Rango di una matrice

Definizione

Da una matrice $A \in K^{m,n}$ di dice *rango* della matrice A, denotato

$$rkA$$

il numero massimo di righe linearmente indipendenti della matrice A

Calcolo del rango

Per il calcolo del rango di una matrice sono utili le seguenti proprietà:

(1) $A \sim A' \Rightarrow rkA = rkA'$

(2) Se A è una matrice ridotta per righe, le sue righe non nulle sono lin.indip., quindi

$$rkA = \text{ numero di righe non nulle di } A$$

Quindi un modo per calcolare il rango di una matrice è il seguente:

1. si riduce la matrice per righe
2. si contano le righe non nulle della matrice ridotta

Teorema del rango

Vale il seguente

Teorema

In una matrice, il numero massimo di colonne linearmente indipendenti è uguale al numero massimo di righe linearmente indipendenti (cioè è uguale al rango della matrice).

Corollario 1

Per ogni matrice A,

$$rkA = rkA^T$$

Corollario 2

Se $A \in K^{m,n}$, si ha

$$0 \leq rkA \leq \min(m, n)$$

Risoluzione di sistemi lineari

Per risolvere il sistema lineare

$$AX = B$$

si riduce per righe la matrice completa $A|B$, trasformandola in $A'|B'$, cioè ottendendo il sistema ridotto equivalente

$$A'X = B'$$

Osservazione.

$$\begin{aligned} rk(A) = rk(A') &= \text{ numero di righe non nulle di } A' \\ rk(A|B) = rk(A'|B') &= \text{ numero di righe non nulle di } A'|B' \end{aligned}$$

ma anche

$$\begin{aligned} rk(A) &= \text{ numero di colonne lin.indip. di } A \\ rk(A|B) &= \text{ numero di colonne lin.indip di } A|B \end{aligned}$$

quindi

$$rk(A) \leq rk(A|B) \leq rk(A) + 1$$

Si deduce il

Teorema di Rouché (prima parte)

Se $A \in K^{m,n}, B \in K^{m,1}$, e

$$rk(A) < rk(A|B), \qquad (\text{cioè se } rk(A|B) = rk(A) + 1)$$

il sistema lineare $AX = B$ non ha soluzioni.

Dimostrazione. Infatti, in questo caso,

$$B \notin \mathcal{L}(c_1, \ldots, c_n)$$

dove $c_1, \ldots, c_n$ solo le colonne di A.

Risoluzione di sistemi lineari

Teorema di Rouché (seconda parte)

Se $A \in K^{m,n}, B \in K^{m,1}$, e

$$rk(A) = rk(A|B) = r$$

il sistema lineare $AX = B$ ha soluzioni, che dipendono da $n - r$ parametri liberi.

(si dice allora che *il sistema ha* ∞^{n-r} *soluzioni*)

In particolare, se $rk(A) = m$, allora il sistema ha soluzioni (perché?)

Dimostrazione. Il sistema $AX = B$ è equivalente a un sistema ridotto $A'X = B'$, che ha esattamente r righe non nulle:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \dots & \dots & R_1 & \dots & \dots & b'_1 \\ \dots & \dots & R_2 & \dots & \dots & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & R_r & \dots & \dots & b'_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ci sono quindi r elementi speciali nelle prime r righe della matrice A'. Il sistema si risolve rispetto alle incognite corrispondenti a questi elementi speciali, in funzione delle altre incognite (le *variabili libere*), che sono in quantità di $n - r$.

Equazioni matriciali

Un sistema lineare è un caso particolare di equazione matriciale

$$AX = B$$

Per una generica equazione matriciale, $A \in K^{m,n}$, $B \in K^{m,p}$ e la matrice incognita è $X \in K^{n,p}$.

Formalmente, il procedimento di risoluzione per riduzione funziona per equazioni matriciali generali, basta considerare:

- come incognite le righe della matrice X: sono vettori riga di $K^{1,p}$:

$$X = \begin{pmatrix} \cdots & \vec{x}_1 & \cdots \\ \cdots & \vec{x}_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \vec{x}_n & \cdots \end{pmatrix}$$

- come termini noti le righe della matrice B: sono vettori riga di $K^{1,p}$:

$$B = \begin{pmatrix} \cdots & \vec{b}_1 & \cdots \\ \cdots & \vec{b}_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_m & \cdots \end{pmatrix}$$

Equazioni matriciali

Infatti, nei passaggi della riduzione

$$\text{da } A|B \text{ a } A'|B'$$

non è necessario che gli elementi di B siano numeri: possono essere vettori.

Esempio: l'inversa di una matrice

Sia $A \in K^{n,n}$.

L'inversa di A, se esiste, è la soluzione dell'equazione matriciale

$$AX = I_n$$

Per risolvere l'equazione, si riduce la matrice

$$A|I_n \in K^{n,2n}$$

Questa matrice ha rango n (perché?).

Dunque l'equazione ha soluzione se e solo se riducendo fortemente la matrice si arriva a una matrice della forma

$$I_n|C \in K^{n,2n}$$

In tal caso $C = A^{-1}$.

Rango di una matrice invertibile

In particolare, affinché riducendo fortemente

$$A|I_n$$

si possa ottenere una matrice della forma

$$I_n|C$$

è necessario e sufficiente che $rkA = n$ (perché?)

Quindi

Teorema

Una matrice $A \in K^{n,n}$ è invertibile se e solo se

$$rkA = n$$

(cioè il rango di A è il massimo possibile, data la sua taglia).

Determinante di una marice quadrata

A ogni matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in K^{n,n}$$

si associa un numero detto *determinante* di A, denotato

$$\det A \qquad \text{oppure} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

definito *ricorsivamente* sulla taglia della matrice.

Determinante di una matrice quadrata

- $n = 1$: Il determinante di una matrice 1×1 coincide col suo unico elemento: $\det(a) = a$
- $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = a\det(d) - b\det(c)$
- $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \end{aligned}$$

Determinante di una matrice quadrata

Per il caso generale, data la matrice $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$, per ogni (i, j) sia A_{ij} la matrice ottenuta da A cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima.
Quindi $A_{ij} \in K^{n-1,n-1}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

È lo *sviluppo* del determinante rispetto alla prima riga.

Determinante di una matrice quadrata

In realtà, si può calcolare un determinante sviluppandolo rispetto a una riga o una colonna qualunque:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{i3} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad \text{(sviluppo rispetto alla } i\text{-esima riga)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad \text{(sviluppo rispetto alla } j\text{-esima colonna)}$$

Corollario.

- Se una matrice $A \in K^{n,n}$ ha una riga o una colonna nulla, allora $\det A = 0$
- $\det A = \det A^T$

Determinanti e riduzioni per riga

Il calcolo di un determinante usando la definizione è complicato. È utile cercare metodi alternativi.

Teorema di Binet

Se $A, B \in K^{n,n}$, allora

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

Corollario

Se A è invertibile

$$1 = \det I_n = \det AA^{-1} = \det A \det A^{-1}$$

da cui

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

in particolare $\det A \neq 0$.