Tutorato Geomtria 30/09/2022

VETTORI GEOMETRICI e CALCOLO VETTORIALE

vettore libero

$\vec{u}$

- direzione
- verso
- modulo

Fissiamo un punto O. si ottiene i vettori applicati in O. punto O si dice <u>punto di applicazione</u>

$$\text{vettore } \vec{u} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \text{punto } P$$

$$\vec{u} = P - O$$

Fissiamo un sistema di riferimento dello spazio $Oxyz$. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vettori fondamentali di $Oxyz$: $\vec{i}$ versore dell'asse x

$\vec{j}$ " " y

$\vec{k}$ " " z

Allora ogni vettore $\vec{u}$ può essere scritto come combinazione lineare di $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, cioè $\exists!\ u_x, u_y, u_z \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

vettore $\vec{u} \longleftrightarrow$ P' punto dello spazio

$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ $\qquad$ P' $= (u_x, u_y, u_z)$

Domanda:

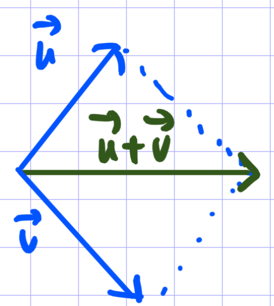
fissiamo vettore $\vec{u}$, il punto di applicazione O e un sistema di riferimento Oxyz. Possiamo avere $p' = p$?

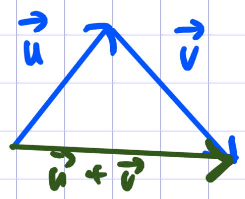
Risposta:

Yes se il punto di applicazione è l'origine di Oxyz.

$$\vec{u} = p - 0 = p' - 0 = (u_x - 0,\ u_y - 0,\ u_z - 0)$$

Somma





se $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$, $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, allora

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x)\vec{i} + (u_y + v_y)\vec{j} + (u_z + v_z)\vec{k}$$

proprietà:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0}$
- $\forall\ \vec{u}\ \exists\ \vec{v}$ t.c. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$

N.B. se consideriamo i componenti. queste proprietà sono ottenute dalle proprietà dei numeri reali

Prodotto per Scalari

siano $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \neq 0$, $\vec{u}$ un vettore. allora $\lambda \vec{u}$ è un vettore t.c.

direzione = direzione di $\vec{u}$

verso = $\begin{cases} \text{verso di } \vec{u} & \text{se } \lambda > 0 \\ \text{opposto del verso di } \vec{u} & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$

se $\lambda = 0$, $\lambda \vec{u} = \vec{0}$

modulo = $|\lambda| \, |\vec{u}|$

N.B. opposto di $\vec{u}$ = $\lambda \vec{u}$ con $\lambda = -1$

$\vec{u} = |\vec{u}| \, \text{vers}(\vec{u})$

se $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$, allora

$$\lambda \vec{u} = (\lambda u_x)\vec{i} + (\lambda u_y)\vec{j} + (\lambda u_z)\vec{k}$$

Proprietà:

- $1 \vec{u} = \vec{u}$
- $(\lambda \mu) \vec{u} = \lambda (\mu \vec{u})$
- $\lambda (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$
- $(\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v}$ vettori

Ex 1. Determinare un vettore $\vec{v}$ di modulo 4 che abbia la stessa direzione ma verso opposto a $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$

Sol:

MODO 1:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$\vec{u} = |\vec{u}| \, \text{vers}(\vec{u})$

$= \sqrt{2} \, \text{vers}(\vec{u})$

$\Rightarrow \text{vers}(\vec{u}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$

$\vec{u}, \vec{v}$ hanno la stessa direzione ma versi opposti $\Rightarrow$ $\text{vers}(\vec{u})$ $\text{vers}(\vec{v})$ hanno la stessa direzione ma versi opposti

$\Rightarrow \text{vers}(\vec{u}) + \text{vers}(\vec{v}) = 0$

$\Rightarrow \text{vers}(\vec{v}) = -\text{vers}(\vec{u}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{v} = |\vec{v}| \, \text{vers}(\vec{v}) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = -2\sqrt{2}\,i - 2\sqrt{2}\,j.$

MODO 2:

$\vec{u}, \vec{v}$ sono paralleli $\Rightarrow \exists\, \lambda \neq 0$ t.c. $\vec{v} = \lambda\vec{u} = \lambda\vec{i} + \lambda\vec{j}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \underbrace{\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2}}_{= \sqrt{2\lambda^2}} = 4 \Rightarrow \lambda^2 = 8$$

$\vec{v}$ ha opposto verso di $\vec{u} \Rightarrow \lambda < 0$

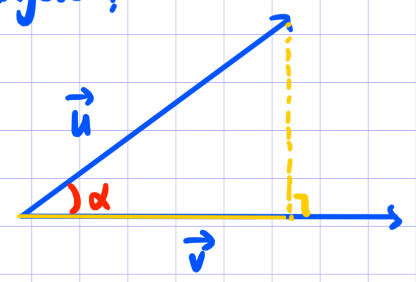
$\Rightarrow \lambda = -2\sqrt{2}$

Prodotto Scalare

$\vec{u}, \vec{v}$ due vettore.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha)$$

dove α è l'angolo ;



$0 \leq \alpha \leq \pi$

$u_\perp$ proiezione ortogonale di $\vec{u}$ su $\vec{v}$

In particolare,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cos(0) = |\vec{u}|^2$$

$u_\perp$ ha : direzione = direzione di $\vec{v}$

modulo = $\big|\, |\vec{u}| \cos(\alpha) \,\big|$

$$\text{verso} = \begin{cases} \text{verso di } \vec{v} & \text{se } \cos(\alpha) > 0 \\ \text{opposto del verso di } \vec{v} & \text{se } \cos(\alpha) < 0 \end{cases}$$

se $\cos(\alpha) = 0$, $u_\perp = \vec{0}$

$$\Rightarrow \boxed{u_\perp = \big|\, |\vec{u}| \cos(\alpha) \,\big| \operatorname{vers}(u_\perp) = |\vec{u}| \cos(\alpha) \operatorname{vers}(\vec{v})}$$

se $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$, $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, allora

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

$$\|$$

$$|\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha$$

In particolare, $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

se $\vec{v} \neq \vec{0}$, allora $|\vec{v}| \neq 0$,

$$|\vec{u}| \cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, allora $|\vec{u}| \neq 0$, $|\vec{v}| \neq 0$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

oss:

se $\vec{u}$, $\vec{v}$ due vettori non nulli, allora

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha) = 0$

$\iff \cos(\alpha) = 0$

$\iff \alpha = \frac{\pi}{2}$

$\iff \vec{u}, \vec{v}$ sono ortogonali

proprietà:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{u})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

  $\shortparallel$

  $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad \forall \vec{u}$

Ex 2. per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$, i vettori

$$\vec{u} = \lambda\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (\lambda, -2, 1)$$

$$\vec{v} = 2\lambda\vec{i} + \lambda\vec{j} - 4\vec{k} = (2\lambda, \lambda, -4)$$

sono ortogonali ?

Sol.

$\vec{u}, \vec{v}$ ortogonali $\iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda\cdot(2\lambda) + (-2)\lambda + 1\cdot(-4) = 2\lambda^2 - 2\lambda - 4$$

$$\iff \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\iff \lambda = 2 \text{ oppure } \lambda = -1$$

Ex 3. Calcolare l'angolo formato dai vettori $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + k = (2, -2, 1)$

$\vec{v} = \vec{j} - \vec{k} = (0, 1, -1)$

Sol:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{2\times 0 + (-2)\times 1 + 1\times(-1)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

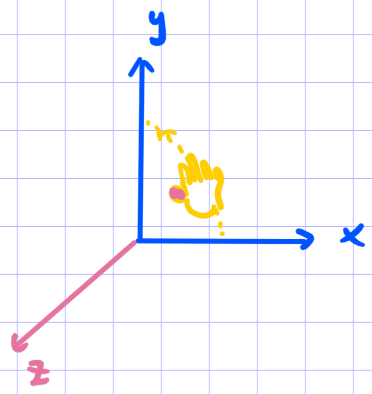
Prodotto Vettoriale

siano $\vec{u}$, $\vec{v}$ due vettore. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è un vettore t.c.

direzione : è ortogonale a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

verso : regola alla mano destra

(per esempio



)

modulo : $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\alpha)$

OSS:

se $\vec{u}$. $\vec{v}$ due vettori non nulli, allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff |\vec{u} \wedge \vec{v}| = 0$$

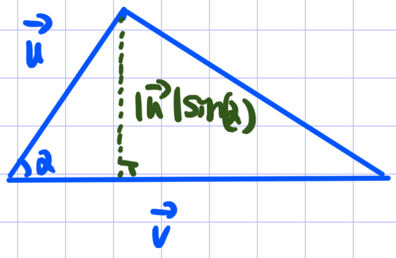
$$\iff \sin(\alpha) = 0$$

$$\iff \alpha = 0 \text{ oppure } \alpha = \pi$$

$$\iff \vec{u}, \vec{v} \text{ paralleli}$$

se $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$, $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_x v_y - u_y v_x)\vec{i} - (u_x v_z - u_z v_x)\vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{k}$$



area di questo triangolo $= \frac{1}{2}|\vec{v}||\vec{u}|\sin\alpha$

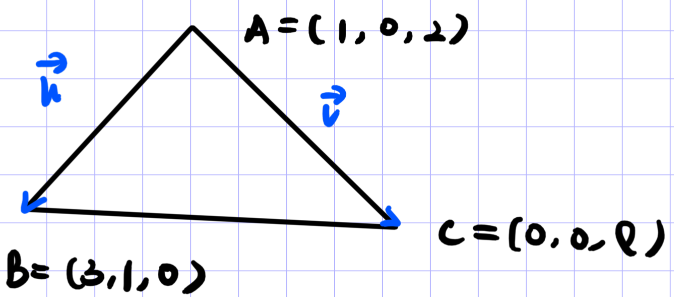
$= \frac{1}{2}|\vec{u} \wedge \vec{v}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(u_x v_y - u_y v_x)^2 + (u_x v_z - u_z v_x)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)}$

Ex 4. $A = (1, 0, 2)$, $B = (3, 1, 0)$ due punti. Determinare un punto C dell'asse z t.c. il triangolo ABC abbia area 10.

Sol.

$C = (0, 0, \ell)$ con $\ell \in \mathbb{R}$ perché C è sull'asse z



$\vec{u} = B - A = (3-1, 1-0, 0-2) = (2, 1, -2)$

$\vec{v} = C - A = (0-1, 0-0, 0-\ell) = (-1, 0, -\ell)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & \ell \end{vmatrix} = (\ell - 2)\vec{i} - (2\ell - 4 - 2)\vec{j} + \vec{k}$$

$$= (\ell - 2)\vec{i} + (6 - 2\ell)\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{(\ell - 2)^2 + (6 - 2\ell)^2 + 1^2} = \sqrt{5\ell^2 - 28\ell + 41}$$

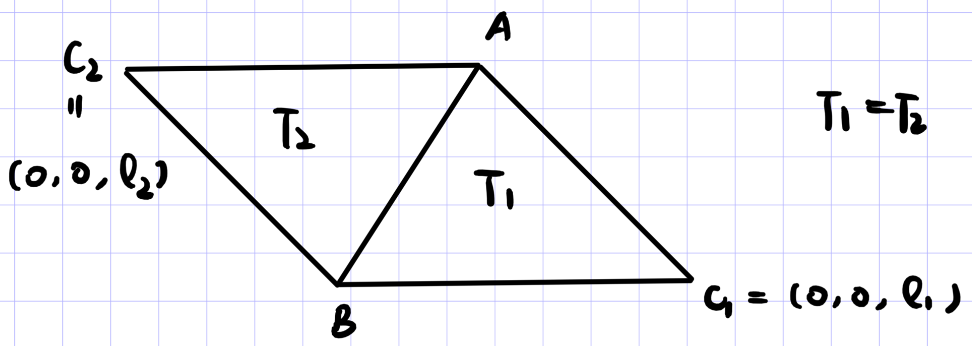
area di $ABC = 10 \Rightarrow \frac{1}{2}|\vec{u} \wedge \vec{v}| = 10$

$$\Rightarrow 5\ell^2 - 28\ell + 41 = (20)^2$$

$$\Rightarrow 5\ell^2 - 28\ell - 359 = 0$$

$$\Rightarrow \ell_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{1991}}{10}$$

Domanda: perché abbiamo ottenuto due ℓ;



Ex 5. Siano $\vec{u}, \vec{v}$ vettori non nulli. $\vec{w} = u_\perp$ il vettore proiezione ortogonale di $\vec{u}$ su $\vec{v}$. Provare che $\vec{u} - \vec{w}$ è ortogonale a $\vec{v}$

Dim:

$\vec{u} - \vec{w}$ è ortogonale a $\vec{v} \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$

$$(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{w} = u_\perp = |\vec{u}| \cos(\alpha)\, \mathrm{vers}(\vec{v})$$

$$\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cos(\alpha)\, \underbrace{\mathrm{vers}(\vec{v}) \cdot \vec{v}}_{} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\mathrm{vers}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \mathrm{vers}(\vec{v}) \cdot |\vec{v}|\, \mathrm{vers}(\vec{v}) = |\vec{v}|\, \mathrm{vers}(\vec{v}) \cdot \mathrm{vers}(\vec{v})$$
$$= |\vec{v}|\, |\mathrm{vers}(\vec{v})|^2$$
$$= |\vec{v}|$$

$\square$