# Lezione 2 - Analisi Matematica 1

- **Paradosso occhi dello stesso colore**

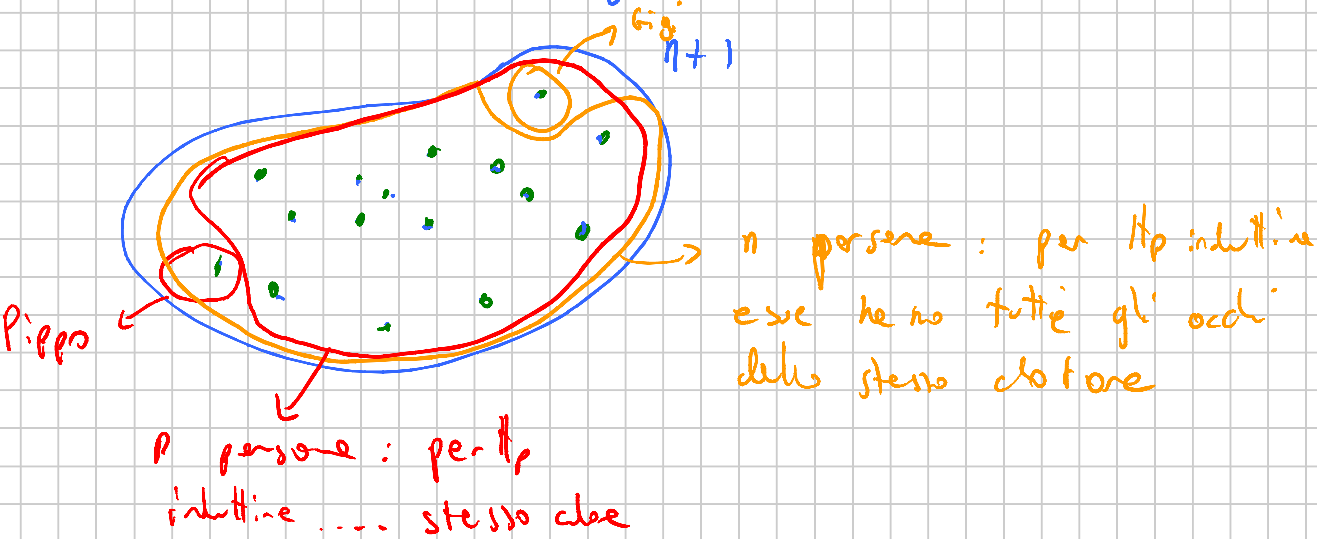
$P(n)$: " Date $n$ persone, esse hanno tutti gli occhi dello stesso colore "

Vogliamo mostrarlo per induzione

(i) $P(1)$ e' vera? " Dato un insieme di 1 persona, in questo insieme tutti hanno lo stesso colore degli occhi "

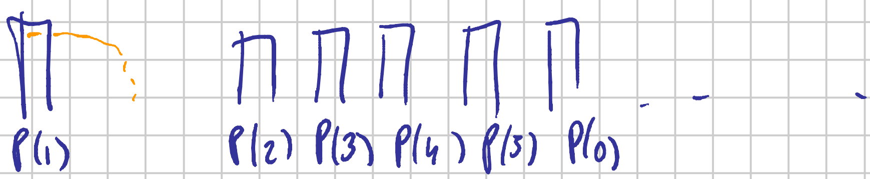
(ii) Un assumendo che $P(n)$ sia vera, vogliamo vedere che $P(n+1)$ e' vera

Date $n+1$ persone qualunque, e' vero che esse hanno tutte gli occhi dello stesso colore?




C'e' qualcosa che non va...

Per $n=1$? $P(n) \not\Rightarrow P(n+1)$



Con questa dimostrazione abbiamo fatto vedere che

$P(2) \Rightarrow P(n) \quad \forall n$ e che $P(1)$ è vera

---

Bugia di disuguaglianze che si possono dimostrare "a mano" su tutto $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{R}$).

- $n^2 \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

| | | |
|---|---|---|
| $n=0$ | $0^2 \geq 0$ | ✓ |
| $n=1$ | $1^2 \geq 1$ | ✓ |
| $n=2$ | $2^2 \geq 2$ | ✓ |
| $n=3$ | $3^2 \geq 3$ | ✓ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

non finisco più: potrei farlo per induzione (provateci)

$A \geq B$ e $C \geq 0$

$\Rightarrow A \cdot C \geq B \cdot C$

(se $n \geq 1$)

$n^2 = \boxed{n} \cdot n \geq \boxed{1} n = n \quad \forall n \geq 1$

$0^2 \geq 0 \quad (n=0)$

- $n^3 \geq 3n - 1$ ? $(n \in \mathbb{N})$

| | | |
|---|---|---|
| $n=0$ | $0 \geq -1$ | ✓ |
| $n=1$ | $1^3 \geq 3-1$ | F |
| $n=2$ | $2^3 \geq 6-1$, $8 \geq 5$ | ✓ |
| $n=3$ | $27 \geq 8$ | ✓ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

$n=0$ ok $\quad n=2$ ok $\quad n=3$ ok

$$n^3 = \boxed{n} \underbrace{\boxed{n \cdot n}}_{C} \overset{n \geq 2}{\geq} \boxed{2} \cdot \underbrace{\boxed{n} \cdot n}_{C} \overset{n \geq 2}{\geq}$$

$$\geq 2 \cdot \boxed{2} \cdot n = 4n \geq 3n$$

$$\geq 3n - 1 \qquad \forall n \geq 2$$

Vera per $n = 0, 2, 3, 4, \ldots$

---

- Dimostrare che $2^n \geq n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Per induzione

(i) PASSO BASE $\quad P(0) \qquad 2^0 \geq 0+1$

$$1 \geq 1 \quad \checkmark$$

$$A \geq B$$

(ii) PASSO INDUTTIVO. Supponiamo $2^n \geq n+1$. Vogliamo dimostrare $2^{n+1} \geq (n+1)+1 = n+2$

$$\boxed{2^{n+1}} = \underbrace{2^n}_{A} \cdot \underbrace{\boxed{2}}_{C} \geq \underbrace{(n+1)}_{B} \cdot \underbrace{\boxed{2}}_{C} = 2n+2 = n+2+n \geq \boxed{n+2} \quad \checkmark$$

$\boxed{\text{N.B.}}$ Bernoulli $\quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq -1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Con $x=1 \qquad (1+1)^n \geq 1+n \qquad 2^n \geq n+1$

---

- $$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Per induzione:

(i) Passo base $\quad P(0) \qquad \frac{1}{2^0} = 2 - \frac{1}{2^0}$

$$1 = 2 - 1 \quad \checkmark$$

Controllo ulteriore $\quad P(1) \qquad \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1}{2^1}$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \overset{?}{=} 2 - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$$

(ii) Passo induttivo: Suppongo $P(n)$ vera, voglio dimostrare $P(n+1)$

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}_{\text{per Hp induttiva } = 2-\frac{1}{2^n}}+\frac{1}{2^{n+1}} = 2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= 2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n\cdot 2}$$

$$= 2+\frac{1}{2^n}\left(-1+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2+\frac{1}{2^n}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2-\frac{1}{2^n\cdot 2} = 2-\frac{1}{2^{n+1}} \quad \checkmark$$

- $$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \qquad \forall a \neq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(i) passo base $n=0$ $\quad 1 = \dfrac{a-1}{a-1} = 1 \quad \checkmark$

(ii) passo induttivo $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \left(\sum_{i=0}^{n} a^i\right) + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$$

$$= \frac{\cancel{a^{n+1}} - 1 + a^{n+2} - \cancel{a^{n+1}}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}.$$

$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}$ in modo geometrico

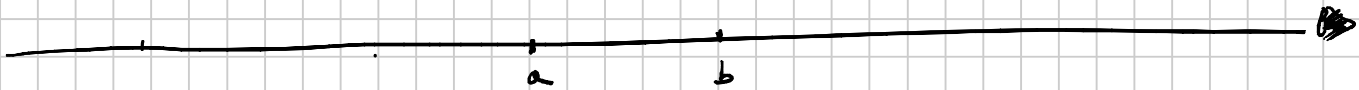

## Numeri reali

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali

$= \{ a, a_0 a_1 a_2 \dots \}$

Un numero reale è un numero con un'espansione decimale anche infinita e non periodica.

Rappresentiamo $\mathbb{R}$ come la retta (dei numeri reali)




dove ad ogni punto corrisponde uno ed un solo elemento di $\mathbb{R}$.

Innanzitutto proprietà FONDAMENTALE di $\mathbb{R}$ che useremo è che è un insieme TOTALMENTE ORDINATO, cioè che dati $a, b \in \mathbb{R}$ possiamo sempre dire che $a < b$ oppure $a > b$ oppure $a = b$.

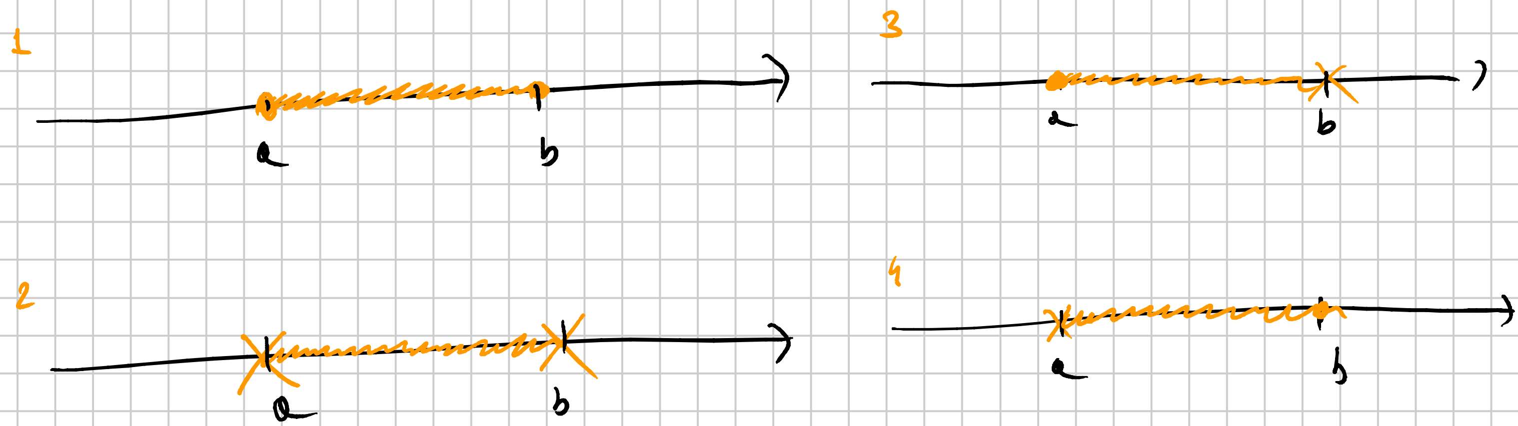
Sulla retta reale $a > b$ vuol dire che $a$ è situato alla destra di $b$ e viceversa, se $a < b$ a è alla sinistra di $b$.

# Intervalli

Sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ così definiti per $a<b$

1. $[a,b] = \{x\in\mathbb{R} : x\geq a \text{ e } x\leq b\}$ — INTERVALLO CHIUSO DI ESTREMI $a$ e $b$
2. $(a,b) = \{x\in\mathbb{R} : x> a \text{ e } x< b\}$ — INTERVALLO APERTO DI ESTREMI $a$ e $b$
3. $[a,b) = \{x\in\mathbb{R} : x\geq a \text{ e } x< b\}$
4. $(a,b] = \{x\in\mathbb{R} : x> a \text{ e } x\leq b\}$

3, 4: INTERVALLO SEMIAPERTO DI ESTREMI $a$ e $b$




1. $[a,+\infty) = \{x\in\mathbb{R} : x\geq a\}$
2. $(a,+\infty) = \{x\in\mathbb{R} : x> a\}$
3. $(-\infty,a] = \{x\in\mathbb{R} : x\leq a\}$
4. $(-\infty,a) = \{x\in\mathbb{R} : x< a\}$

intervalli chiusi (1, 3)

intervalli aperti (2, 4)

intervalli illimitati (1–4)