Matrici

Una *matrice* di taglia $m \times n$ è una tabella (tipicamente: di numeri reali o complessi) con m righe e n colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

L'elemento a_{ij} si trova nel posto (i, j), cioè nella riga i-esima e nella colonna j-esima.

Se K è un campo (per es. $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$), l'insieme delle matrici $m \times n$ i cui elementi appartengono a K è denotato con $K^{m,n}$.

Spazi di matrici

$\mathbb{Q}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \times n$ a elementi razionali.

$\mathbb{R}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \times n$ a elementi reali.

$\mathbb{C}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \times n$ a elementi complessi.

Poiché $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, si ha che $\mathbb{Q}^{m,n} \subseteq \mathbb{R}^{m,n} \subseteq \mathbb{C}^{m,n}$.

Esempi

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ \sqrt{5} & e^{\pi} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ \sqrt{5} & e^{\pi} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -5+3i & 1 \\ \sqrt{3}i & e^{\pi} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,3}$$

Alcuni casi particolari

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix} \in K^{1,m}$$

è una *matrice riga* (o anche: *vettore riga*).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in K^{n,1}$$

è una *matrice colonna* (o anche: *vettore colonna*).

$$A = (a) \in K^{1,1}$$

è una matrice, che si può identificare col suo unico elemento a.
Cioè, $K^{1,1}$ si può identificare con K.

Altri casi particolari

Una matrice riga

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,3}$$

può essere identificata col vettore geometrico (a, b, c).

Similmente — e più frequentemente — una matrice colonna

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}$$

può essere identificata col vettore geometrico (a, b, c).

Cioè spesso si identificherè $\mathbb{R}^{3,1}$ con $\mathbb{R}^3$ (e, più in generale, $K^{m,1}$ con K^m).

L'importante è di non fare le due identificazioni contemporaneamente.

Trasposizione di matrici

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in K^{m,n}$$

la *matrice trasposta* di A è la matrice A^T che si ottiene scambiando le righe e le colonne di A:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \dots & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ji}) \in K^{n,m}$$

Esempi

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$(a)^T = (a)$$

Osservazione: L'operazione di trasposizione è idempotente: per ogni matrice A si ha

$$A^{TT} = A$$

Matrici quadrate

Se

$$A \in K^{n,n}$$

la matrice A si dice *quadrata*.

Nota: Se A è una matrice quadrata, allora A^T ha la stessa forma di A:

$$A \in K^{n,n} \Rightarrow A^T \in K^{n,n}$$

Anche se A è quadrata, A e A^T possono essere differenti.
Se A soddisfa l'equazione

$$A = A^T$$

la matrice A si dice *simmetrica*.

Esempi

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ è simmetrica, perché

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ non è simmetrica, perché

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Una matrice $(a) \in K^{1,1}$ è sempre simmetrica, perché

$$(a)^T = (a)$$

Matrici simmetriche

Una matrice

$$A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$$

è simmetrica se e solo se

$$\forall i, j \; a_{ij} = a_{ji}$$

Righe e colonne di una matrice

Una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

è strutturata come:

- una tabella di mn numeri a_{ij}
- una lista ordinata di m vettori riga appartenenti a $K^{1,n}$:

$$\begin{aligned} r_1 &= (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}) \\ r_2 &= (a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad \dots \quad a_{2n}) \\ &\dots \\ r_m &= (a_{m1} \quad a_{m2} \quad a_{m3} \quad \dots \quad a_{mn}) \end{aligned}$$

Righe e colonne di una matrice

- una lista ordinata di n vettori colonna appartenenti a $K^{m,1}$:

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \dots, \ c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Operazioni vettoriali sulle matrici

Sulle matrici si definiscono

- una somma
- un prodotto per scalari

che *generalizzzano* le corrispondenti operazioni sui vettori geometrici.

Somma di matrici

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

si definisce la matrice somma

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

Sinteticamente:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Esempio

Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & -5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \log 7 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,4}$$

allora

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + \log 7 & 6 & 0 & 2 \\ 5 & \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Prodotto per scalari

Dati

$$\lambda \in K,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

si definisce

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

Sinteticamente:

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

Esempio: $-3 \begin{pmatrix} 3 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -12 & \frac{3}{2} \\ 6 & -12 & 0 \end{pmatrix}$

Proprietà

Le operazioni di somma e prodotto per scalari in $K^{m,n}$ soddisfano proprietà analoghe a quelle di somma e prodotto per scalari su vettori geometrici:

(1) (associatività) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(2) (commutatività) $A+B = B+A$

(3) (elemento neutro) esiste un elemento neutro per la somma: è la matrice nulla $O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$: $\forall A \in K^{m,n}\ A + O_{m,n} = A$

(4) (opposto) ogni matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ha un opposto:

$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & & \\ -a_{m1} & & -a_{mn} \end{pmatrix}$: $A + (-A) = O_{m,n}$

Proprietà

(5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

(7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

(8) $1A = A$

Definizione.

Sia $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$. Un insieme X dotato di un'operazione di somma e un'operazione di prodotto per scalari che soddisfano le proprietà (1)–(8) si dice *spazio vettoriale* (su K).

Quindi:

- L'insieme dei vettori geometrici è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$
- $K^{m,n}$ è spazio vettoriale su K

Nota: Con le operazioni definite, $\mathbb{C}^{m,n}$, oltre a essere spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, è anche spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Ma $\mathbb{R}^{m,n}$ non è spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Prodotto scalare di vettori

Generalizzando il prodotto scalare di vettori geometrici, si definisce il prodotto scalare di elementi di K^n: dati

$$\begin{array}{rcl} u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) & \in & K^n \\ v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) & \in & K^n \end{array}$$

sia

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in K$$

Prodotto di matrici

Siano

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ---R_1--- \\ ---R_2--- \\ \dots \\ ---R_m--- \end{pmatrix} \quad \in \quad K^{m,n}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \dots & C_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad \in \quad K^{n,p}$$

Si definisce il *prodotto righe per colonne* delle due matrici:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \dots & & \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} \in K^{m,p}$$

Prodotto di matrici

dove, per $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$:

$$c_{ij} = R_i \cdot C_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}$$

cioè l'elemento di posto (i, j) della matrice prodotto AB è il prodotto (scalare) della i-esima riga di A e della j-esima colonna di B.