Dispense di
MATEMATICA I

Corso di Laurea triennale in Ingegneria Elettronica e Tecnologie dell'Informazione

Maurizio Romeo

2016

Indice

Capitolo 1

Nozioni preliminari e notazioni

1.1 Insiemi

Diremo *insieme* una collezione di oggetti definiti, detti *elementi*. Gli insiemi saranno denotati con lettere maiuscole $(A, B, C, ...)$ e i suoi elementi con lettere minuscole $(a, b, c, ...)$. Se l'elemento a appartiene all'insieme A, si scrive

$$a \in A,$$

se invece a non appartiene all'insieme A, si scrive

$$a \notin A.$$

Un insieme può essere rappresentato mediante la lista dei suoi elementi od una loro prescrizione, tra parentesi graffe. Ad es.

$$A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 7\}.$$

Converremo di chiamare vuoto un insieme privo di elementi e lo denoteremo con il simbolo $\emptyset$. Un insieme si dice finito se è costituito da un numero finito di elementi altrimenti si dice infinito. Gli esempi precedenti costituiscono insiemi finiti. Sono invece infiniti gli insiemi

$$C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}, \qquad D = \{2n + 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Diremo *sottoinsieme* di un insieme A un qualunque insieme B, i cui elementi appartengono anche ad A, e scriveremo $B \subseteq A$. A e $\emptyset$ sono sottoinisemi di A. Qualora esistano elementi in A non contenuti nel suo sottoinsieme B scriveremo $B \subset A$.

Considerato l'insieme U e due suoi sottoinsiemi A e B, diciamo *unione* e *intersezione* tra A e B, rispettivamente i due sottoinsiemi di U definiti da

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}, \quad A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}.$$

In altre parole l'unione di due insiemi è costituito dagli elementi che appartengono ad uno o all'altro insieme mentre la loro intersezione è costituita dagli elementi comuni ai due insiemi.

- Esempi

  1) Dati i due insiemi $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x > -5\}$, si ha

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{Z}\}, \qquad A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} : -5 < x \leq 2\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

2) Dati $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > \frac{5}{3}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{7}\}$, si ha

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{Q} : \frac{5}{3} < x < \sqrt{7}\} \cup B, \qquad A \cap B = \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{7}\}$$

3) Dati $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x > -\sqrt{3}\}$, si ha

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3 \vee x > -\sqrt{3}\}, \qquad A \cap B = \emptyset.$$

In questo caso si dice che i due insiemi A e B sono *disgiunti*.

Dato un sottoinsieme A di un insieme U, si dice *complementare* di A rispetto ad U l'insieme definito da

$$A^C = \{x \in U : x \notin A\}.$$

- Esempio

Dati $U = \{x \in \mathbb{N} : 5 < x \leq 15\}$ e $A = \{12, 13, 14, 15\}$, si ha

$$A^C = \{x \in \mathbb{N} : 5 < x \leq 11\}$$

In base alle precedenti definizioni è facile dimostrare le seguenti proprietà (leggi di De Morgan)

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, \qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

Si ha infatti

$$(A \cup B)^C = \{x \in U : x \notin A \wedge x \notin B\} = \{x \in U : x \in A^C \wedge x \in B^C\} = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = \{x \in U : x \notin A \vee x \notin B\} = \{x \in U : x \in A^C \vee x \in B^C\} = A^C \cup B^C$$

Dati due insiemi $A \subset U$ e $B \subset U$, si dice *differenza* tra A e B l'insieme $A \setminus B$, costituito dagli elementi di A che non appartengono a B, ovvero

$$A \setminus B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^C$$

- Esempio

Dati $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$, si ha

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 5\}$$

Si dice *prodotto cartesiano* dei due insiemi A e B l'insieme, indicato con $A \times B$, delle coppie ordinate (a, b) in cui $a \in A$ e $b \in B$. Se, ad esempio $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{R}$, si ha

$$(2, \sqrt{3}) \in A \times B \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{6}, 3\right) \in B \times A.$$

Si definisce in modo analogo il prodotto cartesiano di più di due insiemi. Il prodotto cartesiano di un insieme A con se stesso si indica con A^2. Analogamente $A \times A \times A = A^3$, e così via.

1.2 Quantificatori, somme, prodotti

Se si vuole affermare che una data relazione matematica $R(x) = 0$ che coinvolge una variabile $x \in A$ vale sempre, qualunque sia il valore di quella variabile nell'insieme A, si usa il seguente simbolismo

$$R(x) = 0 \quad \forall x \in A$$

e si legge "R di x è uguale a zero per ogni x appartenente ad A". Il simbolo $\forall$ è detto *quantificatore*. Se ad esempio si vuole affermare che $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ è una identità in $\mathbb{R}$, si scrive

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Un altro quantificatore utilizzato spesso nell'analisi matematica è il quantificatore di esistenza, usato per affermare che una data relazione matematica $R(x) = 0$ è vera per almeno un valore di $x \in A$. In tal caso si scrive

$$\exists x \in A : R(x) = 0,$$

e si legge "esiste (o, è sempre possibile determinare) un x appartenente ad A tale che R di x sia uguale a zero". La negazione di $\exists$ si denota con il simbolo $\nexists$, che viene usato per negare la possibilità che una data relazione $R(x) = 0$ sia verificata, qualsiasi sia il valore di $x \in A$. Si può scrivere ad esempio

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0, \qquad \nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 = 0$$

$$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 0, \qquad \exists x \in \mathbb{C} : x^2 + 2 = 0.$$

I seguenti esempi possono chiarire ulteriormente il significato dei simboli $\forall$, $\exists$, $\nexists$.

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} :\ 1 + \frac{1}{a} < n,$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > 2\ \ \nexists\, a, b, c \in \mathbb{N} :\ a^n + b^n = c^n.$$

Accanto ai quantificatori introduciamo anche i simboli di *implicazione logica.* Il simbolo $\Rightarrow$ viene usato per significare il passaggio da una proposizione ad un'altra, logicamente conseguente. Ad esempio

$$x \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R},$$

che si legge "x appartenente a $\mathbb{Q}$ implica x appartenente a $\mathbb{R}$". Consideriamo il seguente esempio. Dati tre sottoinsiemi A, B, C, di U, si ha

$$A \cap (B \cup C) = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \text{ è disgiunto da } B \text{ e da } C.$$

Questa implicazione si può anche esprimere dicendo che $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ è *condizione sufficiente* affinché A sia disgiunto da B e da C. D'altra parte vale anche il viceversa, ovvero, se A è disgiunto sia da B che da C allora la sua intersezione con l'unione di B con C è vuota. Scriveremo allora

$$A \cap (B \cup C) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ è disgiunto da } B \text{ e da } C,$$

diremo allora che $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ è anche *condizione necessaria* affinché A sia disgiunto da B e da C, e in definitiva che $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ è *condizione necessaria e sufficiente* affinché A sia disgiunto da B e da C.

Nel seguito si useranno anche alcune notazioni utili per sintetizzare operazioni come la somma o il prodotto di più termini. In particolare, con il simbolo Σ, si indicherà spesso la "sommatoria" di un certo numero (finito) di addendi, indicizzati. Per esempio, la somma di n numeri a_i, con i indice che varia tra 1 e n, verrà indicata con

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

che si legge "sommatoria, per i che va da 1 a n di a_i". I termini da sommare possono anche essere prodotti con fattori indicizzati, per esempio,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

È possibile comporre più sommatorie, qualora le quantità da sommare dipendano da due o più indici. In tal caso le proprietà commutativa della somma e distributiva del prodotto rispetto alla somma, permettono di comporre in un qualunque ordine le diverse somme. Ad esempio, date le due quantità a_i, b_i, $(i = 1, 2, 3)$, se si vuole indicare la somma di tutti i possibili prodotti $a_i b_j$ si scriverà

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{3} a_i b_j) = \sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=1}^{3} a_i b_j) &= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned}$$

utilizzando un unico simbolo di sommatoria con più indici.
Una abbreviazione analoga a quella della somma si usa per il prodotto di più termini. In questo caso si usa il simbolo Π. Ad esempio,

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 ... a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i,$$

oppure,

$$(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_3) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i).$$

Dato un qualunque numero naturale n, la quantità

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \; ... \; n,$$

si chiama *fattoriale* di n e si indica con il simbolo $n!$. Si può anche scrivere

$$n! = \prod_{i=1}^{n} (n - i + 1) = n(n-1)(n-2) \; ... \; 2 \cdot 1.$$

Per convenzione porremo $0! = 1$.

1.3 Teoremi

La struttura di base di un teorema è costituita da una *ipotesi*, una *dimostrazione* ed una *tesi*. La dimostrazione consiste generalmente in una serie di proposizioni che, partendo dalla ipotesi, conducono logicamente alla tesi. Una dimostrazione siffatta si dice *diretta*. Consideriamo il seguente esempio.

TEOREMA.
Ipotesi: Siano x e y due numeri reali.
Tesi: Valgono le seguenti relazioni (diseguaglianze triangolari)

$$||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|.$$

Dimostrazione: Poiché $|x|^2 = x^2$, si possono scrivere le seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned}
&|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \\
&(|x|-|y|)^2 = |x|^2 - 2|xy| + |y|^2, \\
&(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|xy| + |y|^2.
\end{aligned}$$

Essendo poi, $-|xy| \leq xy \leq |xy|$, ne segue

$$(|x|-|y|)^2 \leq |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2.$$

Dalle diseguaglianze tra numeri reali sappiamo che $a^2 \leq b^2$ è equivalente ad $|a| \leq |b|$, quindi le due diseguaglianze prcedenti implicano

$$||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|,$$

come volevamo dimostrare.

In certi casi, la tesi di un teorema può essere ottenuta con una dimostrazione *per assurdo*, cioè usando un principio di contraddizione secondo il quale, negando la tesi, si arriva a contraddire l'ipotesi. Consideriamo il seguente esempio.

TEOREMA
Ipotesi: Sia x un numero tale che $x^2 = 2$.
Tesi: $x \notin \mathbb{Q}$.
Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che $x \in \mathbb{Q}$. Allora esisteranno due numeri interi n ed m tali che $x = \frac{n}{m}$. Dalla ipotesi avremo

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2 \qquad n^2 = 2m^2.$$

Scomponendo in fattori primi n ed m nell'ultima relazione, otterremo a primo membro un fattore 2 con esponente pari (cioè $2^0, 2^2, 2^4, ...$) mentre a secondo membro comparirà un fattore 2 con esponente dispari $(2^1, 2^3, 2^5, ...)$. Poiché la scomposizione in fattori primi è unica, giungiamo a negare la validità dell'ultima relazione e quindi a contraddire l'ipotesi. In altri termini la soluzione dell'equazione $x^2 = 2$ non può essere un numero razionale.

In altri casi ancora la tesi di un teorema può essere ottenuta usando una dimostrazione per induzione. Se per esempio il contenuto della tesi deve valere per qualunque numero naturale n, si può ricorrere ad un *principio di induzione* secondo il quale se la tesi è vera per $n = 1$ e se, ammettendo che valga per un certo n, essa vale anche per $n + 1$, allora essa varrà per qualsiasi n. Consideriamo il seguente semplice esempio.

TEOREMA
Ipotesi: Sia $n \in \mathbb{N}$ e x un numero reale.
Tesi: $(1 - x^n) = (1 - x)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})$.
Dimostrazione: Se $n = 1$ la tesi è immediatamente verificata in quanto $1 - x = 1 - x$. Supponiamo che essa valga per un certo n e dimostriamo che essa è vera anche per $n + 1$. Si ha infatti,

$$\begin{aligned}
1 - x^{n+1} &= 1 - x^{n+1} - x + x = 1 - x + x(1 - x^n) \\
&= 1 - x + x(1 - x)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) \\
&= (1 - x)[1 + x(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})] \\
&= (1 - x)(1 + x + x^2 + ... + x^n).
\end{aligned}$$

Per induzione possiamo allora concludere che la tesi è vera per qualsiasi n.

1.4 Cenni di calcolo combinatorio

Consideriamo un insieme A costituito da n elementi distinti e sia $k \leq n$ un numero intero. Ci chiediamo quanti sottoinsiemi ordinati di A costituiti da k elementi è possibile costruire. Per rispondere a questa domanda possiamo ragionare in modo operativo immaginando di prendere da A un elemento alla volta e di riempire, secondo un ordine stabilito, un contenitore che può ospitarne k. Possiamo scegliere il primo elemento in n modi possibili e riporlo nel contenitore. Rimangono $n - 1$ elementi tra i quali possiamo scegliere il secondo elemento da riporre, in $n-1$ modi possibili. Ne segue che ci sono $n(n-1)$ modi possibili di riporre i primi due elementi. Continuando in questo modo sceglieremo il k-esimo elemento da riporre, in $n - k + 1$ modi possibili e il numero totale di modi possibili per riempire il contenitore è dato dal prodotto $n(n - 1)(n - 2)...(n - k + 1)$, che rappresenta le *disposizioni* di n elementi in classi ordinate di k elementi e si indica con

$$D_{n,k} = n(n - 1)(n - 2)...(n - k + 1).$$

- Esempio

  Supponiamo di dover eleggere un presidente un segretario ed un tesoriere tra i 20 aderenti ad una associazione. Vogliamo sapere in quanti modi possiamo fare questa scelta.

  In tal caso dobbiamo calcolare le disposizioni di 20 elementi in classi ordinate di 3 elementi quindi il risultato è

  $$D_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

Se $k = n$, il numero di disposizioni coincide con il numero di insiemi che si ottengono da A cambiando l'ordine dei suoi elementi. A tale numero si dà il nome di *permutazioni* di n elementi e si scrive

$$P_n = D_{n,n} = n(n - 1)(n - 2)...2 \cdot 1 = n!$$

- Esempio

  In quanti modi può disporsi una squadra di 8 canottieri nella loro imbarcazione? Si tratta di calcolare le permutazioni di 8 elementi. Si ha

  $$P_8 = 8! = 40320$$

Nel calcolo delle disposizioni $D_{n,k}$ si tiene conto dell'ordine con cui vengono occupati i k posti degli n elementi. Se non si tenesse conto di tale ordine, tutte le permutazioni dei k elementi sarebbero equivalenti e siccome tali permutazioni valgono $k!$, il numero di modi possibili di riempire k posti con n elementi diminuirebbe di un fattore $k!$. Le disposizioni di n elementi in k posti non tenendo conto dell'ordine si chiamano *combinazioni* di n elementi in classi di k elementi e si indicano con $C_{n,k}$. Per quanto detto, si ha

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

- Esempi

  1) Supponiamo di avere una tavolozza con 7 colori distinti. Vogliamo sapere quanti nuovi colori possiamo creare mescolando 3 colori alla volta.

  Poiché in tal caso non ha importanza l'ordine con cui si prendono i tre colori, si tratta di calcolare le combinazioni di 7 elementi in classi di 3 elementi, quindi il risultato è

$$C_{7,3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$$

  2) Da un team di 21 giocatori bisogna creare una squadra di 11 giocatori. Quante squadre si possono formare? Anche in questo caso si tratta di calcolare le combinazioni di 21 elementi in classi di 11 elementi. Si ha

$$C_{21,11} = \frac{21 \cdot 20 \cdot ... \cdot 11}{11 \cdot 10 \cdot ... \cdot 2} = 352716.$$

Il numero $C_{n,k}$ si indica anche con il simbolo $\binom{n}{k}$, detto *coefficiente binomiale*. Questa denominazione proviene dalla formula di Newton per la potenza n-esima di un binomio,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Dimostriamo questa formula.
Essendo

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)...(a+b)}_{n\text{volte}},$$

tutti i termini dello sviluppo di tale prodotto hanno la forma

$$a^{n-k}b^k, \quad \text{con} \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Per un dato k, ciascuno di questi termini comparirà nello sviluppo un numero di volte pari al numero di modi in cui si possono prendere k fattori b tra gli n che compaiono nel prodotto. Poiché non ha alcuna importanza l'ordine con cui si prendono questi fattori, il termine $a^{n-k}b^k$ comparirà $C_{n,k}$ volte e si avrà

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

È immediato verificare che

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1,$$

Si ha inoltre

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

1.5 Sottoinsiemi dei numeri reali

Dati due numeri reali a e b, con $a < b$ chiameremo *intervallo* aperto (a, b) il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti i numeri reali x tali che $a < x < b$, ovvero

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Chiameremo poi intervallo chiuso $[a, b]$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito da

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

La stessa convenzione sulle parentesi tonde o quadre si usa per definire l'intervallo $(a, b]$, aperto a sinistra e chiuso a destra, o l'intervallo $[a, b)$, aperto a destra e chiuso a sinistra. Infine diremo intervalli illimitati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \qquad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \qquad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.$$

In particolare, i primi due li diremo illimitati chiusi e gli altri illimitati aperti.

Un sottoisieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice superiormente limitato se $\exists k \in \mathbb{R} : x \leq k \ \forall x \in A$. I numeri k che soddisfano questa proprietà si dicono *maggioranti* per A. Analogamente si dice che A è inferiormente limitato se $\exists h \in \mathbb{R} : x \geq h \ \forall x \in A$. I numeri h si dicono *minoranti* per A.

- Esempio

  Ogni intervallo non illimitato è limitato superiormente e inferiormente. L'insieme $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente ma non superiormente, mentre l'insieme $\mathbb{Z}$ non è limitato. L'insieme

  $$A = \{x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

  è limitato inferiormente e superiormente, infatti, per esempio, 3 è un maggiorante mentre -1 è un minorante.

Dato un sottoinsieme A dei reali, si dice che A possiede un *massimo* se esiste un elemento $M \in A$ tale che $M \geq x, \forall x \in A$. Analogamente A possiede un *minimo* se $\exists m \in A : m \leq x \ \forall x \in A$. Notiamo che, se esistono, M è un particolare maggiorante per A, mentre m è un particolare minorante per A.

- Esempi

I sottoinsiemi $\mathbb{R}^+$ (reali positivi o nulli) ed $\mathbb{R}^-$ (reali negativi o nulli) possiedono rispettivamente minimo e massimo coincidenti con 0. Il sottoinsieme $\mathbb{R}^{++}$ (reali strettamente positivi) non possiede nè massimo nè minimo. Ogni intervallo chiuso a destra $(a, b]$ possiede come massimo l'elemento b. Ogni intervallo chiuso a sinistra $[a, b)$ possiede come minimo l'elemento a.

Due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$ tali che $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \emptyset$ e tali che ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, si dicono *classi separate* di $\mathbb{R}$. Mediante il cosiddetto assioma di Dedekind si postula che date due classi separate in $\mathbb{R}$ esiste sempre un elemento $s \in \mathbb{R}$ detto elemento *separatore* appartenente ad una delle due classi tale che $a \leq s \leq b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Per esempio, i due sottoinsiemi $\mathbb{R}^+$ ed $\mathbb{R}^{--}$, costituiscono due classi separate in $\mathbb{R}$ e lo zero è il loro elemento separatore che, in tal caso appartiene a $\mathbb{R}^+$. Più in generale i due sottoinsiemi $(-\infty, a)$ e $[a, +\infty)$ costituiscono classi separate in $\mathbb{R}$, con elemento separatore a.

Facendo uso dell'assioma di Dedekind si dimostra che l'insieme dei maggioranti per un dato sottoinsieme limitato $A \subset \mathbb{R}$ ammette un minimo e che l'insieme dei minoranti ammette un massimo. Tali numeri vengono chiamati rispettivamente *estremo superiore* ed *estremo inferiore* di A ed indicati con i simboli $\sup(A), \inf(A)$.

- Esempi

L'insieme $A = \{x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ ha $\sup(A) = 1$. Poiché $1 \in A$, si ha anche che 1 è il massimo di A. Inoltre $\inf(A) = 0$. L'estremo superiore dell'intervallo $[4, 9)$ è 9, mentre l'estremo inferiore è 4 che risulta essere anche minimo.

Teorema 1.1 *(del* sup*) Sia $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato. Condizione necessaria e sufficiente affinché $s = \sup(A)$ è che*

a) $s \geq x\ \forall x \in A$
b) $\forall a < s\ \exists \bar{x} \in A : a < \bar{x} \leq s$

Dim. (Parte necessaria). Poiché, per definizione, s è un maggiorante, la a) è sicuramente vera. Dimostriamo la b) per assurdo. Supponiamo che preso $a < s$ tutti gli elementi di A siano minori o uguali ad a, cioè $x \leq a$, $\forall x \in A$. Allora a sarebbe un maggiorante per A e di conseguenza si avrebbe $a \geq s$, contro l'ipotesi che $s > a$. Deve quindi esistere almeno un $\bar{x} \in A$ tale che $a < \bar{x} \leq s$.
(Parte sufficiente). Dalla a) abbiamo che s è un maggiorante per A. Supponiamo che valga la b) e che, per assurdo, s non sia il minimo dei maggioranti e che quindi esista un maggiorante s' più piccolo di s che sia il $\sup(A)$. Scelgo allora $a = s'$ e trovo, per la b), che esiste un $\bar{x} \in A$ tale che $s' < \bar{x} < s$. Ma quest'ultima relazione contraddice l'ipotesi che s' sia l'estremo superiore di A. Ne segue che $s = \sup(A)$.

Vale, ovviamente anche il teorema analogo sull'estremo inferiore, che si enuncia così:

Teorema 1.2 *(dell'* inf*) Sia $A \subset \mathbb{R}$ inferiormente limitato. Condizione necessaria e sufficiente affinché $i = \inf(A)$ è che*

a) $i \leq x \; \forall x \in A$
b) $\forall a > i \; \exists \bar{x} \in A : i \leq \bar{x} < a$

Teorema 1.3 *Dati due numeri reali b, c, supponiamo che $b - c < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Allora $b - c \leq 0$*

Dim. Supponiamo per assurdo che $b > c$. Allora l'intervallo (c, b) ammetterà b come estremo superiore. Dalla definizione di estremo superiore segue allora che se a è un numero compreso tra c e b $\exists \bar{x} \in (c, b) : a < \bar{x} < b$. In altri termini, posto $b - \bar{x} = \varepsilon$, si avrà $\varepsilon = b - \bar{x} < b - c$. Ma ciò contraddice l'ipotesi.

Dal precedente teorema si ricava facilmente il seguente risultato.

Corollario al Teorema 1.3
Dati due numeri reali a, b tali che $|a - b| < \varepsilon$, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $a = b$.
Dim. Supponiamo che $a \geq b$. Allora dall'ipotesi abbiamo $a - b < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Per il teorema 1.3 si ha $a - b \leq 0$. Ne segue che contemporaneamente si deve avere $a \geq b$ e $a \leq b$ e quindi, necessariamente, $a = b$. Si ottiene il medesimo risultato supponendo che $a \leq b$.

Poiché i numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta, nel seguito capiterà di chiamare *punto* un numero reale, intendendo con ciò il punto geometrico su una retta orientata e dotata di una origine, la cui ascissa è il numero reale dato.
Si dice *intorno* di un punto $x \in \mathbb{R}$ un qualunque intervallo reale aperto contenente x. In particolare, un δ-*intorno* di x, $(\delta > 0)$, è il sottoinsieme $I_\delta(x) \subset \mathbb{R}$ dato da

$$I_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \delta\}.$$

Si definiscono anche, rispettivamente, *intorno destro* e *intorno sinistro* di x i seguenti intervalli,

$$I_\delta^+(x) = \{y \in \mathbb{R} : x < y < x + \delta\}, \qquad I_\delta^-(x) = \{y \in \mathbb{R} : x - \delta < y < x\}.$$

Dato un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$, un punto $x \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* per A se in un qualunque suo intorno cadono infiniti punti appartenenti ad A. Il sottoinsieme A si dice *chiuso* se contiene i suoi punti di accumulazione. Inoltre si dice *chiusura* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ l'unione dell' insieme A con i suoi punti di accumulazione e la si indica con $\bar{A}$.

- Esempi

  L'insieme
  $$A = \{x = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$
  ha come unico punto di accumulazione il punto 1, che non appartiene ad A. A non è dunque un sottoinsieme chiuso.

  L'intervallo $A = (5, 8]$ ha come punti di accumulazione tutti gli x tali che $5 \leq x \leq 8$. Esso non è un sottoinsieme chiuso perché 5 non appartiene ad A. La chiusura di A è l'intervallo chiuso $\bar{A} = [5, 8]$.

  L'insieme $\mathbb{Q}$ ammette come punti di accumulazione tutto $\mathbb{R}$. Esso non è un sottoinsieme chiuso e la sua chiusura è $\mathbb{R}$.

Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice *aperto* se è il complementare di un sottoinsieme chiuso. Si può dimostrare che l'unione di più sottoinsiemi aperti è un aperto. Dalle leggi di De Morgan (vedi par. 1.1) segue allora che l'intersezione di più insiemi chiusi è un insieme chiuso.

1.6 Funzioni reali di variabile reale

In generale, una *funzione* f è una relazione tra due insiemi A e B che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed un solo elemento di B. Essa si può rappresentare simbolicamente nella seguente forma,

$$f : A \to B.$$

L'insieme A si dice *dominio* della funzione e l'insieme B *codominio.* Consideriamo qui il caso in cui $A \subset \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$. Se all'elemento x di A la funzione fa corrispondere l'elemento y di $\mathbb{R}$, si scrive $f(x) = y$, e si dice che y è l'immagine di x tramite f. L'insieme dei valori y corrispondenti tramite la f all'insieme A si dice l'immagine di A e si indica con $f(A)$. Il generico elemento x di A si chiama variabile *indipendente* e l'elemento y variabile *dipendente.* Due funzioni f, g aventi lo stesso dominio sono uguali se $\forall x \in A, f(x) = g(x)$. Preso un sottoinsieme C di A, la funzione $\bar{f} : C \to B$ si dice *restrizione* di f al sottoinsieme C di A se $\bar{f}(x) = f(x), \forall x \in C$.
Si dice *grafico* di una funzione $f : A \to B$ l'insieme delle coppie di numeri reali $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che per ogni $x \in A$ sia $y = f(x)$.

- Esempio

  La funzione $f(x) = x^2$ ha come dominio $A = \mathbb{R}$ e come codomino $B = \mathbb{R}$ mentre $f(A) = \mathbb{R}^+$. La coppia $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ appartiene al grafico di f.

  La funzione $\bar{f}(x) = x,\ x \in \mathbb{R}^+$ è la restrizione all'insieme $\mathbb{R}^+$ della funzione $f(x) = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$.

Una funzione f si dice *iniettiva* se ad elementi distinti del dominio fa corrispondere elementi distinti del codominio, ovvero $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- Esempio

  Nell'esempio precedente la funzione $f(x)$ non è iniettiva mentre la funzione $\bar{f}$ lo è.

Una funzione f si dice *suriettiva (o su tutto)* se l'immagine $f(A)$ coincide con B, ovvero se $\forall y \in B\ \exists\ x \in A : f(x) = y$.

- Esempi

  La funzione $f(x) = \ln|x|,\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ è suriettiva ma non iniettiva. La funzione $f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$ è iniettiva e suriettiva. La funzione $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ non è nè iniettiva nè suriettiva. La funzione $\exp(x),\ x \in \mathbb{R}$ è iniettiva.

Una funzione iniettiva e suriettiva si dice *biettiva (o biunivoca).* Dalle definizioni precedenti segue che una funzione è biunivoca se e solo se per ogni elemento $y \in B$ esiste uno ed un solo elemento $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

- Esempi

  La funzione $\log x,\ x \in \mathbb{R}^{++}$ è biunivoca, mentre la funzione $\exp(x^2),\ x \in \mathbb{R}$ non è biunivoca.

Una funzione si dice superiormente (inferiormente) limitata se la sua immagine è un insieme superiormente (inferiormente) limitato. Si dice che una funzione è limitata se essa è limitata sia superiormente che inferiormente.

- Esempi

  La funzione
  $$f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad x \in (1, +\infty)$$
  è limitata inferiormente in quanto $f(A) = (1, +\infty)$. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ definite in $A = \mathbb{R}$ sono limitate in quanto l'immagine di ambedue le funzioni è l'intervallo $[-1, 1]$. La funzione $\tan x$ definita in $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ non è limitata nè inferiormente nè superiormente.

Data $f : A \to B$, sia I un intervallo contenuto in A. Si dice che f è *crescente* in I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$. Analogamente si dice che f è

non decrescente in I se $\forall x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2)$
decrescente in I se $\forall x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2)$
non crescente in I se $\forall x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2)$

Le funzioni che soddisfano una delle precedenti proprietà si dicono *monotòne*. In particolare quelle crescenti e quelle decrescenti si dicono anche *strettamente monotòne*.

- Esempi

  La funzione $\sin x$ è crescente nell'intervallo $I = [0, \pi/2]$ e decrescente nell'intervallo $I = [\pi/2, \pi]$. La funzione $\tan x$ è crescente in ogni intervallo non contenente i punti $\{x \in \mathbb{R} : x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Le funzioni $\exp x$ ed $\exp(-x)$ sono rispettivamente crescente e decrescente in tutto $\mathbb{R}$. La funzione $\exp(-x^2)$ è crescente in $\mathbb{R}^-$ ed è decrescente in $\mathbb{R}^+$. La funzione $f(x) = 2$ è non decrescente in tutto $\mathbb{R}$, ma è anche non crescente in tutto $\mathbb{R}$. La funzione $f(x) = [x]$ (parte intera di x) è non decrescente in tutto $\mathbb{R}$.

Consideriamo in particolare le funzioni iperboliche $\sinh x, \cosh x, \tanh x$. Esse sono definite in tutto $\mathbb{R}$ nel seguente modo.
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$
Dimostriamo che la funzione $\sinh x$ è biunivoca. A tale scopo dobbiamo fare vedere che, preso un elemento y del codominio, esiste uno ed un solo elemento del dominio tale che $\sinh x = y$. Si ha
$$2y = e^x - e^{-x}, \quad \Longrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$
Risolvendo quest'ultima equazione rispetto a e^x si ottiene
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1},$$
ed essendo e^x sempre positiva si ottiene l'unica soluzione $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$. Poiché la funzione $\exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$, è iniettiva, ne segue che fissato y esiste uno ed un solo valore di x tale che $\sinh x = y$.

Dimostriamo che il seno iperbolico è una funzione crescente in tutto $\mathbb{R}$. Dobbiamo verificare che la disuguaglianza

$$e^{x_1} - e^{-x_1} < e^{x_2} - e^{-x_2},$$

è verificata per ogni coppia x_1, x_2 di numeri reali tale che $x_1 < x_2$. Dalla diseguaglianza precedente si ha

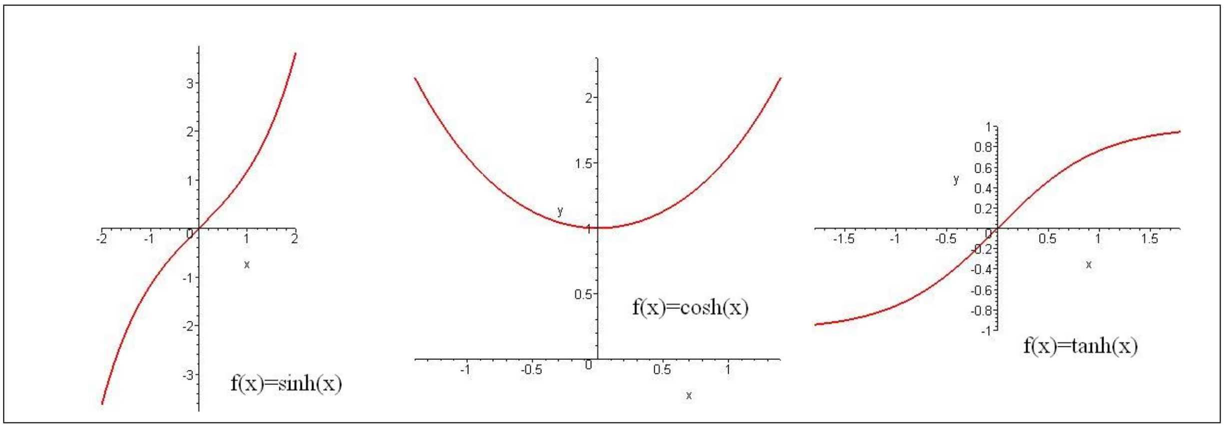
$$e^{x_1} - e^{x_2} < e^{-x_1} - e^{-x_2}.$$

Poiché le funzioni $\exp x$ e $\exp(-x)$ sono rispettivamente crescente e decrescente in tutto $\mathbb{R}$, ne segue che la precedente disuguaglianza è sempre verificata per ogni $x_1 < x_2$.
Si dimostra facilmente che la funzione $\cosh x$ è limitata inferiormente e la funzione $\tanh x$ è limitata. Si ha infatti

$$\cosh x \geq 1, \quad |\tanh x| < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tra le proprietà delle funzioni iperboliche, dimostrabili a partire dalle loro definizioni, citiamo la seguente,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *periodica* se esiste un $T > 0$ tale che $x + T \in A$ e $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in A$. Il più piccolo dei numeri T si chiama *periodo*.

- Esempi

  Le funzioni $\sin x, \cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π. La funzione $\tan x$ è una funzione periodica di periodo π. La funzione $\sin(3x)$ è periodica di periodo $2\pi/3$.

Una funzione $f(x)$, $|x| \in A \subseteq \mathbb{R}^+$ si dice *pari* se $f(-x) = f(x)$, mentre si dice *dispari* se $f(-x) = -f(x)$. Le funzioni pari hanno la proprietà che il loro grafico nel piano cartesiano x, y è simmetrico rispetto all'asse delle y, mentre il grafico delle funzioni dispari risulta simmetrico rispetto all'origine degli assi.

- Esempi

Le funzioni $|x|, \cos x, x^{2n} (n \in \mathbb{N}), \cosh x$ sono esempi di funzioni pari definite in $\mathbb{R}$. Le funzioni $x^{2n+1} (n \in \mathbb{N}), \sin x, \sinh x, \tan x, \tanh x$ sono esempi di funzioni dispari. La funzione $[x]$ non è nè pari nè dispari.

1.7 Funzioni composte

Consideriamo due funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ e $g : B \to C \subseteq \mathbb{R}$. Si definisce funzione *composta* da f e g la funzione $h : A \to C$ definita da

$$h(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A,$$

e si scrive $h = g \circ f$.

- Esempio

  Date le due funzioni $f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, la funzione composta $g \circ f$ è data da

  $$h(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si noti che, in generale, $f \circ g \neq g \circ f$. Nell'esempio presente $f \circ g$ risulta data da

$$\bar{h}(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Esempio

  Date le due funzioni $f(x) = 1/(x + 1), x \neq -1$, $g(x) = \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}^+$, la funzione composta $g \circ f$ è data da

  $$h(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}, \quad x > -1.$$

Dall'ultimo esempio si vede che per comporre due funzioni bisogna assicurarsi che l'immagine della prima sia contenuta nel dominio della seconda. Poiché la funzione f ha come immagine $f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la funzione g ha come dominio $\mathbb{R}^+$, la composizione ha senso solo se si considera la restrizione $\bar{f}$ della f la cui immagine è contenuta in $\mathbb{R}^+$. Il dominio della funzione composta h coinciderà allora con quello di $\bar{f}$.
Si può effettuare la composizione di più di due funzioni. Ad esempio, date le tre funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, si ha $k = h \circ (g \circ f)$, data da

$$k(x) = h[g(f(x))], \quad x \in A$$

Si verifica facilmente che $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Ciò permette di scrivere $k = h \circ g \circ f$.

1.8 Funzioni inverse

Consideriamo una funzione biunivoca $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$. Si dice funzione *inversa* della f e la si indica con f^{-1} la funzione che ad ogni elemento di $y \in B$ fa corrispondere l'elemento $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Ovvero

$$f^{-1}(y) = x, \quad \forall y \in B, x \in A \ : \ f(x) = y.$$

Notiamo che la composizione di una funzione biunivoca con la sua inversa, indipendentemente dall'ordine di composizione, equivale alla funzione *identità*, cioè alla funzione $i(x) = x$. In base alla definizione di funzione inversa si ha infatti

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y, \quad \text{oppure}, \quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x, \quad \forall x \in A, y \in B.$$

- Esempio

  La funzione $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}^+$ è una funzione biunivoca avente come codominio l'insieme $\mathbb{R}^+$. Essa ammette dunque l'inversa data da

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in \mathbb{R}^+.$$

Come nell'esempio precedente, per ricavare la funzione inversa di una data $f(x)$ biunivoca, basta esplicitare la variabile indipendente rispetto a quella dipendente, scambiandone così i ruoli.

- Esempi

  Data $f(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$, si ha $y = 2x - 1$ da cui $x = (y + 1)/2$. Ne segue

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

  Data $f(x) = \exp(3x),\ x \in \mathbb{R}$, si ha $y = \exp(3x)$, da cui $x = (\ln y)/3$. Ne segue

$$f^{-1}(y) = \ln \sqrt[3]{y}, \quad y \in \mathbb{R}^{++}.$$

  Data $f(x) = 1 + \log_a x,\ x \in \mathbb{R}^{++}$, si ha $y = 1 + \log_a x$, da cui $x = a^{y-1}$. Ne segue

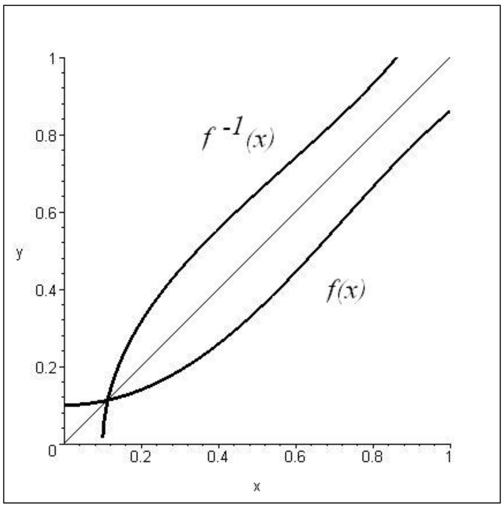
$$f^{-1}(y) = a^{y-1}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

In seguito indicheremo sempre con x la variabile indipendente e con y la variabile dipendente e quindi, data $y = f(x)$ scriveremo la sua inversa come $y = f^{-1}(x)$. Il grafico della funzione inversa f^{-1} nel piano x, y sarà allora il simmetrico di quello della f rispetto alla retta $y = x$, bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Consideriamo alcuni casi particolari di funzioni inverse.

La funzione $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ risulta essere biunivoca nell'intervallo $A = [-\pi/2, \pi/2]$. In tale intervallo essa è quindi invertibile. Poiché $f(A) = [-1, 1]$, la sua inversa è definita da

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1].$$



Analogamente, la funzione $f(x) = \cos x$ risulta invertibile nell'intervallo $A = [0, \pi]$ e si ha

$$f^{-1}(x) = \arccos x, \quad x \in [-1, 1].$$

Le funzioni $f(x) = \tan x, x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, e $g(x) = \cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, sono invertibili rispettivamente negli intervalli $A_f = (-\pi/2, \pi/2)$ e $A_g = (0, \pi)$ e si ha

$$f^{-1}(x) = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad g^{-1}(x) = \text{arccot}\ x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le funzioni iperboliche $\sinh x, (A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R})$ e $\tanh x, (A = \mathbb{R}, B = (-1, 1))$ sono biunivoche ed hanno come inverse rispettivamente le funzioni

$$\sinh^{-1} x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \tanh^{-1} x, \quad x \in (-1, 1),$$

dette rispettivamente *settore seno iperbolico* e *settore tangente iperbolica.* La funzione iperbolica $\cosh x$ è biunivoca in $\mathbb{R}^+$ ed ha come inversa la funzione

$$\cosh^{-1} x, \quad x \in [1, +\infty)$$

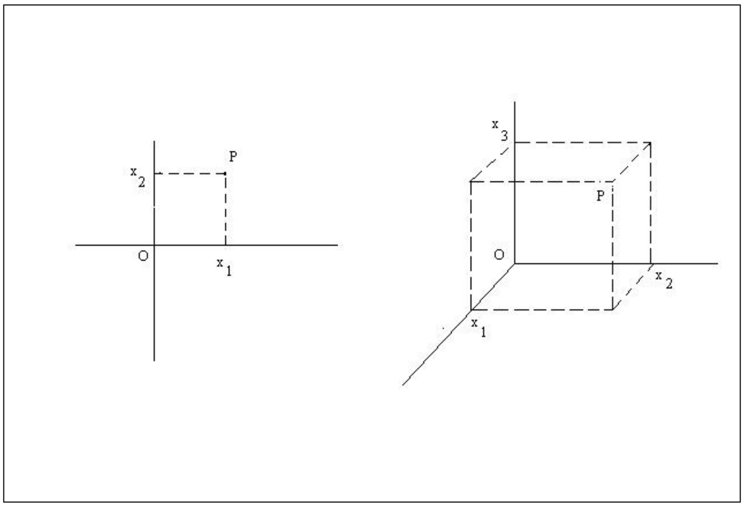
detta *settore coseno iperbolico.*

Capitolo 2

Vettori

2.1 Coordinate cartesiane

Così come è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta ed i numeri reali, si può pensare ad una corrispondenza tra i punti di un piano e le coppie ordinate di numeri reali (l'insieme $\mathbb{R}^2$). Si può realizzare una tale corrispondenza fissando sul piano due rette non parallele e prendendo il loro punto di incontro come origine di due sistemi di ascisse su ciascuna retta. Chiameremo assi coordinati una tale coppia di rette. Se da un qualunque punto P del piano mandiamo due parallele agli assi coordinati, le loro intersezioni con questi ultimi individueranno due punti sugli assi e quindi due numeri reali che chiameremo coordinate di P. Viceversa, due numeri reali x_1, x_2, presi in un dato ordine, individuano due punti sugli assi coordinati. Mandando da questi due punti le parallele ai due assi coordinati, esse si incontreranno in un punto del piano che chiameremo punto di coordinate (x_1, x_2). Se le due rette sono perpendicolari, la suddetta costruzione si chiama *sistema di assi cartesiani ortogonali.* La costruzione si può ripetere nello spazio euclideo tridimensionale associando a ciascun punto P una terna ordinata di numeri reali $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.



In quest'ultimo caso i piani individuati dalle terne $(0, x_2, x_3), (x_1, 0, x_3), (x_1, x_2, 0)$ vengono detti rispettivamente *piani coordinati* $x_2x_3,\ x_1x_3,\ x_1x_2$.
Mediante il teorema di Pitagora si dimostra facilmente che la distanza tra due punti $A = (a_1, a_2)$ e

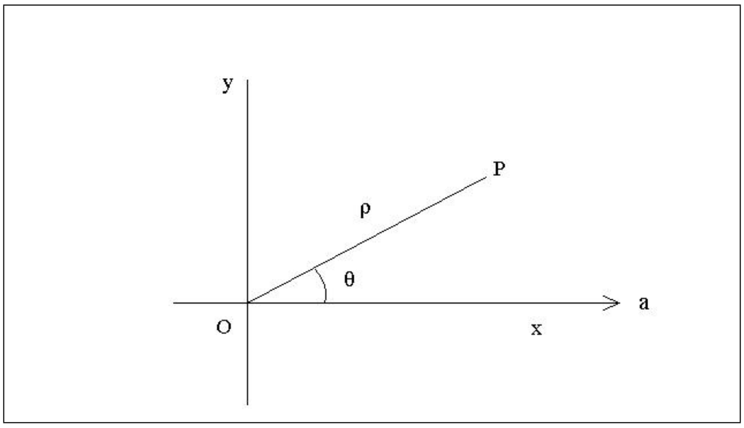
$B = (b_1, b_2)$ nel piano è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2},$$

mentre, nello spazio, la distanza tra i punti $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

I punti del piano possono essere riferiti ad un diverso sistema di coordinate, che può rivelarsi più adatto a descrivere particolari problemi geometrici nel piano, o come vedremo più avanti, per fornire una utile rappresentazione dei numeri complessi. Considerata una retta orientata a ed un suo punto O sul piano, chiamiamo ρ la distanza del generico punto del piano da O e θ l'angolo che il segmento congiungente P con O forma con la direzione orientata dell'asse a. La corrispondenza tra i punti del piano e le coppie di numeri $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ risulta essere biunivoca per tutti i punti del piano, escluso O. Quest'ultimo punto infatti è individuato da $\rho = 0$ e da qualunque valore di θ. Le coordinate $\rho \in \mathbb{R}^{++}, \theta \in [0, 2\pi)$ si dicono *coordinate polari* nel piano. In particolare ρ si dice *raggio polare* e θ *angolo polare* mentre l'asse a si chiama *asse polare.*



Un dato punto del piano si può dunque rappresentare mediante le sue cordinate cartesiane ortogonali (x, y), oppure mediante le sue coordinate polari (ρ, θ). Il legame tra queste diverse rappresentazioni si ottiene facilmente da considerazioni geometriche elementari e si ha

$$x = \rho \cos\theta, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho \sin\theta \qquad \theta = \begin{cases} \pi(1 - \operatorname{sgn}(y)) + \arctan\frac{y}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}(2 - \operatorname{sgn}(y)) & x = 0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & x < 0 \end{cases}.$$

Talvolta può essere comodo prendere θ in un intervallo di ampiezza 2π diverso da $[0, 2\pi)$, come ad esempio $[-\pi, \pi]$. In tal caso le formule precedenti vanno opportunamente modificate.

- Esempi ___

1) Determinare le coordinate polari, con $\theta \in [-\pi, \pi]$, dei punti del piano P_1 e P_2, rispettivamente di coordinate cartesiane $(\sqrt{3}, 1)$ e $(-2, -2)$. Tenuto conto delle precedenti formule si ottiene $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$, $P_2 = (\rho_2, \theta_2)$, dove

$$\rho_1 = \sqrt{1+3} = 2, \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{6}$$
$$\rho_2 = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$$

2) Determinare la distanza tra i punti P_1 e P_2 del piano aventi rispettivamente coordinate polari $(1, -\frac{\pi}{3})$ e $(3, \frac{5}{6}\pi)$. Poiché risulta

$$x_1 = 1\cos(-\pi/3) = \frac{1}{2}, \quad y_1 = 1\sin(-\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$x_2 = 3\cos(5\pi/6) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y_2 = 3\sin(5\pi/6) = \frac{3}{2},$$

si ottiene

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{10 + 3\sqrt{3}}.$$

Anche nello spazio è possibile introdurre coordinate diverse da quelle cartesiane. Esse verranno introdotte più avanti nel capitolo dedicato alla geometria.

2.2 Vettori applicati e vettori liberi

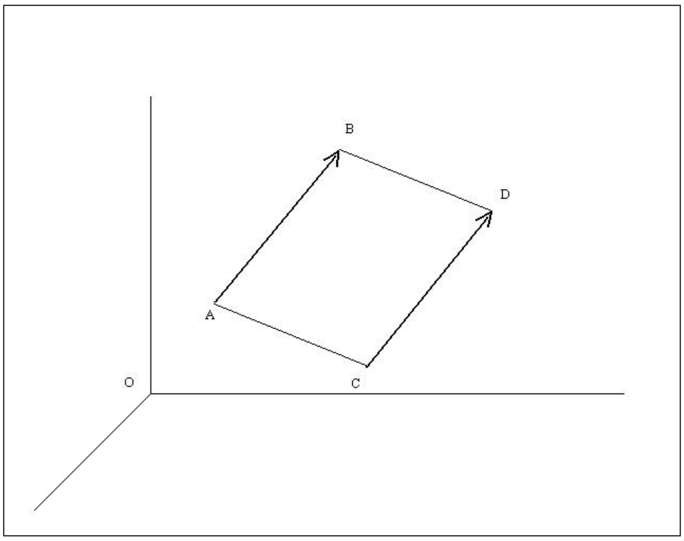
Consideriamo due punti A e B nello spazio tridimensionale. Definiamo *vettore applicato* $\vec{AB}$ il segmento congiungente i due punti A e B e orientato da A a B. Graficamente esso viene rappresentato da una freccia che parte dal punto A e termina nel punto B. Il punto A si dice punto di applicazione del vettore $\vec{AB}$ mentre il punto B si dice vertice. La retta cui appartiene il vettore si dice *retta di applicazione* di $\vec{AB}$, la lunghezza del vettore si dice *modulo* ed il senso della freccia, quello che va dal primo al secondo punto, si dice *verso* del vettore. Ne segue, per esempio, che i vettori $\vec{AB}$ e $\vec{BA}$ hanno lo stesso modulo, la stessa retta di applicazione ma verso opposto. Coerentemente con queste definizioni, dati tre punti allineati e consecutivi A, B, C nello spazio, il vettore $\vec{AC}$ ha come modulo la somma dei moduli dei vettori $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$, come retta di applicazione e verso gli stessi di questi due vettori.

Stabiliamo ora una relazione di equivalenza tra vettori applicati. Diciamo che due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ sono *equipollenti* se i punti A, B, D, C sono ordinatamente i vertici di un parallelogramma.

L'equipollenza tra vettori applicati costituisce una *relazione di equivalenza* in quanto soddisfa le seguenti proprietà

a) Proprietà riflessiva: Ogni vettore applicato è equipollente a se stesso.

b) Proprietà simmetrica: Se $\vec{AB}$ è equipollente a $\vec{CD}$, allora $\vec{CD}$ è equipollente a $\vec{AB}$.



c) Proprietà transitiva: Se $\vec{AB}$ è equipollente a $\vec{CD}$ e se $\vec{CD}$ è equipollente a $\vec{EF}$, allora $\vec{AB}$ è equipollente a $\vec{EF}$.

Tutti i vettori applicati possono essere dunque suddivisi in classi di equivalenza. In ciascuna classe sono contenuti tutti i vettori applicati equipollenti ad un dato vettore. Diremo *vettore libero* $\mathbf{v}$ ciascuna di queste classi. In particolare il vettore nullo $\mathbf{0}$ è la classe di equivalenza dei vettori del tipo $\vec{AA}$ con A generico.
In sostanza i vettori applicati di una stessa classe di equivalenza si distinguono solo per il loro punto di applicazione. Essi hanno infatti tutti lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso. In base a ciò ogni vettore applicato si può rappresentare come una coppia $(A, \mathbf{v})$ formata dal punto di applicazione A e dal vettore libero $\mathbf{v}$ che ne individua modulo direzione e verso.

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, ogni vettore applicato $\vec{AB}$ è individuato da sei numeri, ovvero dalle coordinate a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 dei due punti A e B. La classe di equivalenza del vettore $\vec{AB}$, e quindi il vettore libero $\mathbf{v}$, è invece individuato dalle sole differenze

$$b_1 - a_1, \quad b_2 - a_2, \quad b_3 - a_3.$$

Si dimostra infatti il seguente risultato.

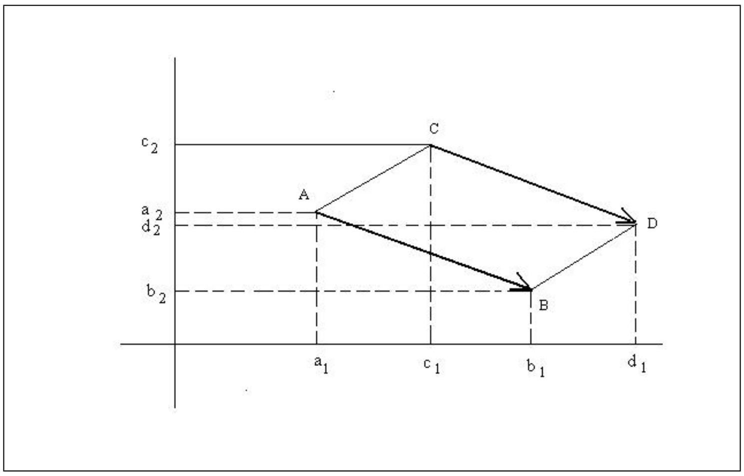
Teorema 2.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ siano equipollenti è che*

$$b_i - a_i = d_i - c_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

dove $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3), D = (d_1, d_2, d_3)$.

Dim. Proviamo il teorema nel caso più semplice di vettori in un piano. La generalizzazione al caso tridimensionale richiede una procedura più complicata ma concettualmente analoga.

Se i due vettori sono equipollenti, essi individuano lati opposti di un parallelogramma e quindi essi hanno la stessa direzione e lo stesso modulo. Dalla figura si deduce allora che le proiezioni dei loro estremi sugli assi cartesiani determinano segmenti orientati congruenti, ovvero $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ e



$b_2 - a_2 = d_2 - c_2$. Viceversa se quest'ultime uguaglianze sono vere allora dalla geometria elementare segue che i due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ hanno lo stesso modulo e rette di applicazione parallele e i loro estremi sono i vertici di un parallelogramma.

Ritornando a considerare il caso tridimensionale concludiamo che ciascuna classe di equivalenza è caratterizzata dalle sole differenze

$$\begin{aligned} v_1 &= b_1 - a_1 = d_1 - c_1, \\ v_2 &= b_2 - a_2 = d_2 - c_2, \\ v_3 &= b_3 - a_3 = d_3 - c_3, \end{aligned}$$

che chiameremo *componenti* del vettore $\mathbf{v}$ rispetto al sistema di coordinate cartesiane adottato e scriveremo

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Uno stesso vettore (non nullo) avrà, rispetto a diversi sistemi di coordinate, diverse componenti. Inoltre il vettore nullo $\mathbf{0}$ ha componenti tutte nulle rispetto ad un qualunque sistema di coordinate.

Il modulo (o *norma*) di $\mathbf{v}$, che indicheremo con $\|\mathbf{v}\|$ sarà dato da

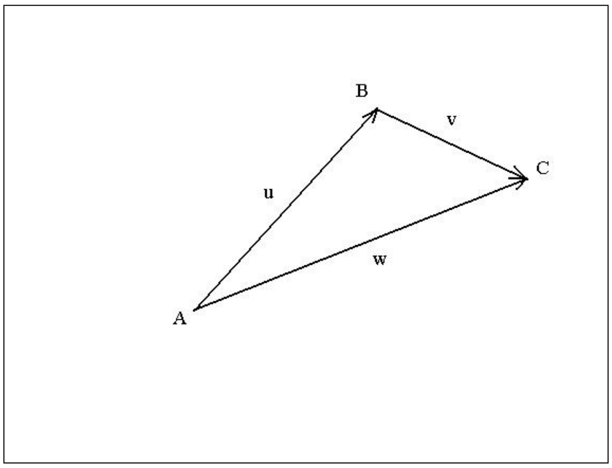
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

La norma è una grandezza intrinseca di un vettore ed è la stessa in tutti i sistemi di coordinate ortogonali che differiscono per una diversa scelta dell'origine e dell'orientazione degli assi.

2.3 Operazioni lineari tra vettori liberi

Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori liberi e A un generico punto dello spazio tridimensionale. Posto $\vec{AB}= (A, \mathbf{u})$ consideriamo il vettore applicato $\vec{BC}= (B, \mathbf{v})$. Definiamo *somma* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ dei due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il vettore libero $\mathbf{w}$ definito da $\vec{AC}= (A, \mathbf{w})$

L'operazione di somma appena definita si dice anche *legge del parallelogramma* in quanto il vettore somma corrisponde, in modulo e direzione, alla diagonale di un parallelogramma i cui lati sono i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.



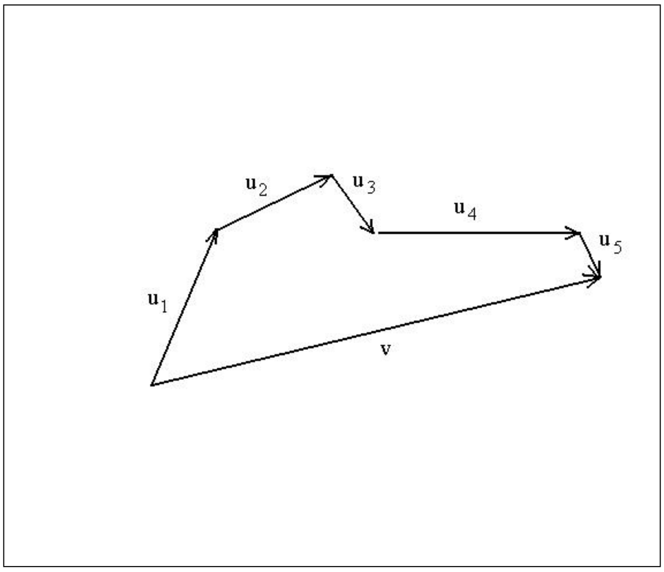
La somma di vettori liberi gode delle seguenti proprietà, di verifica immediata.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

La seconda proprietà permette di scrivere senza ambiguità la somma $\mathbf{v}$ di n vettori $\mathbf{u}_i,\ i = 1, ..., n$ nella forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + ... + \mathbf{u}_n.$$

In tal caso il vettore $\mathbf{v}$ sarà determinato dalla chiusura della poligonale avente come lati i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$.



Valgono le seguenti diseguaglianze

$$|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|,$$

che, in base alla legge del parallelogramma e alla definizione di modulo di un vettore, sono conseguenza del fatto che in un triangolo, la somma di due lati è maggiore del terzo lato, il quale, a sua volta, è maggiore della differenza dei primi due.
Dato un vettore $\mathbf{u}$ ed un numero $k \in \mathbb{R}$ si definisce il prodotto $k\mathbf{u}$ come il vettore avente la stessa direzione di $\mathbf{u}$, modulo pari a $|k|\|\mathbf{u}\|$ e verso uguale o opposto a quello di $\mathbf{u}$ a seconda che $k > 0$ oppure $k < 0$. Nel caso in cui $k = 0$, il vettore $k\mathbf{u}$ è il vettore nullo. Nel caso in cui $k = -1$ si ottiene il vettore $-\mathbf{u}$, ovvero il vettore *opposto* di $\mathbf{u}$.
L'operazione di moltiplicazione di un vettore per un numero gode delle seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
&k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v} \\
&k_1(k_2\mathbf{u}) = (k_1k_2)\mathbf{u} \\
&(k_1+k_2)\mathbf{u} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{u}
\end{aligned}$$

dove k_1, k_2 sono numeri reali. Anche tali proprietà possono essere facilmente dimostrate a partire dalla definizione data.

Le operazioni di somma e di prodotto per un numero si dicono *operazioni lineari* sui vettori. Dati n vettori $\mathbf{u}_i$, $i = 1, ..., n$, ed n coefficienti c_i il vettore

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_n\mathbf{u}_n,$$

si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{u}_i$.

Un vettore $\mathbf{e}$ avente modulo pari a 1 si dice *versore*. Dato un qualunque vettore libero non nullo $\mathbf{u}$, il vettore $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$ è un versore e si dice *versore di* $\mathbf{u}$. Si scrive

$$\text{vers}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

- Esempio

  In un dato sistema di riferimento, il vettore $\mathbf{u}$ ha componenti $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = -1$. Calcoliamo il suo versore. Poiché $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ si ottiene

$$\text{vers}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1).$$

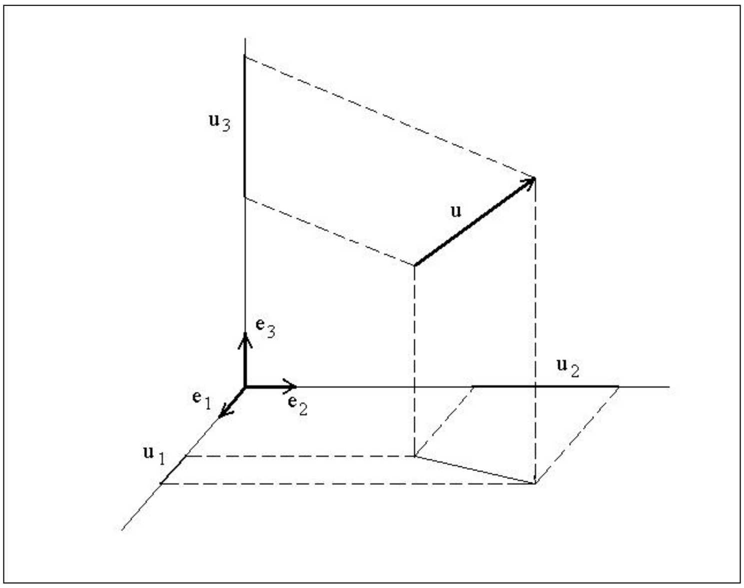
Consideriamo ora un sistema di assi cartesiani ortogonali e i vettori liberi

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1).$$

Questi vettori hanno modulo pari a 1 e sono diretti come gli assi coordinati del sistema di riferimento. Per tale motivo vengono detti *versori del sistema di riferimento*.

Se u_1, u_2, u_3 sono le componenti di un vettore $\mathbf{u}$ rispetto ad un dato riferimento cartesiano ed $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono i versori di quel riferimento, è facile verificare che

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\mathbf{e}_i.$$



In altri termini, ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei versori del riferimento. Fissato il sistema di assi cartesiani, tale combinazione è unica. Infatti, se esistesse una diversa rappresentazione $\sum_{i=1}^{3} u_i' \mathbf{e}_i$ dello stesso vettore $\mathbf{u}$, facendo uso delle proprietà delle operazioni lineari, si avrebbe

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} u_i' \mathbf{e}_i, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = \sum_{i=1}^{3} (u_i - u_i')\mathbf{e}_i = (u_1 - u_1', u_2 - u_2', u_3 - u_3').$$

Ma il vettore nullo è caratterizzato da componenti tutte nulle quindi $u_i = u_i', \ i = 1, 2, 3$.

Facendo uso della rappresentazione di un vettore tramite i versori del riferimento e delle proprietà delle operazioni lineari tra vettori si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)\\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

$$k\mathbf{u} = k(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) = ku_1\mathbf{e}_1 + ku_2\mathbf{e}_2 + ku_3\mathbf{e}_3.$$

- Esempi

1) Calcolare la somma dei due vettori $\mathbf{u} = (1, -4, 4)$ e $\mathbf{v} = (3, 2, -1)$.

Applicando la regola di calcolo precedente si ottiene

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, -4, 4) + (3, 2, -1) = (1 + 3, -4 + 2, 4 - 1) = (4, -2, 3).$$

2) Dato il vettore $\mathbf{u} = (0, 2, -1)$, determinare i vettori $\mathbf{v}$ di norma pari a $\sqrt{5}$ tali che $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ sia parallelo a $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$.

Le condizioni imposte al vettore $\mathbf{v}$ sono

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = k\mathbf{w}, \qquad \|\mathbf{v}\|^2 = 5, \quad \text{con } \ k \neq 0.$$

Dalla prima si ha

$$\mathbf{v} = k\mathbf{w} - \mathbf{u} = (k, 2k - 2, 3k + 1),$$

e, imponendo la seconda

$$k^2 + (2k-2)^2 + (3k+1)^2 = 5, \qquad \Rightarrow \qquad 14k^2 - 2k = 0.$$

Dall'ultima eguaglianza si ricava l'unico valore non nullo $k = 1/7$. Esiste dunque un unico vettore che soddisfa le condizioni richieste ed è

$$\mathbf{v} = \frac{1}{7}(1, -12, -4).$$

2.4 Prodotto scalare

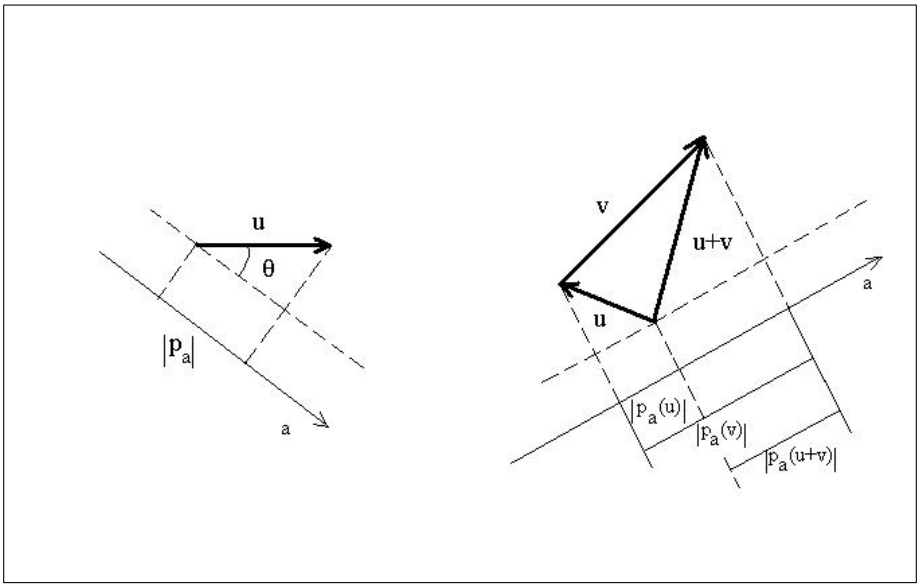
Sia $\mathbf{u}$ un vettore libero e a una retta orientata dello spazio. Detto A un generico punto di a chiamiamo θ l'angolo che il vettore applicato $(A, \mathbf{u})$ forma con la retta orientata a, ovvero il più piccolo angolo di cui deve ruotare $\mathbf{u}$ per sovrapporsi in direzione e verso alla direzione orientata a. Diremo *proiezione* di $\mathbf{u}$ su a la quantità

$$p_a(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\| \cos\theta.$$

Osserviamo che, dati due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ed una retta orientata a si ha (vedi figura)

$$p_a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = p_a(\mathbf{u}) + p_a(\mathbf{v}).$$

Tale proprietà si estende, ovviamente, alla somma di un numero arbitrario di vettori.



Definiamo *prodotto scalare* tra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, la quantità

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta,$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori (il più piccolo degli angoli di cui si deve ruotare il vettore $(A, \mathbf{u})$ per sovrapporre la sua direzione e il suo verso al vettore $(A, \mathbf{v})$, qualunque sia A). Così come la proiezione di un vettore su una retta orientata, il prodotto scalare tra due vettori è un numero. Esso coincide con il prodotto del modulo del primo vettore con la proiezione del secondo lungo la direzione orientata del primo.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà

$$
\begin{aligned}
&a)\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},\\
&b)\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w},\\
&c)\ (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),\\
&d)\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{u} = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

La prima proprietà risulta evidente a partire dalla definizione. Per verificare la seconda proprietà osserviamo che

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \|\mathbf{u}\| p_a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \|\mathbf{u}\|(p_a(\mathbf{v}) + p_a(\mathbf{w}))\\
&= \|\mathbf{u}\|(\|\mathbf{v}\| \cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) + \|\mathbf{w}\| \cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{w}}))\\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.
\end{aligned}
$$

La terza proprietà segue dal fatto che $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ e che $\cos(\widehat{k\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \operatorname{sgn}(k) \cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$. Infine, la quarta proprietà segue dalla relazione $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\| \cos 0 = \|\mathbf{u}\|^2$.

Due vettori non nulli $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si dicono *ortogonali* se

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

In base alla definizione di prodotto scalare, due vettori ortogonali hanno direzioni perpendicolari, infatti, posto $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = 0,$$

ovvero, i due vettori formano tra loro un angolo pari a $\pi/2$.

Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, i versori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ risultano ortogonali a due a due e, poiché hanno modulo unitario, si ha

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } \ i \neq j \\ 1 & \text{se } \ i = j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

In base a questo risultato, facendo uso della scomposizione di un vettore rispetto ai versori del riferimento, e usando le proprietà del prodotto scalare, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3)\\
&= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.
\end{aligned}
$$

Come già osservato, moltiplicando scalarmente un vettore per se stesso si ottiene

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\mathbf{u}\|^2.$$

In altri termini, la norma di un vettore è data dalla radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso. Questo risultato è coerente con il fatto che la norma di un vettore è una sua quantità intrinseca e non dipende dal riferimento cartesiano rispetto al quale tale quantità viene calcolata.

- Esempi

1) Dati $\mathbf{u} = (1, 2, 0), \mathbf{v} = (3, 0, 1)$, si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 3.$$

2) Dati $\mathbf{u} = (1, 1, -3), \mathbf{v} = (3, 3, -9)$, si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-9) = 33.$$

Notiamo che in questo caso i due vettori sono paralleli e si ha $\mathbf{v} = 3\mathbf{u}$. Per una proprietà del prodotto scalare allora $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 3\|\mathbf{u}\|^2 = 3(1 + 1 + 9) = 33$.

3) Considerati i due vettori $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, -1)$, dopo aver verificato che essi sono ortogonali, determinare un versore $\mathbf{w}$ che sia ortogonale a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$. Si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Le condizioni di ortogonalità rispetto a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$ implicano rispettivamente

$$\begin{aligned} 2w_1 - w_2 + w_3 &= 0, \\ w_1 + w_2 - w_3 &= 0, \end{aligned}$$

da cui si ricava $w_1 = 0$ e $w_2 = w_3$. Infine $\mathbf{w}$ deve essere un versore quindi deve avere norma unitaria, ovvero $w_2^2 + w_3^2 = 1$. Si ottengono così i due possibili versori

$$\mathbf{w}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \mathbf{w}_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

4) Dati i punti del piano $A = (1, 1), B = (5, 1), C = (3, 1 + 2\sqrt{3})$ determinare l'angolo $A\hat{C}B$. l'angolo richiesto è quello tra i vettori $\vec{CA}$ e $\vec{CB}$, dati da

$$\begin{aligned} (C, \mathbf{u}) \quad &\text{con} \quad \mathbf{u} = (1 - 3, 1 - (1 + 2\sqrt{3})) = (-2, -2\sqrt{3}), \\ (C, \mathbf{v}) \quad &\text{con} \quad \mathbf{v} = (5 - 3, 1 - (1 + 2\sqrt{3})) = (2, -2\sqrt{3}), \end{aligned}$$

da cui, per la definizione di prodotto scalare,

$$\cos A\hat{C}B = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|} = \frac{-4 + 12}{16} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow A\hat{C}B = \frac{\pi}{3}.$$

Abbiamo visto che ogni vettore ammette la rappresentazione

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3,$$

essendo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i versori degli assi coordinati. Poiché tali versori sono mutuamente ortogonali, si ha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 = u_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = u_1$, e, analogamente, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 = u_2, \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3 = u_3$. In sintesi si può scrivere

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = u_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

ovvero le componenti di un vettore in un dato sistema di coordinate cartesiane sono date dai prodotti scalari del vettore con i versori degli assi coordinati. Equivalentemente le componenti u_i sono date dalle proiezioni di $\mathbf{u}$ sugli assi coordinati in quanto

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{e}_i \| \cos \theta_i = \|\mathbf{u}\| \cos \theta_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

dove $\theta_i, (i = 1, 2, 3)$ sono gli angoli formati dalla direzione orientata del vettore $\mathbf{u}$ con gli assi coordinati x_1, x_2, x_3. Si ha allora

$$\text{vers}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_i = \cos \theta_i.$$

Le quantità $\cos \theta_i,\ (i = 1, 2, 3)$ si dicono *coseni direttori* della direzione orientata di $\mathbf{u}$. Essi corrispondono alle componenti di vers($\mathbf{u}$) rispetto agli assi coordinati.

- Esempi

1) Calcoliamo i coseni direttori della retta passante per i punti $A = (0, 2, 1)$ e $B = (3, 1, 0)$ orientata da A a B.

La retta in questione ha direzione e verso del vettore applicato $\vec{AB}$. Poiché si ha

$$\vec{AB} = (A, \mathbf{u}) \quad \text{con} \quad \mathbf{u} = (3, -1, -1),$$

ne segue

$$\text{vers}(\mathbf{u}) = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}} \right),$$

da cui

$$\cos \theta_1 = \frac{3}{\sqrt{11}}, \quad \cos \theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{11}}, \quad \cos \theta_3 = -\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

2) Individuare i versori della direzione nello spazio, che forma angoli uguali con gli assi coordinati.

Poiché le componenti del versore sono i coseni degli angoli formati con gli assi coordinati, esse devono essere tutte uguali. Detto a il loro valore e tenuto conto che il versore ha norma unitaria, si ha

$$a^2 + a^2 + a^2 = 1,$$

da cui

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

I versori cercati saranno allora $\mathbf{e}$ e $-\mathbf{e}$, dove

$$\mathbf{e} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

2.5 Prodotto vettoriale e prodotto misto

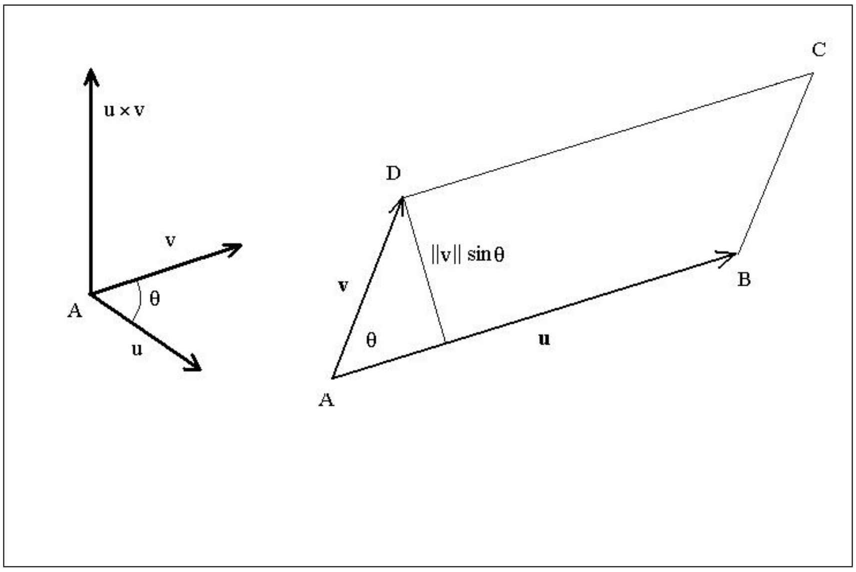
Il prodotto scalare è una operazione che associa a due vettori un numero. È utile introdurre una operazione di moltiplicazione fra vettori detta *prodotto vettoriale* che associa a due vettori un terzo vettore.

Consideriamo due vettori liberi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e un punto A. Sia θ il più piccolo angolo di cui si deve far ruotare il vettore $(A, \mathbf{u})$ per farlo risultare parallelo ed equiverso al vettore $(A, \mathbf{v})$. Si definisce *prodotto vettoriale* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ il vettore $\mathbf{w}$, caratterizzato dalle seguenti proprietà.

1) $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta$.
2) $\mathbf{w}$ ha direzione perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
3) Il verso di $\mathbf{w}$ è tale che, facendo ruotare $\mathbf{u}$ dell'angolo θ fino a sovrapporsi a $\mathbf{v}$, la rotazione risulti antioraria se vista dal vertice di $\mathbf{w}$.

Dalla definizione risulta che, per una nota proprietà trigonometrica, il modulo di $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è pari all'area del parallelogramma formato dai due vettori $(A, \mathbf{u})$ e $(A, \mathbf{v})$, qualunque sia A (vedi figura),

$$A_S(ABCD) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$



Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà.

$$\begin{aligned}
&a)\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u},\\
&b)\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w},\\
&c)\ (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}),\\
&d)\ \mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0, \quad \text{identicamente} \ \ \forall \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

La prima proprietà è diretta conseguenza della definizione, infatti i vettori $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ hanno lo stesso modulo e la stessa direzione ma verso opposto. Le ultime due proprietà implicano, in particolare, che il prodotto vettoriale tra due vettori paralleli è identicamente nullo.

Fissato un riferimento cartesiano ortogonale e introdotti i versori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, si verifica subito che

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

Da queste relazioni e in base alla rappresentazione di un vettore tramite i versori del riferimento si ottiene la seguente regola di calcolo,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \times (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)\\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Quest'ultima espressione può essere ottenuta direttamente dal calcolo del determinante formale (vedi cap. 12),

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3.$$

- Esempi

1) Calcolare il prodotto vettoriale dei due vettori $\mathbf{u} = (0, 2, 4)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Dalla definizione si ha

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w} = (-4, 4, -2).$$

2) Dati i punti $A = (1, 2, 4), B = (3, 4, 7), C = (0, 3, 1), D = (2, 5, 4)$ verificare che $ACDB$ è un parallelogramma e calcolarne l'area della superficie.

Poiché i vettori $\vec{AC}$ e $\vec{BD}$ individuano il medesimo vettore libero $\mathbf{u} = (-1, 1, -3)$, essi sono equipollenti e quindi A, C, D, B sono, ordinatamente, i vertici di un parallelogramma. Considerato poi il vettore $\vec{AB}= (A, \mathbf{v})$, con $\mathbf{v} = (2, 2, 3)$, si ha

$$A_S(ACDB) = \parallel \mathbf{u} \times \mathbf{v} \parallel = \sqrt{(3+6)^2 + (6-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{106}.$$

3) Trovare l'area della superficie del triangolo di vertici $A = (1, 0, 0), B = (0, 2, 0), C = (0, 0, 3)$.

L'area di un triangolo si può sempre pensare come la metà dell'area di un parallelogramma avente come lati due lati qualunque del triangolo. Nel nostro caso i due lati AB e AC corrispondono ai due vettori

$$\begin{aligned}&(A, \mathbf{u}) \quad \text{con} \quad \mathbf{u} = (-1, 2, 0),\\ &(A, \mathbf{v}) \quad \text{con} \quad \mathbf{v} = (-1, 0, 3).\end{aligned}$$

Avremo allora,

$$A_S(ABC) = \frac{1}{2} \parallel \mathbf{u} \times \mathbf{v} \parallel = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{7}{2}.$$

Nel seguito sarà importante il seguente risultato.

Teorema 2.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un vettore* $\mathbf{w}$ *sia complanare a due vettori non paralleli* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *è che* $\mathbf{w}$ *sia esprimibile come combinazione lineare di* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$*, ovvero che esistano due numeri reali* α, β *tali che*

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}.$$

Dim. Scelto un sistema di assi cartesiani ortogonali sul piano di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, con versori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ammettono la rappresentazione

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2.$$

Supposto che $\mathbf{w}$ sia rappresentabile come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, si ha

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \alpha(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) + \beta(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) = (\alpha u_1 + \beta v_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha u_2 + \beta v_2)\mathbf{e}_2,$$

ovvero $\mathbf{w}$ è una combinazione lineare dei versori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, e quindi appartiene al piano.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2$ e che i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non siano paralleli, cioè che $\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$. Dimostriamo che l'equazione

$$\mathbf{w} - (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

ammette soluzione in α e β. Si ha infatti

$$w_1 - (\alpha u_1 + \beta v_1) = 0, \quad w_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2) = 0,$$

da cui, tenuto conto che $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$, si ottiene

$$\alpha = \frac{w_1v_2 - w_2v_1}{u_1v_2 - u_2v_1}, \quad \beta = \frac{w_1u_2 - w_2u_1}{u_1v_2 - u_2v_1}.$$

Si definisce *prodotto misto* di tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, il prodotto

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

Fissato un sistema di riferimento cartesiano, dalle regole di calcolo del prodotto vettoriale e del prodotto scalare, si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1).$$

Inoltre, usando la regola di calcolo già vista per il prodotto vettoriale, si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Essendo il prodotto scalare di due vettori, il prodotto misto è un numero. Valgono le seguenti proprietà, di immediata verifica,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad \text{(permutazione ciclica dei fattori)},$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad \text{(scambio dei segni di prodotto)}.$$

Una importante conseguenza della prima proprietà sta nel fatto che se due dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono paralleli, allora il loro prodotto misto è nullo. Infatti, permutando ciclicamente i fattori si ottengono prodotti misti contenenti tutti i possibili prodotti vettoriali tra due dei tre vettori. Se questi due vettori sono paralleli, il loro prodotto vettoriale sarà nullo. Si ha inoltre il seguente risultato.

Teorema 2.3 *Il prodotto misto di tre vettori complanari è identicamente nullo.*

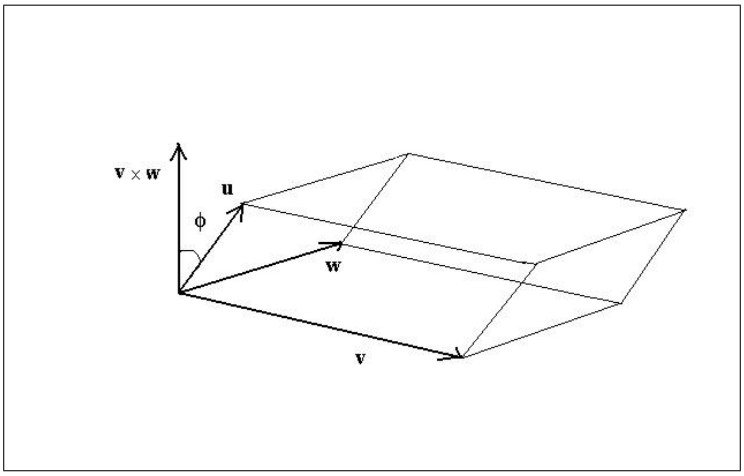
Dim. Per dimostrare questa proprietà supponiamo dapprima che due dei tre vettori siano non paralleli, per esempio, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Allora per il teorema 2.2 il terzo vettore si potrà scrivere come

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

e, per le proprietà dei prodotti vettoriale e scalare si avrà

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{v},$$

ma i due addendi dell'ultima eguaglianza sono ambedue nulli in quanto prodotti misti contenenti due vettori paralleli. Quindi il prodotto misto di $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.
Se invece i due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ fossero paralleli, sempre in base alla osservazione precedente, il prodotto misto risulterebbe nullo.



Dal punto di vista geometrico, il prodotto misto rappresenta, in valore assoluto, il volume del parallelepipedo avente come spigoli i tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Infatti, tenuto conto della definizione di prodotto scalare, si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \parallel \mathbf{u} \parallel \parallel \mathbf{v} \times \mathbf{w} \parallel \cos\phi$$

dove ϕ è l'angolo tra i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Poiché $\parallel \mathbf{u} \parallel \cos\phi$ rappresenta, in valore assoluto, l'altezza del parallelepipedo che ha per base il parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (vedi figura), ed essendo $\parallel \mathbf{v} \times \mathbf{w} \parallel$ l'area della superficie di quest'ultimo, si ha

$$V(\text{parallelepipedo}) = A_S(\text{base})\ h = \parallel \mathbf{v} \times \mathbf{w} \parallel \parallel \mathbf{u} \parallel |\cos\phi| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}|.$$

- Esempio

  Calcolare il volume V del parallelepipedo avente come spigoli i tre vettori

  $$\mathbf{u} = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (3, 0, 3), \quad \mathbf{w} = (3, 2, -1).$$

  Si ha

  $$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (-6, 12, 6),$$

  da cui,

  $$V = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |6 + 12 + 6| = 24.$$

Dati tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, il vettore
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}),$$
si dice *doppio prodotto vettoriale* di $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Valgono le seguenti formule

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}, \qquad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}.$$

La seconda di queste si ricava dalla prima osservando che, per l'antisimmetria del prodotto vettoriale,

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -[(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}] = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}.$$

Per dimostrare la prima formula consideriamo una terna di versori ortogonali $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, 3$, e scriviamo
$$\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{v} = \sum_j v_j \mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{w} = \sum_k w_k \mathbf{e}_k.$$
Per la linearità del prodotto vettoriale avremo

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \sum_{i,j,k} u_i v_j w_k [\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)].$$

Poiché $\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)$ è un vettore ortogonale a $\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k$, esso sarà combinazione lineare di $\mathbf{e}_j$ ed $\mathbf{e}_k$, ovvero, per $j \neq k$,
$$\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = \alpha \mathbf{e}_j + \beta \mathbf{e}_k.$$
Moltiplicando scalarmente questa relazione prima per $\mathbf{e}_j$ e poi per $\mathbf{e}_k$, tenuto conto della proprietà di scambio dei segni del prodotto misto, si ha

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}, \\
\beta &= \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = -\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Sostituendo nel doppio prodotto vettoriale si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \sum_{i,j,k} u_i v_j w_k (\delta_{ik} \mathbf{e}_j - \delta_{ij} \mathbf{e}_k) = \sum_{i,k} u_i w_k \delta_{ik} \sum_j v_j \mathbf{e}_j - \sum_{i,j} u_i v_j \delta_{ij} \sum_k w_k \mathbf{e}_k \\
&= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Osserviamo infine che, come è facile dimostrare,

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{u} = c\mathbf{w}, \quad \text{oppure} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Capitolo 3

Numeri Complessi

3.1 Definizione di numero complesso

Consideriamo l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali (a, b) e costruiamo delle operazioni tra esse in modo da ottenere un insieme avente una struttura algebrica analoga a quella introdotta in $\mathbb{R}$ e che contenga, in particolare come sottoinsieme, l'insieme stesso dei numeri reali. Diremo innanzitutto che due coppie (a, b) e (c, d) sono uguali se risulta

$$a = c, \quad b = d.$$

Definiamo poi la somma di due coppie $(a, b), (c, d)$ come la coppia formata dalle somme di numeri reali $a + c$ e $b + d$, ovvero

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Definiamo inoltre il prodotto tra due coppie $(a, b), (c, d)$, a partire dalla nozione di prodotto tra numeri reali, come la coppia data da

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

É immediato verificare che la somma appena introdotta gode delle proprietà commutativa e associativa, ovvero

$$\begin{aligned} &(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b), \\ &[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]. \end{aligned}$$

Il prodotto gode anch'esso delle proprietà commutativa, associativa e della proprietà distributiva rispetto alla somma,

$$\begin{aligned} &(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b), \quad [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)], \\ &[(a, b) + (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f). \end{aligned}$$

Chiameremo *numero complesso* e lo indicheremo con z, la coppia (a, b) e denoteremo con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi. Chiameremo *parte reale* di z il numero $a = \Re z$ e *parte immaginaria* di z il numero $b = \Im z$. Se consideriamo tutte le coppie del tipo $(a, 0)$, aventi cioè parte immaginaria nulla, le operazioni di somma e prodotto introdotte prima, coincidono con quelle definite nell'ambito dei numeri reali, relativamente alla sola parte reale a. Converremo allora di porre

$$(a, 0) = a.$$

L'insieme dei numeri reali risulta così un sottoinsieme dei numeri complessi, ovvero $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

È possibile definire una operazione di sottrazione tra numeri complessi e una operazione di divisione tra numeri complessi, come operazioni inverse, rispettivamente, della somma e del prodotto tra numeri complessi. Per la sottrazione si ha

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d), \quad \text{in quanto} \quad (a - c, b - d) + (c, d) = (a, b).$$

Per la divisione si ha che il quoziente tra due numeri complessi $(a, b), (c, d)$, con c e d non contemporaneamente nulli, è quel numero che moltiplicato per (c, d) da come risultato (a, b), ovvero

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right).$$

Come conseguenza di queste operazioni inverse, converremo di porre

$$(-a, -b) = -(a, b),$$

detto il numero opposto del numero complesso (a, b). Definiremo poi reciproco di (a, b) quel numero complesso che moltiplicato per (a, b) da il numero $(1, 0)$, ovvero

$$\frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Chiameremo potenza n-esima di (a, b) il prodotto di (a, b) per se stesso n volte,

$$(a, b)^n = \underbrace{(a, b) \cdot (a, b) \ ... \ (a, b)}_{n \text{ volte}},$$

convenendo che $(a, b)^0 = (1, 0)$.

3.2 Rappresentazione algebrica

Chiameremo i, o *unità immaginaria*, il numero complesso $(0, 1)$. Notiamo che ogni numero complesso $(0, b)$ avente parte reale nulla si può scrivere nella forma $(0, b) = ib$, infatti $(0, 1)(b, 0) = (0, b)$. Inoltre si ha

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = -1.$$

Queste osservazioni ci permettono di introdurre una notazione dei numeri complessi nella forma di binomio, composto dalla somma di una parte reale ed una immaginaria, ovvero

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib.$$

In questo modo tutte le operazioni tra numeri complessi si riconducono al calcolo algebrico dei polinomi, con la sola avvertenza che $i^2 = -1$. In particolare, il quoziente tra due numeri complessi $a + ib$ e $c + id$ si calcola moltiplicando numeratore e denominatore per il numero complesso $c - id$, ovvero

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

- Esempi

Calcoliamo le somme

$$\begin{aligned}
&(3-7i)+(2+i)=3+2-7i+i=5-6i,\\
&(1+12i)-(8-2i)=1-8+12i+2i=-7(1-2i),\\
&(-1+i)+(1-3i)=-1+1+i-3i=-2i.
\end{aligned}$$

Calcoliamo i prodotti

$$\begin{aligned}
&(2+3i)(4-2i)=8-4i+12i-6i^2=14+8i,\\
&(-3+i)(2+5i)=-6-15i+2i+5i^2=-11-13i.
\end{aligned}$$

Calcoliamo i quozienti

$$\begin{aligned}
&\frac{8+i}{3+2i}=\frac{(8+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{26-13i}{13}=2-i,\\
&\frac{6-7i}{2i}=\frac{(6-7i)(-i)}{2(i)(-i)}=\frac{-7-6i}{2}=-\frac{7}{2}-3i.
\end{aligned}$$

Si dice *coniugato* del numero complesso $z=a+ib$ il numero $\bar{z}=a-ib$. È immediato verificare che si ha

$$\begin{aligned}
&\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\\
&\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\qquad \overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2}\\
&z+\overline{z}=2a,\qquad z-\overline{z}=2ib.
\end{aligned}$$

Si dice *modulo* del numero complesso $z=a+ib$, la quantità

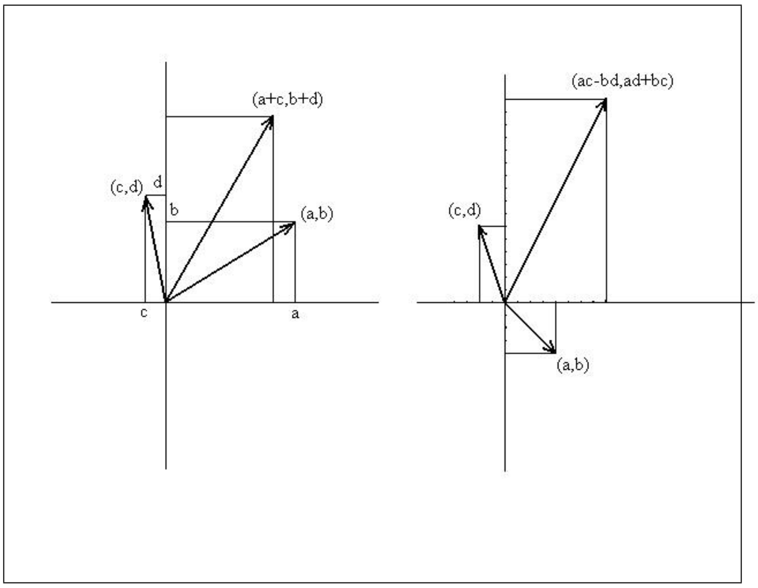
$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ovviamente risulta $|z|=|\overline{z}|$, e si ha

$$z\cdot\overline{z}=(a+ib)\cdot(a-ib)=a^2+b^2=|z|^2.$$

Se z è reale il suo modulo coincide con il suo valore assoluto.
La definizione di numero complesso si presta ad una immediata interpretazione geometrica. Poiché un numero complesso non è altro che una coppia ordinata di numeri reali, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{C}$ e l'insieme dei punti del piano, che, in questo caso chiameremo *piano complesso*. I numeri a e b si possono riguardare infatti come le coordinate (cartesiane) di un punto del piano. In particolare, i punti dell'asse delle ascisse hanno coordinate del tipo $(a,0)$ e rappresentano quindi numeri reali. L'asse delle ascisse in questo caso si dice *asse reale*. I punti dell'asse delle ordinate sono del tipo $(0,b)$ e rappresentano quindi numeri immaginari. L'asse delle ordinate verrà chiamato *asse immaginario*.
In modo perfettamente equivalente, il numero complesso (a,b) si può interpretare come un vettore applicato nell'origine del piano complesso, le cui proiezioni, rispetto al riferimento cartesiano, sono a e b. L'operazione di somma di due numeri complessi corrisponde esattamente alla operazione di somma dei due vettori corrispondenti secondo la regola del parallelogramma. Il coniugato $\overline{z}$ di un numero complesso z è rappresentato da un vettore simmetrico del vettore di z rispetto all'asse reale.

Infine, il modulo di un numero complesso rappresenta la lunghezza del vettore corrispondente nel piano complesso.
L'operazione di prodotto tra numeri complessi non ha alcun analogo nell'algebra dei vettori del piano. In ogni caso, il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso ed è quindi rappresentabile come un vettore del piano complesso (vedi figura).



In base alla interpretazione geometrica della somma di numeri complessi nel piano complesso, dati due numeri complessi z e z', valgono le seguenti diseguaglianze (vedi le analoghe diseguaglianze per i vettori liberi al cap. 2),

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Queste diseguaglianze costituiscono una generalizzazione delle analoghe diseguaglianze valide per i numeri reali (vedi par. 1.3) in quanto, se z è reale, il suo modulo coincide col suo valore assoluto.

3.3 Rappresentazione trigonometrica

Poiché nel piano possiamo introdurre le coordinate polari ρ, φ, è possibile rappresentare un numero complesso in una forma diversa, particolarmente utile nel calcolo delle potenze di numeri complessi. A questo scopo prendiamo l'asse reale come asse polare e l'origine nell'intersezione tra asse polare e asse immaginario. Considerato il numero $z = a + ib$, si avrà $a = \rho \cos\varphi, \quad b = \rho \sin\varphi$, da cui otteniamo la cosiddetta *forma trigonometrica* dei numeri complessi,

$$z = a + ib = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

la quantità ρ coincide con il modulo del numero complesso z in quanto risulta

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

L'angolo φ si dice *argomento* di z e si indica con $\arg z$. Esso sarà dato da

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{b}{a}, & a > 0 \\ \varphi = \pi + \arctan \frac{b}{a}, & a < 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, (-\frac{\pi}{2}), & a = 0, b > 0 (b < 0) \end{cases}$$

Dato un numero complesso in forma trigonometrica, il suo argomento non è definito in maniera univoca, in quanto aggiungendo ad esso un multiplo intero di 2π si ottiene sempre lo stesso numero complesso. Di conseguenza due numeri complessi, espressi in forma trigonometrica, saranno uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono di un multiplo intero di 2π. Inoltre il numero complesso $(0,0)$ è individuato dalla sola condizione $\rho = 0$. Due numeri complessi coniugati, oltre ad avere lo stesso modulo, hanno argomenti opposti, a meno di un multiplo di 2π.
Consideriamo il prodotto di due numeri z e z' dati in forma trigonometrica. Si ha

$$\begin{aligned} z \cdot z' =& [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)][\rho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')] = \\ & \rho\rho'[(cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')] = \\ & \rho\rho'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')] \end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$|z \cdot z'| = \rho\rho' = |z||z'|, \qquad \arg(z\cdot z') = \varphi + \varphi' = \arg z + \arg z'.$$

In modo analogo si dimostra che

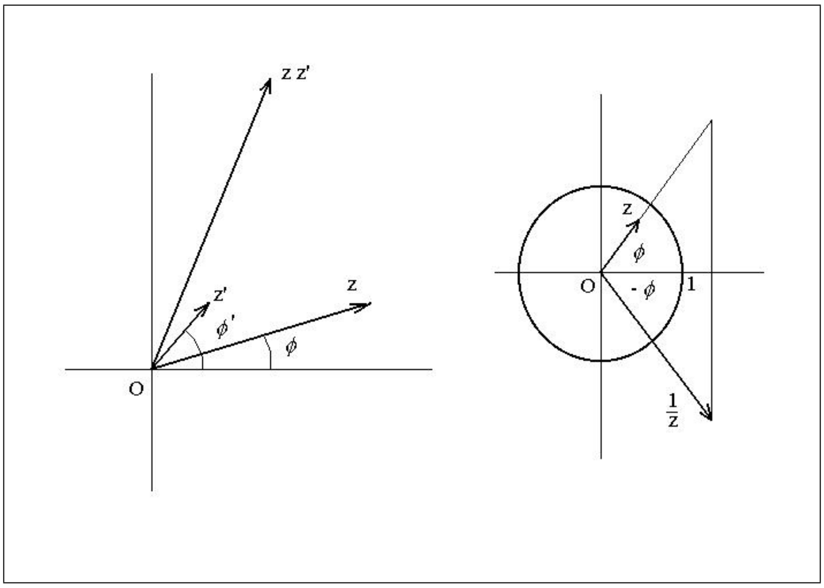
$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')],$$

da cui

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \qquad \arg\frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'.$$

In particolare, si ha

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{\rho}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = \frac{1}{\rho}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$



Grazie alle formule precedenti, la forma trigonometrica dei numeri complessi si presta bene al calcolo grafico del prodotto o del quoziente tra numeri complessi (vedi figura).

Applicando più volte la regola per il calcolo del prodotto di un numero complesso in forma trigonometrica per se stesso si ottiene

$$\begin{aligned} z^2 &= \rho^2[\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)], \\ z^3 &= \rho^3[\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)], \\ &\vdots \end{aligned}$$

e, in generale, usando una dimostrazione per induzione, si arriva alla seguente *formula di De Moivre*,

$$z^n = \rho^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)].$$

Quest'ultima formula vale anche se n è un intero negativo, in quanto $z^{-p} = 1/z^p$. Si hanno inoltre le seguenti proprietà di verifica immediata

$$z^n z^m = z^{n+m}, \qquad (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

Concludiamo il paragrafo aggiungendo una ulteriore notazione che verrà usata spesso in seguito. In base alla formula di Eulero

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

dalla rappresentazione trigonometrica si ricava la seguente notazione esponenziale dei numeri complessi

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

In questa notazione si ha

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

coerentemente con la rappresentazione trigonometrica.

3.4 Radici di numeri complessi

Vogliamo calcolare la radice n-esima del numero complesso

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Se denotiamo con $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ tale radice, dovremo avere

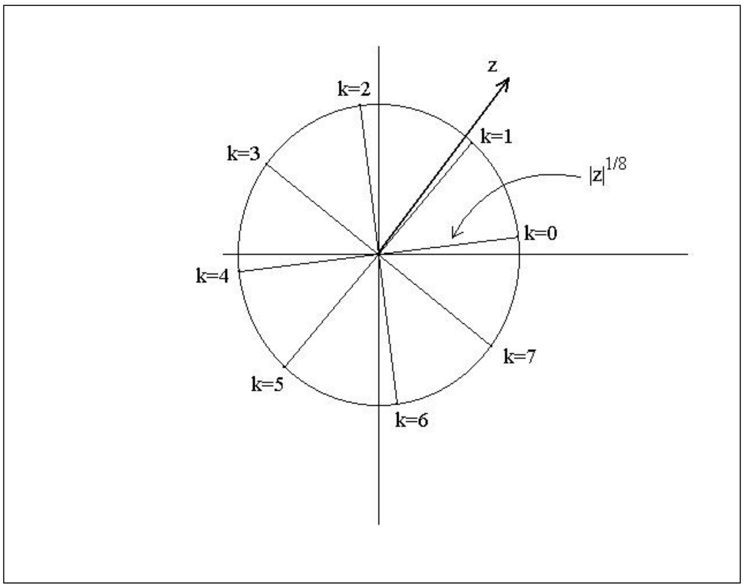
$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)],$$

dove abbiamo utilizzato la formula di De Moivre. Dall'ultima uguaglianza ricaviamo allora

$$r^n = \rho, \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad\qquad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Al variare del numero intero relativo k otteniamo diversi valori dell'argomento della radice. Più precisamente, per i valori di k da 0 a $n-1$, avremo in tutto n valori distinti dell'argomento della radice di z. Per valori di k da n fino a $2n-1$, otteniamo di nuovo gli stessi argomenti e così via all'aumentare di k. Lo stesso accade se prendiamo $k = -1, -2, ..., -n$ e così via per gli altri valori negativi di k. Concludiamo allora che esistono sempre esattamente n radici distinte del numero z.

Volendo rappresentare queste radici sul piano complesso ci accorgiamo che esse si trovano ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$. La prima di tali radici si trova come intersezione della circonferenza con la semiretta uscente dall'origine ruotata di un angolo pari a θ/n rispetto all'asse reale. Le successive si determinano a partire dalla prima con rotazioni di un angolo pari a $2\pi/n$.



- Esempi

Calcoliamo le radici cubiche del numero $z = \sqrt{2}(-1+i)$. Poiché si può scrivere

$$z = 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right),$$

si ottiene

$$\alpha = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right).$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} k=0, \quad & \alpha = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \\ k=1, \quad & \alpha = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right), \\ k=2, \quad & \alpha = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right). \end{aligned}$$

Calcoliamo le radici quadrate dell'unità immaginaria. Poiché si può scrivere

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

si ottiene

$$\alpha = \sqrt{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2},$$

da cui

$$\begin{aligned} k=0, \quad & \alpha = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ k=1, \quad & \alpha = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Consideriamo adesso in particolare il calcolo delle radici n-esime del numero 1. In forza dei risultati

precedenti, tenuto conto che $1 = \cos 0 + i \sin 0$, possiamo scrivere

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

I numeri così ottenuti, che d'ora in poi denoteremo con $\epsilon_0, \epsilon_1, ...\epsilon_{n-1}$, si trovano, sul piano complesso, ai vertici di un poligono regolare circoscritto da una circonferenza di raggio 1. Se n è pari esisteranno due radici reali, in corrispondenza di $k = 0$ e $k = \frac{n}{2}$, uguali rispettivamente a 1 e a -1. Se n è dispari esisterà una sola radice reale, quella per $k = 0$, che varrà 1. Per esempio, le radici quarte di 1 sono date da

$$\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = i, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = -i,$$

mentre le radici terze di 1 sono

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \epsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Una utile regola per il calcolo delle radici di un numero complesso discende dalla seguente proprietà. *Tutte le radici n-esime di un numero complesso si ottengono moltiplicando una qualunque di esse per le radici n-esime dell'unità.* Per dimostrare questa affermazione osserviamo che se α è una radice n-esima del numero z, si ha $\alpha^n = z$, mentre se ϵ è una qualunque radice n-esima dell'unità si ha $\epsilon^n = 1$. Ne segue che

$$(\alpha\epsilon)^n = \alpha^n \epsilon^n = \alpha^n = z.$$

In altri termini, se α è una radice n-esima di z, lo è anche $\alpha\epsilon$. Poiché esistono n radici distinte, $\epsilon_0, \epsilon_1, ..., \epsilon_{n-1}$, del numero 1, ne segue che il loro prodotto con α darà tutte le radici distinte di z.

- Esempio

  Le radici quinte di 243 si possono ricavare a partire dalla sua radice quinta reale, 3 e dalle radici quinte dell'unità

  $$\sqrt[5]{1} = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

  Posto $\alpha = \sqrt[5]{243}$ si ha,

  $$\begin{aligned} \alpha_0 &= 3, \\ \alpha_1 &= 3(\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}), \\ \alpha_2 &= 3(-\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}), \\ \alpha_3 &= 3(-\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}), \\ \alpha_4 &= 3(\sin \frac{\pi}{10} - i \cos \frac{\pi}{10}). \end{aligned}$$

3.5 Scomposizione e divisione di polinomi

Consideriamo un polinomio di grado n in x, ovvero una funzione del tipo

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n,$$

dove $c_i, (i = 0, 1, ..., n)$ sono $n + 1$ coefficienti reali o complessi con $c_n \neq 0$. Il principio di identità dei polinomi stabilisce che due polinomi dello stesso grado sono uguali se i corrispondenti coefficienti sono uguali. Inoltre il teorema fondamentale dell'algebra afferma che ogni equazione del tipo $P_n(x) = 0$ ammette sempre n soluzioni reali o complesse. Tali soluzioni possono presentarsi con una data molteplicità e, se i coefficienti del polinomio sono reali, le soluzioni complesse si presentano sempre a coppie coniugate. Per dimostrare quest'ultima affermazione osserviamo che, se $\bar{\rho}e^{i\bar{\phi}}$ è una soluzione complessa di $P_n(x) = 0$, si ha

$$c_0 + c_1\bar{\rho}e^{i\bar{\phi}} + c_2\bar{\rho}^2 e^{2i\bar{\phi}} + ... + c_n\bar{\rho}^n e^{ni\bar{\phi}} = 0,$$

da cui, separando parte reale e parte immaginaria,

$$\begin{aligned} &c_0 + c_1\bar{\rho}\cos\bar{\phi} + c_2\bar{\rho}^2\cos 2\bar{\phi} + ... + c_n\bar{\rho}^n\cos n\bar{\phi} = 0 \\ &c_1\bar{\rho}\sin\bar{\phi} + c_2\bar{\rho}^2\sin 2\bar{\phi} + ... + c_n\bar{\rho}^n\sin n\bar{\phi} = 0. \end{aligned}$$

Se si sostituisce a $\bar{\phi}$ il suo opposto $-\bar{\phi}$, le equazioni precedenti rimangono invariate. Di conseguenza $\bar{\rho}e^{-i\bar{\phi}}$ è soluzione dell'equazione $P_n(x) = 0$.

Siano $x_1, x_2, ..., x_n$ le soluzioni dell'equazione $P_n(x) = 0$ o, come si usa dire, gli *zeri* del polinomio $P_n(x) = 0$. Questo significa che $P_n(x)$ è divisibile per $(x - x_1)$, per $(x - x_2)$,..., per $(x - x_n)$. In altri termini vale la fattorizzazione,

$$P_n(x) = c_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n).$$

In base al principio di identità dei polinomi segue che, a meno del coefficiente $c_n \neq 0$, ogni polinomio di grado n in x è individuato dai suoi zeri.
Osserviamo che se $b + id$ è uno zero complesso di $P_n(x)$, la sua fattorizzazione conterrà il fattore

$$(x - (b + id))(x - (b - id)) = (x - b)^2 + d^2 = x^2 - 2bx + (b^2 + d^2).$$

In definitiva, se il polinomio $P_n(x)$ ammette m zeri reali $a_1, a_2, ..., a_m$, rispettivamente con molteplicità $r_1, r_2, ..., r_m$ e l zeri complessi $b_1 + id_1, b_2 + id_2, ..., b_l + id_l$, rispettivamente con molteplicità $s_1, s_2, ..., s_l$, si avrà la seguente scomposizione in fattori

$$P_n(x) = c_n(x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2}...(x - a_m)^{r_m}(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2}...(x^2 + p_l x + q_l)^{s_l},$$

dove $p_i = -2b_i, q_i = b_i^2 + d_i^2, (i = 1, ..., l)$ e dove

$$\sum_{i=1}^{m} r_i + 2\sum_{j=1}^{l} s_j = n.$$

Sappiamo che un polinomio $P_m(x)$ è divisibile per un polinomio $D_n(x)$, con $n \leq m$ se esiste un terzo polinomio, detto *quoziente* $Q_p(x)$ tale che

$$P_m(x) = D_n(x)Q_p(x),$$

e si scrive
$$\frac{P_m(x)}{D_n(x)} = Q_p(x).$$
Se $m \geq n$ ma $P_m(x)$ non è divisibile per $D_n(x)$ è sempre possibile trovare un polinomio $Q_p(x)$ di grado $p = m - n$ ed un polinomio $R_q(x)$ di grado $q < n$ tali che
$$P_m(x) = D_n(x)Q_p(x) + R_q(x).$$
In tal caso si scrive
$$\frac{P_m(x)}{D_n(x)} = Q_p(x) + \frac{R_q(x)}{D_n(x)}.$$
Il polinomio $R_q(x)$ si dice *resto* della divisione tra P_m e D_n, mentre Q_p è sempre il quoziente.

Consideriamo ora il rapporto $R_q(x)/D_n(x)$, essendo $q < n$. Data la fattorizzazione
$$D_n(x) = c_n(x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}...(x-a_p)^{r_p}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}...(x^2+p_lx+q_l)^{s_l},$$
si ha la seguente scomposizione
$$\begin{aligned} c_n\frac{R_q(x)}{D_n(x)} = & \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A_{1r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + ... \\ & + \frac{A_{p1}}{x-a_p} + \frac{A_{p2}}{(x-a_p)^2} + ... + \frac{A_{pr_p}}{(x-a_p)^{r_p}} \\ & + \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{B_{1s_1}x+C_{1s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} \\ & + ... + \frac{B_{ls_l}x+C_{ls_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}}. \end{aligned}$$
Infatti, sommando le frazioni a secondo membro si ottiene a denominatore il polinomio $D_n(x)$ (a meno del fattore c_n) e a numeratore un polinomio di grado $n-1$ con n coeficienti arbitrari che, in base al principio di identità dei polinomi, possono essere scelti in modo da far coincidere il polinomio a numeratore con il polinomio $R_q(x)$.

- Esempio

  Scomporre il seguente rapporto tra polinomi
  $$\frac{x^2+3x-7}{x^3-2x^2+x-2}.$$
  Poiché si ha
  $$x^3-2x^2+x-2 = (x-2)(x^2+1),$$
  si può scrivere
  $$\frac{x^2+3x-7}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$
  da cui, sommando a secondo membro,
  $$\frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+(C-2B)x+A-2C}{(x-2)(x^2+1)}.$$

Identificando i numeratori dell'uguaglianza di partenza si ottiene

$$A + B = 1, \qquad C - 2B = 3, \qquad A - 2C = -7,$$

da cui

$$A = \frac{3}{5}, \qquad B = \frac{2}{5}, \qquad C = \frac{19}{5}.$$

In definitiva, si ha la scomposizione

$$\frac{x^2 + 3x - 7}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{3/5}{x - 2} + \frac{\frac{2}{5}x + \frac{19}{5}}{x^2 + 1}.$$
