Parallelismo tra piani

Definizione. L'angolo tra due piani è l'angolo tra i loro vettori normali.
Nota: Se φ è angolo tra due piani, anche $\pi - \varphi$ lo è.

Quindi, dato il piano

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

i piani paralleli a α sono tutti e soli i piani ortogonali al vettore (a, b, c), cioè i piani di equazioni

$$ax + by + cz + d' = 0$$

al variare di $d \in \mathbb{R}$.

Per esempio, il piano di equazione

$$ax + by + cz = 0$$

è il piano parallelo a α passante per O.

Parallelismo tra piani

Viceversa, dati due piani

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0, \quad \beta = a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

si ha che α e β sono paralleli se e solo se i loro vettori ortogonali $\vec{n}_\alpha = (a, b, c)$ e $\vec{n}_\beta = (a', b', c')$ sono tra loro paralleli, ovvero se e solo se le terne

$$(a, b, c) \quad \text{e} \quad (a', b', c')$$

sono proporzionali.

Esempio: piani paralleli ai piani coordinati

I piani paralleli al primo piano coordinato (xy) sono quelli ortogonali a $\vec{k}$. Hanno quindi equazione della forma

$$z = d$$

Similmente, i piani paralleli al piano xz sono quelli ortogonali a $\vec{j}$ e hanno equazione della forma

$$y = d$$

e i piani paralleli al piano yz sono quelli ortogonali a $\vec{i}$ e hanno equazioni della forma

$$x = d$$

Intersezione di due piani

Dati i piani α e β, si presentano tre casi per la loro intersezione:

1. $\alpha = \beta$. Allora $\alpha \cap \beta = \alpha$.
2. α e β sono paralleli, ma $\alpha \neq \beta$. Allora $\alpha \cap \beta = \emptyset$.
3. α e β non sono paralleli. Allora $\alpha \cap \beta$ è una retta.

   Se

   $$\alpha : ax + by + cz + d = 0, \quad \beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

   allora

   $$r = \alpha \cap \beta : \begin{cases} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{cases}$$

   sono le equazioni cartesiane della retta $r = \alpha \cap \beta$.

Passaggio da forma cartesiana a forma parametrica

Una retta r ammette rappresentazione parametrica

$$r : \begin{cases} x &= x_0 + \lambda t \\ y &= y_0 + \mu t \\ z &= z_0 + \nu t \end{cases}$$

dove $P_0(x_0, y_0, z_0) \in r$ e $\vec{v} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j} + \nu \vec{k}$ è un vettore non nullo parallelo a r

e ammette rappresentazione cartesiana

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{cases}$$

dove

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0, \qquad \beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sono piani distinti passanti per r.

Si pone il problema di passare da una rappresentazione all'altra.

Passaggio da forma cartesiana a forma parametrica

Sia dunque data una rappresentazione cartesiana

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d & = & 0 \\ ax' + by' + cz' + d' & = & 0 \end{cases}$$

al fine di trovare una rappresentazione parametrica per r, cioè della forma

$$r : \begin{cases} x & = & x_0 + \lambda t \\ y & = & y_0 + \mu t \\ z & = & z_0 + \nu t \end{cases}$$

Servono:

- Un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in r$
- Un vettore non nullo $\vec{v} = (\lambda, \mu, \nu)$ parallelo a r

Passaggio da forma cartesiana a parametrica

Per trovare il punto P_0 basta trovare una soluzione particolare del sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Poiché i vettori

$$\vec{n}_0 = (a, b, c) \qquad \text{e} \qquad \vec{n}_1 = (a', b', c')$$

sono entrambi ortogonali alla retta r (perché?) e non sono tra loro paralleli (perché?) , un vettore non nullo parallelo a r è

$$(\lambda, \mu, \nu) = (a, b, c) \wedge (a', b', c')$$

Passaggio da forma parametrica a forma cartesiana

Viceversa, per passare da una rappresentazione parametrica

$$r : \begin{cases} x &= x_0 + \lambda t \\ y &= y_0 + \mu t \\ z &= z_0 + \nu t \end{cases}$$

a una rappresentazione cartesiana, poiché $(x_0, y_0, z_0) \in r$, è sufficiente trovare due vettori non paralleli tra loro ortogonali alla retta r:

$$\vec{n}_0 = (a, b, c) \quad \text{e} \quad \vec{n}_1 = (a', b', c')$$

e ottenere

$$r : \begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0) &= 0 \end{cases}$$

$\vec{n}_0$ e $\vec{n}_1$ si trovano come soluzioni particolari, non parallele, dell'equazione

$$\vec{n} \cdot (\lambda, \mu, \nu) = 0$$

Dati un piano α e una retta r si hanno le seguenti configurazioni:

1. $r \subseteq \alpha$. In questo caso $r \cap \alpha = r$.
2. r è parallela a α, ma $r \nsubseteq \alpha$. In questo caso $r \cap \alpha = \emptyset$.
3. r non è parallela a α. In questo caso $r \cap \alpha$ consiste di un unico punto.

Definizione. L'angolo tra una retta e un piano è il complementare dell'angolo tra la direzione della retta e il vettore normale al piano.

Riconoscere il parallelismo

Siano

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

$$r : \begin{cases} a_0x + b_0y + c_0z + d_0 & = & 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 & = & 0 \end{cases} \quad , \quad r : \begin{cases} x & = & x_0 + \lambda t \\ y & = & y_0 + \mu t \\ z & = & z_0 + \nu t \end{cases}$$

Allora

$$\begin{array}{rcl} r \text{ e } \alpha \text{ sono paralleli} & \Leftrightarrow & (\lambda, \mu, \nu) \cdot (a, b, c) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow & (a_0, b_0, c_0) \wedge (a_1, b_1, c_1) \cdot (a, b, c) = 0 \end{array}$$

Nel caso in cui r e α siano paralleli, per controllare se $r \subseteq \alpha$ basta verificare se $(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$.

Trovare il punto d'incidenza

Quando r e α non sono paralleli, per trovare l'unico punto di $r \cap \alpha$, si può:

- Risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0 = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \end{cases}$$

  oppure

- Risolvere l'equazione in t:

$$a(x_0 + \lambda t) + b(y_0 + \mu t) + c(z_0 + \nu t) + d = 0$$

  e sostituire il valore trovato di t nell'equazione parametrica di r.

Nota: di solito il secondo modo risulta più semplice del primo.

Ancora sull'intersezione tra due rette

Siano

$$r : \begin{cases} a_0x + b_0y + c_0z + d_0 & = & 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 & = & 0 \end{cases} \quad , \quad r' : \begin{cases} a'_0x + b'_0y + c'_0z + d'_0 & = & 0 \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1 & = & 0 \end{cases}$$

L'eventuale intersezione $r \cap r'$ si trova risolvendo il sistema.

$$\begin{cases} a_0x + b_0y + c_0z + d_0 & = & 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 & = & 0 \\ a'_0x + b'_0y + c'_0z + d'_0 & = & 0 \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1 & = & 0 \end{cases}$$

Proiezione ortogonale

Problema

Dati un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e un piano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, come ottenere la proiezione ortogonale H di P su α?

Risoluzione geometrica.
Il punto H è l'unico punto di $\alpha \cap r$, dove r è la retta per P ortogonale ad α (cioè parallela al vettore normale $\vec{n} = (a, b, c)$)

$$r : \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

Il punto H si trova risolvendo in t

$$a(at + x_0) + b(bt + y_0) + c(ct + z_0) + d = 0$$
$$\bar{t} = \frac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

e sostituendo il valore di $\bar{t}$ trovato nelle equazioni parametriche della retta: $H = P + \bar{t}\vec{n}$, ovvero $PH = \bar{t}\vec{n}$.

Uno sguardo al parametro

$$\bar{t} = \frac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Sia A un qualunque punto del piano. Allora

$$\vec{n} \cdot OA = -d$$

Quindi

$$\bar{t} = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} = -\frac{\vec{n} \cdot OP - \vec{n} \cdot OA}{|\vec{n}|^2} = -\frac{AP \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}$$

Dunque

$$PH = \bar{t}\vec{n} = \frac{PA \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

è la proiezione ortogonale del vettore PA su $\vec{n}$.

Interpretazione vettoriale

La discussione precedente fornisce un modo equivalente di trovare la proiezione ortogonale H di P sul piano α:

- Si prende un qualunque punto $A \in \alpha$
- Si osserva che il triangolo AHP è rettangolo
- Il vettore PH è la proiezione ortogonale del vettore ipotenusa PA sul vettore normale $\vec{n}$ al piano α:

$$PH = \frac{PA \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

Proiezioni ortogonali su una retta

Data una retta

$$r : \begin{cases} x = a + \lambda t \\ y = b + \mu t \\ z = c + \nu t \end{cases}$$

e un punto $P(x_0, y_0, z_0)$, la proiezione ortogonale di P su r è il punto H d'intersezione di r col piano α passante per P e ortogonale a r.

$$\alpha : \lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \nu(z - z_0) = 0$$

Il punto H si trova risolvendo l'equazione

$$\lambda(a + \lambda t - x_0) + \mu(b + \mu t - y_0) + \nu(c + \nu t - z_0) = 0$$

nel parametro t, e sostituendo il valore trovato nelle equazioni di r.

Simmetrie rispetto a un piano

Dati un piano α e un punto P il *simmetrico* di P rispetto a α è l'unico punto Q tale che:

- il vettore PQ è ortogonale a α
- il punto medio del segmento PQ appartiene a α

Equivalentemente:

- il punto medio del segmento PQ è la proiezione di P su α

Simmetrie rispetto a un piano

Siano $\vec{n}$ il vettore normale a $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, e A un qualunque punto di α.

Se H è la proiezione di $P(x_0, y_0, z_0)$ su α, si ha

$$PH = \frac{PA \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}, \quad \text{da cui} \quad PQ = 2\frac{PA \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

Equivalentemente,

$$H = P + \bar{t}\vec{n}, \quad \text{cioè} \quad Q = P + 2\bar{t}\vec{n}$$

dove

$$\bar{t} = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$