№6

№4

$\theta = a$

$b = 1 - 2\theta$ т.к. $a\int_{-1}^{1} dx + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = 1$ $\left(\text{т.к.} \int_{-\infty}^{\infty} p\,dx = 1\right) \Rightarrow b = 1 - 2\theta$)

т.к. $b \geq 0$ $\Downarrow$ $\theta \in (0, \frac{1}{2})$

$$M[\xi] = \int_{-1}^{1} x \cdot \theta\, dx + \frac{2 \cdot (1 - 2\theta)}{2} + \frac{0 \cdot (1 - 2\theta)}{2} =$$

$$= 1 - 2\theta$$

$$\alpha_2 = M[\xi^2] = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot p(x)\, dx + \frac{4(1 - 2\theta)}{2} =$$

$$= \theta \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + 2 - 4\theta = 2 - \frac{10}{3}\theta$$

$$D[\xi] = 2 - \frac{10}{3}\theta - (1 - 2\theta)^2 = 1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2$$

ОММ

$$\alpha_1 = \hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \Rightarrow 1 - 2\theta = \bar{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_1 = \left(\frac{1 - \bar{x}}{2}\right)$$

$$M[\hat{\theta}_1] = \frac{1}{2} - \frac{M[\bar{x}]}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\theta) = \theta$$ – несмещенность $\oplus$

$$D[\hat{\theta}_1] = D\left[\frac{1}{2} - \frac{\bar{x}}{2}\right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D[\xi] = \frac{1}{4n} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2\right) \to 0$$

по дост. усл. состоятельности $\Rightarrow$ состоятельность $\oplus$

ОМП

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta) = (1-2\theta)^m \cdot \theta^{n-m}$$

$$\ln L = \ln(1-2\theta) \cdot m + (n-m) \cdot \ln\theta \to \max$$

$\theta \in (0, \frac{1}{2})$

$$(\ln L)'_\theta = \frac{-2 \cdot m}{1-2\theta} + \frac{n-m}{\theta} = 0$$

$$(\ln L)''_{\theta} = -2m \cdot 2 \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^2 + (-1)(n-m) \cdot \frac{1}{\theta^2} < 0 \Rightarrow \max \ +$$

$$\frac{2m}{1-2\theta} = \frac{n-m}{\theta}$$

$$2m \cdot \theta = (n-m)(1-2\theta)$$

$$n - 2n\theta - m + \cancel{2m\theta} - \cancel{2m\theta} = 0$$

$$\tilde{\theta} = \frac{(n-m)}{2n} = \frac{1}{2}(1-\vartheta)$$

несмещенность:

$$\begin{pmatrix} M[\vartheta] = p \\ D[\vartheta] = \frac{p(1-p)}{n} \end{pmatrix}$$

$$M[\tilde{\theta}] = M[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\vartheta] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\vartheta] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2\theta) = \theta$$ — несмещенность +

состоятельность:

$$D[\tilde{\theta}] = \frac{1}{4} D[\vartheta] = \frac{1}{4}\left(\frac{(1-2\theta)\cdot 2\theta}{n}\right) = \frac{2\theta(1-2\theta)}{4n} \to 0$$ при $n \to \infty$

по дост. усл. состоятельна +

Эффективность: Здесь все θ это θ_1 - первая оценка

а) регулярн. модели:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)(dx) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta} p(x,\theta)\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\theta} p(x,\theta)\,dx + \frac{\partial}{\partial\theta}(1-2\theta) = 2-2=0 \quad ① +$$

$$I(\theta) = \int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 p(x,\theta)\,dx + \left(\frac{\partial \ln P(\theta)}{\partial\theta}\right)^2 p(\theta) =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\theta}\right)^2\cdot\theta\,dx + \frac{4}{(1-2\theta)^2}\cdot(1-2\theta) = \frac{2}{\theta}+\frac{4}{1-2\theta}$$

$$= \frac{2(1-2\theta)+4\cdot(\theta)}{\theta(1-2\theta)} = \frac{2-4\theta+4\theta}{\theta-2\theta^2} = \frac{2}{\theta(1-2\theta)}$$

$\theta\in(0,\frac{1}{2})$

$I(\theta)>0$, непр.

регулярность +

б) регулярность оценки:

1) модель регулярна +

2) несмещенная +

3) $D[\hat\theta]$ огр. на $\forall$ компакте из $(0,\frac{1}{2})$ +

выполнены п. а) и п. б) => выполнены усл. нер-ва Крамера

$$D[\theta] \geq \frac{1}{n\cdot I(\theta)} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2\cdot n}$$

$$\frac{1}{4n}\cdot\left(1+\frac{2}{3}\theta-4\theta^2\right) \geq \frac{\theta}{2n}\cdot(1-2\theta)$$

$$1+\frac{2}{3}\theta-\cancel{4\theta^2} \geq 2\theta-\cancel{4\theta^2}$$

$$1+\frac{2}{3}\theta > 2\theta$$

эффективность) здесь все $\tilde\theta_1$ это θ_2 - вт. оценки

вторая оценка $\tilde\theta = \frac{1}{2}(1-\partial)$, $M[\partial] = p = 1-2\theta$

$D[\partial] = \frac{(1-2\theta)\cdot 2\theta}{n}$, $D[\tilde\theta] = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$

модель уже проверили на регулярность $\oplus$

б) , модель регулярна $\oplus$

2) несмещ. $\oplus$

3) $D[\tilde\theta] = \frac{(1-2\theta)\cancel{2}\theta}{2n}$ на $\forall$ компакте из $(0, \frac{1}{2})$ огр. $\oplus$

$\Downarrow$

нер-во Кр.-Рао

$$D[\tilde\theta] \geq \frac{1}{n \cdot I(\theta)} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$$D[\tilde\theta] = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$\Downarrow$

$$\frac{\theta(1-2\theta)}{2n} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$\Downarrow$

данная оценка эффективна, а т.к. у нас эффек. $\exists!$, то предыдущая оценка не эффек.