Lezione 12 - sup, inf, derivata

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione

(o limitata dall'alto)

- f si dice superiormente limitata su A se $\exists M > 0$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$.

- $x_M \in A$ si dice punto di massimo di f in A se $f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in A$

- $M \in \mathbb{R}$ è detto estremo superiore di f in A se
  (i) $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$
  (ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A$ t.c. $f(x) > M - \varepsilon$.

$$M = \sup(f)$$

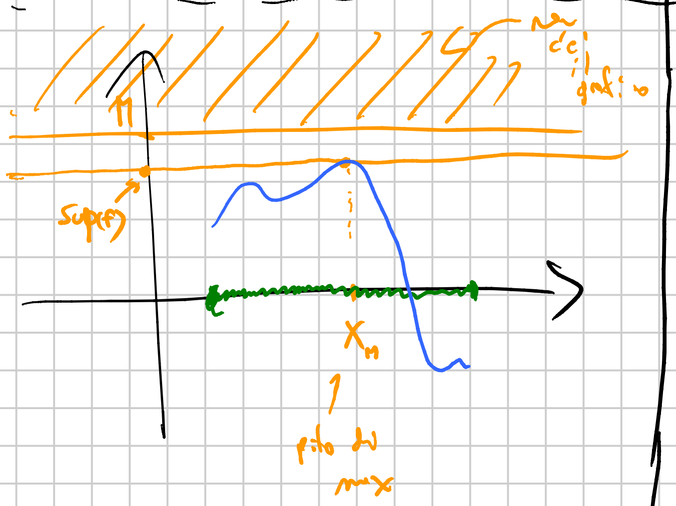
(o limitata dal basso)

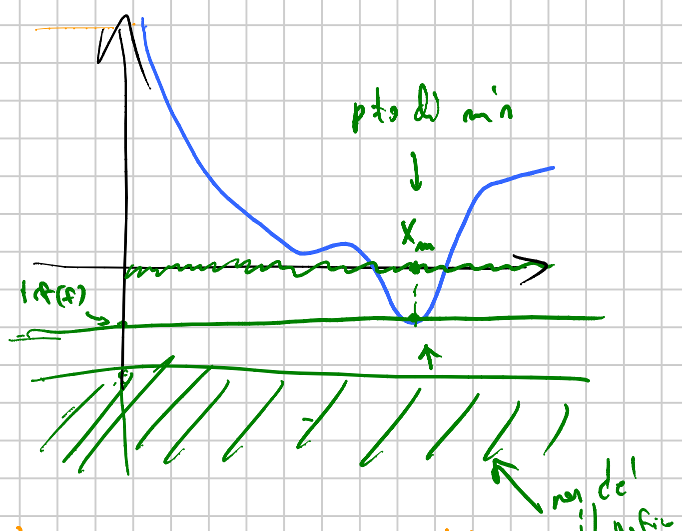
- f si dice inferiormente limitata su A se $\exists M > 0$ tale che $f(x) \geq -M$ per ogni $x \in A$

- $x_m \in A$ si dice punto di minimo di f in A se
$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

- $m \in \mathbb{R}$ è detto estremo inferiore di f in A se
  (i) $f(x) \geq m \quad \forall x \in A$
  (ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : f(x) < m + \varepsilon$

$$m = \inf(f)$$

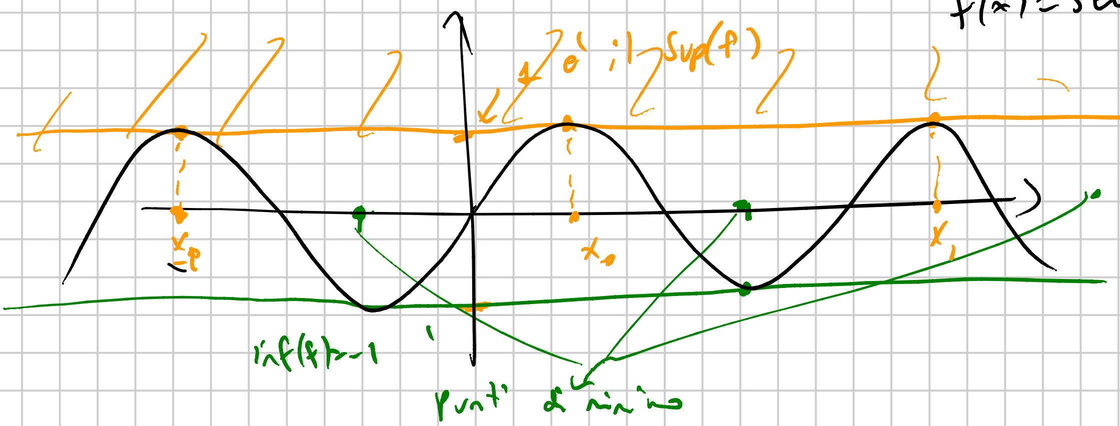




in questo caso f non è limitata superiormente

$f(x) = \text{sen}(x)$

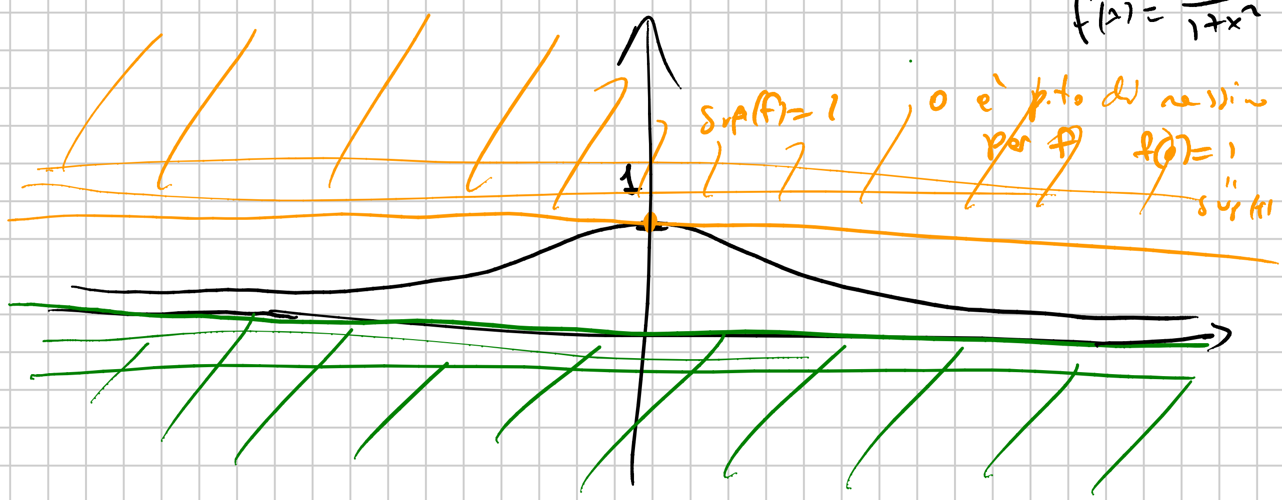
$Im(f) = [-1, 1]$



$x_M = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ sono tutti punti di MASSIMO

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$Im(f) = (0, 1]$



inf(f) = 0

se $\exists\ x_m$ punto di minimo avremmo $f(x_m) = \inf(f)$ $\rightsquigarrow$ in questo caso NON ci sono PUNTI DI MINIMO.

$$\frac{1}{1+x_m^2} = 0 \iff 1 = (1+x_m^2)\cdot 0 = 0 \quad \text{↯}.$$

Una funzione si dice realizzare il massimo se $\exists\ x_M$ punto di massimo. In questo caso si dice $\sup(f) = \max(f)$.

Una funzione si dice realizzare il minimo se $\exists\ x_m$ punto di minimo. In questo caso si dice $\inf(f) = \min(f)$.

Teorema Supponiamo f sia superiormente limitata. Allora $\exists\ \sup(f) \in \mathbb{R}$

Supponiamo f sia inferiormente limitata. Allora $\exists\ \inf(f) \in \mathbb{R}$

Convinzione: se f non è sup. limitata $\sup(f) = +\infty$

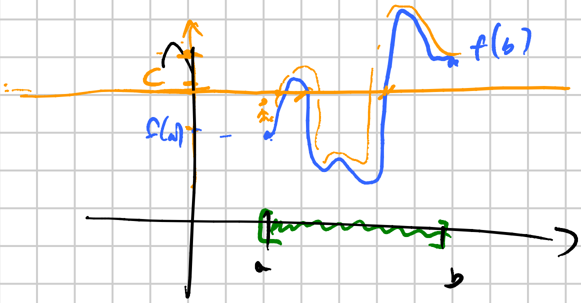
se f non è inf. limitata $\inf(f) = -\infty$.

C (completezza di $\mathbb{R}$): questa prop. NON è vera se ci restringo a $\mathbb{Q}$.

Remark. Se f è limitata dall'alto e dal basso allora $Im(f) \subseteq [\inf(f), \sup(f)]$.

Teorema (Weierstrass) Sia $f : \underbrace{[a,b]}_{\text{int. chiuso e limitato}} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\exists\, x_M, x_m \in [a,b]$ risp. punto di max e punt. di minimo. In particolare f realizza il massimo e il minimo.

Teorema (del valor medio) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a) \leq c \leq f(b)$, allora $\exists\, x \in [a,b]$ tale che $f(x) = c$.



Se $f(a) \leq c \leq f(b)$ allora $y = c$ INTERSECA grafico(f).

Corollario (Weierstrass + Teo. valor medio) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua allora $Im f = [\inf(f), \sup(f)]$.

(Inoltre $\inf(f) = \min(f) \in \mathbb{R}$ $\sup(f) = \max(f) \in \mathbb{R}$).

$\boxed{\text{Derivata}}$

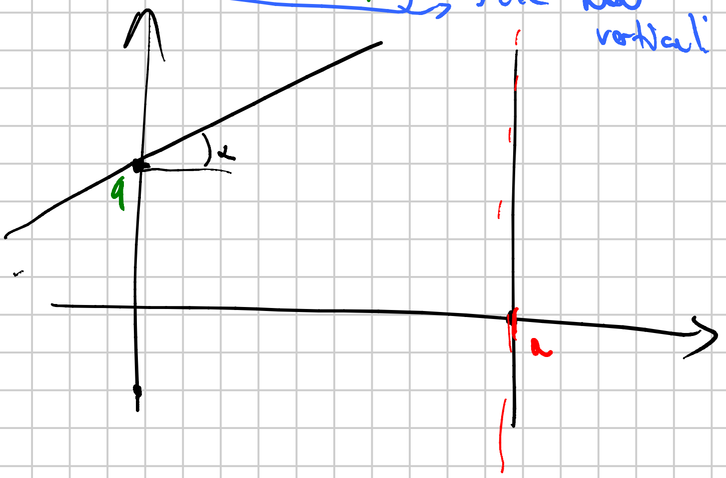
Preliminari: geometria del piano, in particolare rette.

coeff. angolare

$$y = \boxed{m}\,x + \boxed{q} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{x = a}$$

$m = tg(\alpha)$; q termine noto ; rette verticali

rette non verticali



Dati due punti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, tali che $P_0 \neq P_1$, qual è la retta che passa per P_0 e P_1?

Impongo il passaggio. $r = \{ y = mx + q \}$, allora $P_0 \in r \iff$

$(x_0, y_0) \in \{ y = mx + q \} \iff x_0, y_0$ verificano l'equazione $y = mx + q$

$$\begin{array}{l} P_0 \in r \\ P_1 \in r \end{array} \quad \begin{cases} y_0 = m x_0 + q \\ y_1 = m x_1 + q \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y_0 = m x_0 + q \\ y_1 - y_0 = m (x_1 - x_0) \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 + q \\ \boxed{m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}} \end{cases}$$

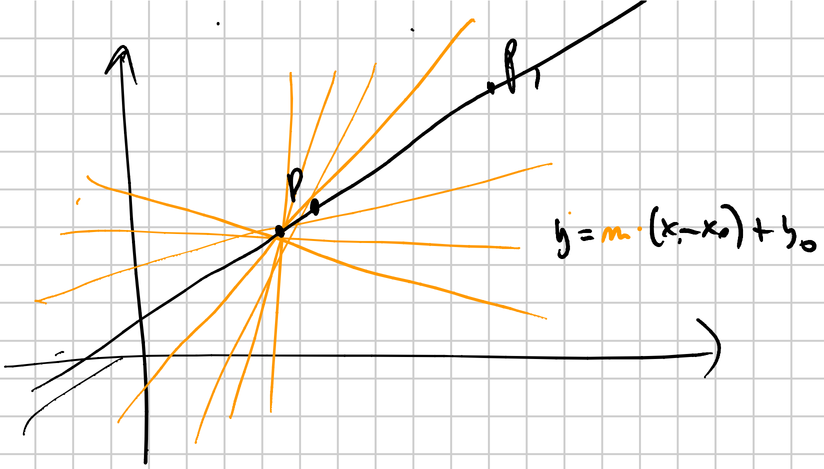
$$\boxed{q = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0}$$

"formula esplicita"

$$y = \boxed{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}\, x + y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 \iff \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

"formula implicita della retta passante per 2 punti"

$$= \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) \cdot (x - x_0) + y_0$$



Supponiamo ora di avere una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in[a,b]$. Considero $P_0=(x_0, \overbrace{f(x_0)}^{y_0})$ (il punto del grafico corrispondente ad x_0.

Voglio definire la retta "tangente" al grafico, come il limite delle rette secanti, cioè quelle passanti per P_0 e $P_1=(x_1, \overbrace{f(x_1)}^{y_1})$ dove $x_1\to x_0$.

Ciascuna di queste rette è della forma

$$y = m_{P_1}\cdot(x-x_0)+y_0 \qquad m_{P_1} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Domanda 1) esiste m_{P_0}? No, perché avrei $\frac{f(x_0)-f(x_0)}{x_0-x_0}=\frac{0}{0}$ impossibile,

però posso fare una procedura di $\boxed{\text{limite}}$

$$f'(x_0) = m_{\text{Tangente}} = \lim_{x_1\to x_0} m_{P_1} = \lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$\boxed{\text{Def.}}$ f si dice <u>DERIVABILE</u> in x_0 se $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

e in questo caso $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Definizione geometrica della derivata

$f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto $[x_0, f(x_0)]$, pensata come limite delle secanti