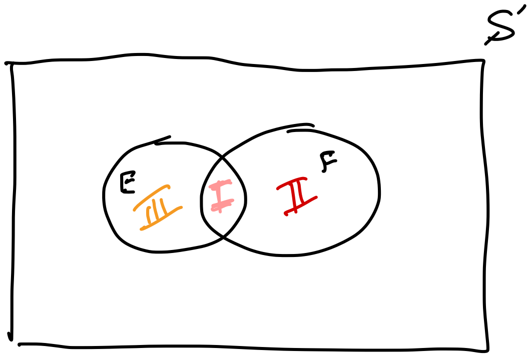
1. Descrivere in poche parole i concetti di statistica e probabilità facendo un esempio.

Utilizzando il Diagramma di Venn (e quindi disegnando il Diagramma di Venn) dimostrare che $P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cup F)$.



$P(E \cap F) \Rightarrow \mathrm{I}$

$P(E)$

$P(F)$

$P(E \cup F) \Rightarrow \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$

$\mathrm{III} + \mathrm{I} \Rightarrow P(E)$

$\mathrm{II} + \mathrm{I} \Rightarrow P(F)$

$P(E \cap F) = P(\mathrm{I})$

$P(E) + P(F) - P(E \cup F) = P(\mathrm{I}) + \cancel{P(\mathrm{III})} + \cancel{P(\mathrm{I})} + \cancel{P(\mathrm{II})} - \left(\cancel{P(\mathrm{I})} + \cancel{P(\mathrm{II})} + \cancel{P(\mathrm{III}}\right.$

Lanciando 2 volte un dado a 4 facce (ossia un dado il cui risultato può essere solo 1, 2, 3, o 4) qual'è la probabilità di che la somma dei 2 numeri estratti sia 3?

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4)

(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4)

(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4)

(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4)

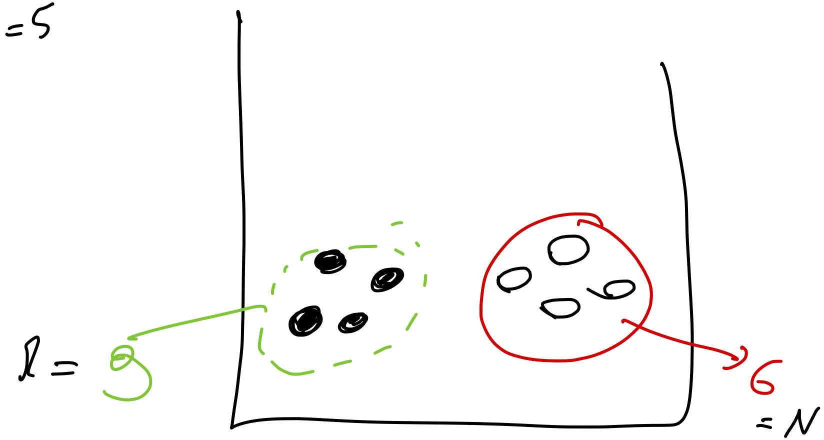
4×4

$$P(E) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

NO REINSERIMENTO

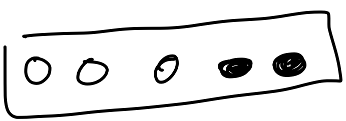
Devono essere estratti 5 elementi da un'urna con al suo interno 6 palline bianche e 9 nere. Se la scelta viene fatta a caso, che probabilità vi è che vengano estratte 3 palline bianche e 2 nere?

$n = 3 + 2 = 5$



$R + N = 15$

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}$$



$$\frac{\frac{6!}{(6-3)!\,3!}\;\frac{9!}{(9-2)!\,2!}}{\frac{15!}{(15-5)!\,5!}}$$

Un aereo è scomparso, e si suppone che possa essere caduto in una qualsiasi di 4 regioni, con uguale probabilità. Per $i = 1, 2, \ldots, 4$, sia α_i la probabilità di *non* rinvenire il velivolo nella regione. Qual è la probabilità che l'aereo si trovi in ciascuna delle 4 regioni se una ricerca della regione 1 ha dato esito negativo?

$R_i \qquad i \in \{1, \ldots, 4\}$ VELIVOLO SIA NELLA REGIONE i-ESIMA

E RICERCA NELLA REGIONE 1 ESITO NEGATIVO

$$P(R_1 \mid E) = \frac{P(E \mid R_1)\, P(R_1)}{P(E)}$$

$$= \frac{\overbrace{P(E \mid R_1)}^{\alpha_1}\, \overbrace{P(R_1)}^{1/4}}{\sum_{i=1}^{4} \underbrace{P(E \mid R_i)}_{\substack{i=1 \,\to\, \alpha_1 \\ i \neq 1 \,\to\, 1}}\, \underbrace{P(R_i)}_{1/4}} = \frac{\frac{\alpha_1}{\cancel{4}}}{\frac{\alpha_1}{\cancel{4}} + \frac{3}{\cancel{4}}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 3}$$

$$P(R_i \mid E) = \frac{\overset{1}{P(E \mid R_i)}\; P(R_i) \to \frac{1}{4}}{\sum_{j=1}^{4} \underbrace{P(E \mid R_j)}_{\substack{j=1 \to \alpha_1 \\ j=2,3,4 \to 1}} \; \underbrace{P(R_j)}_{\frac{1}{4}}}$$

$\downarrow$

$i = 2, 3, 4$

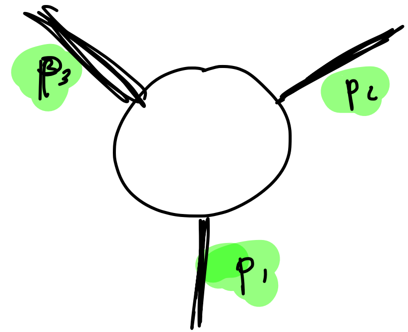
$$= \frac{\cancel{\frac{1}{4}}}{\cancel{\frac{\alpha_1}{4} + \frac{3}{4}}} = \frac{1}{\alpha_1 + 3}$$

$$P(R_1 \mid E) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 3}$$

$$P(R_j \mid E) = \frac{1}{\alpha_1 + 3}$$

$j = 2, 3, 4$

Un paese è fornito di acqua attraverso 3 diverse condutture. Basta che una conduttura funzioni perchè il paese sia alimentato. Dato un acquedotto di questo tipo, per il quale, per $i = 1, 2, 3$ la conduttura i-esima funziona - indipendentemente da tutti gli altri - con probabilità p_i. Qual è la probabilità che il paese sia alimentato dal sistema di tubature?



P(PAESE SIA ALIMENTATO)

= 1 − P(PAESE NON SIA ALIMENTATO)

$P(E) = 1 - P(E^c)$

= 1 − P(NESSUN TUBO FUNZIONI)

INDIPENDENZA

$= 1 - \prod_{i=1}^{3} P(\text{TUBO } i \text{ NON FUNZIONI})$

$= 1 - \prod_{i=1}^{3} (1 - p_i)$

PUNTO COMPLEMENTARE

INDIPENDENTI

$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F)P(G)$

TUBO 1 NON FUNZIONI — TUBO 2 " — TUBO 3 "

Siano X e Y due variabili aleatorie discrete con funzione di massa congiunta p, data da $p(1,1) = 0.1$, $p(1,2) = 0.2$, $p(2,1) = 0.4$, $p(2,2) = 0.3$. Qual è la funzione di massa di X condizionata a $Y = 1$?

$$p(x,y) \begin{cases} p(1,1) = 0,1 \\ p(1,2) = 0,2 \\ p(2,1) = 0,4 \\ p(2,2) = 0,3 \end{cases}$$

$x \in \{1, 2\}$

$y \in \{1, 2\}$

$$p(x \mid y=1) \begin{cases} p(x=1 \mid y=1) = \dfrac{p(1,1)}{p(1)} = \dfrac{0,1}{0,5} = \dfrac{1/10}{1/2} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} \\ p(x=2 \mid y=1) = \dfrac{p(2,1)}{p(1)} = \dfrac{0,4}{0,5} = \dfrac{4/10}{5/10} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$p(x \mid y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$$

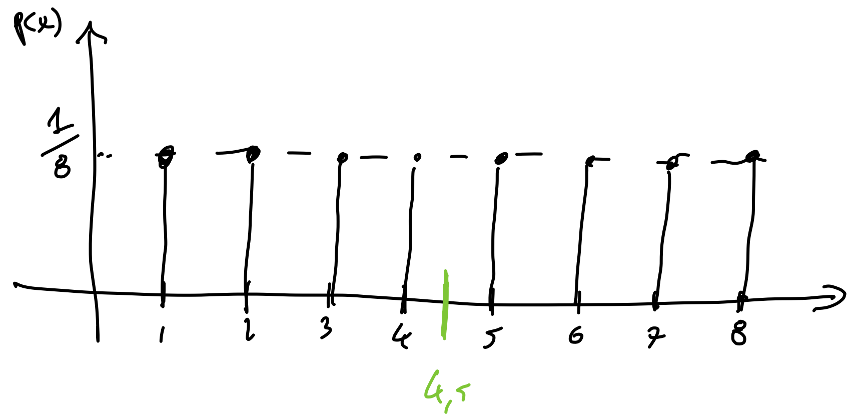
$$p(y) = \sum_{x} p(x,y) = \sum_{x \in \{1,2\}} p(x,y) = p(1,y) + p(2,y) \begin{cases} p(y=1) = 0,5 \\ p(y=2) = 0,5 \end{cases}$$

Sia X il punteggio che si ottiene lanciando un dado a 8 facce non truccato. Quanto vale $E[X]$ (il valore atteso della variabile aleatoria X)?

$$X \in \{1, 2, \dots, 8\}$$

$$\mathbb{E}\{X\} = \sum_{x} x \underbrace{p(x)}_{\frac{1}{8}} = \sum_{i=1}^{8} i \, \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(1+2+3+4+5+6+7+8)$$

$$= \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4.5$$



La Covarianza tra due variabili aleatorie è importante quando occorre trovare la varianza della somma di due due variabili aleatorie e si ha a disposizione la varianza delle due variabili aleatorie? Che cosa succede se due variabili aleatorie sono indipendenti? Come è legato il concetto di Covarianza a quello di Correlazione?

$$VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y) + 2\,COV(X,Y)$$

$$X, Y \quad \text{INDIPENDENTI} \longrightarrow COV(X,Y) = 0$$

$$CORR(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{VAR(X)\,VAR(Y)}}$$

Il numero di auto elettriche prodotte da una casa automobilistica durante una settimana è una variabile aleatoria di media 50. Cosa si può dire sulla probabilità che la produzione superi occasionalmente i 75 pezzi? (usare la disuguaglianza di Markov). Se si suppone nota anche la varianza, pari a 25, cosa si può dire sulla probabilità che la produzione sia compresa tra i 40 e i 60 pezzi (usare la disuguaglianza di Chebyshev).

$X, \quad E[X] = 50, \quad VAR(X) = 25$

$P\{X > 75\}$

$= P\{X \geq 76\} \leq \frac{50}{76}$

$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$

$X \geq 0, \; a > 0$

MARKOV

$P\{X \in [40, 60]\}$

$= P\{|X - 50| \leq 10\}$

$P(|X - \mu| \geq h) \leq \frac{VAR(X)}{h^2}$

$= 1 - P\{|X - 50| > 10\} = 1 - P(|X - 50| \geq 11) \geq 1 - \frac{25}{11^2} = \frac{121 - 25}{121}$

$= \frac{96}{121}$

Una azienda produce vaccini che possono indurre reazioni avverse con probabilità 0.000001, indipendentemente l'uno dall'altro. Questi vaccini sono poi venduti in confezioni da 1000 pezzi, con la garanzia di rimborso in caso vi sia più di un vaccino che ha indotto reazioni avverse. Che percentuale delle confezioni viene rimborsata? Se si comprano tre confezioni, qual è la probabilità di rimborsarne esattamente una? (Non è necessario portare il calcolo fino alla fine)

$X \in \{0, 1\} \qquad p(1) = 10^{-6} \to$ BERNULLI

$\underbrace{X_1, X_2, \dots, X_n}_{\text{INDIPENDENTI}}$

$n = 1000$

$Y = X_1 + \dots + X_n > 1$

$\downarrow$

BINOMIALE

$100 \cdot P(Y > 1)$

n GRANDE

p PICCOLO

$Y \simeq$ POISSON

$\lambda = np$

$= 10^{-3}$

$$P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$\downarrow$

a

$$= 1 - \binom{1000}{0} (10^{-6})^0 (1 - 10^{-6})^{1000} - \binom{1000}{1} (10^{-6})^1 (1 - 10^{-6})^{999}$$

3 CONFEZIONI INDIPENDENTI

$\underbrace{x_1^1 \dots x_{1000}^1}$, $x_1^2 \dots x_{100}^2$, $x_1^3, \dots, x_{1000}^3$

$p = \alpha$ $\quad p = \alpha \quad p = \alpha$ → ESSERE RIMBORSATO

$z \in \{0, 1\}$ ↑ RIMBORSATO

$p = \alpha$

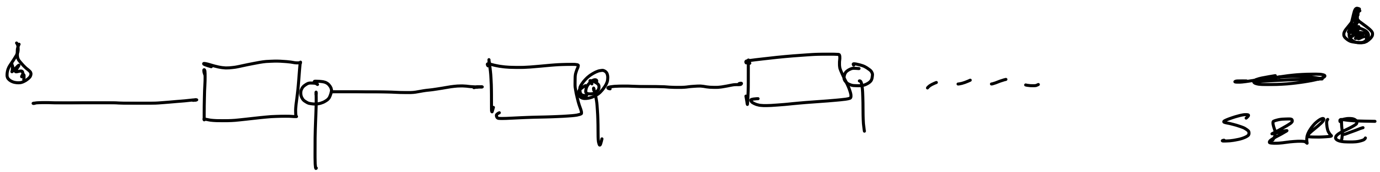
BINOMIALE $(p, 3)$

$$P\{z_1 + z_2 + z_3 = 1\} = \binom{3}{1} \alpha^1 (1-\alpha)^{3-1}$$

n piccolo

$$= 3\alpha(1-\alpha)^2$$

Un acquedotto che fornisce un paese è composto da 5 punti di rilancio composti da una vasca una pompa e una tubatura. Il suo corretto funzionamento richiede che tutti i suoi componenti siano efficienti (ossia che ogni pompa funzioni e che ogni vasca e ogni tubatura non perda). Supponiamo che ogni componente sia indipendente dell'altro e ciascuno con tempo di vita esponenziale. Denotiamo con $\lambda_1^p, \ldots, \lambda_5^p$ i parametri delle pompe, $\lambda_1^v, \ldots, \lambda_5^v$ quelli delle vasche, e $\lambda_1^t, \ldots, \lambda_5^t$ quelli delle tubature: qual'è la probabilità che il sistema funzioni almeno per un tempo t?



SERIE

$V_1 \ldots V_5 \,,\quad P_1 \ldots P_5 \,,\quad T_1 \ldots T_5$

TEMPO DI VITA DEI 15 COMPONENTI

$$Y = \min(V_1, \ldots, V_5, P_1, \ldots, P_5, T_1, \ldots, T_5)$$

$$P(Y > t) = P(\min(V_1 \ldots V_5, P_1 \ldots P_5, T_1 \ldots T_5) > t)$$

$$= P(V_1 > t, \ldots, V_5 > t, P_1 > t, \ldots, P_5 > t, T_1 > t, \ldots, T_5 > t)$$

$$\overset{\text{IND}}{=} \prod_{i=1}^{5} P(V_i > t)\, P(P_i > t)\, P(T_i > t)$$

$$
\begin{aligned}
P(Y > t) &= P\left(\mathrm{MIN}(V_1 \ldots V_s,\ P_1 \ldots P_s,\ T_1 \ldots T_s) > t\right) \\
&= P\left(V_1 > t, \ldots, V_s > t,\ P_1 > t, \ldots, P_s > t,\ T_1 > t, \ldots, T_s > t\right) \\
&\overset{\text{IND}}{=} \prod_{i=1}^{s} P(V_i > t)\, P(P_i > t)\, P(T_i > t) \\
&= \prod_{i=1}^{s} e^{-t\lambda_i^V}\, e^{-t\lambda_i^P}\, e^{-t\lambda_i^T} \\
&= e^{-t \underbrace{\sum_{i=1}^{s} (\lambda_i^V + \lambda_i^P + \lambda_i^T)}_{\lambda}}
\end{aligned}
$$