

Лабораторная работа 1.2.3

Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Матвей Галицын
Б01-411

November 11, 2024

1 Аннотация

В работе измеряется момент инерции ряда тел и сравниваются результаты с расчетами по теоретическим формулам, проверяются аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

2 Теоретические сведения

Возьмем трифилярный подвес.

Уравнение сохранения энергии при крутильных колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E,$$

где I - момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m - масса платформы с телом, ϕ - угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 - координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\phi = 0$), z - координата той же точки при некотором угле ϕ .

Так как при повороте C' в C'' , а $CC'' = L$. Поэтому:

$$(R\cos(\phi) - r)^2 + R^2\sin^2(\phi) + z^2 = L^2$$

Учитывая, что при малых углах поворота $\cos(\phi) \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$

$$z \approx \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0\sqrt{1 - \frac{Rr\phi^2}{z_0^2}} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0}$$

Подставляем это значение z в уравнение (2), получаем

$$\frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mg\frac{Rr}{z_0}\phi = E$$

Решение этого уравнения колебаний имеет вид:

$$\phi = \phi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}} + \Omega\right),$$

Период крутильных колебаний нашей системы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}$$

Тогда формула для определения момента инерции:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0}$$

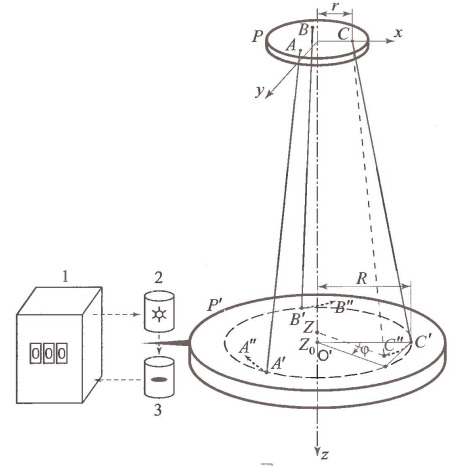


Схема установки

3 Оборудование и инструментальные погрешности

В работе используются: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие), линейка, штангенциркуль.

Линейка: $\delta_{lin} \pm 0.5$ мм

Штангенциркуль: $\delta_{tram} \pm 0.5$ мм (маркировка производителя)

4 Результаты измерений и обработка данных

Координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\phi = 0$) $z_0 = 215$ см

Расстояние от центра малого диска до точки крепления нити: $r = (30 \pm 0.3)$ мм

Расстояние от центра малого диска до точки крепления нити: $R = (114.6 \pm 0.5)$ мм

Константа установки: $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \approx 4.05 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$

Абсолютная погрешность: $\delta_k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\delta}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{r}\right)^2} \approx 0.07 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$

4.1 Определение момента инерции ненагруженной платформы

Масса платформы: $M = 965.7 \pm 0.5$

Время колебаний: $\tau = 61$ с

Кол-во обращений: $N = 11$

Период колебаний $T = 4.36$ с

\Rightarrow Момент инерции платформы: $I = 0.007 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

4.2 Определение момента инерции тел

4.2.1 Согласно экспериментальным данным

Относительная погрешность определения момента инерции: $\epsilon_I = \epsilon_T + \epsilon_k = 0.5\% + \frac{\delta_k}{k} \cdot 100\% = 0.5\% + 2\% = 2.5\%$

Заполняем *таблицу 1*

Таблица № 1

№	Название	m, г	τ , с	N	T, с	I, $10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
1	Брусok	1100.9	36.54	10	4.36	4.22
2	Диск с пипкой	881.3	36.97	10	4.45	2.74
3	Цилиндр	730.3	49.74	12	4.14	4.79

m - масса тела (без платформы), τ - время вращения тела с платформой, N - кол-во оборотов, T - период колебаний, I - момент инерции тела.

Поставим 1ое и 2ое тела на платформу вместе, так чтобы центр масс системы оставался в центре диска. Посчитаем суммарный момент инерции этих тел: суммарная масса $m_\Sigma = m_1 + m_2 = 1982.2$ г, $\tau = 39.52$ с, $N = 10 \Rightarrow T = 3.952 \Rightarrow I = 6.64 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ Видно, что $I_\Sigma \approx I_1 + I_2 = 6.78 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \Rightarrow$ **аддитивность моментов инерции выполняется.**

4.2.2 Согласно теоретическим данным

- **Брусok**

Длина $a = 21$ см

Ширина $b = 2.6$ см

Масса бруска $m = 1100.9$ г

Момент инерции вдоль оси OZ: $I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = 4.1 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

- **Диск с пипкой**

Больший диаметр $D = 16.1$ см

Меньший диаметр $d = 2$ см

Общая масса конструкции $m = 881.3$ г

Высота большого основания $h_D = 0.5$ см

Высота пипки $h_d = 1.5$ см

Отношение масс $\frac{m_D}{m_d} = \frac{V_D}{V_d} = \frac{D^2 \cdot h_D}{d^2 \cdot h_d} \approx 21.6 \Rightarrow m_D \approx 841.3$ г, а масса пипки $m_d \approx 40$ г

Момент инерции вдоль оси OZ: $I_z = \frac{m_D D^2}{8} + \frac{m_d d^2}{8} = 2.73 \cdot 10^{-3}$ кг·м²

- **Цилиндр**

Диаметр кольца $d = 15.9$ см

Масса цилиндра $m = 730.3$ г

Момент инерции вдоль оси OZ: $I_z = \frac{md^2}{4} = 4.6 \cdot 10^{-3}$ кг·м²

5 Нахождение массы и момента инерции однородного полного цилиндра

Поместим на платформу шайбу, разрезанную по диаметру. Когда мы раздвигаем половинки выполняется теорема Штейнера. А именно момент инерции выражается в каждом конкретном случае

$$I = I_{disk} + I_{puck}^{h=0} + mh^2,$$

где I_{disk} - момент инерции диска (опоры), $I_{puck}^{h=0}$ - момент инерции полной (без сдвига) шайбы.

Снимем зависимость момента инерции I такой системы от расстояния h между центром одной из половинок и центром платформы.

Масса системы: $M_\Sigma = 2501.6$ кг

Момент инерции $I = k \cdot M_\Sigma \cdot T^2$

Заполняем таблицу 2

Строим график $I(h^2)$

Массу или коэффициент наклона графика можно посчитать как:

$$k = \frac{\langle Ih^2 \rangle - \langle I \rangle \langle h^2 \rangle}{\langle h^2 \rangle^2 - \langle h^2 \rangle^2} \approx 1.54 \Rightarrow$$

Абсолютная погрешность коэфф. наклона

$$\delta_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle h^4 \rangle - \langle h^2 \rangle^2} - k^2} = 0.03$$

Таким образом масса полной шайбы по графику $m_{puck}^{graph} = (1.54 \pm 0.03)$ кг, согласно показаниям весов масса шайбы $m_{puck}^{scales} = 1536.1$ г. Видно, что масса, определенная по графику с хорошей точностью совпадает с массой, показанной весами.

По смещению графика по оси I можно определить момент инерции шайбы в "склеенном" виде, а именно

$$I_{puck}^{h=0} = I(0) - I_{disk} = 0.0086 - 0.007 = 0.0016 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

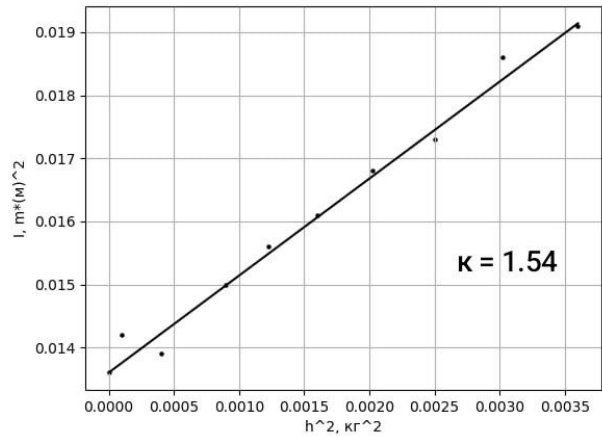
Абсолютная погрешность

$$\delta_{I_{puck}^{h=0}} = \delta_m \cdot \sqrt{\langle h^4 \rangle + \langle h^2 \rangle^2} \approx 0.005 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Согласно теоретическим данным момент инерции шайбы

$$I_{puck} = \frac{m_{puck} \cdot d_{puck}^2}{8} \approx 0.0017 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

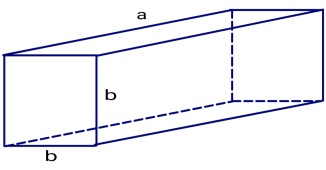
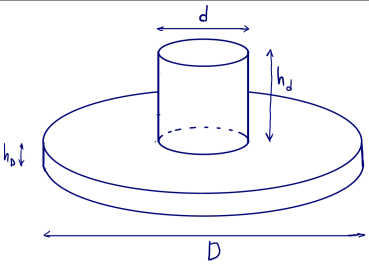
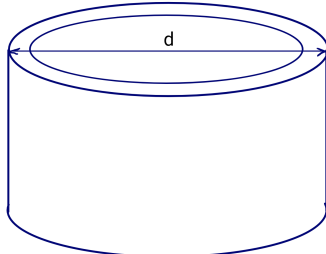
Как видно **теорема Гюйгенса-Штейнера действительно выполняется.**



6 Обсуждение результатов

В данной работе были измерены моменты инерции нескольких тел теоретически и практически. С помощью трифилярного подвеса можно определять момент инерции с достаточно большой точностью $\varepsilon \approx 2.5\%$. Такая точность обусловлена малой погрешностью измерения времени и условиями, при которых колебания подвеса можно считать слабозатухающими.

Итоговая таблица

Название	Рисунок	Момент инерции (на практике)	Момент инерции (в теории)
Брусок		$(4.22 \pm 0.1) \text{ г} \cdot \text{м}^2$	$4.1 \text{ г} \cdot \text{м}^2$
Диск с пипкой		$(2.74 \pm 0.07) \text{ г} \cdot \text{м}^2$	$2.73 \text{ г} \cdot \text{м}^2$
Цилиндр		$(4.79 \pm 0.12) \cdot \text{м}^2$	$4.6 \text{ г} \cdot \text{м}^2$

В целом, значения момента инерции, полученные экспериментально и теоретически достаточно схожи. Большая погрешность исходит из подсчета коэффициента установки. Уменьшить её возможно, более точно измерив расстояния R и r , описанные в работе.

В работе показано, что выполняется аддитивность моментов инерции. Также показано, что выполняется теорема Гюйгенса-Штейнера.