Analisi Matematica 1 - Lezione 8

Titolo nota 20/10/2022

Teorema Sia a_n una successione monotòna crescente (decrescente) cioè tale che $\forall\ n > m$ $a_n > a_m$ ($a_n < a_m$). Allora si ha che

- $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$
- $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ e $\ell = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (inf)

Dim. $\boxed{\text{CASO 1}}$ $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \ell < +\infty$

L'estremo superiore è caratterizzato da 2 proprietà

(i) $a_n \le \ell \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ (ℓ è un maggiorante)

(ii) $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_\varepsilon} > \ell - \varepsilon$ (ℓ è il minimo dei maggioranti)

Proviamo a mostrare che $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$. Per ogni $\varepsilon > 0$ dobbiamo trovare N_ε tale per cui

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall\ n > N_\varepsilon$$

Proviamo a considerare $N_\varepsilon = n_\varepsilon$ dato dalla definizione di sup (ii).
Allora se $n > N_\varepsilon$, $\underbrace{a_n}_{} \overset{(i)}{\le} \ell \underbrace{< \ell + \varepsilon}_{}$ inoltre $\underbrace{a_n}_{} \overset{a_n \text{ è crescente}}{\ge} a_{N_\varepsilon} = a_{n_\varepsilon} \overset{(ii)}{\ge} \underbrace{\ell - \varepsilon}_{}$,
quindi $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$.

$\boxed{\text{CASO 2}}$ $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

a_n è illimitata quindi $\forall\ M > 0 \quad \exists\ n_M$ tale che $a_{n_M} > M$.

Vorremo mostrare $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$. $\forall M > 0$ vogliamo trovare N_M tale che se $n > N_M$ allora $a_n > M$.

Ma allora provo a considerare $N_M = n_M$: quindi se $n > N_M$ si ha

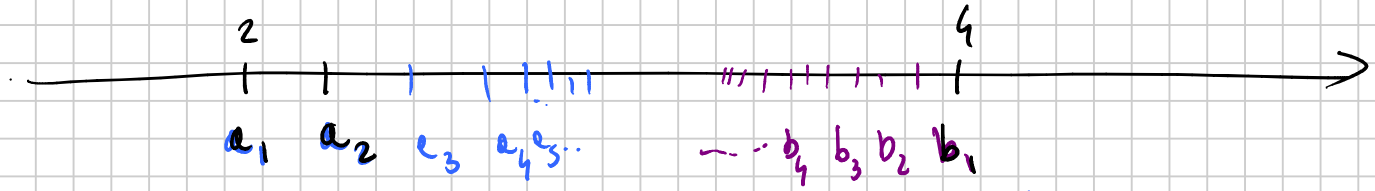
$$a_n \overset{\text{successione crescente}}{\geq} a_{N_M} \overset{\text{def. di } n_M}{>} M.$$

$\square$.

Definizione di costante di Nepero e tramite successioni

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{= a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1} > a_n$$

CLAIM a_n è crescente e b_n è decrescente



a_n è limitata, poiché $a_n \leq b_n \overset{b_n \text{ decrescente}}{\leq} b_1 = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Quindi $\exists \; e := \lim_{n \to \infty} a_n \quad (e < 4)$

$$\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

e come limite di tassi d'interesse "CONTINUI"

Do alla banca una quantità Q di denaro, nel tempo di 1 anno ho un tasso di interesse $t \in \mathbb{R}$

Alla fine dell'anno ho nel conto $Q + \underbrace{tQ}_{\text{interesse}}$

Diciamo che $t=1$ come proposta iniziale della banca. Ma allora in un anno passo da $Q \to 2Q$.

Supponiamo di voler fare un tasso di interesse di $\frac{1}{2}$, ma 2 volte all'anno.

metà dell'anno

$$Q \to \underset{(1+\frac{1}{2})Q}{Q+\frac{1}{2}Q} \to \underset{(1+\frac{1}{2})^2 Q}{(Q+\tfrac{1}{2}Q)+\tfrac{1}{2}(Q+\tfrac{1}{2}Q) =}$$

Vedo che $Q \to \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 Q = \frac{9}{4}Q = 2{,}25 \cdot Q$.

Ok mi sembra conveniente, proviamo a farlo n volte all'anno, con un tasso d'interesse $t=\frac{1}{n}$ ogni volta.

$$Q \to \left(1+\frac{1}{n}\right)Q \to \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 Q - \cdots \to \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}Q.$$

nel limite di tasso di interesse continuo il guadagno sul capitale iniziale Q sarà di $(e-1)Q$.

Domanda: se invece di essere trascorso 1 anno è trascorso x anni (dove $x \in \mathbb{R}$ cioè può essere anche una porzione di anno), qual è il mio capitale $C(x)$ al tempo x?

Dim (a_n crescente) Mi basta dimostrare che $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{?}{\le} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \overset{?}{\le} \frac{(n+2)^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{(n+2)}{(n+1)}$$

(Bernoulli
$(1+x)^n \ge 1+nx$
$\forall\, x\ge -1$)

$$\frac{n+1}{n+2} \overset{?}{\le} \frac{(n+2)^n\cdot n^n}{(n+1)^n(n+1)^n}$$

$$\frac{n+1}{n+2} \overset{?}{\le} \left(\frac{n\,(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n$$

$$\left(1+\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}-1\right)\right)^n \overset{?}{\ge} 1+\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)$$

$$\left(1+\frac{\cancel{n^2}+\cancel{2n}-\cancel{n^2}-\cancel{2n}-1}{(n+1)^2}\right)^n \overset{?}{\ge} 1-\frac{1}{n+2}$$

$$\overbrace{\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}^{A} \overset{?}{\ge} \overbrace{1-\frac{1}{n+2}}^{C}$$

$$(1+x)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\ge} 1+nx = \underbrace{1-\frac{n}{(n+1)^2}}_{B}$$

$$x=-\frac{1}{(n+1)^2}\ge -1 \quad \text{ok.}$$

$A \ge B$ per bernoulli. Se avessi $B \ge C$ potrei concludere $A \ge C$ e quindi ho mostrato la mia tesi

è vero che $B \ge C$?

$$\cancel{1} - \frac{n}{(n+1)^2} \overset{?}{\geq} \cancel{1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n+2} \geq \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$n^2+2n+1 = (n+1)^2 \geq n(n+2) = n^2+2n \qquad \checkmark$$

• oss. poiché nell'ultimo passaggio ho sempre disug. stretta, D.
In realtà ho mostrato che a_n è una succ. STRETTAMENTE crescente.

Analogamente si dimostra che b_n è decrescente.

Limiti di Funzioni Elementari

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ 0 & \text{se } a<0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } 0\leq a<1 \\ 0 & \text{se } -1<a<0 \\ \text{indet.} & \text{se } a\leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \log_a(n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ -\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(n) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(-n) = -\frac{\pi}{2}$$

$\lim_{n \to \infty} \cos(n)$ non esiste (ma la dimostrazione non e' ovvia)

$\lim_{n \to \infty} \sin(n)$, $\lim_{n \to \infty} tg(n)$, $\lim_{n \to \infty} cotg(n)$ (non esistono)

$\lim_{n \to \infty} \cos(2\pi n) = 1$ ($\lim_{n \to \infty} \cos(n^{100})$ non si sa se esiste o no).

Algebra dei limiti

Siano a_n e b_n due successioni che hanno limite

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$
$$\lim_{n \to \infty} b_n = \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

1) $\lim_{n \to \infty} a_n + b_n =$

	$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$\ell_1 = -\infty$	$-\infty$		$-\infty$

2) $\lim_{n \to \infty} a_n \cdot b_n =$

	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 < 0$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_1 = 0$	0	0	0		
$\ell_1 > 0$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = +\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = -\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

③

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n =$$

	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0^{\pm}$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 < 0$	ℓ_1/ℓ_2	$\mp\infty$	ℓ_1/ℓ_2	0	0
$\ell_1 = 0$	0		0	0	0
$\ell_1 > 0$	ℓ_1/ℓ_2	$\pm\infty$	ℓ_1/ℓ_2	0	0
$\ell_1 = +\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$		
$\ell_1 = -\infty$	$+\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$		

④ $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ le forme indeterminate in questo caso sono $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$ e 0^0

COSA FARE SE HO UNA FORMA INDETERMINATA?

Es.

$$\lim_{n\to+\infty} \overbrace{n^2}^{+\infty} \underbrace{-n}_{-\infty} = \infty - \infty \quad \text{forma indeterminata}$$

$$\| $$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{n^2}_{+\infty}\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{1}{n}}^{0}\right)}_{1} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{n+7}^{+\infty}}{\underbrace{n^2+2n+5}_{+\infty}} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{F.I.})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(1+\cancel{\frac{7}{n}}^{0}\right)}{n^{\cancel{2}}\left(1+\cancel{\frac{2}{n}}^{0}+\cancel{\frac{5}{n^2}}^{0}\right)} = \frac{1\cdot 1}{+\infty\cdot 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$