

# Лабораторная работа 1.4.8

## Измерение модуля Юнга стержней методом акустического резонанса.

Матвей Галицын

Б01-411

November 28, 2024

### 1 Введение

**Цель работы:** исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне; измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров; измерить модули Юнга различных материалов.

**В работе используются:** генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

### 2 Теоретическая сведения

#### 2.1 Акустические волны в стержне

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его модуль Юнга  $E$ . Согласно закону Гука, если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение  $\sigma$ , действующее вдоль некоторой оси  $x$  (напряжения по другим осям при этом отсутствуют), то в этом элементе возникнет относительная деформация вдоль этой же оси  $\varepsilon = \Delta x/x_0$ , определяемая соотношением

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (1)$$

Если с помощью кратковременного воздействия в некотором элементе твёрдого тела создать малую деформацию, она будет далее распространяться в среде в форме волны, которую называют акустической или звуковой. Распространение акустических волн обеспечивается за счёт упругости и инерции среды. Волны сжатия/растяжения, распространяющиеся вдоль оси, по которой происходит деформация, называются продольными. Как будет строго показано далее, скорость  $u$  распространения продольной акустической волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность среды. Заметим, что размерность модуля Юнга  $E$  равна  $[\text{Н}/\text{м}^2]$  и совпадает с размерностью механического напряжения (или давления). Характерные значения модуля Юнга металлов лежат в диапазоне  $E \sim 10^{10} \div 10^{12}$  Па, так что при плотности  $\rho \sim 10^4$  кг/м<sup>3</sup> характерные значения скорости звука в твёрдых телах составляют  $u \sim 10^3 - 10^4$  м/с. В общем случае звуковые волны в твёрдых телах могут быть не только

продольными, но и поперечными — при этом возникает деформация сдвига перпендикулярно распространению волны. Кроме того, описание распространения волн в неограниченных средах осложняется тем обстоятельством, что при отличном от нуля коэффициенте Пуассона напряжение вдоль одной из осей вызывает деформацию не только в продольном, но и в поперечном направлении к этой оси. Таким образом, общее описание звуковых волн в твёрдых телах — относительно непростая задача. В данной работе мы ограничимся исследованием наиболее простого случая упругих волн, распространяющихся в длинных тонких стержнях. Рассмотрим стержень постоянного круглого сечения, радиус  $R$  которого много меньше его длины  $L$ . С точки зрения распространения волн стержень можно считать тонким, если длина  $\lambda$  звуковых волн в нём велика по сравнению с его радиусом:  $\lambda R$ . Такая волна может свободно распространяться только вдоль стержня, поэтому можно считать, что стержень испытывает деформации растяжения и сжатия только вдоль своей оси (заметим, что в обратном пределе коротких волн  $\lambda R$  стержень следует рассматривать как безграничную сплошную среду). Если боковые стенки тонкого стержня свободны (т.е. стержень не сжат с боков), то его деформации описывается законом Гука в форме (1), и, следовательно, его упругие свойства определяются исключительно модулем Юнга среды. Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины  $L$ , испытывает отражение от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается целое число полуволн, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Измеряя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга материала стержня. Акустический метод является одним из наиболее точных методов определения упругих характеристик твёрдых тел.

#### 2.2 Установка. Резонансная частота

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12.

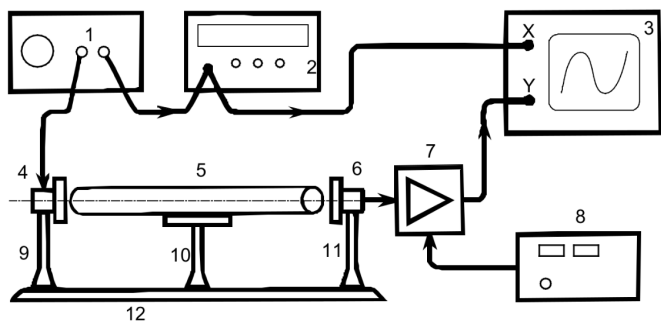


Рис. 1: схема установки.

1 - генератор звуковой частоты; 2 - частотомер; 3 - осциллограф; 4 - электромагнит-возбудитель; 5 - образец; 6 - электромагнит-приемник; 7 - усилитель звуковой частоты; 8 - блок питания усилителя; 9, 11 - стойки крепления электромагнитов; 10 - стойка крепления образца; 12 - направляющая;

Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подаётся сигнал синусоидальной формы: протекающий в катушке электро- магнита ток создаёт пропорциональное ему магнитное поле, вызывающее периодическое воздействие заданной частоты на торец стержня (к торцам стержней из немагнитных материалов прикреплены тонкие стальные шайбы). Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электро-магнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические. Принцип работы электромагнитных датчиков описан подробнее ниже. Сигнал с выхода генератора поступает на частотомер 2 и на вход канала X осциллографа 3. ЭДС, возбуждаемая в регистрирующем электро-магните 6, пропорциональная амплитуде колебаний торца стержня, усиливается усилителем 7 и подаётся на вход канала Y осциллографа. Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне. Наблюдения в режиме X-Y позволяют сравнить сигналы генератора и датчика, а также облегчает поиск резонанса при слабом сигнале.

Как следует из формулы (2), модуль Юнга материала  $E$  может быть найден по скорости распространения акустических волн в стержне  $u$  и его плотности  $\rho$ . Для определения скорости  $u$  в данной работе используется метод акустического резонанса. Это явление состоит в том, что при частотах гармонического возбуждения, совпадающих с собственными частотами колебаний стержня  $f \approx f_{\text{рез}}/Q$ , резко увеличивается амплитуда колебаний, при этом в стержне образуется стоячая волна. Возбуждение продольных колебаний в стержне происходит посредством воздействия на торец стержня периодической силой, направленной вдоль его оси. Зная номер гармоники  $n$  и соответствующую резонансную частоту  $f_n$ , на которой наблюдается усиление амплитуды колебаний, можно вычислить скорость распространения

продольных волн в стержне:

$$u = 2L \frac{f_n}{n} \quad (3)$$

Таким образом, для измерения скорости  $u$  необходимо измерить длину стержня  $L$  и получить зависимость резонансной частоты от номера резонанса  $n$ . Если все теоретические предположения справедливы, эта зависимость будет прямой пропорциональностью. Следует отметить, что в реальном металлическом стержне могут возбуждаться не только продольные, но и поперечные (в частности, изгибные) колебания стержня. При этом каждому типу колебаний соответствует не одна, а целый спектр частот. Таким образом, стержень «резонирует» не только на частотах, определяемых формулой (15), но и на множестве других частот. Для того чтобы отличить нужные нам резонансные частоты от «паразитных», следует провести предварительные расчёты и не принимать во внимание резонансы, не описываемые зависимостью (15). Скажем также несколько слов о точности измерения резонансной частоты. В первую очередь отметим, что в идеальном случае резонанс достигался бы при строгом совпадении частот  $f = f_n$  (а амплитуда в резонансе стремилась бы к бесконечности). Однако в реальности возбуждение стоячей волны возможно при относительно малом отклонении частоты от резонансной — амплитуда колебаний как функция частоты  $A(f)$  имеет резкий максимум при  $f = f_n$ .

Именно конечная ширина резонанса  $\Delta f$  определяет в основном погрешность измерения частоты в нашем опыте. Используемые в работе металлические стержни являются весьма высокочастотными системами. Поэтому ширина резонанса оказывается довольно малой, что приводит к необходимости тонкой настройки частоты генератора (при  $f \sim 5$  кГц ширина резонанса  $\Delta f$  оказывается порядка нескольких герц). Кроме того, время установления резонансных колебаний, которое можно оценить как

$$\tau_{\text{уст}} \sim \frac{1}{\Delta f} \sim \frac{Q}{f}, \quad (4)$$

оказывается весьма велико, из-за чего поиск резонанса нужно проводить, меняя частоту генератора очень медленно.

### 3 Оборудование

Генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

### 4 Результаты измерений и обработка данных

1. Измерим плотность всех предоставленных нам материалов:

2. Включим генератор.

3. Длина всех исследуемых стержней дана:  
 $L = (600 \pm 0.5)$  мм.

4. Исследуем по порядку медный, дюралюминиевый и стальной стержни на резонанс.

Таблица 1: плотность материалов

№	Название материала	m, г	V, 10 <sup>-6</sup> м <sup>3</sup>	ρ, кг·м <sup>-3</sup>
1	Медь	40.98	4.52	9066.4
2	Алюминий	12.49	4.52	2763.3
3	Сталь	35.15	4.52	7776.5

Таблица 2: плотность материалов

	f, кГц - частота резонанса материала		
n	Медь	Алюминий	Сталь
1	3.13	4.01	4.13
2	6.49	8.15	8.27
3	9.74	12.05	12.39
4	12.98	16.08	16.53
5	16.25	20.11	20.65

5. Приведем графики зависимости частоты от номера резонанса:

6. По полученным угловым коэффициентам вычислим скорость распространения звуковой волны в стержнях, по которой найдем модуль Юнга. Случайную погрешность определения углового коэффициента вычисляем как

$$\delta_k^{rand} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left( \frac{\langle f^2 \rangle}{\langle n^2 \rangle} - \bar{k}^2 \right)}$$

Тогда относительная погрешность момента инерции:

$$\varepsilon_u = \sqrt{2 \left( \frac{\delta f}{f} \right)^2 + 2 \left( \frac{\delta L}{L} \right)^2}$$

А относительная погрешность момента инерции:

$$\varepsilon_u = 2\varepsilon_U + \varepsilon_f$$

Таким образом, получаем итоговый результат:

Таблица 3: Рассчитанные угловые коэффициенты, скорости акустической волны, модули Юнга

	Медь	Алюминий	Сталь
k, кГц	3.25	4.02	4.13
U, м/с	3900	4824	4956
E, ГПа	137.1	64.3	191.1
ε <sub>k</sub>	0.0010	0.0008	0.0005
ε <sub>U</sub>	0.0011	0.0009	0.0006
ε <sub>E</sub>	0.02	0.02	0.02

$$E_{\text{мед}} = (137.1 \pm 2.7) \text{ ГПа},$$

$$E_{\text{ал}} = (64.3 \pm 1.3) \text{ ГПа},$$

$$E_{\text{ст}} = (191.1 \pm 3.8) \text{ ГПа}$$

## 5 Добротность колебательной системы

Проведем дополнительные измерения в окрестности 1-го резонанса для меди, чтобы получить

Таблица 4: АЧХ

№	Амплитуда, кл	f, КГц
идеальный случай ( $A_{max}$ )		
1	8	4.2527
увеличение частоты		
2	6	4.2537
4	4	4.2543
5	2	4.2572
уменьшение частоты		
6	6	4.2523
7	4	4.2513
8	2	4.2489

добротность: Если по точкам прикинуть примерно график и найти частоты на которых  $A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ , то разница между частотами будет  $\Delta f \approx 2$  Гц. В таком случае добротность можно вычислить следующим образом:

$$Q = \frac{f(A_{max})}{\Delta f} \approx 2000$$

## 6 Обсуждение результатов

В результате работы мы:

- Нашли добротность медного стержня как колебательной системы.
- Получили зависимость  $f(n)$ . Как нетрудно убедиться по рис. 2 – 4, во всех случаях аппроксимация прямой действительно применима, причем с очень хорошей точностью.
- Так как наше теоретическое предположение выполнялось, на его основе вычислили скорость звуковой волны во всех данных материалах.
- Получили следующие модули Юнга для меди, алюминия и стали:

$$E_{\text{мед}} = (137.1 \pm 2.7) \text{ ГПа},$$

$$E_{\text{ал}} = (64.3 \pm 1.3) \text{ ГПа},$$

$$E_{\text{ст}} = (191.1 \pm 3.8) \text{ ГПа}$$

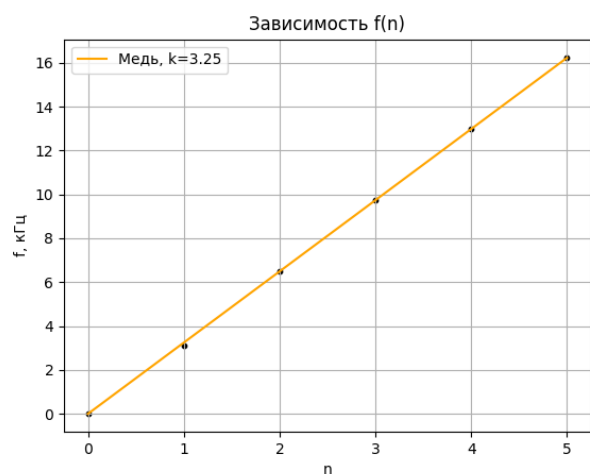


Рис. 2: График зависимости частоты акуст. колеб  $f(n)$  для меди

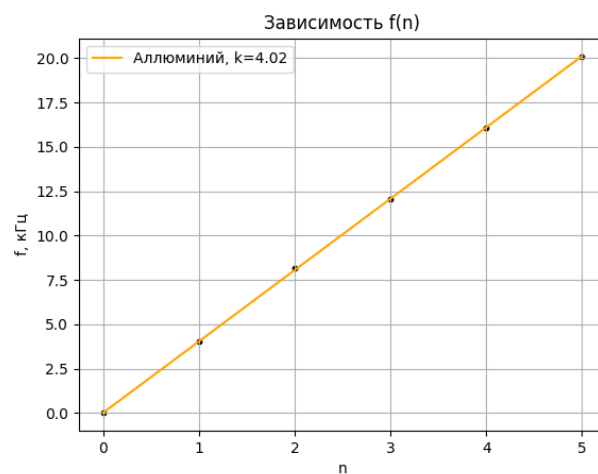


Рис. 3: График зависимости частоты акуст. колеб  $f(n)$  для алюминия

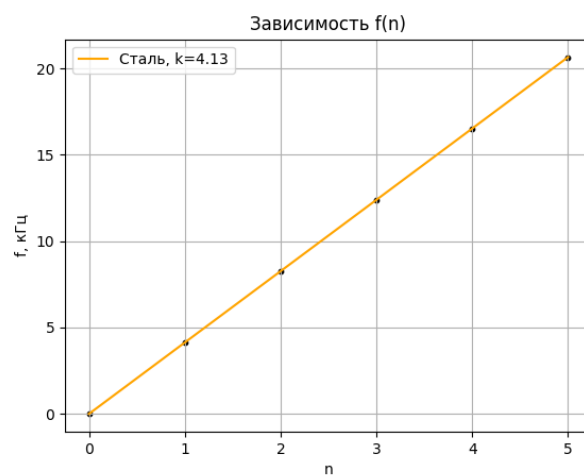


Рис. 4: График зависимости частоты акуст. колеб  $f(n)$  для стали