Esercizi

1. Siano
$$\begin{cases} \vec{u} & = & (0,1,0) \\ \vec{v} & = & (1,3,0) \\ \vec{w} & = & (0,1,1) \end{cases}$$
Calcolare
$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} \qquad \text{e} \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Svolgimento. $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$
$0(3 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - 1(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 0(1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = -1.$

Esercizi

2. Dati i punti

$$A(1,2,3) \qquad \text{e} \qquad B(2,-1,0)$$

ottenere una rappresentazione cartesiana e una rappresentazione parametrica della retta r passante per i due punti.

Svolgimento. Una rappresentazione parametrica della retta è $P = A + t(B - A)$, cioè $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2-3t \\ z & = & 3-3t \end{array} \right.$. Per eliminare il parametro, dalla prima equazione si ottiene $t = x - 1$ e quindi le equazioni cartesiane $\left\{ \begin{array}{l} y = 5-3x \\ z = 6-3x \end{array} \right.$, ovvero $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x+y-5 & = & 0 \\ 3x+z-6 & = & 0 \end{array} \right.$.

Esercizi

3. Date le rette

$$r:\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad r_0:\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$r_1:\begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2:\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$r_3:\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

si studino le posizioni relative tra r e le rette r_i, e si calcolino gli angoli che r forma con le rette r_i.

Esercizi

Svolgimento. Un vettore non nullo parallelo a r è
$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Un vettore non nullo parallelo a r_0 è
$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Un vettore non nullo parallelo a r_1 è
$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Un vettore non nullo parallelo a r_2 è
$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k}$. Un vettore non nullo parallelo a r_3 è
$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$.

Esercizi

Svolgimento (cont). Pertanto:

- r è parallela a r_0. Per vedere se r, r_0 coincidono, basta controllare se qualche punto di r appartiene anche a r_0. Poiché $(1,0,0) \in r, (1,0,0) \in r_0$, si conclude che $r = r_0$. L'angolo tra le rette è 0.
- r è parallela a r_1. Per vedere se r, r_1 coincidono, basta controllare se qualche punto di r appartiene anche a r_1. Poiché $(1,0,0) \in r, (1,0,0) \notin r_1$, si conclude che $r \neq r_1$. L'angolo tra le rette è 0.
- r non è parallela a r_2. Per vedere se le due rette sono incidenti, si può controllare se il sistema $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ è risolubile. Poiché $(1,0,0)$ è soluzione del sistema, cioè $(1,0,0) \in r \cap r_2$, si conclude che r, r_2 sono rette incidenti. Siccome $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot (-\vec{i} + \vec{k}) = 0$, le rette sono perpendicolari, cioè l'angolo tra le rette è $\frac{\pi}{2}$.

Esercizi

Svolgimento (cont)**.**

- r non è parallela a r_3. Poiché r è contenuta nel piano di equazione $x - y - 1 = 0$, e r_3 è contenuta nel piano $x - y = 0$, e tali piani sono paralleli e distinti, le rette r, r_3 sono sghembe. L'angolo α tra le rette è tale che $\cos\alpha = \frac{(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\cdot\vec{k}}{||\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}||||\vec{k}||} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Dati i punti

$$A(1,2,3), \qquad B(2,-1,0), \qquad C(0,2,1)$$

ottenere una rappresentazione cartesiana del piano che passa per i tre punti.

Svolgimento. Un punto $P(x,y,z)$ appartiene al piano per A, B, C se e solo se i vettori $(P-A), (B-A), (C-A)$ sono complanari.
Un'equazione cartesiana del piano è quindi $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$,
cioè $6(x-1)+5(y-2)-3(z-3)=0$, ovvero $6x+5y-3z-7=0$.

Esercizi

5. Dati i piani

$$
\begin{aligned}
\pi &: 6x + 5y - 3z - 7 = 0 \\
\pi_0 &: 12x + 10y - 6z - 14 = 0 \\
\pi_1 &: 12x + 10y - 6z - 3 = 0 \\
\pi_2 &: 2x - 4y + z - 1 = 0
\end{aligned}
$$

determinare le posizioni relative tra π e gli altri piani.

Svolgimento. Un vettore non nullo perpendicolare a π è $6\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.
Un vettore non nullo perpendicolare a π_0 è $12\vec{i} + 10\vec{j} - 6\vec{k}$; un altro è quindi $6\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$. La stessa cosa vale per π_1. Un vettore non nullo perpendicolare a π_2 è $2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.
Dunque π, π_0, π_1 sono paralleli. Inoltre un'altra equazione di π_0 è $6x + 5y - 3z - 7 = 0$, mentre un'altra equazione di π_1 è $6x + 5y - 3z - \frac{3}{2} = 0$. Quindi $\pi = \pi_0$, mentre $\pi \cap \pi_1 = \emptyset$ cioè π, π_1 sono paralleli e distinti.
Invece, π, π_2 non sono paralleli, quindi sono incidenti in una retta.

Esercizi

6. Dati il piano

$$\pi : x - y - 1 = 0$$

e le rette

$$r : \begin{cases} x - z - 1 & = & 0 \\ x - 2y + z - 1 & = & 0 \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} x - z - 3 & = & 0 \\ 2y - 2z - 1 & = & 0 \end{cases}$$

$$r'' : \begin{cases} x + z - 1 & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}$$

stabilire le posizione relative di π rispetto alle tre rette.

Esercizi

Svolgimento. Un vettore non nullo perpendicolare a π è $\vec{i}-\vec{j}$.

Un vettore non nullo parallelo a r è $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$;

quindi un altro vettore non nullo parallelo a r è $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Poiché $(\vec{i}-\vec{j})\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=0$, segue che r è parallela a π. Per vedere se $r\subseteq\pi$ o se $r\cap\pi=\emptyset$, si osservi che $(1,0,0)\in r\cap\pi\neq\emptyset$, quindi $r\subseteq\pi$.

Un vettore non nullo parallelo a r' è $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$; quindi

un altro vettore non nullo parallelo a r' è $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Di conseguenza, anche r' è parallela a π. Poiché $\left(3,\frac{1}{2},0\right)\in r'$ ma $\left(3,\frac{1}{2},0\right)\notin\pi$, segue che $r\cap\pi=\emptyset$.

Un vettore non nullo parallelo a r'' è $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}+\vec{k}$. Poiché

$(\vec{i}-\vec{j})\cdot(-\vec{i}+\vec{k})=-1\neq 0$, segue che π, r'' sono incidenti in un punto. Inoltre i vettori $\vec{i}-\vec{j}, -\vec{i}+\vec{k}$ non sono paralleli, quindi r non è perpendicolare a π.

Esercizi

7. Dati i piani

$$
\begin{aligned}
\pi :& x - 2y + z - 1 = 0 \\
\pi' :& x - 2y + z + 5 = 0 \\
\pi'' :& 3x + y - z - 4 = 0 \\
\pi''' :& x + y - 1 = 0
\end{aligned}
$$

determinare la posizione di π rispetto agli altri tre piani, e gli angoli che π forma con essi.

Esercizi

Svolgimento. Un vettore non nullo perpendicolare a π è $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Il medesimo vettore è perpendicolare a π'; i piani π, π' sono paralleli e distinti, l'angolo che formano è quindi 0.
Un vettore non nullo perpendicolare a π'' è $3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Poiché $(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot (3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 0$, i piani π, π'' sono ortogonali, cioè formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$, e sono incidenti in una retta.
Un vettore non nullo perpendicolare a π''' è $\vec{i} + \vec{j}$. Quindi π, π''' sono incidenti in una retta. L'angolo α che formano è tale che $\cos\alpha = \frac{(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})\cdot(\vec{i}+\vec{j})}{|\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}||\vec{i}+\vec{j}|} = \frac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

8. Dato il piano

$$\pi : x - 2y + z - 1 = 0$$

e le rette

$$r' : \begin{cases} x - z - 3 & = & 0 \\ 2y - 2z - 1 & = & 0 \end{cases}$$

$$r'' : \begin{cases} x + z - 1 & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}$$

$$r''' : \begin{cases} x - y & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}$$

stabilire la posizione del piano π rispetto alle tre rette e l'angolo che π forma con esse.

Svolgimento. Un vettore non nullo perpendicolare a π è $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
I punti di r' soddisfano la differenza delle due equazioni, cioè $x - 2y + z - 2 = 0$. Pertanto r' è parallela a π ed è contenuta in un piano parallelo e distinto da π, quindi r' non è contenuta in π.
I punti di r'' soddisfano la differenza tra la prima equazione e il doppio della seconda, cioè $x - 2y + z - 1 = 0$; quindi $r'' \subseteq \pi$, in particolare r'', π sono paralleli.

Un vettore non nullo parallelo a r''' è $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$. L'angolo tra π e r''' è il complementare dell'angolo α tale che $\cos\alpha = \frac{(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})\cdot\vec{k}}{|\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}||\vec{k}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Esercizi

9. Stabilire la posizione relativa delle rette

$$r : \begin{cases} x - y - 3 & = & 0 \\ y - 2z & = & 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} y - z + 1 & = & 0 \\ x - z & = & 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Un vettore non nullo parallelo a r è
$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Un vettore non nullo parallelo a s è
$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Le rette formano un angolo α tale che
$\cos\alpha = \frac{(2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})\cdot(-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})}{|2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}||-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}|} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$. L'intersezione tra le due rette è data
dal sistema $\begin{cases} x - y - 3 & = & 0 \\ y - 2z & = & 0 \\ y - z + 1 & = & 0 \\ x - z & = & 0 \end{cases}$. L'ultima equazione fornisce $x = z$,
che sostituito nella prima dà $z - y - 3 = 0$. Questa equazione è incompatibile con la terza equazione $y - z + 1 = 0$, quindi il sistema non ha soluzioni e pertanto $r \cap s = \emptyset$. Non essendo parallele, le rette sono quindi sghembre.

Esercizi

10. Nello spazio con fissato sistema di riferimento cartesiano ortogonale siano date le rette r e s rispettivamente di equazioni:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 1 + 2h \\ z = 0. \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Esiste un piano contenente sia r che s che è ortogonale al vettore $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
b) Esiste un piano contenente sia r che s che è parallelo al vettore $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
c) Non esiste un piano contenente sia r che s.
d) Esiste un piano π contenente sia r che s che ha equazione $x + 3y + z = 0$.

Svolgimento. La retta r è parallela al vettore non nullo $\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$; la retta s è parallela al vettore non nullo $2\vec{i}+2\vec{j}$, cioè anche al vettore $\vec{i}+\vec{j}$.
Poiché $\begin{cases} (\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})\cdot(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) & = & 0 \\ (\vec{i}+\vec{j})\cdot(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) & = & 0 \end{cases}$, entrambe le rette sono ortogonali al vettore $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Poiché $(0,0,0)\in r\cap s$, risulta $r\cap s\neq\emptyset$, quindi l'affermazione (a) è vera. Pertanto le affermazioni (b) e (c) sono false. Infine, l'affermazione (d) è falsa perché il piano di equazione $x+3y+z=0$ non è ortogonale a $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.