Algebra per Informatica

Esame 07/09/2023

Svolgere nel foglio di consegna i seguenti esercizi **motivando chiaramente** le risposte.

Esercizio 1. Sia dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x \leq 6\}$. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $R = A/\sim_1$, dove $\sim_1$ è la relazione d'equivalenza diagonale, cioè $x \sim_1 y \iff x = y$.
2. $S = A/\sim_2$, dove $\sim_2$ è la relazione d'equivalenza data da $x \sim_2 y \iff x - y = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$.
3. $T = A/\sim_3$, dove $\sim_3$ è la relazione d'equivalenza data da $x \sim_3 y \iff x^2 = y^2$.
4. $V = A \times A$.

Soluzione.

1. Siccome $x \sim_1 y \iff x = y$, le classi di equivalenza sono costituite da singoletti, pertanto
$$R = \{\{-6\}, \{-5\}, \dots, \{6\}\}$$
e quindi $|R| = 13$.
2. Abbiamo 4 classi di equivalenza distinte, corrispondenti alle possibili classi di resto modulo 4. Pertanto $|S| = 4$.
3. Abbiamo $x \sim_3 y \iff x^2 = y^2 \iff x = \pm y$. Pertanto, le classi di equivalenza sono
$$\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \dots, \{6, -6\}.$$
Quindi $|T| = 7$.
4. Abbiamo $|V| = |A \times A| = |A| \cdot |A| = 13 \cdot 13 = 169$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x, y) = 44x + 21y$.

1. Determinare se f è iniettiva e/o surgettiva.
2. Determinare $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(44)$.

Soluzione. Si ricordi che l'equazione diofantea $ax + by = c$ ha soluzioni intere se e soltanto se $\mathrm{MCD}(a, b) \mid c$. Inoltre, se $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ è una soluzione dell'equazione diofantea $ax + by = c$ con $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$, allora tutte le soluzioni si scrivono come $(x, y) = (x_0 + bk, y_0 - ak)$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

1. La funzione f è surgettiva in quanto $\mathrm{MCD}(44, 21) = 1$, pertanto per ogni $c \in \mathbb{Z}$ esistono sempre $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tali che $f(x_0, y_0) = c$. La funzione f non è iniettiva, si consideri ad esempio $f(21, -44) = 0 = f(0, 0)$.

2.
   - $f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 44x + 21y = 0\}$. Una soluzione particolare dell'equazione diofantea $44x + 21y = 0$ è data da $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Pertanto abbiamo
   $$f^{-1}(0) = \{(21k, -44k) : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$
   - Una soluzione particolare dell'equazione diofantea $44x + 21y = 44$ è data da $(x_0, y_0) = (1, 0)$ e quindi
   $$f^{-1}(44) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 44x + 21y = 44\} = \{(1 + 21k, -44k) : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Esercizio 3. Sia dato il numero complesso

$$z = \left((2i + 1)(3 + i) - 8i^5\right)^8$$

Scrivere z in forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, in forma trigonometrica, e in forma esponenziale.

Soluzione. Svolgiamo prima i calcoli all'interno della parentesi più esterna

$$(2i + 1)(3 + i) - 8i^5 = 6i + 2i^2 + 3 + i - 8i = 6i - 2 + 3 + i - 8i = 1 - i.$$

Pertanto, $z = (1 - i)^8$. Per eseguire l'elevamento a potenza, scriviamo $1 - i$ in forma trigonometrica. La norma è $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. L'argomento θ di $1 - i$ è dato da

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

cioè $\theta = -\frac{\pi}{4}$, o equivalentemente $\theta = \frac{7}{4}\pi$. Possiamo scrivere

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right).$$

Dalla formula di De Moivre ricaviamo

$$\begin{aligned} z = (1 - i)^8 &= (\sqrt{2})^8 \left(\cos\left(8 \cdot \frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(8 \cdot \frac{7}{4}\pi\right)\right) \\ &= 16\left(\cos(14\pi) + i \sin(14\pi)\right) \\ &= 16\left(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)\right) \\ &= 16e^{2\pi i} \\ &= 16. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{Z}_{28}$.

1. Calcolare $\overline{9}^{147}$.
2. Determinare l'ordine dei seguenti elementi del gruppo degli elementi invertibili $(\mathrm{U}(\mathbb{Z}_{28}), \cdot, \overline{1})$:
$$\overline{9},\ \overline{3},\ \overline{2}.$$

Soluzione. Per prima cosa calcoliamo $\varphi(28) = 12$ e ricordiamo che per il teorema di Eulero, dato $x \in \mathbb{Z}$ tale che $\mathrm{MCD}(x, 28) = 1$ allora $\overline{x}^{12} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{28}$.

1. Consideriamo la divisione euclidea $147 = 12 \cdot 12 + 3$, abbiamo pertanto
$$\overline{9}^{147} = \overline{9}^{12\cdot 12+3} = \left(\overline{9}^{12}\right)^{12} \cdot \overline{9}^3 = \overline{1} \cdot \overline{9}^3 = \overline{9}^2 \cdot \overline{9} = \overline{81} \cdot \overline{9} = \overline{25} \cdot \overline{9} = \overline{225} = \overline{1}.$$

2. Ricordiamo che l'ordine moltiplicativo di un elemento in $\mathrm{U}(\mathbb{Z}_{28})$ dev'essere un divisore dell'ordine $|\mathrm{U}(\mathbb{Z}_{28})| = \varphi(28) = 12$.
   - Abbiamo già calcolato $\overline{9}^2 = \overline{25}$ e $\overline{9}^3 = \overline{1}$. Pertanto[1] $\mathrm{ord}(\overline{9}) = 3$.
   - Calcoliamo soltanto le potenze $\overline{3}^d$ con $d \mid 12$.
   $$\begin{aligned} \overline{3}^2 &= \overline{9}, \\ \overline{3}^3 &= \overline{27} = -\overline{1}, \\ \overline{3}^4 &= (\overline{3}^2)^2 = \overline{9}^2 = \overline{81} = \overline{25}, \\ \overline{3}^6 &= (\overline{3}^3)^2 = (-\overline{1})^2 = \overline{1}. \end{aligned}$$
   Pertanto $\mathrm{ord}(\overline{3}) = 6$.
   - Osserviamo che $\mathrm{MCD}(2, 28) = 2 \neq 1$, pertanto $\overline{2} \notin \mathrm{U}(\mathbb{Z}_{28})$, cioè $\overline{2}$ non è un elemento del gruppo.

[1] Notare che sapendo che $\mathrm{ord}(\overline{9}) = 3$ nel punto 1. si sarebbe potuto effettuare la divisione euclidea di 147 per 3 anzichè per 12.