

Лабораторная работа 1.2.5

Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Матвей Галицын

Б01-411

October 28, 2024

1 Аннотация

В работе исследуется вынужденная прецессия гироскопа, устанавливается зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа, определяется скорость вращения ротора гироскопа и сравнивается со скоростью рассчитанной по скорости прецессии.

2 Теоретические сведения

2.1 Вывод прецессии для элементарного гироскопа

Уравнения движения твердого тела можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Момент импульса твердого тела в главных осях x, y, z равен:

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z,$$

где I_x, I_y, I_z - главные моменты инерции, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Быстро вращающееся тело, для которого, например,

$$I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, I_y\omega_y$$

принято называть гироскопом. Рассмотрим самый простейший случай гироскопа. Возьмем маховик, вращающийся вокруг оси Z.

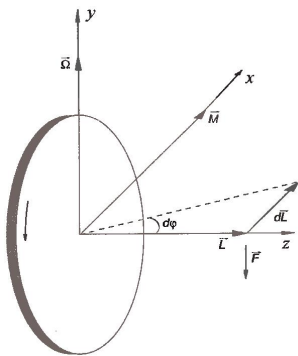


Рис. 1: Маховик

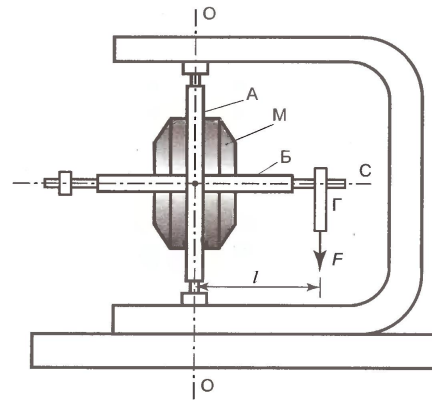


Рис. 2: Схема экспериментальной установки

Считаем, что

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad w_z = w_0$$

Если теперь подействовать на ось маховика, то маховик начнет обращаться вокруг оси Y. Это и называется прецессией. Считаем $L\Omega \ll L\omega_0$. Так как появился момент вдоль оси X, то справедливо следующее равенство $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$. Очевидно, что $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$. Момент импульса тела: $L = I_z w_z = I_z w_0$. Окончательно имеем:

$$M = \Omega I_z w_z \sin(\alpha) \Rightarrow \Omega = \frac{M}{I_z w_z \sin(\alpha)} = \frac{m_{cargo} g l_c \sin(\alpha)}{I_z w_0 \sin(\alpha)} = \frac{m_{cargo} g l_c}{I_z w_0},$$

где m_{cargo} - масса подвешенного груза, l_c - расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа (карданова подвеса).

Таким образом:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z w_0}$$

2.2 Момент инерции вдоль оси Z

Момент инерции ротора относительно оси симметрии Z измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_0 и модуля кручения проволоки f :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции $I_{cylinder}$. Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем

$$I_0 = I_{cylinder} \frac{T_0^2}{T_{cylinder}^2},$$

где $T_{cylinder}$ - период крутильных колебаний цилиндра.

3 Оборудование и инструментальные погрешности

В работе используются: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

Линейка: $\delta \pm 0.5$ мм

Штангенциркуль: $\delta \pm 0.5$ мм (маркировка производителя)

4 Результаты измерений и обработка данных

Расстояние от центра масс гироскопа до подвеса: $l = 120$ мм

4.1 Измерение момента инерции гироскопа

Диаметр цилиндра $d = 0.0784$ м, его масса $m = 1.6163$ кг \Rightarrow момент инерции цилиндра: $I_{cylinder} = \frac{mr^2}{2} = \frac{md^2}{8} = 1.242 \cdot 10^{-3}$ кг·м²

Время вращения цилиндра $\tau_{cyl} = 31.1$ с, кол-во оборотов $N_{cyl} = 8 \Rightarrow$ период обращения цилиндра:

$$T_{cyl} = 3.888 \text{ с}$$

Время вращения ротора $\tau_0 = 21.1$ с, кол-во оборотов $N_0 = 7 \Rightarrow$ период крутильных колебаний ротора гироскопа: $T_0 = 3.014$ с

Таким образом момент инерции ротора гироскопа $I_0 = I_{cyl} \frac{T_0^2}{T_{cyl}^2} = 7.464 \cdot 10^{-4}$ кг·м²

Погрешность измерения времени, связанная с человеческим глазом: $\Delta t = 0.1c$

Относительная погрешность момента инерции: $\varepsilon_{I_0} = \sqrt{2 \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 + 2 \left(\frac{\Delta t}{\tau_0}\right)^2 + 2 \left(\frac{\Delta t}{\tau_{cyl}}\right)^2} = 0.01 = 1\%$

4.2 Измерение частоты вращения ротора гироскопа

4.2.1 Через момент силы тяжести

Проводим измерения для поиска Ω . Измеряем τ - время вращения гироскопа вокруг вертикальной оси, N - полное число оборотов вокруг вертикальной оси за время τ .

$$\Omega = 2\pi \frac{N}{\tau}$$

$$M = 2\pi I_z \nu \cdot \Omega \text{ (M - произведение mgl)}$$

Заполняем *таблицу 1*

Таблица № 1					
№	m, г	τ , с	N	Ω , c^{-1}	M, м·н
1	56.7	182	1	0.0345	0.068
2	91.1	112	1	0.0561	0.109
3	141.9	141	2	0.0891	0.170
4	217.4	139	3	0.1356	0.261
5	328.4	91	3	0.2071	0.394

Строим график зависимости $M(\Omega)$.

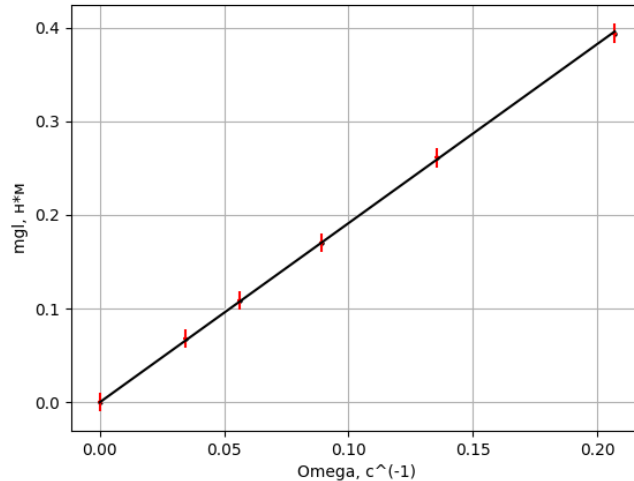


Рис. 3: Зависимость $M(\Omega)$ $k \approx 1.91$

Угловой коэффициент определяем по формуле:

$$k = 2\pi I_z \cdot \nu = \frac{\langle M\Omega \rangle}{\langle \Omega^2 \rangle}$$

$$k \approx 1.91 \text{ кг·м}^2 \cdot c^{-1}$$

Случайную погрешность определения углового коэффициента вычисляем как

$$\delta_k^{rand} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\frac{\langle M^2 \rangle}{\langle \Omega^2 \rangle} - \bar{k}^2 \right)} \approx 0.04 \text{ кг·м}^2 \cdot c^{-1}$$

Оценим возможную систематическую погрешность, обусловленную инструментальными погрешностями приборов. Предполагая, что при всех измерениях относительная погрешность приборов одинакова, оценим погрешность вычисления частного $R = \frac{V}{I}$ при максимальных значениях V и I :

$$\Delta_k^{sys} = k \sqrt{\frac{\Delta_M}{M}^2} + \frac{\Delta_\Omega}{\Omega}^2 \approx 0.05 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$$

Полная погрешность измерения углового коэффициента не превосходит значения:

$$\Delta_k^{full} = \sqrt{(\Delta_k^{sys})^2 + (\delta_k^{rand})^2} = 0.06 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Относительная погрешность угла наклона } \epsilon_k = \frac{\Delta_k^{full}}{k} \approx 0.03 = 3\%$$

$$\text{Частота вращения ротора } \nu = \frac{k}{2\pi I_z} \approx 407.3 \text{ с}^{-1}$$

$$\text{Относительная погрешность } \epsilon_k = \epsilon_k + \epsilon_{I_z} \approx 0.04 = 4\% \Rightarrow \Delta_k = \epsilon_k \cdot k \approx 16.29 \text{ с}^{-1}$$

4.2.2 Согласно осциллографу

Данные осциллографа: $\nu = 391.14 \text{ гц}$

5 Обсуждение результатов

В данной работе были получены частоты вращения ротора гироскопа двумя способами с разными погрешностями:

- Через прецессию гироскопа: $\nu_1 = (407.3 \pm 16.29) \text{ Гц}$ с точностью 4 %.
- Через фигуры Лиссажу: $\nu_2 = 391.1 \text{ Гц}$

Как видно частоты достаточно близки друг к другу. Погрешность 1 способа можно уменьшить, более точно измерив момент инерции ротора. А именно засекать более продолжительные промежутки времени вращения цилиндра и гироскопа на проволоке.