Вопрос по выбору
Циклоидный маятник

Матвей Галицын
Б01-411

November 25, 2024

Что же такое циклоида?

Циклоида может быть описана траекторией точки, зафиксированной на окружности, которая катится по прямой без проскальзывания с постоянной скоростью.

Система уравнений, задающих такую траекторию, получается достаточно просто. Это по-сути суперпозиция вращательного движения вокруг центра масс колеса и поступательного движения центра колеса. Притом если т. О покоится, то

$$[\vec{\omega} \times \vec{R}] = \vec{v} \tag{1}$$

Провернем колесо на небольшой угол. Точка как поднялась, так и сдвинулась по горизонтали. Тогда система, описывающая такую траекторию, описывается параметрическими уравнениями. Начальное положение точки берм в точке соприкосновения колеса и пов-ти. Длина дуги $R \cdot \phi$ равна смещению центра по OX, это следует из (1). Смещение по OX = смещение центра + смещение, связанное с вращением.

$$\begin{cases} x(\phi) &= R \cdot \phi - Rsin(\phi) \\ y(\phi) &= R(1 - cos(\phi)) \end{cases} \tag{2}$$

Маленькая длина пути, пройденная точкой на окружности можно найти следующим образом:

$$dS = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt = \sqrt{x_t' + y_t'} \cdot dt \tag{3}$$

При этом из системы (2) имеем: $x_t' = R(1 - cos(\phi))$, а $y_t' = sin(\phi)$. Подставляем теперь это в (3) и получаем малое приращение длины дуги кривой:
$dL = R\sqrt{2 - 2cos(\phi)} \cdot d\phi = \sqrt{2}R\sqrt{1 - cos(\phi)} \cdot d\phi = \sqrt{2}R\sqrt{2sin^2(\frac{\phi}{2})} \cdot d\phi = 2R \cdot sin\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi$

Тогда полная длина дуги циклоиды:

$$L = 2R \int_{\phi_0}^{\phi} sin\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi = -4R \cdot cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\Bigg|_{\phi_0}^{\phi}$$

$$L = 4R \cdot \left(cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right) - cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \tag{4}$$

Как получается циклоидный маятник?

Берется окружность, плотно прижатая к поверхности, и проводится траектория точки, которая изначально находилась снизу. Делается один полный оборот.

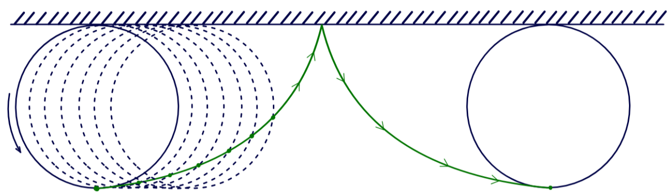


Рис. 1: Первая часть построения циклоидного маятника

Далее берется абсолютно такая же окружность и аналогичным образом проводится траектория точки, которая изначально была сверху у окружности.

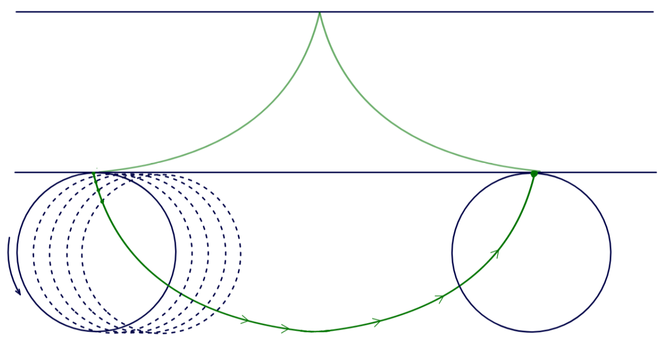
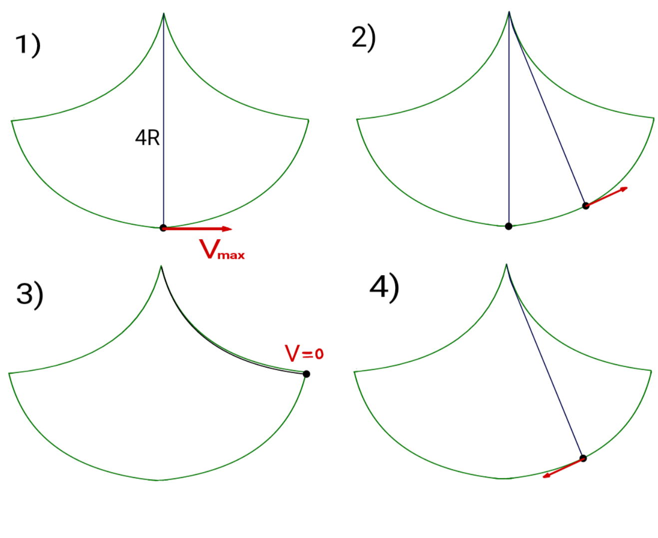


Рис. 2: Вторая часть построения циклоидного маятника

Из формулы (4) видно, что при повороте колеса на угол π, длина дуги, описанной произвольной точкой на дуге колеса, будет равна 4R. То есть половина длины дуги циклоиды равна четырем радиусам самого колеса. И тогда понятно, что если взять точечное тело на нитке длиной 4R, то оно будет колебаться по нашей замкнутой фигуре следующим образом:



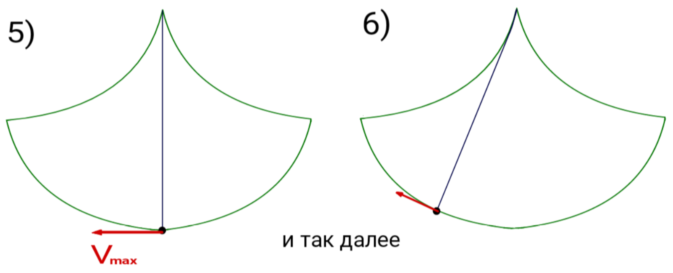


Рис. 3: Иллюстрация колебаний маятника

Берется две одинаковые окружности, плотно прижатые друг друг. Такую систему двигают с постоянной скоростью V. При этом проскальзывания между нижним кольцом и поверхностью также нет. Очевидно отгда, что скорости точек соприкосновения колес в ЛСО одинаковы и равны $2v$ (нет проскальзывания).

Период колебаний

Период колебаний достаточно легко найти из **закона сохранения энергии**. Запишем:

$$\text{К} + \Pi = const$$

$$\frac{1}{2}mV^2 + mg(y - y_0) = const$$

С учетом $y(\phi)$ из (2), $V = \frac{dS}{dt}$ и формулы (4) получается система:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mV^2 + mg(y - y_0) = const \\ V = \frac{dS}{dt} \\ y(\phi) = -R(1 - cos(\phi)) \\ S(\phi) = 4R \cdot \left(cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right) - cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \end{cases}$$

Решим данную систему:
Продифференцируем $S(\phi)$:

$$S' = -2R\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \phi'$$

Возьмем const $= 0$, тогда получим:

$$\frac{1}{2}mV^2 + mg(y - y_0) = 0$$

$$\frac{1}{2}mV^2 = mg(y_0 - y)$$

$$2R^2 sin^2(\frac{\phi}{2})\phi'^2 = g(y_0 - y) = gR(cos(\phi_0) - cos(\phi))$$

$$2R \cdot \frac{1 - cos(\phi)}{2} \cdot \phi'^2 = g(cos(\phi_0) - cos(\phi))$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{R} \cdot \frac{cos(\phi_0) - cos(\phi)}{1 - cos(\phi)}} \tag{5}$$

Т.к. в начале $\phi_0 = 0$, то $cos(\phi_0) = 1$, получим:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{R} \cdot \frac{1 - cos(\phi)}{1 - cos(\phi)}} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \begin{cases} \sqrt{\frac{g}{R}}, \text{ при движение } \textbf{справа налево} \\ -\sqrt{\frac{g}{R}}, \text{ при движение } \textbf{слева направо} \end{cases}$$

Уже понятно, что это не обычный математический маятник. Интересный факт, что угловая скорость маятника не зависит от времени, как это происходит в обычных маятниках. Оказывается, что циклоидный маятник обладает свойством **таутохронности**.

Таутохронность

Таутохронность - свойство системы, при котором время, необходимое для одного цикла, не зависит от начального положения системы. В данном случае, это означает, что период одного цикла колебаний циклоидного маятника не зависит от амплитуды.
Снова обратимся к формуле (5), перепишем её:

$$dt = \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{g}{R} \cdot \frac{cos(\phi_0) - cos(\phi)}{1 - cos(\phi)}}} = \sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{1 - cos(\phi)}{cos(\phi_0) - cos(\phi)}} \cdot d\phi$$

Найдем четверть периода, проинтегрировав от $\phi_0 = 0$ до $\phi = \pi$:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \int_0^\pi \cancel{\sqrt{\frac{1 - cos(\phi)}{1 - cos(\phi)}}} \cdot d\phi = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \phi \Big|_0^\pi = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

При этом, полученный результат справедлив для любого значения амплитуды.
Возьмем $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$, получим:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - cos(\phi)}{\frac{\sqrt{2}}{2} - cos(\phi)}} \cdot d\phi = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Таким образом мы получили период колебаний циклоидного маятника: $T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.
Заметим, что мы нигде не пользовались формулами Тейлора, для приближенного значения функции, то есть колебания не обязательно должны быть малыми. Таким образом, если одновременно запустить два любых тела циклоидного маятника, **через центр они будут проходить одновременно. Это и есть явление таутохронности.**