Неравенство Рао-Крамера и связанные с ним неравенства и оценки

(только для регулярных моделей)

Пусть $F(\theta), \theta \in \Theta$ - параметрическая статистическая модель

$F(\theta) \sim P(\theta)$

Модель называется регулярной, если

1) Носитель меры $P(\theta)$ не зависит от параметра (носитель меры - множество меры/вероятности 1)

2) $f(x,\theta)$ дифференцируема по θ и $(\int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)f(x,\theta)\lambda(dx))'_\theta = \int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)f'_\theta(x,\theta)\lambda(dx)$, интеграл матожидания $g(x)$ можно дифференцировать по параметру, занося производную под интеграл

Пример 1

$R((0;\theta))$ не является регулярной

$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{в ином случае} \end{cases}$

Носитель меры - интервал $(0;\theta)$ - зависит от параметра

Пример 2

$\Pi(\theta)$ - регулярная

$f(x,\theta) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

Носитель меры не зависит от θ

Вместо интеграла - ряд

$\sum\limits_{x=0}^{+\infty} g(x)f(x,\theta) = \sum\limits_{x=0}^{+\infty} g(x)\frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$ - ряд можно почленно дифференцировать по параметру, если он сходится

Функция правдоподобия выборки

$L(X,\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(X_i,\theta)$

$L(x,\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$ - плотность распределения вектора выборки

У функции правдоподобия интеграл всегда берётся по $\mathbb{R}^n$

Вклад выборки (θ - скалярная величина)

$U(X,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(X,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(f(X_i,\theta))'_\theta}{f(X_i,\theta)}$ - сумма вкладов элементов выборки

$U_n(X,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n} U_1(X_i,\theta)$

$EU_1(X_1,\theta) = E\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1,\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{f'_\theta(X_1,\theta)}{f(X_1,\theta)} f(X_1,\theta)\lambda(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f'_\theta(X_1,\theta)\lambda(dx) = (\int\limits_{\mathbb{R}^1} f(X_1,\theta)\lambda(dx))'_\theta = (1)'_\theta = 0$

$i_n(\theta) = D_\theta U_n(X,\theta)$ - информационное количество Фишера

$i_n(\theta) = ni_1(\theta)$, так как X_i независимые

$i_1(\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} U_1^2(x,\theta)f(x,\theta)\lambda(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{(f_\theta^2(x,\theta))^2}{f(x,\theta)}\lambda(dx)$

Если плотность имеет 2-ые производные по параметру, то есть ещё формулы вычисления

$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x,\theta) \cdot f(x,\theta)\lambda(dx) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta) \cdot f(x,\theta)|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}^1} (\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta))^2 f(x,\theta)\lambda(dx) = -i_1(\theta)$ - пользуемся интегрированием по частям, плотность на $\pm\infty$ обращается в 0

$i_1(\theta) = -E\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X_1,\theta)$

Пример 1

$Bi(1,\theta)$ - модель испытаний Бернулли

$L(X_1,\theta) = \theta^{X_1}(1-\theta)^{1-X_1}$

$L(X,\theta) = \theta^{\sum X_i}(1-\theta)^{n-\sum X_i} = \theta^{n\overline{X}}(1-\theta)^{n(1-\overline{X})}$

$U(X,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(X,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}(n\overline{X}\ln\theta + n(1-\overline{X}\ln(1-\theta)) = n\overline{X}\frac{1}{\theta} - n(1-\overline{X})\frac{1}{1-\theta} = \frac{n\overline{X}}{\theta(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta}$

Проверка: $EU(X,\theta) = E(\frac{n\overline{X}}{\theta(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta}) = \frac{n\theta}{\theta(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta} = 0$

$i_n(\theta) = D(\frac{n\overline{X}}{\theta(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta}) = D\frac{n\overline{X}}{\theta(1-\theta)} = \frac{n^2}{\theta^2(1-\theta)^2}D\overline{X} = \frac{n^2}{\theta^2(1-\theta)^2}\frac{1}{n^2}nDX_1 = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$ $(DX_1 = \theta(1-\theta))$

Пример 2

Экспоненциальная модель

$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

$\ln f(x,\theta) = -\frac{x}{\theta} - \ln\theta$

$U_1(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta) = \frac{x}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}$

$i_1(\theta) = \frac{1}{\theta^4}DX_1 = \frac{1}{\theta^4}(\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx - \theta^2) = \frac{1}{\theta^4}\theta^2(\Gamma(3)-1) = \frac{1}{\theta^2}$

Неравенство и условие Рао-Крамера

Пусть T - несмещённая оценка $\tau(\theta),\ \forall\theta\ E_\theta T = \tau(\theta)$

Если T имеет 2-ой момент, то

$|cov(T,U)|^2 \le D_\theta T \cdot D_\theta U = i_n(\theta)D_\theta T$

$\tau(\theta) = E_\theta T,\ \tau'(\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} T(x)\frac{\partial}{\partial\theta}L(x,\theta)\lambda(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} T(x)U(x)L(x,\theta)\lambda(dx) = cov(T,U)$

$|\tau'(\theta)|^2 \le i_n(\theta)D_\theta T$ - для любой регулярной модели

Можно оценить дисперсию оценки:

$D_\theta T \ge \frac{|\tau'(\theta)|^2}{i_n(\theta)}$ - неравенство Рао-Крамера

Оценка называется эффективной, если её дисперсия равна правой части в неравенстве Рао-Крамера

Равенство в неравенстве Рао-Крамера достигается тогда и только тогда, когда $cov(T,U) = 0$, или $T - \tau(\theta) = a(\theta)U(X,\theta)$ - условие Рао-Крамера, $a(\theta)$ - постоянный множитель, не случайный

Если модель допускает эффективную оценку, то она выделяется из вклада выборки (примеры ниже)

Пример 1 - $Bi(1,\theta)$

$U(X,\theta) = \frac{n\overline{X}}{\theta(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta}$

$\theta(1-\theta)U(X,\theta) = n\overline{X} - n\theta$

$T = n\overline{X},\ \tau(\theta) = n\theta,\ \overline{X}$ (среднее число успехов) эффективно оценивает вероятность успеха θ

Пример 2 - экспоненциальная модель

$U_1(x,\theta) = \frac{x}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}$

$U_n(X,\theta) = \frac{n\overline{X}}{\theta^2} - \frac{n}{\theta}$

$\frac{\theta^2}{n}U(X,\theta) = \overline{X} - \theta$ - аналогично, выборочное среднее эффективно оценивает θ

Пример 3 - $N(0,\theta^2)$

$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}$

$\ln f(x,\theta) = -\ln\theta - \frac{x^2}{2\theta^2} - \ln\sqrt{2\pi}$

$\frac{\partial}{\partial}\ln f(x,\theta) = -\frac{1}{\theta} + \frac{x^2}{\theta^3} = U_1(x,\theta)$

$U_1(X_1,\theta) = \frac{X_1^2}{\theta^3} - \frac{1}{\theta}$

$\theta^3 U_1 = X_1^2 - \theta^2$

$\theta^3 U_n = n\overline{X^2} - n\theta^2$

$\frac{\theta^3}{n}U_n = \overline{X^2} - \theta^2$ - средний квадрат эффективно оценивает дисперсию