Lezione 14 - Analisi matematica I

Titolo nota 01/12/2022

Teorema (Fermat) $f : I \to \mathbb{R}$ continua, dove I e' un intervallo e sia $x_0 \in I$ un punto interno (cioe' $\exists\, \delta > 0$ t.c. $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq I$). Se x_0 e' un punto di massimo o minimo relativo e f e' derivabile in x_0, allora

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

Dim. (Supponiamo x_0 p.to di max relativo)
Innanzitutto, poiché per ipotesi f é derivabine in x_0, abbiamo $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Tuttavia

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{\boxed{f(x_0+h) - f(x_0)}}^{\leq 0}}{\underbrace{\boxed{h}}_{>0}} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{\boxed{f(x_0+h) - f(x_0)}}^{\leq 0}}{\underbrace{\boxed{h}}_{<0}} \geq 0$$

ma allora $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$, quindi l'unica possibilita' e' che $f'(x_0) = 0$.

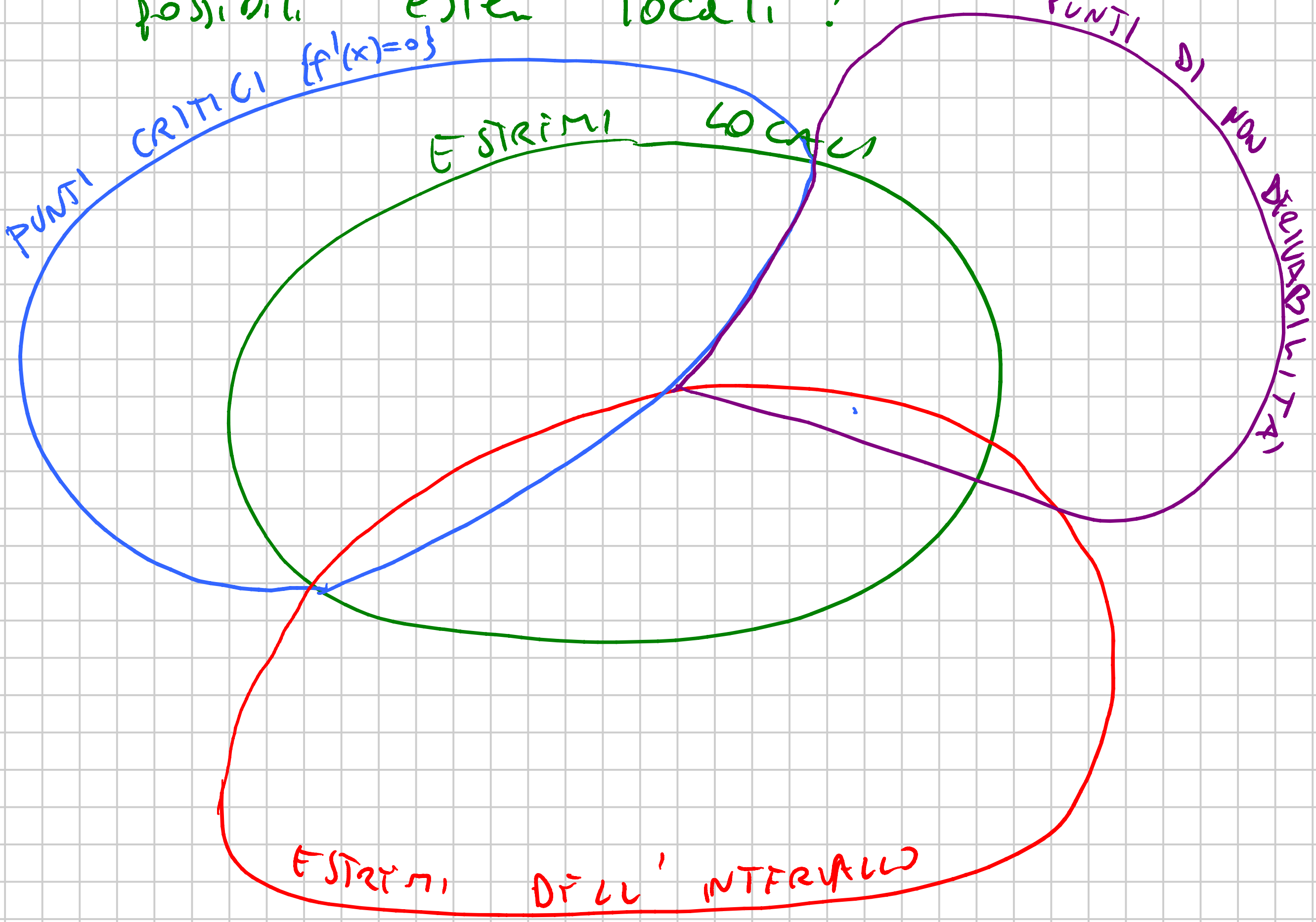
Commento 1 la derivabilita' in x_0 e' NECESSARIA.

Es. $f(x) = |x|$, essa ha un minimo assoluto in $x=0$, tuttavia f non é derivabile in 0 e inoltre $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

Commento 2) l'ipotesi che x_0 sia INTERNO è NECESSARIA

Es. $f(x)=x$ $I=[0,1]$. In questo caso 0 è punto di minimo e 1 è punto di max. tuttavia $f'(0)=f'(1)=1$.

Domanda: ma allora come faccio a trovare tutti i possibili estremi locali?



Es. $f(x)=x^4-2x^2+1$ in $I=[-2,2]$.

CHI SONO I POSSIBILI ESTREMI LOCALI?

(i) PUNTI DI NON DERIVABILITÀ NON CE NE SONO

(ii) ESTREMI DELL'INTERVALLO $\{-2,2\}$

(iii) PUNTI CRITICI $\{x \text{ tali che } f'(x)=0\}$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

(iii) $4x^3 - 4x = 0$

$4x(x^2-1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\text{ oppure }\; x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1,\; x = -1$

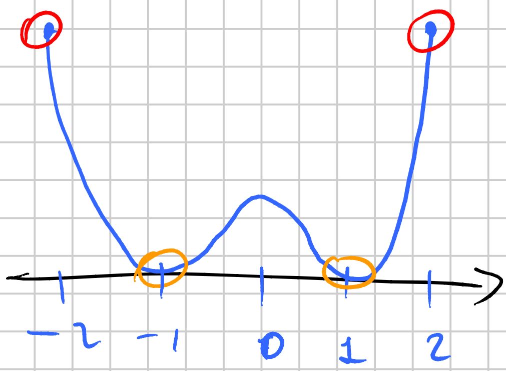
PUNTI CRITICI : $\{-1, 0, 1\}$

POSSIBILI ESTREMI LOCALI : $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

MAX GLOBALE / MIN GLOBALE ?

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	0	1	0	9

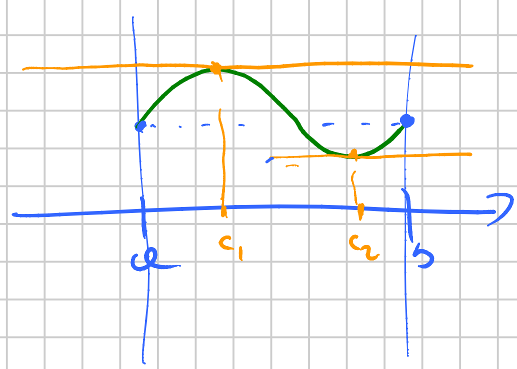
MAX GLOBALI



Teo (Rolle) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in (a,b). Se $\boxed{f(a) = f(b)}$ allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dim per Weierstrass esistono massimo e minimo globali su $[a,b]$. Distinguo due casi

(i) almeno uno tra max e min è in un punto interno x_0. Ma allora, per Fermat, $f'(x_0) = 0$ in quel punto.



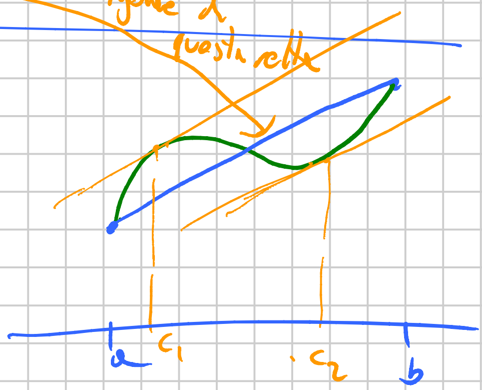
GEOMETRICAMENTE, esiste un punto interno la cui tangente al grafico è orizzontale

(ii) entrambi max e min sono agli estremi. Ma allora $\boxed{\max = \min = f(a) = f(b)}$ Ma allora f è costante e quindi $f'(x) \equiv 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$.

Teo. (Lagrange / AUTOVELOX) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b). Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

$$f'(c) = \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

coeff. angolare di questa retta



Dim. retta secante $\underbrace{y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$

Considero ora $g(x) = f(x) - r(x)$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

$$g(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\overset{0}{\cancel{(a-a)}} = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cdot\overset{1}{\cancel{b-a}} = 0$$

g è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e $g(a) = g(b) = 0$.

GEOMETRICAMENTE esiste un punto del grafico la cui tangente è parallela alla secante da P_a a P_b

Applico Rolle e quindi $\exists\, c \in (a,b)$ tale che $g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - r'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(c) = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\square$

Perché AUTOVELOX? i tutor possono calcolare la velocità media $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Supponiamo che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 140\ km/h$. Ma Lagrange ci assicura che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 140\ km/h$

velocità istantanea.

Caratterizzazione monotonia tramite derivata

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in I

(I è intervallo $[a,b]$, (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,b)$)

Allora:

(i) Se f è deb. cresente allora $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

(ii) Se f è deb. decrescente allora $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

(iii) Se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ allora f è deb. crescente

(iv) Se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ allora f è deb. decrescente

(v) Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ allora f è str. crescente

(vi) Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ allora f è str. decrescente.

Commento Per la monotonia stretta non vale il se e solo se perché $f(x) = x^3$ è strettamente monotona ma tuttavia $f'(0) = 0$, mentre $f'(x) > 0$ se $x \neq 0$.

Commento II Se $f'(x) \geq 0$ e NON esiste un intervallo dove $f' = 0$ allora f è str. crescente (v+)

$\boxed{\text{Dim.}}$ (i) e (ii) tramite def. di derivata e permanenza del segno.

Per (iii), (iv), (v), (vi) si usa Lagrange:

Per (v): consideriamo $a > b$ $a, b \in I$, allora per Lagrange $\exists\, c$, $b < c < a$, in particolare $c \in I$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$f(b) - f(a) = \overset{>0 \text{ per Hp}}{f'(c)} \cdot \overset{<0}{(b-a)} < 0$$

$\rightsquigarrow$ $f(a) < f(b)$. Per l'arbitrarietà di a, b concludo che f è strettamente crescente. $\square$

Attenzione I deve essere un intervallo dove la mia funzione è ben definita.

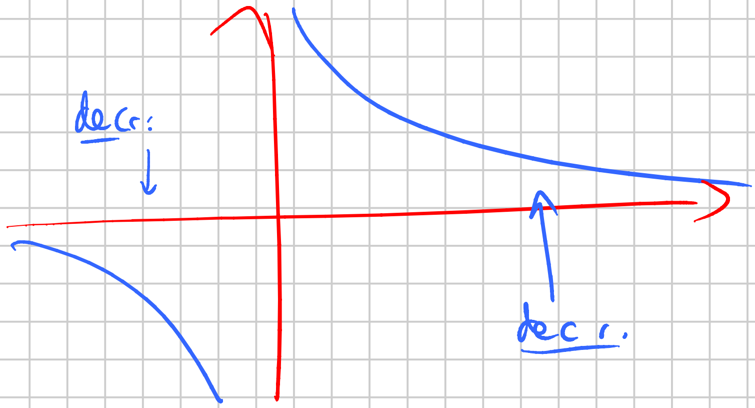
Es, $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$

$\rightsquigarrow$ allora f è una funzione decrescente

⚠ $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Posso considerare $I = (-\infty, 0)$ oppure $I = (0, +\infty)$.

Cioè posso solo concludere che f è decrescente in $(-\infty, 0)$ ed è decrescente in $(0, +\infty)$.



Esempi di studi di funzione: intervalli di monotonia e max/min locali

1) $f(x)=x^4-2x^2+1$

$f:[-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ f è derivabile in $[-2,2]$.

$f'(x)=4x^3-4x = 4x\cdot(x^2-1)$

Studio il segno di $f'(x)$:

$4x(x^2-1) \geq 0$

	-2		-1		0		1		2
$4x$		$-$		$-$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) $f(x) = x - \ln(x)$

$\text{dom}(f) = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to 0^+} \overset{\overset{0}{\nearrow}}{x} - \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \overset{\overset{+\infty}{\uparrow}}{x} - \overset{\overset{+\infty}{\uparrow}}{\ln(x)} = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \cancelto{0}{\frac{\ln(x)}{x}}\right) = +\infty$$

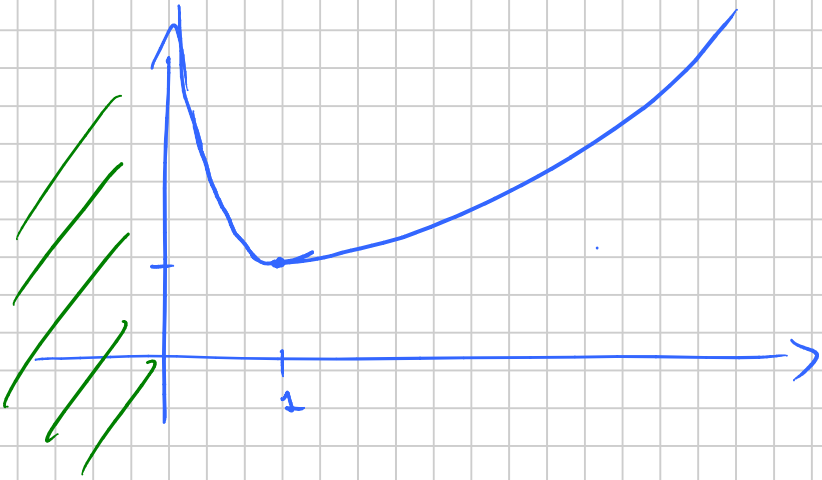
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

segno di $f'(x)$: $\quad 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \qquad \frac{x-1}{x} \geq 0$

		0		1	
$x-1$	$-$		$-$		$+$
x	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$	0	$+$
			$\searrow$		$\nearrow$

punto di minimo GLOBALE

$f(1) = 1 - \ln(1) = 1$



NOTA: abbiamo mostrato che $f(x) \geq f(1) \quad \forall\, x > 0$

$$x - \ln(x) \geq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\ln(x) \leq x - 1}$$

---

3) $f(x) = \text{arctg}(x) - \frac{2}{1+x^2}$ $\quad$ (dom = ? limiti agli estremi ?)

- studiare gli intervalli di monotonia e trovare gli estremi locali e globali