Esempio

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & -2y & -4z & = & 5 \\ x & +5y & +7z & = & -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 3 \\ 1 & 5 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 - R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

Esempio

$R_3 \to R_3 + R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A questo punto il sistema è ridotto:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ & -4y & -6z & = & 3 \end{cases}$$

È in una forma facile da risolvere. Volendo, si può ridurre fortemente: $R_1 \to R_1 + \frac{1}{4}R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & -4 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

cioè:

$$\begin{cases} x & & -\frac{1}{2}z & = & \frac{7}{4} \\ & -4y & -6z & = & 3 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x & = & \frac{1}{2}z + \frac{7}{4} \\ y & = & -\frac{3}{2}z - \frac{3}{4} \end{cases}$$

Il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un parametro: tutte le terne $\left(\frac{1}{2}z + \frac{7}{4}, -\frac{3}{2}z - \frac{3}{4}, z\right)$ con $z \in \mathbb{R}$. Si possono anche scrivere:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } z \in \mathbb{R}$$

L'insieme delle soluzioni è una retta in $\mathbb{R}^3$.

Operazioni elementari sulle matrici

Si definisce una famiglia di *operazioni elementari sulle righe* delle matrici in $K^{m,n}$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} \cdots\cdots R_1 \cdots\cdots \\ \cdots\cdots R_2 \cdots\cdots \\ \cdots \\ \cdots\cdots R_m \cdots\cdots \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

1) $R_i \leftrightarrow R_{i'}$: consiste a scambiare le posizioni delle righe R_i e $R_{i'}$
2) $R_i \to aR_i$, con $a \neq 0$: consiste a moltiplicare per a la riga R_i
3) $R_i \to R_i + bR_{i'}$, con $i \neq i'$: consiste nel rimpiazzare R_i con $R_i + bR_{i'}$

Invertibilità

Le operazioni elementari sono *invertibili*: Se A' è ottenuta da A mediante un'operazione elementare, allora A è ottenibile da A' mediante un'operazione elementare:

1) L'inversa dell'operazione $R_i \leftrightarrow R_{i'}$ è $R_i \leftrightarrow R_{i'}$
2) L'inversa dell'operazione $R_i \to aR_i$ è $R_i \to \frac{1}{a}R_i$
3) L'inversa dell'operazione $R_i \to R_i + bR_{i'}$ è $R_i \to R_i - bR_{i'}$

Matrici elementari

Una matrice ottenuta dalla matrice identica mediante una delle operazioni elementari è detta *matrice elementare*.

Esempio. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Applicando $R_1 \leftrightarrow R_2$ si ottiene: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Applicando $R_2 \rightarrow 3R_2$ si ottiene: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Applicando $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1$ si ottiene: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrici elementari

Applicare a una matrice un'operazione elementare equivale a moltiplicarla a sinistra per la corrispondente matrice elementare.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$

$R_2 \to 3R_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3e & 3f & 3g & 3h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$

$R_3 \to R_3 - 2R_1$:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i-2a & j-2b & k-2c & l-2d \end{pmatrix}$

Equivalenza di matrici

Siano $A, B \in K^{m,n}$.
Si dice che A e B sono *equivalenti* (*per righe*) se esiste una sequenza (eventualmente vuota) di operazioni elementari sulle righe che trasforma A in B.
Si denota

$$A \sim B$$

Equivalentemente: se esistono matrici elementari $E_1, E_2, \dots, E_h$ tali che

$$E_1 E_2 \cdot \ldots \cdot E_h A = B$$

Equivalenza di matrici

Si tratta di una relazione di equivalenza:

- (riflessività): $A \sim A$ per ogni matrice A
- (simmetria): se $A \sim B$ allora $B \sim A$.
  Infatti, da $A \sim B$ segue che $B = E_1 E_2 \cdot \ldots \cdot E_h A$ per opportune matrici elementari $E_1, E_2, \ldots, E_h$. Allora $A = E_h^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} E_1^{-1} B$, e anche $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_h^{-1}$ sono matrici elementari. Dunque $B \sim A$
- (transitività): se $A \sim B$ e $B \sim C$, allora $A \sim C$.
  Infatti da $A \sim B$ e $B \sim C$ segue che:
  - $B = E_1 \cdot \ldots \cdot E_h A$, con $E_1, E_2, \ldots, E_h$ matrici elementari
  - $C = F_1 \cdot \ldots \cdot F_k B$, con $F_1, \ldots, F_k$ matrici elementari

  Allora $C = F_1 \cdot \ldots \cdot F_k E_1 \cdot \ldots E_h A$, quindi $A \sim C$.

Elementi speciali

Definizione

Un elemento di una matrice è detto *elemento speciale* se è il primo elemento non nullo della sua riga:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Riduzione gaussiana di matrici

Il metodo della riduzione mostra che, per ogni matrice $A \in K^{m,n}$, esiste una matrice $A' \in K^{m,n}$ tale che:

(0) $A \sim A'$

(1) Passando da una riga alla riga successiva la posizione dell'eventuale elemento speciale si sposta verso destra (in particolare, in ogni colonna di A' c'è al più un elemento speciale)

(2) Le eventuali righe nulle di A' sono al fondo

Riduzione gaussiana di matrici

$$A' = \begin{pmatrix} \dots & 0 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A' è *ridotta per righe*.

Continuando la riduzione, si puà arrivare a una matrice A'' che ha due proprietà ulteriori:

(3) Ogni elemento speciale è uguale a 1

(4) Ogni elemento speciale è l'unico elemento non nullo della sua colonna

Allora A'' è *fortemente ridotta*.

Colonne speciali

Definizione

Se A è una matrice ridotta per righe, le colonne di A che contengono elementi speciali si dicono *colonne speciali*.

Nota. Se A è ridotta per righe, le colonne speciali di A corrispondono alle incognite rispetto alle quali il sistema

$$AX = B$$

si può risolvere facilmente (se non contiene equazioni del tipo $0 = b$, con b termine noto non nullo).

Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione

Siano $u_1, u_2, \dots, u_k \in K^n$.
I vettori $u_1, u_2, \dots, u_k$ si dicono *linearmente dipendenti* (*lin.dip.*) se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K$, non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

Altrimenti i vettori $u_1, u_2, \dots, u_k$ si dicono *linearmente indipendenti* (*lin.indip.*).

Cioè, $u_1, u_2, \dots, u_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'uguaglianza

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \vec{0}$$

implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

Esempi

I vettori

$$u_1 = (1, 2, 3), \qquad u_2 = (-1, 2, -2), \qquad u_3 = (0, 2, 0)$$

sono lin.indip. Infatti

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3, 3\lambda_1 - 2\lambda_2)$$

quindi per avere $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0, 0, 0)$ si deve avere

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 - \lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & \lambda_2 \\ 4\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

da cui $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Esempi

- I vettori
$$u_1 = (1,2,3), \qquad u_2 = (-1,2,-2), \qquad u_3 = (-1,10,0)$$
sono lin.dip. Infatti
$$2u_1 + 3u_2 - u_3 = (0,0,0)$$
- Se tra i vettori $u_1, \ldots, u_k$ compare il vettore nullo, allora $u_1, \ldots, u_k$ sono lin. dip. Infatti, se $u_i = \vec{0}$, l'uguaglianza
$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \vec{0}$$
è soddisfatta da
$$\begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ \ldots & & \\ \lambda_{i-1} & = & 0 \\ \lambda_i & = & 1 \\ \lambda_{i+1} & = & 0 \\ \ldots & & \\ \lambda_k & = & 0 \end{cases}$$

Esempi

- Se tra i vettori $u_1, \ldots, u_k$ ce n'è qualcuno ripetuto, allora $u_1, \ldots, u_k$ sono lin. dip. Infatti, se $u_i = u_j$, l'uguaglianza

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \vec{0}$$

  è soddisfatta da

$$\begin{cases} \lambda_i = 1 \\ \lambda_j = -1 \\ \lambda_h = 0 \text{ per } h \notin \{i, j\} \end{cases}$$

- dato un unico vettore u, questi è lin.dip. se e solo se $u = \vec{0}$. Infatti questa è l'unica possibilità affinché l'uguaglianza

$$\lambda u = \vec{0}$$

  sia soddisfatta da qualche $\lambda \neq 0$

Criterio

Più in generale, se un vettore tra $u_1, \ldots, u_k$ è combinazione lineare degli altri, allora $u_1, \ldots, u_k$ sono lin.dip.
Per esempio, sia

$$u_k = c_1 u_1 + \ldots + c_{k-1} u_{k-1}$$

Allora l'uguaglianza

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_k u_k = \vec{0}$$

è soddisfatta da

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & c_1 \\ \ldots & & \\ \lambda_{k-1} & = & c_{k-1} \\ \lambda_k & = & -1 \end{cases}$$

Criterio

Viceversa, se $u_1, \ldots, u_k$ sono lin.dip., allora uno dei vettori è combinazione lineare dei rimanenti.
Infatti, sia

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \vec{0}$$

con coefficienti non tutti nulli, cioè esiste i con $\lambda_i \neq 0$:

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_i u_i + \ldots + \lambda_k u_k = \vec{0}$$

Allora

$$u_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} u_1 - \ldots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} u_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} u_{i+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} u_k$$

quindi $u_i \in \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k)$.

Per es., con $k = 2$: i vettori u_1, u_2 sono lin.dip. se e solo se uno dei due è un multiplo dell'altro (cioè se e solo se sono *paralleli*).

Domanda. E con $k = 3$?

Criterio

Abbiamo quindi dimostrato:

Teorema

I vettori $u_1, \ldots, u_k$ sono lin.dip. se e solo se esiste i tale che u_i è combinazione lineare dei restanti vettori.

Equivalentemente: i vettori $u_1, \ldots, u_k$ sono lin.indip. se e solo se nessuno dei vettori è combinazione lineare dei restanti.

Rango di una matrice

Definizione

Da una matrice $A \in K^{m,n}$ di dice *rango* della matrice A, denotato

$$rkA$$

il numero massimo di righe linearmente indipendenti della matrice A

Calcolo del rango

Per il calcolo del rango di una matrice sono utili le seguenti proprietà:

(1) $A \sim A' \Rightarrow rkA = rkA'$

(2) Se A è una matrice ridotta per righe, le sue righe non nulle sono lin.indip., quindi

$$rkA = \text{ numero di righe non nulle di } A$$

Quindi un modo per calcolare il rango di una matrice è il seguente:

1. si riduce la matrice per righe
2. si contano le righe non nulle della matrice ridotta