

Algebra per Informatica

Foglio di esercizi 3

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o surgettive e determinarne l'immagine:

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$;
- (2) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 5x$;
- (3) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = 5x$;
- (4) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), f(X) = \mathbb{N} \setminus X := \{x \in \mathbb{N} : x \notin X\}$;
- (5) $f : \mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \mathcal{P}(X), f(A, B) = A \cup B$, dove X è un insieme.
- (6) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2, f(x) = (2x, x - 1)$.

Esercizio 2. Costruire delle funzioni che soddisfino le richieste seguenti:

- (1) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ iniettiva e non surgettiva;
- (2) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ surgettiva e non iniettiva;
- (3) $r : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ surgettiva e tale che $r(x, x) = 0 \forall x \in \mathbb{Z}$;
- (4) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ iniettiva e tale che $\emptyset, \mathbb{N} \in h(\mathbb{N})$;
- (5) $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ bigettiva.

Esercizio 3. Siano A, B due insiemi e $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ due funzioni. Provare che:

- (1) se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva;
- (2) se $g \circ f$ è surgettiva allora g è surgettiva.

Esibire un controesempio per mostrare che:

- (a) $g \circ f$ iniettiva non implica g iniettiva;
- (b) $g \circ f$ surgettiva non implica f surgettiva.

Esercizio 4. Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni date da $f(x) = x - 2$ e $g(x) = 1 + x^2$.

- (1) Come sono definite le funzioni $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?
- (2) Esistono numeri reali x per cui $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?
- (3) Le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono uguali?

Esercizio 5. Determinare un insieme A e un'applicazione $f : A \rightarrow A$ tale che $f \circ f = f$, ma $f \neq \text{Id}_A$.

Esercizio 6. Siano $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ data da $f(n) = |n|$ e $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ data da $g(x) = -x$.

- (1) Provare che f e g non sono invertibili (cioè non bigettive) e verificare che $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{N}}$, ma $g \circ f \neq \text{Id}_{\mathbb{Z}}$.
- (2) Determinare un'applicazione $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ diversa da g e tale che $f \circ h = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.
- (3) Determinare una funzione $t : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ diversa da f e tale che $t \circ g = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ la funzione data da $f(n, m) = (n - m, m + 2)$. Stabilire se f ha inversa sinistra, se ha inversa destra e se è invertibile.

Esercizio 8. Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione data da $f(x) = x^2$.

- (1) Stabilire se f è invertibile.
- (2) Determinare tre distinte inverse sinistre per f .
- (3) Esistono inverse destre per f ?