Le operazioni in componenti

Utilizzando le proprietà delle operazioni, le componenti dei vettori ne permettono il calcolo per via algebrica.

La somma in componenti

Siano

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$$
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Allora

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}) + (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = \\ &= (u_x\vec{i} + v_x\vec{i}) + (u_y\vec{j} + v_y\vec{j}) + (u_z\vec{k} + v_z\vec{k}) = \\ &= (u_x + v_x)\vec{i} + (u_y + v_y)\vec{j} + (u_z + v_z)\vec{k} \end{aligned}$$

Il vettore somma $\vec{u} + \vec{v}$ ha componenti $(u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$, cioè la somma delle componenti dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Il prodotto per scalari in componenti

Siano

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Allora

$$\begin{aligned} \lambda \vec{v} &= \lambda(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \\ &= \lambda v_x \vec{i} + \lambda v_y \vec{j} + \lambda v_z \vec{k} \end{aligned}$$

Il vettore prodotto $\lambda \vec{v}$ ha componenti $(\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z)$, cioè il prodotto di λ per le componenti di $\vec{v}$.

Il prodotto scalare

Il *prodotto scalare* è un'operazione che prende in input una coppia di vettori $(\vec{u}, \vec{v})$ e restituisce un numero $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Per definire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, sia $\alpha \leq \pi$ l'angolo che formano i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Si pone allora

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$$

Esempio. Se $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, allora $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Esempi di base

Si considerino i prodotti scalari dei versori fondamentali $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}| \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \text{perché } \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Similmente

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

Invece

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}| \cos 0 = 1$$

Similmente

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

Più in generale, per *qualunque* $\vec{v}$, si ha

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \cos 0 = |\vec{v}|^2, \quad \text{quindi: } \vec{v} \cdot \vec{v} = 1 \Leftrightarrow \vec{v} \text{ è un versore}$$

Un'interpretazione geometrica

Siano $\vec{u}, \vec{v}$ vettori, con $\vec{v} \neq \vec{0}$, formanti un angolo α.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$$

In un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale alla lunghezza dell'ipotenusa moltiplicata per il coseno dell'angolo compreso tra i due. Pertanto

$$|\vec{u}| \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

è la lunghezza (con segno) del vettore $\vec{u}_\perp$, proiezione ortogonale di $\vec{u}$ su $\vec{v}$. Quindi

$$\begin{aligned} \vec{u}_\perp &= (|\vec{u}| \cos \alpha) vers(\vec{v}) = |\vec{u}| \cos \alpha \left(\tfrac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \right) = \tfrac{|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \\ &= \tfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \end{aligned}$$

Proprietà del prodotto scalare

Il prodotto scalare

- è commutativo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- è omogeneo: $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- è distributivo rispetto alla somma:

$$\begin{array}{rcl} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} & = & \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) & = & \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{array}$$

- è definito positivo:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$$
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

Alcune di queste proprietà si dimostrano direttamente dalla definizione; per altre puè essere utile usare l'interpretazione geometrica.

Cenno di dimostrazioni

Sia α l'angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Allora $\pi - \alpha$ è l'angolo tra $-\vec{u}$ e $\vec{v}$.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha = |\vec{v}||\vec{u}| \cos\alpha = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $$(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\lambda\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha = |\lambda||\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{se} \quad \lambda \geq 0 \\ |\lambda\vec{u}||\vec{v}| \cos(\pi - \alpha) = |\lambda||\vec{u}||\vec{v}| \cos(\pi - \alpha) & \\ \qquad = -\lambda|\vec{u}||\vec{v}|(-\cos\alpha) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{se} \quad \lambda < 0 \end{cases}$$
- Per $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ utilizzare l'interpretazione geometrica e la regola di concatenazione per la somma di vettori

Il prodotto scalare in componenti

Usando le proprietà del prodotto scalare e i prodotti scalari dei versori fondamentali, si possono calcolare tutti i prodotti scalari in componenti senza usare la definizione di prodotto scalare. In particolare si può evitare l'utilizzo del termine $\cos\alpha$, solitamente difficile da gestire — e anzi si può ricavarlo se non noto.

Siano $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ e $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Allora

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k})\cdot(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) =$$

$$\begin{aligned}
= u_x v_x \vec{i}\cdot\vec{i} \quad &+u_x v_y \vec{i}\cdot\vec{j} \quad &+u_x v_z \vec{i}\cdot\vec{k}+\\
+u_y v_x \vec{j}\cdot\vec{i} \quad &+u_y v_y \vec{j}\cdot\vec{j} \quad &+u_y v_z \vec{j}\cdot\vec{k}+\\
+u_z v_x \vec{k}\cdot\vec{i} \quad &+u_z v_y \vec{k}\cdot\vec{j} \quad &+u_z v_z \vec{k}\cdot\vec{k} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= u_x v_x + & & \\
& +u_y v_y + & \\
& & +u_z v_z
\end{aligned}$$

Il prodotto scalare in componenti

cioè $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$: il prodotto scalare di due vettori è la somma dei prodotti delle loro componenti *omonime*.

In particolare

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

da cui

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

permette di calcolare il modulo di un vettore in componenti.

Angolo tra vettori

Se $\vec{u}, \vec{v}$ sono vettori non nulli che formano un angolo α, da

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$$

si ottiene

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

ovvero

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Questa relazione permette di calcolare l'angolo tra due vettori se è noto il loro prodotto scalare (che, per esempio, può essere calcolato per componenti).

Esempio

Siano $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$. Allora:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{j} + \vec{k}) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

Se α è l'angolo fra i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$$

da cui

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Poiché

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

segue

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \text{cioè } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Il prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è un'operazione che prende in input una coppia di vettori $(\vec{u}, \vec{v})$ *dello spazio* e restituisce un vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Siano dunque $\vec{u}, \vec{v}$ vettori, e sia α l'angolo formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$, con $0 \leq \alpha \leq \pi$. Il vettore $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ è definito dalle condizioni seguenti:

(i) la direzione di $\vec{w}$ è perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

(ii) il verso di $\vec{w}$ è determinato dalla *regola della mano destra*: $\vec{w}$ ha verso concorde a un osservatore che, sul piano determinato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nota che $\vec{u}$ per sovrapporsi a $\vec{v}$ deve ruotare in senso antiorario di un angolo α

(iii) $|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha$

Nota: Le condizioni (i) e (ii) sono problematiche nel caso in cui $\vec{u}$ e $\vec{v}$ siano paralleli. Tuttavia in tal caso $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$, cioè $\sin \alpha = 0$, da cui la (iii) fornisce $|\vec{w}| = 0$, ovvero $\vec{w} = \vec{0}$.

Esempi di base

Si considerino i prodotti vettoriali dei versori fondamentali $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\begin{array}{ccc}
\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} & \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \\
\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} & \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0} & \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\
\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} & \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}
\end{array}$$

Il calcolo del prodotto vettoriale direttamente dalla definizione è generalmente molto complicato.

Utilizzando la tabella qui sopra e alcune proprietà notevoli del prodotto vettoriale, per il calcolo esplicito si possono usare le componenti dei vettori.

Proprietà del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale

- è anticommutativo: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
  (da cui segue anche che $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$)
- è omogeneo: $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- è distributivo rispetto alla somma:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$
$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

Il prodotto vettoriale in componenti

Siano $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ e $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Allora:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}) \wedge (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) =$$

$$\begin{array}{lll} = u_x v_x \vec{i} \wedge \vec{i} & +u_x v_y \vec{i} \wedge \vec{j} & +u_x v_z \vec{i} \wedge \vec{k} + \\ +u_y v_x \vec{j} \wedge \vec{i} & +u_y v_y \vec{j} \wedge \vec{j} & +u_y v_z \vec{j} \wedge \vec{k} + \\ +u_z v_x \vec{k} \wedge \vec{i} & +u_z v_y \vec{k} \wedge \vec{j} & +u_z v_z \vec{k} \wedge \vec{k} = \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} = & u_x v_y \vec{k} & -u_x v_z \vec{j} - \\ -u_y v_x \vec{k} & & +u_y v_z \vec{i} + \\ +u_z v_x \vec{j} & -u_z v_y \vec{i} & = \end{array}$$

$$= \quad (u_y v_z - u_z v_y)\vec{i} - (u_x v_z - u_z v_x)\vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{k}$$

Il prodotto vettoriale in componenti

In notazione matriciale (che verrà introdotta successivamente)

$$(u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}) \wedge (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Esempio

Siano $\vec{u} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{k}$. Allora

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} = \quad & (2\vec{j} - 3\vec{k}) \wedge (-\vec{i} + \vec{k}) = \\
= \quad & 2\vec{j} \wedge (-\vec{i}) + 2\vec{j} \wedge \vec{k} - 3\vec{k} \wedge (-\vec{i}) - 3\vec{k} \wedge \vec{k} = \\
= \quad & -2\vec{j} \wedge \vec{i} + 2\vec{j} \wedge \vec{k} + 3\vec{k} \wedge \vec{i} = \\
= \quad & 2\vec{k} + 2\vec{i} + 3\vec{j} = \\
= \quad & 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}
\end{aligned}
$$

Un'interpretazione geometrica

L'area di un triangolo è il semiprodotto delle lunghezze di due lati moltiplicato per il seno dell'angolo compreso tra questi due lati.

Quindi se T è il triangolo che ha i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ come due dei suoi lati, che formano un angolo α:

$$\text{area di } T = \frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha = \frac{1}{2}|\vec{u} \wedge \vec{v}|$$

Equivalentemente, se P è il parallelogramma che ha $\vec{u}$ e $\vec{v}$ come lati consecutivi:

$$\text{area di } P = 2(\text{area di } T) = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$$

Il prodotto misto

Il **prodotto vettoriale** è un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array}$$

Il **prodotto scalare** è un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$$

Si possono allora applicare successivamente a tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, ottenendo il loro prodotto misto:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

Un'interpretazione geometrica

- Il prodotto scalare serve per calcolare lunghezze:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

- Il prodotto vettoriale serve per calcolare aree:

$$(\text{area del parallelogramma di lati } \vec{u} \text{ e } \vec{v}) = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$$

- Il prodotto misto serve per calcolare volumi:

$$(\text{volume del parallelepipedo di spigoli } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}|$$

Proprietà

Poiché rappresenta il valore del volume del parallelepipedo di spigoli $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, il valore

$$|\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}|$$

non dipende dall'ordine in cui sono elencati i vettori. Per es.

$$|\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{w} \wedge \vec{v} \cdot \vec{u}|$$

Pertanto, cambiando l'ordine dei vettori in un prodotto misto, cambia al più il segno del numero che si ottiene. Per es.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \cdot \vec{w}$$