Príprava na skúšku

OTÁZKY Z TEÓRIE

1. a) Definujte karteziánsky súčin množín A, B a binárnu reláciu z množiny A do množiny B.
   b) Pre dané množiny napíšte ich karteziánsky súčin a dve (3,4,...) neprázdne relácie.
2. Definujte reláciu na množine A a vlastnosti reflexívnosť, symetria, antisymetria a tranzitívnosť.
3. Definujte zobrazenie a vlastnosti zobrazení - injektívnosť, surjektívnosť a bijektívnosť.
4. Definujte čiastočne usporiadanú množinu a lineárne usporiadanú množinu. Uveďte príklad čiastočne usporiadanej množiny a príklad lineárne usporiadanej množiny.
5. Definujte najmenší a minimálny prvok čiastočne usporiadanej množiny.
6. Definujte najväčší a maximálny prvok čiastočne usporiadanej množiny.
7. Definujte množinu horných ohraničení a supremum čiastočne usporiadanej množiny.
8. Definujte množinu dolných ohraničení a infimum čiastočne usporiadanej množiny.
9. Definujte priesek a spojenie dvojice prvkov čiastočne usporiadanej množiny a uveďte ich vlastnosti.
10. Definujte zväz, distributívny a komplementárny zväz.
11. Definujte boolovský zväz a vyslovte vetu o komplemente v boolovskom zväze.
12. Definujte boolovskú funkciu a vyslovte vetu o počte boolovských funkcií n premenných.
13. Definujte abecedu výrokovej logiky.
14. Definujte pojmy z výrokovej logiky: tautológia, kontradikcia, splniteľná formula, splniteľný systém formúl.
15. Definujte pravdivostné ohodnotenie a pravdivostnú hodnotu (aký je medzi nimi rozdiel?).
16. Napíšte de Morganove pravidlá, zákon nahradenia implikácie, distributívnosť, zákon dvojitej negácie.
17. Definujte pojmy z výrokovej logiky: elementárna konjunkcia a disjunkcia, disjunktívny normálny tvar (DNT) a konjunktívny normálny tvar (KNT). Napíšte úplný konjunktívny (disjunktívny) normálny tvar boolovskej funkcie $f(x, y, z)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 v argumentoch 010, 001, 110, 100. (príklad môže byť iný)
18. Vyslovte vetu o normálnom tvare.
19. Vysvetlite, čo rozumieme pod pojmom formula α vyplýva zo systému formúl $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \models \alpha$). Z definície rozhodnite, či tvrdenie pod čiarou je dôsledkom tvrdení nad čiarou.

    Nie je pravda, že Peter hraje futbal aj hokej.
    Peter nehraje futbal. (Príklad môže byť iný)
    ―――――
    Peter hraje hokej.
20. Definujte pojmy: graf, incidencia, susednosť, izomorfizmus grafov.
21. Vyslovte vetu o vzťahu medzi stupňami vrcholov a počtom hrán v grafe.
22. Definujte pojmy: súvislý graf, komponent grafu, most, artikulácia.
23. Definujte pojem komplement grafu, uveďte vzťah medzi počtom hrán v grafe G a jeho komplemente $\overline{G}$.
24. Definujte pojmy: vzdialenosť vrcholov v grafe, excentricita vrchola, priemer, polomer, stred grafu.
25. Napíšte aspoň 3 vlastnosti matice incidencie a matice susednosti pre graf.
26. Napíšte aspoň 3 vlastnosti matice incidencie a matice susednosti pre digraf.
27. Definujte pojem strom, napíšte vzťah medzi počtom hrán a počtom vrcholov v neorientovanom strome.
28. Definujte pravidelný graf stupňa k.
29. Definujte pojmy: regulárne farbenie vrcholov grafu a chromatické číslo grafu. Uveďte, aké hodnoty môže nadobúdať chromatické číslo v grafe s maximálnym stupňom vrchola m.
30. Definujte pojmy: regulárne farbenie hrán graf a chromatický index grafu. Uveďte, aké hodnoty môže nadobúdať chromatický index v grafe s maximálnym stupňom vrchola m.
31. Definujte hamiltonovský graf a napíšte aspoň dve postačujúce podmienky a dve nutné podmienky pre hamiltonovské grafy.
32. Napíšte Eulerovu vetu o planárnych grafoch.
33. Definujte stupeň vrchola, vonkajší a vnútorný stupeň vrchola v digrafe a napíšte vzťah medzi nimi. Definujte prameň a ústie.
34. Definujte pojmy: súvislý digraf, silne súvislý digraf a silný komponent. Znázornite diagram digrafu s aspoň 6 vrcholmi, ktorý je súvislý, ale nie je silne súvislý. Vyznačte jeho silné komponenty.
35. Definujte orientovaný strom, koreň stromu a koreňový strom. Znázornite dva orientované stromy: jeden koreňový a druhý taký, ktorý nie je koreňový. V koreňovom strome vyznačte jeho koreň.
36. Definujte pojmy: binárny strom, hĺbka binárneho stromu, kompletný binárny strom hĺbky h.
37. Definujte váhu kostry v ohodnotenom grafe a minimálnu kostru.
38. Definujte dĺžku cesty a dĺžku minimálnej cesty medzi dvoma vrcholmi v ohodnotenom grafe.

Príklady

Praktická časť bude obsahovať:

- príklad z výrokovej logiky – splniteľnosť formuly, relácia vyplývania, boolovské funkcie – úplný normálny tvar, minimalizácia pomocou Karnaughovej mapy, **pozor, aj pre funkciu 4 premenných**;
- príklad z grafov z toho, čo bolo na 2. písomke;
- príklad na hamiltonovský, eulerovský alebo planárny graf alebo farbenie grafov;
- príklad na digrafy – acyklickosť digrafov, maticová reprezentácia a jej použitie pre výpočet počtu kostier, koreňových kostier;
- grafový algoritmus – minimálna kostra v ohodnotenom grafe alebo vzdialenosť od daného vrchola v ohodnotenom grafe.

---

(1) a) **Karteziánsky súčin** $A \times B$ množín A a B je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a,b), kde $a \in A$ a $b \in B$. Formálne zapisujeme $A \times B = \{(a,b);\ a \in A, b \in B\}$

Binárna relácia z množiny A do množiny B je ľubovoľná podmnožina R karteziánskeho súčinu $A \times B$. Ak $A = B$, hovoríme o binárnej relácii na množine A, čo je ľubovoľná podmnožina $R \subset A^2$

b) $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$

$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

$R_1 = \{(1,3),(2,4)\}$

$R_2 = \{(1,4),(2,3)\}$

(2) Relácia na množine A je ľubovoľná podmnožina kart. súčinu $A \times A$

Reflexívnosť - ak pre všetky $a \in A$ platí aRa

Symetria - ak pre všetky $a,b \in A$ platí, že ak aRb, tak aj bRa

Antisymetria - ak pre všetky $a,b \in A$ platí, že ak aRb aj bRa, tak $a = b$

Tranzitívnosť - ak pre všetky $a,b,c \in A$ platí, že ak aRb a bRc, tak aj aRc

(3) **Zobrazenie** z množiny A do množiny B je binárna relácia $f \subset A \times B$ s vlastnosťami:

a) ku každému $a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že $(a,b) \in f$,

b) ak $(a,b) \in f$ a $(a,c) \in f$, tak $b = c$

- **surjektívne** - ak ku každému $b \in B$ existuje aspoň jedno $a \in A$ tak, že $b = f(a)$
- **injektívne** - ak z $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ vyplýva $f(a_1) \neq f(a_2)$
- **bijektívne** - ak je surjektívne, aj injektívne

(4) **ČUM** - Binárna relácia R sa nazýva ČUM, ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna (RAT)

$A = \{a,b\}$ $R = (A, |)$ $R = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}$

LUM - Binárna relácia R sa nazýva LUM, ak je ČUM, ak každé dva prvky množiny A sú porovnateľné

$R = (-\infty, \infty)$

(5) **Najmenší prvok** - prvok $a \in A$ v $(A;R)$, ak pre každý prvok $x \in A$ platí aRx

Minimálny prvok - prvok $a \in A$ v $(A;R)$, ak neexistuje prvok $x \in A$, $x \neq a$ taký, že xRa

(6) **Najväčší prvok** - prvok $a \in A$ v $(A;R)$, ak pre každý prvok $x \in A$ platí xRa

Maximálny prvok - prvok $a \in A$ v (A,R), ak neexistuje prvok $x \in A$, $x \neq a$ taký, že aRx

(7) **Množina horných ohraničení** - $h(M) = \{x \in A;\ (\forall a \in M: aRx)\}$

Supremum - najmenší prvok množiny $h(M)$ - $\sup M$

(8) **Množina dolných ohraničení** - $h(M) = \{x \in A;\ (\forall a \in M: xRa)\}$

Infimum - najväčší prvok množiny $d(M)$ - $\inf M$

(9) **Priesek** - $\inf\{x,y\} = x \dot\wedge y$

Spojenie - $\sup\{x,y\} = x \dot\vee y$

Nech $(L;R)$ je zväz. Potom pre ľubovoľné $x,y,z \in L$ platí:

$x \dot\vee x = x$	$x \dot\wedge x = x$	- idempotentnosť
$x \dot\vee y = y \dot\vee x$	$x \dot\wedge y = y \dot\wedge x$	- komutatívnosť
$x \dot\vee (y \dot\vee z) = (x \dot\vee y) \dot\vee z$	$x \dot\wedge (y \dot\wedge z) = (x \dot\wedge y) \dot\wedge z$	- asociatívnosť
$x \dot\vee (y \dot\wedge x) = x$	$x \dot\wedge (y \dot\vee x) = x$	- absorbcia

(10) **Zväz** je algebraický systém $(L; \dot\vee, \dot\wedge)$, kde $L \neq \emptyset$ a pre operáciu prieseku $\dot\wedge$ a spojenia $\dot\vee$ platia vlastnosti: idempotentnosť, komutatívnosť, asociatívnosť a absorbcia

Distributívny zväz je vtedy, ak pre všetky $x,y,z \in L$ platí:

- $x \dot\wedge (y \dot\vee z) = (x \dot\wedge y) \dot\vee (x \dot\wedge z)$
- $x \dot\vee (y \dot\wedge z) = (x \dot\vee y) \dot\wedge (x \dot\vee z)$

Komplementárny zväz je vtedy, ak každý jeho prvok má komplement

(11) **Boolovský zväz** je vtedy, ak je distributívny a komplementárny. Každý prvok má práve 1 komplement

Komplement - prvok $x' \in L$ nazývame komplementom prvku $x \in L$ práve vtedy, keď:

- $x \dot\wedge x' = 0$ a $x \dot\vee x' = 1$

jediný najmenší prvok jediný najväčší prvok

(12) **Boolovská funkcia** - nech $D = \{0,1\}$. Funkcia $f: D^n \to D$ nazývame boolovská funkcia n premenných

Počet boolovských funkcií n premenných - 2^n

(13) **Abeceda výrokovej logiky** je množina pozostávajúca zo symbolov pre

a) výrokové premenné - $p, q, r \ldots$ predpokladáme že ich máme k dispozícii nekonečne veľa

b) logické spojky - negácia, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

c) pomocné symboly - zátvorky

Ľubovoľnú postupnosť prvkov abecedy výrokovej logiky nazývame slovo nad abecedou výrokovej logiky.

(14) **Tautológia** - formula, ktorá je pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných

Kontradikcia - formula, ktorá je nepravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných

Splniteľná formula - formula, pri ktorej existuje pravdivé ohodnotenie výrokových premenných

Splniteľný systém formúl - systém formúl, pri ktorej existuje také ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom sú pravdivé všetky formuly systému

premenných

je

(15) **Pravdivostné ohodnotenie** v výrokových premenných je priradenie hodnoty 0 alebo 1 každej z týchto

Pravdivostná hodnota $v(\alpha)$ výrokovej formuly α pri ohodnotení u výrokových premenných priradenie hodnoty 0 alebo 1 pre formulu v súlade s nasledujúcimi pravidlami

Ak $v(\alpha) = 1$ hovoríme, že formula α je pravdivá pri ohodnotení v.

Ak $v(\alpha) = 0$ hovoríme, že formula α je nepravdivá pri ohodnotení v.

(16) **de Morganové pravidlá**
- $\overline{\alpha \wedge \beta} \models\!\dashv (\bar\alpha \vee \bar\beta)$
- $\overline{\alpha \vee \beta} \models\!\dashv (\bar\alpha \wedge \bar\beta)$

zákon nahradenia implikácie
- $\alpha \Rightarrow \beta \models\!\dashv \bar\alpha \vee \beta$

distributívne zákony
- $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \models\!\dashv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
- $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \models\!\dashv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

zákon dvojitej negácie
- $\bar{\bar\alpha} \models\!\dashv \alpha$

(17) **Elementárna konjunkcia** - formula, ktorá má tvar $p_1^{c_1} \wedge p_2^{c_2} \wedge \ldots \wedge p_n^{c_n}$

Elementárna disjunkcia - formula, ktorá má tvar $p_1^{c_1} \vee p_2^{c_2} \vee \ldots \vee p_n^{c_n}$

DNT - formula, ktorá je disjunkciou elementárnych konjunkcií

KNT - formula, ktorá je konjunkciou elementárnych disjunkcií

pre formulu

KNT - $(\bar x \wedge y \wedge \bar z) \vee (\bar x \wedge \bar y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar y \wedge \bar z)$

DNT - $(x \vee \bar y \vee z) \wedge (\bar x \vee y \vee \bar z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\bar x \vee y \vee \bar z)$

(18) **Normalizovaný tvar bool. funkcie** je jej reprezentácia pomocou logických operácií, ktoré zodpovedajú pravdivostným kombináciám, pre kt. nadobúda hodnotu 0 alebo 1.

(19) Hovoríme, že formula φ **vyplýva zo systému formúl S** práve vtedy, keď je pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula zo systému S. Zápis: $S \models \varphi$

Z príkladu vyplýva, že Peter hraje hokej

(20) **Graf G** - usporiadaná dvojica (V,H), kde V je nejaká neprázdna množina a H je množina dvojprvkových podmnožín množiny V. V - vrcholy grafu G, H - hrany grafu G. Zápis: $G(V,H)$

Incidencia - hrana $\{u,v\}$ inciduje s vrcholmi u a v

Susednosť - dva vrcholy sú susedné, ak incidujú s tou istou hranou

- dve hrany nazývame susedné, ak incidujú s tým istým vrcholom

Izomorfizmus grafov - dva grafy sa nazývajú izomorfné, ak existuje bijektívne zobrazenie $f: V \to V'$ také, že pre všetky $u,v \in V$ platí:

$\{u,v\} \in H$ práve vtedy, keď $\{f(u), f(v)\} \in H'$

Zobrazenie f nazývame izomorfizmus grafov G a G'. Zapisujeme $G \cong G'$

(21) **Vzťah vrcholov a hrán grafu** - počet vrcholov s nepárnym stupňom je v každom grafe číslo párne. Špeciálne ak k je nepárne, tak pravidelný graf stupňa k musí mať párny počet vrcholov

(22) **Súvislý graf** - ak pre každé dva jeho vrcholy u a v existuje v ňom cesta z u do v. Opak súvislého - nesúvislý

Komponent grafu - každý jeho maximálny súvislý podgraf (taký súvislý podgraf, že po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne súvislý graf.

Most - hrana grafu, ktorú ak z grafu vynecháme, poruší sa súvislosť grafu

Artikulácia - vrchol grafu, ktorý ak z grafu vynecháme, poruší sa súvislosť grafu

(23) **Komplement grafu** - graf $\bar G$, ktorý má rovnaký počet vrcholov ako G, ale hrany, ktoré v pôvodnom chýbali, sú prítomné, a naopak.

Vzťah počtu hrán v G a $\bar G$ - ak G má e hrán, potom jeho komplement $\bar G$ bude mať $n(n-1)/2 - e$ hrán, kde n je počet vrcholov grafu G

(24) **Vzdialenosť vrcholov v grafe** - $d(u,v)$ je dĺžka najkratšej cesty od u do v

Excentricita vrchola - $u \in V$ je číslo $e(u,G) = \max_{v \in V} d(u,v)$

Polomer grafu - číslo $P(G) = \max_{v \in V} e(v,G)$

Priemer grafu - číslo $r(G) = \min_{v \in V} e(v,G)$

Stred grafu - množina vrcholov, ktorých excentricita je rovná polomeru

(25) **Matica susednosti pre graf:**
- Symetria - po diagonále je symetrická
- Diagonála s nulovými hodnotami - neexistujú hrany z rovnakého do rovnakého vrchola
- Záznam spojenia medzi vrcholmi - 1 - je hrana, 0 - nie je hrana

Matica incidencie pre graf:
- Počet jednotiek v i-tom riadku znamená stupeň i-tého stupňa.
- V každom stĺpci sú presne dve jednotky
- Počet riadkov je počet vrcholov, počet stĺpcov je počet hrán

(26) **Matica susednosti pre digraf:**
- Asymetria - po diagonále nemusí byť symetrická
- Hodnoty v diagonále môžu byť nenulové
- Záznam spojenia medzi vrcholmi - 1 je spojenie, 0 - nie je

Matica incidencie pre digraf:
- Reprezentácia hrán a vrcholov - -1, 0, 1
- Hodnoty v riadku môžu byť nenulové
- Nulová diagonála

(27) **Strom** - neprázdny súvislý graf, ktorý neobsahuje kružnice

Vzťah |H| a |V| v neorientovanom strome - $|H| = |V| - 1$

(28) **Pravidelný graf stupňa k** - ak má všetky vrcholy stupňa k

(29) **Regulárne farbenie vrcholov** - ak vrcholy incidentné s tou istou hranou (susedné vrcholy) majú rôzne farby

Chromatické číslo - χ
- najmenšie číslo k také, že graf G je k-chromatický (ak na jeho zafarbenie stačí k farieb)
- $\chi(G) \leq m+1$, kde m - maximum stupňov vrchola

(30) **Regulárne farbenie hrán** - ak žiaden vrchol neinciduje s dvoma alebo viacerými hranami rovnakej farby

Chromatický index - $\bar\chi$
- číslo k, ktoré je rovné najmenšiemu počtu farieb, potrebných na regulárne zafarbenie hrán grafu
- $m \leq \bar\chi(G) \leq m+1$, kde m - maximum stupňov vrcholov

(31) **Hamiltonovský graf** - konečný, súvislý, musí obsahovať aspoň jeden vrchol a nesmie obsahovať mosty ani artikulácie

podmienka 1 - $|V| = n$, $n \geq 3$, ak stupeň každého vrcholu grafu je aspoň $\frac{n}{2}$

podmienka 2 - ak pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy u,v grafu $G = (V,H)$, $|V| = n$, $n \geq 3$, platí:

$$\delta(u) + \delta(v) \geq n$$

Eulerová veta o planárnych grafoch

(32) Nech $G = (V,H)$ je súvislý planárny graf. Nech r je počet oblastí grafu. Potom platí:

$$|H| - |V| + 2 = r$$

(33) **Stupeň vrchola** - počet hrán spojených s daným vrcholom

Vnútorný stupeň vrchola v digrafe - $\delta^-(v)$ - počet hrán, ktorých vrchol v je koncovým vrcholom

Vonkajší stupeň vrchola v digrafe - $\delta^+(v)$ - počet hrán, ktorých vrchol v je začiatočným vrcholom

Vzťah medzi - $\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |H|$

Prameň - $\delta^+(v) > 0$, $\delta^-(v) = 0$

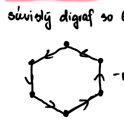
Ústie - $\delta^+(v) = 0$, $\delta^-(v) > 0$

(34) **Súvislý digraf** - ak je súvislý graf G, ktorý vznikol zrušením orientácie v $\vec G$

Silne súvislý digraf - ak pre ľubovoľné dva vrcholy $u,v \in V$ existuje spojenie z $u \to v$ aj $v \to u$

Silný komponent - každý maximálne súvislý poddigraf digrafu $\vec G$

súvislý digraf so 6 vrcholmi



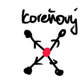
- nemá silné komponenty

(35) **Orientovaný strom** - ak každej hrane stromu T priradíme práve jednu z dvoch možných orientácií

Koreň stromu - vrchol v v koreňovom strome

Koreňový strom - $\vec T_v$ s aspoň dvoma vrcholmi, v kt. z vrcholu v existuje dráha do všetkých ostatných vrcholov

koreňový strom



(36) **Binárny strom** - koreňový strom $\vec T_v$, v kt. má každý vrchol vonkajší stupeň 2 alebo 0

Hĺbka binárneho stromu - excentricita jeho koreňa $h(\vec T_v) = \max_{u \in V} \vec\delta(v,u)$

Kompletný binárny strom hĺbky h - binárny strom $\vec T_v$, v ktorom je $\vec\delta(v,u) = k$ pre každý list u.

(37) **Váha kostry v ohodnotenom grafe** - súčet hranových ohodnotení všetkých hrán z H'

Minimálna kostra - kostra grafu G s minimálnou váhou

(38) **Dĺžka cesty** - nech S je cesta z v_i do v_j v ohodnotenom grafe G, je to súčet ohodnotení hrán cesty S

Dĺžka minimálnej cesty medzi dvoma vrcholmi - minimálna z dĺžok ciest medzi v_i a v_j ($d_w(v_i, v_j)$)