# Analisi Matematica 1 - Lezione 6



Funzioni di tipo potenza $f(x)=x^{a}$

$a \in \mathbb{N}$ $\quad a = 1, 2, 3, \dots$

$$f(x)=\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

- funz. potenza con $a=\frac{1}{n}$ con $n\in\mathbb{N}$ $n \geq 1$.

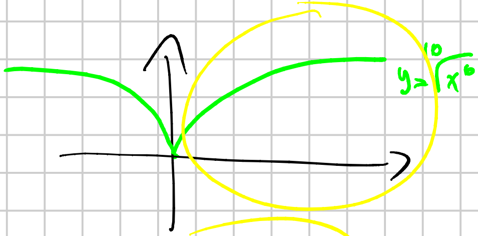
$$f(x)= x^{\frac{2}{3}} \quad \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \\ \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \end{cases}$$

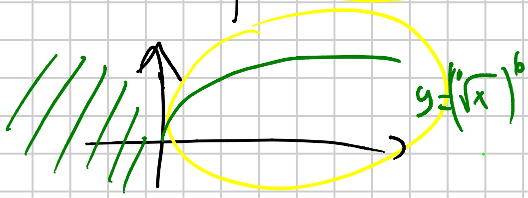
SONO LA STESSA COSA $\quad \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^6 = \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\right)^2 = x^2$

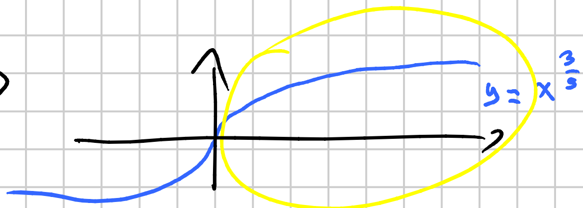
$$f(x) = x^{\frac{3}{5}} \quad \begin{cases} \sqrt[5]{x^3} \\ \left(\sqrt[5]{x}\right)^3 \end{cases}$$

SONO LO STESSO NUMERO

$$f(x) = x^{\frac{6}{10}} \quad \begin{cases} \sqrt[10]{x^6} \\ \left(\sqrt[10]{x}\right)^6 \\ x^{\frac{3}{5}} \end{cases}$$




TAGLIAMO LA TESTA AL TORO: DOVE SONO SICURO CHE TUTTE LE DEFINIZIONI DI $x^q$ COINCIDONO?

IN QUESTO CORSO: $f(x)=x^q$ se $q\in\mathbb{Q}$, $q\notin\mathbb{Z}$, allora

$$\mathrm{dom}(f) = \begin{cases} [0,+\infty) & \text{se } q>0 \\ (0,+\infty) & \text{se } q<0 \end{cases}$$

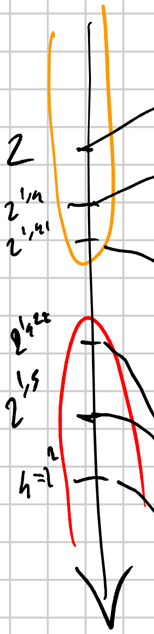
**Nota.** $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ $\qquad$ $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{5}{4}} = x^{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}} = x^{\frac{5}{12}}$

se $f(x) = x^r$ $\quad r \in \mathbb{Q}$ $\quad r > 0$ $\quad f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$
è bigettiva e la sua inversa è
$g(x) = x^{\frac{1}{r}}$.

---

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: come posso definire $2^\alpha$?

Es. chi è $2^{\sqrt{2}}$? $\qquad \sqrt{2} = 1,4142\ldots$




$2^1 = 2$

$2^{1,4} = 2^{\frac{14}{10} = \frac{7}{5}} = \sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{128} =$

$2^{1,41} = 2^{\frac{141}{100}}$

$2^{1,414} = \ldots$

$= A$

$2^{1,42}$

$2^{1,5}$

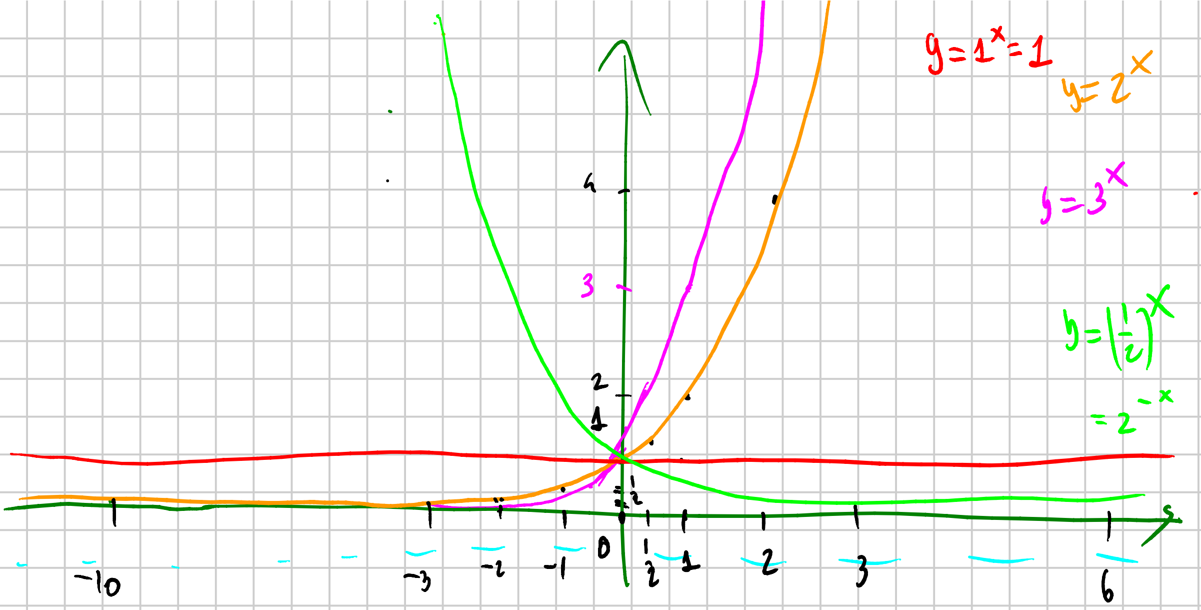
$2^2$

$\longrightarrow B$

B sta alla destra di A, quindi c'è un elemento separatore, che chiamiamo $2^{\sqrt{2}}$.

$\leadsto$ Questa cosa posso generalizzarla a qualsiasi $x \in \mathbb{R}$.

Posso definire $f(x) = 2^x$ $\quad \boxed{\text{FUNZIONE ESPONENZIALE}}$




| $x$ | $2^x$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{2}=1,4142\ldots$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ |
| $-3$ | $\frac{1}{8}$ |
| $\vdots$ | |
| $-10$ | $\frac{1}{1024}$ |

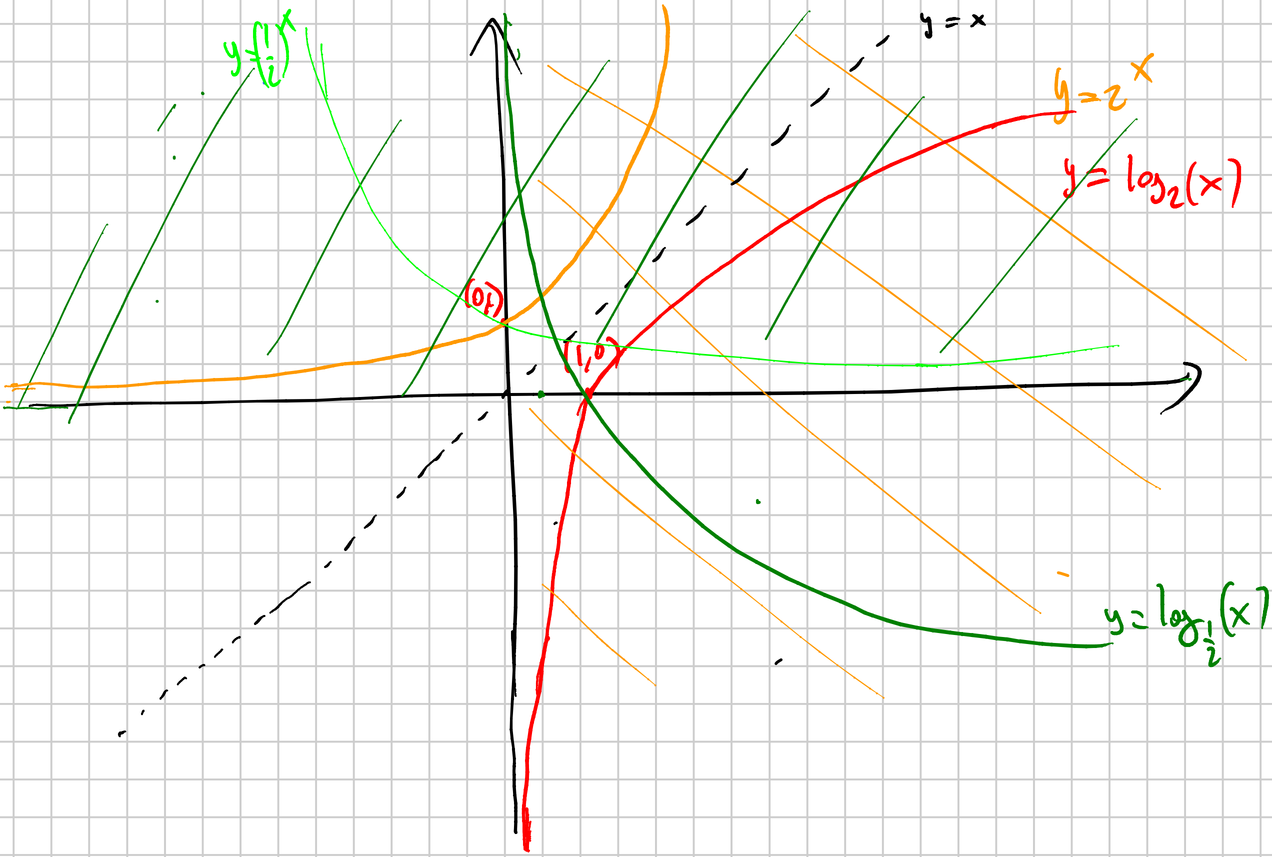
$f(x)=a^x$

- NON HA PARTICOLARI SIMMETRIE
- SE $a>1$ È STRETTAMENTE CRESCENTE
  SE $0<a<1$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE
- se $a>0$ e $a\neq 1$ $f(x)$ è INIETTIVA
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ non è suriettiva ma
  $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ È SURIETTIVA (per $a\neq 1$, $a>0$)

$f(x)=a^x$ $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ È INVERTIBILE PER $a\neq 1$

LA SUA INVERSA $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $g(x)=\log_a(x)$

(LOGARITMO IN BASE $a$ DI $x$).




(Nota: queste considerazioni geometriche ci dicono $\log_{\frac{1}{2}}(x) = -\log_2(x)$)

$f(x) = \log_a(x)$ (DEFINITA PER $a>0$, $a \neq 1$ : $dom(f) = (0,+\infty)$)

- NON HA PARTICOLARI SIMMETRIE
- È STR. MONOTONA (DECRESC. PER $a<1$, CRESC. per $a>1$)
- INIETTIVA E SURIETTIVA ($f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$).

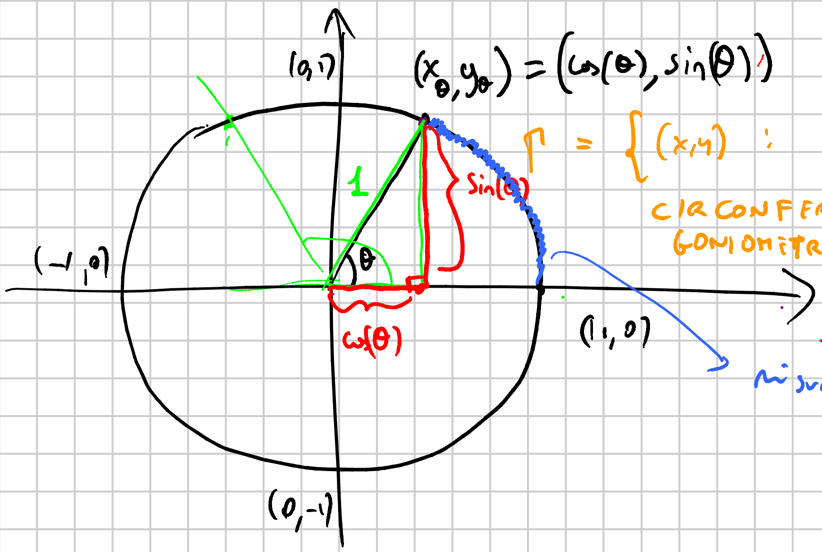
$\boxed{\text{DA RIPASSARE}}$ : Proprietà algebriche dei logaritmi

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$
- $\log_a(x) = \log_b(x) \cdot \log_a(b)$

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

# FUNZIONI TRIGONOMETRICHE (SENO, COSENO E TANGENTE)

SERVONO A "RISOLVERE I TRIANGOLI": COME CALCOLARE LUNGHEZZE DEI LATI CONOSCENDO GLI ANGOLI.

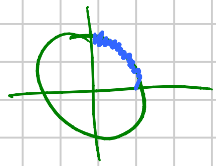



$\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

CIRCONFERENZA GONIOMETRICA (CENTRO (0,0) E RAGGIO R=1)

misura in radianti

COME MISURIAMO $\theta$? IN RADIANTI, cioè la lunghezza dell'arco di circonferenza individuato dall'angolo

AD ESEMPIO $90^\circ$ corrisponde a  UN QUARTO DI circonferenza, cioè $\frac{2\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

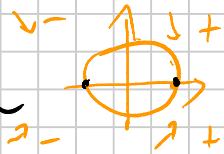
$$\frac{\text{angolo in gradi}}{\text{angolo in radianti}} = \frac{360^\circ}{2\pi} .$$

$$\text{ang}_{rad} = \text{ang}_{grad} \cdot \frac{2\pi}{360}$$

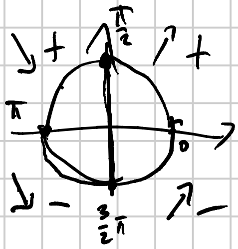
| angolo in gradi | $360^\circ$ | $90^\circ$ | $45^\circ$ | $30^\circ$ | $60^\circ$ | $25^\circ$ | $57{,}32..^\circ$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| angolo in radianti | $2\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{72}$ | 1 | ... |

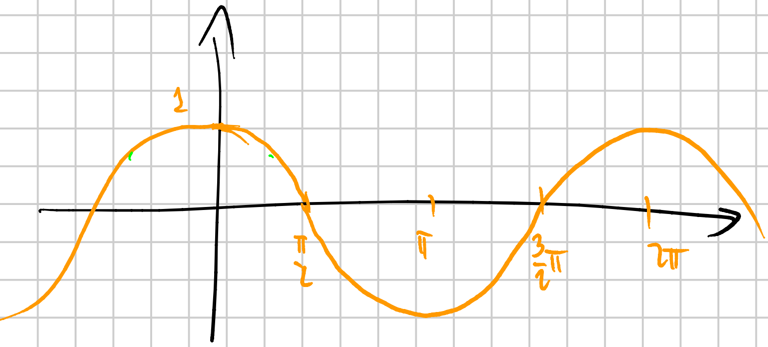
Nota: posso estendere $\theta$ ad avere valori negativi e anche maggiori di $2\pi$, le funzioni coseno e seno risulteranno periodiche di periodo $2\pi$, perché i corrispondenti angoli individuano la stessa semiretta.

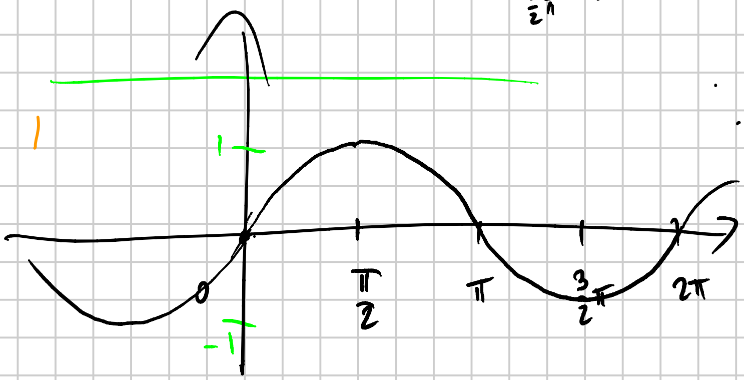
$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



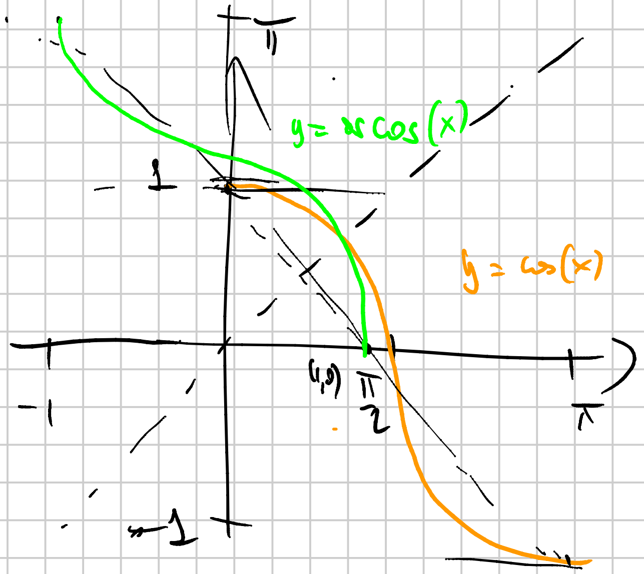




- sen e cos non sono iniettive, e non sono suriettive
- sen è una funzione DISPARI
- cos è una funzione PARI
- $\text{Im}(\text{sen}) = [-1,1]$, $\text{Im}(\cos) = [-1,1]$.

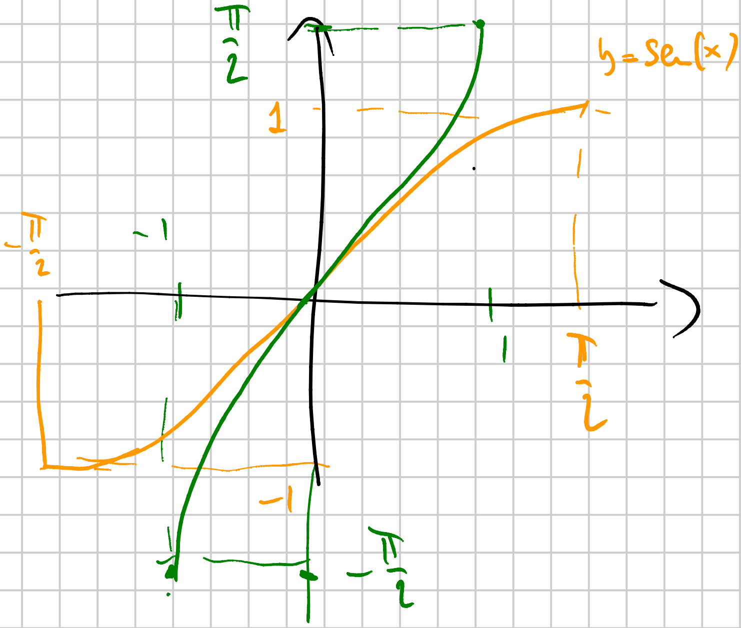
In ogni intervallo di monotonia del cos, esso è iniettivo e suriettivo su $[-1,1]$. Il dominio di invertibilità "standard" è $[0,\pi]$

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ è biettiva quindi invertibile




$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ è la sua inversa

$\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ è invertibile




$\text{arcsen} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è la sua inversa.

RIPASSATE REGOLE ALGEBRICHE DI seno e coseno

- $\text{sen}(x+y) = ?$
- $\cos(x+y) = ?$
- $\text{sen}(\pi + x) = ?$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = ?$