Esercizio 1

Esprimere in forma algebrica i numeri complessi:

- $(1-i)^3$
- $(-1+2i)(-1-2i)$
- $(1-i)^{37}$
  Sugg.: Cominciare esprimendo $1-i$ in forma trigonometrica.
- $(-1+i\sqrt{3})^{10}$
  Sugg.: Cominciare esprimendo $-1+i\sqrt{3}$ in forma trigonometrica.
- $1+\frac{4-i}{1+2i}$
- $\frac{i(2-i)}{5i-1}$
- $\frac{\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3}{3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$
- $\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3 3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
- $\left(\frac{1}{i}\right)^4$
- $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$

Esercizio 1, svolgimento

- $(1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = (1-2i-1)(1-i) = -2i(1-i) = -2i-2 = -2-2i$
- $(-1+2i)(-1-2i) = (-1+2i)\overline{-1+2i} = |-1+2i|^2 = 1+4 = 5$
- $(1-i)^{37} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{37} = (\sqrt{2})^{37}\left(\cos\frac{259\pi}{4} + i\sin\frac{259\pi}{4}\right) = 2^{18}\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{18}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2^{18} + 2^{18}i$
- $(-1+i\sqrt{3})^{10} = \left[2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{10} = \left[2\left(\cos 2\pi 3 + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^9 + 2^9\sqrt{3}i$
- $1 + \frac{4-i}{1+2i} = \frac{1+2i+4-i}{1+2i} = \frac{5+i}{1+2i}\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{5-10i+i+2}{1+4} = \frac{7-9i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{9}{5}i$
- $\frac{i(2-i)}{5i-1} = \frac{2i+1}{5i-1}\frac{5i+1}{5i+1} = \frac{-10+2i+5i+1}{-25-1} = -\frac{9}{26} - \frac{7}{26}i$
- $\frac{\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3}{3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{8(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)}{3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{8}{3}\frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{8}{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{3}i$

Esercizio 1, svolgimento (cont.)

- $\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3 3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$
  $8(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=24\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=12\sqrt{3}+12i$
- $\left(\frac{1}{i}\right)^4=\frac{1}{i^4}=1$
- $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=\left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^3=\left(\frac{2i}{2}\right)^3=i^3=-i$

Esercizio 2

Esprimere in forma trigonometrica i numeri complessi:

- $(1-i)^5(-1+i\sqrt{3})$
- $\frac{(1-i)^5}{-1+i\sqrt{3}}$

Svolgimento.

- $(1-i)^5(-1+i\sqrt{3}) = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^5 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$
$8\sqrt{2}\left(\cos\frac{35\pi}{4} + i\sin\frac{35\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$
$8\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$
$8\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$
- $\frac{(1-i)^5}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^5}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}\frac{\left(\cos\frac{35\pi}{4}+i\sin\frac{35\pi}{4}\right)}{\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} =$
$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{97\pi}{12} + i\sin\frac{97\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

Esercizio 3

Risolvere in campo complesso le equazioni:

a $z^3 = -8$

b $iz^3 + 1 = 0$

c $z^2 = -1 - i\sqrt{3}$

Esercizio 3, svolgimento

a Si ha $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. Le soluzioni cercate sono quindi i numeri

$$z_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right), \text{ per } k\in\{0,1,2\}$$

cioè:

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1+\sqrt{3}i\\
z_1 &= 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2\\
z_2 &= 2\left(\cos\tfrac{5\pi}{3} + i\sin\tfrac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1-\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

Esercizio 3, svolgimento (cont.)

b L'equazione è equivalente a

$$z^3 = -\frac{1}{i} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

le cui soluzioni sono i numeri

$$z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \text{ per } k \in \{0, 1, 2\}$$

cioè:

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i \\ z_1 &= \cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i \\ z_2 &= \cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2} = -i \end{aligned}$$

Esercizio 3, svolgimento (cont.)

c Si ha $-1-\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Pertanto le soluzioni cercate sono i numeri

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right), \text{ per } k \in \{0,1\}$$

cioè:

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$
$$z_1 = -z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

Esercizio 4

Esprimere in forma algebrica le soluzioni delle equazioni complesse:

a $iz^2 - 2z + 3i = 0$

b $z^2 - (2+4i)z + 4i - 12 = 0$

c $iz^2 + 2z - 2\sqrt{2} = 0$

d $z^2 - 2z + 6(1-2i) = 0$

Esercizio 4, svolgimento

a L'equazione è equivalente a $z^2 + 2iz + 3 = 0$, il cui discriminante ridotto è $i^2 - 1 \cdot 3 = -4$. Le radici quadrate del discriminante sono i numeri $\pm 2i$. Pertanto le soluzioni cercate sono i numeri $-i \pm 2i$, cioè i numeri $-3i, i$.

b Il discriminante dell'equazione è

$$(1+2i)^2 - 4i + 12 = 1 + 4i - 4 - 4i + 2 = 9$$

Le soluzioni cercate sono quindi i numeri $1 + 2i \pm 3$, cioè i numeri $-2 + 2i, 4 + 2i$.

Esercizio 4, svolgimento (cont.)

c L'equazione è equivalente a $z^2 - 2iz + 2\sqrt{2}i = 0$. Il discriminante ridotto è $(-i)^2 - 2\sqrt{2}i = -1 - 2\sqrt{2}i$. Le radici quadrate del discriminante sono i numeri $w = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, tali che $w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = -1 - 2\sqrt{2}i$. Questo si traduce nel sistema a incognite reali:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ xy = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Poiché deve essere $x \neq 0$, dalla seconda equazione si ricava $y = -\frac{\sqrt{2}}{x}$, che sostituito nella prima equazione del sistema fornisce $x^2 - \frac{2}{x^2} + 1 = 0$, da cui $x^4 + x^2 - 2 = 0$. Segue che $x^2 = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2}$. Poiché x è reale, questo significa che $x^2 = 1$, da cui $x = \pm 1$ e di conseguenza $y = \mp\sqrt{2}$. Quindi $w = \pm 1 \mp \sqrt{2}i$.

Finalmente, le soluzioni cercate sono i numeri $i \pm 1 \mp \sqrt{2}i$, cioè

$$1 + (1 - \sqrt{2})i \quad \text{e} \quad -1 + (1 + \sqrt{2})i$$

d Il discriminante ridotto è $1 - 6(1-2i) = -5 + 12i$. Le radici quadrate del discriminante sono i numeri $w = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, tali che $w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i$. Questo si traduce nel sistema a incognite reali:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Poiché deve essere $x \neq 0$, dalla seconda equazione si ricava $y = \frac{6}{x}$, che sostituito nella prima equazione del sistema fornisce $x^2 - \frac{36}{x^2} + 5 = 0$, da cui $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$. Segue che $x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1699}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$. Poiché x è reale, questo significa che $x^2 = 4$, da cui $x = \pm 2$ e di conseguenza $y = \pm 3$. Quindi $w = \pm 2 \pm 3i$.
Finalmente, le soluzioni cercate sono i numeri $1 \pm 2 \pm 3i$, cioè

$$-1 - 3i \quad \text{e} \quad 3 + 3i$$