Теперь ищем статистики T_1 и T_2

$(\frac{X_{(n)}}{T})^n = g$

$\frac{X_{(n)}}{T} = \sqrt[n]{g}$

$T = \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{g}}$

$T_1 = \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{g_2}},\ T_2 = \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{g_1}}$

Продолжение в следующей лекции Длина интервала $l = X_{(n)}(\frac{1}{\sqrt[n]{g_1}} - \frac{1}{\sqrt[n]{g_2}}) = X_{(n)}(\frac{1}{\sqrt[n]{g_1}} - \frac{1}{\sqrt[n]{g_1+\gamma}})$

$l' = X_{(n)}(-\frac{1}{n}\frac{1}{g_1^{1+1/n}} + \frac{1}{n}\frac{1}{(g_1+\gamma)^{1+1/n}}) \leq 0$, надо взять самое большое g_1

$g_1 = 1-\gamma,\ g_2 = 1$

Оптимальный доверительный интервал - $(X_{(n)}; \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\gamma}})$

Универсальная центральная статистика

Если $F(x,\theta)$ - функция распределения выборки и она монотонна по θ, то универсальную центральную статистику можно построить единственным способом:

$G(X,\theta) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F(X_i,\theta)$

Проверим, что G центральная

1) $F,\ \ln,\ \sum$ - монотонны по параметру

2) $\xi_i = -\ln F(X_i,\theta)$

$\mathbb{P}(\{\xi < x\}) = \mathbb{P}(\{-\ln F(X_i,\theta) < x\}) = \mathbb{P}(\{F(X_i,\theta) > e^{-x}\}) = \mathbb{P}(\{X_i > F^{-1}(e^{-x})\}) = 1 - F(F^{-1}(e^{-x})) = 1 - e^{-x}$

Распределение ξ экспоненциальное с плотностью

$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

G как сумма экспоненциальных случайных величин имеет гамма распределение с плотностью

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

Пример применения универсальной центральной статистики на $R((0,\theta))$

Выбираем g_1 и g_2 как квантили гамма распределения, $F_G(g_2) - F_G(g_1) = \gamma$

$F(x,\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta}, & x \in [0;\theta] \\ 0, & x \notin [0;\theta] \end{cases}$

$G(X,T) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \ln\frac{X_i}{T} = g$

$-\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i + n\ln T = g$

$\frac{T^n}{\prod\limits_{i=1}^{n} X_i} = e^g$

$T = e^{g/n}(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}$

$T_1 = e^{g_1/n}(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i)^{1/n},\ T_2 = e^{g_2/n}(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}$

Доверительный интервал - $\left(e^{g_1/n}(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}; e^{g_2/n}(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}\right)$

Для центрального доверительного интервала в качестве g_1 берём квантиль порядка $\frac{1-\gamma}{2}$, а для g_2 берём квантиль порядка $\frac{1+\gamma}{2}$

Существуют и другие методы построения, но их не рассматриваем

Асимптотические доверительные интервалы

Пусть $\widehat{\theta}_n$ - оценка максимального правдоподобия для параметра θ

$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \to^d \xi \sim N(0, \frac{1}{i_1(\theta)})$

$\sqrt{n}\sqrt{i_1(\theta)}(\widehat{\theta}_n - \theta) \to^d \xi \sim N(0,1)$

Пусть γ - уровень доверия, $c_\gamma = \Phi^{-1}(\frac{1+\gamma}{2}), -c_\gamma = \Phi^{-1}(\frac{1-\gamma}{2})$

$\mathbb{P}(\{\sqrt{n}\sqrt{i_1(\theta)}|\widehat{\theta}_n - \theta| < c_\gamma\}) \approx \Phi(\frac{1+\gamma}{2}) - \Phi(\frac{1-\gamma}{2}) = \gamma$

$|\widehat{\theta}_n - \theta| < \frac{c_\gamma}{\sqrt{n}\sqrt{i_1(\theta)}}$ с вероятностью, близкой к γ

Проблема - i_1 зависит от θ. В силу состоятельности функций от оценки максимального правдоподобия заменим $i_1(\theta)$ на $i_1(\widehat{\theta}_i)$

Примерно так же доказывается, что $|\widehat{\theta}_n - \theta| < \frac{c_\gamma}{\sqrt{n}\sqrt{i_1(\widehat{\theta}_n)}}$ - асимптотический γ-доверительный интервал

Пример - $Bi(1,\theta)$

$\overline{X}$ - оценка максимального правдоподобия, $i_1(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$

Доверительный интервал - $\left(\overline{X} - c_\gamma\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}; \overline{X} + c_\gamma\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\right)$