Продолжение доказательства

$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) = \frac{U(\theta)}{\sqrt{n}\sqrt{i_1(\theta)}} \cdot \frac{1}{1+\eta_n}$, где $\eta_n \to^{\mathbb{P}} 0$, $\frac{U(\theta)}{\sqrt{n}\sqrt{i_1(\theta)}} \to^d \xi$ $Low(\xi) = N(0, \frac{1}{i_1(\theta)})$

Осталось доказать сходимость по распределению для $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n$ к ξ

Лемма

Пусть $\xi_n \to^d \xi$ с законом $N(0, \frac{1}{i_1(\theta)})$ и $\eta_n \to^{\mathbb{P}} 0$

Тогда $\frac{\xi_n}{1+\eta_n} \to^d \xi$

Доказательство

$F(x)$ - функция распределения для $N(0, \frac{1}{i_1(\theta)})$, нужно показать, что $\forall x \in \mathbb{R}^1$ $\mathbb{P}(\{\frac{\xi_n}{1+\eta_n} < x\}) \to F(x)$

Пусть $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$

$A_n = \{\eta_n > \epsilon\}$, $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$

$\mathbb{P}(\{\frac{\xi_n}{1+\eta_n} < x\}) = \mathbb{P}(\{\xi_n < x(1+\eta_n)\}) = \mathbb{P}(\{\xi_n < x(1+\eta_n)\} \cap A_n) + \mathbb{P}(\{\xi_n < x(1+\eta_n)\} \cap \overline{A_n})$

Переходим к верхнему пределу (первая вероятность с A_n становится равна нулю)

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mathbb{P}(\{\frac{\xi_n}{1+\eta_n} < x\}) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mathbb{P}(\{\xi_n < x(1+\epsilon)\}) = F(x(1+\epsilon))$

Устремим ϵ к нулю и получим $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mathbb{P}(\{\frac{\xi_n}{1+\eta_n} < x\}) \le F(x)$

Теперь нижний предел

$\underline{\lim} \mathbb{P}(\{\frac{\xi_n}{1+\eta_n} < x\}) = \underline{\lim} \mathbb{P}(\{\xi_n < x(1+\eta_n)\}) \ge \underline{\lim} \mathbb{P}(\{\xi_n < x\}) = F(x)$

$F(x) \le \underline{\lim} \mathbb{P}(\{\frac{\xi_n}{1+\eta_n} < x\}) \le \underline{\lim} \mathbb{P}(\{\frac{\xi_n}{1+\eta_n} < x\}) \le F(x)$ отсюда $\lim \mathbb{P}(\{\frac{\xi_n}{1+\eta_n} < x\}) = F(x)$ - QED леммы и теоремы