Неравенство Рао-Крамера и связанные с ним неравенства и оценки

(только для регулярных моделей)

Пусть $F(\theta), \theta \in \Theta$ - параметрическая статистическая модель

$F(\theta) \sim P(\theta)$

Модель называется регулярной, если

1) Носитель меры $P(\theta)$ не зависит от параметра (носитель меры - множество меры/вероятности 1)

2) $f(x,\theta)$ дифференцируема по θ и $(\int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)f(x,\theta)\lambda(dx))'_\theta = \int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)f'_\theta(x,\theta)\lambda(dx)$, интеграл матожидания $g(x)$ можно дифференцировать по параметру, занося производную под интеграл

Пример 1

$R((0;\theta))$ не является регулярной

$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{в ином случае} \end{cases}$

Носитель меры - интервал $(0;\theta)$ - зависит от параметра

Пример 2

$\Pi(\theta)$ - регулярная

$f(x,\theta) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

Носитель меры не зависит от θ

Вместо интеграла - ряд

$\sum\limits_{x=0}^{+\infty} g(x)f(x,\theta) = \sum\limits_{x=0}^{+\infty} g(x)\frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$ - ряд можно почленно дифференцировать по параметру, если он сходится

$L(X,\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(X_i,\theta)$

$L(x,\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$ - плотность распределения вектора выборки

Вклад выборки (θ - скалярная величина)

$U(X,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(X,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(f(X_i,\theta))'_\theta}{f(X_i,\theta)}$ - сумма вкладов элементов выборки

$U_n(X,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n} U_1(X_i,\theta)$

$EU_1(X_1,\theta) = E\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1,\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{f'_\theta(X_1,\theta)}{f(X_1,\theta)} f(X_1,\theta)\lambda(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f'_\theta(X_1,\theta)\lambda(dx) = (\int\limits_{\mathbb{R}^1} f(X_1,\theta)\lambda(dx))'_\theta = (1)'_\theta = 0$

$i_n(\theta) = D_\theta U_n(X,\theta)$ - информационное количество Фишера

$i_n(\theta) = ni_1(\theta)$, так как X_i независимые

$i_1(\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} U_1^2(x,\theta)f(x,\theta)\lambda(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{(f_\theta^2(x,\theta))^2}{f(x,\theta)}\lambda(dx)$

Если плотность имеет 2-ые производные по параметру, то есть ещё формулы вычисления

$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x,\theta)\cdot f(x,\theta)\lambda(dx) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta)\cdot f(x,\theta)|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}^1} (\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta))^2 f(x,\theta)\lambda(dx) = -i_1(\theta)$ - пользуемся интегрированием по частям, плотность на $\pm\infty$ обращается в 0

$i_1(\theta) = -E\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X_1,\theta)$

Пример 1

$Bi(1,\theta)$ - модель испытаний Бернулли

$L(X_1,\theta) = \theta^{X_1}(1-\theta)^{1-X_1}$

$L(X,\theta) = \theta^{\sum X_i}(1-\theta)^{n-\sum X_i} = \theta^{n\overline{X}}(1-\theta)^{n(1-\overline{X})}$

$U(X,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(X,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}(n\overline{X}\ln\theta + n(1-\overline{X}\ln(1-\theta)) = n\overline{X}\frac{1}{\theta} - n(1-\overline{X}\frac{1}{1-\theta} = \frac{n\overline{X}}{\theta(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta}$

Проверка: $EU(X,\theta) = E(\frac{n\overline{X}}{\theta(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta}) = \frac{n\theta}{\theta(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta} = 0$

$i_n(\theta) = D(\frac{n\overline{X}}{\theta(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta}) = D\frac{n\overline{X}}{\theta(1-\theta)} = \frac{n^2}{\theta^2(1-\theta)^2}D\overline{X} = \frac{n^2}{\theta^2(1-\theta)^2}\frac{1}{n^2}nDX_1 = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$ $(DX_1 = \theta(1-\theta))$

Пример 2

Экспоненциальная модель

$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

$\ln f(x,\theta) = -\frac{x}{\theta} - \ln\theta$