lezione 4/10/22

(1)

Dimostrazione per induzione

Sia $A(n)$ un'asserzione che riguarda un intero n. Noi concludiamo che $A(n)$ è vera $\forall n \geq n_1$ se:

a) $A(n_1)$ è vera

b) sia K un intero $\geq n_1$ ma fisso supponendo che $A(K)$ sia vera dimostrare che anche $A(K+1)$ è vera esercizio 1)

Dimostrare che $\forall\, n \geq 1$ il numero $P(n) = n^3 + 5n$ è divisibile per 6

a) Dobbiamo verificare che $P(1)$ è divisibile per 6

$$P(1) = 1 + 5 = 6 \quad \text{vero}$$

b) Consideriamo un numero $K \geq 1$ supponendo che $P(K)$ sia vera (con $n = K$) $P(K) = K^3 + 5K$

dimostriamo che è vera per $n = K+1$

consideriamo

$$P(K+1) = (K+1)^3 + 5(K+1) =$$

$$K^3 + 3K^2 + 3K + 1 + 5K + 5 =$$

$$= (K^3 + 5K) + 3K(K+1) + 6$$

vera x il punto b)

divisibile x 6 perché $3 \cdot K(K+1)$

o K pari o K+1 dispari

$\Rightarrow$ divisibile per 6

esercizio 2)

Dimostrare che $\forall n \geq 1$

$P(n) = 10^n - 1$ è divisibile per 9

1) $P(1) = 10 - 1 = 9$ è divisibile per 9

2) Supponiamo che l'affermazione sia vera per $n = k$ $\Rightarrow$

$10^k - 1$ è divisibile per 9

dimostriamo che l'affermazione è vera per $n = k+1$

$P(k+1) = 10^{k+1} - 1 = 10^k \cdot 10 - 1 =$

$10^k \cdot 10 - 10 + 9 = \underbrace{10(10^k - 1)}_{\text{divisibile per } 9} + 9$

esercizio 3)

Dimostrare che $2^{n-1} \leq n! \ \forall n \geq 1$

1) verifichiamo che è vera per $n = 1$

$2^{1-1} \leq 1! \Rightarrow 1 \leq 1$ vera

Supponiamo che sia vera per $n = k$

$\Rightarrow 2^{k-1} \leq k!$

dimostriamo per $n = k+1$

$$2^{(k+1)-1} \leq (k+1)!$$

$$\Downarrow$$

$$2^{k+1-1} = 2^k = 2 \cdot \underbrace{2^{k-1} \leq}_{\text{assunta per vera}} 2 \cdot k! \underset{k \geq 1}{\leq} (k+1)k! = (k+1)!$$

VALORE ASSOLUTO

PROPRIETÀ

1) $|a| = 0 \iff a = 0$

2) $|a| = |-a|$

3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall a \in \mathbb{R}, b \neq 0$

5) $|a^2| = a^2 = |a|^2$

6) $\sqrt{a^2} = |a|$

7) $|a| = |b| \iff a = \pm b$

8) $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$

9) $|a| \geq b \iff a \leq -b \vee a \geq b$

Proprietà 7)

$a = 0$ oppure $b = 0$?

Proprietà 8)

$b = 0$ $b < 0$?

Proprietà 9)

$b = 0$ $b < 0$?

Proprietă 7)

$|a| = |b|$

$a = 0$

$|0| = |b| \Rightarrow \quad b = 0$ V. 1

$|a| = |0| \Rightarrow \quad a = 0$ V. 1

Proprietă 8)

$|a| \leq b$

a) $b = 0 \Rightarrow |a| \leq 0 \Rightarrow |a| = 0$

$\Rightarrow a = 0$

b) $b < 0 \Rightarrow |a| \leq b \quad \nexists$

Proprietă 9)

$|a| \geq b$

$b \leq 0 \Rightarrow |a| \geq b \ \forall a \in \mathbb{R}$

Proprietà 6)

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Verifica grafica

Considero

$$y = |x| \Rightarrow y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

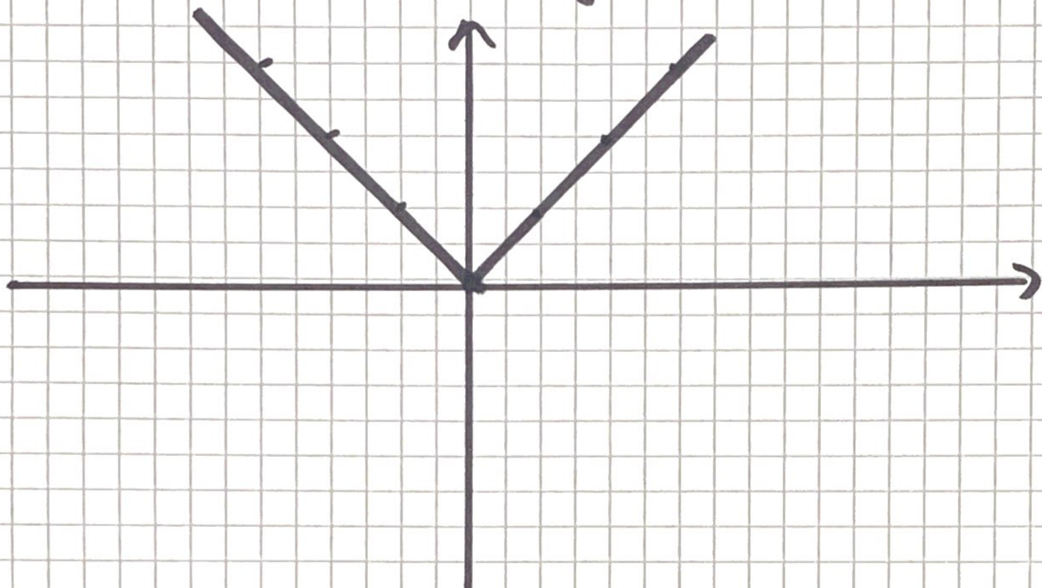
Considero $y = \sqrt{x^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-x)(y+x) = 0 \end{cases}$$

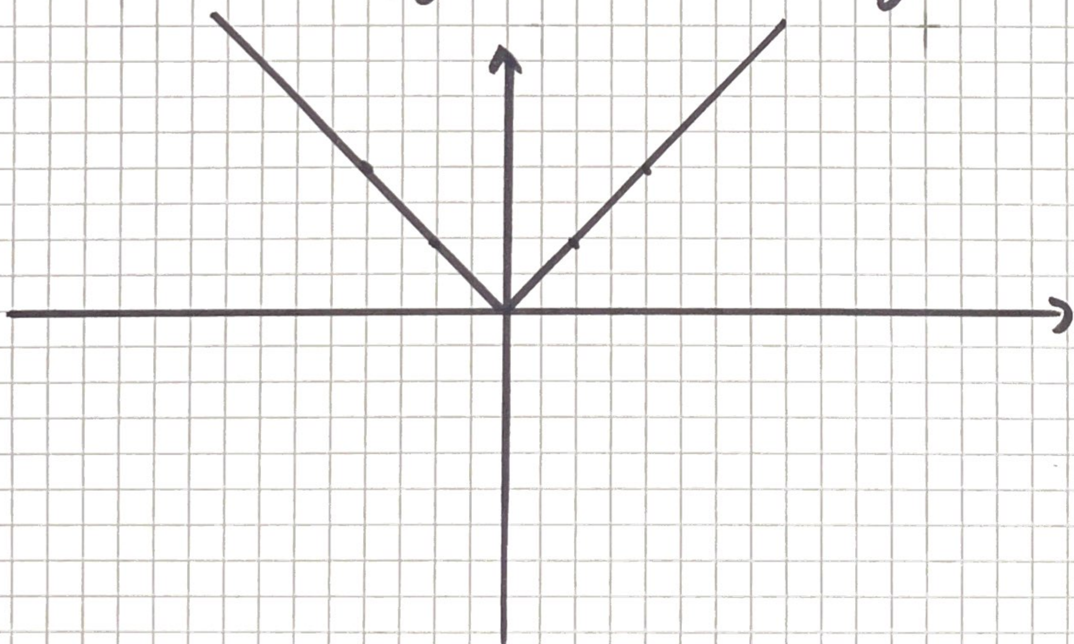
$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y \geq 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

Rappresentazione grafica

$$y = |x| \Rightarrow y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$$y = \sqrt{x^2} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y \geq 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$$



Disuguaglianza TRIANGOLARE

CONSIDERIAMO

$$|3x-1| \leq |x+2| + |2x-3| \quad (1)$$

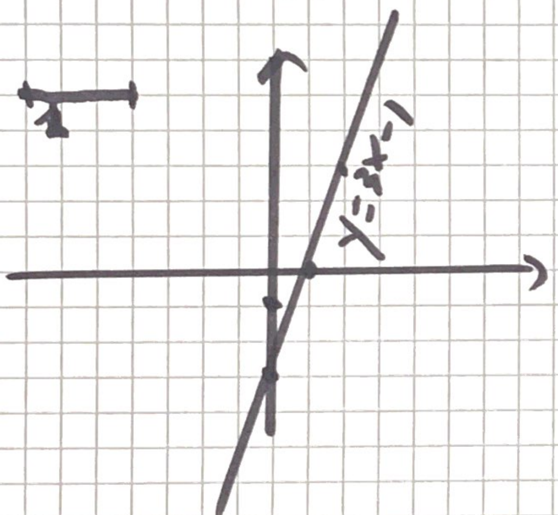
$$\Downarrow$$

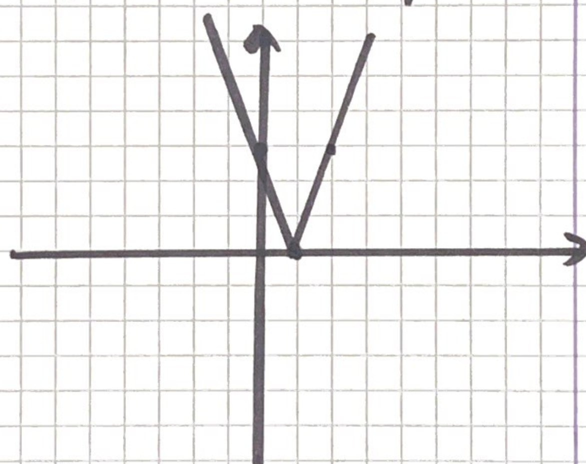
$$|x+2+2x-3| \leq |x+2| + |2x-3|$$

Rappresento graficamente

$y = |3x-1|$

Considero $y = 3x-1$ e $y = |3x-1|$





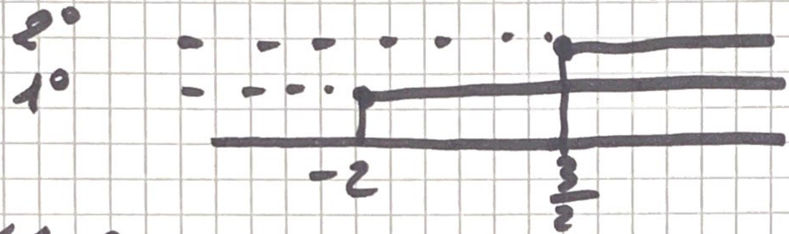
Considero

$$y = |x+2| + |2x-3|$$

Studio i segni dei valori assoluti

$$x+2 \geq 0 \implies x \geq -2$$

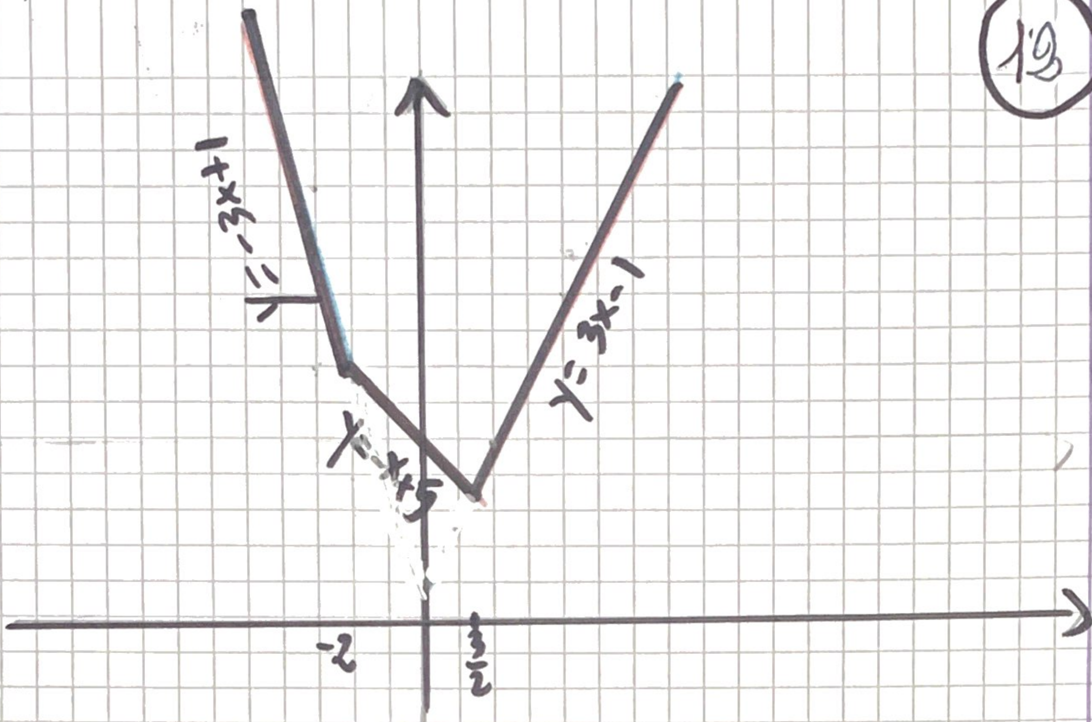
$$2x-3 \geq 0 \qquad x \geq \frac{3}{2}$$



$$\begin{cases} x \leq -2 \\ y = -x-2-2x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} -2 < x \leq \frac{3}{2} \\ y = x+2-2x+3 \end{cases}$$

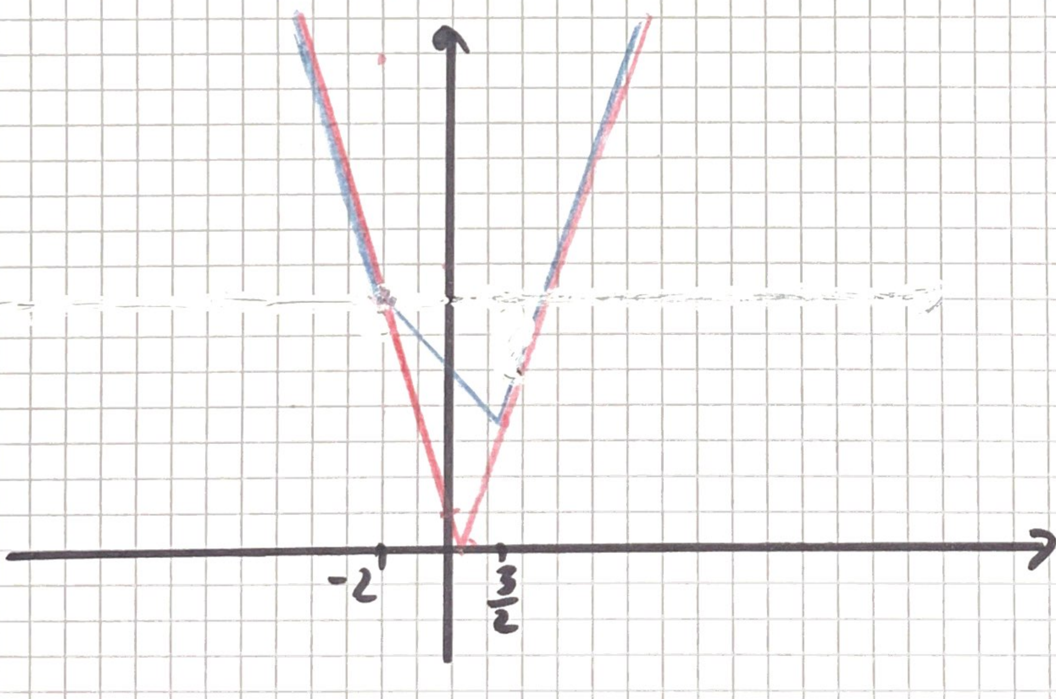
$$\cup \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ y = x+2+2x-3 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ y = -3x+1 \end{cases} \cup \begin{cases} -2 < x \leq \frac{3}{2} \\ y = -x+5 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ y = 3x-1 \end{cases}$$



Rappresenta ora sullo stesso grafico

$y = |3x-1|$ rosso $\qquad y = |x+2| + |2x-3|$ blu



Dimostrare

$$||a|-|b|| \leq |a-b| \leq |a|+|b|$$

Considero

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$$

Ricavo $|a-b|$ $\Rightarrow$

$$|a-b| \geq |a|-|b|$$

Considero $|a-b| = |b-a|$ (1)

$$|b| = |b-a+a| \leq |b-a|+|a|$$

Ricavo $|b-a|$

$$|b-a| \geq |b|-|a|$$

$\Downarrow$

$$|a-b| \geq |a|-|b| \quad e \quad |b-a| \geq |b|-|a|$$

$\Downarrow$ per la (1)

$$|a-b| \geq \underbrace{||a|-|b||}_{\text{def. modulo}}$$

Inoltre

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| =$$
$$|a|+|b|$$

C.V.D.

Esercizi

$|x-1| = |x-2|$ elevo al quadrato

$$x^2+1-2x = x^2+4-4x$$

$$2x = 3 \qquad x = \frac{3}{2}$$

oppure

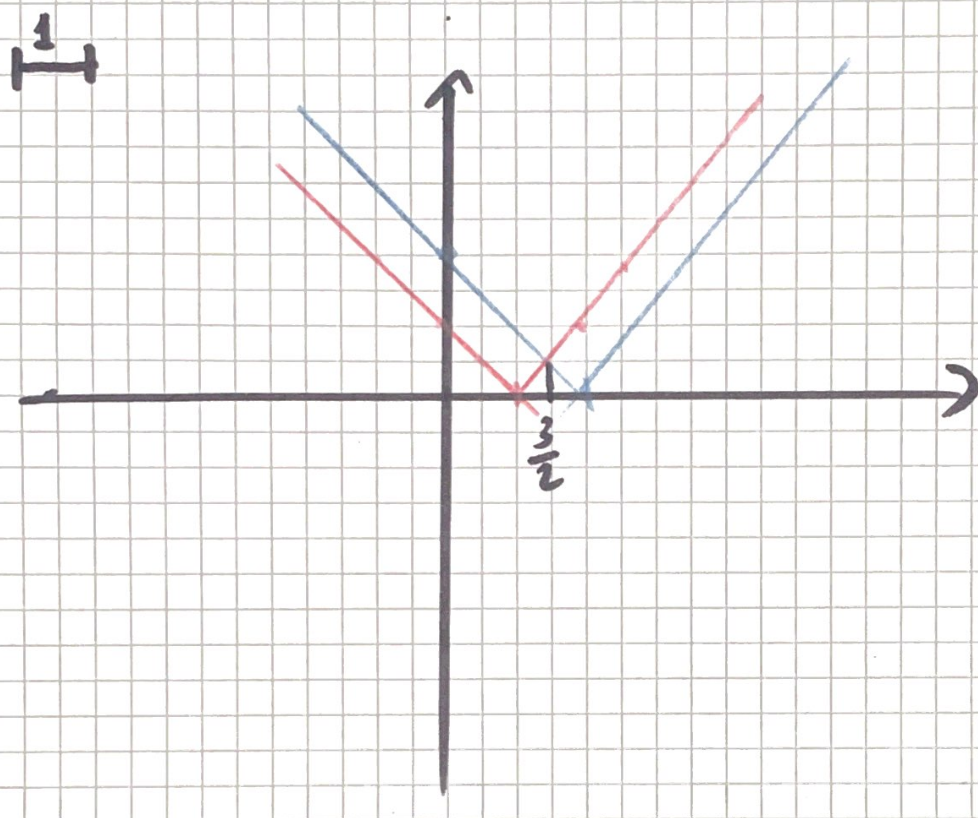
$$x-1 \geq 0 \qquad x-2 \geq 0$$
$$x \geq 1 \qquad x \geq 2$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ -x+1 = -x+2 \\ \text{IMP.} \end{cases} \cup \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x-1 = -x+2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x > 2 \\ x-1 = x-2 \\ \text{IMP} \end{cases}$$

graficamente

considero $y = |x-1|$ rosso e

$y = |x-2|$ blu



Considero

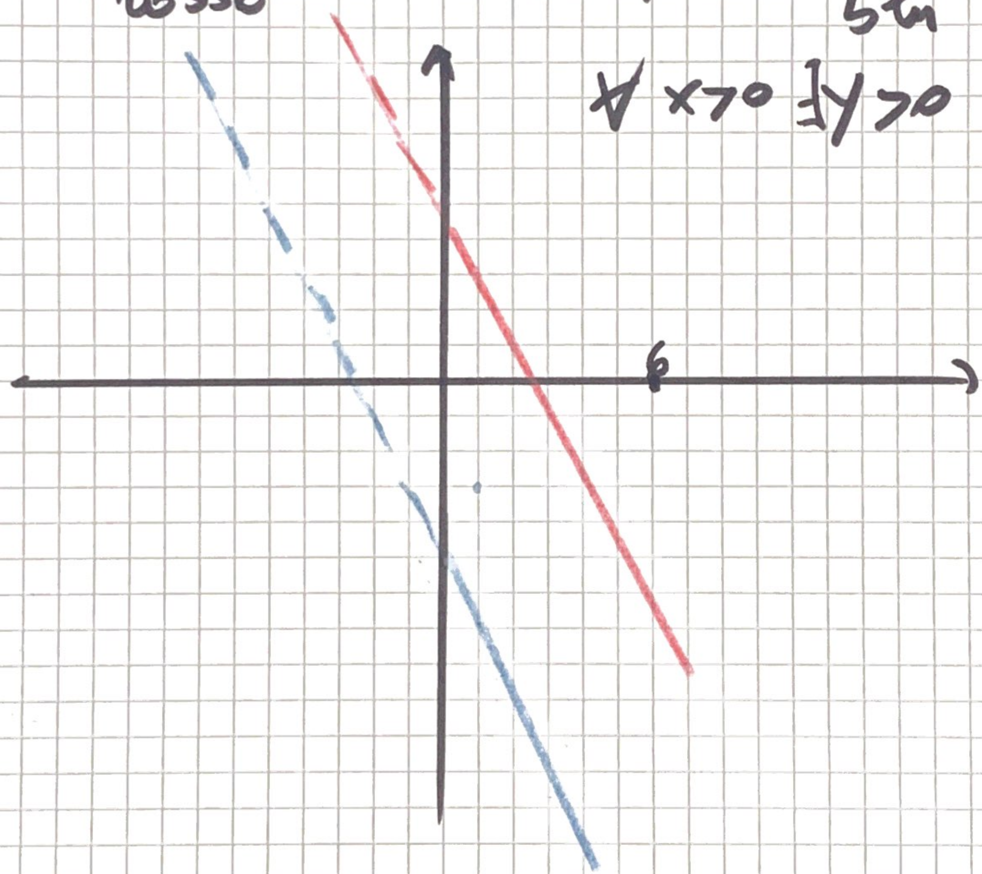
$\forall \underline{x>0} \ \exists \ \underline{y>0} \ / \ |2x+y|=5$?

$|2x+y|=5 \Rightarrow 2x+y=\pm 5 \Rightarrow$

$y=-2x+5$ rosso

$y=-2x-5$ blu

$\forall x>0 \ \exists y>0$



esercizi ulteriori

1) $|5 - x^{-1}| < 1 \Rightarrow$

$$-1 < 5 - x^{-1} < 1$$

$$-6 < -x^{-1} < -4$$

$$-6 < -\frac{1}{x} < -4$$

$$4 < \frac{1}{x} < 6$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} > 4 \\ \frac{1}{x} < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x} < 0 \\ \frac{6x-1}{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{4} \\ x < 0 \vee x > \frac{1}{6} \end{cases}$$

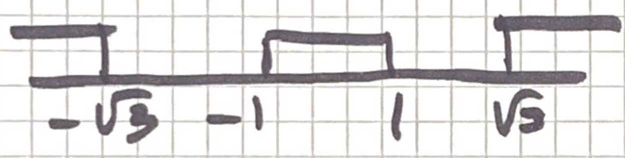
$$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$$

2) $|x^2-2| \geq 1 \Rightarrow$

$$x^2-2 \leq -1 \quad \vee \quad x^2-2 \geq 1$$

$$x^2 \leq 1 \quad \vee \quad x^2 \geq 3$$

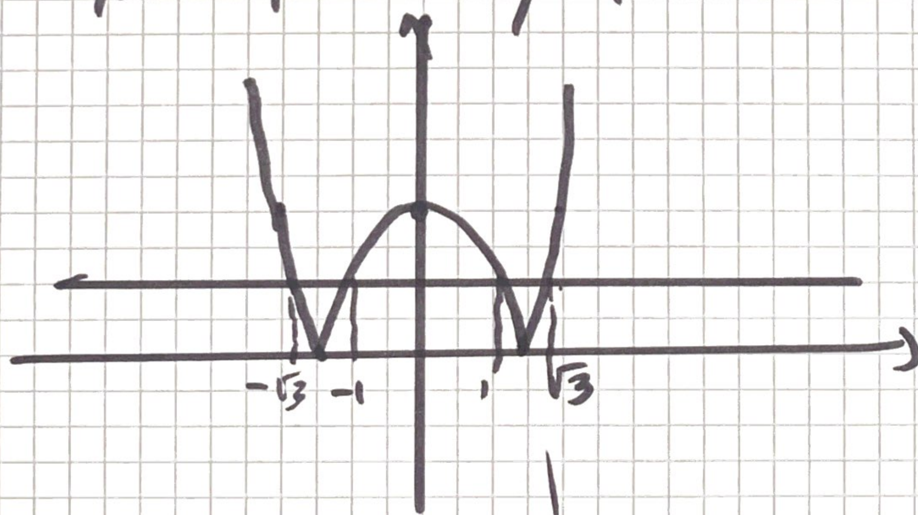
$$-1 \leq x \leq 1 \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3}$$



$$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [-1, 1] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$$

GRAFICAMENTE

$y = |x^2-2|$ $\qquad$ $y = 1$



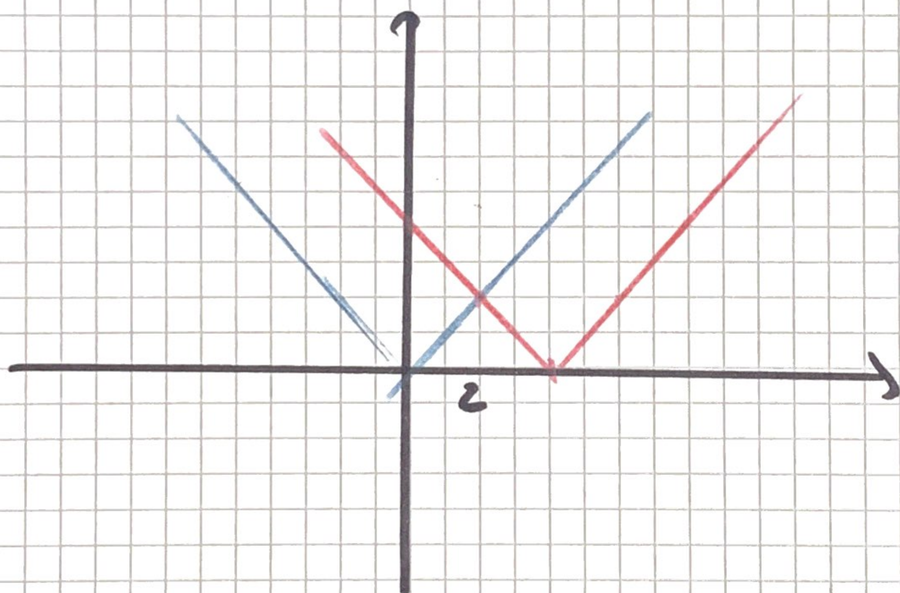
3) $|x| + |x-4| = -3$?

4) $|x^2 - x| + |x| = 0$?

5) $\sqrt{(4-x)^2} = |x| \Rightarrow$

$$\overset{\text{rosso}}{|4-x|} = \overset{\text{blu}}{|x|}$$

graficamente



$(4-x)^2 = x^2 \Rightarrow 16 + x^2 - 8x = x^2$

$x = 2$