Пример применения критерия Бхаттачария - $N(\theta,\sigma^2)$

$L(X,\theta)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}\exp(-\frac{\sum(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2})$

$(\ln L(X,\theta))'=\frac{\sum(X_i-\theta)}{\sigma^2}=\frac{n\overline{X}-n\theta}{\sigma^2}=\frac{n}{\sigma^2}(\overline{X}-\theta)=\frac{L^{(1)}}{L}$

$L^{(1)}=\frac{n}{\sigma^2}(\overline{X}-\theta)L$

$L^{(2)}=-\frac{n}{\sigma^2}L+\frac{n}{\sigma^2}(\overline{X}-\theta)\frac{L^{(1)}}{L}L$

$\frac{L^{(2)}}{L}=-\frac{n}{\sigma^2}+\frac{n^2}{\sigma^4}(\overline{X}-\theta)^2$

Надо получить $T-\theta^2=k_1\frac{L^{(1)}}{L}+k_2\frac{L^{(2)}}{L}$

$k_1=2\theta\frac{n}{\sigma^2}$, $k_2=\frac{\sigma^4}{n^2}$

$2\theta\frac{n}{\sigma^2}\frac{L^{(1)}}{L}+\frac{\sigma^4}{n^2}\frac{L^{(2)}}{L}=-\frac{\sigma^2}{n}+\overline{X}^2-\theta^2$

$T(X)=\overline{X}^2-\frac{\sigma^2}{n}$ - несмещённая оценка θ^2 и оптимально оценивает её в силу теоремы Бхаттачария

Эффективное оценивание функций в случае векторного параметра

$\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_r)^T$

Рассмотрим матрицу с элементами $g_{i,j}(\theta)=E_\theta\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_j}=(I_n(\theta))_{ij}$ - информационная матрица Фишера

Теорема

Пусть $\tau(\theta)=\tau(\theta_1,\ldots,\theta_r)$ и T - статистика, которая несмещённо оценивает τ. Тогда справедливо неравенство $D_\theta T\geq\sum\limits_{i,j=1}^{r}g_{i,j}(\theta)c_i(\theta)c_j(\theta)$ $(*)$, где вектор $(c_1(\theta),\ldots,c_r(\theta))^T$ является решением системы $\sum\limits_{j=1}^{r}g_{i,j}(\theta)c_j(\theta)=\frac{\partial\tau}{\partial\theta_i}$, $i=1,\ldots,r$

Неравенство $(*)$ называется неравенством Рао-Крамера и равенство в нём имеет место тогда и только тогда, когда $T-\tau=\sum\limits_{i=1}^{r}c_i(\theta)\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}$ - называется условием Рао-Крамера $(**)$

Оценка, удовлятворяющая условию Рао-Крамера и дающая минимальное значение D_θ, называются эффективной

Замечание

Если $I_n(\theta)$ имеет обратную матрицу с элементами $g^{i,j}(\theta)$, то вектор $c(\theta)=(c_1(\theta),\ldots,c_r(\theta))^T=I_n^{-1}(\theta)grad\,\tau$

Нижняя граница в $(*)$ примет вид $(grad\,\tau)^T(I_n^{-1}(\theta))^T I_n(\theta)I_n^{-1}(\theta)grad\,\tau=(grad\,\tau)^T I_n^{-1}grad\,\tau$, $(I_n^{-1}=(I_n^{-1})^T)$

Это обобщение скалярной формулы

Пример - обобщение среднего в случае мещающего параметра в нормальной модели

Есть выборка из $N(\theta_1,\theta_2^2)$

Покажем, что $\overline{X}$ является эффективной оценкой для $\tau(\theta)=\theta_1$

$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2}\exp(-\frac{1}{2\theta_2^2(x-\theta_1)^2})$

$\ln f(x,\theta)=-\frac{1}{2\theta_2^2}(x-\theta_1)^2-\ln\theta_2-\ln\sqrt{2\pi}$

$I_n(\theta)=nI_1(\theta)$

$g_{11}(\theta)=E_\theta(\frac{\partial\ln f(x_1,\theta)}{\partial\theta_1})^2=E_\theta\frac{1}{\theta_2^4}(X_1-\theta_1)^2=\frac{1}{\theta_2^2}$

$g_{22}(\theta)=E_\theta(\frac{1}{\theta_2^3}(X_1-\theta_1)^2-\frac{1}{\theta_2})^2=\frac{1}{\theta_2^6}E_\theta(X_1-\theta_1)^4-\frac{1}{\theta_2^2}=\frac{3}{\theta_2^2}-\frac{1}{\theta_2^2}=\frac{2}{\theta_2^2}$

$g_{12}(\theta)=g_{21}(\theta)=E_\theta(\frac{1}{\theta_2^3}(\frac{\partial\ln f(x_1,\theta)}{\partial\theta_1})(X_1-\theta_1)^2-\frac{1}{\theta_2})=0$

$I_n(\theta)=\begin{pmatrix}n/\theta_2^2 & 0\\ 0 & 2n/\theta_2^2\end{pmatrix}$

Система уравнений:

$\begin{cases}\frac{n}{\theta_2^2}c_1=1\quad c_1=\frac{\theta_2^2}{n}\\ \frac{2n}{\theta_2^2}c_2=0\quad c_2=0\end{cases}$

$T - \tau(\theta) = c_1 \frac{1}{\theta_2^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \theta_1) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \theta_1) = \overline{X} - \theta_1$, T - несмещённая оценка

$D_\theta T = \frac{\theta_2^2}{n}$

Смотрим на нижнюю границу:

$\sum\limits_{i,j} g_{ij}(\theta) c_i(\theta) c_j(\theta) = g_1 1(\theta) c_1(\theta) c_1(\theta) = \frac{n}{\theta_2^2} \cdot \frac{\theta_2^2}{n} \cdot \frac{\theta_2^2}{n} = \frac{\theta_2^2}{n}$ - эффективная оценка

Достаточные статистики и их свойства

Пусть T - статистика (борелевская функция выборки), $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ - сама выборка

$\mathbb{P}(\{X \in B\} | \{T = t\})$ - обычная условная вероятность, если t принимает конечное или счётное число значений

Если распределение T непрерывное, то $\mathbb{P}(\{T = t\}) = 0$, но $P_\theta(B, t)$ всегда есть

$P_\theta(B, t) = \mathbb{P}_\theta(\{X \in B\} | \{T = t\})$ - условное распределение выборки при известном значении статистики

Если $P_\theta(B, t) = P(B, t)$, то есть, не зависит от θ, тогда статистика T называется достаточной

Если T достаточна, то в P нет информации о параметре, эта информация содержится в T, происходит редуцирование данных

Как проверять статистику на достаточность?

Критерий факторизации

Пусть $L(X, \theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(X_i, \theta)$ - функция правдоподобия

T - статичтика, $g(t, \theta)$ - плотность распределения T, плотность по мере Лебега или дискретной мере

Статистика T достаточна тогда и только тогда, когда $L(X, \theta) = g(T, \theta) \cdot h(X)$ (с вероятностью 1), где h - некоторая борелевская функция