Esercizi

1. Calcolare l'area del triangolo di vertici $A(1,1,1)$, $B(1,0,0)$ e $C(0,0,1)$.

Svolgimento. L'area del triangolo è

$$\frac{1}{2}|(A-C)\wedge(B-C)| = \frac{1}{2}|(\vec{i}+\vec{j})\wedge(\vec{i}-\vec{k})| = \frac{1}{2}|\vec{j}-\vec{k}-\vec{i}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Dati i punti $A(2,1,1), B(1,2,1), C(1,1,2)$, verificare se il triangolo ABC è equilatero.

Svolgimento.

$$\begin{aligned} |(A-B)| = & \quad \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2} \\ |(B-C)| = & \quad \sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ |(C-A)| = & \quad \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Il triangolo è equilatero.

Esercizi

3. Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ versori. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?
   (a) $-1 \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq 1$
   (b) $\vec{u} + \vec{v}$ è un versore
   (c) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ è un versore
   (d) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è un versore

Svolgimento.

(a) Se α è l'angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$, si ha che $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\alpha$, quindi l'affermazione è corretta

(b) $|\vec{i} + \vec{i}| = 2 \neq 1$, quindi l'affermazione non è corretta

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ è un numero, non un vettore, quindi l'affermazione non è corretta

(d) $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$, quindi l'affermazione non è corretta

Esercizi

4. Siano

$$
\begin{aligned}
\vec{u} &= 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \\
\vec{v} &= \vec{i} + \vec{j} \\
\vec{w} &= \vec{u} \wedge \vec{v}
\end{aligned}
$$

Stabilire per ognuna delle affermazioni seguenti se è vera o falsa:

(a) $\vec{w}$ è ortogonale a $3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

(b) $\vec{w}$ è parallelo a $3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

(c) $|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}|$

(d) $\vec{w}$ forma un angolo ottuso con $\vec{j}$

Svolgimento.

(a) Si ha $3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = \vec{u} + \vec{v}$; questo vettore è complanare con $\vec{u}, \vec{v}$ ed è quindi ortogonale a $\vec{w}$. L'affermazione è vera.

(b) $\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j}$ non è parallelo a $3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.
L'affermazione è falsa.

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \neq 0$, quindi $\vec{u}, \vec{v}$ non sono tra loro ortogonali; pertanto $|\vec{w}| \neq |\vec{u}||\vec{v}|$. L'affermazione è falsa.

(d) Usando il calcolo fatto in (b), $\vec{v} \cdot \vec{j} = -1 < 0$. Quindi l'affermazione è vera.

5. Dati i vettori

$$\vec{u} = \vec{i} - h\vec{j}$$
$$\vec{v} = 2h\vec{j} - \vec{k}$$

Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

(a) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono perpendicolari per alcun valore di $h \in \mathbb{R}$
(b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono perpendicolari per ogni $h \in \mathbb{R}$
(c) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli se $h \neq 0$
(d) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono paralleli per alcun $h \in \mathbb{R}$

Svolgimento. Si ha $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2h^2$. Pertanto $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow h = 0$. Quindi le affermazioni (a) e (b) sono false.
Il vettore $\vec{v}$ ha terza componente non nulla, mentre il vettore $\vec{u}$ è non nullo e ha terza componente nulla. Quindi l'affermazione (d) è vera e, di conseguenza, l'affermazione (c) è falsa.

6. Il triangolo che ha come due dei suoi lati i vettori

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

(a) è isoscele ma non equilatero
(b) è equilatero
(c) ha un angolo di $\frac{\pi}{3}$
(d) ha i tre angoli tutti diversi

Svolgimento. Il terzo lato del triangolo è $\vec{u} - \vec{v} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Poiché

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{3}, \qquad |\vec{u} - \vec{v}| = 2\sqrt{2}$$

l'affermazione (a) è vera e le affermazioni (b) e (d) sono false. Poiché un triangolo isoscele con un angolo di $\frac{\pi}{3}$ è equilatero, anche l'affermazione (c) è falsa.

7. Dati i vettori

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{v} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

quali delle seguenti affermazioni sono vere?

(a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è ortogonale a $2\vec{i} - 5\vec{j}$
(b) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è parallelo a $-5\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$
(c) $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{39}$
(d) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ forma un angolo acuto con $\vec{i}$

Svolgimento. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Di conseguenza, l'affermazione (b) è falsa. Poiché $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot (2\vec{i} - 5\vec{j}) = 25 \neq 0$, l'affermazione (a) è falsa. Si ha $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{25 + 9 + 4} = \sqrt{38}$, quindi l'affermazione (c) è falsa. Poiché $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{i} + 5 > 0$, l'affermazione (d) è vera.

Esercizi

8. Dati i vettori

$$\vec{u} \text{ di componenti } (t+2, -2t, 2t+1)$$
$$\vec{v} \text{ di componenti } (0, -1, 1)$$

determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

Svolgimento. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2t + 2t + 1 = 4t + 1$. Pertanto $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \Leftrightarrow t = 0$.

9. Dato il vettore
$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$$
determinare i vettori $\vec{v}$ che soddisfano alle equazioni
$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} & = & \vec{k} \\ |\vec{v}| & = & \sqrt{13} \end{cases}$$

Svolgimento. Sia $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Allora
$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = -v_z\vec{i} - 2v_z\vec{j} + (v_x + 2v_y)\vec{k}$. La condizioni sono quindi equivalenti a $\begin{cases} v_z = 0 \\ v_x + 2v_y = 1 \\ v_x^2 + v_y^2 = 13 \end{cases}$. Si ha pertanto $v_x = 1 - 2v_y$, da cui $(1 - 2v_y)^2 + v_y^2 = 5v_y^2 - 4v_y + 1 = 13$, cioè $5v_y^2 - 4v_y - 12 = 0$.
Segue che $v_y = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{5} = \frac{2 \pm 8}{5}$. I vettori cercati sono quindi
$$-\frac{7}{5}\vec{i} - \frac{6}{5}\vec{j} \quad \text{e} \quad -19\vec{i} + 10\vec{j}$$

Esercizi

10. Dati i vettori

$$\vec{u} \text{ di componenti } (1,0,1)$$
$$\vec{v} \text{ di componenti } (2,1,-1)$$
$$\vec{w} \text{ di componenti } (-1,2,-h)$$

determinare $h \in \mathbb{R}$ in modo che

$$|(\vec{u}+\vec{v}) \wedge \vec{w}| = \sqrt{89}$$

Svolgimento. $|(\vec{u}+\vec{v}) \wedge w|^2 = |(3\vec{i}+\vec{j}) \wedge (-\vec{i}+2\vec{j}-h\vec{k})|^2 =$

$$\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -h \end{vmatrix}\right|^2 = |-h\vec{i}+3h\vec{j}+7\vec{k}|^2 = h^2+9h^2+49 = 10h^2+49.$$

I valori di h cercati sono quelli per cui $10h^2+49=89$, cioè $h=\pm 2$.

Esercizi

11. Dati i vettori

$$\vec{u} \text{ di componenti } (2,1,0)$$
$$\vec{v} \text{ di componenti } (1,0,1)$$
$$\vec{w} \text{ di componenti } (1,1,1)$$

determinare il vettore $\vec{x}$ in modo che valgano le equazioni

$$\begin{cases} \vec{x}\cdot\vec{u} & = & 1 \\ \vec{x}\cdot\vec{v} & = & -1 \\ \vec{x}\cdot\vec{w} & = & 3 \end{cases}$$

Svolgimento. Sia $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Le condizioni sono equivalenti al sistema $\begin{cases} 2a & +b & & = 1 \\ a & & +c & = -1 \\ a & +b & +c & = 3 \end{cases}$. La seconda equazione fornisce $c = -1 - a$. Allora dalla terza si ha che $b = 4$, dalla prima $a = -\frac{3}{2}$, e finalmente $c = \frac{1}{2}$. Quindi $\vec{x} = -\frac{3}{2}\vec{i} + 4\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$.

12. Dati i vettori

$$\vec{u} \text{ di componenti } (1,0,0)$$
$$\vec{v} \text{ di componenti } (2,\frac{1}{2},-1)$$
$$\vec{w} \text{ di componenti } (5,1,-2)$$

determinare per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \vec{x}\cdot\vec{u} & = & 1 \\ \vec{x}\cdot\vec{v} & = & -1 \\ \vec{x}\cdot\vec{w} & = & m \end{cases}$$

ha soluzione. Per tali valori, calcolare $\vec{x}$.

Esercizi

Svolgimento. Sia $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Il sistema di equazioni risulta $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + \frac{1}{2}b - c = -1 \\ 5a + b - 2c = m \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2c = -6 \\ b - 2c = m - 5 \end{cases}$. Il sistema è risolubile se e solo se $m - 5 = -6$, cioè $m = -1$. In tal caso risulta $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2c - 6 \end{cases}$. Le soluzioni sono quindi i vettori $\vec{x} = \vec{i} + (2c - 6)\vec{j} + c\vec{k}$, per $c \in \mathbb{R}$.

13. Dati i vettori

$$\vec{u} \text{ di componenti } (1,-1,2)$$
$$\vec{v} \text{ di componenti } (-2,1,-1)$$
$$\vec{w} \text{ di componenti } (-1,-1,4)$$

esprimere $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{u}, \vec{v}$.

Svolgimento. Si devono trovare, se esistono, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{w} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$, cioè $\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = -1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 4 \end{cases}$. Dalla seconda equazione si ottiene $\lambda_1 = \lambda_2 + 1$, che sostituito nella prima fornisce $\lambda_2 + 1 - 2\lambda_2 = -1$, quindi i valori $\lambda_2 = 2, \lambda_1 = 3$, che soddisfano anche la terza equazione. Pertanto $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Esercizi

14. Dati i vettori

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\\ \vec{v} &= 5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\\ \vec{w} &= \vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

esprimere il vettore

$$\vec{a} = \vec{u} \wedge (\vec{v} - \vec{w})$$

come combinazione lineare di $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Svolgimento. Si cercano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{a} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w}$.

Si ha $\vec{a} = (\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \wedge (5\vec{i} - 2\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 10\vec{j} - 7\vec{k}$.

Dunque si cercano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 10 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -7 \end{cases}$. La prima equazione fornisce $\lambda_1 = 4 - 5\lambda_2$, che sostituito nella seconda dà $4 - 5\lambda_2 - \lambda_2 + \lambda_3 = 10$, cioè $\lambda_3 = 6\lambda_2 + 6$. Rimpiazzando questi valori nella terza equazione si ottiene $8 - 10\lambda_2 + \lambda_2 + 6\lambda_2 + 6 = -7$, da cui $\lambda_2 = 7, \lambda_1 = -31, \lambda_3 = 48$.

Quindi $\vec{a} = -31\vec{u} + 7\vec{v} + 48\vec{w}$.

Esercizi

15. Dati i vettori

$$\vec{u} \text{ di componenti } (1,0,1)$$
$$\vec{v} \text{ di componenti } (2,1,1)$$
$$\vec{w} \text{ di componenti } (-1,3,-1)$$

- ricavare l'espressione di $\vec{i}$ come combinazione lineare di $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
- trovare l'angolo α tra i vettori $\vec{w}$ e $\vec{w}' = \vec{u} \wedge \vec{w}$

Svolgimento.

- Si cercano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{i} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w}$, cioè $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$. Dalla differenza tra la prima e la terza equazione si ottiene $\lambda_2 = 1$, da cui $\lambda_3 = -\frac{1}{3}, \lambda_1 = -\frac{4}{3}$. Pertanto $\vec{i} = -\frac{4}{3}\vec{u} + \vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w}$.
- Il vettore $\vec{w}'$ è ortogonale a $\vec{w}$, quindi $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

16. Dati i vettori

$$\vec{u} \text{ di componenti } (1,-1,1)$$
$$\vec{v} \text{ di componenti } (1,1,0)$$
$$\vec{w} \text{ di componenti } (2,-2,1)$$

trovare le componenti del vettore $\vec{a}$ tale che

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{a} & = & \vec{v} \\ \vec{w} \cdot \vec{a} & = & 6 \end{cases}$$

Svolgimento. Sia $\vec{a} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Il sistema è

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} \\ (2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) = 6 \end{cases}$$

, equivalente a

$$\begin{cases} -b - c = 1 \\ a - c = 1 \\ a + b = 0 \\ 2a - 2b + c = 6 \end{cases}$$

. La terza equazione fornisce $a = -b$, quindi le prime due danno $b = -c - 1$, sicché dall'ultima si ottiene $2c + 2 + 2c + 2 + c = 6$, ovvero $c = \frac{2}{5}$ e di conseguenza $b = -\frac{7}{5}, a = \frac{7}{5}$. Si ottiene quindi che le componenti di $\vec{a}$ sono $\left(\frac{7}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

17. Dati i vettori

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{b} = -\vec{i} + \vec{k}$$

- determinare il vettore di modulo 3, perpendicolare ad $\vec{a}$ e a $\vec{b}$, e formante un angolo acuto con $\vec{i}$
- determinare la proiezione ortogonale di $\vec{b}$ lungo $\vec{a} + \vec{b}$

Esercizi

Svolgimento.

- Sia $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ un vettore. Le condizioni date sono espresse sulle componenti da $\begin{cases} \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ -\alpha+\gamma=0 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9 \\ \alpha>0 \end{cases}$ Le prime due equazioni equivalgono a $\alpha=\gamma=-\beta$, e la terza fornisce quindi $3\alpha^2=9$, cioè $\alpha=\gamma=\pm\sqrt{3}, \beta=\mp\sqrt{3}$. Dall'ultima condizione si ottiene $\alpha=\gamma=\sqrt{3}, \beta=-\sqrt{3}$. Il vettore cercato è quindi $\sqrt{3}\vec{i}-\sqrt{3}\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}$.
- La proiezione cercata è il vettore $\frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|^2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{(-\vec{i}+\vec{k})\cdot(2\vec{j}+2\vec{k})}{8}(2\vec{j}+2\vec{k})=\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$.

Esercizi

18. A quale condizione devono soddisfare i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ affinché
    - $\vec{u} + \vec{v}$ sia perpendicolare a $\vec{u} - \vec{v}$?
    - $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$?

Svolgimento.

- I vettori $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ sono le due diagonali del parallelogramma (eventualmente degenere) di lati $\vec{u}, \vec{v}$. Queste diagonali sono tra loro perpendicolari se e solo se il parallelogramma è un rombo, cioè se e solo se $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
- Applicato nel punto d'applicazione di $\vec{u}$, il vettore $\vec{u} + \vec{v}$ è il terzo lato del triangolo (eventualmente degenere) che ha come lati:
    - il vettore $\vec{u}$
    - il vettore $\vec{v}$ applicato nel secondo estremo di $\vec{u}$

  pertanto $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ se e solo se $\vec{u}, \vec{v}$ sono paralleli e concordi.

19. Dati vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tali che

$$|\vec{u}| = 2, \quad |\vec{v}| = 3, \quad |\vec{w}| = 5$$
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

calcolare $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

Svolgimento. Le condizioni sui vettori implicano che $\vec{u}, \vec{v}$ sono paralleli e concordi, e $\vec{w} = -(\vec{u} + \vec{v})$, in particolare $\vec{w}$ è parallelo e discorde con $\vec{u}, \vec{v}$. Pertanto
$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} = |\vec{u}||\vec{v}| - |\vec{v}||\vec{w}| - |\vec{w}||\vec{u}| = 6 - 10 - 15 = -19.$