Lezione 13 - Derivate II

Titolo nota — 22/04/2022

Definizione geometrica: la derivata è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$

retta tangente: $\boxed{y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)}$

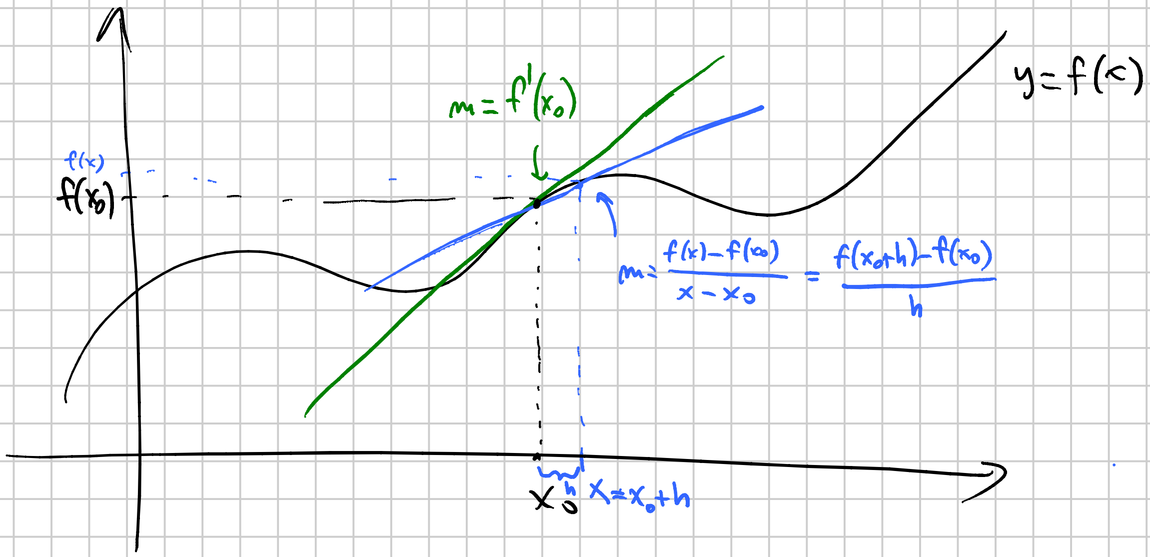
Definizione analitica:

(1) $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limite del rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

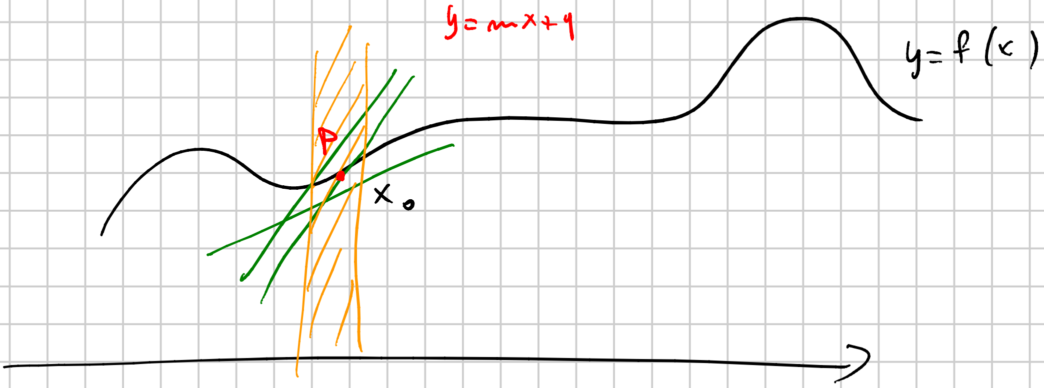
$x = x_0 + h$

(2) $$f'(x_0) \overset{\downarrow}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



Definizione come "miglior approssimazione": Qual è la funzione LINEARE che approssima meglio $f(x)$ intorno ad x_0.

Questa domanda risponde al bisogno di calcolare funzioni che non siano polinomi o rapporti di polinomi.



Cosa vuol dire "approssima meglio" in un intorno di x_0?

- $y = mx + q$ passi per $(x_0, f(x_0)) = P$

$\Rightarrow$ $y = m(x - x_0) + f(x_0)$

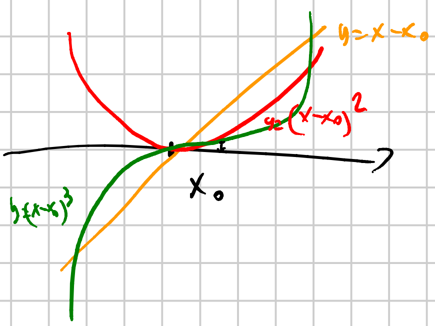
- $f_m(x) - f(x)$ sia il più piccolo possibile vicino a x_0.

per farlo compariamolo ad una quantità che sappiamo essere piccola vicino ad x_0.

$g(x)$ che sia piccola vicino ad x_0

$g(x) = x - x_0$ $\qquad g(x_0) = 0$ $\qquad g(x)$ è piccolo vicino ad x_0

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(x) = 0}$$



in generale potrei prendere $(x - x_0)^n$

ordini di infinitesimi "principali"

Confrontiamo con il primo ordine di infinitesimo
lo vorrei il più piccolo possibile (in valore assoluto)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_m(x) - f(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x-x_0) + f(x_0) - f(x)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} m \frac{\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{(x-x_0)}} - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m - f'(x_0)$$

⤳ allora scegliendo $m = f'(x_0)$ avrei che il limite è 0.

In questo caso si dice che $f(x)$ e $f_m(x)$ sono uguali al primo ordine di infinitesimo per $x \to x_0$.

GENERALIZZANDO, potrei chiedere qual è il miglior polinomio di 2° grado che approssima $f(x)$? $y = f_{a,b,c}(x) = ax^2 + bx + c$

⤳ polinomi di Taylor (successivamente)

Calcolo di derivate

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x+x_0)}{\cancel{x-x_0}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

$f(x) = x^2$ è una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e

$\boxed{f'(x) = 2x}$ $\forall x$.

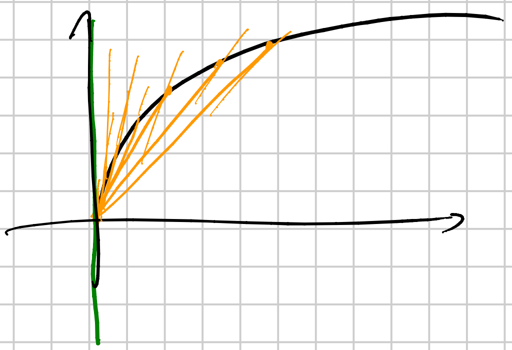
funzione derivata.

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{x - x_0}}{\cancel{(x - x_0)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} & \text{se } x_0 > 0 \\ +\infty & \text{se } x_0 = 0 \end{cases}$$

$f(x) = \sqrt{x}$ e' derivabile in $(0, +\infty)$ e non e' derivabile in $x_0 = 0$.



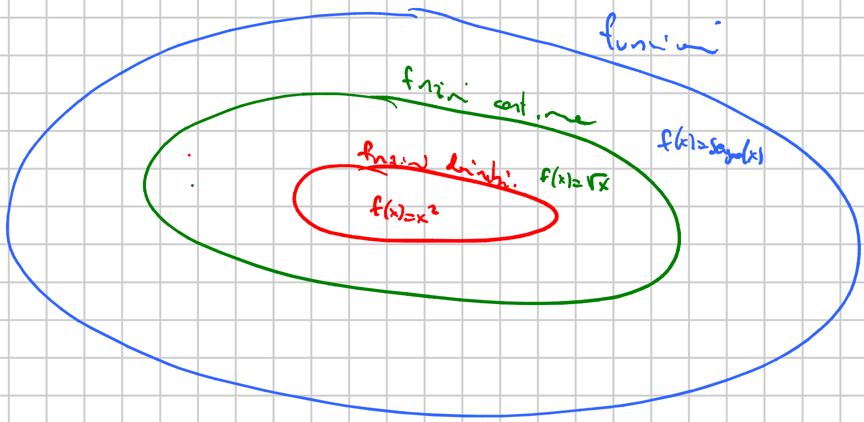
NOTA: se $\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ vuol dire che la retta tangente e' VERTICALE.

$\boxed{\text{Teorema}}$: Se f e' derivabile in x_0 allora f e' continua in x_0. (NON VICEVERSA)

Dim.
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) + f(x_0) =$$

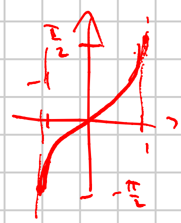
$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\boxed{(x - x_0)}}_{0} + f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

D



Derivate di funzioni elementari

$f(x)$		$f'(x)$	I
1		0	$\mathbb{R}$
$\overset{x^2}{\boxed{x^n}}$	$\overset{n=2}{n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1}$	$\overset{2\cdot x^{2-1} = 2x}{nx^{n-1}}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$	n pari $(0, +\infty)$, n dispari $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
x^b	$b \in \mathbb{R}$	bx^{b-1}	$(0, +\infty)$
e^x		e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$a > 0$	$\log(a) \cdot a^x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$		$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\log_a x$	$a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \text{dom}(\tan)$
$\arcsin x$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$ in -1 e 1 non è derivabile
$\arccos x$		$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$ in -1 e 1 non è derivabile
$\arctan x$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$



TANGENTI VERTICALI

Algebra delle funzioni derivabili

Date f e g due funzioni derivabili in x_0, si ha che

(i) • $h(x)=f(x)+g(x)$ e' derivabile in x_0 e

$$h'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

(ii) • $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ e' derivabile in x_0 e

$$h'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

(iii) • $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e' derivabile in x_0 se $g(x_0)\neq 0$

$$h'(x_0)=\frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

in particolare $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}$

Corollario $h(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$ $\qquad h'(x)=\alpha\cdot f'(x)+\beta\cdot g'(x)$.

$$h'(x)\overset{(i)}{=}(\alpha f(x))'+(\beta g(x))'\overset{(ii)}{\underset{g(x)\equiv\alpha}{=}}\alpha\cdot f'(x)+(\beta g(x))'\overset{(ii)}{\underset{f(x)\equiv\beta}{=}}\alpha\cdot f'(x)+\beta\cdot g'(x)$$

Dim. (ii) $h(x)=f(x)\cdot g(x)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$$

ma anche $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ $\qquad \lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\underbrace{\frac{(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}}_{f'(x_0)}\overbrace{g(x)}^{g(x_0)}+\underbrace{\frac{f(x_0)\cdot(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}}_{g'(x_0)}\right]=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

$\boxed{Es.}$

- $f(x) = e^x \cdot x^2 - \sin(x) \cdot x$

$f(x) \cdot g(x)$

$f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

$$f'(x) = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2 \cdot x - \cos(x) \cdot x - \sin(x) \cdot 1$$

$$= (x^2 + 2x) e^x - x \cos(x) - \sin(x).$$

- $f(x) = e^{2x}$

$e^{2x} = f(g(x)) \qquad g(x) = 2x \qquad f(y) = e^y$

$(e^x)^2 = f(g(x)) \qquad g(x) = e^x \qquad f(y) = y^2$

$e^x \cdot e^x \quad *$

$(e^2)^x \quad *$

$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

$$f'(x) = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$$

$$f'(x) = \ln(e^2) \cdot (e^2)^x = 2 \cdot e^{2x}.$$