Slovenská Technická Univerzita – Fakulta elektrotechniky a informatiky, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

Vizualizácia priamej kinematickej úlohy

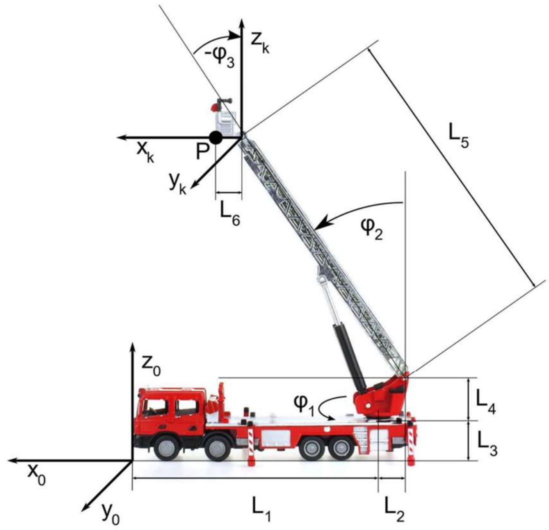
Robotika, zadanie č. 1

Autor:	**Matúš Nebus**
Dátum vypracovania:	**9.4.2025**
Ročník štúdia:	**2. Bc.**
Študijný program:	**Robotika a kybernetika**

Zadanie:

Hasičské auto s výsuvnou plošinou. Zariadenie tohto typu slúži na evakuáciu osôb z výškových budov. Je preto nesmierne dôležité pomôcť požiarnikom pri realizácií výpočtov pri polohovaní takéhoto zariadenia. Aj vy práve teraz môžete prispieť vašimi robotickými vedomosťami k záchrane ľudských životov.

Majme svetový súradnicový systém $x_0y_0z_0$ podľa obrázka č. 1. V koncovom súradnicovom systéme $x_ky_kz_k$ sa nachádza bod P, ktorý predstavuje aj koncový bod plošiny resp. kontaktný bod plošiny s budovou. Štyri hydraulické pohony zabezpečujú: rotáciu základne (φ_1), nakláňanie rebríka (φ_2), vysúvanie rebríka (L_5) a nakláňanie plošiny (φ_3). Konfigurácia takejto automobilovej plošiny pri prevoze nasledovná: $L_5 = L_{5min}$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 90^o$ a $\varphi_3 = -180^o$.



Obrázok č. 1 - Požiarna výšková automobilová plošina

Úlohy:

1. Pomocou homogénnej transformácie odvoďte vzťah pre výpočet transformačnej matice T_{0k} medzi svetovým súradnicovým systémom $x_0y_0z_0$ a súradnicovým systémom $x_ky_kz_k$.

2. Pomocou odvodenej transformačnej matice T_{0k} z úlohy č. 1 vyriešte priamu kinematickú úlohu pre koncový bod P požiarnického rebríka s plošinou a uveďte vzťah pre výpočet polohy koncového bodu P vo svetovom súradnicovom systéme, ak sú dané: L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, φ_1, φ_2 a φ_3. Jednotlivé homogénne transformačné matice vypíšte a dosaďte do nich správne argumenty (dĺžky, uhly).

3. Vykreslite zjednodušený mechanizmus a vykreslite aj jednotlivé pomocné súradnicové systémy od nultého až po k-ty (x-červenou farbou, y-zelenou, z-modrou).

4. Vykreslite obálky pracovného priestoru v bázovej rovine mechanizmu X_0Z_0, tiež aj v rovine X_0Y_0, ak platí : $L_1 = 10$ [m], $L_2 = 1$ [m], $L_3 = 1$ [m], $L_4 = 1$ [m], $L_5 = <10, 40>$ [m], $L_6 = 1$[m], $\varphi_1 \in \langle -\infty, \infty \rangle$, $\varphi_2 \in \langle 0^o, 90^o \rangle$, $\varphi_3 \in \langle 0^o, -180^o \rangle$.

Vypracovanie:

Pri vypracovaní som postupoval podľa vzorového riešenia kinematickej úlohy zo štvrtého cvičenia. S každým kĺbom alebo posunutím som si spojil súradnicový systém, počnúc od svetového, až po posledný, 8-my. Medzi každým súradnicovým systémom je transformačná matica – rotačná alebo translačná. Využil som vzory týchto matíc z cvičenia, a dosadil som do nich konkrétne hodnoty uhlov (φ_1, φ_2, φ_3) alebo posunutí (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5). Postupoval som od prvej transformačnej matice až po poslednú, kým som sa nedostal do ôsmeho súradnicového systému.

$$T_{x0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{z1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{z2} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & -sin(\varphi_1) & 0 & 0 \\ sin(\varphi_1) & cos(\varphi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{z4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_{y5} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & 0 & sin(\varphi_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\varphi_2) & 0 & cos(\varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{z6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{y7} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi_3) & 0 & cos(-\varphi_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(-\varphi_3) & 0 & sin(-\varphi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_3) & 0 & -sin(\varphi_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin(\varphi_3) & 0 & cos(\varphi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vynásobením týchto transformačných matíc (pri dodržaní poradia) som dostal jednu celkovú maticu T_{08}.

$$T_{08} = T_{x0} * T_{z1} * R_{z2} * T_{x3} * T_{z4} * R_{y5} * T_{z6} * R_{y7}$$

$$T_{08} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) * \cos(\varphi_2 + \varphi_3) & -\sin(\varphi_1) & \sin(\varphi_2 + \varphi_3) * \cos(\varphi_1) & L_2 * \cos(\varphi_1) + L_5 * \sin(\varphi_2) * \cos(\varphi_1) - L_1 \\ \sin(\varphi_1) * \cos(\varphi_2 + \varphi_3) & cos(\varphi_1) & \sin(\varphi_2 + \varphi_3) * \sin(\varphi_1) & \sin(\varphi_1) * (L_2 + L_5 * \sin(\varphi_2)) \\ -\sin(\varphi_2 + \varphi_3) & 0 & \cos(\varphi_2 + \varphi_3) & L_3 + L_4 + L_5 * \cos(\varphi_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektor, ktorý spája bod P s počiatkom svetového súradnicového systému, si označím $\boldsymbol{p}$.

Vektor, ktorý spája počiatok posledného, ôsmeho súradnicového systému s bodom P, si označím $\boldsymbol{p_8}$. Z obrázka č. 1 vidieť, že bod P má v ôsmom súradnicovom systéme súradnice $x_P = L_6, y_P = 0, z_P = 0$. To znamená, že poznám vektor $\boldsymbol{p_8}$:

$$\boldsymbol{p_8} = \begin{bmatrix} L_6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor $\boldsymbol{p}$ získam teda vynásobením vektora $\boldsymbol{p_8}$ maticou T_{08} zľava:

$$\boldsymbol{p} = T_{08} * \boldsymbol{p_8}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} L_2 * cos(\varphi_1) - L_1 + L_6 * cos(\varphi_2 + \varphi_3) * cos(\varphi_1) + L_5 * cos(\varphi_1) * sin(\varphi_2) \\ sin(\varphi_1) * \left(L_2 + L_5 * sin(\varphi_2)\right) + L_6 * cos(\varphi_2 + \varphi_3) * sin(\varphi_1) \\ L_3 + L_4 - L_6 * sin\left(\varphi_2 + \varphi_3\right) + L_5 * cos(\varphi_2) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prvé tri hodnoty vektora $\boldsymbol{p}$ sú súradnice bodu P v svetovom súradnicovom systéme.

```
syms L1 L2 L3 L4 L5 L6 phi1 phi2 phi3 real %pouzivam symbolic math toolbox
%definujem transformacne matice
%....
%vypocet a vypisanie vyslednej matice
T08 = simplify(Tx0 * Tz1 * Rz2 * Tx3 * Tz4 * Ry5 * Tz6 * Ry7);
disp('Výsledná matica T08 =')
disp(T08)
%vypocet a vypisanie vektoru p
p8 = [L6; 0; 0; 1];
p = simplify(T08 * p8);
disp('Výsledný vektor p =')
disp(p)
```

Obrázok č. 2 - pseudokód, ukážka počítania matice T_{08} a vektora ***p***

Ďalej bolo úlohou vykresliť zjednodušený mechanizmus hasičského auta s výsuvnou plošinou. Pracoval som v Matlabe. V kóde som si definoval body b0 až b7, v ktorých je posunutie alebo rotácia (obr. č. 3). Tie som potom vykreslil a spojil (pozri tabuľku na nasledujúcej strane).

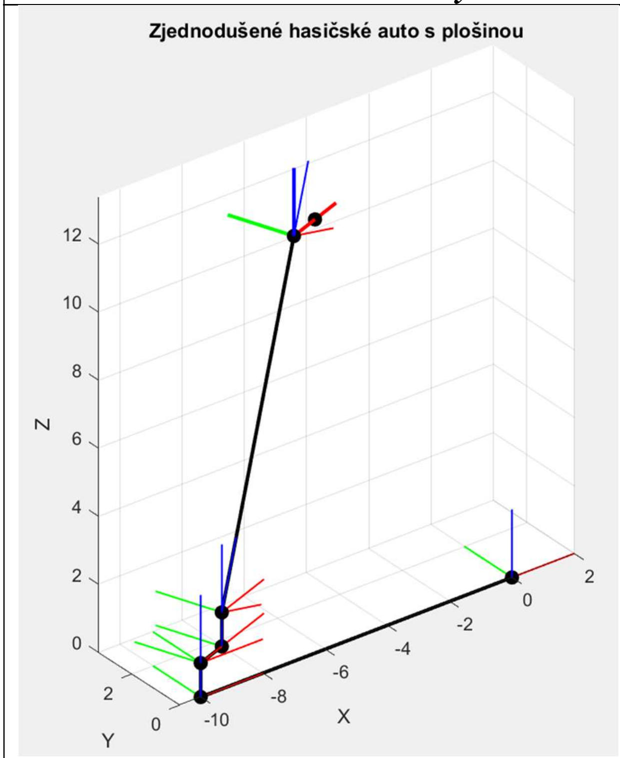
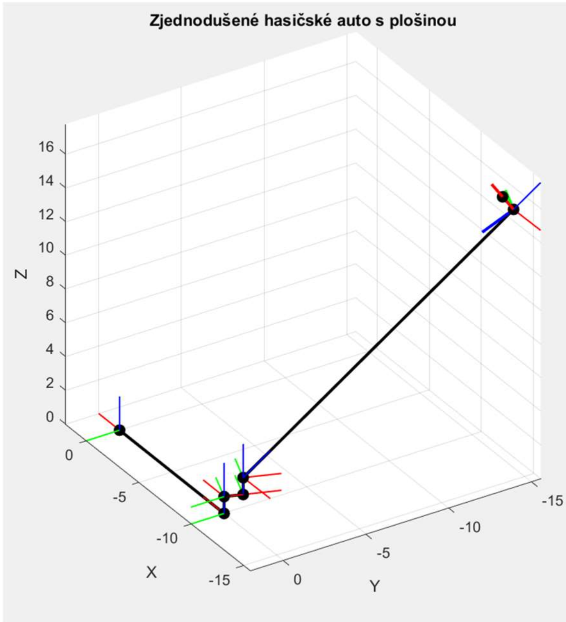
```
%definujem si kazdu maticu poriadne, vynasobenu vsetkymi pred nou
T00 = eye(4);   %matica 4x4 s jednotkami v diagonale
T01 = Tx0 * T00;
T02 = T01 * Tz1;
T03 = T02 * Rz2;
T04 = T03 * Tx3;
T05 = T04 * Tz4;
T06 = T05 * Ry5;
T07 = T06 * Tz6;
T08 = T07 * Ry7;

% suradnice jednotlivych bodov kde je rotacia alebo translacia
b0 = T00(1:3,4); %ale to su iba ich polohy, aby som ich mohol vykreslit
b1 = T01(1:3,4);
b2 = T02(1:3,4);
b3 = T03(1:3,4);
b4 = T04(1:3,4);
b5 = T05(1:3,4);
b6 = T06(1:3,4);
b7 = T07(1:3,4);
P  = p(1:3);
```

Obrázok č. 3

Jednotlivé pomocné súradnicové systémy som kreslil pomocou funkcie na obrázku č. 4 ktorá vykreslí osi príslušnými farbami v danom bode, pomocou danej transformačnej matice.

```
function nakresli_os(T)
    bod = T(1:3,4);
    os_x = bod + 2*T(1:3,1);
    os_y = bod + 2*T(1:3,2);
    os_z = bod + 2*T(1:3,3);
    plot3([bod(1),os_x(1)],[bod(2),os_x(2)],[bod(3),os_x(3)],'r','LineWidth',1);
    plot3([bod(1),os_y(1)],[bod(2),os_y(2)],[bod(3),os_y(3)],'g','LineWidth',1);
    plot3([bod(1),os_z(1)],[bod(2),os_z(2)],[bod(3),os_z(3)],'b','LineWidth',1);
end
```

Obrázok č. 4

<table>
<tr><th colspan="2">Vykreslenie mechanizmu:</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Konfiguráca prislúchajúca k obrázku (v metroch a stupňoch):</th></tr>
<tr><td>L1=10;
L2=1;
L3=1;
L4=1;
L5=10;
L6=1;
phi1=deg2rad(20);
phi2=deg2rad(20);
phi3=deg2rad(-20);</td><td>L1=10;
L2=1;
L3=1;
L4=1;
L5=20;
L6=1;
phi1=deg2rad(250);
phi2=deg2rad(45);
phi3=deg2rad(-170);</td></tr>
</table>

Poslednou úlohou bolo vykresliť obálky pracovného priestoru v rovinách X_0Z_0 a X_0Y_0, ak platí : $L_1 = 10$ [m], $L_2 = 1$ [m], $L_3 = 1$ [m], $L_4 = 1$ [m], $L_5 = <10, 40>$ [m], $L_6 = 1$[m], $\varphi_1 \in \langle -\infty, \infty \rangle$, $\varphi_2 \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, $\varphi_3 \in \langle 0^\circ, -180^\circ \rangle$.

Aby som zabezpečil, že prierez rovinou X_0Z_0 je spojený, na žiadnom mieste neprerušený, som toto vykresľovanie robil postupne, v piatich častiach (pripúšťam, že možno existuje aj objektívne jednoduchší postup). Vždy som dva alebo tri parametre (vhodné uhly alebo dĺžky) zafixoval, a cez ostatné som postupne prechádzal for-cyklom s malým inkrementom. Body som pridával do poľa, na záver som ich všetky vykreslil. Pre celú rovinu X_0Z_0, ktorá je modrou farbou, bol uhol φ_1 vždy buď 0° alebo 180°. Pre oblúk s väčším polomerom sú fixné hodnoty $L_5 = 40$ [m] a $\varphi_3 = -90^\circ$, avšak v prípadoch, keď bol uhol φ_2 rovný 0° alebo 90°, som musel prechádzať for-cyklom aj cez časť možných hodnôt uhla φ_3. Podobne aj pri oblúku s menším polomerom.

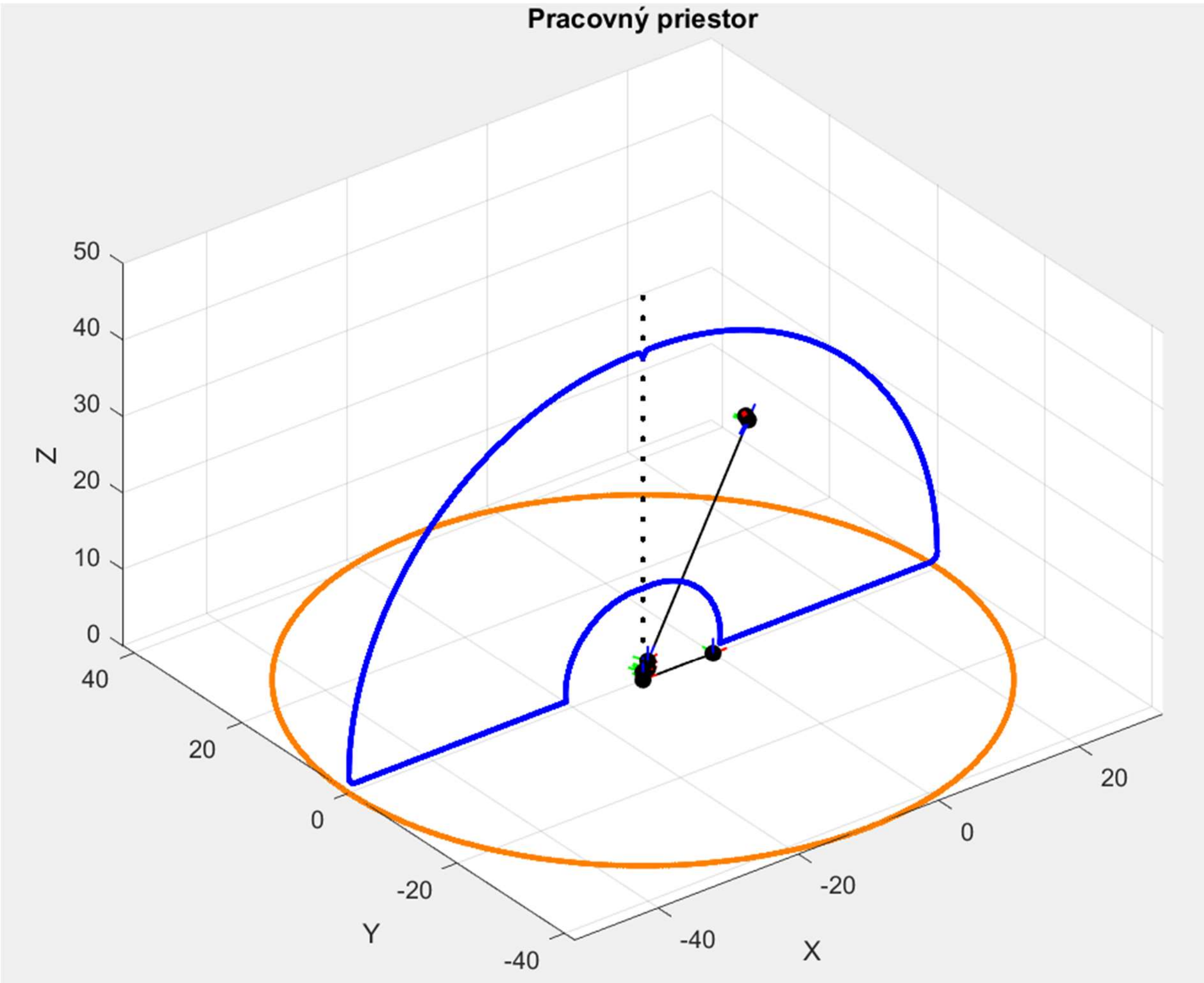
Priemet pracovného priestoru do osi X_0Y_0 som vykreslil pri fixných hodnotách $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_3 = -90^\circ$ a $L_5 = 40$ [m]. Pred pridaním bodov do poľa som im však ešte nastavil Z – súradnicu na 0, aby sa zobrazené body na obrázku naozaj nachádzali presne v rovine X_0Y_0.

```
%ROVINA X0Z0 (modra):
bodyXZ = [];

%velky obluk
L5=40;
phi3=deg2rad(-90);
phi2_velkyObluk = deg2rad(0:0.25:90);
for phi1=[0,pi]
    for phi2 = phi2_velkyObluk
        p = pocitajp(phi1, phi2, phi3, L1, L2, L3, L4, L5, L6);
        bodyXZ = [bodyXZ p(1:3)];
    end
end
```

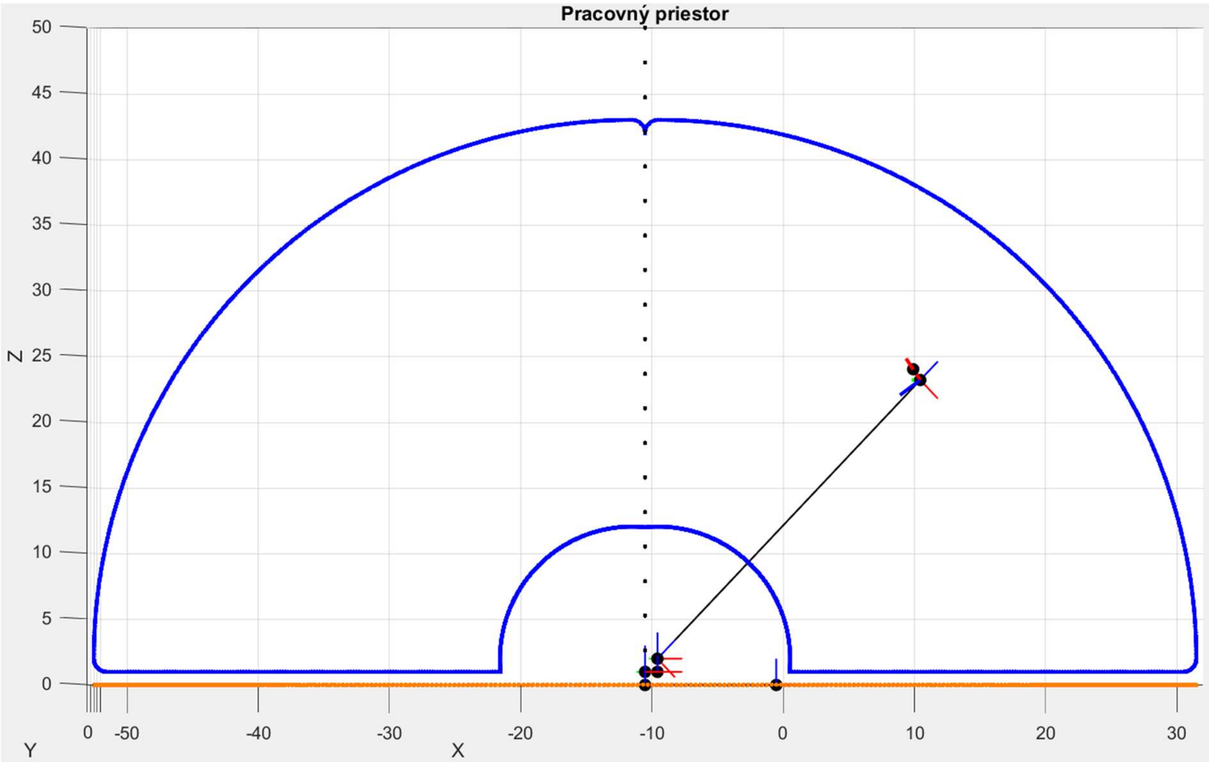
Obrázok č. 5 - príklad pridávania bodov do poľa pre následné vykreslenie

```
function p = pocitajp(phi1, phi2, phi3, L1, L2, L3, L4, L5, L6)
    Tx0 = [1 0 0 -L1; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
    Tz1 = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 L3; 0 0 0 1];
    Rz2 = [cos(phi1) -sin(phi1) 0 0; sin(phi1) cos(phi1) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
    Tx3 = [1 0 0 L2; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
    Tz4 = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 L4; 0 0 0 1];
    Ry5 = [cos(phi2) 0 sin(phi2) 0; 0 1 0 0; -sin(phi2) 0 cos(phi2) 0; 0 0 0 1];
    Tz6 = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 L5; 0 0 0 1];
    Ry7 = [cos(phi3) 0 sin(phi3) 0; 0 1 0 0; -sin(phi3) 0 cos(phi3) 0; 0 0 0 1];
    T07 = Tx0*Tz1*Rz2*Tx3*Tz4*Ry5*Tz6*Ry7;
    p8 = [L6;0;0;1];
    p = T07 * p8;
end
```

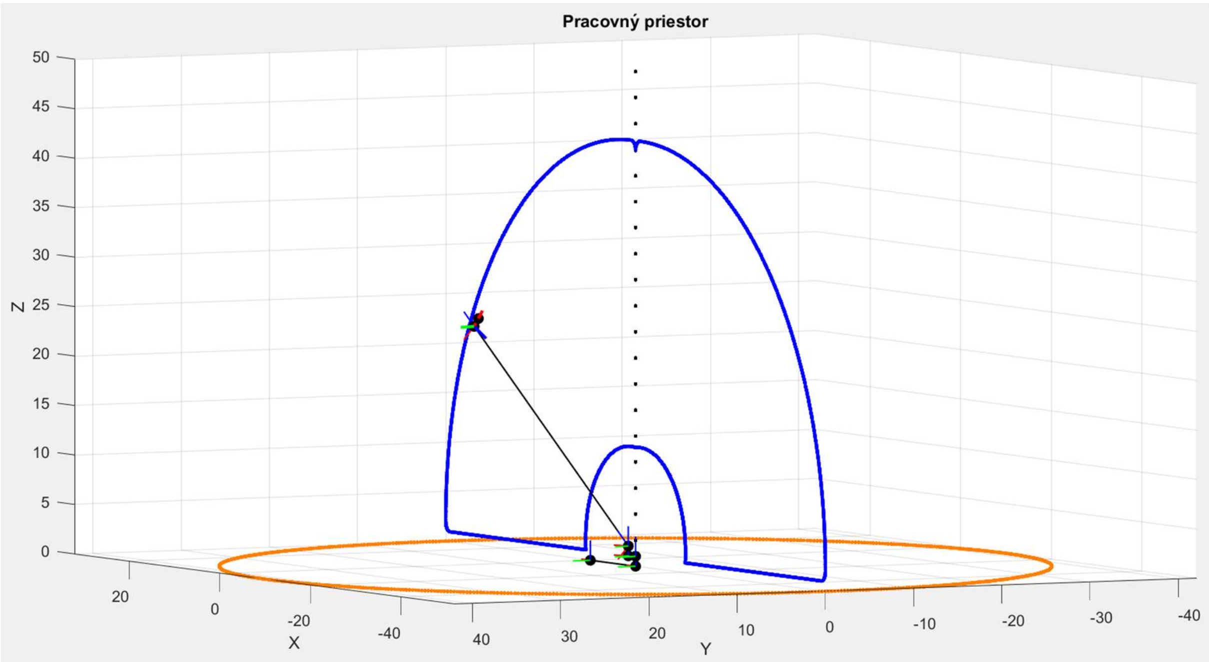
Obrázok č. 6 - funkcia, ktorá vypočíta vektor p



Obrázok č. 7



Obrázok č. 8



Obrázok č. 9

Vyššie na obrázkoch č. 7, 8 a 9 je vykreslený pracovný priestor hasičského auta s výsuvnou plošinou v rovinách X_0Z_0 a X_0Y_0. Na obrázkoch je aj zjednodušený mechanizmus, pridal som aj čiernymi bodkami znázornenú os rotácie. Keby okolo nej rotoval modrý útvar, vznikla by celá 3D obálka pracovného priestoru.

Zhodnotenie:

Pomocou homogénnych transformačných matíc som odviedol vzťah pre výpočet polohy koncového bodu plošiny vo svetovom súradnicovom systéme. V Matlabe som vykreslil zjednodušený mechanizmus hasičského auta s plošinou a pracovný priestor v rovinách X_0Z_0 a X_0Y_0.

K vypracovanému zadaniu prikladám v .zip archíve súbor „ROB_zad1.m“, v ktorom je väčšina kódu. Po spustení vidno obrázky, pričom na začiatku skriptu sa dajú meniť všetky uhly a dĺžky. Prikladám taktiež súbor „ROB_zad1_vypocetT08_p.m“, v ktorom je výpočet matice T_{08} a vektora $\boldsymbol{p}$. Oba tieto súbory možno spustiť ako bežný skript v Matlabe.

Zadanie som vypracoval pomocou mojich poznámok z cvičení a ChatGPT.

Zadanie som vypracoval sám. Čestne prehlasujem, že som ho neskopíroval a nikomu inému neposkytol. Nech mi je Isaac Asimov svedkom.