

Пример применения теоремы Бхаттачария - $N(\theta, \sigma^2)$

$$L(X, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} \exp\left(-\frac{\sum (X_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$(\ln L(X, \theta))' = \frac{\sum (X_i - \theta)}{\sigma^2} = \frac{n\bar{X} - n\theta}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} (\bar{X} - \theta) = \frac{L^{(1)}}{L}$$

$$L^{(1)} = \frac{n}{\sigma^2} (\bar{X} - \theta) L$$

$$L^{(2)} = -\frac{n}{\sigma^2} L + \frac{n}{\sigma^2} (\bar{X} - \theta) \frac{L^{(1)}}{L} L$$

$$\frac{L^{(2)}}{L} = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{n^2}{\sigma^4} (\bar{X} - \theta)^2$$

$$\text{Надо получить } T - \theta^2 = k_1 \frac{L^{(1)}}{L} + k_2 \frac{L^{(2)}}{L}$$

$$k_1 = 2\theta \frac{n}{\sigma^2}, \quad k_2 = \frac{\sigma^4}{n^2}$$

$$2\theta \frac{n}{\sigma^2} \frac{L^{(1)}}{L} + \frac{\sigma^4}{n^2} \frac{L^{(2)}}{L} = -\frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 - \theta^2$$

$$T(X) = \bar{X}^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \text{несмещённая оценка } \theta^2 \text{ и оптимально оценивает её в силу теоремы}$$

Бхаттачария

Эффективное оценивание функций в случае векторного параметра

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$$

Рассмотрим матрицу с элементами $g_{i,j}(\theta) = E_\theta \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = (I_n(\theta))_{ij}$ - информационная матрица Фишера

Теорема

Пусть $\tau(\theta) = \tau(\theta_1, \dots, \theta_r)$ и T - статистика, которая несмещённо оценивает τ . Тогда справедливо неравенство $D_\theta \geq \sum_{i,j=1}^r g_{i,j}(\theta) c_i(\theta) c_j(\theta) (*)$, где вектор $(c_1(\theta), \dots, c_r(\theta))^T$ является решением системы

$$\sum_{j=1}^r g_{i,j}(\theta) c_j(\theta) = \frac{\partial \tau}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, r$$

Неравенство (*) называется неравенством Рао-Крамера и равенство в нём имеет место тогда и только тогда, когда $T - \tau = \sum_{i=1}^r c_i(\theta) \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}$ - называется условием Рао-Крамера (**)

Оценка, удовлетворяющая условию Рао-Крамера и дающая минимальное значение D_θ , называются эффективной

Замечание

Если $I_n(\theta)$ имеет обратную матрицу с элементами $g^{i,j}(\theta)$, то вектор $c(\theta) = (c_1(\theta), \dots, c_r(\theta))^T = I_n^{-1}(\theta) \text{grad} \tau$

Нижняя граница в (*) примет вид $(\text{grad} \tau)^T (I_n^{-1}(\theta))^T I_n(\theta) I_n^{-1}(\theta) \text{grad} \tau = (\text{grad} \tau)^T I_n^{-1} \text{grad} \tau$, $(I_n^{-1} = (I_n^{-1})^T)$

Это обобщение скалярной формулы

Пример - обобщение среднего в случае мешающего параметра в нормальной модели

Есть выборка из $N(\theta_1, \theta_2^2)$

Покажем, что \bar{X} является эффективной оценкой для $\tau(\theta) = \theta_1$

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2} \exp\left(-\frac{1}{2\theta_2^2(x-\theta_1)^2}\right)$$

$$\ln f(x, \theta) = -\frac{1}{2\theta_2^2}(x - \theta_1)^2 - \ln \theta_2 - \ln \sqrt{2\pi}$$

$$I_n(\theta) = n I_1(\theta)$$

$$g_{11}(\theta) = E_\theta \left(\frac{\partial \ln f(x_1, \theta)}{\partial \theta_1} \right)^2 = E_\theta \frac{1}{\theta_2^4} (X_1 - \theta_1)^2 = \frac{1}{\theta_2^2}$$

$$g_{22}(\theta) = E_\theta \left(\frac{1}{\theta_2^3} (X_1 - \theta_1)^2 - \frac{1}{\theta_2} \right)^2 = \frac{1}{\theta_2^6} E_\theta (X_1 - \theta_1)^4 - \frac{1}{\theta_2^2} = \frac{3}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2^2} = \frac{2}{\theta_2^2}$$

$$g_{22}(\theta) = E_\theta \left(\frac{1}{\theta_2^3} \left(\frac{\partial \ln f(x_1, \theta)}{\partial \theta_1} \right) (X_1 - \theta_1)^2 - \frac{1}{\theta_2} \right) = 0$$

$$I_n(\theta) = \begin{pmatrix} n/\theta_2^2 & 0 \\ 0 & 2n/\theta_2^2 \end{pmatrix}$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{n}{\theta_2^2} c_1 = 1 & c_1 = \frac{\theta_2^2}{n} \\ \frac{2n}{\theta_2^2} c_2 = 0 & c_2 = 0 \end{cases}$$

$T - \tau(\theta) = c_1 \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta_1) = \bar{X} - \theta_1$, T - несмещённая оценка

$$D_\theta T = \frac{\theta_2^2}{n}$$

Смотрим на нижнюю границу:

$$\sum_{i,j} g_{ij}(\theta) c_i(\theta) c_j(\theta) = g_1 1(\theta) c_1(\theta) c_1(\theta) = \frac{n}{\theta_2^2} \cdot \frac{\theta_2^2}{n} \cdot \frac{\theta_2^2}{n} = \frac{\theta_2^2}{n} - \text{эффективная оценка}$$

Достаточные статистики и их свойства

Пусть T - статистика (борелевская функция выборки), $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ - сама выборка

$\mathbb{P}(\{X \in B\} | \{T = t\})$ - обычная условная вероятность, если t принимает конечное или счётное число значений

Если распределение T непрерывное, то $\mathbb{P}(\{T = t\}) = 0$, но $P_\theta(B, t)$ всегда есть

$P_\theta(B, t) = \mathbb{P}_\theta(\{X \in B\} | \{T = t\})$ - условное распределение выборки при известном значении статистики

Если, что $P_\theta(B, t) = P(B, t)$, то есть, не зависит от θ , тогда статистика T называется достаточной

Если T достаточна, то в P нет информации о параметре, эта информация содержится в T , происходит редуцирование данных

Как проверять статистику на достаточность?

Критерий факторизации

Пусть $L(X, \theta) = \prod_{i=1}^{\infty} f(X_i, \theta)$ - функция правдоподобия

T - статистика, $g(t, \theta)$ - плотность распределения T , плотность по мере Лебега или дискретной мере

Статистика T достаточна тогда и только тогда, когда $L(X, \theta) = g(T, \theta) \cdot h(X)$ (с вероятностью 1), где h - некоторая борелевская функция