Analisi Matematica I - Lezione 9

Titolo nota 03/11/2022

Abbiamo visto che se $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = l_1 + l_2$. Lo dimostriamo

Dim. Hp. (1) $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 \in \mathbb{R}$ Th: $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = l_1 + l_2$

(2) $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 \in \mathbb{R}$

(1) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon$ t.c. $\forall\ n > N_\varepsilon$ si ha che $|a_n - l_1| < \varepsilon$

(2) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M_\varepsilon$ t.c. $\forall\ n > M_\varepsilon$ si ha che $|b_n - l_2| < \varepsilon$

Vorremmo dimostrare che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ Q_\varepsilon$ t.c. $\forall\ n > Q_\varepsilon$ si ha

$$|a_n + b_n - (l_1 + l_2)| < \varepsilon$$

idea: $a_n + b_n - (l_1 + l_2) = a_n - l_1 + b_n - l_2$

$$|a_n + b_n - (l_1 + l_2)| \underset{\text{disug. triangolare}}{\le} |a_n - l_1| + |b_n - l| \underset{\text{se } Q_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}}{\le} \varepsilon + \varepsilon = \underline{2\varepsilon}$$

Per ottenere invece ε mi basta scegliere $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ e considero $Q_\varepsilon = \max\{N_{\varepsilon'}, M_{\varepsilon'}\} = \max\{N_{\varepsilon/2}, M_{\varepsilon/2}\}$.

D.

Es. $\lim a_n \cdot b_n = l_1 \cdot l_2$

$$a_n b_n - l_1 l_2 = a_n b_n - l_1 b_n + l_1 b_n - l_1 l_2$$

$$= \underbrace{(a_n - l_1)}_{\text{piccolo}} \cdot \overset{\text{LIMITATO}}{b_n} + \overset{\text{limitato}}{l_1} \cdot \underbrace{(b_n - l_2)}_{\text{piccolo}}$$

Forme indeterminate: $\frac{\infty}{\infty}$ e ordini di infinito.

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty \quad \text{se } \alpha > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty \quad \text{se } a > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \log_a(n) = +\infty \quad \text{se } a > 1$$

$$\boxed{a^n >> n^\alpha >> \log_a(n)}$$

$\forall\ \alpha > 0,\ a > 1$

$a_n >> b_n$ significa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

Dis. di Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$ $\quad \forall\ n \geq 1 \quad n \in \mathbb{N}$

$\forall\ x > -1$

$$2^n = (1+1)^n \geq 1+n$$

$$2^n = \left(2^{\frac{n}{2}}\right)^2 = \left((1+1)^{\frac{n}{2}}\right)^2 \geq \left(1+\frac{n}{2}\right)^2$$

$$2^n = \left(2^{\frac{n}{3}}\right)^3 = \left((1+1)^{\frac{n}{3}}\right)^3 \geq \left(1+\frac{n}{3}\right)^3 \geq \frac{n^3}{3^3} = \frac{n^3}{27}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{\cancel{3}}}{27}}{\cancel{n^2}} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left((1+(a-1))^{\frac{n}{3}}\right)^3}{n^2} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{n}{3}(a-1)\right)^3}{n^2} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{\cancel{3}}}{3^3}(a-1)^3}{\cancel{n^2}} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^n\right)^3}{n^2} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\left(1+(\sqrt[3]{2}-1)\right)^n\right)^3}{n^2} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n\cdot(\sqrt[3]{2}-1)\right)^3}{n^2} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \text{se} \quad a>1 \quad e \quad b>0}$$

ES. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^{2022}} = +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n}{3^n - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(1-\cancel{\frac{n}{2^n}}^{\,0}\right)}{3^n\left(1-\cancel{\frac{n^2}{3^n}}^{\,0}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 1 = 0$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$; $\frac{\left(1-\frac{n}{2^n}\right)}{\left(1-\frac{n^2}{3^n}\right)} \to 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log_a(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\overset{t}{\overset{\shortparallel}{\boxed{\log_a(n)}}}}}{\underset{\underset{t\to\infty}{\shortparallel}}{\boxed{\log_a(n)}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{a^t}{t} = +\infty$$

(per quanto detto prima)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{\log_a(n)} = +\infty \quad \text{per} \quad b>0, \; a>1.}$$

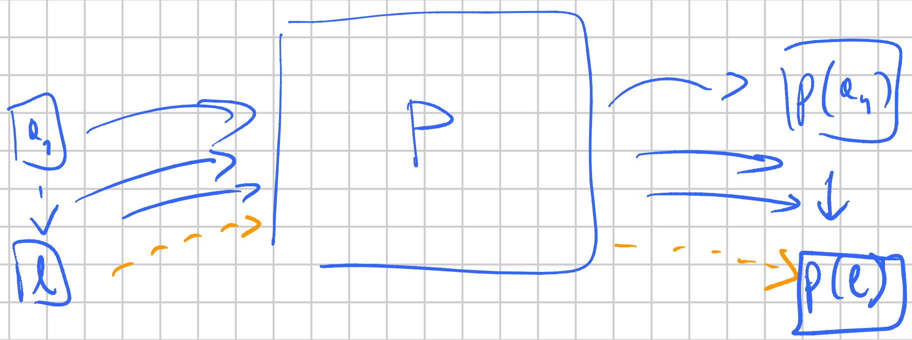
Per l'algebra dei limiti se $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ allora

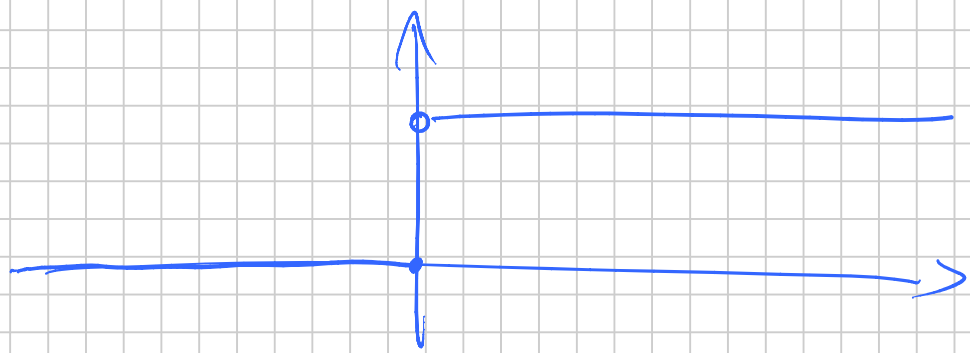
$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \ell^2$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 - a_n = \ell^2 - \ell$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{a_n^{2022} - 300\, a_n^2 + 77 a_n - 3} = \ell^{2022} - 300\,\ell^2 + 77\,\ell - 3$$

$$\lim_{n\to\infty} p(a_n) = p(\ell)$$





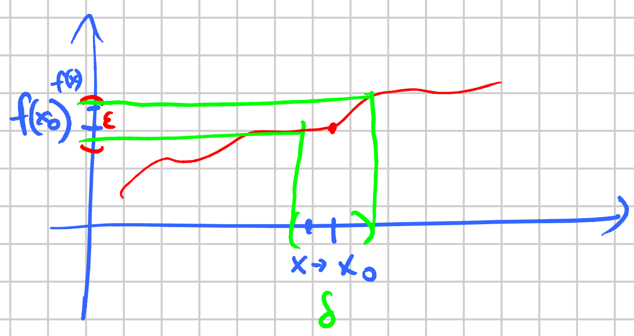
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

(I intervallo)

Def. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 \in I$

se $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in I$

allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

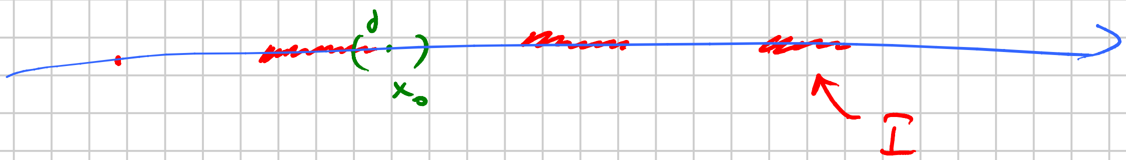


Def. Data $f: I \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione di I, allora si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in I$

allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Def. Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di accumulazione di I se $(x_0+\delta, x_0-\delta) \cap (I \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$.



cioè ci sono punti di I (diversi da x_0) arbitrariamente vicini ad x_0.

Definizioni equivalenti alla continuità

① (def. con i limiti) $f: I \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

② (def. tramite successioni) $f: I \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 se per ogni successione $x_n \in I$ tale che $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ si ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

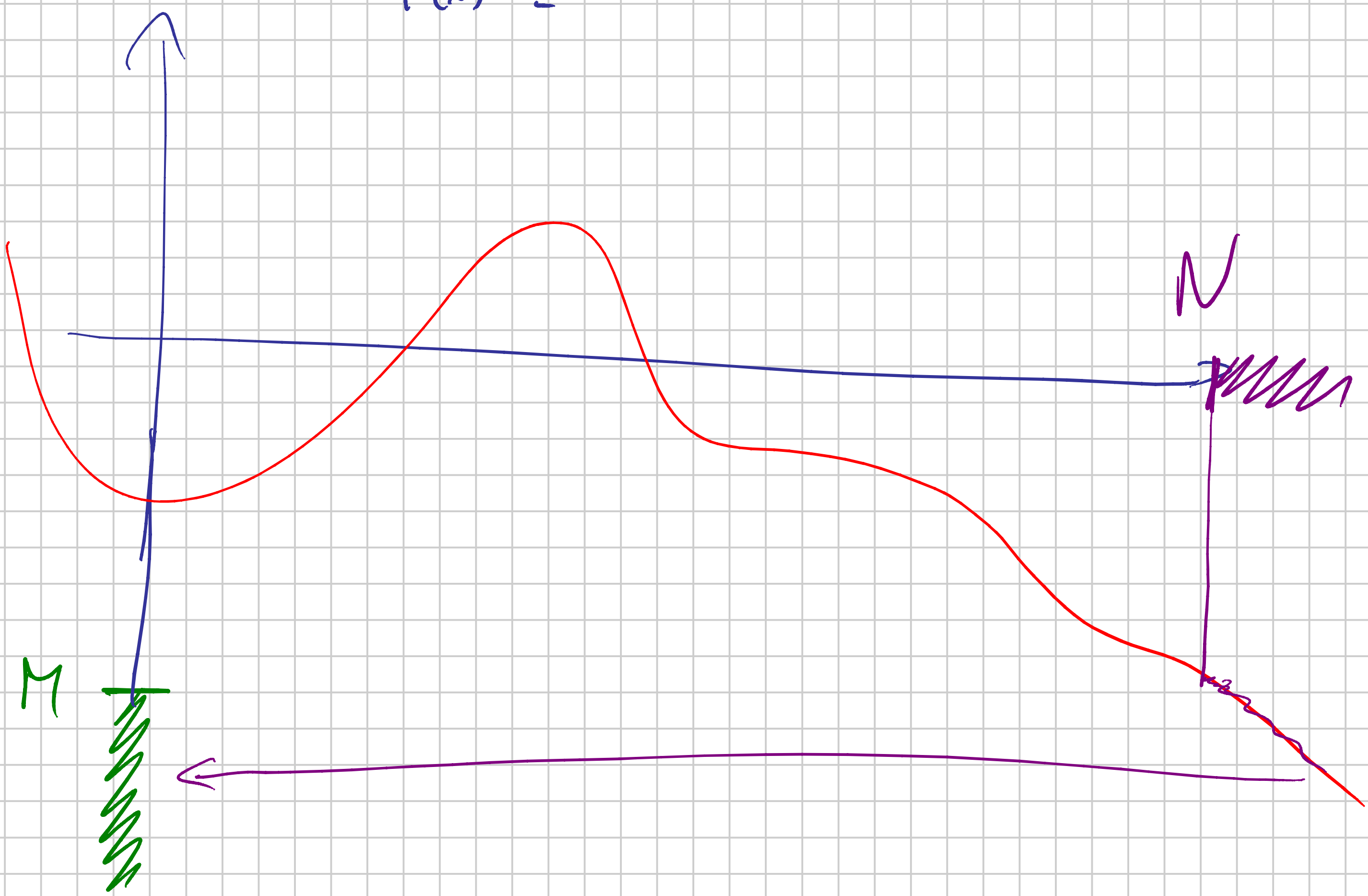
Ovviamente posso avere, come con le successioni, limiti che sono $+\infty$ o $-\infty$. Inoltre posso anche avere $\lim_{x \to +\infty}$ o $\lim_{x \to -\infty}$.

Es.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ vale se e solo se

$\forall M > 0 \quad \exists N > 0$ t.c. $\forall x \geq N$ si ha

$$f(x) \leq -M$$



I limiti visti fino ad ora per le successioni si ripetono allo stesso modo nei limiti di funzioni

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^{x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} a^{x} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

$$\left[\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \to 0^+} -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to +\infty} -\log_a(y) \right]$$

Similmente si ha $\quad a^{x} \gg x^{\alpha} \gg \log_a(x) \quad \forall\, a > 1 \quad \forall\, \alpha > 0.$

$$\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin(x), \quad \nexists \lim_{x \to +\infty} \cos(x), \quad \nexists \lim_{x \to +\infty} tg(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} arctg(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} arctg(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \pi} \sin(x) \overset{!}{=}$$

se $\sin(x)$ fosse <u>continua</u> in π avrei
$$\lim_{x \to \pi} \sin(x) = \sin(\pi) = 0$$

META-TEOREMA le funzioni elementari, e loro composizioni, somme, prodotti, frazioni etc..., sono <u>CONTINUE</u> nei loro domini di definizione

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \rightsquigarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e} \leftarrow \text{LIMITE PADRE}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

sost. $\frac{1}{x}=y$

$$\boxed{\lim_{y\to 0}\underbrace{(1+y)}^{\frac{1}{y}} = e} \longrightarrow \boxed{\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1} \longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$$

$$1+y = e^{\ln(1+y)} \rightsquigarrow (1+y)^{\frac{1}{y}} = e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$