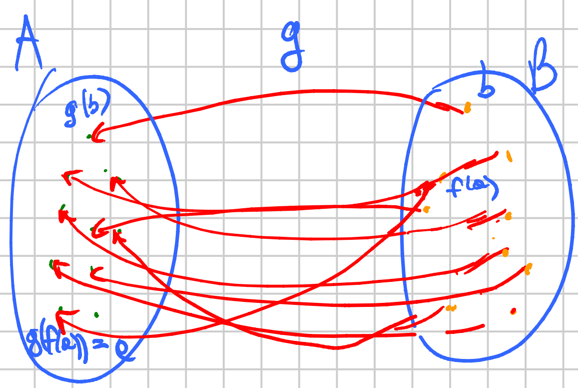
Formalmente f è SURIETTIVA se $\forall b \in B, \exists a \in A$ t.c. $f(a)=b$.

"Brutalmente": in ogni elemento di B arriva (almeno) una freccia.

- $f: A \to B$ si dice BIGETTIVA (o BIIETTIVA) se è sia iniettiva che suriettiva.

NOTA: sia f bigettiva. Per l'iniettività sappiamo che in ogni $b \in B$ arriva al più una freccia (0 o 1).
Per la suriettività sappiamo che in ogni $b \in B$ arriva ALMENO una freccia (1 o più).
Ma allora f è bigettiva $\iff$ in ogni $b \in B$ arriva esattamente una freccia





Posso dunque definire $g: B \to A$ che si dice

funzione INVERSA di f. g è anch'essa bigettiva.

Inoltre:

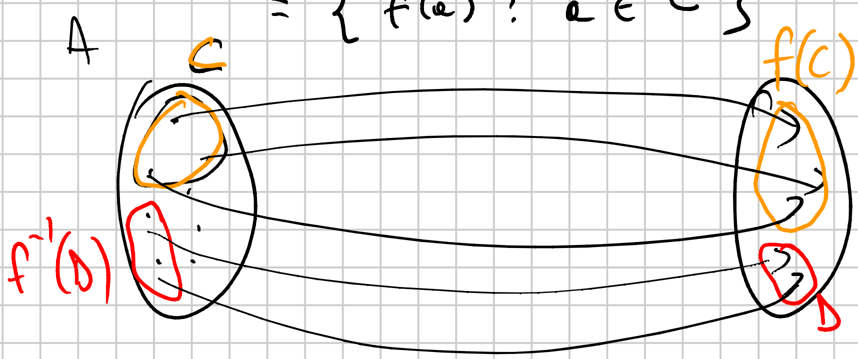
$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B, \qquad g(f(a)) = a \quad \forall a \in A.$$

($g(b) = f^{-1}(b)$ da non confondersi con $(f(a))^{-1} = \frac{1}{f(a)}$)

Immagine e controimmagine di sottoinsiemi

Data $f: A \to B$ e $C \subseteq A$, definisco

$$f(C) = \{ b \in B : \exists a \in C \text{ t.c. } f(a) = b \}$$
$$= \{ f(a) : a \in C \}$$



$f(C)$ sono tutti i punti che sono immagine di qualche elemento di C.

<u>NOTA.</u> può succedere che $C \neq A$ ma $f(C) = B$

es. $f: \overset{A}{\mathbb{R}} \to \overset{B}{[-1,1]}$ $\quad f(x) = \cos(x)$

se prendo $C = [0, 2\pi]$ $\quad f(C) = [-1,1]$

Dato $D \subseteq B$ definisco $f^{-1}(D) \subseteq A$ come la controimmagine di D.

$$f^{-1}(D) = \{ a \in A : f(a) \in D \}$$

Nota: $f^{-1}(D)$ lo posso definire anche se f non è inv.

$f(A)$ è detta IMMAGINE di f $\quad Im(f) = f(A)$

Oss. $f : A \to B$ e considero $f : A \to f(A)$, questa seconda funzione risulta suriettiva.

Proprietà di funzioni reali di variabile reale

($f : A \to B$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$)

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice PARI se

$$f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice DISPARI se

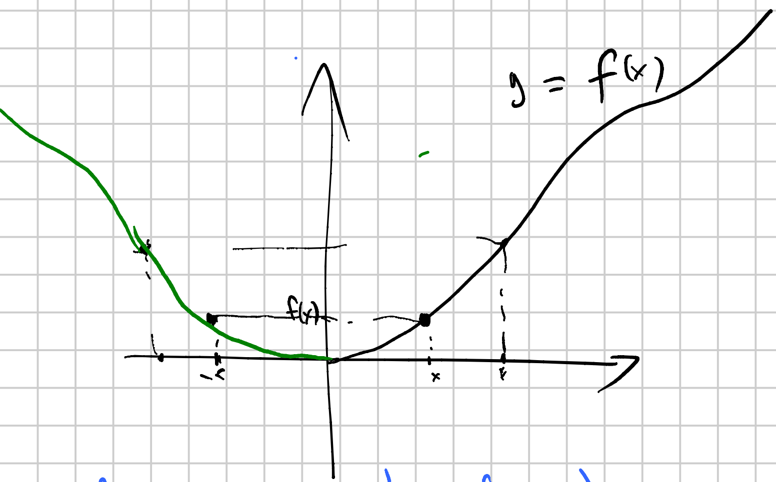
$$f(x) = -f(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$(f(-x) = -f(x))$

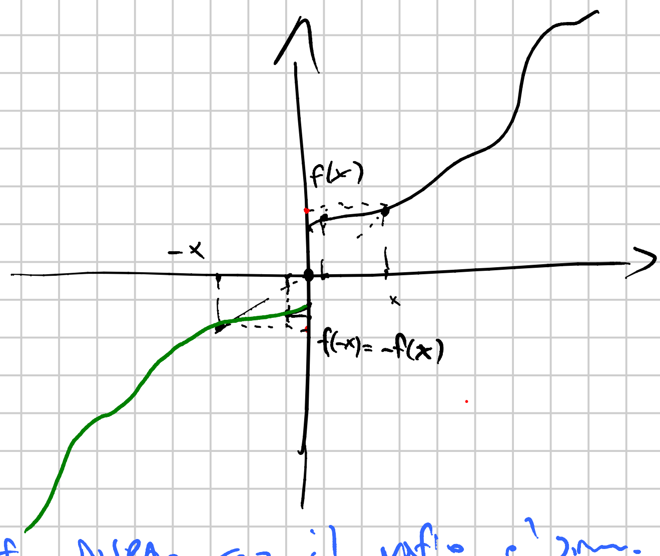
→ in questo caso $f(0) = 0$ infatti: sost. $x=0$ nella cond. ottengo $f(0) = -f(0)$ ⇒ $2f(0)=0$ ⇒ $f(0)=0$.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice PERIODICA se $\exists\, T > 0$ t.c.

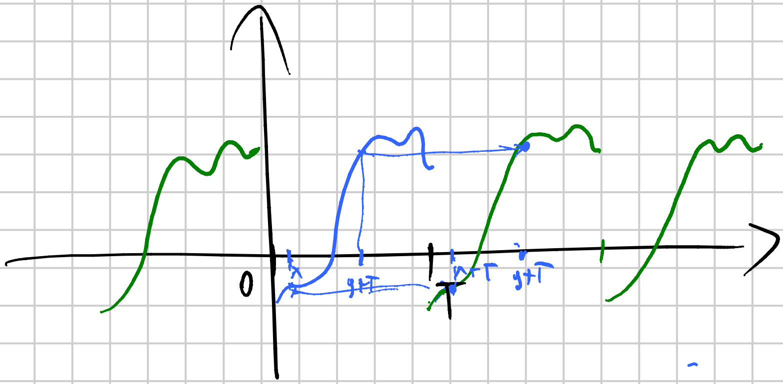
$$f(x+T) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$



f pari ⇔ il grafico è simmetrico rispetto all'asse y



f DISPARI ⇔ il grafico è simm. rispetto a $O = (0,0)$



f è periodica se il grafico è invariante per traslazione orizzontale di T.

Se f è periodica posso considerare, se esiste il MINIMO periodo $T > 0$.

Ovviamente se f è periodica di periodo T, è anche periodica di periodo $2T$, $3T$, $4T$, ... kT con $k \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Oss.}}$ Sia $f(x) = x^2$

è pari o dispari? $f(-x) = (-x)^2 = (-x)\cdot(-x) = (-1)\cdot(-1)\cdot x \cdot x$
$= x^2 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ $f(x) = x^2$ è pari

$f(x) = x^3$ pari/dispari? $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 = -f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ $f(x) = x^3$ è DISPARI

$f(x) = x^k \quad k \in \mathbb{N} \qquad f(-x) = (-x)^k = (-1)^k x^k = (-1)^k \cdot f(x)$

$$f(-x) = (-1)^k \cdot f(x) = \begin{cases} f(x) & k \text{ pari} \\ -f(x) & k \text{ dispari} \end{cases}$$

MONOTONIA (crescenza, decrescenza)

$f : A \to B \qquad (C \subseteq A)$

- f si dice STRETTAMENTE CRESCENTE su C se

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in C$$

- f si dice DEBOLMENTE CRESCENTE su C se

$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in C$$

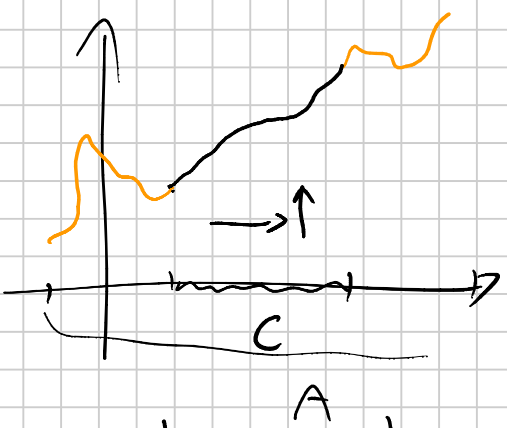
- f si dice STRETTAMENTE DECRESCENTE su C se

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in C$$

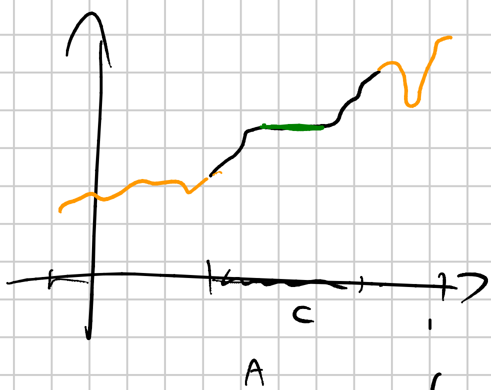
- f si dice DEBOLMENTE DECRESCENTE su C se

$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

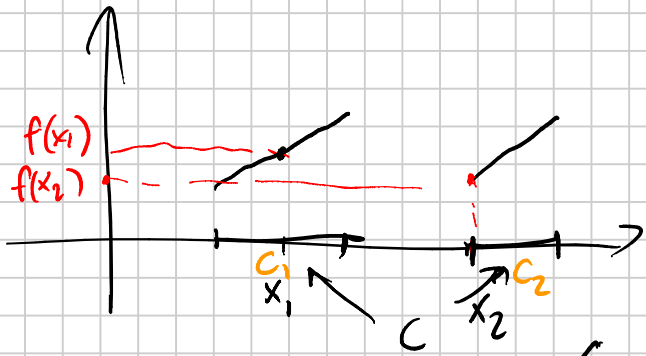
In generale se f rispetta una di queste 4 condizioni allora f si dice (strettamente) MONOTÒNA su C.



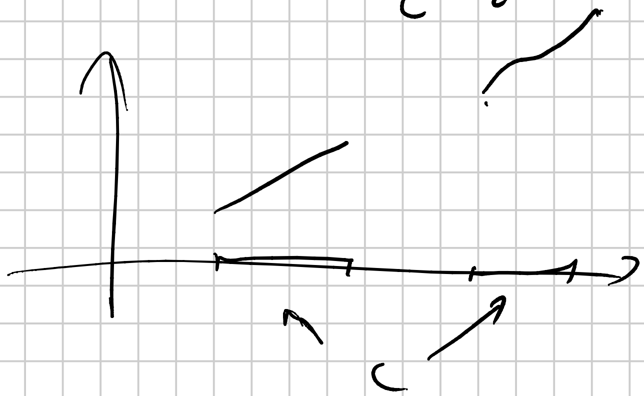
str. crescente



deb. crescente (posso avere parti piatte)



non e' crescente su C



e' crescente su C