

Algebra per Informatica

Foglio di esercizi 4

Esercizio 1. Provare, usando il principio di induzione, le seguenti affermazioni:

- (1) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$;
- (2) $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$;
- (3) $1 + 4 + 7 + \dots + (1 + 3n) = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$;
- (4) Se $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ per ogni $n > 0$ si ha $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$;
- (5) Un insieme finito che ha n elementi ha 2^n sottoinsiemi;
- (6) $n^3 - n + 6$ è divisibile per 3 per ogni $n \in \mathbb{N}^*$;
- (7) $8^n + 6$ è divisibile per 14 per ogni $n \in \mathbb{N}^*$;
- (8) $n! > 2^n$ per ogni $n \geq 4$.

Esercizio 2. Calcolare quoziente q e resto r della divisione di b per a , dove

$$b = 63, a = 20; \quad b = -63, a = 20.$$

Esercizio 3. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tali che $a|b$ e $a|c$. Provare che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si ha $a|(bx + cy)$.

Esercizio 4. Calcolare, usando l'algoritmo euclideo, il massimo comun divisore delle seguenti coppie di interi:

$$(354, 128), (689, 533), (720, 880), (228, 612), (1271, 1147),$$

e scrivere la corrispondente identità di Bezout.

Esercizio 5. Siano a, b, k tre numeri interi positivi. Provare che

$$\text{MCD}(ka, kb) = k \cdot \text{MCD}(a, b).$$

Esercizio 6. Esistono $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $10 = 3752x + 730y$? E tali che $3752x + 730y = 25$?

Esercizio 7. Dire se le seguenti equazioni hanno soluzioni intere e in caso affermativo determinarne una usando l'algoritmo euclideo:

$$42x + 24y = 6; \quad 42x + 24y = 100; \quad 42x + 24y = 30.$$

Esercizio 8. Determinare tutte le soluzioni intere delle seguenti equazioni:

$$18x + 84y = 42; \quad 623x + 679y = 21; \quad 623x + 679y = 22.$$

Esercizio 9. Sia $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x, y) = 20x - 27y$. Provare che f è surgettiva e determinare $f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(2)$.

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x, y) = 21x + 28y$.

1. Stabilire se f è surgettiva e/o iniettiva.
2. Determinare $f^{-1}(34)$ e $f^{-1}(35)$.