Пример полной достаточной статистики (доказательство нестрогое)

1) $N(\theta, \sigma^2)$, $\overline{X}$ - достаточная статистика

$T = \widetilde{X} \sim N(\theta, \frac{\sigma^2}{n})$, $\psi(t)$ - некоторая функция и выполнено

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2/n}(t-\theta)^2))dt = 0 \ ? \Rightarrow \psi(t) = 0$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}} \exp(-\frac{t^2+\theta^2}{2\sigma^2/n}) \exp(\frac{t\theta}{\sigma^2/n})dt = 0$ - почти получили преобразование Лапласа, сделаем замену $t = -s$ и получим 2-хстороннее преобразование Лапласа, воспользуемся его свойством полноты

Преобразование $\equiv 0 \Rightarrow$ оригинал $(\psi(t)\exp(-\frac{t^2+\theta^2}{2\sigma^2/n})) \equiv 0 \Rightarrow \psi(t) \equiv 0$

2) $R((0,\theta))$, $X_{(n)}$ - достаточная статистика

$F_{(n)}(x) = \begin{cases} (\frac{x}{\theta})^n, & x < \theta \\ 0, & x > \theta \end{cases}$

$f_{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}, & x < \theta, \ x > 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) f_{(n)}(t)dt \equiv 0$

$\int\limits_{0}^{\theta} \psi(t) \frac{n}{\theta^n} t^{n-1}dt \equiv 0$

$\int\limits_{0}^{\theta} \psi(t) t^{n-1}dt \equiv 0 \ \forall\theta > 0 \Rightarrow \psi(\theta)\theta^{n-1} = 0 \ \forall\theta > 0 \Rightarrow \psi(t) = 0 \ \forall t > 0$

Построение оптимальной оценки функции от параметра по достаточной статистике

Всего алгоритма 2.

Первый алгоритм:

1) Доказываем полноту достаточной статистики/убеждаемся в полноте

2) Решаем уравнение несмещённости

Пример применения алгоритма:

$R((\theta_1, \theta_2))$, $\theta_1 < \theta_2$

$T = (T_1, T_2) = (X_{(1)}, X_{(2)})$

Берём $\psi(t_1, t_2) : E_\theta \psi(T_1, T_2) \equiv 0$. Надо вывести, что $\psi(t_1, t_2) = 0$ при $t_1 < t_2$

Совместная плотность $X_{(1)}, X_{(n)}$ имеет вид

$f(x, y) = \frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(y-x)^{n-2} \ a \leq x \leq y \leq b$

1) $E_\theta \psi(T_1, T_2) = \int\limits_{\theta_1}^{\theta^2} dt_1 \int\limits_{t_1}^{\theta^2} dt_2 \psi(t_1, t_2) \frac{n(n-1)}{(\theta_2-\theta_1)^n}(t_2-t_1)^{n-2} \equiv 0$

$\int\limits_{\theta_1}^{\theta^2} dt_1 \int\limits_{t_1}^{\theta^2} dt_2 \psi(t_1, t_2)(t_2-t_1)^{n-2} \equiv 0$ - дифференцируем по θ_1, минус отбрасываем

$\int\limits_{\theta_1}^{\theta^2} dt_2 \psi(\theta_1, t_2)(t_2-\theta_1)^{n-2} \equiv 0$ - дифференцируем по θ_2

$\psi(\theta_1, \theta_2)(\theta_2-\theta_1)^{n-2} \equiv 0$

$\psi(\theta_1, \theta_2) \equiv 0$ при $\theta_1 < \theta_2$

2) Пусть $\tau(\theta) = \theta_1\theta_2$, строим оптимальную оценку

Уравнение несмещённости

$T = H(X_{(1)}, X_{(2)})$, $E_\theta T = \tau(\theta)$

$\int\limits_{\theta_1}^{\theta^2} dt_1 \int\limits_{t_1}^{\theta^2} dt_2 H(t_1, t_2) \frac{n(n-1)}{(\theta_2-\theta_1)^n}(t_2-t_1)^{n-2} = \theta_1\theta_2$

$\int\limits_{\theta_1}^{\theta^2} dt_1 \int\limits_{t_1}^{\theta^2} dt_2 H(t_1,t_2)(t_2-t_1)^{n-2} = \frac{\theta_1\theta_2(\theta_2-\theta_1)^n}{n(n-1)}$ - снова дифференцируем, в этот раз минус не забываем

$-\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} dt_2 H(\theta_1,t_2)(t_2-\theta_1)^{n-2} = \frac{\theta_2(\theta_2-\theta_1)^n}{n(n-1)} - \frac{\theta_1\theta_2(\theta_2-\theta_1)^{n-1}}{n-1}$ - снова дифференцируем

$-H(\theta_1,\theta_2)(\theta_2-\theta_1)^{n-2} = \frac{(\theta_2-\theta_1)^n}{n(n-1)} + \frac{\theta_2(\theta_2-\theta_1)^{n-1}}{n-1} - \frac{\theta_1(\theta_2-\theta_1)^{n-1}}{n-1} - \theta_1\theta_2(\theta_2-\theta_1)^{n-2} = \frac{(\theta_2-\theta_1)^n}{n(n-1)} + \frac{(\theta_2-\theta_1)^n}{n-1} - \theta_1\theta_2(\theta_2-\theta_1)^{n-2} = (\theta_2-\theta_1)^n\frac{n+1}{n(n-1)} - \theta_1\theta_2(\theta_2-\theta_1)^{n-2}$

$-H(\theta_1,\theta_2) = (\theta_2-\theta_1)^2\frac{n+1}{n(n-1)} - \theta_1\theta_2$

$T_{\text{опт}} = H(X_{(1)},X_{(n)}) = X_{(n)}X_{(1)} - (X_{(n)}-X_{(1)})^2\frac{n+1}{n(n-1)}$

Второй алгоритм

1) Доказываем полноту достаточной статистики/убеждаемся в полноте

2) Берём произвольные функции H от достаточной статистики и вычисляем значения матожидания E

3) Пытаемся представить функцию параметра $\tau(\theta)$ как линейную комбинацию функций из шага 2

Получившаяся линейная комбинация и будет оптимальной оценкой

Пример применения алгоритма:

$R((0,\theta)),\ \theta>0,\ T = X_{(n)}$

1) Статистика полная (доказательство аналогичное)

2) Берём функции T^k

$E_\theta T^k = \int\limits_0^\theta t^k f(t)dt = \int\limits_0^\theta t^k n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}dt = \frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+k}}{n+k} = \frac{n}{n+k}\theta^k$

3) Пусть $\tau(\theta) = \theta - \theta^3$

$T_{\text{опт}} = \frac{n+1}{n}X_{(n)} - \frac{n+3}{n}X_{(n)}^3$

Пусть $\tau(\theta) = e^\theta$

$e^\theta = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}$

$T_{\text{опт}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{n+k}{n}X_{(n)}^k\cdot\frac{1}{k!}$ - этот ряд сходится, так как есть мажоритарный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{n+k}{n}\theta^k\cdot\frac{1}{k!},\ X_{(n)}\le\theta$, который сходится

Проверим, что $E_\theta T_{\text{опт}} = \tau(\theta)$

Используем теорему Лебега и меняем E и $\sum$ местами

$E_\theta T_{\text{опт}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}E_\theta\frac{n+k}{n}X_{(n)}^k\cdot\frac{1}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!} = e^\theta$

Третий пример построения оптимальной оценки

$N(\theta_1,\theta_2),\ \tau(\theta) = \theta_2^2,\ T = (\overline{X}, S^2)$ - достаточная статистика

$E_\theta S^2 = \frac{n-1}{n}\theta_2^2,\ T_{\text{опт}} = \frac{n}{n-1}S^2$

Осталось только доказать полноту

Нужно узнать совместное распределение $\overline{X}$ и S^2, они независимы, значит совместная плотность = произведение обычных плотностей распределения

$\overline{X}$ имеет нормальное распределение $N(\theta_1, \frac{\theta_2^2}{n})$

$\frac{S^2}{\theta_2^2}$ имеет распределение χ^2_{n-1} с функцией распределения $F(y)$

$\mathbb{P}(\frac{S^2}{\theta_2^2} < y) = F(y) \Rightarrow \mathbb{P}(S^2 < z) = F(\frac{z}{\theta_2^2})$

Пусть $f_{n-1}(z)$ - плотность $\chi^2_{n-1} \Rightarrow$ плотность S^2 равна $f_{n-1}(\frac{z}{\theta_2^2})\cdot\frac{1}{\theta_2^2}$

Доказательство полноты в следующей лекции