

Теперь ищем статистики T_1 и T_2

$$\left(\frac{X_{(n)}}{T}\right)^n = g$$

$$\frac{X_{(n)}}{T} = \sqrt[n]{g}$$

$$T = \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{g}}$$

$$T_1 = \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{g_2}}, \quad T_2 = \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{g_1}}$$

Продолжение в следующей лекции Длина интервала $l = X_{(n)}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{g_1}} - \frac{1}{\sqrt[n]{g_2}}\right) = X_{(n)}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{g_1}} - \frac{1}{\sqrt[n]{g_1+\gamma}}\right)$

$l' = X_{(n)}\left(-\frac{1}{n} \frac{1}{g_1^{1+1/n}} + \frac{1}{n} \frac{1}{(g_1+\gamma)^{1+1/n}}\right) \leq 0$, надо взять самое большое g_1

$$g_1 = 1 - \gamma, \quad g_2 = 1$$

Оптимальный доверительный интервал - $(X_{(n)}; \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\gamma}})$

Универсальная центральная статистика

Если $F(x, \theta)$ - функция распределения выборки и она монотонна по θ , то универсальную центральную статистику можно построить единственным способом:

$$G(X, \theta) = - \sum_{i=1}^n \ln F(X_i, \theta)$$

Проверим, что G центральная

1) F, \ln, \sum - монотонны по параметру

2) $\xi_i = -\ln F(X_i, \theta)$

$$\mathbb{P}(\{\xi < x\}) = \mathbb{P}(\{-\ln F(X_i, \theta) < x\}) = \mathbb{P}(\{F(X_i, \theta) > e^{-x}\}) = \mathbb{P}(\{X_i > F^{-1}(e^{-x})\}) = 1 - F(F^{-1}(e^{-x})) = 1 - e^{-x}$$

Распределение ξ экспоненциальное с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

G как сумма экспоненциальных случайных величин имеет гамма распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Пример применения универсальной центральной статистики на $R((0, \theta))$

Выбираем g_1 и g_2 как квантили гамма распределения, $F_G(g_2) - F_G(g_1) = \gamma$

$$F(x, \theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta}, & x \in [0; \theta] \\ 0, & x \notin [0; \theta] \end{cases}$$

$$G(X, T) = - \sum_{i=1}^n \ln \frac{X_i}{T} = g$$

$$- \sum_{i=1}^n \ln X_i + n \ln T = g$$

$$\frac{T^n}{\prod_{i=1}^n X_i} = e^g$$

$$T = e^{g/n} \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}$$

$$T_1 = e^{g_1/n} \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}, \quad T_2 = e^{g_2/n} \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}$$

Доверительный интервал - $\left(e^{g_1/n} \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}; e^{g_2/n} \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n} \right)$

Для центрального доверительного интервала в качестве g_1 берём квантиль порядка $\frac{1-\gamma}{2}$, а для g_2 берём квантиль порядка $\frac{1+\gamma}{2}$

Существуют и другие методы построения, но их не рассматриваем