Lezione 5 - Analisi Matematica

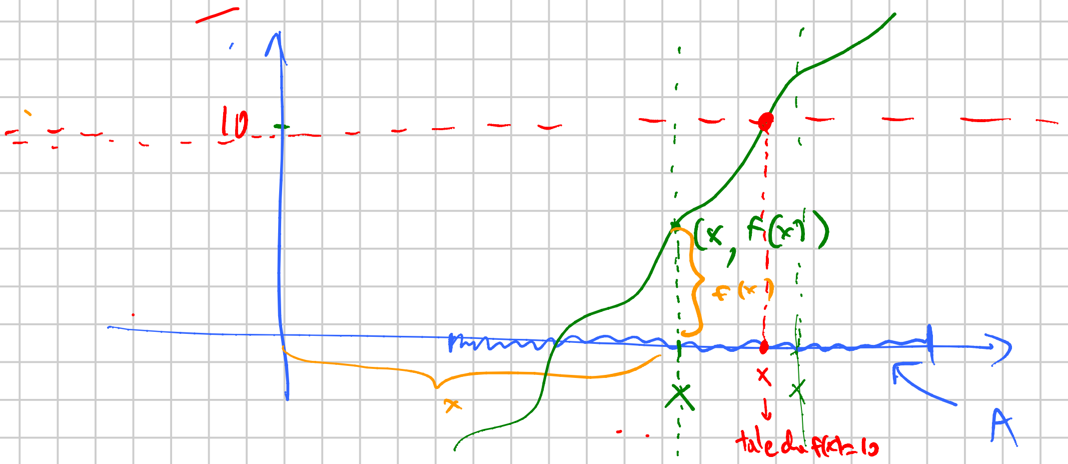
Titolo nota 04/10/2022

Interpretazione grafica INIETTIVITÀ e SURIETTIVITÀ per funzioni reali

$f: A \to \mathbb{R}$

- INIETTIVITÀ: per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste al più una $x \in A$ tale che $f(x) = y$

EQUIVALENTEMENTE: per ogni $x_1, x_2 \in A$ $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$



chi sono le x tali che $f(x) = 10$?

- Ma allora iniettività di f è equivalente a dire che il suo grafico interseca ogni linea orizzontale $\{y = \lambda\}$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$) in 0 o 1 punto. [cioè se l'equazione $f(x) = \lambda$ ha al più una soluzione]

- Sia $f: A \to B$ ($B \subseteq \mathbb{R}$). f è suriettiva se $\forall \lambda \in B$ $\{y = \lambda\}$ interseca il grafico di f in almeno un punto [cioè se l'equazione $f(x) = \lambda$ ($\lambda \in B$) ha almeno una soluzione]

- $f: A \to B$ è biiettiva se $\forall \lambda \in B$ la retta $\{y = \lambda\}$ interseca il grafico di f in esattamente un punto.

Relazioni con concetti dell'ultima lezione.

- Se f è pari SICURAMENTE $\boxed{\text{NON}}$ è INIETTIVA
  - può essere suriettiva?
    - $f(x) = x^2$ suriettiva se $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$
    - $f(x) = tg|x|$ suriettiva se $f: A \to \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$
    - è possibile trovare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ PARI E SURIETTIVA!

- Se f è STRETTAMENTE CRESCENTE (o DECRESCENTE) sicuramente è anche INIETTIVA poiché se considero $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$ posso assumere $x_1 < x_2$, ma allora $f(x_1) \overset{f \text{ str. crescente}}{<} f(x_2)$, ma allora $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se f_1 e f_2 sono crescenti allora

- $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ è crescente
- $f(x) = -f_1(x)$ è decrescente
- (Se $f_1 > 0$ e $f_2 > 0$) $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ è crescente.

- (Se $f_1 > 0$) $f(x) = \frac{1}{f_1(x)}$ è decrescente
- (Se $f_1 < 0$) $f(x) = \frac{1}{f_1(x)}$ è decrescente

$\boxed{\text{Es.}}$

$$f(x) = \underbrace{x}_{\text{crescente}} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{crescente su } x>0}$$

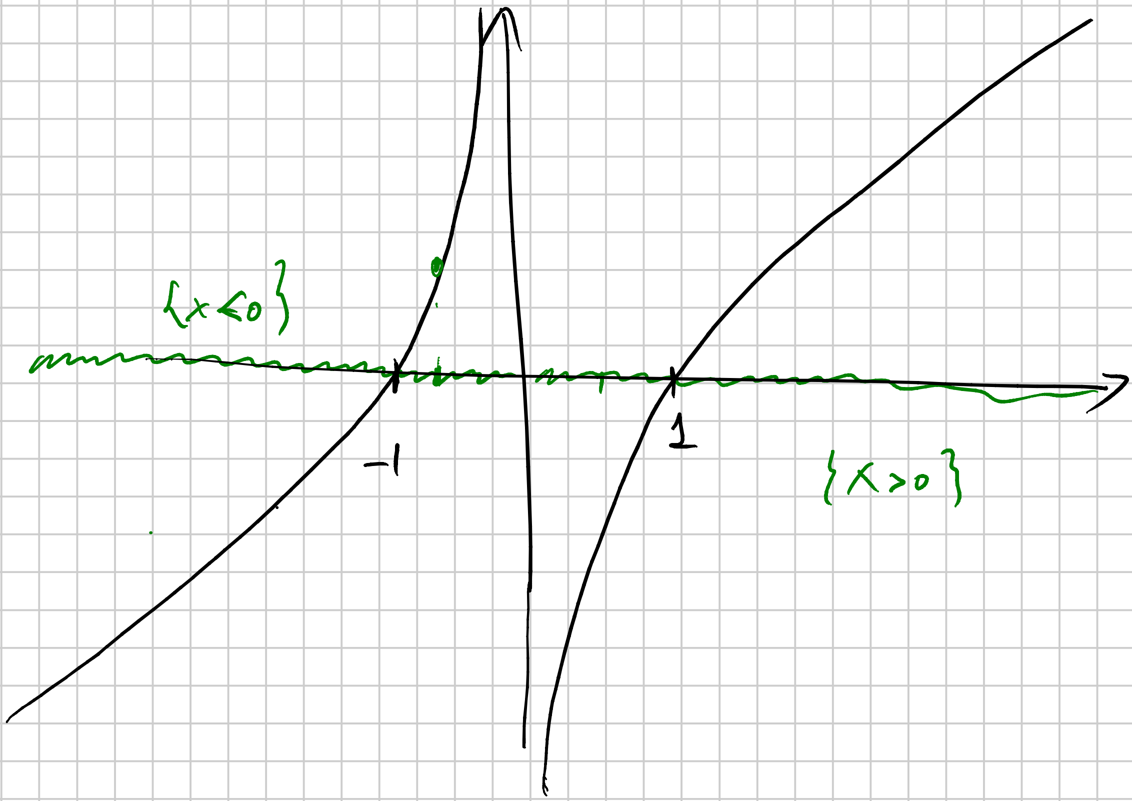
x crescente

$\frac{1}{x}$ decrescente $(x>0)$

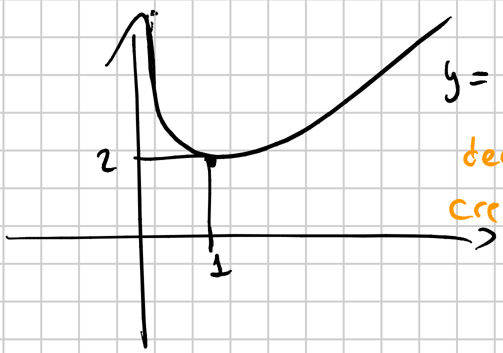
$-\frac{1}{x}$ crescente (su $x>0$)

$\rightsquigarrow$ $f(x)$ è crescente su $x>0$

Similmente $f(x)$ è crescente su $x<0$



$$f(x) = \underbrace{x}_{\text{crescente}} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{decrescente su } x>0}$$



$y = x + \frac{1}{x}$

decrescente su $(0,1]$

crescente su $[1,+\infty)$

BESTIARIO FUNZIONI ELEMENTARI

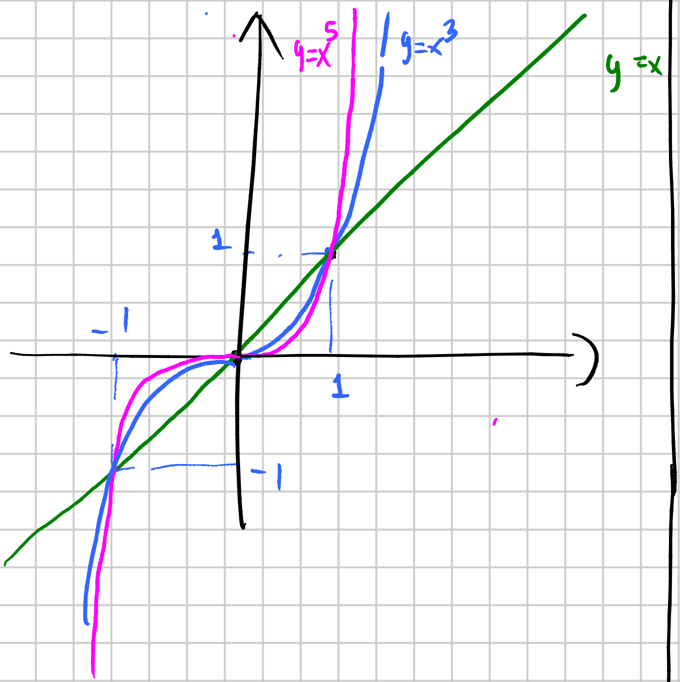
Funzioni potenza

$f(x) = x^k$ con $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 1$

$\boxed{\text{NOTA: } f(0)=0, \quad f(1)=1 \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1}$

k DISPARI $k=1,3,5,\ldots$

$f(x)=x^k$ è DISPARI

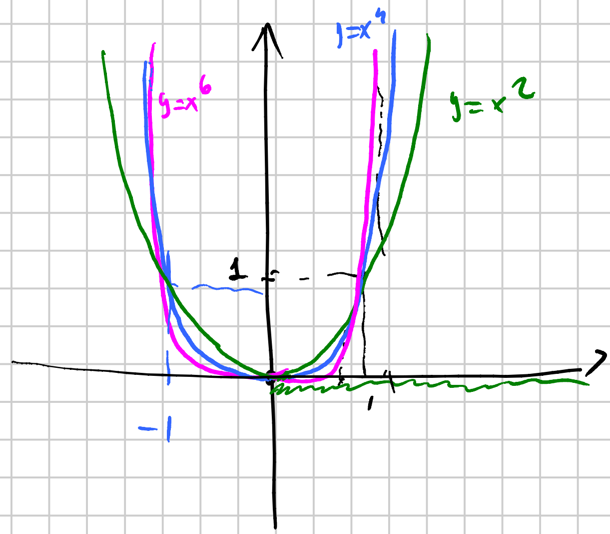


- $f(x)$ è STRETTAMENTE CRESCENTE
- $f(x)$ è INIETTIVA
- $f(x)$ è SURIETTIVA

$\rightsquigarrow$ f è BIIETTIVA QUINDI INVERTIBILE

k PARI $k=2,4,6,8,\ldots$

$f(x)=x^k$ è PARI



- $f(x)$ NON è MONOTONA su $\mathbb{R}$

MA f è STR. DECR. su $(-\infty,0]$

e $\boxed{\text{STR. CRESC. su } [0,+\infty)}$

- f NON è iniettiva
- f NON è suriettiva; $\boxed{\mathrm{Im}(f)=[0,+\infty)}$

quindi $f:[0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ è BIIETTIVA

QUINDI INVERTIBILE

Chi sono le inverse delle funzioni potenza? $f(x)=x^k$

Devo trovare $g(y)$ tale che $f(g(y))=y$,

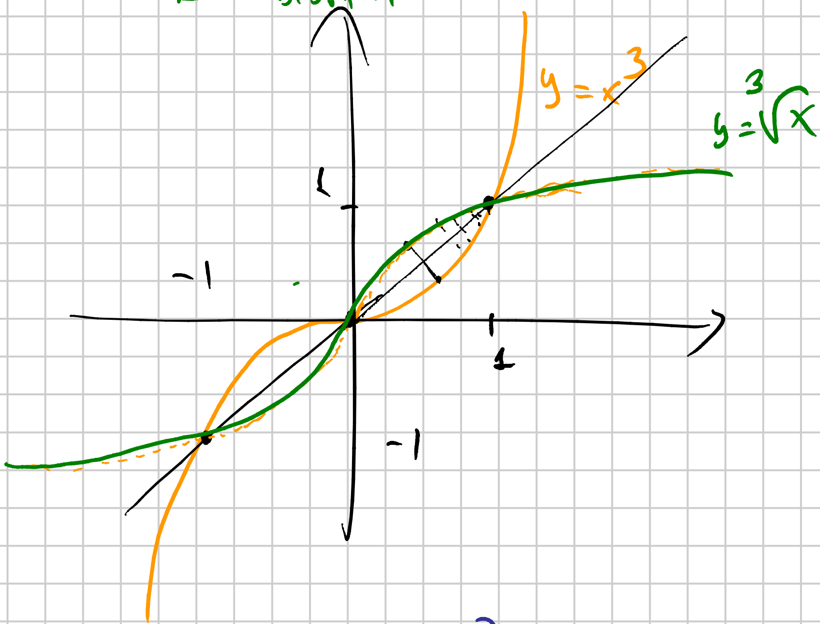
cioè risolvere $(g(y))^k = y$

Cioè $g(y) = \sqrt[k]{y}$.

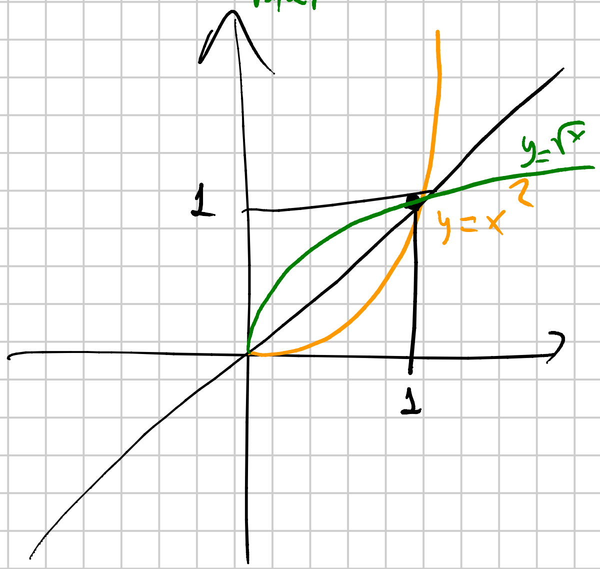
Ma allora

- Se k è dispari $g(x) = \sqrt[k]{x}$ è definita come $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Se k è pari $g(x) = \sqrt[k]{x}$ è definita con $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

K DISPARI



K PARI



NOTA: DATA $f : A \to B$ INVERTIBILE, IL GRAFICO DELLA SUA INVERSA $g : B \to A$ È IL SIMMETRICO DEL GRAFICO DI f RISPETTO ALLA BISETTRICE DEL 1° E 3° QUADRANTE $\{y = x\}$