Esercizi

1. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x & -y & +z & = 0 \\ 2x & -y & -2z & = 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Riducendo la matrice dei coefficienti del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 2R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Si può pertanto scegliere z come variabile libera e ottenere $\begin{cases} 2x & -y & = & 2z \\ & -y & = & -4z \end{cases}$, da cui $y = 4z$ e quindi $2x = 6z$, cioè $\begin{cases} x & = & 3z \\ y & = & 4z \end{cases}$. L'insieme della soluzioni del sistema è quindi l'insieme dei multipli di $(3, 4, 1)$, cioè $\mathcal{L}((3, 4, 1))$.

Esercizi

2. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x & -2y & +z & & = 0 \\ & y & +z & +t & = 0 \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice dei coefficienti del sistema lineare omogeneo è $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed è una matrice ridotta per righe. Si possono scegliere z, t come variabili libere, ottenendo $\begin{cases} x & -2y & = & -z & \\ & y & = & -z & -t \end{cases}$ e quindi $x = 2y - z = -3z - 2t$.
Due soluzioni fondamentali si trovano ponendo $z = 1, t = 0$ e $z = 0, t = 1$. L'insieme delle soluzioni è quindi l'insieme delle combinazioni lineari di $(-3, -1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1)$, cioè $\mathcal{L}((-3, -1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1))$.

Esercizi

3. Risolvere il sistema d'equazioni lineari

$$\begin{cases} 3x & -2y & & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 3 \\ 2x & -3y & -z & = & -2 \end{cases}$$

Svolgimento. La terza equazione è la differenza delle altre due, il sistema ha pertanto le stesse soluzioni del sistema $\begin{cases} 3x & -2y & & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 3 \end{cases}$. Poiché queste equazioni non sono multiple l'una dell'altra, il rango della matrice dei coefficienti e il rango delle matrice completa coincidono, e le soluzioni dipendono dalla scelta di 1 variabile libera. Dalla prima equazione si ottiene $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ e dalla seconda $z = -x - y + 3 = -\frac{5}{2}x + 3$. Pertanto le soluzioni sono descritte da: $\begin{cases} x & = & t \\ y & = & \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} \\ z & = & -\frac{5}{2}t + \frac{7}{2} \end{cases}$.

4. Risolvere il sistema d'equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x & +2y & = & 4 \\ x & +y & = & 1 \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 1, perché consiste di 2 righe non nulle proporzionali; la matrice completa $\begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 4 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2, perché consiste di 2 righe non proporzionali. Pertanto il sistema è incompatibile.

5. Risolvere il sistema d'equazioni lineari

$$\begin{cases} x & & +z & = & 3 \\ x & +y & +z & = & 4 \end{cases}$$

Svolgimento. $rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} = 2.$ Pertanto il sistema è risolubile e ha ∞^1 soluzioni. Scegliendo z come variabile libera si ottiene $x = -z + 3$ e $y = -x - z + 4 = 1$, ovvero $\begin{cases} x & = & -t + 3 \\ y & = & 1 \\ z & = & t \end{cases}$.

Esercizi

6. Risolvere il sistema d'equazioni lineari

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 3 \\ x & +y & -2z & = & 4 \\ 3x & -y & & = & 5 \end{cases}$$

Svolgimento. La riduzione della matrice del sistema fornisce
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & -2 & | & 4 \\ 3 & -1 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 2 & -3 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix}$. Quindi il rango della matrice dei coefficienti è 2, mentre il rango della matrice completa è 3. Il sistema è incompatibile.

7. Risolvere il sistema d'equazioni lineari

$$\begin{cases} x & +y & & = & 2 \\ x & +(k+1)y & +z & = & 3 \\ 2x & +(k+2)y & +z & = & k+3 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

Svolgimento. Applicando operazioni elementari sulle righe della matrice completa: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & k+1 & 1 & 3 \\ 2 & k+2 & 1 & k+3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1}$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & k-1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{array}\right)$. Pertanto la matrice dei coefficienti ha rango 2, mentre la matrice completa ha rango 2 se $k = 2$, mentre ha rango 3 se $k \neq 2$. Quindi:

- Se $k \neq 2$ il sistema è incompatibile.
- Se $k = 2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni, che sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$. Scelto z come variabile libera si ottiene $2y = -z + 1$, cioè $y = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$, e $x = -y + 2 = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}$. Le soluzioni del sistema sono: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$.

Esercizi

8. Un bambino nasconde dietro il letto la sua collezione segreta, che consiste di 120 esemplari tra: acari, blatte, caccole e detriti vari. La somma del numero di acari e di caccole è pari alla somma del numero di blatte e di detriti, ma i detriti sono il doppio delle blatte. Dopo un mese, la quantità degli acari è cresciuta del 20%, le blatte del 10%, i detriti del 5%, ma il 10% delle caccole è andato perduto. Sapendo che in tutto la collezione si è arricchita di 7 esemplari, determinare la composizione iniziale della collezione.

Svolgimento. Denotati a, b, c, d il numero di acari, blatte, caccole e detriti, rispettivamente, il problema si traduce in un sistema di equazioni lineari; per la natura del problema, si cercano le soluzioni $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$. Il sistema è
$$\begin{cases} a+b+c+d & = & 120 \\ a+c & = & b+d \\ d & = & 2b \\ \frac{6}{5}a+\frac{11}{10}b+\frac{9}{10}c+\frac{21}{20}d & = & 127 \end{cases},$$
ovvero
$$\begin{cases} a & +b & +c & +d & = & 120 \\ a & -b & +c & -d & = & 0 \\ & 2b & & -d & = & 0 \\ \frac{6}{5}a & +\frac{11}{10}b & +\frac{9}{10}c & +\frac{21}{20}d & = & 127 \end{cases}.$$
Applicando alle righe della matrice del sistema operazioni elementari,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 120 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & | & 0 \\ \frac{6}{5} & \frac{11}{10} & \frac{9}{10} & \frac{21}{20} & | & 127 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - \frac{6}{5}R_1}}$$

Svolgimento (cont). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 120 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & | & -120 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{3}{20} & | & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to -20R_4]{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 60 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & |0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & |340 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_2]{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & -120 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & | & 220 \end{pmatrix}.$$

Quest'ultima è la matrice del sistema equivalente

$$\begin{cases} a & +b & +c & +d & = & 120 \\ & b & & +d & = & 60 \\ & & & -3d & = & -120 \\ & & 6c & +d & = & 220 \end{cases}$$

. Dalla terza equazione si ricava $d = 40$; sostituendo nella seconda e nella terza si ottiene $b = 20$, $c = 30$ e finalmente, dalla prima, $a = 30$. Poiché $(30, 20, 30, 40) \in \mathbb{N}^4$, la soluzione del sistema $(30, 20, 30, 40)$ è soluzione del problema.

Esercizi

9. Bilanciare la reazione

$$Cu + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + H_2O + SO_2$$

Svolgimento. Si devono trovare numeri naturali x, y, z, s, t tali che gli atomi in x molecole Cu più y molecole H_2SO_4 siano gli stessi che in z molecole $CuSO_4$ più s molecole H_2O più t molecole SO_2. Questo fornisce le equazioni:

- per Cu: $x = z$
- per H: $2y = 2s$
- per S: $y = z + t$
- per O: $4y = 4z + s + 2t$

da cui il sistema lineare omogeneo $\left\{\begin{array}{cccccl} x & & -z & & & = 0 \\ & 2y & & -2s & & = 0 \\ & y & -z & & -t & = 0 \\ & 4y & -4z & -s & -2t & = 0 \end{array}\right.$.

Riducendo la matrice dei coefficienti:

Svolgimento (cont).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 4R_2]{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 4R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to -R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$ Scegliendo t come variabile libera si ottiene successivamente:

Esercizi

Svolgimento (cont)**.**

$$\begin{array}{rcl} s & = & 6t \\ z & = & s - t = 5t \\ y & = & s = 6t \\ x & = & z = 5t \end{array}$$

Le soluzioni del sistema sono quindi $\begin{cases} x = 5u \\ y = 6u \\ z = 5u \\ s = 6u \\ t = u \end{cases}$ con $u \in K$. Per la natura del problema, le soluzioni cercate sono quelle soluzioni del sistema che hanno componenti numeri naturali, quindi:

$$\begin{cases} x = 5u \\ y = 6u \\ z = 5u \\ s = 6u \\ t = u \end{cases}, \text{ con } u \in \mathbb{N}$$

10. Determinare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ k & 2k & k+1 \\ 2k & 4k & 2k \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Esercizi

Svolgimento. Riducendo per righe la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ k & 2k & k+1 \\ 2k & 4k & 2k \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2kR_1]{R_2 \to R_2 - kR_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & -k^2+2k & -2k^2+k+1 \\ 0 & -2k^2+4k & -4k^2+2k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & -k^2+2k & -2k^2+k+1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & -k(k-2) & -2k^2+k+1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto:

- Per $k \notin \{0, 2\}$ la matrice ha rango 3
- Per $k \in \{0, 2\}$ la matrice ha rango 2